

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

В. В. Кузнецов К. А. Ананьев

ГИДРОМЕХАНИКА И ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ (Теоретический курс с примерами практических расчетов)

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки (специальностям) «Горное дело» и «Физические процессы горного или нефтегазового производства»

Кемерово 2013

УДК 622.223:621.22(075.8)

Рецензенты:

Доктор технических наук, заведующий лабораторией угольной геотехники
В. В. Аксенов (ИУ СО РАН)

Кандидат технических наук, доцент кафедры горно-шахтного оборудования
М. Ю. Блащук (ЮТИ ТПУ)

Кузнецов, В. В. Гидромеханика и основы гидравлики (Теоретический курс с примерами практических расчетов) : учеб. пособие / В. В. Кузнецов, К. А. Ананьев ; Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2013. – 266 с.

ISBN 978-5-89070-905-9

Изложен теоретический материал по гидромеханике и основам гидравлики, включающий разделы: физические основы статики, кинематики, динамики текучих сред, а также режимы движения жидкости. Отображены вопросы истечения жидкости через отверстия и насадки, теория лопастных насосов и трубопроводные системы различных конфигураций, представлены примеры практических расчетов, позволяющие студентам закрепить полученные знания.

Подготовлено по дисциплинам «Гидромеханика» и «Гидравлика» в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов специальностей 130400.65 «Горное дело» и 131201.65 «Физические процессы горного или нефтегазового производства».

УДК 622.223:621.22(075.8)

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2013

ISBN 978-5-89070-905-9

© Кузнецов В. В., Ананьев К. А., 2013

Предисловие

Раздел механики, в котором изучают равновесие и движение жидкости, а также силовое взаимодействие между жидкостью и обтекаемыми ею телами или ограничивающими ее поверхностями, называется *гидромеханикой*. Если же помимо жидкостей изучают движение газов и обтекание ими тел, то науку называют *аэрогидродинамикой*.

Термину "*жидкость*" в гидромеханике часто придают более широкий смысл, чем это принято в обыденной жизни. В понятие "*жидкость*" включают все тела, обладающие свойством текучести, т. е. способностью сильно изменять свою форму под действием бесконечно малых сил. Поэтому в это понятие включают как жидкости обычные, называемые *капельными*, так и *газы*. Важной особенностью капельных жидкостей является то, что они ничтожно мало изменяют свой объем при изменении давления, поэтому их обычно считают несжимаемыми. Газы, наоборот, могут значительно уменьшаться в объеме под действием давления и неограниченно расширяться при отсутствии давления. Несмотря на это различие, законы движения капельных жидкостей и газов при определенных условиях можно считать одинаковыми. Основным из этих условий является малая скорость течения газа по сравнению со скоростью распространения в нем звука.

Историческое развитие механики жидкостей шло двумя разными путями.

Первый путь – теоретический, путь точного математического анализа, основанного на законах механики. Он привел к созданию теоретической *гидромеханики*, которая долгое время являлась самостоятельной дисциплиной, непосредственно не связанной с экспериментом. Метод теоретической гидромеханики является весьма эффективным средством научного исследования. Однако на пути чисто теоретического исследования движения жидкости встречается множество трудностей, и методы теоретической гидромеханики не всегда дают ответы на вопросы, выдвигаемые практикой.

Второй путь – путь широкого привлечения эксперимента и накопления опытных данных для использования их в инженерной практике – привел к созданию *гидравлики*. Она возникла из насущных задач практической деятельности людей. В начальный период своего

развития гидравлика была наукой чисто эмпирической. В настоящее время в ней, где это возможно и целесообразно, все больше применяют методы теоретической гидромеханики для решения отдельных задач, а теоретическая гидромеханика все чаще начинает прибегать к эксперименту. Таким образом, различия в методах этих двух направлений одной и той же науки постепенно исчезают. Поэтому в последнее время все большее употребление получает наименование *техническая (прикладная) гидромеханика*. Она находит применение в большинстве отраслей техники и для многих из них является теоретической базой.

Привлечение для гидравлических исследований теории подобия гидромеханических процессов с применением определенных методик моделирования и современной вычислительной техники позволяет получить достаточно достоверные данные о параметрах, которыми будет характеризоваться реальный гидравлический объект. Экспериментальные исследования позволяют в необходимых случаях уточнять результаты, полученные в аналитических расчетах, при принятии тех или иных допущений.

Цель данного учебного пособия – раскрыть суть общих законов покоя и движения жидкостей и газов, показать некоторые общие методы описания гидромеханических явлений, а также дать практические навыки гидравлических расчетов.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с новой редакцией Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для студентов специальностей «Горное дело» и «Физические процессы горного или нефтегазового производства». Содержит как теоретические сведения в области гидравлики и гидромеханики, так и примеры их практического применения. Данное пособие является базовым для студентов горного профиля при изучении дисциплин «Гидромеханика» и «Гидравлика».

1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. Отличительные особенности различных состояний вещества

Материальные тела могут находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии. Каждое из этих состояний характеризуется специфическими свойствами, которые определяются особенностями атомно-молекулярной структуры тел, непосредственно связанной с силами взаимодействия между частицами (в частности, молекулами). Такими *силами* являются *силы притяжения и отталкивания*, зависящие от расстояния между молекулами. При некотором расстоянии $l = l_0$ сила взаимодействия равна нулю, но появляется сила притяжения, если $l > l_0$, и сила отталкивания, если $l < l_0$.

В твердых кристаллических телах молекулы располагаются на расстоянии порядка l_0 друг от друга и образуют кристаллическую решетку. Молекулярные движения, которыми обусловлена тепловая энергия твердого тела, представляют собой неупорядоченные колебания молекул около устойчивых центров. Благодаря этому твердые тела сохраняют объем и форму.

В газах при нормальных условиях молекулярные расстояния велики, а силы притяжения малы. Каждая молекула, практически не испытывает действия других молекул. Модель газа, в котором полностью игнорируются силы притяжения между молекулами, называется *идеальным газом*. У такого газа молекулы движутся равномерно и прямолинейно до столкновения друг с другом. Под столкновением понимают резкое изменение направления движения молекул под действием сил отталкивания. Благодаря свободному беспорядочному движению молекул газ может неограниченно расширяться во все стороны и принимать форму сосуда, в котором он заключен.

Жидкости по молекулярному строению занимают промежуточное положение между кристаллическими твердыми телами и газами. Сведения о молекулярном строении жидкостей менее полны, чем о строении твердых тел и газов. Считают, что молекулы жидкостей расположены также плотно, как и молекулы твердых тел. Об этом свидетельствует равенство плотностей твердых тел и их расплавов. Жидкости, как и твердые тела, устойчиво сохраняют занимаемый ими объем.

Характер теплового движения молекул в жидкостях более сложный. Согласно упрощенной модели тепловые движения молекул жидкости представляют как нерегулярные их колебания относительно некоторых временных центров.

Кинетическая энергия колебаний отдельных молекул в какие-то моменты может оказаться достаточной для преодоления межмолекулярных связей. Тогда эти молекулы получают возможность скачком перейти в окружение других молекул, поменяв центр колебаний. Таким образом, каждая молекула некоторое время t_0 , называемое *временем "оседлой жизни"*, оказывается в упорядоченном строю с несколькими ближайшими молекулами. Совершив перескок, молекула жидкости оказывается среди новых молекул, выстроенных уже другим образом. Скачки молекул совершаются хаотически. Новое место никак не predetermined прежним положением. Непрерывно и в большом количестве совершающиеся скачкообразные переходы молекул с места на место обеспечивают их диффузию и тем самым текучесть жидкостей.

Понятие текучесть можно пояснить на следующем примере.

Представим себе, что произвольно взятый объем вещества в твердом агрегатном состоянии находится в сосуде в состоянии покоя (рис. 1.1) [20].

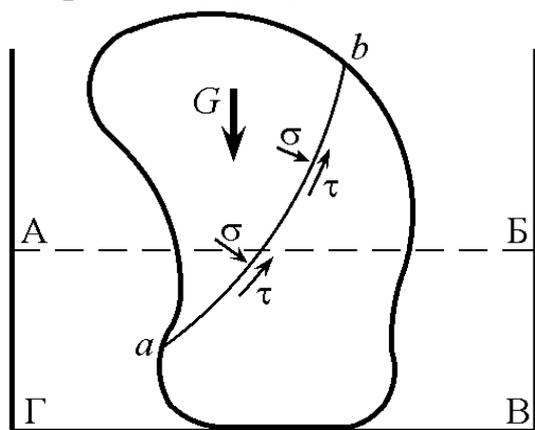


Рис. 1.1. Схема к понятию текучести вещества

Разделим данный объем произвольным сечением $a-b$.

Верхняя часть объема под действием хотя бы силы тяжести будет стремиться сдвинуться относительно нижней части на свободное место вокруг данного объема. Однако возникающие по сечению $a-b$ нормальные напряжения σ (напряжения сжатия) и касательные напряжения τ (напряжения трения) препятствуют этому, и рассматриваемый объем остается в покое.

Представим теперь, что состояние данного объема вещества стало изменяться в направлении уменьшения касательных напряжений. В какой-то момент касательные напряжения станут столь малы, что начнется смещение (течение) отдельных частей объема вещества относительно друг друга. Вещество растечется по сосуду, приняв его

форму (объем А–Б–В–Г). Такой ситуации соответствует жидкое и газообразное состояние вещества.

Тогда можно сделать следующий вывод: ***в отличие от твердого состояния вещества жидкость в состоянии покоя не может иметь касательные напряжения.***

Если на границе жидкости приложена сдвигающая сила, то, как и в газах, появляется преимущественная направленность скачкообразных переходов молекул и возникает течение жидкости в направлении действия силы. Для большинства жидкостей сила при этом может быть бесконечно малой. Однако существуют жидкости с настолько упорядоченной структурой, что требуется некоторое усилие для осуществления сдвига. Такие жидкости называют ***пластичными***. Если время действия сдвигающей силы мало по сравнению со временем оседлой жизни молекулы t_0 , то непрерывного перемещения молекул вообще не возникает, и жидкость, как твердое тело, оказывает упругое сопротивление сдвигу. Если время действия сдвигающей силы больше t_0 , то возникает течение и проявляется сопротивление сдвигу.

При всех различиях в молекулярной структуре твердых тел, жидкостей и газов между ними не всегда можно провести четкую границу. Многие тела, которые мы привыкли считать твердыми, при определенных условиях ведут себя как жидкости, а некоторые жидкости проявляют свойства твердых тел. Так, например, асфальт при мгновенном (резком) приложении силы ведет себя как твердое тело, а при длительном воздействии той же силы течет. Существуют материалы, которые ведут себя как упругие твердые тела, если они длительно находятся в состоянии покоя, и проявляют свойства жидкостей при интенсивном перемешивании. В концентрированных полимерных растворах могут одновременно проявляться свойства твердых тел и жидкостей.

В гидромеханике рассматриваются макроскопические движения жидкостей и газов, а также силовое взаимодействие этих сред с твердыми телами. При этом, как правило, размеры рассматриваемых объемов жидкостей, газов и твердых тел оказываются несопоставимо большими по сравнению с размерами молекул и межмолекулярными расстояниями. Межмолекулярные расстояния в жидкостях составляют всего 10^{-8} – 10^{-9} мм и изменяются обратно пропорционально давлению, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении 10^{-6} мм. Указанные обстоятельства позволяют ввести ***гипотезу***

сплошности изучаемой среды и заменить реальные дискретные объекты упрощенными моделями, представляющими собой **материальный континуум**, т. е. материальную среду, масса которой непрерывно распределена по объему. Такая идеализация упрощает реальную дискретную систему.

Для жидкости и газа (кроме сильно разреженного газа) правомерность использования гипотезы сплошной среды в широком диапазоне изменения параметров полностью подтверждается. Исходя из этого, в механике жидкостей и газов широко используется понятие "*жидкой частицы*" (в дальнейшем просто частицы). Этим термином обозначают некоторый объем сплошной среды, который, будучи даже бесконечно малым, считают состоящим из большого числа молекул. При этом частица в процессе движения подвержена деформации.

1.2. Силы, действующие на жидкость. Давление в жидкости

Вследствие текучести (подвижности частиц) в жидкости действуют не сосредоточенные силы, а непрерывно распределенные по ее объему (массе) или поверхности. Таким образом, их можно разделить на две группы.

1. Массовые (объемные) силы. К ним относятся: сила тяжести, силы инерции (кориолисова сила инерции, переносная сила инерции), электромагнитные силы, а также гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона.

Массовые силы характеризуются плотностью распределения R . Если ΔW – элементарный объем, содержащий точку A , и ΔR – массовая сила, действующая на массу ΔM жидкости в этом объеме, то в данной точке A плотность распределения массовой силы

$$R_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta M} \quad (1.1)$$

при стягивании объема ΔW к точке A .

Ее составляющие по осям координат будут соответственно R_x , R_y , R_z . Плотность массовых сил имеет размерность ускорения.

2. Поверхностные силы. Это силы, действующие на каждый элемент ΔS поверхностей, ограничивающих жидкость, и на каждый элемент поверхностей, проведенных произвольно внутри жидкости.

В общем случае поверхностная сила ΔR , действующая на площадке ΔS , направлена под некоторым углом к ней, и ее можно разложить на нормальную ΔP и тангенциальную ΔT составляющие

(рис. 1.2). Первая называется *силой давления*, а вторая – *силой трения*. Так же как массовые силы, эти силы не сосредоточенные, а распределенные и характеризуются плотностью распределения.

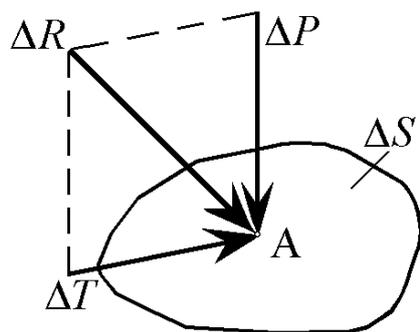


Рис. 1.2. Схема действия поверхностной силы

Плотность распределения нормальных сил ΔP

$$p_A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} \quad (1.2)$$

называется *нормальным напряжением в точке А*.

Плотность распределения касательных сил ΔT

$$\tau_A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} \quad (1.3)$$

называется *касательным напряжением (напряжением трения) в точке А*.

Нормальное напряжение называется *гидромеханическим* (в случае покоя – *гидростатическим*) *давлением* или просто *давлением*. Если давление отсчитывается от абсолютного нуля, то его называют *абсолютным*, а если отсчитывают от атмосферного давления $p_{ат}$, т. е. условного нуля, то его называют *избыточным* ($p_{изб}$) или *манометрическим*.

Плотность распределения нормальной и касательной сил имеет размерность $[L^{-1}MT^{-2}]^*$. За единицу давления в Международной системе единиц (СИ) принят *паскаль* (Па) – давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м². Наряду с этой единицей давления применяют укрупненные единицы: килопаскаль (кПа) и мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ кПа} = 10^{-6} \text{ МПа}.$$

В технике в настоящее время продолжают применять также систему единиц МКГСС, в которой за единицу давления принимается 1 кгс/см². Используются также внесистемные единицы – техническая атмосфера (ат) и бар:

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10000 \text{ кгс/м}^2 = 98100 \text{ Па};$$

$$1 \text{ бар} = 1,02 \text{ ат} = 10^5 \text{ Па}.$$

Касательные напряжения имеют ту же размерность, что и давление.

* – здесь и далее используются следующие обозначения размерностей: L – линейная размерность, T – размерность времени, M – размерность массы.

Массовые и поверхностные силы могут быть внешними и внутренними. Внешние силы действуют на рассматриваемую массу и поверхность жидкости извне и приложены, соответственно, к каждой частице жидкости, составляющей массу, и к каждому элементу поверхности, ограничивающей жидкость. Внутренние силы – это силы взаимодействия частиц жидкости и их сумма в данном объеме жидкости всегда равна нулю [14].

1.3. Основные свойства жидкостей и газов

Согласно гипотезе сплошности, масса среды распределена в объеме хотя и непрерывно, но, в общем, неравномерно. Основной динамической характеристикой среды является плотность распределения массы по объему или просто *плотность среды* ρ , которая в произвольной точке A определяется соотношением

$$\rho_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad (1.4)$$

где ΔM – масса, заключенная в малом объеме ΔW , включающем точку A .

Предел берется при стягивании объема ΔW к этой точке.

Размерность плотности $[ML^{-3}]$. В СИ единицей измерения плотности является $кг/м^3$, а в системе единиц МКГСС – $кгс \cdot с^2/м^4$.

Для однородной жидкости

$$\rho = \frac{M}{W}, \quad (1.5)$$

где M – масса жидкости в объеме W .

Удельным весом γ ($Н/м^3$) называется вес единицы объема жидкости

$$\gamma = \frac{G}{W}, \quad (1.6)$$

где $G = Mg$ – вес жидкости в объеме W .

Очевидно, что $\gamma = \rho g$ (1.7)

Наряду с плотностью пользуются понятием *удельного объема* W_y , который представляет собой объем, содержащий единицу массы

$$W_y = \frac{1}{\rho}. \quad (1.8)$$

Плотность среды может изменяться от точки к точке и в данной точке со временем, т. е. $\rho = f(x, y, z, t)$. Однако эта функциональная связь не является непосредственной, т. к. плотность жидкостей и га-

зов определяется фактическими значениями термодинамических параметров состояния: давления p и температуры T .

Связь между плотностью, давлением и температурой устанавливается уравнением состояния, которое для реальных жидкостей выводится в кинетической теории. Из-за сложности общего уравнения состояния и трудности определения входящих в него констант используются приближенные уравнения. Широкое применение получило, например, уравнение Ван-дер-Ваальса

$$(p + a/W^2)(W - b) = RT, \quad (1.9)$$

где a, b, R – константы для данной среды.

Это уравнение выведено в кинетической теории газов с использованием опытных данных.

Кратко рассмотрим основные физические свойства жидкостей и газов.

1. Сжимаемость – свойство жидкостей и газов изменять объем при изменении давления. Характеризуется **изотермическим коэффициентом объемного сжатия**, который представляет собой относительное изменение объема, приходящееся на единицу давления при $T = \text{const}$, т. е.

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial W}{\partial p} \right), \text{ Па}^{-1}. \quad (1.10)$$

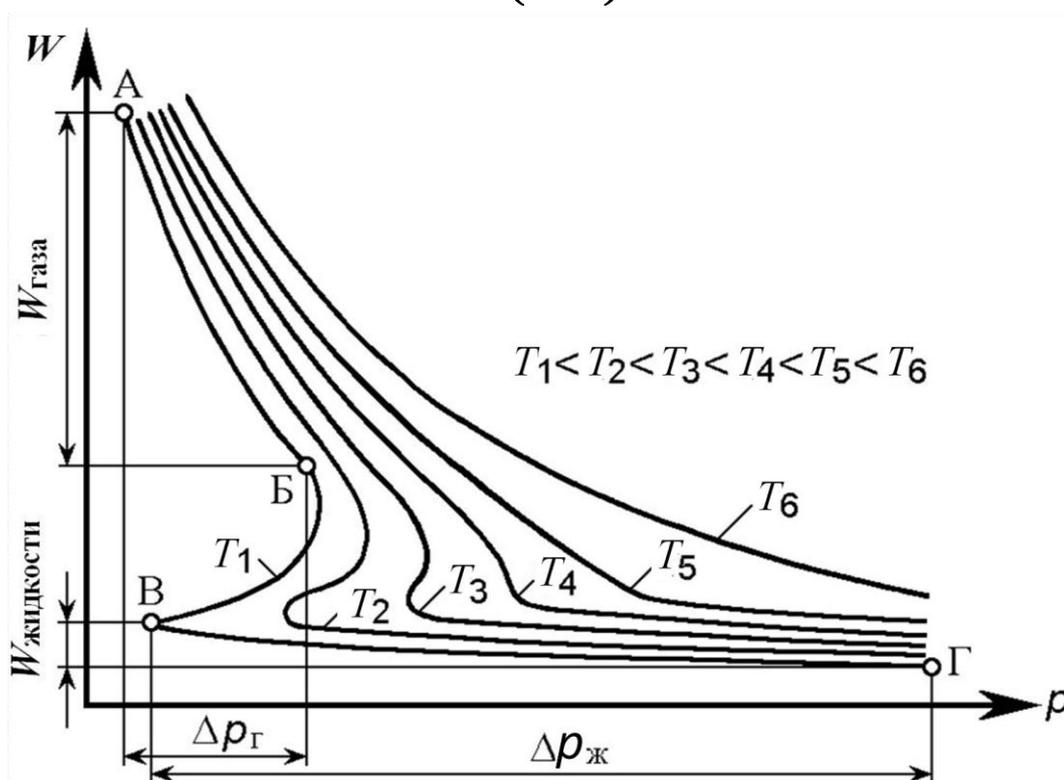


Рис. 1.3. Изотермы Ван-дер-Ваальса

Знак минус в формуле (1.10) обусловлен тем, что положительному приращению (возрастанию) давления соответствует отрицательное приращение (уменьшение) объема. На рис. 1.3 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса, выражающие зависимости удельного объема от давления при различных постоянных температурах.

Газообразному состоянию среды соответствует участок А–Б, а жидкому – участок В–Г. Как показывают кривые А–Б и В–Г, с увеличением давления объем жидкостей и газов уменьшается.

Разный наклон и кривизна этих участков свидетельствуют о разной степени сжимаемости рассматриваемых сред.

Для жидкостей (участок В–Г изотермы) производная $\partial W/\partial p$ мало отличается от нуля, что свидетельствует об их малой сжимаемости. Обычно $\beta_p = 10^{-9} - 10^{-10}$ Па, что позволяет в целом ряде задач считать жидкость практически несжимаемой.

Величина, обратная коэффициенту β_p , представляет собой *объемный модуль упругости* $E_{ж}$

$$E_{ж} = \frac{1}{\beta_p} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (1.11)$$

Это выражение представляет собой закон Гука для жидкостей.

В практике эксплуатации гидравлических систем имеются случаи, когда вследствие действия того или иного возмущения (например, резкого закрытия или открытия запорного устройства в трубопроводе) в жидкости значительно изменяется давление. В таких случаях пренебрежение сжимаемостью приводит к существенным погрешностям. Поскольку в безграничной однородной жидкости или в объеме, ограниченном абсолютно жесткими стенками, скорость распространения звука

$$C = \sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}, \quad (1.12)$$

тогда, согласно с выражением (1.11), имеем

$$\partial \rho = \frac{\partial p}{C^2}. \quad (1.13)$$

Если допустить, что жидкость несжимаема ($\partial \rho = 0$), то $C = \infty$. При достаточно быстром изменении давления (гидроудар) использование $C = \infty$ приводит к ошибкам.

Для идеальных газов (участок А–Б на рис. 1.3) соотношение между p и W приближенно описывается уравнением Клайперона

$$(1.14) \quad pW = RT,$$

откуда получаем ($T = \text{const}$) $\frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial p} = -\frac{1}{p}$.

$$\text{Следовательно} \quad \beta_p = \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad E_{\text{газ}} = p. \quad (1.15)$$

Эти формулы свидетельствуют о высокой сжимаемости газа.

Объем жидкостей и газов изменяется при изменении не только давления, но и температуры. Как правило, жидкости и газы расширяются с повышением температуры, т. е. плотность их при этом уменьшается. Исключение составляет вода, плотность которой возрастает при повышении температуры от 0 до 4 °С. Такая аномалия объясняется особенностями молекулярного строения воды.

Количественно изменение объема при изменении температуры и постоянном давлении оценивается *изобарическим коэффициентом объемного теплового расширения*

$$\alpha = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial T}. \quad (1.16)$$

У жидкостей этот коэффициент зависит от температуры и давления, возрастая с повышением первой и уменьшаясь с увеличением второго. Для газов из уравнения (1.14) при $p = \text{const}$ получаем

$$\alpha = \frac{1}{T}. \quad (1.17)$$

2. Сопротивление растяжению внутри капельных жидкостей по молекулярной теории может быть весьма значительным. При опытах с тщательно очищенной и дегазированной водой в ней были получены кратковременные напряжения растяжения до 23–28 МПа. Однако, технически чистые жидкости, содержащие взвешенные твердые частицы и мельчайшие пузырьки газов, не выдерживают даже незначительных напряжений растяжения. Поэтому пренебрежение в дальнейшем напряжениями растяжения в капельной жидкости не вызывает каких-либо недоразумений.

3. Силы поверхностного натяжения действуют на поверхности раздела жидкости и газа. Они стремятся придать объему жидкости сферическую форму и вызывают некоторое дополнительное давление. Однако это давление заметно сказывается лишь при малых объемах жидкости и для сферических объемов (капель) определяется

формулой $p = \frac{2\sigma}{r}$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости; r – радиус сферы.

Для ряда жидкостей, граничащих с воздухом при температуре 20 °С, коэффициент поверхностного натяжения имеет значения: для воды – $7,3 \cdot 10^{-2}$, керосина – $2,7 \cdot 10^{-2}$, ртути – $46 \cdot 10^{-2}$ Н/м. С ростом температуры поверхностное натяжение уменьшается.

В трубках малого диаметра дополнительное давление, обусловленное поверхностным натяжением, вызывает подъем (или опускание) жидкости относительно нормального уровня, характеризующий капиллярность жидкости.

Высоту подъема смачивающей жидкости (или опускание несмачивающей жидкости) h в стеклянной трубке диаметром d определяют по формуле

$$h = \frac{4\sigma}{\gamma d} = \frac{k}{d}.$$

Для воды $k = +30$ мм², ртути $k = -10,1$ мм², спирта $k = +11,5$ мм².

Большое значение приобретают силы поверхностного натяжения в жидкости, находящейся в невесомости, и должны учитываться в трубчатых измерительных приборах.

4. Вязкость – это свойство жидкости (газа) оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев. Это свойство проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые силами внутреннего трения, или **силами вязкости**.

Механизм возникновения силы вязкости можно представить из опыта (рис. 1.4).

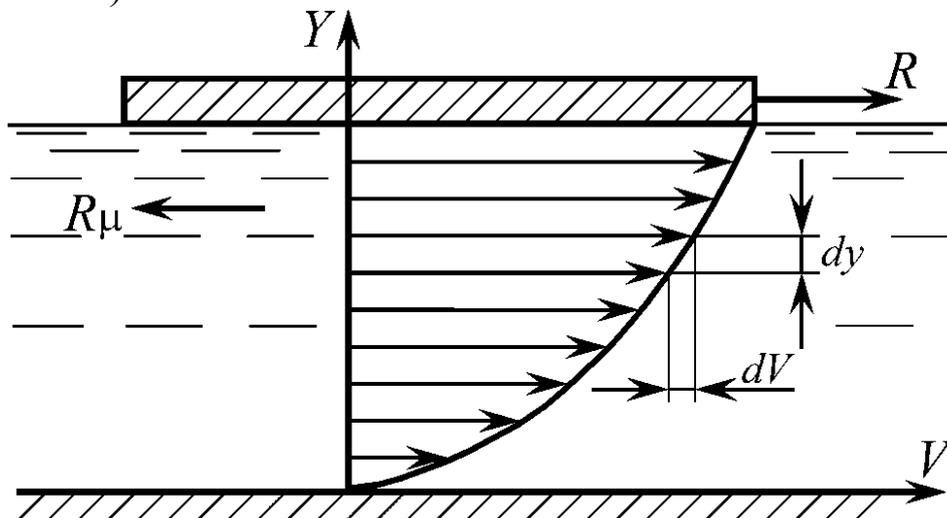


Рис. 1.4. Схема для определения силы вязкости

На свободной поверхности неподвижного объема жидкости находится легкая пластинка площадью S . Для ее смещения потребуется приложить силу R .

Это значит, что жидкость оказывает сопротивление, т. е. возникает сила вязкости $R_{\mu} = -R$. Она обусловлена тем, что слой жидкости, прилегающий к пластине, прилипает к ней и движется вместе с пластиной с ее скоростью.

Вследствие наличия молекулярного взаимодействия этот слой увлекает за собой следующий слой и т. д. Вместе с тем, нижний слой жидкости, непосредственно примыкающий к неподвижному дну, будет иметь нулевую скорость.

Таким образом, в жидкости возникает слоистое движение с некоторым распределением скоростей по высоте $V = f(y)$.

Между слоями происходит проскальзывание, сопровождающееся возникновением касательных напряжений.

Согласно гипотезе, высказанной впервые Ньютоном в 1686 г., а затем экспериментально обоснованной проф. Н. П. Петровым в 1883 г., касательные напряжения в жидкости зависят от ее рода и характера течения и при слоистом течении изменяются прямо пропорционально поперечному градиенту скорости

$$\tau = \pm \mu \frac{dV}{dy}, \quad (1.18)$$

где μ – коэффициент пропорциональности, получивший название *динамического коэффициента вязкости*; dV – приращение скорости при приращении координаты dy (см. рис. 1.4).

Закон Ньютона применим только к слоистым потокам. Знак плюс или минус выбирается так, чтобы значение τ было положительным независимо от выбора положительного направления y .

Из формулы (1.18) следует, что касательные напряжения возможны только в движущейся жидкости, т. е. вязкость жидкости проявляется лишь при ее течении. Жидкости, для которых справедлив закон внутреннего трения Ньютона (1.18), называются *ньютоновскими*. Существуют жидкости (коллоидные суспензии, растворы полимеров, гидросмеси из глины, мела, цемента, сапропелей, илов, бетонные гидросмеси, кормовые смеси и т. п.), для которых связь между касательным напряжением τ и скоростью сдвиговой деформации

dV/dy выражается другими соотношениями. Такие жидкости называются *неньютоновскими*. Например, если соотношение имеет вид

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{dV}{dy}, \quad (1.19)$$

жидкости называются *вязкопластичными*, и их движение начинается лишь после того, как внешней силой будет преодолено начальное напряжение сдвига τ_0 , т. е. тут имеем касательные напряжения и в состоянии покоя. Для других неньютоновских жидкостей динамическая вязкость может зависеть от градиента скорости, времени и т. д.

При постоянстве касательных напряжений по поверхности S полная касательная сила (сила вязкости) по этой поверхности составит

$$R_\mu = \pm \mu S \frac{dV}{dy}. \quad (1.20)$$

Динамический коэффициент вязкости μ , являющийся основной конечной характеристикой вязкости жидкостей и газов, из уравнения (1.20) имеет размерность

$$\mu = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}/\text{с}} \right]. \quad (1.21)$$

Преобразовав размерность в вид $[(\text{Н} \cdot \text{с})/\text{м}^2]$ или $[\text{Па} \cdot \text{с}]$, получаем размерность μ в СИ.

Наряду с этой единицей используются размерности

$$\left[\text{П} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} \right]^* \quad \text{и} \quad \left[\frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right].$$

Имея размерность, коэффициент динамической вязкости имеет и физический смысл, который легко виден из (1.21)

$$\mu = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3/\text{с}} \right] \frac{\leftarrow \text{ работа}}{\leftarrow \text{ объемный расход}}.$$

Таким образом, динамический коэффициент вязкости есть работа, которую необходимо совершить на относительное сдвигание слоев жидкости для единицы объемного расхода жидкости через рассматриваемое сечение потока жидкости.

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости используется *кинематический коэффициент вязкости*, определяемый соотношением

* [П] – пуазейль. Дано в честь французского ученого Жана Луи Мари Пуазейля.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.22)$$

Размерность коэффициента кинематической вязкости

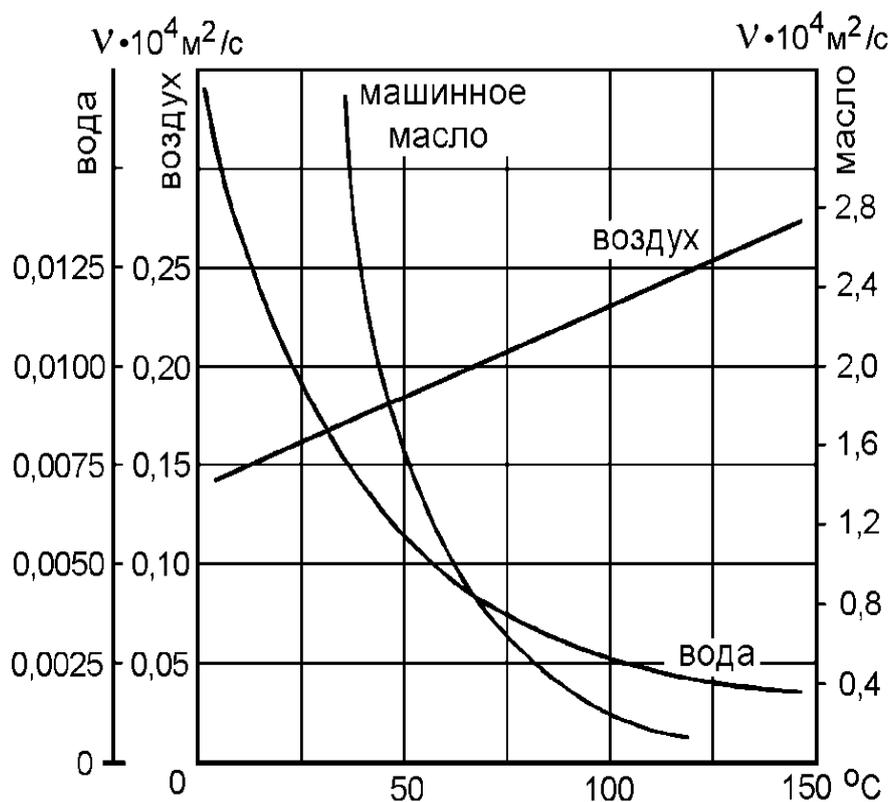
$$\nu = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}/\text{с}} \right]. \quad (1.23)$$

В СИ имеем размерность $[\text{м}^2/\text{с}]$, а в технической системе $[\text{см}^2/\text{с} = \text{Ст}]^*$.

Из формулы (1.23) физический смысл кинематического коэффициента вязкости представляется как работа, которую необходимо совершить на относительное сдвигение слоев жидкости для единицы массового расхода жидкости через рассматриваемое сечение потока жидкости.

Вязкость капельных жидкостей зависит от температуры и уменьшается с увеличением последней (рис. 1.5). Вязкость газов, наоборот, с увеличением температуры возрастает.

Объясняется это различием природы вязкости в жидкостях и газах. В жидкости молекулы расположены гораздо ближе друг к другу, чем в газах, и вязкость вызывается силами молекулярного сцепления. Эти силы с увеличением температуры уменьшаются, поэтому вязкость падает.



* [Ст] — стокс. Размерность дана по имени английского ученого Джоржа Габриэля Стокса.

Рис. 1.5. Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды, воздуха и машинного масла от температуры

5. Испаряемость – свойство жидкости переходить в пар. Обратный переход пара в жидкость называется конденсацией. Если жидкость достаточно длительное время находится в закрытом сосуде, то наступает равновесие, когда число молекул, перешедших из жидкости в пар, равно числу молекул, совершивших обратный переход. В этом случае пар называется насыщенным, и в нем устанавливается вполне определенное для данной температуры давление. Такое давление называется **упругостью насыщенного пара**.

Образование насыщенных паров приводит к тому, что на свободной поверхности жидкости не может быть достигнуто давление ниже упругости насыщенного пара, соответствующей данной температуре.

Испарение жидкости может происходить не только со свободной поверхности, а и внутри пузырей, образующихся в ней при определенной температуре и давлении. Такой фазовый переход называется **кипением**.

Он может наступить в покоящейся или движущейся жидкости при давлении, равном упругости насыщенного пара при данной температуре, или при температуре, равной температуре кипения при данном давлении.

Установлено, что кипение возникает только в том случае, когда в жидкости имеются пузырьки заземленного у стенок газа или если такие пузырьки образуются вследствие выделения газа, растворенного в жидкости. Если температура жидкости повышается или давление в ней падает, то пузырьки растут в объеме и прорываются наружу через свободную поверхность. Наблюдается процесс кипения.

Дегазированные жидкости не кипят при температуре, значительно превышающей температуру кипения, и при давлении ниже упругости насыщенного пара.

Кипение жидкости приводит к нарушению сплошности среды.

В гидромеханике особенно важен случай кипения, который возникает в движущейся жидкости вследствие местных понижений давления до упругости насыщенного пара ($p_{\text{пар}}$). Такой вид кипения называется **кавитацией** (от латинского *cavitas* – пустота). Снижение давления в потоке жидкости происходит из-за возникновения на отдельных его участках больших местных скоростей. Примером такой ситуации может служить схема, изображенная на рис. 1.6.

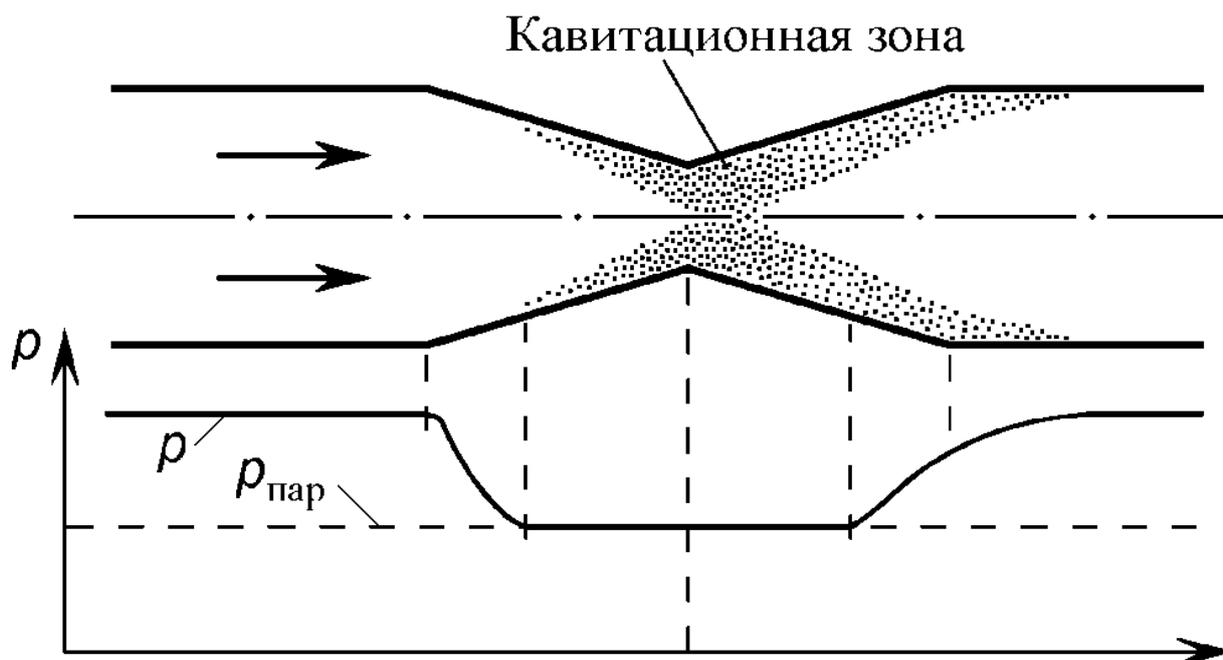


Рис. 1.6. Кавитационная зона в трубе с местным сужением

В узком месте трубы диаметр уменьшился например в 3 раза, тогда скорость потока возросла в 9 раз, что привело к снижению давления и при $p = p_{\text{пар}}$ образуется кавитационная зона, состоящая из парогазовых пузырьков. Пузырьки перемещаются потоком жидкости в направлении его движения. Там, где давление продолжает снижаться, пузырьки растут в объеме и сливаются (соединяются) в большие пузыри-каверны. Таким образом, нарушается сплошность потока и его физические характеристики (плотность, сжимаемость и др.).

В расширяющейся части трубы давление снова возрастает, и парогазовые пузырьки начинают схлапываться до полной конденсации пара в жидкость. Процесс схлапывания сопровождается местными повышениями давления (своего рода гидроудар).

Если это происходит вблизи стенок, то возникает усталостное разрушение материала этих стенок (так называемая эрозия).

Явление кавитации особенно опасно проявляется на лопастях винтов морских судов, крыльчатках вентиляторов и в центробежных насосах.

1.4. Контрольные вопросы

1. Каковы отличия жидкостей от твердых тел и газов? Как эти отличия связаны с молекулярным строением?
2. В чем заключается гипотеза сплошности жидкости?

3. Что такое плотность жидкости, от чего она зависит и какими единицами измеряется?
4. Какие силы относятся к массовым и поверхностным?
5. Какие виды напряжений действуют в жидкости?
6. Что характерно для сжимаемости жидкостей, как связаны модуль упругости и коэффициент объемного сжатия жидкости?
7. Что такое вязкость жидкости?
8. Запишите согласно закону внутреннего трения, открытому Ньютоном, выражение для касательного напряжения.
9. Какова связь динамического и кинематического коэффициентов вязкости, каковы их единицы измерения? Почему указанные величины имеют именно такие названия?
10. Может ли в покоящейся жидкости проявляться касательное напряжение? Каково основное различие так называемых ньютоновской и неньютоновской жидкостей?
11. Чем отличаются вязкостные свойства жидкостей и газов?
12. Что такое кавитация? Когда это явление может возникнуть?

2. ГИДРОСТАТИКА

2.1. Гидростатическое давление и его свойство

В подразделе 1.2 было показано, что на конечный объем жидкости действуют поверхностные силы и в общем случае их равнодействующая ΔR не перпендикулярна к площадке ΔS , на которую она действует.

Покажем, что в случае покоя жидкости все поверхностные силы нормальны к поверхности жидкости, на которую они действуют. Пусть имеем некоторый объем жидкости массой M , находящийся в состоянии покоя (рис. 2.1, а).

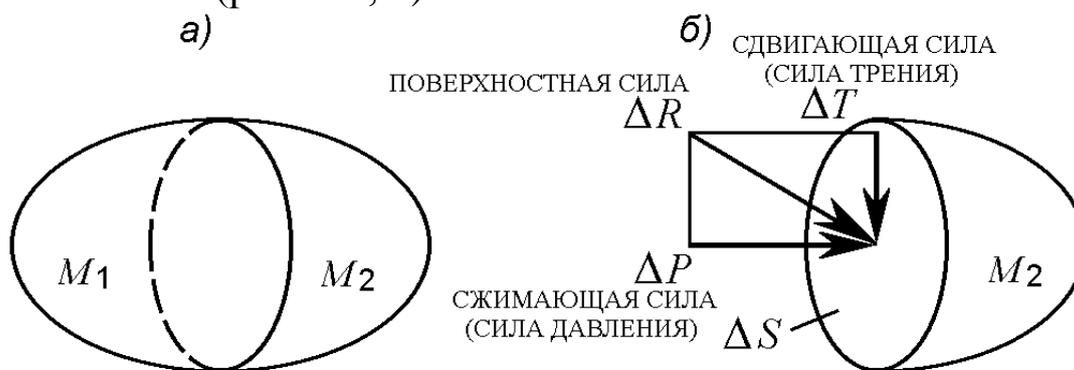


Рис. 2.1. Определение гидростатического давления

Разделим рассматриваемый объем произвольной плоскостью на две части, содержащие массы M_1 и M_2 , и отбросим одну из частей объема, например левую (рис. 2.1, б).

Для того чтобы сохранилось равновесие оставшейся в правой части массы жидкости M_2 , необходимо приложить к ней силу, эквивалентную действию отброшенной массы M_1 . Эта сила ΔR является поверхностной для оставшегося объема.

Если предположить, что она не перпендикулярна к площадке ΔS , то ее можно разложить на две составляющие: нормальную ΔP и тангенциальную ΔT . Однако, вследствие текучести жидкости, сила ΔT приведет к смещению одной части объема жидкости относительно другой, т. е. равновесие жидкости нарушится.

Поэтому в покоящейся жидкости возможно только

$$\Delta T = 0 \quad \text{и} \quad \Delta R = \Delta P.$$

Сила ΔP распределена по площади рассечения ΔS , и напряжение этой силы в произвольной точке A площадки ΔS определяется плот-

ностью распределения нормальных сил по выражению (1.2) и называется *гидростатическим давлением*. Таким образом, в покоящейся жидкости поверхностные силы всегда нормальны (перпендикулярны) по отношению к площадке объема жидкости, на который они действуют, и эти силы сжимающие.

Рассмотрим основное свойство гидростатического давления: *в любой точке жидкости гидростатическое давление не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует, относительно осей координат*. Для этого выделим в покоящейся жидкости элементарный объем в форме тетраэдра (рис. 2.2) с ребрами, параллельными координатным осям и соответственно равными dx , dy , dz . Объем тетраэдра равен $\Delta W = dxdydz / 6$. Отбросим окружающую тетраэдр жидкость и для сохранения равновесия выделенного объема приложим к каждой грани тетраэдра поверхностные силы ΔP_x , ΔP_y , ΔP_z и ΔP_H . Силу ΔP_H можно разложить на проекции по осям координат на ΔP_{Hx} , ΔP_{Hy} и ΔP_{Hz} .

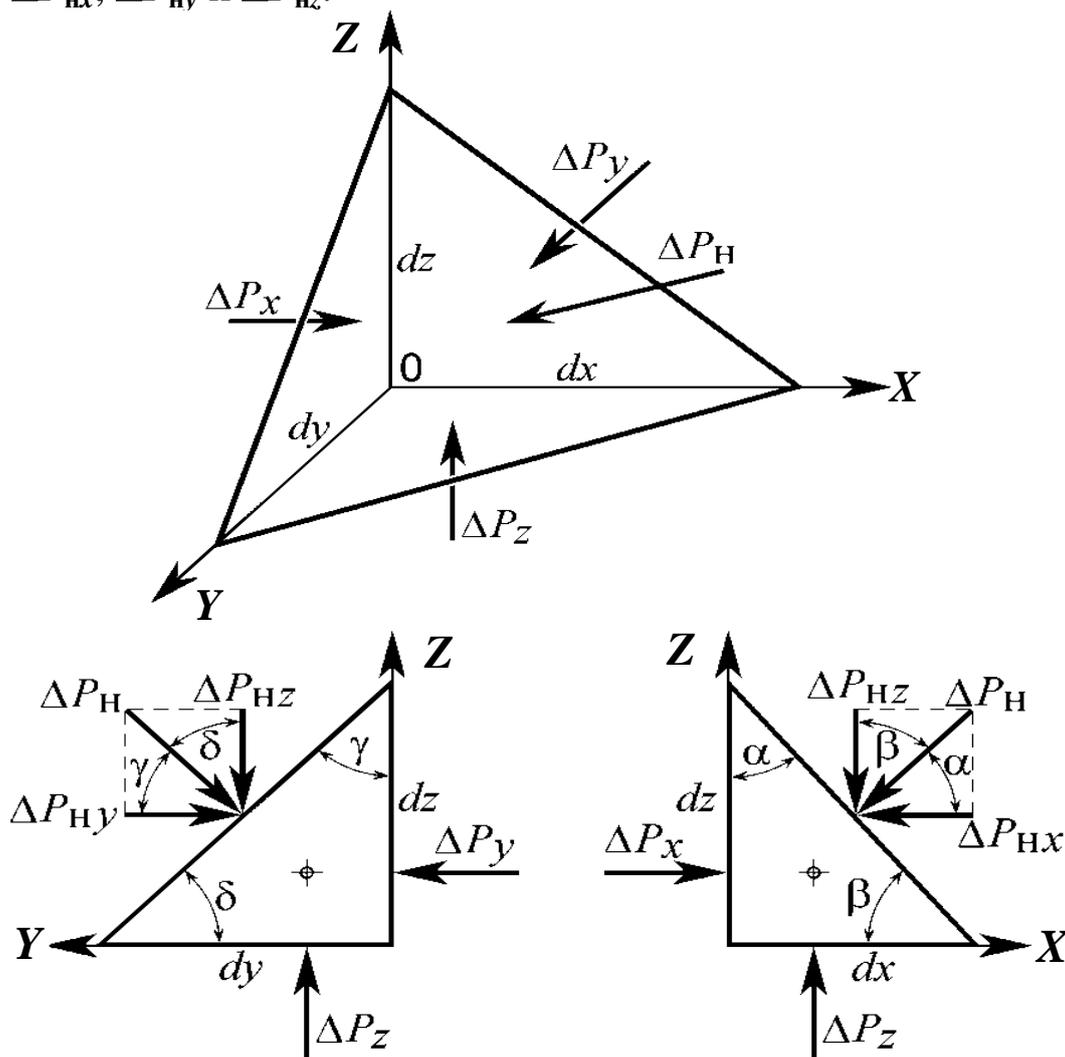


Рис. 2.2. К доказательству свойства гидростатического давления

Кроме поверхностных сил на жидкость, заключенную в тетраэдре, действует массовая сила $\rho\Delta WR$, плотность распределения которой R . Проекции R на оси координат будут R_x, R_y, R_z .

Уравнения равновесия жидкости, заключенной в тетраэдре, в проекциях на оси координат имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta P_x - \Delta P_H \cos\alpha + R_x \rho \Delta W &= 0; \\ \Delta P_y - \Delta P_H \cos\gamma + R_y \rho \Delta W &= 0; \\ \Delta P_z - \Delta P_H \cos\beta + R_z \rho \Delta W &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Перепишем первое из уравнений (2.1), выразив поверхностные силы через гидростатические давления на соответствующие грани тетраэдра:

$$p_x \frac{dydz}{2} - p_H \Delta S_H \cos\alpha + \frac{R_x \rho dx dy dz}{6} = 0.$$

Разделив каждый член этого уравнения на площадь $\Delta S_x = dydz/2$ грани, лежащей в координатной плоскости YOZ и являющейся проекцией наклонной грани на эту же плоскость, т. е. $\Delta S_x = \Delta S_H \cos \alpha$, получим

$$p_x - p_H + \frac{R_x \rho dx}{3} = 0.$$

При стягивании объема тетраэдра в точку последний член уравнения, содержащий множитель dx , также стремится к нулю, а давления p_x и p_H остаются величинами конечными. Следовательно, в пределе

$$p_x - p_H = 0 \quad \text{или} \quad p_x = p_H.$$

Поступая аналогично с остальными двумя уравнениями (2.1), получим $p_y = p_H$ и $p_z = p_H$. Таким образом, окончательно можем записать

$$p_x = p_y = p_z = p_H.\tag{2.2}$$

Так как размеры тетраэдра dx, dy и dz взяты произвольно, то наклон площадки ΔS_H также произволен. Следовательно, в пределе при стягивании тетраэдра в точку давление в этой точке по всем направлениям будет одинаково.

Рассмотренное свойство давления в покоящейся жидкости имеет место также при движении невязкой жидкости. При движении же реальной вязкой жидкости возникают касательные напряжения и поэтому давление в реальной жидкости указанным свойством, строго говоря, не обладает.

2.2. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим распространенный частный случай покоя жидкости, когда на нее действует лишь одна массовая сила – сила тяжести. Пусть жидкость находится в сосуде (рис. 2.3), покоящемся относительно земли.

Принимая размеры сосуда существенно меньшими, чем поверхность земли, можем считать свободную поверхность плоской и горизонтальной.

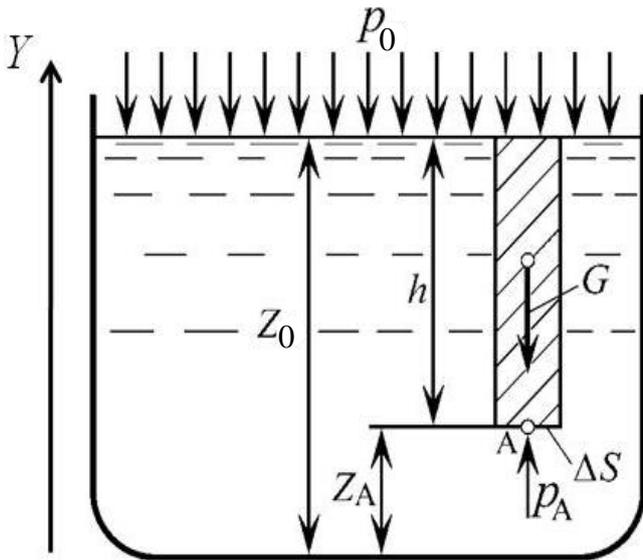


Рис. 2.3. Схема к выводу основного уравнения гидростатики

На свободную поверхность действует давление p_0 как результат действующих на нее поверхностных сил.

Найдем гидростатическое давление p_A в произвольно взятой точке A , расположенной на глубине h .

Выделим около точки A горизонтальную площадку ΔS и построим на ней вертикальный цилиндрический объем жидкости высотой h .

Объем цилиндра равен $\Delta W = \Delta S h$, а масса – $\Delta m = \rho h \Delta S$, где ρ – плотность жидкости.

Составим уравнение равновесия этого объема, выделенного из общей массы жидкости. Давление жидкости p_A на нижнее основание цилиндра будет теперь внешним и направлено по нормали внутрь объема, т. е. вверх. Из схемы (рис. 2.3) в проекции на вертикальную ось Y имеем

$$p_A \Delta S - p_0 \Delta S - \rho h g \Delta S = 0.$$

Последний член этого уравнения представляет собой вес жидкости (силу тяжести) в указанном объеме $G = \Delta m g$, где g – ускорение свободного падения.

Силы давления на боковую поверхность цилиндра в уравнение не входят, т. к. они перпендикулярны к вертикали и уравновешены.

Сократив выражение на ΔS и перегруппировав члены, получим

$$p_A = p_0 + \rho g h . \quad (2.3)$$

Данное уравнение называется *основным уравнением гидростатики*.

Как видно из уравнения (2.3), давление в точке складывается из двух величин: внешнего давления p_0 на свободную поверхность жидкости и давления, обусловленного весом вышележащих слоев жидкости.

Обратим внимание на следующую особенность. Поскольку точка А была выбрана нами произвольно, то можно заключить, что *внешнее давление p_0 передается всем точкам этого объема жидкости и по всем направлениям одинаково*.

Это положение носит название *закона Паскаля*.

Из формулы (2.3) видно, что давление жидкости возрастает с увеличением глубины прямо пропорционально и на данной глубине есть величина постоянная. Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется *поверхностью уровня* (изобарической поверхностью). Для рассмотренного частного случая (см. рис. 2.3) поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости, включая и свободную поверхность.

Уравнение (2.3) можно представить в ином виде, взяв за начало отсчета вертикальной координаты не свободную поверхность рассматриваемого объема жидкости (см. рис. 2.3), а произвольную горизонтальную плоскость, например дно сосуда. Обозначив через Z_A координату точки А, через Z_0 – координату свободной поверхности и заменив в уравнении (2.3) h на $(Z_0 - Z_A)$, можем записать

$$p_A = p_0 + \rho g(Z_0 - Z_A) \quad \text{или} \quad p_A + \rho g Z_A = p_0 + \rho g Z_0.$$

Разделив все члены последнего уравнения на ρg , получим

$$\frac{p_A}{\rho g} + Z_A = \frac{p_0}{\rho g} + Z_0. \quad (2.4)$$

Поскольку точка А была взята произвольно, имеем для всего рассматриваемого неподвижного объема жидкости $\frac{p_i}{\rho g} + Z_i = \text{const}$,

где p_i и Z_i – соответственно давление и вертикальная координата любой i -й точки.

Координата Z называется *геометрической высотой* (*геометрическим напором*).

Составляющая вида $p/\rho g$ имеет линейную размерность и называется *пьезометрической высотой* (*пьезометрическим напором*).

Действительно

$$\frac{p}{\rho g} = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м} \right].$$

Сумму геометрического и пьезометрического напоров, очевидно, можно интерпретировать как **полный напор** в точке покоящейся жидкости (иногда ее называют **гидростатическим напором**).

Таким образом, полный напор есть величина постоянная для всего объема неподвижной жидкости.

2.3. Измерение давления

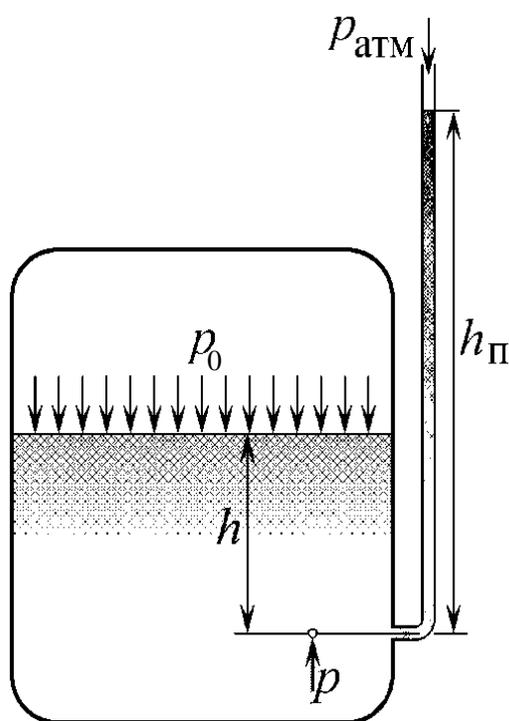


Рис. 2.4. Измерение давления при помощи пьезометра

Пьезометрическую высоту, соответствующую избыточному давлению, можно определить по **пьезометру**, который представляет собой вертикальную стеклянную трубку (рис. 2.4). Верхний конец трубки открыт в атмосферу, а нижний присоединен к сосуду, в котором измеряется давление.

Применяя формулу (2.3) к жидкости, находящейся в пьезометре, будем иметь

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g h_{\text{п}},$$

где $p = p_0 + \rho g h$ – давление в жидкости на уровне присоединения пьезометра; $p_{\text{атм}}$ – атмосферное давление.

Тогда высота подъема жидкости

$$\text{в пьезометре } h_{\text{п}} = \frac{p - p_{\text{атм}}}{\rho g},$$

где $p - p_{\text{атм}} = p_{\text{изб}}$ – избыточное давление на уровне присоединения пьезометра.

Очевидно, что если на свободную поверхность покоящейся жидкости действует атмосферное давление ($p_0 = p_{\text{атм}}$), то пьезометрическая высота для любой точки рассматриваемого объема жидкости равна глубине расположения этой точки.

Часто давление в жидкостях и газах численно выражают в виде соответствующей этому давлению пьезометрической высоты.

Например, для воды имеем

$$h_{\text{вод}} = \frac{p}{\rho_{\text{вод}}g} \approx \frac{p}{10000} \text{ м вод. ст.}$$

При $p = 0,1 \text{ МПа} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10 \text{ м вод. ст.}$

Если абсолютное давление в жидкости или газе меньше атмосферного, то говорят, что имеет место **разряжение (вакуум)**. За величину вакуума принимается недостаток до атмосферного давления:

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p \quad \text{или} \quad h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p}{\rho g}.$$

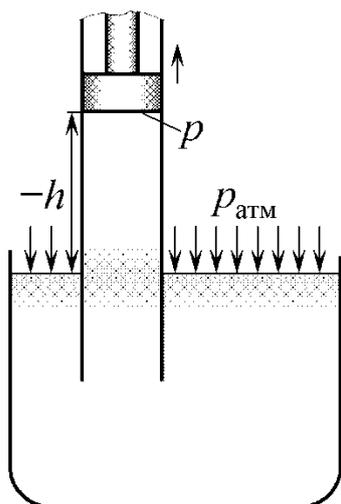


Рис. 2.5. Схема образования вакуума под поршнем

Возьмем, например, трубу с плотно подогнанным к ней поршнем. Опустим нижний конец трубы в сосуд с жидкостью и будем постепенно поднимать поршень (рис. 2.5).

Жидкость будет следовать за поршнем и вместе с ним поднимется на некоторую высоту от свободной поверхности с атмосферным давлением.

По мере подъема поршня давление жидкости под ним уменьшается. Нижним пределом снижения давления для жидкости является давление насыщенного пара (см. п. 1.3).

Поэтому максимальная высота всасывания без нарушения сплошности среды составит:

$$h_{\text{max}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{пар}}}{\rho g}.$$

При нормальном атмосферном давлении (0,1033 МПа) максимальная высота всасывания для воды равна $h_{\text{max}} \approx 10 \text{ м}$, для бензина ($\rho = 750 \text{ кг/м}^3$) – 13,8 м, а для ртути – 0,76 м.

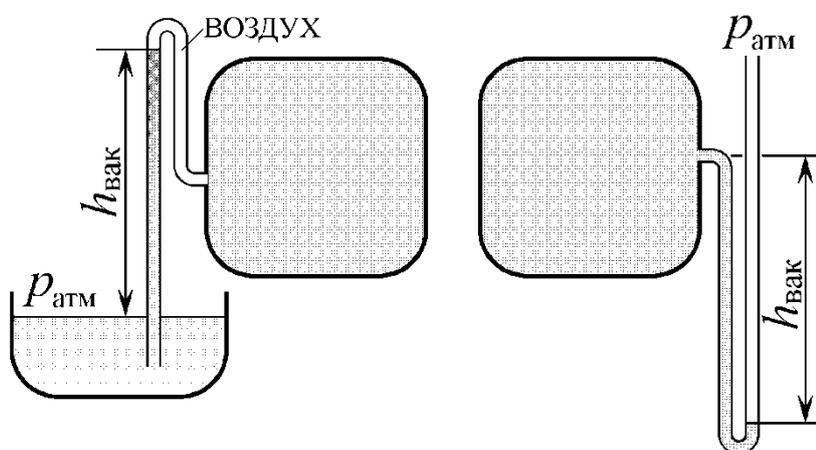


Рис. 2.6. Схемы измерения вакуума

Простейшим устройством для измерения вакуума может служить U-образная трубка, показанная на рис. 2.6 в двух вариантах.

Для измерения давления жидкостей и газов в лабораторных условиях помимо

пьезометра используются жидкостные и механические манометры.

На рис. 2.7 показаны схемы жидкостных манометров.

Так называемый **U-образный манометр** (рис. 2.7, а) представляет собой изогнутую стеклянную трубку, содержащую ртуть (чем больше плотность используемой жидкости в манометре, тем большее давление можно измерить).

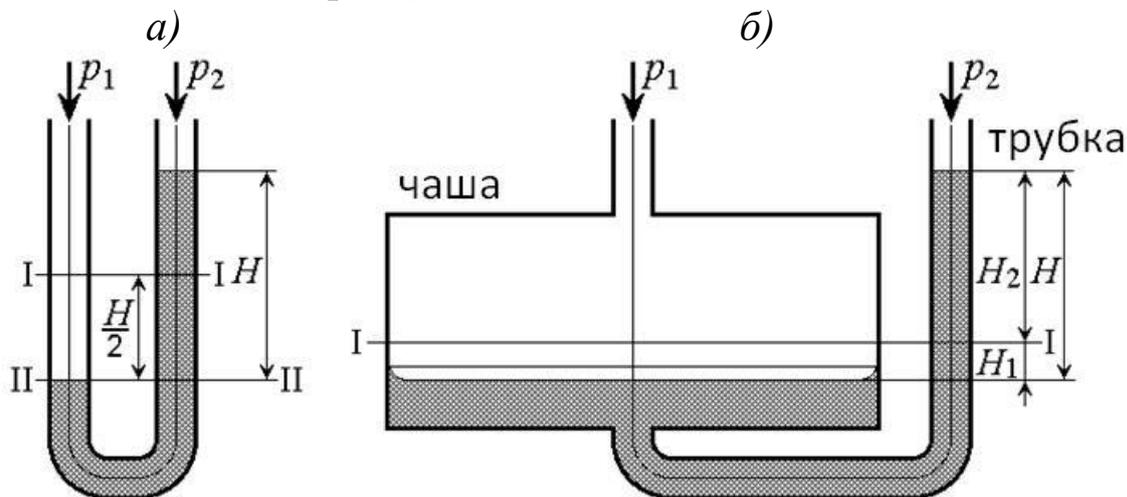


Рис. 2.7. Схемы жидкостных манометров

При измерении небольших давлений газа вместо ртути используют спирт, воду и иногда тетрабромэтан.

В соответствии с основным уравнением гидростатики при равенстве давлений p_1 и p_2 , свободные поверхности (мениски) в обеих трубках устанавливаются на уровне I–I. Если $p_1 > p_2$, то разность давлений Δp вызовет подъем жидкости в правой трубке и опускание в левой на высоту $H/2$, а разница между уровнями менисков составит

$$H = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Чашечный жидкостный манометр (рис. 2.7, б).

Площадь поперечного сечения чашки $S_{\text{ч}}$ существенно больше, чем у трубки $S_{\text{т}}$. Поэтому под воздействием разности давлений Δp изменение уровня жидкости H_1 в чашке гораздо меньше, чем подъем уровня жидкости H_2 в трубке: $H_1 = H_2 \frac{S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}}$.

Отсюда высота столба жидкости, вес которого уравнивает измеряемое давление, $H = H_1 + H_2 = H_2 \left(1 + \frac{S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}} \right)$, а измеряемая разность давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = H_2 \rho g \left(1 + \frac{S_T}{S_Ч} \right).$$

Основными метрологическими характеристиками средств измерения давления являются **чувствительность** измерительной системы, которая во многом определяет точность отсчета при измерениях и **инерционность**.

Для манометрических приборов под чувствительностью понимается отношение изменения показаний прибора к вызвавшему его изменению давления $n = \frac{\Delta H}{\Delta p}$.

Для U-образного манометра $n = \frac{1}{\rho g}$, а для чашечного манометра будет

$$n = \frac{1}{\rho g \left(1 + \frac{S_T}{S_Ч} \right)}.$$

Диапазоны измерений жидкостных манометров определяются высотой столба жидкости, т. е. размерами манометра и плотностью жидкости. Наиболее тяжелой жидкостью в настоящее время является ртуть ($\rho = 1,35951 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$). Столб ртути высотой 1 м создает давление около 136 кПа, т. е. давление, не намного превышающее атмосферное давление. Поэтому при измерении давлений порядка 1 МПа размеры манометра по высоте соизмеримы с высотой трехэтажного дома, что представляет существенные эксплуатационные неудобства. Подавляющее большинство ртутных манометров имеют верхние пределы порядка 120 кПа и лишь изредка до 350 кПа.

При измерении относительно небольших давлений (до 10–20 кПа) измерительная система жидкостных манометров заполняется водой, спиртом и другими легкими жидкостями. При этом диапазоны измерений обычно составляют 1–2,5 кПа (микроманометры). Для измерения еще более низких давлений необходимо увеличивать чувствительность манометра. Примером микроманометра с увеличенной чувствительностью без применения сложных отсчетных устройств служит **чашечный жидкостный манометр с наклонной трубкой** (рис. 2.8).

При равенстве давлений p_1 и p_2 свободные поверхности (мениски) в чашке и трубке устанавливаются на уровне I–I. Если $p_1 > p_2$, то разность давлений Δp вызовет подъем жидкости в трубке на высоту H_2 , а в чашке опустится на высоту H_1 .

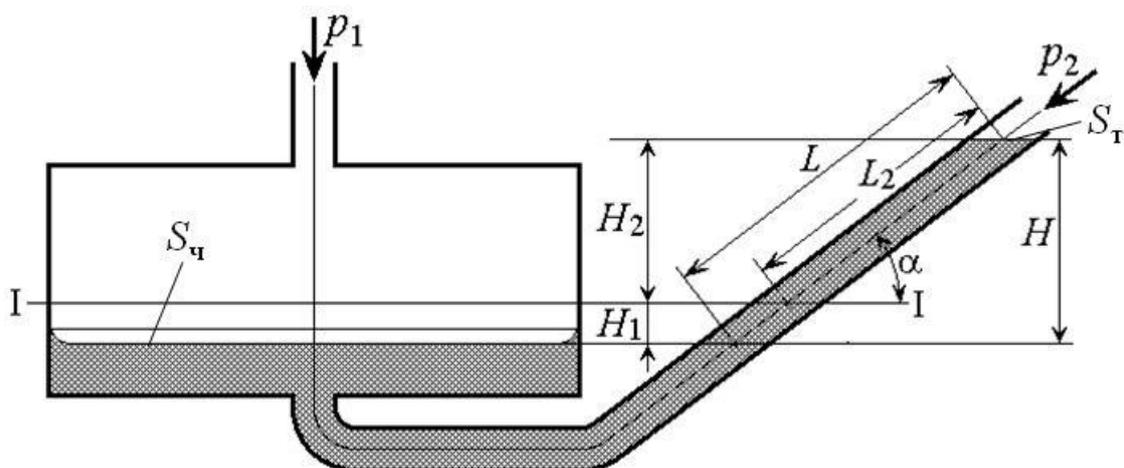


Рис. 2.8. Чашечный манометр с наклонной трубкой

Вес столба жидкости в трубке над свободной поверхностью в чашке составит

$$G = HS_{\text{Т}}\rho g = (H_1 + H_2)S_{\text{Т}}\rho g.$$

Объем жидкости, вытесненный из чашки ($W_{\text{ч}} = H_1S_{\text{ч}}$), равен объему жидкости, поступившему в наклонную трубку ($W_{\text{т}} = L_2 \cdot S_{\text{т}}$).

Отсюда $H_1 = L_2 \frac{S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}}.$

В свою очередь $H_2 = L_2 \sin \alpha.$

Тогда $G = \left(\frac{L_2 S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}} + L_2 \sin \alpha \right) S_{\text{т}} \rho g$, и уравнение измерений микроманометра принимает вид

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \left(\frac{S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}} + \sin \alpha \right) L_2 \rho g.$$

Чувствительность данного микроманометра определяется зависимостью

$$n = \frac{\Delta L}{\Delta p} = \frac{l}{\rho g \left(\sin \alpha + \frac{S_{\text{т}}}{S_{\text{ч}}} \right)}.$$

Из данного выражения видно, что чем меньше угол наклона трубки, тем больше чувствительность.

Дифференциальный манометр типа «кольцевые весы» представлен на рис. 2.9.

Корпус манометра выполнен в виде тороидальной трубки, шарнирно опирающейся на опору. Он разделен перегородкой на две камеры А и Б. К корпусу подвешен груз весом G .

Манометр позволяет измерить разность давлений p_1 и p_2 .

При $p_1 = p_2$ (рис. 2.9, а) груз стремится занять нижнее положение. С увеличением одного из давлений, например $p_1 > p_2$ (рис. 2.9, б), произойдет поворот тора относительно центра, и уравнение моментов сил, действующих в данном манометре относительно центра, будет $p_1SR_1 - p_1SR_1 + p_2SR_1 - p_2SR_1 + mgR_2 \sin \alpha - m_{\text{ж}}gR_1 = 0$, где S – площадь поперечного сечения тороида.

Масса жидкости равна $m_{\text{ж}} = SH\rho$.

Уравнение принимает вид $mgR_2 \sin \alpha - SH\rho gR_1 = 0$.

а) $p_1 = p_2$

б) $p_1 > p_2$

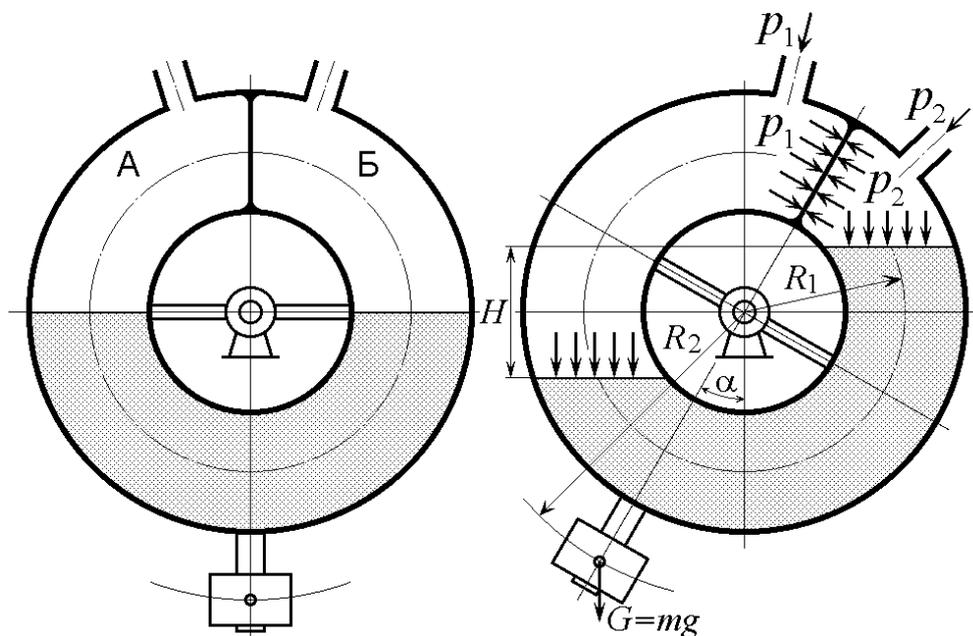


Рис. 2.9. Схема манометра типа «кольцевые весы»

Тогда измеряемая разность давлений составит

$$\Delta p = \rho g H = \frac{mg}{S} \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha.$$

Из приведенных зависимостей видно, что жидкость в данном манометре выполняет функцию подвижного разделителя внутренней полости тороида на две камеры А и Б.

В уравнения измерений жидкостных манометров в зависимости от их точности необходимо вводить поправки, учитывающие отклонения условий эксплуатации от условий градуировки, вид измеряемого давления и особенности принципиальной схемы конкретных манометров.

Условия эксплуатации определяются температурой и ускорением свободного падения в месте измерений. Под влиянием температу-

ры изменяются как плотность применяемой жидкости, так и длина шкалы.

Ускорение свободного падения в месте измерений, как правило, не соответствует его нормальному значению, принятому при градуировке ($g_H = 9,80665 \text{ м/с}^2$). Температура, при которой отградуирована шкала, $t_{H1} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Таким образом давление определится по зависимости

$$p = p_H \left[1 + \alpha(t - t_{H1}) + \beta(t_{H2} - t) + \frac{g - g_H}{g_H} \right],$$

где $p_H = H\rho_H g_H$ – показания манометра; t – температура шкалы и жидкости во время измерений; t_{H2} – температура, соответствующая принятой при градуировке плотности жидкости; α – температурный коэффициент линейного расширения шкалы; β – температурный коэффициент объемного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения в месте измерений.

В условиях эксплуатации жидкостных манометров температура в помещении, как правило, не выходит из диапазона $t = 15\text{--}30 \text{ }^\circ\text{C}$. При этом коэффициент α практически постоянен. Тогда поправка на изменение длины шкалы составит

$$\Delta p_{ш} = p_H \alpha (t - 20).$$

В зависимости от материала шкалы α , $^\circ\text{C}^{-1}$, равен для: латуни – $19 \cdot 10^{-6}$; стали – $11 \cdot 10^{-6}$; стекла – $8,5 \cdot 10^{-6}$. В лабораторных условиях при $t = 20 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$ эта поправка не превышает $\pm 0,01 \%$.

2.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Основное уравнение гидростатики (2.3) и (2.4) становится неприемлемым в случае, когда кроме силы тяжести действуют и другие массовые силы (сила инерции, центробежная сила и др.).

Для получения общего решения выведем дифференциальные уравнения равновесия жидкости.

В сосуде с неподвижной относительно него жидкостью возьмем произвольный объем жидкости в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz (рис. 2.10).

Отбросив окружающую параллелепипед жидкость, необходимо заменить ее действие силами. Это будут нормальные сжимающие поверхностные силы, результатом действия которых будет возникновение давлений на гранях параллелепипеда.

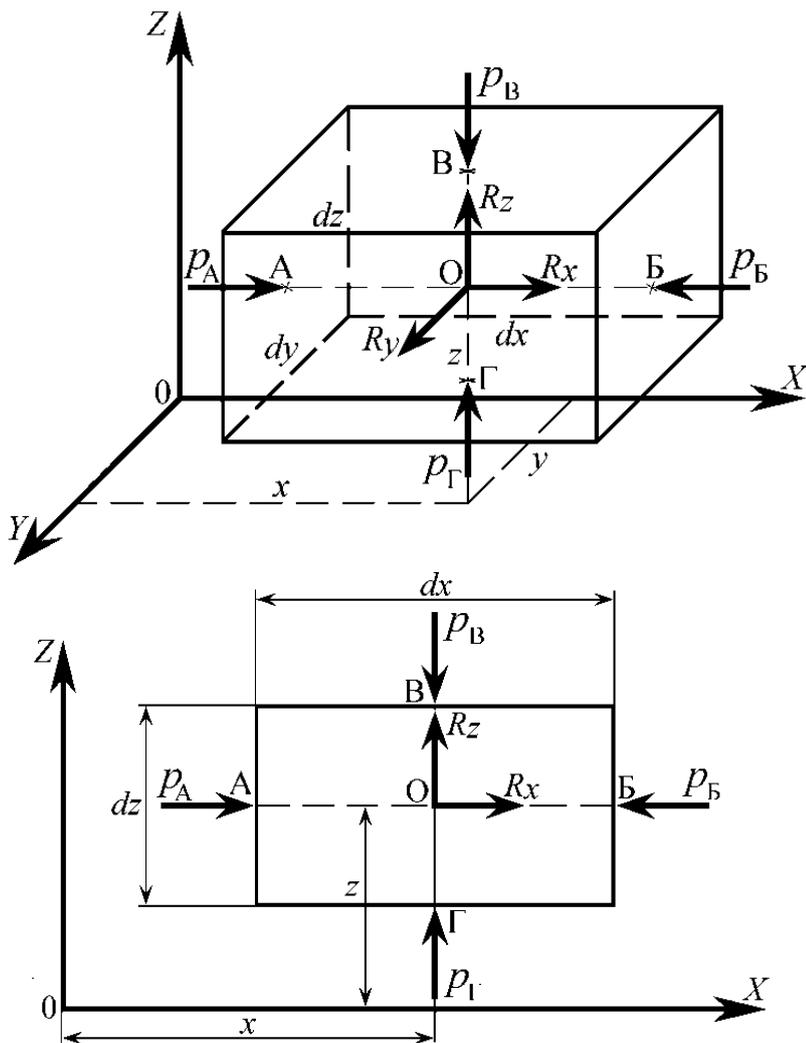


Рис. 2.10. Схема для вывода дифференциальных уравнений равновесия жидкости

Кроме поверхностных сил на жидкость в объеме параллелепипеда действуют массовые силы. Равнодействующая массовых сил равна $\rho R \Delta W$, плотность распределения которой R . Проекции R на оси координат обозначим соответственно R_x , R_y и R_z .

В общем случае в разных точках рассматриваемого объема жидкости давления p будут различными, т. е. $p = f(x, y, z)$.

Давление в центре параллелепипеда (точка O) обозначим через p_0 . Проведем линию AB , параллельную оси X и проходящую через точку O . В общем случае гидростатическое давление

будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение гидростатического давления, приходящееся на единицу длины линии AB , представим в виде частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Тогда давления p_A и p_B в точках A и B соответственно на боковых гранях параллелепипеда составят

$$p_A = p_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad p_B = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx. \quad (2.5)$$

Имея в виду, что $\Delta W = dx dy dz$, составим уравнение действующих сил в проекции на ось X , выраженных через плотности распределения: $p_A dy dz - p_B dy dz + R_x \rho dx dy dz = 0$

или
$$\left(p_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + R_x \rho dx dy dz = 0.$$

Приведем подобные и поделив уравнение на массу параллелепипеда ($m = \rho dx dy dz$), получим

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.6)$$

Рассуждая подобным образом, получим аналогичные уравнения в проекциях на оси Y и Z :

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Эти уравнения были получены Л. Эйлером в 1755 г.

На практике вместо системы уравнений (2.7) удобнее пользоваться одним эквивалентным уравнением, не содержащим частных производных. Для этого умножим первое уравнение на dx , второе – на dy , третье – на dz и просуммируем все три уравнения:

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Выражение в скобках представляет собой полный дифференциал давления, поэтому можем переписать предыдущее уравнение в виде

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz - \frac{1}{\rho} dp = 0$$

или

$$dp = \rho (R_x dx + R_y dy + R_z dz). \quad (2.8)$$

Полученное уравнение выражает приращение давления dp при изменении координат на dx , dy , dz в общем случае относительно покоя жидкости.

Если dp – полный дифференциал давления, при $\rho = \text{const}$ выражение в скобках также является полным дифференциалом некоторой функции dR :

$$dR = R_x dx + R_y dy + R_z dz.$$

Поскольку эта функция зависит только от координат, она является потенциальной функцией (функцией, имеющей потенциал).

Вывод: однородная несжимаемая жидкость может находиться в покое под действием только таких сил, которые имеют потенциал.

Поверхности уровня (поверхности равного давления) из условия $dp = 0$ при $\rho \neq 0$ описываются дифференциальным уравнением вида

$$R_x dx + R_y dy + R_z dz = 0. \quad (2.9)$$

2.5. Решение дифференциальных уравнений равновесия жидкости для ряда частных случаев

Покажем возможность получения основного уравнения гидростатики из решения дифференциального уравнения равновесия жидкости (2.8). В этом частном случае (см. п. 2.2) на жидкость действует только одна массовая сила – сила тяжести (см. рис. 2.3). Направив ось Z вертикально вверх, будем иметь $R_x = R_y = 0$, $R_z = -g$ и уравнение (2.8) примет вид $dp = -\rho g dz$.

После интегрирования этого уравнения получим

$$p = -\rho g Z + C. \quad (2.10)$$

Постоянная интегрирования C находится после подстановки в это выражение параметров свободной поверхности жидкости Z_0 и p_0 (см. рис. 2.3).

$$C = p_0 + \rho g Z_0.$$

Тогда выражение (2.10) примет вид

$$p = -\rho g Z + p_0 + \rho g Z_0 \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho g} + Z = \frac{p_0}{\rho g} + Z_0 = \text{const.}$$

Таким образом, мы получим выражение, идентичное формуле основного уравнения гидростатики в виде (2.4). Поверхности уровня по формуле (2.9) в этом случае представляются в виде горизонтальных плоскостей. Действительно, в этом случае имеем $R_x = R_y = 0$ и $dz = 0$, т. е. $Z = c$.

Каждому значению c соответствует плоскость, во всех точках которой давление имеет определенную постоянную величину.

Рассмотрим ряд частных случаев относительного покоя жидкости, которые довольно часто встречаются на практике.

2.5.1. Равномерное вращение сосуда с жидкостью

Возьмем открытый цилиндрический сосуд с жидкостью (рис. 2.11) и сообщим ему вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг его вертикальной оси.

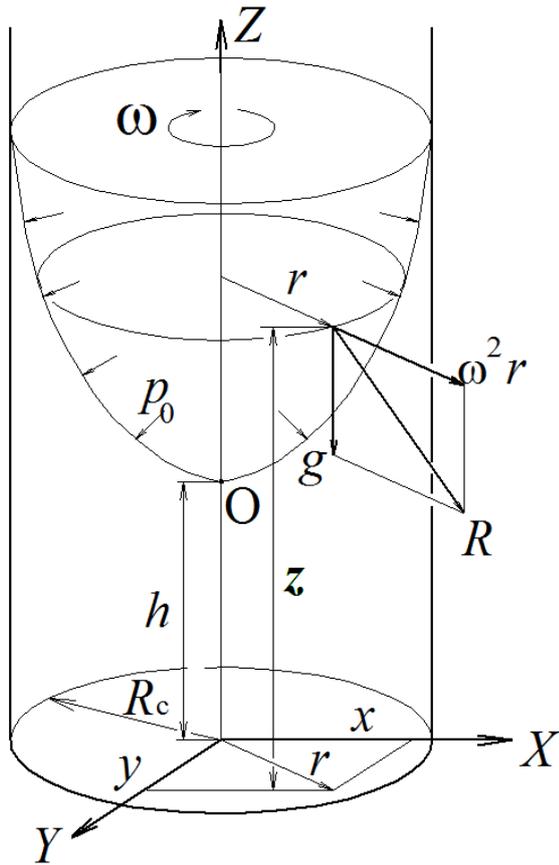


Рис. 2.11. Схема вращения жидкости вместе с сосудом

жидкости.

На свободную поверхность действует гидростатическое давление p_0 от поверхностных сил.

Определим вначале форму поверхностей уровня (поверхностей равного давления).

Используем уравнение поверхности равного давления (2.9), подставляя соответствующие проекции массовых сил:

$$(R_{x1} + R_{x2})dx + (R_{y1} + R_{y2})dy + (R_{z1} + R_{z2})dz = 0,$$

То есть

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

После интегрирования получаем $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = C,$

или, с учетом равенства $x^2 + y^2 = r^2$, будет $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C,$ (2.11)

где z – вертикальная координата произвольно выбранной точки в объеме жидкости.

Жидкость постепенно приобретает ту же угловую скорость, что и сосуд, а ее свободная поверхность станет криволинейной в виде некоторой поверхности вращения.

На жидкость в этом случае действуют две массовые силы: сила тяжести $G = mg$ и центробежная сила $R_{ц} = m\omega^2 r$.

Проекции вектора плотности распределения массовых сил будут:

- от силы тяжести $R_{x1} = R_{y1} = 0$ и $R_{z1} = -g$;

- от центробежной силы

$$R_{x2} = \omega^2 x; R_{y2} = \omega^2 y; R_{z2} = 0,$$

где x и y – горизонтальные координаты вокруг вертикальной оси произвольно выбранной точки

Из этого уравнения видно, что поверхности уровня в рассматриваемом случае представляют собой семейство конгруэнтных (совмещающихся при наложении) параболоидов вращения с вертикальной осью.

Свободная поверхность также является поверхностью уровня, во всех точках которой давление равно внешнему давлению p_0 .

Найдем значение постоянной C для параболоида свободной поверхности. Координаты вершины O параболоида $x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = h$. Подставив эти координаты в уравнение (2.11), получим $C = -gh$ и уравнение свободной поверхности

$$z_{св} - h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (2.12)$$

где $z_{св}$ – вертикальная координата точки, принадлежащей свободной поверхности параболоида вращения.

Ордината h вершины параболоида свободной поверхности при заданной угловой скорости зависит от объема жидкости в сосуде.

Если до вращения сосуда уровень жидкости был H_H , то объем жидкости равнялся $\pi R_c^2 H_H$. При вращении сосуда форма объема жидкости изменяется, а его величина при $\rho = \text{const}$ остается неизменной:

$$\int_0^{R_c} \left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) 2\pi r dr = \pi R_c^2 H_H.$$

После интегрирования имеем

$$h = H_H - \left(\frac{\omega^2 R_c^2}{4g} \right). \quad (2.13)$$

Закон распределения давлений найдем, используя дифференциальное уравнение равновесия жидкости (2.8), подставив в него проекции плотности распределения массовых сил:

$$dp = \rho[\omega^2(xdx + ydy) - gdz].$$

После интегрирования с учетом $x^2 + y^2 = r^2$ имеем

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz \right) + C. \quad (2.14)$$

Постоянную интегрирования C находим, введя координаты вершины параболоида свободной поверхности $r_0 = 0, z_0 = h$ и давление $p = p_0$ в уравнение (2.14):

$$C = p_0 + \rho gh.$$

Подставив найденное значение C в уравнение (2.14), получим

$$p = p_0 + \rho g \left(h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right). \quad (2.15)$$

2.5.2. Прямолинейное движение сосуда с постоянным ускорением

Рассмотрим относительный покой жидкости, находящейся в сосуде, перемещающемся горизонтально с постоянным ускорением a (рис. 2.12).

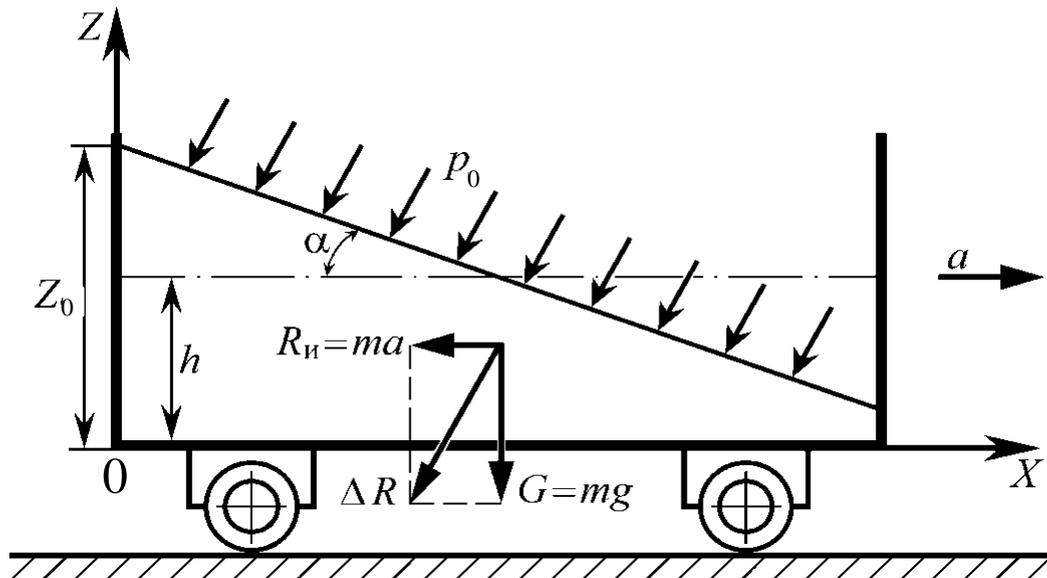


Рис. 2.12. Схема движения сосуда с постоянным ускорением

В этом случае равнодействующая массовых сил ΔR равна сумме силы тяжести G и силы инерции $R_{и}$.

Проекции равнодействующей плотности распределения массовых сил на оси координат будут

$$R_x = -a; \quad R_y = 0; \quad R_z = -g.$$

Тогда дифференциальное уравнение равновесия жидкости (2.8) примет вид

$$dp = \rho(-adx + 0 - gdz).$$

После интегрирования получим давление в рассматриваемой точке с координатами $(x; z)$

$$p = -a\rho x - \rho g z + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем, подставив в это уравнение параметры начальной точки свободной поверхности $x = 0; z = Z_0$ и $p = p_0$:

$$C = p_0 + \rho g Z_0.$$

Таким образом, распределение давлений подчиняется линейному закону

$$p = p_0 + \rho g(Z_0 - z) - a \rho x.$$

2.6. Сила давления жидкости на плоскую стенку

На рис. 2.13 изображен сосуд, наполненный жидкостью и имеющий плоскую наклонную стенку. Угол наклона стенки к горизонту равен α .

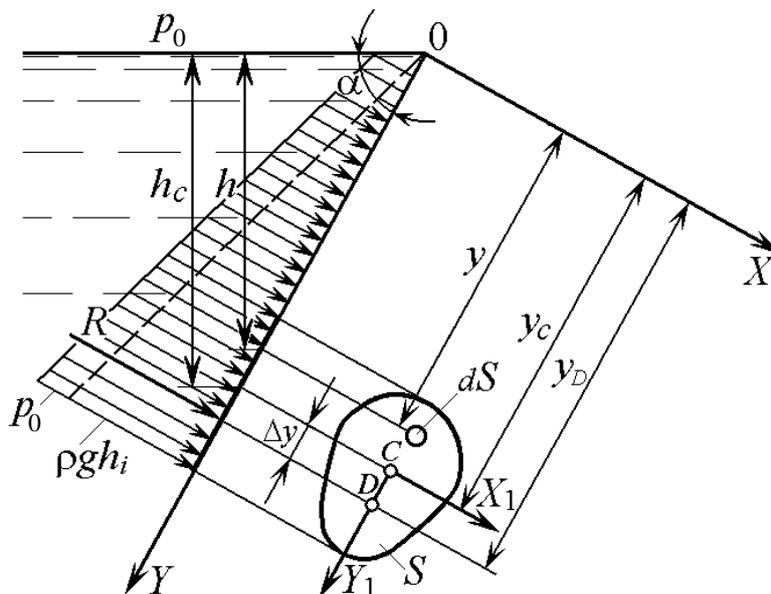


Рис. 2.13. Схема действия жидкости на плоскую стенку

Задача действия жидкости на стенку состоит из определения силы абсолютного гидростатического давления R и координат ее приложения, называемых *центром давления* (точка D на рис. 2.13).

1. Определение силы R .

На стенке выделим площадку произвольной формы, имеющую площадь S . На площадку действуют внешнее давление p_0 , равномерно распределенное по ней, и давление от веса столба жидкости, зависящее от глубины расположения h_i . Тогда абсолютное давление в любой точке площадки согласно основному уравнению гидростатики определяется как

$$p_i = p_0 + \rho g h_i.$$

Выразим сначала элементарную силу давления dR , действующую на бесконечно малой площадке dS :

$$dR = (p_0 + \rho g h) dS,$$

где h – глубина погружения площадки dS ($h = y \sin \alpha$).

Проинтегрировав это выражение по всей площади S , получим полную силу R :

$$R = p_0 \int_S dS + \rho g \int_S h dS \quad \text{или} \quad R = p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S y dS .$$

Интеграл $\int_S y dS$ представляет собой статический момент площади S относительно оси OX и равен произведению этой площади на координату ее центра тяжести (точка C на рис. 2.13) $\int_S y dS = y_c S$.

Таким образом

$$R = p_0 S + \rho g \sin \alpha y_c S = p_0 S + \rho g h_c S , \quad (2.16)$$

где h_c – глубина расположения центра тяжести площади S .

Перепишем выражение (2.16) в виде

$$R = (p_0 + \rho g h_c) S = p_c S , \quad (2.17)$$

где p_c – абсолютное давление в точке C .

Вывод: *сила абсолютного гидростатического давления на плоскую стенку равна произведению площади стенки на гидростатическое давление в центре тяжести этой площади.*

2. Положение центра давления.

Координаты приложения силы абсолютного гидростатического давления R не совпадают с центром тяжести рассматриваемой площади S . Это обусловлено тем, что сила R является равнодействующей двух сил:

$$R = R_0 + R_{ж} ,$$

где $R_0 = p_0 S$ – сила внешнего давления; $R_{ж} = \rho g h_c S$ – сила веса столба жидкости в центре тяжести площади S .

Если внешнее давление p_0 распределено по площади равномерно (см. эпюру давления на рис. 2.13) и сила R_0 приложена в центре тяжести площади S , то давление от веса столба с глубиной увеличивается. Поэтому точка D будет находиться ниже центра тяжести площади S (точки C).

Чтобы найти точку приложения силы $R_{ж}$ используем теорему механики: момент равнодействующей силы относительно оси OX равен сумме моментов составляющих сил, т. е.

$$R_{ж} y_D = \int_S y dR_{ж} ,$$

где y_D – координата приложения силы $R_{ж}$.

Эту формулу можно представить в виде

$$\rho g h_c S y_D = \int_S \rho g h y dS \quad \text{или} \quad \rho g y_c \sin \alpha S y_D = \rho g \int_S y^2 dS,$$

где $\int_S y^2 dS = J_{0X}$ – момент инерции площади S относительно оси OX .

Тогда получаем
$$y_D = \frac{J_{0X}}{y_c S}.$$

Учитывая, что $J_{0X} = J_{0X_1} + y_c^2 S$, где J_{0X_1} – момент инерции площади S относительно центральной оси OX_1 , будем иметь

$$y_D = y_c + J_{0X_1} / (y_c S). \quad (2.18)$$

Расстояние между центром тяжести и центром давления (между точками C и D) равно $\Delta y = J_{0X_1} / (y_c S)$.

Если ось X_1 или перпендикулярная ей центральная ось Y_1 являются осями симметрии площади S , центр давления лежит на оси Y_1 .

Если оси X_1 и Y_1 не являются осями симметрии, необходимо определить кроме смещения Δy также и смещение Δx (см. гл. 11).

2.7. Сила давления жидкости на цилиндрическую стенку

Наиболее часто на практике встречается случай криволинейной стенки в виде цилиндра (рис. 2.14).

На стенку действуют внешнее давление p_0 и давление от веса столба жидкости.

В этом случае решение задачи по определению силы абсолютного гидростатического давления R_{Π} заключается в расчете последовательно силы от внешнего давления R_0 и силы от веса жидкости R_{Π} с дальнейшим их суммированием.

1. Сила от веса жидкости R_{Π}

В отличие от внешнего давления, давление от веса жидкости (избыточное давление) растет с увеличением глубины (эпюра на рис. 2.14, a).

Горизонтальная составляющая силы избыточного давления

$$R_{\Pi Г} = \rho g h_{\Pi} S_{\text{В}},$$

где $S_{\text{В}}$ – проекция площади стенки на вертикальную плоскость; h_{Π} – глубина погружения центра тяжести площади $S_{\text{В}}$.

Для цилиндрической стенки радиусом r будет:

$$h_{\text{ц}} = r/2 \quad \text{и} \quad S_{\text{в}} = rb,$$

где b – ширина цилиндрической стенки (размер, перпендикулярный плоскости чертежа).

Горизонтальную составляющую силу избыточного (манометрического) давления можно определить так же, как объем эпюры горизонтального давления: $R_{\text{иг}} = \frac{1}{2} \rho g r^2 b$.

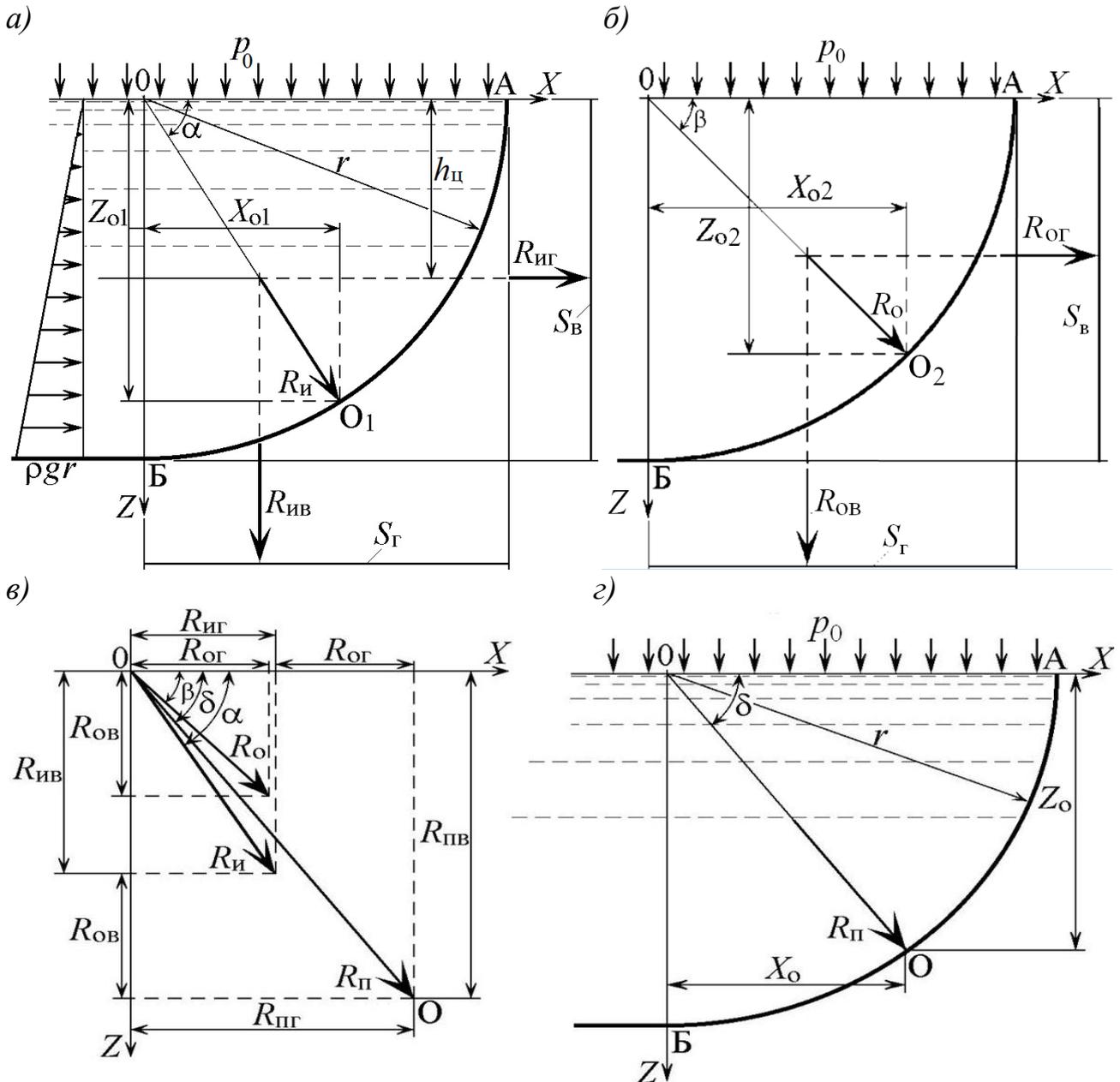


Рис. 2.14. Схемы действия давления на цилиндрическую стенку

Вертикальная составляющая силы избыточного давления определяется силой веса жидкости в объеме $0AO_1Б$

$$R_{\text{ив}} = \frac{1}{4} \pi r^2 b \rho g.$$

Тогда сила избыточного давления $R_{\text{и}}$ составит

$$R_{\Pi} = \sqrt{R_{\PiГ}^2 + R_{\PiВ}^2}.$$

Так как силы гидростатического давления направлены перпендикулярно к поверхности давления, а для цилиндрических (круговых) поверхностей нормали совпадают с радиусами, то сила избыточного давления R_{Π} должна пройти по радиусу, проходящему через точку O_1 (рис. 2.14, а).

Тангенс угла наклона силы избыточного давления R_{Π} к горизонту равен:

$$\operatorname{tg} \alpha = R_{\PiВ} / R_{\PiГ}.$$

Координаты точки O_1 приложения силы R_{Π} составляют

$$X_{O_1} = r \cos \alpha \quad \text{и} \quad Z_{O_1} = r \sin \alpha.$$

2. Сила от внешнего давления R_0

Внешнее давление p_0 передается всем точкам стенки одинаково и направлено по нормали (перпендикулярно) к стенке. Поэтому сила R_0 будет направлена по радиусу под углом $\beta = 45^\circ$ (рис. 2.14, б).

Величина силы от внешнего давления описывается выражением

$$R_0 = p_0 S = \frac{1}{2} \pi r b p_0.$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие этой силы равны и имеют величину:

$$R_{OГ} = R_{OВ} = R_0 \cos \beta.$$

Координаты точки O_2 приложения силы R_0 составляют

$$X_{O_2} = r \cos \beta \quad \text{и} \quad Z_{O_2} = r \sin \beta.$$

Сила абсолютного гидростатического давления R_{Π} по правилам сложения векторов (рис. 2.14, в) определяется по выражениям

– горизонтальная составляющая

$$R_{\PiГ} = R_{OГ} + R_{\PiГ};$$

– вертикальная составляющая

$$R_{\PiВ} = R_{OВ} + R_{\PiВ},$$

– сила абсолютного гидростатического давления

$$R_{\Pi} = \sqrt{R_{\PiГ}^2 + R_{\PiВ}^2}.$$

Тангенс угла наклона силы R_{Π} к горизонту равен:

$$\operatorname{tg} \delta = R_{\PiВ} / R_{\PiГ}.$$

Координаты точки O (рис. 2.14, г) приложения силы R_{Π} составляют

$$X_O = r \cos \delta \quad \text{и} \quad Z_O = r \sin \delta.$$

2.8. Плавание тел. Закон Архимеда

Одной из задач гидростатики является поведение твердого тела, погруженного в жидкость.

Представим себе полностью погруженное в жидкость твердое тело плотностью ρ_T , объем которого W_T и вес $G = \rho_T g W_T$.

Форма тела такова, что любая прямая пересекает поверхность тела только в двух точках (рис. 2.15).

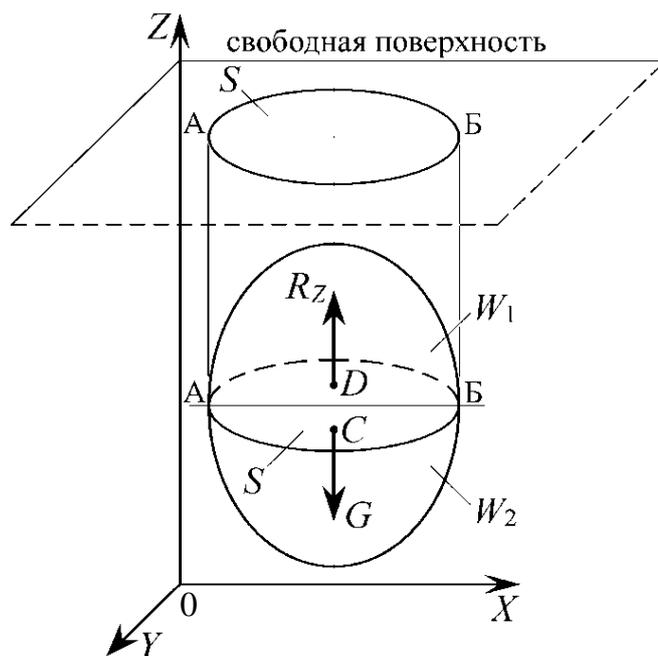


Рис. 2.15. Схема плавания тела в жидкости

Разделим рассматриваемое тело на две части плоскостью А–Б, параллельной свободной поверхности жидкости. Она расположена так, чтобы площадь сечения S была максимальной. В этом случае имеем два тела давления соответственно на верхнюю и нижнюю части тела.

Сила давления на верхнюю часть равна весу жидкости в объеме W_1 , т. е.

$$R_B = \rho_{ж} g W_1,$$

где $\rho_{ж}$ – плотность жидкости.

Эта сила направлена вниз.

Сила давления на нижнюю часть равна весу жидкости в объеме W_2 , т. е.

$$R_H = \rho_{ж} g W_2.$$

Эта сила направлена вверх.

При отсутствии перемещения тела в плоскости XOY силы, действующие в этой плоскости, взаимно уравновешены.

Тогда равнодействующая сил давления равна $R_z = R_H - R_B$.

Имея в виду, что $W_1 + W_2 = W_T$, получим

$$R_z = \rho_{ж} g W_T.$$

Таким образом, на тело, погруженное в жидкость, действует сила, равная весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Ее называют *архимедовой силой*, а данный вывод – *законом Архимеда*.

Архимедова сила приложена в центре тяжести этого объема жидкости (точка D на рис. 2.15) и направлена по вертикали вверх. Точка D называется *центром водоизмещения*.

В общем случае точка D не совпадает с центром тяжести твердого тела (точка C на рис. 2.15).

При сравнении R_z и G возможны три случая:

- 1) $R_z > G$ – тело всплывает на поверхность жидкости;
- 2) $R_z < G$ – тело тонет;
- 3) $R_z = G$ – тело плавает в погруженном состоянии.

В зависимости от взаимного положения центра водоизмещения D и центра тяжести твердого тела C поведение твердого тела может быть различным.

Если точки D и C совпадают, то тело будет находиться в безразличном равновесии.

Если же эти точки не совпадают, то возможны два варианта.

Рассмотрим случай, когда тело полностью погружено в жидкость ($R_z = G$). Такой случай возможен, если $\rho_T = \rho_{ж}$.

1. Центр водоизмещения D находится выше центра тяжести твердого тела C .

В этом случае имеем устойчивое равновесие (рис. 2.16, а).

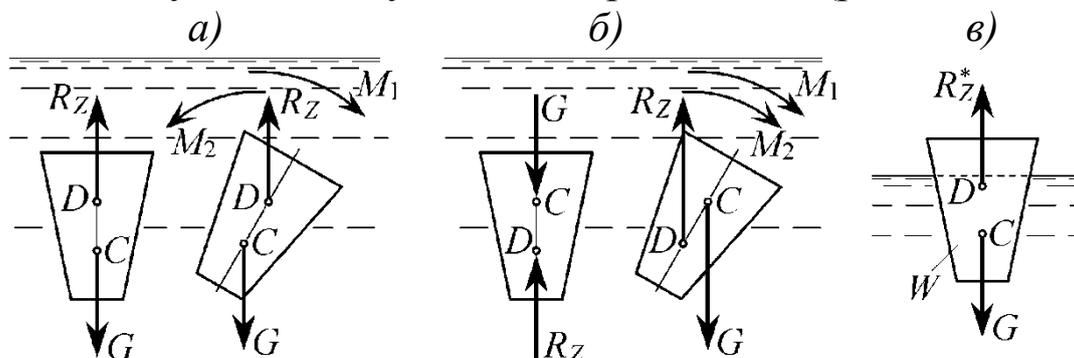


Рис. 2.16. Схемы плавания полностью погруженного тела (а, б) и с частичным погружением (в)

При действии опрокидывающего момента M_1 от пары сил R_z и G возникает противодействующий момент M_2 . При прекращении действия момента M_1 тело вернется в исходное положение.

2. Центр водоизмещения D находится ниже центра тяжести твердого тела C .

В этом случае имеем неустойчивое равновесие (рис. 2.16, б).

Момент M_2 действует в том же направлении, что и M_1 . Тело перевернется (точка D окажется выше точки C) и примет устойчивое равновесие.

В случае, когда $R_z > G$, тело, всплыв на поверхность, оказывается погруженным в жидкость только частично (рис. 2.16, в).

Всплывать тело будет до тех пор, пока не выполнится условие

$$R_z^* = G,$$

где $R_z^* = \rho_{\text{ж}} g W$ – архимедова сила частично погруженного тела.

Объем W вытесненной телом жидкости называется **объемным водоизмещением**. Очевидно, что $W = W_T \rho_T / \rho_{\text{ж}}$.

Подробнее об особенностях плавания тел на поверхности жидкости с частичным погружением можно найти в [14].

2.9. Контрольные вопросы

1. Каковы особенности напряженного состояния покоящейся жидкости?

2. Каковы основные отличительные свойства нормального напряжения поверхностных сил в покоящейся жидкости?

3. Гидростатическое давление – векторная или скалярная величина?

4. В каких единицах измеряется давление? Чему равняется атмосферное давление?

5. Что такое абсолютное, избыточное, вакуумметрическое давление? Может ли вакуумметрическое давление быть больше атмосферного давления; или быть меньше нуля; или равно нулю?

6. Отличается ли пьезометрическая высота от вакуумметрической высоты?

7. В каких случаях плоскость пьезометрического напора располагается выше и ниже свободной поверхности покоящейся жидкости? Может ли плоскость пьезометрического напора совпадать со свободной поверхностью?

8. Запишите выражение для полного дифференциала давления. Как из этого выражения получить основное уравнение гидростатики? Для какого условия оно справедливо?

9. Что такое поверхность равного давления? Каково ее уравнение?

10. Отличается ли форма поверхностей равного давления при относительном покое жидкости в равномерно вращающемся относительно вертикальной оси цилиндрическом сосуде и в движущихся прямолинейно равноускоренно и равнозамедленно сосудах?

11. Справедливо ли основное уравнение гидростатики в различных случаях относительного покоя?

12. Запишите формулу для силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности. Почему в большинстве случаев необходимо знать силу избыточного гидростатического давления?

3. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

3.1. Общие положения и определения

Кинематика жидкости – раздел гидромеханики, в котором движение жидкости и газа изучается вне зависимости от действующих сил. В этом разделе устанавливаются связи между координатами жидких частиц, их скоростями, ускорениями и другими параметрами, а также закономерности их изменения во времени.

Кинематика жидкости существенно отличается от кинематики твердого тела. Если отдельные частицы твердого тела жестко связаны между собой, то в движущейся жидкости такие связи отсутствуют. В процессе движения изменяются во времени как взаимные положения жидких частиц, так и их форма. Положение жидкой частицы определяется координатами некоторой точки, выбранной произвольно в пределах частицы. Эта точка называется *полюсом*. Различные точки частицы имеют различные скорости, поэтому под скоростью жидкой частицы понимают скорость выбранного полюса. В общем случае движение жидкости можно считать определенным, если известны движения всех частиц, т. е. положение каждой частицы задано как функция времени.

Существуют два способа описания движения жидкости, разработанные соответственно Лагранжем и Эйлером. *Способ Лагранжа* находит применение при решении ряда специальных задач, например при расчете волновых движений.

Способ Эйлера применим и удобен для большего круга задач, решаемых в технической гидромеханике. В этом способе движение жидкости описывается функциями, выражающими изменения скоростей в точках некоторого неподвижного участка, выбранного в пределах потока. В данный момент времени в каждой точке этого участка, определяемой координатами x , y , z , находится частица жидкости, имеющая некоторую скорость V (скорость полюса). Эта скорость называется *мгновенной местной скоростью*. Совокупность мгновенных местных скоростей представляет векторное поле, называемое *полем скоростей*. В общем случае поле скоростей изменяется во времени и по координатам:

$$V_x = f(x, y, z, t); \quad V_y = f(x, y, z, t); \quad V_z = f(x, y, z, t). \quad (3.1)$$

Переменные x , y , z и t называются *переменными Эйлера*.

Течение жидкости может быть установившимся (стационарным) или неустановившимся (нестационарным). При установившемся движении течение жидкости неизменно во времени, т. е. время t в уравнениях (3.1) отсутствует.

Векторными линиями поля скоростей являются линии тока.

Линия тока – кривая в потоке движущейся жидкости, в каждой точке которой в данный момент времени вектор местной скорости направлен по касательной в этой точке (рис. 3.1).

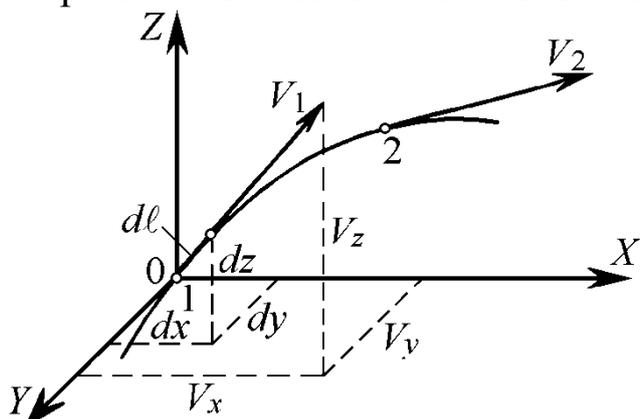


Рис. 3.1. Схема к определению линии тока

Как следует из определения, составляющие скорости, нормальные к линии тока, в любой точке этой линии равны нулю. Уравнение линии тока определяется из условия совпадения направления касательной к линии тока с направлением вектора местной скорости в каждой точке. Направляющие косинусы (косинусы углов касательной к линии тока с осями координат) равны

где dx , dy и dz – проекции элемента линии тока $d\ell$ на оси координат.

$$\frac{dx}{d\ell}, \frac{dy}{d\ell} \text{ и } \frac{dz}{d\ell},$$

Направляющие косинусы вектора скорости равны

$$\frac{V_x}{V}, \frac{V_y}{V}, \frac{V_z}{V}.$$

Тогда на линии тока имеем

$$\frac{dx}{d\ell} = \frac{V_x}{V}, \frac{dy}{d\ell} = \frac{V_y}{V}, \frac{dz}{d\ell} = \frac{V_z}{V}$$

или

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \frac{d\ell}{V}. \quad (3.2)$$

Отсюда дифференциальные уравнения линий тока для данного момента времени

$$\frac{dx}{V_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{V_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{V_z(x,y,z,t)}. \quad (3.3)$$

Здесь время t рассматривается как параметр, имеющий заданное значение. Для установившегося движения жидкости уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx}{V_x(x,y,z)} = \frac{dy}{V_y(x,y,z)} = \frac{dz}{V_z(x,y,z)}. \quad (3.4)$$

Очевидно, что в условиях установившегося течения линия тока совпадает с траекторией частицы и не изменяет своей формы с течением времени.

Если в движущейся жидкости взять бесконечно малый контур и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая **трубкой тока**. Часть потока, заключенная внутри трубки тока, называется **элементарной струйкой**. При стремлении поперечных размеров элементарной струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока.

В любой точке трубки тока в данный момент времени проходит единственная линия тока.

Из определения линии тока следует, что ни одна частица жидкости ни в одной точке трубки тока не может проникнуть внутрь струйки или выйти наружу. Трубка тока, таким образом, является как бы непроницаемой стенкой, а элементарная струйка представляет собой самостоятельный элементарный поток.

Живым сечением струйки, или просто сечением струйки, называется сечение, нормальное к каждой линии тока в пределах трубки тока. В силу малости живого сечения элементарной струйки местные скорости жидкости в его пределах можно считать одинаковыми. В общем случае живое сечение потока конечных размеров может быть неплоским.

При установившемся движении струйки жидкости существуют физически, т. к. непроницаемые для потока трубки тока неизменны во времени. При неустановившемся движении в связи с изменяемостью поля скоростей во времени струйки являются только мгновенными, т. к. трубки тока непрерывно меняются.

При изучении движения жидкости используются также понятия смоченный периметр и гидравлический радиус.

Смоченным периметром называется длина линии, по которой жидкость в живом сечении соприкасается с твердыми поверхностями, ограничивающими поток. Смоченный периметр χ для напорного потока равен длине всего периметра сечения. Под **напорным потоком** здесь понимается такой поток, который ограничен твердыми поверхностями. Примером его может служить поток в трубе, все сечение которой заполнено движущейся жидкостью и стенки которой испытывают давление со стороны потока, отличающееся от давления окру-

жающей среды. Для данного примера имеем $\chi = 2\pi r$, где r – радиус трубы.

В безнапорных потоках смоченный периметр составляет некоторую часть полного периметра. Примером *безнапорного потока* является поток в реке или канале, а также в трубе, работающей неполным сечением. Для канала прямоугольного сечения смоченный периметр будет равен $\chi = 2bh$, где b и h – соответственно ширина канала и глубина потока в нем.

Для получения сопоставимых оценок потоков разной конфигурации и возможности описывать их едиными формулами используется понятие гидравлического радиуса.

Гидравлическим радиусом называется отношение площади живого сечения S к смоченному периметру χ :

$$R_{\Gamma} = \frac{S}{\chi}. \quad (3.5)$$

3.2. Расход. Уравнение расхода

Расходом называется количество жидкости, протекающее через живое сечение струйки (потока) в единицу времени t . Это количество можно измерить в единицах объема (W), в единицах массы (m) или весовых единицах (G). В связи с этим различают объемный Q , массовый Q_m и весовой Q_G расходы.

Для элементарной струйки, имеющей бесконечно малые поперечные сечения, можем считать мгновенную скорость V одинаковой во всех точках каждого сечения. Тогда для этой струйки имеем:

$$\text{– объемный расход } dQ = \frac{dW}{t} = VdS, \quad [\text{м}^3/\text{с}]; \quad (3.6)$$

$$\text{– массовый расход } dQ_m = \frac{dm}{t} = \rho dQ = \rho VdS, \quad [\text{кг}/\text{с}]; \quad (3.7)$$

$$\text{– весовой расход } dQ_G = \frac{dG}{t} = \rho g dQ = \rho g VdS, \quad [\text{Н}/\text{с}]. \quad (3.8)$$

Для струйки (потока) конечных размеров в общем случае скорость частиц по живому сечению имеет различные значения, поэтому расход надо определять как сумму элементарных расходов в струйках:

$$Q = \int_S VdS.$$

На практике для расчетов используют понятие *средней скорости по сечению* потока $V_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}$, и тогда

$$Q = V_{\text{ср}} S. \quad (3.9)$$

Основываясь на законе сохранения вещества, на предположении о сплошности (неразрывности) течения и на указанном выше свойстве трубки тока, заключающемся в ее "непроницаемости", для установившегося течения несжимаемой жидкости можно утверждать, что объемный расход во всех сечениях элементарной струйки один и тот же:

$$dQ = V_1 dS_1 = V_2 dS_2 = \text{const}. \quad (3.10)$$

Это уравнение называется *уравнением объемного расхода* для элементарной струйки.

Для потока несжимаемой жидкости конечных размеров, ограниченного непроницаемыми стенками (например, трубопровод), можно воспользоваться средней скоростью по сечению

$$Q = V_{\text{ср}1} S_1 = V_{\text{ср}2} S_2 = \text{const}. \quad (3.11)$$

Из этого уравнения следует, что средние скорости в потоке несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площади сечений:

$$\frac{V_{\text{ср}1}}{V_{\text{ср}2}} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Для реальной сжимаемой жидкости формулы (3.10) и (3.11) приемлемы только отчасти, т. к. в этом случае меняется плотность жидкости и на участке потока между двумя рассматриваемыми сечениями будет происходить накопление или убыль количества жидкости.

3.3. Движение жидкой частицы. Понятие о вихревом и потенциальном движении

В потоке движущейся жидкости ее частицы перемещаются в пространстве и меняют свою форму (деформируются).

Рассмотрим жидкую частицу, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с бесконечно малыми ребрами dx , dy , dz , которые параллельны соответствующим осям координат (рис. 3.2).

Считаем вершину A параллелепипеда с координатами x , y , z полюсом, и в некоторый момент времени t в нем местные скорости равны V_x, V_y, V_z .

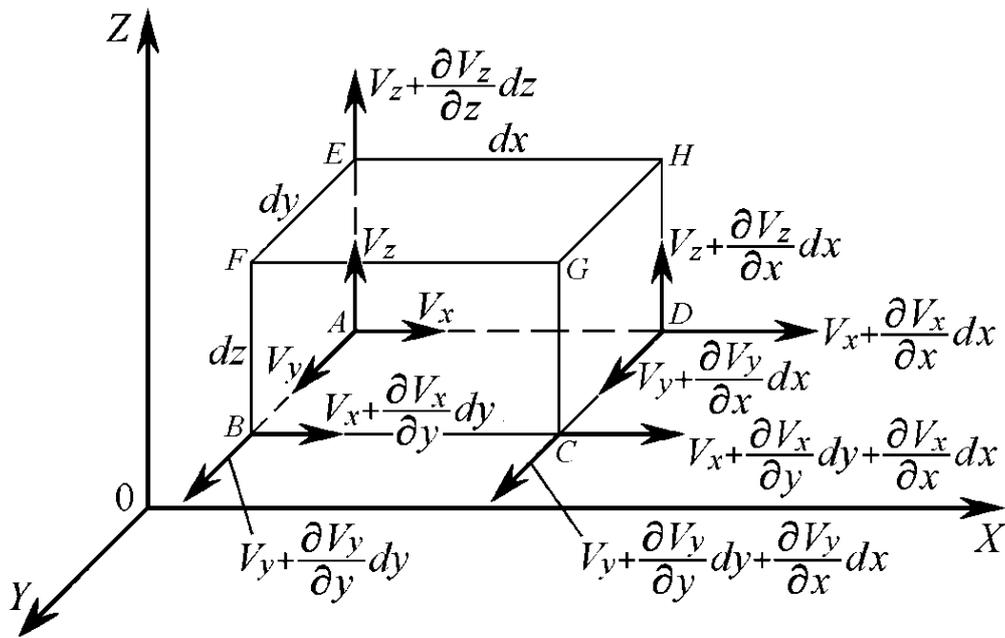


Рис. 3.2. Схема движения жидкой частицы

Тогда поступательное перемещение параллелепипеда как целого за время dt представляется проекциями $V_x dt$, $V_y dt$, $V_z dt$. В плоскости координат XOY это может быть представлено так, как изображено на рис. 3.3, а.

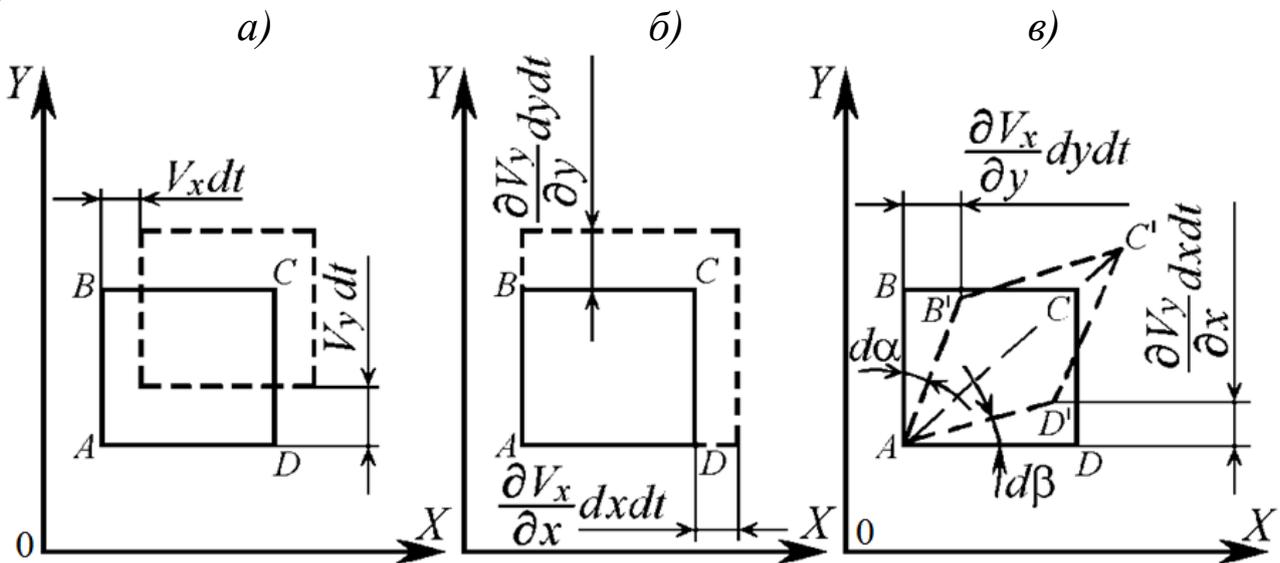


Рис. 3.3. Схемы перемещения и деформации жидкой частицы в плоскости координат XOY

Если скорость – это непрерывная и дифференцируемая функция координат, местные скорости в других вершинах параллелепипеда, выраженные через скорости в точке A , будут иметь значения (см. рис. 3.2), отличные от значений скорости в точке A .

При таких различиях в значениях местных скоростей в вершинах параллелепипеда очевидно, что грани не только перемещаются в пространстве, но и деформируются. В силу малости ребер параллелепипеда можно считать, что в течение малого промежутка времени dt ребра остаются прямыми, и деформацию параллелепипеда можно представить как сумму объемных и угловых деформаций.

Объемная деформация параллелепипеда может быть охарактеризована удлинениями ребер (рис. 3.3, б)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dxdt ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} dydt ; \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} dzdt .$$

Тогда скорости удлинения отрезков единичной длины составят

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} ; \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} .$$

Угловая деформация характеризуется изменениями углов (рис. 3.3, в)

Прямой угол между ребрами AB и AD в плоскости XOY при движении жидкости изменяется на сумму углов $d\alpha + d\beta$.

Угол сдвига $d\alpha$ между начальным положением ребра AB и положением AB' через время dt составит

$$d\alpha \approx \operatorname{tg} d\alpha = \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y} dydt}{dy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} dt .$$

Для угла $d\beta$ по аналогии имеем

$$d\beta \approx \operatorname{tg} d\beta = \frac{\frac{\partial V_y}{\partial x} dxdt}{dx} = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt .$$

Тогда угловая деформация будет

$$d\alpha + d\beta = \frac{\partial V_x}{\partial y} dt + \frac{\partial V_y}{\partial x} dt .$$

Скорость угловой деформации в плоскости XOY равна

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} .$$

В плоскостях YOZ и XOZ скорости угловых деформаций соответственно составят

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} .$$

Обычно скорости угловых деформаций представляют в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right); \\ \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \\ \theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3.12)$$

Индекс при скорости угловой деформации указывает, что угловая деформация происходит в плоскости, нормальной к данной оси координат.

Если приняты скорости угловых деформаций по зависимостям (3.12), для определения истинного перемещения ребер параллелепипеда следует деформированные грани повернуть на некоторые углы. При этом угловая скорость грани $ABCD$ относительно оси OZ найдется как

$$\omega_z = \frac{1}{2} \frac{d\alpha - d\beta}{dt} \quad \text{или} \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right).$$

В итоге для угловых скоростей граней относительно осей OX , OY , OZ имеем

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3.13)$$

Таким образом, движение рассматриваемой грани представляется в виде суммы поступательного перемещения вместе с полюсом и деформированного движения вращения относительно некоторой мгновенной оси, проходящей через полюс.

Этот вывод носит название теоремы Коши – Гельмгольца.

Угловая скорость будет

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (3.14)$$

Вектор угловой скорости ω всегда нормален к плоскости, в которой происходит вращение. Индексы у компонентов угловой скорости показывают направление осей вращения.

Удвоенные компоненты скорости ω_x , ω_y , ω_z называются *компонентами вектора вихря* $\Omega = 2\omega$:

$$\Omega_x = 2\omega_x; \quad \Omega_y = 2\omega_y; \quad \Omega_z = 2\omega_z. \quad (3.15)$$

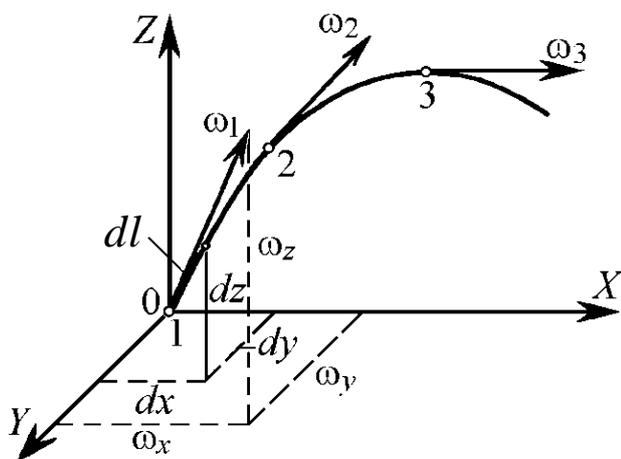


Рис. 3.4. Схема вихревой линии

Совокупность этих векторов составляет *векторное поле*.

Составной частью векторного поля является *вихревая линия* – линия, в каждой точке которой вектор угловой скорости совпадает с касательной к этой линии (рис. 3.4).

Дифференциальные уравнения вихревых линий

$$\frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)}, \quad (3.16)$$

где t – время, рассматриваемое как параметр.

Вихревые линии, так же как и линии тока, при установившемся движении не изменяются во времени. По характеру движения частиц различают вихревое и потенциальное (безвихревое) движение жидкости.

Вихревое движение – движение, при котором частицы жидкости вращаются вокруг мгновенных осей, проходящих через их полюсы.

Движение, при котором описанное выше вращение частиц отсутствует, называется **безвихревым (потенциальным) движением**. В этом случае $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

Тогда согласно формуле (3.13) получим

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Из этого следует, что должна существовать некоторая функция Φ , удовлетворяющая условиям

$$V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad V_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Эта функция называется *потенциалом скорости*. Действительно, учитывая, что потенциал скорости является непрерывной функцией от x, y, z, t и принимая во внимание независимость значений второй производной непрерывной функции от порядка дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z}.$$

Знак минус в формуле (3.18) принят для того, чтобы подчеркнуть, что движение происходит от точек с большим значением потенциала скорости к точкам с меньшим его значением.

3.4. Ускорение жидкой частицы

Ускорение жидкой частицы можно представить в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Так как $\frac{dx}{dt} = V_x$; $\frac{dy}{dt} = V_y$; $\frac{dz}{dt} = V_z$, то в проекциях на оси координат имеем

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z; \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z; \\ \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z. \end{cases} \quad (3.19)$$

Частные производные по времени $\frac{\partial V_x}{\partial t}$; $\frac{\partial V_y}{\partial t}$; $\frac{\partial V_z}{\partial t}$ от проекций скорости называются проекциями *локального (местного) ускорения* в точке. Они характеризуют закон изменения поля скоростей во времени. Очевидно, что локальное ускорение равно нулю при установившемся движении.

Сумму вида $\frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z$ называют проекциями *конвективного ускорения*, поскольку она определяет ускорение частицы при изменении ее положения в поле скоростей (конвекции).

Конвективное ускорение характеризует неоднородность поля скоростей в данный момент времени. Суммы проекций локального и конвективного ускорений называют проекциями *субстанционального* или *полного* ускорения $\frac{dV_x}{dt}$; $\frac{dV_y}{dt}$; $\frac{dV_z}{dt}$.

3.5. Контрольные вопросы

1. В чем заключаются особенности способов описания жидкости по Лагранжу и по Эйлеру?
2. Что такое линия тока, каково ее уравнение?
3. Что такое трубка тока и элементарная струйка жидкости?
4. Могут ли совпасть линия тока и траектория движения частиц?
5. Дайте определение живого сечения струйки, расхода жидкости и средней по живому сечению скорости.
6. В виде какой суммы можно представить движение жидкой частицы? Каковы различия вихревого и безвихревого (потенциального) движения?
7. Запишите выражение для угловой скорости и для ее компонентов. Что характеризуют локальное и конвективное ускорения?
8. Напишите уравнение неразрывности для установившегося движения несжимаемой и сжимаемой жидкости.
9. Что такое смоченный периметр, гидравлический радиус?
10. Какие виды ускорений составляют полное ускорение жидкой частицы? Назовите случаи, когда один из видов ускорений равен нулю.

4. ДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Динамика жидкости – раздел гидромеханики, в котором изучаются законы движения жидкостей в зависимости от приложенных к ним сил.

При заданных внешних силах задача динамики жидкости сводится к определению напряжений и кинематических параметров движения в каждой точке жидкости в любой момент времени, а также к определению гидродинамических сил воздействия потока на тела, ограничивающие поток или препятствующие движению.

В данном разделе рассматривается не реальная жидкость, а несколько упрощенная – невязкая жидкость, т. е. жидкость, лишенная действия сил внутреннего трения (сил вязкости). Это значит, что в потоке нет касательных напряжений, т. е. действующие на жидкость силы являются сжимающими. Нормальные напряжения (давление) в движущейся жидкости обладают теми же свойствами, что и в покоящейся жидкости (см. п. 2.1).

Вместе с исключением из рассмотрения сил вязкости на начальном этапе изучения динамики жидкости будем игнорировать сжимаемость жидкости, т. е. считать $\rho = \text{const}$. Это последнее упрощение реальной жидкости значительно в меньшей степени искажает реальную картину, т. к. сжимаемость реальной жидкости весьма мала (см. рис. 1.2). В технической гидромеханике невязкую и несжимаемую жидкость называют идеальной.

4.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

Рассмотрим установившееся течение идеальной жидкости, находящейся под действием лишь одной массовой силы – силы тяжести, выделив одну из элементарных струек, составляющих поток. Отметим на этой струйке сечениями 1 и 2 участок произвольной длины (рис. 4.1).

Площади сечений составляют соответственно dS_1 и dS_2 . Отброшенные части струйки до сечения 1 и после сечения 2 заменяются реакциями, равномерно распределенными по соответствующим сечениям в виде давлений (нормальных напряжений) p_1 и p_2 . Скорости движения жидкости в сечениях составляют V_1 и V_2 , а высоты расположе-

ния центров тяжести сечений, отсчитанных от произвольной горизонтальной плоскости сравнения, Z_1 и Z_2 .

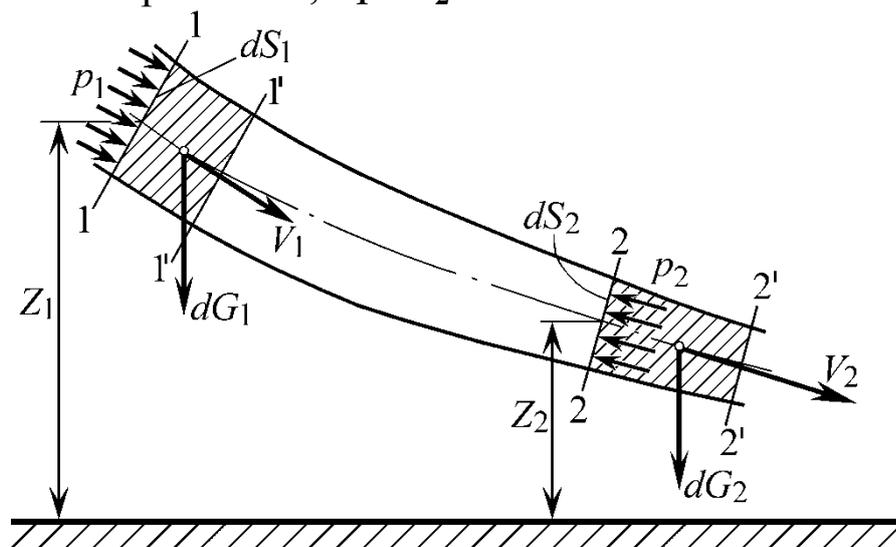


Рис. 4.1. Схема для вывода уравнения Бернулли

За бесконечно малый промежуток времени dt выделенный участок струйки переместится в положение $1'-2'$.

Применим к массе жидкости в объеме участка струйки теорему механики о том, что работа сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии этого тела. Такими силами в рассматриваемом случае являются силы давления и силы тяжести. Определим последовательно работу этих сил и приращение кинетической энергии.

А. Работа сил давления

Работа силы давления в первом сечении положительна, т. к. направление силы давления совпадает с направлением перемещения, и выражается как произведение силы $p_1 dS_1$ на путь $V_1 dt$:

$$A_{p_1} = p_1 dS_1 V_1 dt .$$

Работа силы давления во втором сечении отрицательна, т. к. направление действия силы прямо противоположно направлению перемещения, и запишется в виде

$$- A_{p_2} = -p_2 dS_2 V_2 dt .$$

Силы давления на боковую поверхность рассматриваемого участка работы не производят, т. к. они нормальны к этой поверхности, а следовательно, нормальны и к перемещению. Тогда работа сил давления опишется выражением

$$A_p = A_{p_1} - A_{p_2} = p_1 dS_1 V_1 dt - p_2 dS_2 V_2 dt .$$

С учетом формул (3.6), (3.8) и (3.10)

$$V_1 dS_1 = V_2 dS_2 = \frac{dG_1}{\rho g dt} = \frac{dG_2}{\rho g dt} = \frac{dG}{\rho g dt},$$

работу сил давления можно представить как

$$A_p = (p_1 - p_2) \frac{dG}{\rho g}. \quad (4.1)$$

Б. Работа сил тяжести

Эта работа затрачивается на изменение потенциальной энергии положения участка струйки. Поэтому надо из энергии положения участка жидкости в исходный момент (1–2) вычесть энергию положения участка жидкости через время dt (1'–2'). При этом энергия положения промежуточного участка 1'–2 сократится, т. к. является общей для обоих положений участка, поэтому останется разность элементов 1–1' и 2–2'.

Для элемента 1–1' имеем последовательно:

объем элемента – $V_1 dS_1 dt$, массу элемента – $\rho V_1 dS_1 dt$, силу тяжести – $dG_1 = \rho g V_1 dS_1 dt$ и энергию положения участка 1–1' этой силы

$$\mathcal{E}_{G_1} = Z_1 dG_1 = Z_1 g \rho V_1 dS_1 dt.$$

По аналогии с этим для элемента 2–2' получим

$$\mathcal{E}_{G_2} = Z_2 dG_2 = Z_2 g \rho V_2 dS_2 dt.$$

Тогда работа силы тяжести будет

$$\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_{G_1} - \mathcal{E}_{G_2} = (Z_1 V_1 dS_1 - Z_2 V_2 dS_2) \rho g dt,$$

или, имея в виду уравнение постоянства расхода (3.10), можем записать

$$\mathcal{E}_G = (Z_1 - Z_2) dG. \quad (4.2)$$

В. Приращение кинетической энергии участка струйки

Чтобы определить приращение кинетической энергии рассматриваемого участка струйки за время dt , необходимо из кинетической энергии объема 1'–2' вычесть кинетическую энергию объема 1–2. При вычитании кинетическая энергия промежуточного объема 1'–2 сократится и останется лишь разность кинетических энергий элементов 1–1' и 2–2', сила тяжести которых равна $dG_1 = dG_2 = dG$.

Таким образом, приращение кинетической энергии равно

$$\mathcal{E}_{k_2} - \mathcal{E}_{k_1} = \frac{(v_2^2 - v_1^2) dG}{2g}. \quad (4.3)$$

Сложив работу сил давления (4.1) и силы тяжести (4.2) и приравняв эту сумму приращению кинетической энергии, получим

$$(p_1 - p_2) \frac{dG}{\rho g} + (Z_1 - Z_2)dG = \left(V_2^2 - V_1^2 \right) \frac{dG}{2g}.$$

Разделив это уравнение на dG и раскрыв скобки, можем записать

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + Z_1 - Z_2 = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}.$$

Произведя перегруппировку членов уравнения по сечениям струйки, получим

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \quad (4.4)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости*. Оно было выведено Даниилом Бернулли в 1738 г.

Анализируя полученный результат, можем отметить, что с двумя членами уравнения Бернулли мы уже знакомы (см. п. 2.2). Это *геометрический* (Z) и *пъезометрический* ($p/\rho g$) *напоры*, сумма которых является полным напором в любой точке объема покоящейся жидкости. Третий член уравнения, называемый *скоростным напором*, также имеет линейную размерность

$$\frac{V^2}{2g} = \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} \right] = \text{м}.$$

Сумма геометрического пъезометрического и скоростного напоров $Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$ называется полным напором.

Уравнение Бернулли (4.4) записано для двух произвольно взятых сечений элементарной струйки и выражает равенство полных напоров в этих сечениях.

Таким образом имеем: *для идеальной движущейся жидкости полный напор есть величина постоянная вдоль струйки*.

Поскольку трехчлен уравнения Бернулли, как и все его составляющие, имеет линейную размерность, то приведенный вывод отражает геометрический смысл уравнения Бернулли и может быть представлен графически. Примером, иллюстрирующим это положение, может служить график, приведенный на рис. 4.2.

На графике показано изменение всех трех напоров (высот) вдоль струйки. На участке струйки между сечениями 1 и 2 диаметр струйки не изменяется. Поэтому не меняется и скорость движения жидкости и, как следствие этого, постоянен скоростной напор.

На участке от сечения 2 до сечения 3 струйка плавно сузилась, исходя из уравнения расходов (3.10) скорость жидкости будет возрастать пропорционально уменьшению диаметра струйки. Так на графике в сечении 3 диаметр струйки стал в два раза меньше, чем на участке 1–2, т. е. $d_2 = 0,5d_1$.

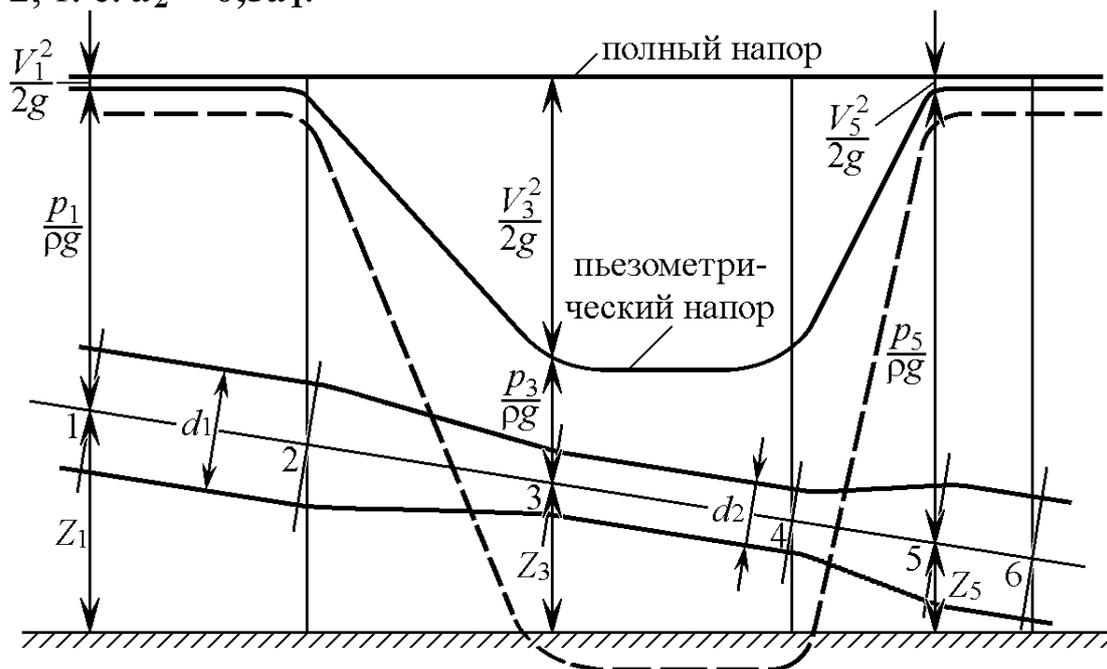


Рис. 4.2. График изменения напоров вдоль струйки идеальной жидкости

Как следствие этого, скорость жидкости в сечении 3 увеличится в 4 раза, а скоростной напор в 16 раз, а сечение 5 вновь стало равно сечению 1. Штриховой линией показана пьезометрическая линия при увеличении расхода в $\sqrt{2}$ раз, вследствие чего скоростные напоры увеличиваются в 2 раза, а в узкой части струйки (между сечениями 3 и 4) давление становится меньше атмосферного.

Уравнение Бернулли можно записать в другой форме. Умножив все составляющие уравнения (4.4) на ускорение g , получим

$$gZ_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = gZ_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}. \quad (4.5)$$

Проанализируем размерности каждого члена этого уравнения.

$$\frac{p}{\rho} = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right] \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{работа} \\ \leftarrow \text{масса} \end{array} \right.$$

Видно, что эта составляющая представляет собой работу (энергию) сил давления, приходящуюся на единицу массы жидкости, т. е. удельную работу сил давления.

Составляющая gZ , очевидно, представляет собой удельную потенциальную энергию (энергию положения), т. к. частица жидкости массой Δm , находясь на высоте Z , обладает энергией положения, равной $\Delta m g Z$.

Составляющая $(V^2/2)$ представляет собой удельную кинетическую энергию, т. к. для той же частицы массой Δm кинетическая энергия составит $\Delta m V^2/2$.

Таким образом, трехчлен уравнения Бернулли представляет сумму удельных энергий частиц жидкости в рассматриваемом сечении. Энергетический смысл уравнения Бернулли можно сформулировать так: *для элементарной струйки идеальной жидкости полная удельная энергия жидкости в любом сечении струйки является постоянной величиной.*

Следовательно, уравнение Бернулли выражает закон сохранения механической энергии в идеальной жидкости. Механическая энергия движущейся жидкости может иметь три формы: энергия положения, давления и кинетическая энергия. Первая и третья формы механической энергии известны из механики, и они в равной степени свойственны твердым и жидким телам. Энергия давления является специфической для движущейся жидкости. Ее легко преобразовать в механическую работу.

Простейшим устройством, с помощью которого осуществляют такое преобразование, является гидравлический цилиндр (рис. 4.3).

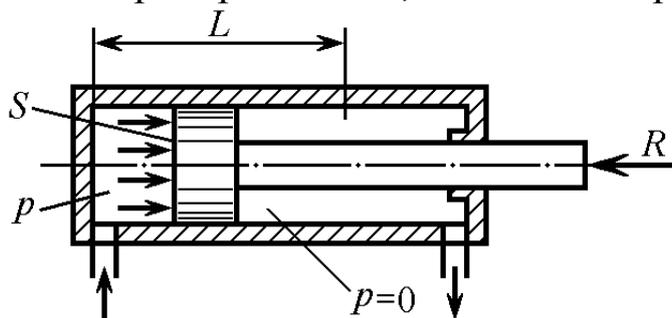


Рис. 4.3. Гидравлический цилиндр

При перемещении поршня влево жидкость должна преодолеть сопротивление движению R . Это произойдет, если в левой полости гидроцилиндра будет избыточное давление p , достаточное, чтобы создать

усилие $pS = R$, где S – рабочая площадь поршня.

На перемещение поршня на ход, величиной L , будет затрачена работа

$$A = pSL.$$

Масса жидкости, которую необходимо подвести в гидроцилиндр для совершения этой работы, равна массе жидкости в объеме цилиндра, т. е.

$$m = SL\rho,$$

где ρ – плотность рабочей жидкости.

Следовательно, работа, приходящаяся на 1 кг массы жидкости (удельная работа), составит

$$\frac{A}{m} = \frac{pSL}{SL\rho} = \frac{p}{\rho}.$$

4.2. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости

В данном параграфе установим общие закономерности движения невязкой жидкости. Для этого в потоке невязкой жидкости выделим элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz , параллельными координатным осям (рис. 4.4).

На массу жидкости в объеме параллелепипеда, равную $\rho dx dy dz$, действуют массовые силы, пропорциональные массе, и поверхностные силы давления окружающей жидкости, распределенные по граням параллелепипеда, перпендикулярные к ним и пропорциональные площадям соответствующих граней.

Обозначим через R плотность распределения равнодействующей массовых сил и через R_x , R_y , R_z – ее проекции на соответствующие оси координат. Тогда проекция на направление Ox массовых сил, действующих на выделенную массу жидкости, равна $R_x \rho dx dy dz$.

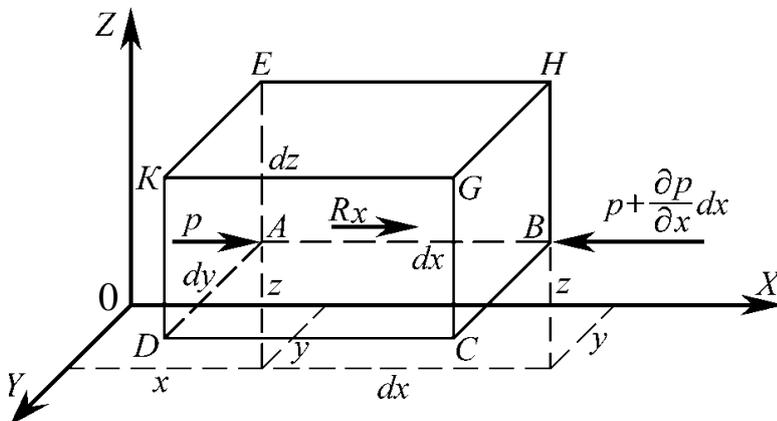


Рис. 4.4. Схема к выводу уравнений движения невязкой жидкости

Обозначим через p давление в точке с координатами (x, y, z) , являющейся одной из вершин параллелепипеда. Пусть это будет точка A на рис. 4.4.

В силу сплошности жидкости и непрерывности функции давления $p = f(x, y, z, t)$

в точке B с координатами $(x + dx, y, z)$ давление будет равно $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Разность давлений между точками A и B равна $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} dx\right)$ и будет одинаковой для любой пары выбранных на гранях точек с одинаковыми координатами (y, z) .

Проекция на ось OX результирующей силы давления равна

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Запишем уравнение движения в направлении оси OX :

$$R_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dV_x}{dt},$$

после деления на массу $\rho dx dy dz$ получим

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt}.$$

Аналогично получим уравнения движения в направлении осей OY и OZ . Тогда система дифференциальных уравнений движения невязкой жидкости имеет вид

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt}; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt}; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Эти дифференциальные уравнения были впервые получены Л. Эйлером в 1755 г.

Члены этих уравнений представляют собой соответствующие ускорения, а смысл каждого из уравнений заключается в следующем: **полное ускорение частицы вдоль координатной оси складывается из ускорения от массовых сил и ускорения от сил давления.**

Уравнения Эйлера в таком виде справедливы как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости, а также для случая, когда наряду с силой тяжести действуют другие массовые силы при относительном движении жидкости. При этом в величины R_x , R_y и R_z должны войти компоненты ускорения переносного (или поворотного) движения. Так как при выводе уравнений (4.6) не накладывались условия стационарности движения, они справедливы и для неустановившегося движения.

Учитывая, что для неустановившегося движения компоненты (проекции) скорости V являются функциями времени, можно записать ускорение выделенной массы жидкости в развернутом виде (см. п. 3.4):

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Так как $\frac{dx}{dt} = V_x$, $\frac{dy}{dt} = V_y$, $\frac{dz}{dt} = V_z$, уравнения Эйлера (4.6) можно переписать в виде

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z. \end{cases} \quad (4.7)$$

Для случая покоящейся жидкости ($V_x = V_y = V_z = 0$) уравнения (4.6) совпадают с дифференциальными уравнениями равновесия жидкости (2.7).

В задачах динамики жидкости массовые силы обычно считаются заданными (известными). Неизвестными являются функции давления $p = f(x, y, z, t)$ проекции скорости $V_x = f(x, y, z, t)$, $V_y = f(x, y, z, t)$, $V_z = f(x, y, z, t)$ и плотность $\rho = \rho(x, y, z, t)$, т. е. всего пять неизвестных функций.

Для определения неизвестных переменных используется система уравнений Эйлера. Поскольку число неизвестных превышает число уравнений к системе Эйлера, добавляют уравнение неразрывности и уравнение состояния среды.

Для несжимаемой жидкости уравнение состояния $\rho = \text{const}$ и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Профессором Казанского университета И. С. Громекой в 1881 г. уравнения Эйлера были преобразованы и записаны в иной форме.

Рассмотрим уравнения (4.7). В первом уравнении заменим $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial V_x}{\partial z}$ выражениями из формул (3.13):

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - 2\omega_z \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2\omega_y.$$

Тогда

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_z \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z).$$

Приняв обозначение $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$, можем записать

$$R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z).$$

Аналогично преобразовав два остальных уравнения системы (4.7), получим систему уравнений в форме, данной Громекой:

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z); \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x); \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y). \end{cases} \quad (4.8)$$

Если действующие на жидкость массовые силы обладают потенциалом, то проекции плотности распределения массовых сил R_x , R_y , R_z представляются частными производными от потенциальной функции Π :

$$R_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad R_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad R_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

откуда

$$d\Pi = R_x dx + R_y dy + R_z dz. \quad (4.9)$$

Подставив значения R_x , R_y , R_z в систему (4.8), получим систему дифференциальных уравнений движения несжимаемой жидкости под действием сил, имеющих потенциал:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_y}{\partial t} + 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_z}{\partial t} + 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y). \end{cases} \quad (4.10)$$

При установившемся движении частные производные составляющих скорости по времени равны нулю

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнения системы (4.10) примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y). \end{cases} \quad (4.11)$$

Умножим каждое из уравнений системы (4.11) на соответствующие проекции элементарного перемещения, равные $dx = V_x dt$; $dy = V_y dt$; $dz = V_z dt$, и сложим уравнения. Будем иметь

$$\begin{aligned} & d \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \\ & = -2 \left[(V_z \omega_y - V_y \omega_z) dx + (V_x \omega_z - V_z \omega_x) dy + (V_y \omega_x - V_x \omega_y) dz \right]. \end{aligned}$$

Правую часть полученного выражения можно переписать в виде определителя, т. е.

$$d \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Если определитель равен нулю, т. е.

$$d \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 0, \quad (4.13)$$

то имеем

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}. \quad (4.14)$$

Это уравнение Бернулли для элементарной струйки при установившемся движении невязкой жидкости.

Чтобы привести уравнение (4.14) к виду уравнения Бернулли, полученному в п. 4.1, определим вид потенциальной функции Π для случая, когда действует только одна массовая сила – сила тяжести. В этом случае $R_x = R_y = 0$ и $R_z = -g$ (ось OZ направлена вверх). Из формулы (4.9) имеем

$$-d\Pi = -gdz \quad \text{или} \quad \Pi = gz + C. \quad (4.15)$$

Подставив это выражение Π в уравнение (4.14), получим

$$gZ + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad \text{или} \quad Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const}.$$

Последнее выражение полностью соответствует уравнению Бернулли (4.4).

Выясним, в каких случаях установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости справедливо уравнение Бернулли или, иначе говоря, в каких случаях определитель в правой части уравнения (4.13) обращается в нуль.

Известно, что определитель равен нулю, если две строки (или два столбца) равны или пропорциональны друг другу или если одна из его строк или один из столбцов равен нулю. Рассмотрим эти случаи последовательно.

А. Пропорциональны члены первой и третьей строк, т. е. уравнение Бернулли справедливо, если

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}.$$

Это условие выполняется на линиях тока (3.2).

Б. Пропорциональны члены первой и второй строк, т. е. уравнение Бернулли справедливо, если

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}.$$

Это условие выполняется на вихревых линиях (3.16).

В. Пропорциональны члены второй и третьей строк:

$$\frac{\omega_x}{V_x} = \frac{\omega_y}{V_y} = \frac{\omega_z}{V_z} = a = \text{const}. \quad (4.16)$$

Тогда $\omega_x = aV_x$; $\omega_y = aV_y$; $\omega_z = aV_z$.

Подставим эти выражения в уравнения вихревой линии

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dx}{aV_x}, \quad \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dy}{aV_y}, \quad \frac{dz}{\omega_z} = \frac{dz}{aV_z},$$

т. е. получаем уравнения линии тока (3.2).

Таким образом, в этом случае векторы скорости V и угловой скорости ω параллельны. Такое движение называется винтовым. Частицы жидкости при винтовом движении перемещаются по линиям тока (т. к. движение установившееся, то линии тока и траектории частиц совпадают), а линии тока в то же время являются вихревыми линиями, т. е. частицы еще и вращаются вокруг линии тока.

Из условия (4.16) видно, что равенство нулю определителя в этом случае не зависит от координат. Следовательно, постоянство

удельной энергии при винтовом движении обеспечивается во всем пространстве, занятом находящейся в винтовом движении жидкостью. Уравнение Бернулли при винтовом движении применимо в любой точке жидкости.

Г. Равенство нулю второй строки определителя $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ означает, что движение безвихревое (потенциальное).

Уравнение Бернулли (4.14) действительно для всех точек области потенциального движения жидкости.

Д. Условие равенства нулю членов третьей строки определителя $V_x = V_y = V_z = 0$ соответствует равновесию (покою) жидкости.

4.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкого газа

Выведенные в предыдущем параграфе уравнения, как отмечалось, приемлемы как для несжимаемой невязкой жидкости, так и подобного ей газа. Такое состояние газа возможно только при постоянстве давления и температуры по длине потока. В противном случае, вследствие большой сжимаемости газа (см. п. 1.3) зависимости, полученные при $\rho = \text{const}$, становятся для газа неприменимыми.

Поэтому выражение (4.13) проинтегрируем при $\rho = \text{var}$.

В этом случае имеем

$$\Pi + \frac{V^2}{2} + \int_p \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

И по аналогии с предыдущим примером, когда действует только одна массовая сила – сила тяжести, будет

$$gz + \frac{V^2}{2} + \int_p \frac{dp}{\rho} = \text{const.} \quad (4.17)$$

Напомним, что данное уравнение выражает полную удельную энергию в любом сечении элементарной струйки.

Интеграл (последнее слагаемое) в уравнении (4.17) характеризует изменение состояния газа от некоторых начальных до рассматриваемых условий (параметров). Обычно начальным условием считается плотность свободного газа при атмосферном давлении и принятой температуре. Связь термодинамических параметров для газа описывается уравнением Клайперона (1.14), и различают изотермический и адиабатический процессы.

А. Изотермический процесс

Процесс, характеризующийся постоянством температуры, является наиболее вероятным процессом, наблюдаемым при транспортировании газа, по трубам. Это объясняется хорошим теплообменом между потоком газа и внешней средой.

Изотермический процесс выражается зависимостью

$$\frac{p}{\rho} = C = \text{const},$$

где $C = \frac{p_0}{\rho_0}$ – постоянная, определяемая начальными параметрами p_0 и ρ_0 .

Тогда
$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}.$$

Вычисляя интеграл $\int \frac{dp}{\rho}$ в пределах от p_0 до p , получим

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{const}.$$

Отсюда уравнение Бернулли для газа при изотермическом процессе имеет вид

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{const}. \quad (4.18)$$

Б. Адиабатический процесс

Такой процесс возможен, если изменение состояния газа происходит с большой скоростью, когда можно пренебречь теплообменом между потоком газа и внешней средой. Адиабатический процесс выражается зависимостью

$$\frac{p}{\rho^k} = C = \text{const},$$

где k – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости газа при постоянном давлении (C_p) к его теплоемкости при постоянном объеме (C_w), т. е.

$$k = \frac{C_p}{C_w}.$$

Для начальных условий будет $C = \frac{p_0}{\rho_0^k}$ или $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$.

Отсюда
$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Тогда решение интеграла $\int \frac{dp}{\rho}$ имеет вид

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{1/k} dp = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \left(p^{(k-1)/k} - p_0^{(k-1)/k} \right).$$

После преобразований получим

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

С практически небольшой погрешностью решение интеграла запишем в виде

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}.$$

Тогда уравнение (4.17) запишется как

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (4.19)$$

Имея в виду уравнение Клайперона (1.14), выражение (4.19) можем переписать

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const.} \quad (4.20)$$

Следовательно, при больших перепадах давления и температуры по длине струйки полная удельная энергия равна сумме потенциальной, кинетической и тепловой [последнее слагаемое в формуле (4.20)] энергии.

Уравнения (4.18) и (4.20) являются основными при исследованиях и расчетах установившегося движения сжимаемого невязкого газа.

4.4. Контрольные вопросы

1. Что подразумевают под понятием «невязкая жидкость»?
2. Как замыкается система уравнений Эйлера для движения невязкой жидкости? Какие величины в них известны, а какие нет?
3. Каков основной смысл преобразований уравнений Эйлера, выполненных Громекой, и представления этих уравнений в форме,

данной Громекой? Запишите уравнения Эйлера – Громеки.

4. Какой вид имеет уравнение движения невязкой жидкости вдоль линии тока?

5. Как записывается уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой несжимаемой жидкости, если из массовых сил действует только сила тяжести?

6. Как изменяется уравнение Бернулли по сравнению с предыдущим случаем, если на жидкость помимо силы тяжести действуют и силы инерции?

7. Что такое удельная энергия?

8. Какой физический закон выражает уравнение Бернулли?

9. Что такое пьезометрический, скоростной и полный напор? Как они изменяются по длине (вдоль направления движения)?

10. Справедливо ли уравнение Бернулли на линиях тока?

5. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, т. к. вязкая жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительно сдвигу своих слоев и частиц. Нормальные и касательные напряжения в вязкой жидкости зависят не только от координат точек жидкости. В данной точке жидкости напряжения зависят от направления действия или, иначе, от ориентации в пространстве площадки, на которую они действуют.

5.1. Напряжения в движущейся вязкой жидкости

Рассмотрим элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz , который выделим из движущейся жидкости (рис. 5.1).

Обозначим напряжения на гранях, ближайших к началу координат ($ABFE$, $AEHD$, $ABCD$), через p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} .

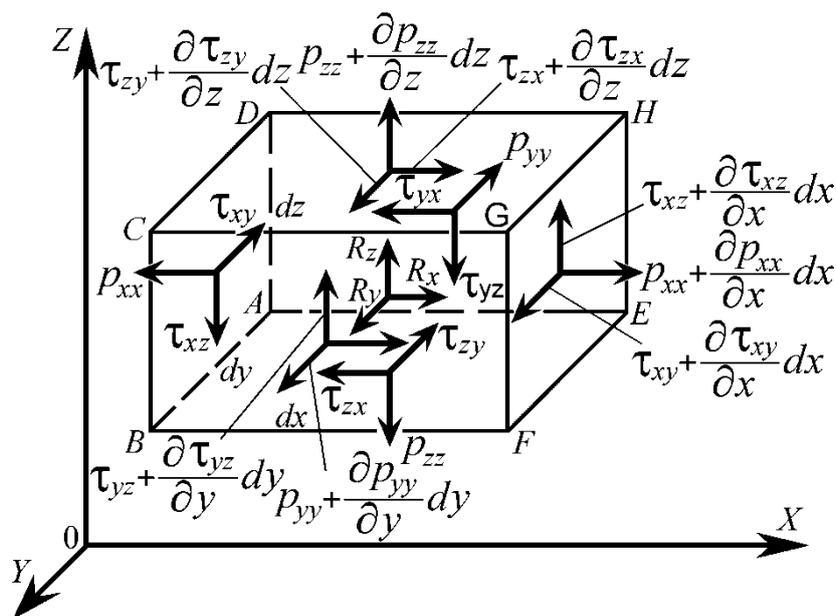


Рис. 5.1. Схема действия напряжений
в движущейся вязкой жидкости

Первый индекс указывает ось, которой перпендикулярна данная грань, т. е. направление нормали к граням, второй – направление действия напряжения, т. е. параллельно какой оси координат оно направлено. Так, касательное напряжение τ_{yx} лежит на грани, перпендикулярной оси OY , и действует в направлении оси OX ; τ_{zx} лежит на грани, перпендикулярной оси OZ , и действует в направлении оси OX и т. д.

Отметим, что в любой точке потока вязкой жидкости касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках, направленные по нормали к линии пересечения этих площадок, равны друг другу, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Считая напряжения непрерывно изменяющимися по объему жидкости, получим значения напряжений на всех гранях параллелепипеда, пользуясь разложением функций напряжения в ряд Тейлора (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Грань	Напряжения	
	нормальные	касательные
<i>ABCD</i>	p_{xx}	$\tau_{xy}; \tau_{xz}$
<i>EFGH</i>	$p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx$	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx;$ $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$
<i>AEHD</i>	p_{yy}	$\tau_{yx}; \tau_{yz}$
<i>BCGF</i>	$p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} dy$	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy;$ $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
<i>ABFE</i>	p_{zz}	$\tau_{zx}; \tau_{zy}$
<i>CDHG</i>	$p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz$	$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz;$ $\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$

Таким образом, напряженное состояние вязкой движущейся жидкости характеризуется шестью независимыми компонентами напряжений:

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Составим уравнения движения массы жидкости, заключенной в параллелепипеде. Сначала рассмотрим сумму проекций сил на направление оси Ox . Для этого воспользуемся фронтальной проекцией параллелепипеда (рис. 5.2, *a*).

Эта сумма равна произведению массы параллелепипеда $\rho dx dy dz$ на проекцию ускорения движения его полюса (центра) dV_x/dt . При

составлении проекций принято считать направления нормальных напряжений совпадающими с направлениями внешних нормалей к граням параллелепипеда.

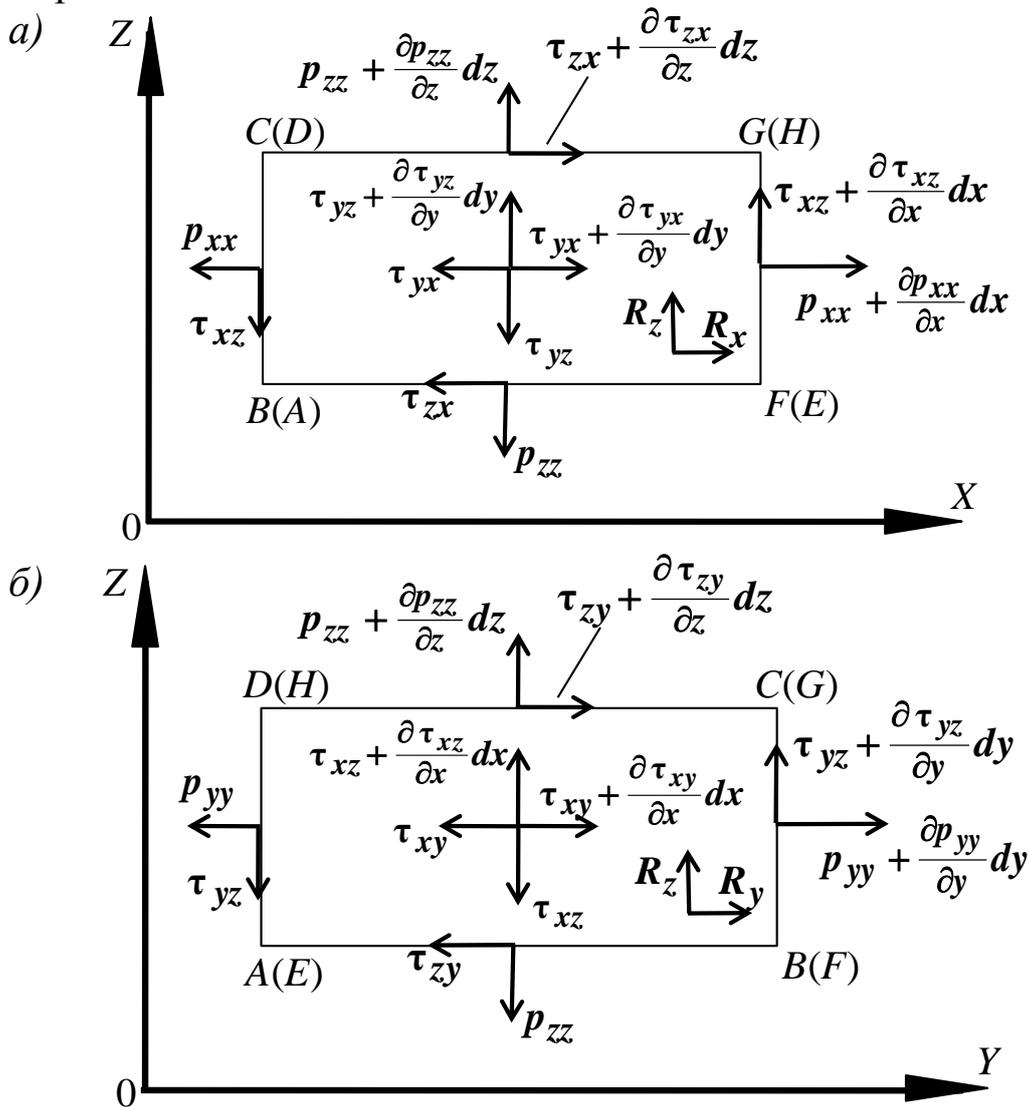


Рис. 5.2. Схемы действия напряжений в проекциях на плоскости координат

В проекции на ось $0X$ уравнение движения имеет вид

$$R_x \rho dx dy dz - p_{xx} dy dz + \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz +$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \rho dx dy dz \frac{dV_x}{dt},$$

где $R_x \rho dx dy dz$ – проекция равнодействующей массовых сил на ось $0X$.

Произведя сокращения подобных членов, получим

$$R_x \rho + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \rho \frac{dV_x}{dt}.$$

Выполнив аналогичные действия для проекций сил на направления осей OY и OZ (рис. 5.2, б), получим систему дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях:

$$\begin{cases} R_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dV_x}{dt}; \\ R_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dV_y}{dt}; \\ R_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) = \frac{dV_z}{dt}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Если считать заданными проекции плотности распределения массовых сил R_x , R_y и R_z , то можно сказать, что в уравнение (5.1) входят десять неизвестных функций:

$$V_x, V_y, V_z, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \rho.$$

Так как уравнений движения всего три, то система уравнений движения вязкой жидкости оказывается незамкнутой. Замыкание этой системы уравнений может быть осуществлено с помощью уравнения неразрывности и других соотношений, устанавливающих связи между неизвестными. Обычно эти соотношения вводятся на основе гипотез и потому обязательно должны быть подтверждены экспериментально.

В основу получения соотношений между касательными напряжениями τ и скоростями деформации жидких частиц в гидромеханике положен закон внутреннего трения Ньютона (1.18)

$$\tau = \pm \mu \frac{dV}{dn},$$

где μ – динамический коэффициент вязкости; $\frac{dV}{dn}$ – градиент скорости по нормали к направлению движения.

Градиент скорости при слоистом движении жидкости выражает скорость угловой деформации частицы (см. п. 3.3):

$$\frac{dV}{dn} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{т. е.} \quad \tau = \pm \mu \frac{d\theta}{dt}.$$

Распространяя закон вязкого трения на трехмерное (пространственное) движение, получим для касательных напряжений:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{dV_x}{dy} + \frac{dV_y}{dx} \right); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{dV_y}{dz} + \frac{dV_z}{dy} \right); \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_z}{dx} \right). \end{cases} \quad (5.2)$$

В каждой точке движущейся вязкой жидкости кроме касательных напряжений есть нормальные напряжения, значения которых зависят от направления действия. Последние являются следствием проявления вязкости и в гидромеханике описываются зависимостями

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + 2\mu \frac{dV_x}{dx}; \\ p_{yy} = -p + 2\mu \frac{dV_y}{dy}; \\ p_{zz} = -p + 2\mu \frac{dV_z}{dz}, \end{cases} \quad (5.3)$$

где p – давление, аналогичное давлению, действующему в невязкой жидкости; $2\mu \frac{dV_x}{dx} = p_{xx}^*$, $2\mu \frac{dV_y}{dy} = p_{yy}^*$, $2\mu \frac{dV_z}{dz} = p_{zz}^*$ – добавочные нормальные напряжения от действия сил вязкости.

Добавочные напряжения не зависят от значения давления, но зависят от направления действия.

Перепишем уравнения (5.1), объединив в скобках все члены, зависящие от вязкости:

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{dV_x}{dt}; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{dV_y}{dt}; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}^*}{\partial z} \right) = \frac{dV_z}{dt}. \end{cases}$$

Подставив в эту систему уравнений значения напряжений из (5.2) и (5.3), а также выразив субстанциональное ускорение через ло-

кальное и конвективное (из формулы 3.19), получим систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) в виде

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z. \end{cases} \quad (5.4)$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости.

Эти уравнения носят название *уравнений Навье – Стокса*. Они записаны для неустановившегося движения несжимаемой вязкой жидкости.

Составляющие плотности распределения массовых сил R_x, R_y, R_z считаются заданными, а плотность ρ и кинематическая вязкость ν (при соответствующем обосновании) – постоянными.

Тогда полученные уравнения совместно с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему: при четырех уравнениях имеем четыре неизвестных функции p, V_x, V_y, V_z .

Общее решение нелинейных дифференциальных уравнений Навье – Стокса пока не найдено. Но в ряде случаев получены частные решения. Для этого должны быть заданы начальные и граничные условия.

Начальными условиями обычно задается распределение скоростей в области движения жидкости в некоторый момент времени. Это обычно удается практически осуществить только на основе экспериментальных данных.

Граничные условия задаются значениями скорости и давления на границах потока. На твердой границе используется условие прилипания частиц жидкости к твердому телу, т. е., например, на неподвижной твердой границе скорость потока будет равна нулю.

Границей потока может служить и свободная поверхность. В этом случае граничное условие – давление во всех точках свободной поверхности одинаково и равно давлению во внешней среде.

5.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости при установившемся движении

В этом частном случае удастся получить решение уравнений Навье – Стокса. Представим дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Громеки. Для установившегося движения несжимаемой жидкости уравнения имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu \nabla^2 V_x = 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z); \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu \nabla^2 V_y = 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x); \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + \nu \nabla^2 V_z = 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y), \end{cases} \quad (5.5)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Умножим уравнения (5.5) на соответствующие проекции элементарного перемещения dx , dy , dz вдоль струйки и просуммируем:

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) - \nu(\nabla^2 V_x dx + \nabla^2 V_y dy + \nabla^2 V_z dz) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

В этом выражении вычитаемое можно рассматривать как работу сил вязкости на элементарном перемещении вдоль линии тока, отнесенную к единице массы жидкости.

Введя обозначение $dA = -\nu(\nabla^2 V_x dx + \nabla^2 V_y dy + \nabla^2 V_z dz)$, получим

$$d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A\right) = 0.$$

Так как определитель равен нулю из-за пропорциональности первой и третьей строк [см. уравнение (4.15)]. После интегрирования будем иметь

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}. \quad (5.7)$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, получим

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}. \quad (5.8)$$

Для двух точек одной и той же линии тока можно записать

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{A_1}{g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{A_2}{g}.$$

Имея в виду, что на практике в большинстве случаев удельная работа сил вязкости $A_2 > A_1$, введем обозначение h_{1-2} , называемое потерями полного напора на рассматриваемом участке (или просто потерями напора):

$$\frac{A_2 - A_1}{g} = h_{1-2}.$$

Тогда окончательно запись *уравнения Бернулли для установившегося движения элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости* имеет вид

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (5.9)$$

Для *элементарной струйки сжимаемого вязкого газа* по аналогии с изложенным [с учетом (4.20)], получим уравнение Бернулли в виде

$$Z_1 + \frac{k}{(k-1)g} RT_1 + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{k}{(k-1)g} RT_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (5.10)$$

Принятые здесь обозначения соответствуют обозначениям в п. 4.3.

Та часть энергии, которая затрачена на работу сил вязкости, превращается из механической в тепловую. Такой процесс необратим, т. е. обратное превращение невозможно из-за рассеивания тепла в окружающее пространство. Это называется *диссипацией энергии*.

5.3. Уравнение Бернулли для потока при установившемся движении вязкой жидкости

Полученное в предыдущем параграфе уравнение Бернулли для струйки вязкой несжимаемой жидкости при установившемся движении является основой для вывода уравнения Бернулли для потока. Главной сложностью при решении этого вопроса является определение закона изменения скорости в поперечном сечении.

В этой связи ниже установим возможность использования для расчетов средней скорости по живому сечению потока.

5.3.1. Удельная энергия потока

Удельная энергия потока (отнесенная к единице веса) складывается из удельной потенциальной и кинетической энергий.

А. Удельная потенциальная энергия потока

В плавно изменяющемся установившемся потоке

$$V_x \approx V_i; \quad V_y \approx 0; \quad V_z \approx 0; \quad \partial V / \partial t = 0,$$

а уравнения движения (5.4) имеют вид

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = \frac{\partial V_x}{\partial t} V_x; \\ R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

где $V_i = V_x$ – местная скорость частиц жидкости в i -й точке живого сечения потока.

Два последних уравнения аналогичны уравнениям Эйлера для покоящейся жидкости (2.7). Отсюда можно сделать вывод, что при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости давление по живому сечению распределяется по гидростатическому закону, т. е.

$$Z + \frac{P}{\rho g} = \text{const.}$$

Исходя из этого, теперь можно определить в уравнении Бернулли для потока удельную потенциальную энергию применительно к любой выбранной в данном живом сечении точке так же, как и для элементарной струйки.

Однако надо иметь в виду, что для больших масс движущейся жидкости (канал, река) это утверждение может и не выполняться. Если поле скоростей потока имеет искривление линии тока, то частицы жидкости движутся по криволинейным траекториям, и гидростатический закон распределения давления в живом сечении нарушается.

Б. Удельная кинетическая энергия потока

Удельная кинетическая энергия массы жидкости, протекающей через живое сечение в единицу времени, вычисленная по местным скоростям потока и отнесенная к единице веса, равна

$$E_{ki} = \frac{\int_S \rho V_i dS \frac{V_i^2}{2}}{\rho g Q} = \frac{1}{2gQ} \int_S V_i^3 dS, \quad (5.12)$$

где $\int_S \rho V_i dS \frac{V_i^2}{2}$ – кинетическая энергия массы жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение, найденной по элементарным массам ($m_i = \rho V_i dS$), проходящим через площадки dS со скоростью V_i . Как уже отмечалось выше, вычисление E_{ki} по местным скоростям потока весьма затруднительно, т. к. функция $V_i = f(x, y, z)$ зачастую неизвестна.

Гораздо проще вычислить удельную кинетическую энергию по средней скорости в живом сечении $V_{cp} = Q/S$. В этом случае удельная кинетическая энергия при расходе Q и средней скорости V_{cp} будет

$$E_{kcp} = \frac{\rho Q \frac{V_{cp}^2}{2}}{\rho g Q} = \frac{V_{cp}^2}{2g}. \quad (5.13)$$

Возьмем отношение E_{ki} к E_{cp} , обозначив его через α :

$$\alpha = \frac{E_{ki}}{E_{cp}} = \frac{1}{SV_{cp}^3} \int_S V_i^3 dS, \quad (5.14)$$

т. е. α есть отношение действительной кинетической энергии массы жидкости, протекающей через живое сечение потока, к кинетической энергии, вычисленной в предположении, что во всех точках живого сечения местные скорости V_i равны средней скорости V_{cp} .

α называется *коэффициентом кинетической энергии* или *коэффициентом Кориолиса*. При равномерном распределении скоростей по живому сечению потока (рис. 5.3, а) коэффициент α равен единице, а при реальном распределении скоростей (рис. 5.3, б) α всегда больше единицы.

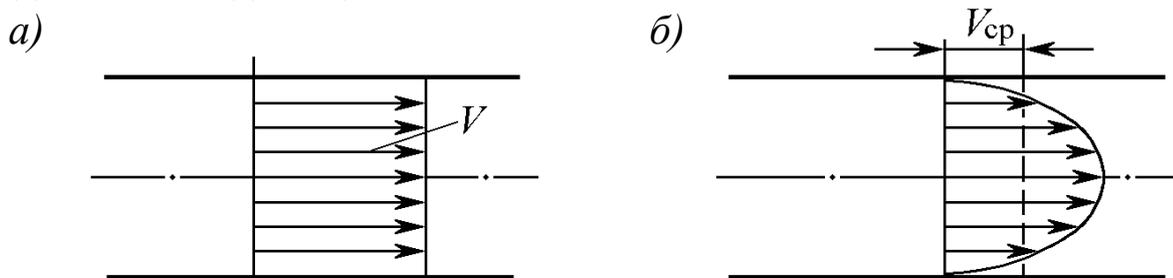


Рис. 5.3. Распределение скоростей по живому сечению потока невязкой (а) и реальной жидкости (б)

Последнее можно доказать, если в формуле (5.14) местную скорость V_i выразить в виде суммы:

$$V_i = V_{cp} + \Delta V,$$

где ΔV – знакопеременная добавка скорости.

Тогда имеем

$$\alpha = \frac{1}{S} \int \left(\frac{V_{cp} + \Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS = \frac{1}{S} \int \left(1 + \frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS.$$

Далее можем записать

$$\alpha = \frac{1}{S} \int \left[1 + 3 \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^2 + 3 \frac{\Delta V}{V_{cp}} + \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 \right] dS.$$

Расход жидкости через живое сечение потока

$$Q = \int_S (V_{cp} + \Delta V) dS = \int_S V_{cp} dS + \int_S \Delta V dS.$$

Но $\int_S V_{cp} dS = Q$ и тогда $\int_S \Delta V dS = 0$.

Далее в силу знакопеременности ΔV будет $\int_S \left(\frac{\Delta V}{V_{cp}} \right)^3 dS \approx 0$.

Таким образом
$$\alpha = 1 + \frac{3}{SV_{cp}^2} \int (\Delta V)^2 dS. \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что для потока реальной жидкости $\alpha > 1$. Значения коэффициента α определяются экспериментально.

Рассматривая выражение (5.15), можно несколько иначе сформулировать физический смысл коэффициента α – это безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по живому сечению потока реальной жидкости.

5.3.2. Уравнение Бернулли для потока

Исходя из вышеизложенного, уравнение Бернулли для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя сечениями потока, в которых движение является плавно изменяющимся, будет иметь вид

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_{cp2}^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (5.16)$$

Отметим, что движение должно удовлетворять условиям плавной изменяемости только в рассматриваемых сечениях, а на участке между ними движение может быть и не плавно изменяющимся.

Аналогичные коррективы необходимо внести и в уравнение (5.10) для потока сжимаемого вязкого газа.

Все члены уравнения (5.16), как и для элементарной струйки, имеют линейную размерность и могут быть представлены графически. Примером может служить график, представленный на рис. 5.4.

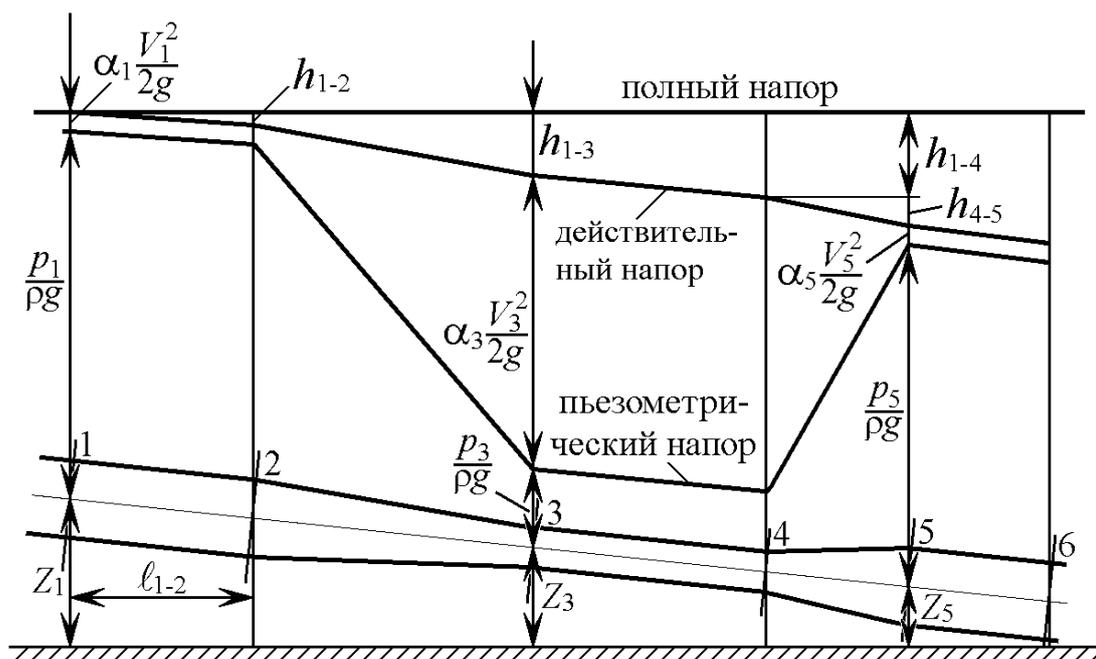


Рис. 5.4. Графическое представление уравнения Бернулли для потока реальной жидкости

Из графика видно, что действительный напор (среднее значение полной удельной энергии жидкости) в направлении движения потока неуклонно уменьшается. Это обусловлено постоянной потерей энергии на гидросопротивлениях. Отношение потерь напора к длине участка, на котором эти потери происходят, называется **гидравлическим уклоном**.

Для участка между сечениями 1 и 2 гидравлический уклон I определится из выражения

$$I = \frac{h_{1-2}}{l_{1-2}}, \quad (5.17)$$

где h_{1-2} и l_{1-2} — соответственно потери напора и расстояние между сечениями 1–2.

Исходя из уравнения (5.16), можем записать

$$I = \frac{\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} \right) - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_{cp2}^2}{2g} \right)}{\ell_{1-2}}$$

или в общем виде

$$I = -\frac{d}{d\ell} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V_{cp}^2}{2g} \right). \quad (5.18)$$

Кроме гидравлического уклона на практике находит применение понятие *пьезометрического уклона*

$$I_{\Pi} = -\frac{d}{d\ell} \left(Z + \frac{p}{\rho g} \right). \quad (5.19)$$

Уравнение Бернулли (5.16) применимо не только для жидкостей, но и для газов при условии, что скорость их движения значительно меньше скорости звука. Кроме того, необходимо иметь в виду, что полученное уравнение Бернулли требует корректировки в задачах, в которых плотность газа нельзя считать постоянной (см. п. 4.3).

5.4. Общие сведения о гидравлических потерях

Потери удельной энергии (напора) или, как их часто называют, гидравлические потери зависят от формы, размеров русла, скорости течения и вязкости жидкости, а иногда и от абсолютного давления в ней.

Механизм действия сил сопротивления очень сложен. Аналитически пока не удалось получить универсальные соотношения для их вычисления. Поэтому при расчетах потерь напора используют, как правило, эмпирические зависимости.

Как показывают опыты, в большинстве случаев гидравлические потери приблизительно пропорциональны скорости течения жидкости во второй степени, поэтому принят следующий общий способ выражения гидравлических потерь полного напора в виде

$$h = \xi \frac{V_{cp}^2}{2g}. \quad (5.20)$$

В общем случае показатель степени у V_{cp} может принимать значение от 1 до 2. Такое выражение удобно тем, что включает в себя безразмерный коэффициент пропорциональности ξ , называемый коэффициентом потерь, значение которого для данного русла в опреде-

ленном приближении может считаться постоянным. Очевидно, что ξ есть отношение потерянному напору к скоростному напору.

Гидравлические потери обычно принято разделять на местные потери и потери по длине русла.

Местные потери энергии обусловлены так называемыми местными гидравлическими сопротивлениями, вызывающими деформацию потока из-за местных изменений формы и размера русла.

На рис. 5.5 приведены примеры типичных местных гидравлических сопротивлений.

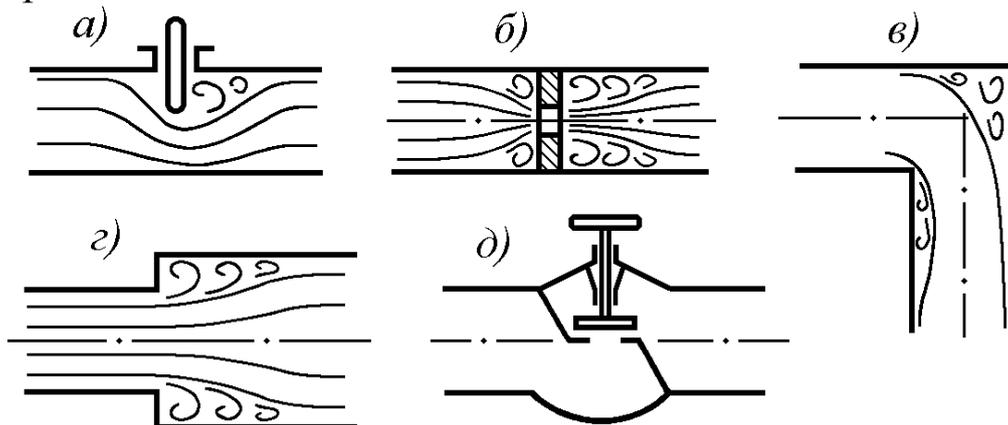


Рис. 5.5. Схемы местных гидравлических сопротивлений:

а – задвижка; б – диафрагма; в – колено; г – внезапное расширение; д – вентиль

При протекании жидкости через местные сопротивления изменяется ее скорость и обычно возникают крупные вихри, которые образуются за местом отрыва потока от стенок. Образуются области, в которых частицы жидкости движутся в основном по замкнутым кривым или близким к ним траекториям.

Местные потери напора определяются по формуле (5.20), которую называют **формулой Вейсбаха**. В ней $V_{\text{ср}}$ – средняя по живому сечению скорость в трубе, в которой установлено данное местное сопротивление. При этом, если диаметр трубы и, следовательно, скорость в ней изменяются по длине (рис. 5.5, г), то за расчетную скорость удобнее принимать большую из скоростей, т. е. ту, которая соответствует меньшему диаметру трубы. В дальнейшем местные потери будем обозначать через h_m .

Каждое местное сопротивление характеризуется своим значением коэффициента сопротивления ξ , которое определяется экспериментально, и только в ряде частных случаев имеется теоретическое решение.

Потери напора по длине – это потери энергии, которые возникают в прямых трубах постоянного сечения и возрастают пропорционально длине трубы. Эти потери обусловлены внутренним трением жидкости (вязкостью), а потому имеют место не только в шероховатых, но и в гладких трубах.

Потери напора по длине можно рассчитывать по общей формуле (5.20), однако удобнее коэффициент ξ связать с относительной длиной трубы, т. е. представить в виде

$$\xi = \lambda \frac{\ell}{d}, \quad (5.21)$$

где λ – коэффициент сопротивления участка трубы длиной ℓ , равной его диаметру d .

Тогда формула (5.20) для определения потерь напора по длине трубопровода $h_{\text{тр}}$ примет вид

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}. \quad (5.22)$$

Эту формулу обычно называют **формулой Вейсбаха – Дарси**, а безразмерный коэффициент λ – **коэффициентом потерь на трение по длине**, или **коэффициентом Дарси**.

Для выяснения физического смысла коэффициента Дарси рассмотрим равномерное движение в трубе объема жидкости цилиндрической формы длиной ℓ и диаметром d , равным диаметру трубы. Составим уравнение сил, действующих на объем – сил давления и силы трения:

$$p_{\text{тр}} \frac{\pi d^2}{4} - \pi d \ell \tau_0 = 0,$$

где τ_0 – напряжение трения на стенке трубы; $p_{\text{тр}}$ – перепад давления между основаниями рассматриваемого цилиндрического объема жидкости.

Отсюда

$$p_{\text{тр}} = \frac{4\ell \tau_0}{d}. \quad (5.23)$$

С другой стороны, из формулы (5.22) имеем

$$p_{\text{тр}} = h_{\text{тр}}^{\text{ср}} \rho g = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{ср}}^2}{2} \rho. \quad (5.24)$$

Приравнявая (5.23) и (5.24), получим

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\left(\rho \frac{v_{\text{ср}}^2}{2}\right)}. \quad (5.25)$$

Таким образом, коэффициент Дарси есть величина, пропорциональная отношению напряжения трения на стенке трубы к динамическому давлению, определенному по средней скорости.

Ввиду постоянства объемного расхода несжимаемой жидкости вдоль трубы постоянного сечения скорость и удельная кинетическая энергия также остаются постоянными, несмотря на наличие гидравлических потерь. Потеря напора в этом случае приводит к снижению пьезометрического напора.

Более подробно о величинах коэффициентов ξ и λ будет рассмотрено в дальнейшем при изучении различных режимов течения жидкости.

5.5. Контрольные вопросы

1. Каково напряженное состояние движущейся вязкой жидкости? В чем его отличие от напряженного состояния движущейся невязкой жидкости?

2. Справедливо ли свойство парности касательных напряжений для движущейся вязкой жидкости?

3. Запишите уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях. Замкнута ли система этих уравнений, сколько в ней неизвестных?

4. Как записываются нормальные и касательные напряжения в движущейся вязкой несжимаемой жидкости? Чему они пропорциональны?

5. Запишите уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях, выделив все члены, зависящие от вязкости.

6. При каких условиях система уравнений Навье – Стокса считается замкнутой?

7. Перечислите граничные и начальные условия, необходимые для получения частных решений уравнений Навье – Стокса.

8. Запишите уравнение Бернулли для элементарной струйки (для линии тока) вязкой жидкости при установившемся движении.

9. При каких условиях можно распространить запись удельной потенциальной энергии, сделанную для элементарной струйки вязкой

жидкости, на поток той же жидкости?

10. Как осуществляется переход от записи удельной кинетической энергии для элементарной струйки к удельной кинетической энергии применительно к рассматриваемому движению?

11. Может ли коэффициент Кориолиса (коэффициент кинетической энергии) быть меньше единицы; равен единице? Запишите уравнение Бернулли для потока при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости.

12. Что такое гидравлический уклон для потока? Запишите выражения для гидравлического уклона.

13. Изменяется ли удельная энергия потока по длине при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости (увеличивается, уменьшается или остается постоянной)?

14. В рассматриваемом движении могут ли напорная линия (линия удельной энергии) и пьезометрическая линия по длине потока располагаться параллельно друг другу? Может ли пьезометрическая линия быть горизонтальной?

6. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Прежде чем приступить к изучению возможных вариантов движения жидкости, рассмотрим следующий вопрос.

При изучении движения реальных жидкостей встречается много трудностей вследствие влияния разнообразных факторов.

Внимательный читатель, очевидно, заметил, что при выводе дифференциальных уравнений состояния жидкостей и газов (особенно при поиске их решений) постоянно вводились различные ограничения, упрощающие решение поставленных задач. Также постоянно подчеркивалась большая значимость экспериментальных исследований как критерия оценки достоверности теоретических гипотез.

Последовательность изучения движения реальных жидкостей может быть представлена рядом этапов.

На первом этапе изучения осуществляется отбор тех факторов, которые являются определяющими для изучаемого процесса. Так в п. 5.4 уже были перечислены факторы, определяющие потери энергии при течении вязкой жидкости. Одни из них влияют больше, другие меньше, а есть и такие, влияние которых в тех или иных конкретных условиях весьма мало.

На следующем этапе изучения осуществляется установление зависимости интересующего параметра от системы выбранных определяющих факторов. Этот этап предопределяет два пути его выполнения: аналитический и экспериментальный. Первый путь, как уже видно, применим лишь для ограниченного числа задач и обычно для упрощенных моделей явлений. Экспериментальный путь, в принципе, может учесть многие факторы, но он требует научно обоснованной постановки опытов, их планирования по виду и количеству, а также систематизации результатов опытов. При этом должно быть обосновано моделирование явлений и гарантирована достоверность результатов.

Все эти вопросы решаются в разделе гидромеханики, называемом *теорией подобия*, которая по существу является теоретической основой эксперимента. Кроме того, теория подобия дает методы построения рациональной структуры теоретических зависимостей и комбинаций входящих в них параметров.

6.1. Теория подобия гидромеханических процессов

В теории подобия различают три составляющих: геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Геометрическое подобие является подобием границ областей течений.

Пусть имеется натуральный объект (поток) (рис. 6.1), который необходимо исследовать, и его модель. Все параметры природы будем отмечать индексом 1, а модели – индексом 2. Модель будет геометрически подобна натурному объекту, если все ее размеры получены путем деления соответствующих размеров натурального образца на некоторое постоянное число M_L , называемое линейным масштабом. Величина линейного масштаба выбирается из практических соображений, которые диктуются, например, возможностями исследовательской лаборатории.

Таким образом, получаем связь между геометрическими параметрами l_1 и l_2 природы и модели в виде

$$\frac{l_1}{l_2} = M_L = \text{idem} . \quad (6.1)$$

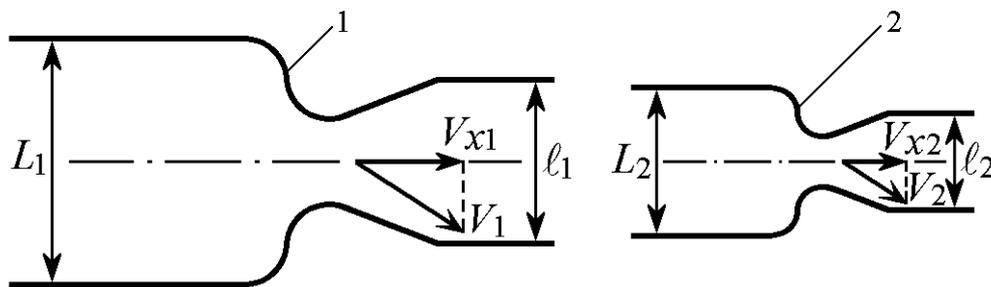


Рис. 6.1. Схема для иллюстрации геометрического и кинематического подобия

Линейные размеры, связанные этим соотношением, называют соответственными или сходственными.

Точки, координаты которых удовлетворяют этому соотношению, называются сходственными.

Кинематическое подобие означает пропорциональность местных скоростей в сходственных точках и равенство углов, характеризующих направление этих скоростей:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{x1}}{V_{x2}} = \frac{V_{y1}}{V_{y2}} = \frac{V_{z1}}{V_{z2}} = M_V = \text{idem} , \quad (6.2)$$

где M_V – масштаб скоростей.

Для неустановившегося течения условие (6.2) должно выполняться в моменты времени, которые называются сходственными и определяются соотношением

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = M_t,$$

где Δt_1 и Δt_2 – интервалы времени, отсчитываемые от момента начала движения или иного условного начала отсчета времени; M_t – масштаб времени.

Из кинематического подобия потоков вытекает геометрическое подобие их линий тока. Действительно, линии тока в потоках 1 и 2 определяются уравнениями

$$\frac{dx_1}{V_{x1}} = \frac{dy_1}{V_{y1}} \quad \text{и} \quad \frac{dx_2}{V_{x2}} = \frac{dy_2}{V_{y2}}.$$

Тогда, если есть кинематическое подобие, можно в соответствии с формулой (6.2) записать

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dy_1 V_{x1} V_{y2}}{V_{y1} dy_2 V_{x2}} = \frac{dy_1}{dy_2} \quad \text{или} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}.$$

Это соотношение означает, что углы наклона касательных к линиям тока в сходственных точках одинаковы для обоих потоков, что и есть геометрическое подобие линий тока.

Кинематическое подобие можно определить и несколько иначе. Если Δt_1 и Δt_2 – малые интервалы времени, за которые жидкие частицы проходят сходственные отрезки путей, то

$$V_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta t_1} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{\Delta l_2}{\Delta t_2}.$$

Отсюда масштаб времени будет

$$M_t = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\Delta l_1 V_2}{\Delta l_2 V_1} = \frac{M_L}{M_V}.$$

Если $M_t = \text{const}$, то и $M_V = \text{const}$, т. к. $M_L = \text{const}$ из геометрического подобия. Постоянство M_V соответствует определению кинематического подобия. Поэтому иногда кинематически подобными называют потоки, для которых отношение отрезков времени, затрачиваемых жидкими частицами для прохождения сходственных отрезков путей, постоянно.

Динамическое подобие выражается в пропорциональности сил, действующих на сходственные объемы в кинематически подобных потоках, и равенстве углов, характеризующих направление действия этих сил.

В потоках жидкости действуют разные силы: силы давления, вязкости, инерции, тяжести и др. Соблюдение их пропорциональности при безусловном геометрическом и кинематическом подобии означает полное гидродинамическое подобие. Осуществить это на практике, как правило, весьма затруднительно. Поэтому обычно имеют дело с частичным (неполным) подобием, при котором соблюдается пропорциональность лишь основных, главных, сил. Так для напорных течений в закрытых руслах (трубопроводы, каналы гидромашин и т. п.) такими силами, как показывает анализ, являются силы давления, вязкости и инерции. Безусловно, действует и сила тяжести, но в напорных потоках ее действие проявляется через давление, т. е. оно сводится к соответствующему изменению давления. Поэтому при использовании так называемого приведенного давления $p_{пр} = p + \rho g z$ будет учтена и сила тяжести.

Отношение сил инерции ($R_{ин} = ma$) в подобных потоках равно масштабу сил

$$M_R = \frac{R_{ин1}}{R_{ин2}} = \frac{(ma)_1}{(ma)_2} = \frac{M_\rho M_L^3 M_L}{m t^2} = M_\rho M_V^2 M_L^2,$$

где M_ρ – масштаб плотностей.

Таким образом, силы инерции пропорциональны плотности, скорости во второй степени и линейному размеру во второй степени, который, в свою очередь, пропорционален площади ($L^2 \sim S$):

$$R_{ин} \sim \rho S V^2.$$

Примем силы инерции за основу и будем другие силы, действующие на жидкость, сравнивать с инерционными, т. е. с выражением $\rho S V^2$:

$$\left(\frac{R}{\rho S V^2} \right)_1 = \left(\frac{R}{\rho S V^2} \right)_2 = \text{idem}. \quad (6.3)$$

Это отношение, одинаковое для подобных потоков, называют *числом Ньютона* и обозначают **Ne**.

Здесь R – основная сила (сила давления, вязкости, тяжести или др.)

Следовательно, формула (6.3) представляет собой общий вид закона гидродинамического подобия.

Рассмотрим характерные случаи воздействия на движущуюся жидкость основных сил и найдем соответствующие им условия подобия потоков.

А. На жидкость действуют лишь силы давления и инерции

В этом случае $R = \Delta p S \sim \Delta p L^2$ и формула (6.3) примет вид

$$\left(\frac{\Delta p S}{\rho S V^2} \right)_1 = \left(\frac{\Delta p S}{\rho S V^2} \right)_2,$$

где Δp – некоторая разность давлений (или просто давление).

Тогда

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right)_1 = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right)_2 = \mathbf{Eu} = \mathbf{idem}, \quad (6.4)$$

где \mathbf{Eu} – безразмерный критерий, называемый *числом Эйлера*.

Следовательно, условием гидродинамического подобия потоков в данном случае является равенство для них чисел Эйлера.

Физический смысл числа Эйлера – величина, пропорциональная отношению сил давления к силам инерции.

Б. На жидкость действуют силы вязкости и инерции

Сила вязкости R_μ согласно формуле (1.20) будет

$$R_\mu = \mu S \frac{dV}{dy} \quad \text{или} \quad R_\mu = \nu \rho S \frac{dV}{dy}.$$

Тогда

$$R_\mu \sim \nu \rho S \frac{V}{L}$$

и формула (6.3) примет вид

$$\left(\frac{\nu \rho V S}{L \rho S V^2} \right)_1 = \left(\frac{\nu \rho V S}{L \rho S V^2} \right)_2.$$

Окончательно имеем

$$\left(\frac{\nu}{LV} \right)_1 = \left(\frac{\nu}{LV} \right)_2.$$

В гидромеханике принято обозначать

$$\left(\frac{LV}{\nu} \right)_1 = \left(\frac{LV}{\nu} \right)_2 = \mathbf{Re} = \mathbf{idem}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{Re} – безразмерный критерий, называемый *числом Рейнольдса*.

Следовательно, условием гидродинамического подобия потоков в рассматриваемом случае является равенство чисел Рейнольдса, подсчитанных для сходственных сечений потоков.

В формуле (6.5) сходственные сечения потоков представлены характерным поперечным размером потоков L , например диаметром трубы.

Физический смысл числа Рейнольдса – величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам вязкости.

В. На жидкость действуют силы тяжести и инерции

Сила тяжести $R_G = mg \sim \rho g L^3$, и формула (6.3) примет вид

$$\left(\frac{\rho g L^3}{L^2 \rho V^2} \right)_1 = \left(\frac{\rho g L^3}{L^2 \rho V^2} \right)_2.$$

В гидромеханике это условие гидродинамического подобия принято представлять в виде

$$\left(\frac{V^2}{g L} \right)_1 = \left(\frac{V^2}{g L} \right)_2 = \mathbf{Fr} = \mathbf{idem}, \quad (6.6)$$

где **Fr** – безразмерный критерий, называемый *числом Фруда*.

Следовательно, условием гидродинамического подобия потоков в данном случае является равенство чисел Фруда.

Из формулы (6.6) физический смысл числа Фруда представляется как величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам тяжести.

Г. Для неустановившихся движений потоков реальной жидкости к приведенным трем критериям необходимо добавить четвертый, учитывающий периодичность течения (пульсацию) с периодом T . Примером может служить течение в трубопроводе, присоединенном к поршневому насосу. Он представляет собой величину, пропорциональную отношению локальной инерционной силы к конвективной. Локальная сила инерции пропорциональна массе (ρL^3) и ускорению (V/T), т. е.

$$R_{ил} \sim \frac{\rho L^3 V}{T}.$$

Тогда формула (6.3) примет вид

$$\left(\frac{\rho V L^3}{T L^2 \rho V^2} \right)_1 = \left(\frac{\rho V L^3}{T L^2 \rho V^2} \right)_2.$$

Переписав это выражение в виде

$$\left(\frac{V T}{L} \right)_1 = \left(\frac{V T}{L} \right)_2 = \mathbf{Sh} = \mathbf{idem}, \quad (6.7)$$

получим критерий, называемый *числом Струхала*.

Д. При движении жидкостей с большим коэффициентом сжимаемости (например, движений эмульсий) необходимо учитывать действие сил упругости.

Сила упругости пропорциональна площади (S) и объемному модулю упругости $E = \rho c^2$ [см. формулу (1.12)], где c – скорость распространения продольных волн в упругой среде, равная скорости звука.

Тогда $R_{\text{упр}} \sim \rho c^2 S$ и формула (6.3) примет вид

$$\left(\frac{\rho c^2 S}{\rho V^2 S} \right)_1 = \left(\frac{\rho c^2 S}{\rho V^2 S} \right)_2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{c^2}{V^2} \right)_1 = \left(\frac{c^2}{V^2} \right)_2 = \text{idem}.$$

Величина $\frac{V^2}{c^2} = \text{Ca} = \text{idem}$ называется *числом Коши*, но на

практике чаще пользуются величиной $\frac{V}{c} = \text{M} = \text{idem}$, называемой *числом Маха*, имеющей большое значение при рассмотрении движения газа. Чем ближе число Маха к единице, тем больше влияние сжимаемости газа при его движении.

Обобщая вышеизложенное, условие полного гидродинамического подобия потоков запишем в виде

$$\text{Eu} = \text{idem}; \quad \text{Re} = \text{idem}; \quad \text{Fr} = \text{idem}; \quad \text{Sh} = \text{idem}.$$

Для газов к ним добавится число Маха.

Очевидно, это возможно при безусловном выполнении геометрического и кинематического подобия.

Таким образом, одинаковые значения критериев подобия вместе с безразмерными условиями однозначности (начальными и граничными условиями) являются необходимыми условиями полного гидродинамического подобия. Вместе с тем, доказать их достаточность удастся не во всех случаях, т. к. это связано с вопросом о существовании и единственности решений уравнений Навье – Стокса. К настоящему времени теорема существования и единственности решения уравнений Навье – Стокса доказана хотя и для многих, но все же частных случаев движений. В общем случае необходимые и достаточные условия подобия не определены. Правда, это не исключает возможности практического использования теории подобия. В практике при постановке эксперимента существование и единственность группы потоков, подобных натурному, считают *a priori*, что модель выполняет, исходя из необходимых условий подобия, и принадлежность модели к указанному классу проверяют на основе частично известных натуральных данных с результатами измерений на модели.

В каждой задаче некоторые из критериев можно найти лишь после ее решения, т. е. они являются функциями других критериев, которые выражаются через исходные данные и называются определя-

ющими. В зависимости от постановки задачи определяющие критерии могут становиться не определяющими и наоборот. Возможен вариант, когда ни один из указанных выше критериев не является определяющим, т. к. в любой из них входит величина, подлежащая определению. Тогда роль определяющего критерия может выполнять комбинация этих критериев. Для получения полного гидродинамического подобия необходимо одновременное равенство в сравниваемых потоках нескольких критериев, что требует наличия совместности их друг с другом. Существование возможной несовместности критериев подобия иллюстрирует следующий пример. Выясним совместимость критериев **Fr** и **Re**.

Из условия **Fr = idem** [см. формулу (6.6)] имеем

$$\left(\frac{v^2}{gL}\right)_1 = \left(\frac{v^2}{gL}\right)_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{(gL)_2}{(gL)_1}},$$

следовательно, масштаб скоростей определяется соотношением

$$M_V = \sqrt{M_g M_L}.$$

Имея в большинстве случаев $M_g = 1$, получим, что по критерию Фруда скорость модельного потока должна быть меньше скорости натурального в $\sqrt{M_L}$ раз.

По критерию Рейнольдса **Re = idem** имеем [см. формулу (6.5)]

$$\left(\frac{LV}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{LV}{\nu}\right)_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{L_1}{L_2}.$$

Тогда масштаб скорости будет $M_V = \frac{M_\nu}{M_L}$,

откуда следует, что для одной и той же жидкости ($M_\nu = 1$) скорость модельного потока должна быть больше скорости натурального в M_L раз. Такое противоречие с критерием Фруда устраняется путем выбора надлежащего масштаба вязкости M_ν , что, однако, практически далеко и не всегда возможно, т. к. требует использования другой жидкости. Поэтому практически критерии Фруда и Рейнольдса являются несовместимыми.

Однако в каждом гидродинамическом явлении можно указать лишь одну внешнюю силу, влияние которой на характер движения является основным, определяющим, и, не учитывая другие силы, моделировать по одному критерию. Так, практикой исследований установлено, что течения со свободной поверхностью в поле силы тяже-

сти (река, канал) формируются под преимущественным влиянием этой силы и должны моделироваться по критерию Фруда.

Напорные течения, т. е. течения в закрытых трубах и каналах без образования свободной поверхности, моделируются по числу Рейнольдса и, как отмечалось выше, сила тяжести в этом случае учитывается через приведенное давление.

Между критериями гидродинамического подобия и основным уравнением гидравлики, уравнением Бернулли, очевидно, должна существовать определенная взаимосвязь. Для установления этой связи рассмотрим два напорных потока I и II, которые подобны друг другу гидродинамически (рис. 6.2), и отметим на них сходственные сечения 1-1 и 2-2.

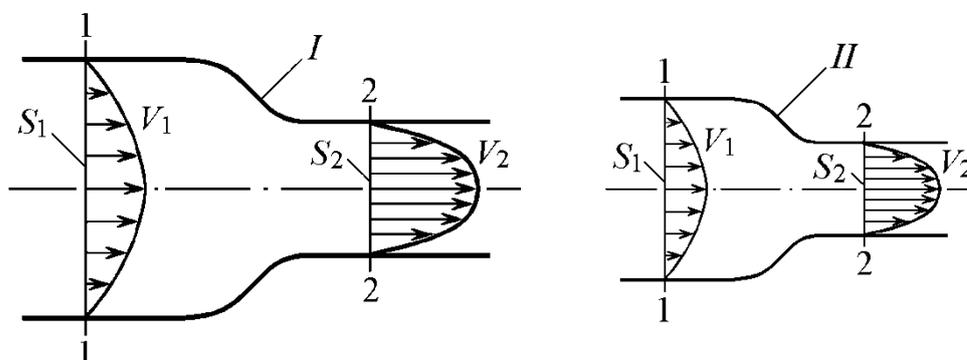


Рис. 6.2. Схема подобных потоков

Для одного из потоков запишем уравнение Бернулли по выделенным сечениям, приняв вначале, что жидкость идеальная. Это будет соответствовать первому из рассмотренных случаев движения (случай А), когда на жидкость действуют только силы давления и инерции.

Пусть для потока I будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Воспользовавшись уравнением расхода $V_1 S_1 = V_2 S_2$, исключим из уравнения скорость V_1 и перегруппируем его члены

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_2^2 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}{2g}.$$

Для приведения этого выражения к безразмерному виду разделим его на $\frac{V_2^2}{2g}$.

$$\text{Тогда получим } 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho V_2^2} = 1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2. \quad (6.8)$$

Аналогичное уравнение будет и для потока II.

Правая часть уравнения (6.8) для подобных потоков одинакова вследствие геометрического подобия, т. к.

$$\left(\frac{S_2}{S_1} \right)_I^2 = \left(\frac{S_2}{S_1} \right)_{II}^2 = M_L^2 = \text{const.}$$

Левая часть уравнения (6.8) представляет собой удвоенное число Эйлера [см. формулу (6.4)] и для обоих потоков, вследствие гидродинамического подобия ($\mathbf{Eu}_I = \mathbf{Eu}_{II}$), будет одинакова. Следовательно, для подобных потоков идеальной жидкости уравнение (6.8) можно записать, как

$$\left(2 \frac{p_1 - p_2}{\rho V_2^2} \right)_I = \left(1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)_I = \left(2 \frac{p_1 - p_2}{\rho V_2^2} \right)_{II} = \left(1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)_{II}.$$

Заметим, что для данного случая (идеальная жидкость) гидродинамическое подобие будет обеспечено за счет только одного геометрического подобия. Теперь запишем уравнение Бернулли для тех же сечений 1–1 и 2–2 одного из напорных потоков уже вязкой (реальной) жидкости, подобных гидродинамически. Будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \xi \frac{V_2^2}{2g},$$

где ξ – коэффициент потерь энергии между рассматриваемыми сечениями.

Приведем это уравнение к безразмерному виду, подобно предыдущему случаю. Тогда получим

$$2 \frac{p_1 - p_2}{\rho V_2^2} = \alpha_2 - \alpha_1 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 + \xi. \quad (6.9)$$

Левая часть уравнения (6.9), подобно предыдущему случаю, представляет собой удвоенное число Эйлера и для подобных потоков одинакова.

В правой части уравнения (6.9) составляющие α_2 и $\alpha_1 \left(S_1^2 / S_2^2 \right)$ для подобных потоков равны по кинематическому подобию. Очевидно, что по этой же причине будут равны и коэффициенты потерь ξ . Отсюда следует, что уравнения (6.9) у подобных потоков реальной вязкой жидкости равны.

6.2. Метод размерностей в гидромеханике

Уравнения, связывающие параметры гидродинамических процессов, выражают те или иные физические законы, и потому их структура не должна зависеть от системы единиц измерения. Имея в виду это обстоятельство, а также возможность применять для описания гидродинамических и других физических процессов разнообразные, в том числе специально выбранные системы единиц, можно установить некоторые общие свойства указанных уравнений. Знание этих свойств позволяет во многих случаях прогнозировать структуру искомых связей между физическими размерными и безразмерными параметрами. Это можно осуществить с помощью метода размерностей.

Аксиомы метода размерностей:

- числовое значение физической величины не зависит от выбора единицы измерения. При увеличении единицы измерения в i раз числовое значение данной физической величины уменьшается в i раз;
- все члены уравнения, описывающего физический процесс, должны иметь одинаковые размерности.

Метод размерностей позволяет установить математическую зависимость исследуемой физической величины от основных независимых величин. В гидромеханике в качестве основных величин, характеризующих движение жидкости, используются следующие параметры:

1) геометрические параметры русла или трубопровода.

К ним относятся форма и характерные размеры живого сечения ℓ_1 и ℓ_2 ; длина по направлению движения ℓ ; углы, ограничивающие живое сечение; форма, взаимное расположение и размеры выступов шероховатости стенок; Δ – высота выступа; ℓ_n – характерный продольный размер выступа шероховатости;

2) физические свойства жидкости: ρ – плотность; μ – динамический коэффициент вязкости; σ – поверхностное натяжение; $E_{ж}$ – модуль упругости;

3) кинематические и динамические характеристики течения: скорость V (или расход Q); давление p (или его градиент dp/dx); касательные напряжения τ ; сила сопротивления R_c ; время t .

Приведенный перечень параметров не является обязательным, его можно как расширить, так и уменьшить, а некоторые из парамет-

ров заменить другими. Например, вместо динамического коэффициента вязкости можно ввести кинематический коэффициент $\nu = \mu/\rho$.

Как правило, искомой исследуемой величиной является параметр второй группы, т. е. кинематическая или динамическая характеристики потока, который нужно определить как функцию всех или части остальных параметров.

Основой метода размерностей является так называемая *π -теорема*, которая формулируется следующим образом:

Уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и содержащее k размерных величин, из которых n величин имеют независимые размерности, может быть преобразовано в уравнение, связывающее $(k-n)$ независимых безразмерных комплексов, каждый из которых является комбинацией из k указанных величин.

Независимыми называются комплексы, которые не могут быть получены в виде степенной функции остальных комплексов.

Параметрами с независимыми размерностями называют такие, у которых формула размерности не может быть представлена как комбинация формул размерности двух других из них.

В гидромеханике в качестве параметров с независимыми размерностями принимают базовые физические величины: характерный линейный размер ℓ_1 , скорость V и плотность ρ . Размерность любой другой величины в приведенном выше перечне может быть выражена через размерности базовых физических величин.

В качестве характерного линейного размера ℓ_1 принимается характерный линейный размер живого сечения. В различных задачах это будет или гидравлический радиус R_r , или глубина потока жидкости h , или диаметр трубы d и т. д.

Размерности базовых физических величин

$$[\ell_1] = L; \quad [V] = LT^{-1}; \quad [\rho] = ML^{-3}.$$

Если произвольную из приведенных размерных величин, не входящую в состав параметров с независимыми размерностями, обозначить через N_i , безразмерный комплекс, характеризующий влияние данной размерной величины N_i на движение жидкости, выражается как

$$\pi_i = \frac{\ell_1^x V^y \rho^z}{N_i} = L^0 M^0 T^0. \quad (6.10)$$

Это выражение носит название *π -член*.

Могут быть применены и π -члены в виде $\pi_i' = \frac{1}{\pi_i}$ или $\pi_i' = \pi_i^{-1}$.

В общем виде взаимосвязь между приведенными выше параметрами, включая и ускорение свободного падения g , и среднеквадратическое значение пульсационных составляющих σ_V , имеет вид

$$f(\ell, \ell_1, \ell_2, \Delta, \ell_\mu, \Delta p, V, \rho, \mu, g, \sigma, E_{ж}, \sigma_V, t) = 0, \quad (6.11)$$

т. е. всего $k = 14$ размерных параметров, из которых $n = 3$ величин с независимыми размерностями. Тогда должны получить $k - n = 11$ безразмерных комплексов (π -членов).

Рассмотрим применение метода размерностей для наиболее важных размерных параметров.

Применим формулу (6.10) к перепаду давления Δp . Имеем

$$\pi_p = \frac{\ell_1^x V^y \rho^z}{\Delta p} = L^0 M^0 T^0.$$

Подставив размерности в левую часть этого выражения, получим

$$\frac{L^x \left(\frac{L}{T}\right)^y \left(\frac{M}{L^3}\right)^z}{\left(\frac{M}{T^2 L}\right)} = L^0 M^0 T^0,$$

или

$$L^x L^y L^{-3z} L T^{-y} T^2 M^z M^{-1} = L^0 M^0 T^0.$$

Тогда

$$x + y - 3z + 1 = 0 \text{ (для } L\text{);}$$

$$-y + 2 = 0 \text{ (для } T\text{);}$$

$$z - 1 = 0 \text{ (для } M\text{).}$$

Отсюда $x = 0$; $y = 2$; $z = 1$.

Следовательно, $\pi_p = \frac{\rho V^2}{\Delta p}$ или $\pi_p' = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$.

Сравнивая выражение π_p' -члена с формулой (6.4), видим, что это не что иное, как число Эйлера.

Запишем формулу (6.10) для коэффициента динамической вязкости μ , размерность которого согласно формуле (1.21) $[M/LT]$:

$$\pi_\mu = \frac{\ell_1^x V^y \rho^z}{\mu} = L^0 M^0 T^0.$$

Отсюда
$$\frac{L^x \left(\frac{L}{T}\right)^y \left(\frac{M}{L^3}\right)^z}{\left(\frac{M}{TL}\right)} = L^0 M^0 T^0,$$

или
$$L^x L^y L^{-3z} L T^{-y} T M^z M^{-1} = L^0 M^0 T^0.$$

Тогда
$$\begin{aligned} x + y - 3z + 1 &= 0 \quad (\text{для } L); \\ -y + 1 &= 0 \quad (\text{для } T); \\ z - 1 &= 0 \quad (\text{для } M). \end{aligned}$$

Получаем: $x = 1; y = 1; z = 1$ и тогда

$$\pi_{\mu} = \frac{\ell_1 V \rho}{\mu}.$$

Учитывая, что $\mu/\rho = \nu$ – кинематический коэффициент вязкости, находим, что влияние сил вязкости отображается π -членом, представляющим число Рейнольдса [см. формулу (6.5)], т. е.

$$\pi_{\nu} = \frac{\ell_1 V}{\nu}.$$

Весьма полезный вывод, как будет видно в дальнейшем, получим, применив формулу (6.10) к размерному параметру Δ – высоте выступов шероховатостей стенок.

Здесь последовательно будем иметь

$$\begin{aligned} \pi_{\Delta} &= \frac{\ell_1^x V^y \rho^z}{\Delta} = L^0 M^0 T^0; \\ L^x L^y L^{-3z} L^{-1} T^{-y} M^z &= L^0 M^0 T^0; \\ x + y - 3z + 1 &= 0 \quad (\text{для } L); \\ -y &= 0 \quad (\text{для } T); \\ z &= 0 \quad (\text{для } M). \end{aligned}$$

Тогда $x = 1; y = 0; z = 0$ и $\pi_{\Delta} = \frac{\ell_1}{\Delta}$ или $\pi'_{\Delta} = \frac{\Delta}{\ell_1}$.

Следовательно, на движение жидкости оказывает влияние не абсолютное значение высоты выступа шероховатости, а безразмерный параметр – *относительная шероховатость* (Δ/ℓ_1). Величина, обратная относительной шероховатости (ℓ_1/Δ), называется *относительной гладкостью*.

Предоставив возможность студентам самостоятельно провести вывод остальных восьми безразмерных комплексов (π -членов), ограничимся приведением сводной табл. 6.1 всех одиннадцати безразмерных комплексов гидромеханики.

Таблица 6.1

π -член	Размерный параметр	Обозначение	Наименование (число)	Обозначение	Формула
π_p	перепад давления	Δp	Эйлера	Eu	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$
π_ν	кинематическая вязкость	ν	Рейнольдса	Re	$\frac{l_1 V}{\nu}$
π_Δ	высота шероховатостей	Δ	Геометрические параметры потока	-	$\frac{\Delta}{l_1}$
π_{l_2}	характерный размер живого сечения	l_2		-	$\frac{l_2}{l_1}$
π_{l_Δ}	характерный продольный размер выступа шероховатости	l_Δ		-	$\frac{l_\Delta}{l_1}$
π_l	длина по направлению движения	l		-	$\frac{l}{l_1}$
π_σ	напряжение поверхностного натяжения	σ	Вебера	We	$\frac{V^2 \rho l_1}{\sigma}$
π_E	модуль упругости	$E_{ж}$	Коши	Ca	$\frac{V^2 \rho}{E_{ж}}$
$\pi_{\sigma n}$	среднеквадратичное значение пульсаций	σ_n	Кармана	Ka	$\frac{\sigma_n}{V}$
π_t	время (при неустановившемся движении)	t	Струхалья	Sh	$\frac{l_1}{Vt}$
π_g	ускорение свободного падения (сила тяжести)	g	Фруда	Fr	$\frac{V^2}{gl_1}$

Отметим еще раз, что как число размерных параметров, так и соответствующих им π -членов не ограничивается приведенными и может быть увеличено. Кроме этого, на практике возможно применение и комбинаций приведенных π -членов.

В заключение отметим, что безразмерные комплексы – числа Рейнольдса, Эйлера, Фруда и Струхалья – можно получить из уравнений Навье – Стокса (см. п. 5.4), приведя эти уравнения к безразмерному виду.

6.3. Режимы течения жидкости в трубах. Опыты Рейнольдса

О том, что жидкость может иметь два различных вида течения, стало известно в XIX. Это открытие произошло не в одночасье, а потребовало почти полвека на разгадку одной из самых удивительных и сложных гидродинамических загадок того времени.

Начало было положено в первой половине девятнадцатого века, когда в 1839 г. немецкий физик и гидростроитель Готтхильф Генрих Людвиг Хаген (1797–1884) опубликовал результаты своих обширных исследований по изучению влияния температуры на сопротивление жидкости, текущей в трубках малого диаметра (капиллярах), и вывел формулу для вычисления сопротивлений. Несколько лет спустя провел подобные эксперименты французский врач Жан-Луи Пуазейль (1799–1869), который изучал работу сердца и движение крови в венах и капиллярных сосудах. Им получена формула, совпадающая с формулой Г. Хагена, в виде

$$\frac{R}{32m} = \frac{\nu V}{d^2}. \quad (6.12)$$

Очевидно, что левая часть этого выражения есть ничто иное, как удельная (отнесенная к массе жидкости m) сила сопротивления R . Данная формула представляется очень логичной: чем больше вязкость ν и меньше диаметр трубы d , тем труднее двигаться жидкости. Ясно, что чем больше скорость движения V , тем больше сила сопротивления.

Однако, как выяснилось, данная формула не всегда давала верный результат. Это в 1854 г. отметил и сам Г. Хаген, указав на различное поведение потока, иногда двигавшегося по прямой линии, а иногда «крайне нерегулярно», и в последнем случае его уравнение неприменимо.

В 1883 г. английский физик Осборн Рейнольдс (1842–1912) провел эксперимент, позволивший наглядно продемонстрировать существование двух различных видов движения жидкости – ламинарного (от лат. *lāmina* – пластинка) и турбулентного (от лат. *turbulentus* – бурный, беспорядочный). Схема установки приведена на рис. 6.3.

К достаточно большому по объему баку 3 присоединена стеклянная труба 5, в конце которой установлен вентиль 6. Этим вентилем можно менять расход жидкости в трубе, который измеряется при помощи мерного бака 7. Над баком 3 расположен сосуд 1 с раствором краски, плотность которого близка к плотности исследуемой жидко-

сти. Краска вводится в поток при помощи трубки 4. Количество подаваемой краски регулируется вентилем 2. В процессе проведения экспериментов уровень жидкости в баке 3 поддерживается постоянным.

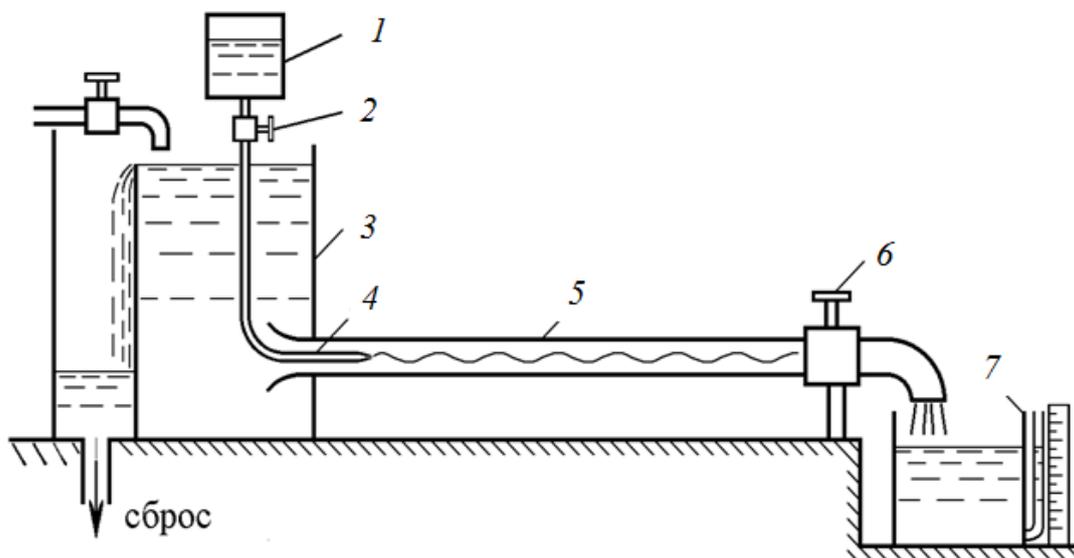


Рис. 6.3. Схема экспериментальной установки Рейнольдса

При определенном открытии вентиля 6 в трубе 5 установится некоторая скорость потока и при открытии крана 2 в поток поступит струйка краски.

При малой скорости потока жидкости в трубе 5 краска образует прямолинейную и резко выделяющуюся не смешивающуюся с окружающей жидкостью струйку. Заметного обмена частицами между струйкой краски и окружающей ее жидкостью не происходит. При этом никакого значения не имеет, в каком месте поперечного сечения трубы была выпущена струйка краски. Это свидетельствует о том, что при данном открытии вентиля 6 жидкость движется отдельными не перемешивающимися слоями. Измерения давления и скорости показывают их неизменность во времени, т. е. отсутствуют пульсации. Такой режим движения называется **ламинарным**.

Ламинарное движение является вполне упорядоченным и при постоянном напоре установившемся течением (хотя в общем случае может быть и неустановившимся). Однако его нельзя считать безвихревым, т. к. в нем хотя и нет видимых вихрей, но одновременно с поступательным движением имеет место упорядоченное вращательное движение отдельных частиц жидкости вокруг своих мгновенных центров с некоторыми угловыми скоростями (см. п. 3.3).

При постепенном открытии вентиля 6 скорость потока жидкости в трубе будет увеличиваться. Вначале это не приведет к изменению

картины течения жидкости, но затем при определенной скорости течения наступает быстрое ее изменение. Струйка краски при выходе из трубки 4 начинает двигаться волнообразно, затем разрываться и перемешиваться с потоком жидкости. При этом становятся заметными вихреобразования и вращательное движение жидкости. Измерения показывают непрерывные пульсации давления и скорости в потоке жидкости. Такой режим течения принято называть **турбулентным**.

При турбулентном течении векторы скоростей имеют не только продольные (осевые), но и поперечные составляющие. Поэтому наряду с основным осевым перемещением жидкости вдоль трубы происходят поперечные неупорядоченные перемещения как жидких частиц, так и отдельных объемов жидкости. Как следствие этого, турбулентный режим требует бóльших удельных затрат на перемещение жидкости, чем ламинарный.

На рис. 6.4. приведена примерная картина изменения характера течения потока жидкости при изменении его скорости.

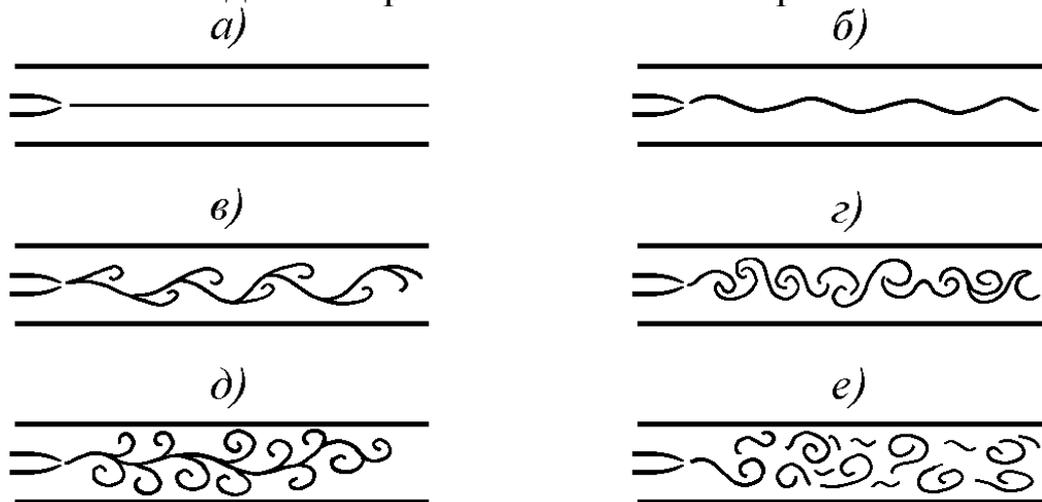


Рис. 6.4. Изменение картины течения жидкости в трубе с увеличением скорости течения от *a)* к *e)*

Рейнольдс установил, что критерием режима движения жидкости является безразмерная величина, представляющая собой отношение произведения средней скорости потока V на характерный линейный размер l поперечного сечения потока к кинематической вязкости жидкости ν . Полученное безразмерное число называется **числом Рейнольдса**. Для потока жидкости в трубе круглого сечения (характерный размер l равен внутреннему диаметру d) число Рейнольдса вычисляется по формуле

$$\mathbf{Re} = \frac{Vd}{\nu}. \quad (6.13)$$

На основе многочисленных и многолетних (более 10 лет) экспериментов Рейнольдс установил, что существуют некоторые критические скорости, при которых происходит смена режимов течения жидкости. Рейнольдс обнаружил существование двух критических скоростей. Одна имеет место при переходе ламинарного режима движения в турбулентный режим, она называется *верхней критической скоростью* $V_{кр.в}$, другая – при переходе турбулентного режима движения в ламинарный режим, она называется *нижней критической скоростью* $V_{кр.н}$. Задержка ($V_{кр.н} < V_{кр.в}$) с обратным переходом, очевидно, обусловлена необходимостью успокоения течения жидкости. Опытным путем доказано, что значение верхней критической скорости меняется в довольно широких пределах в зависимости от внешних условий: постоянства температуры, уровня вибрации экспериментальной установки и т. п. В противоположность ей нижняя критическая скорость в широком диапазоне изменения внешних условий остается практически постоянной. Как показывают опыты, значение этой скорости прямо пропорционально кинематической вязкости ν и обратно пропорционально диаметру трубы d .

Соответственно критическим скоростям определяются *критические числа Рейнольдса*.

$$\mathbf{Re}_{кр} = \frac{V_{кр}d}{\nu}. \quad (6.14)$$

В практических расчетах число Рейнольдса используется при определении сопротивления трубопроводов, поэтому наличие переходной области между верхним и нижним критическими числами крайне нежелательно. Поэтому для инженерных расчетов на основании опытов было принято всего по одному критическому числу Рейнольдса для различных типов трубопроводов. Обычно для жестких трубопроводов критическое число Рейнольдса принимают $\mathbf{Re}_{кр} = 2320$. При $\mathbf{Re}_i < \mathbf{Re}_{кр}$ ламинарное движение является вполне устойчивым: всякого рода искусственная турбулизация потока и его возмущения (сотрясение трубы, введение в поток колеблющегося тела и др.) погашаются влиянием вязкости, и ламинарный режим течения жидкости снова восстанавливается. При $\mathbf{Re}_i > \mathbf{Re}_{кр}$, наоборот, турбулентный режим устойчив, а ламинарный неустойчив.

Если живое сечение потока отличается от круглого или в трубопроводе имеется большое число близко расположенных местных сопротивлений, критическое число Рейнольдса может отличаться от приведенного выше значения. Так, например, для гибких рукавов в системе гидропривода $Re_{кр} = 1600$.

Стоит сказать, что в особых лабораторных условиях при полном отсутствии факторов, способствующих турбулизации потока, получают ламинарный режим и при $Re = (3-5)10^4$. На практике обычно имеются условия, способствующие турбулизации: вибрации труб, местные гидравлические сопротивления, неравномерность (пульсация) расхода и др., а потому указанное обстоятельство имеет скорее принципиальное, чем практическое значение. В природе и технике турбулентное движение жидкости наблюдается значительно чаще, чем ламинарное.

Физически возникновение одного или другого режимов движения жидкости (физический смысл числа Рейнольдса) можно объяснить следующим образом.

Из теории гидродинамического подобия известно (см. п. 6.1), что число Рейнольдса есть отношение силы инерции к силе вязкости. Силы инерции пропорциональны плотности жидкости ρ , скорости жидкости V во второй степени и характерному линейному размеру l во второй степени:

$$R_{ин} \sim \rho l^2 v^2.$$

В свою очередь, силы вязкости пропорциональны плотности, скорости потока, характерному линейному размеру и коэффициенту кинематической вязкости:

$$R_{в} \sim \rho V l \nu.$$

Тогда имеем

$$\frac{R_{ин}}{R_{в}} = \frac{\rho V^2 l^2}{\rho V l \nu} = \frac{V l}{\nu} = Re.$$

Таким образом, в зависимости от того, какие силы (вязкости или инерции) будут преобладать, и установится режим движения жидкости – ламинарный или турбулентный. Если преобладают силы инерции, то устанавливается турбулентный режим, если силы вязкости – ламинарный.

6.4. Контрольные вопросы

1. Из каких составляющих состоит теория подобия гидромеханических процессов?
2. Какие размеры называют сходственными?
3. Каким образом описывается кинематическое подобие?
4. Что такое динамическое подобие? Какими критериями оно выражается?
5. В чем проблема получения абсолютного динамического подобия?
6. Сформулируйте π -теорему.
7. Какие режимы движения жидкости существуют; чем они отличаются друг от друга?
8. Опишите опыты Рейнольдса.
9. Что определяют критические числа Рейнольдса?
10. Какой из режимов движения жидкости встречается чаще в природе и технике?
11. В чем заключается физический смысл числа Рейнольдса?

7. НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБАХ

7.1. Теория ламинарного течения в круглых трубах

Как отмечалось выше, ламинарное течение характеризуется параллельно-струйчатым упорядоченным движением частиц жидкости. Движение можно представить как совокупность бесконечно тонких кольцевых концентрических слоев, перемещающихся относительно друг друга. Единственным источником потерь энергии в данном случае является трение между слоями движущейся жидкости, подчиняющееся закону трения Ньютона [см. формулу (1.18)].

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости в прямой круглой трубе с внутренним диаметром $d = 2r$. Расположим трубу горизонтально. Этим мы исключим влияние силы тяжести и упростим вывод. Достаточно далеко от входа в трубу, где поток стабилизировался, выделим участок длиной ℓ двумя сечениями 1–1 и 2–2 (рис. 7.1).

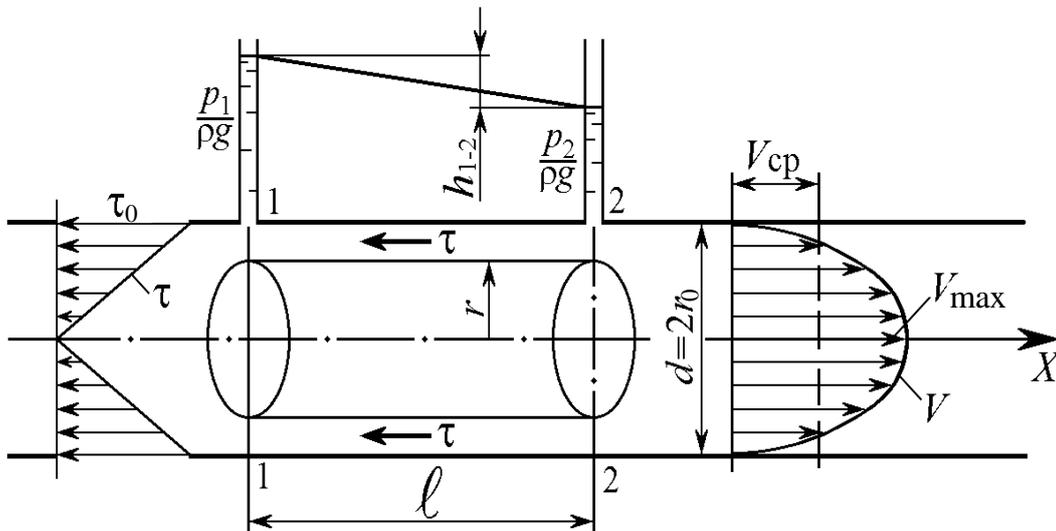


Рис. 7.1. Схема к теории ламинарного течения жидкости в трубе

Запишем уравнение Бернулли для выделенного участка. Согласно формуле (5.16) имеем

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_{cp2}^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (7.1)$$

Вследствие неизменности диаметра трубы и стабильности потока $V_1 = V_2$ и $L_1 = L_2$. Так как труба горизонтальная, то $Z_1 = Z_2$. Отсюда выражение (7.1) примет вид $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_{1-2}$.

Тогда потери на трение по длине составят

$$h_{1-2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g}. \quad (7.2)$$

Выделим цилиндрический объем, соосный с трубой и имеющий основания радиусом r в выбранных сечениях. Составим уравнение равномерного движения этого объема, т. е. равенство нулю суммы сил, действующих на объем. Такими силами являются силы давления и вязкости. Обозначая через τ касательные напряжения на боковой поверхности цилиндра, получим $\Delta p \pi r^2 - 2\pi r \ell \tau = 0$.

Из этой формулы касательные напряжения определяются как

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2\ell}, \quad (7.3)$$

т. е. они изменяются по линейному закону в функции радиуса. Эпюра касательных напряжений приведена на рис. 7.1. Отметим, что эта эпюра не зависит от режима течения жидкости.

В свою очередь, согласно формуле (1.18), касательные напряжения для рассматриваемого случая описываются выражением

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr}. \quad (7.4)$$

В этом выражении переменная y (расстояние от стенки) заменена текущим радиусом r . Знак минус обусловлен тем, что направление отсчета y (от стенки) противоположно направлению отсчета r (от оси).

Приравнявая выражения (7.3) и (7.4), получим $\frac{\Delta p r}{2\ell} = -\mu \frac{dV}{dr}$.

Тогда приращение скорости составит $dV = -\frac{\Delta p r}{2\ell \mu} dr$.

Проинтегрировав это выражение, будем иметь $V = \frac{\Delta p r^2}{4\ell \mu} + C$.

Постоянная интегрирования находится из граничных условий.

При $r = r_0$ имеем $V = 0$ и $C = \frac{\Delta p r_0^2}{4\ell \mu}$.

Тогда формула скорости по окружности радиусом r имеет вид

$$V = \frac{\Delta p (r_0^2 - r^2)}{4\ell \mu}. \quad (7.5)$$

Это выражение является законом распределения скоростей по живому сечению круглой трубы при ламинарном режиме течения. Кривая, изображающая эпюру скоростей, представляет собой квадратичную параболу (см. рис. 7.1).

Максимальная скорость частиц жидкости будет на оси трубы ($r = 0$):

$$V_{\max} = \frac{\Delta p r_0^2}{4 \ell \mu}. \quad (7.6)$$

Расход через элементарную площадку dS составит $dQ = V dS$, или согласно (7.5) и $dS = 2\pi r dr$ будет

$$dQ = \frac{\Delta p (r_0^2 - r^2)}{4 \ell \mu} 2\pi r dr.$$

Проинтегрировав это выражение от $r = 0$ до $r = r_0$, т. е. по всей площади живого сечения:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{2 \ell \mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr,$$

получаем

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \ell \mu} r_0^4. \quad (7.7)$$

Средняя скорость по живому сечению составит

$$V_{\text{ср}} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p r_0^2}{8 \ell \mu}. \quad (7.8)$$

Сравнивая между собой формулы (7.6) и (7.8), имеем

$$V_{\text{ср}} = 0,5 V_{\max}.$$

Зная закон распределения скоростей по сечению потока, можно определить величину коэффициента кинетической энергии – коэффициента Кориолиса.

Подставим в формулу (5.14) среднюю скорость по выражению (7.8) и V_i по формуле (7.5). Тогда

$$\alpha = \frac{(8 \mu \ell)^3}{S (\Delta p r_0^2)^3} \int_S \left[\frac{\Delta p (r_0^2 - r^2)}{4 \ell \mu} \right]^3 dS.$$

Имея в виду, что $S = \pi r_0^2$ и $dS = 2\pi r dr$, получим

$$\alpha = \frac{\int_0^{r_0} \left[\frac{\Delta p (r_0^2 - r^2)}{4 \ell \mu} \right]^3 2 \pi r dr}{\pi r_0^2 \left(\frac{\Delta p r_0^2}{8 \ell \mu} \right)^3} = 2.$$

Таким образом, *действительная кинетическая энергия потока при ламинарном режиме течения в два раза превышает кинетическую энергию того же потока, но при равномерном распределении скоростей.*

Определим зависимость потерь напора h_{1-2} на трение от параметров потока. Для этого из выражения (7.7) определим перепад давления Δp :

$$\Delta p = \frac{8 \mu \ell Q}{\pi r_0^2}.$$

Имея в виду, что $\mu = \nu \rho$ и $r_0 = d/2$, а также согласно формуле (7.2), получим

$$h_{1-2} = \frac{128 \nu \ell Q}{\pi r_0^4}. \quad (7.9)$$

Эта формула получена Пуазейлем и носит его имя. С ней полностью согласуется формула (6.12), представляя ее другой вид.

Формула (7.9) широко используется для расчета трубопроводов с ламинарным режимом течения.

В п. 5.4 потери по длине трубы представлены в виде зависимости от средней скорости по формуле Вейсбаха – Дарси (5.22). Для приведения формулы (7.9) к подобному виду заменим в ней расход Q его выражением через среднюю скорость:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} V_{\text{ср.}}$$

Тогда, с учетом $r_0 = d/2$

$$h_{1-2} = \frac{32 \nu \ell V_{\text{ср.}}}{g d^2}. \quad (7.10)$$

Из этого выражения видно, что при ламинарном режиме течения жидкости потери действительно пропорциональны скорости в первой степени, как утверждали Хаген и Пуазейль.

Для окончательного приведения формулы (7.10) к виду формулы Вейсбаха – Дарси (5.22) приравниваем их:

$$\frac{32\nu\ell V_{\text{cp}}}{gd^2} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

Отсюда коэффициент Дарси для ламинарного потока ($\lambda_{\text{л}}$) будет

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{64\nu}{V_{\text{cp}}d},$$

или имея в виду $\text{Re} = \frac{V_{\text{cp}}d}{\nu}$, получим $\lambda_{\text{л}} = \frac{64}{\text{Re}}$,

и окончательно
$$h_{1-2} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} \frac{V_{\text{cp}}^2}{2g}. \quad (7.11)$$

Как уже отмечалось, при установившемся ламинарном движении линии тока и траектории жидких частиц совпадают, и это – прямые, параллельные направлению движения.

Если направить ось OX ортогональной системы координат XYZ вдоль оси трубы, то проекции скорости частицы жидкости на оси координат согласно (7.5) будут

$$V_x = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4\ell\mu}; \quad V_y = 0; \quad V_z = 0,$$

где $r^2 = y^2 + z^2$.

Видно, что единственная, не равная нулю, проекция скорости не зависит от координаты X . Компоненты угловой скорости по формуле (3.13) составят

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = 0, \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = -\frac{\Delta p}{4\ell\mu} z, \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \frac{\Delta p}{4\ell\mu} y. \end{cases} \quad (7.12)$$

Дифференциальное уравнение вихревой линии [см. формулу (3.16)] $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, после подстановки в него формулы (7.12),

примет вид $ydy + zdz = 0$, и после интегрирования получим

$$y^2 + z^2 = C.$$

Таким образом, вихревые линии в данном случае представляют собой концентрические окружности с центрами на оси трубы.

Угловая скорость частиц жидкости по формуле (3.14) составит

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{\Delta p}{4\ell\mu} \sqrt{y^2 + z^2}$$

или
$$\omega = \frac{\Delta p}{4\ell\mu} r. \quad (7.13)$$

Решая совместно уравнения (7.13) и (7.8), получим

$$\omega = \frac{2V_{\text{ср}} r}{r_0^2}. \quad (7.14)$$

Максимальное значение угловой скорости частицы будет у стенки трубы ($r = r_0$)

$$\omega_{\text{max}} = \frac{2V_{\text{ср}}}{r_0}. \quad (7.15)$$

Сопоставляя уравнения (7.14) и (7.15), получим

$$\omega = \omega_{\text{max}} \frac{r}{r_0},$$

т. е. эпюра угловых скоростей частиц аналогична эпюре касательных напряжений.

Изложенная теория ламинарного течения жидкости в круглой трубе хорошо подтверждается опытом, и формула (7.11) обычно не нуждается в каких-либо поправках, за исключением следующих случаев:

- 1) на начальном участке трубы;
- 2) при течении с теплообменом;
- 3) при течении в капиллярах и зазорах с облитерацией;
- 4) при течении с большими перепадами давления.

Пункты 2–4 относятся к весьма специфическим задачам, и их решение можно найти в литературе по гидромеханике, в то время как начальный участок трубопровода, если не учитывать его специфику, может внести существенную погрешность в результаты практических расчетов многих гидравлических систем. Поэтому в данном учебном пособии этот вопрос рассмотрен. Также кратко рассмотрен вопрос течения жидкости в зазорах, т. к. является актуальным при работе гидромашин и гидроустройств.

7.2. Начальный участок ламинарного течения

При входе жидкости в трубу из какого-либо резервуара распределение скоростей частиц жидкости по сечению трубы отличается от распределения скоростей в дальнейших сечениях. Если диаметр трубы постоянен и она прямая и в ней дальше жидкость движется в ламинарном режиме, то распределение скоростей в сечении на входе жидкости в трубу будет практически равномерным, особенно если вход выполнен плавным (рис. 7.2).

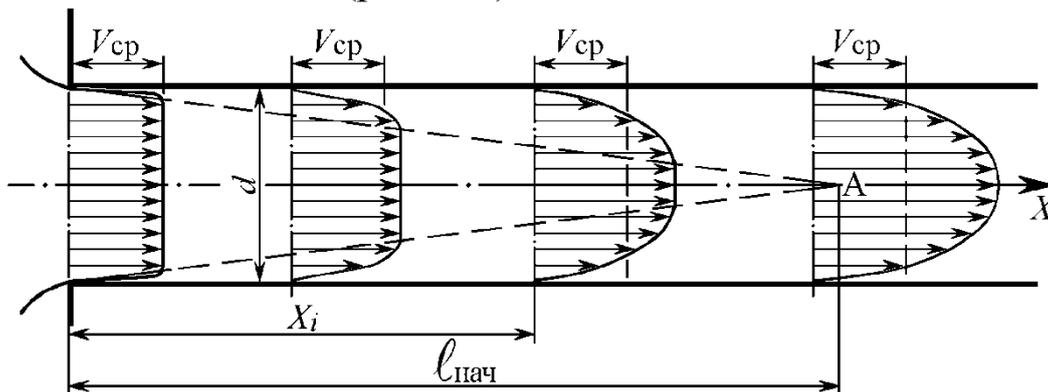


Рис. 7.2. Формирование профиля эпюры скоростей на начальном участке ламинарного потока

При дальнейшем продвижении жидкости по трубе под действием сил вязкости слои жидкости, прилежащие к стенке, тормозятся, а центральная часть потока, где еще сохраняется равномерное распределение скоростей, движется ускоренно. Последнее обусловлено необходимостью сохранения условия постоянства расхода через поперечное сечение трубы. Чем дальше от входа в трубу, тем толщина слоев заторможенной жидкости постепенно увеличивается, пока не станет равной радиусу трубы (точка А на рис. 7.2). После этого устанавливается характерный для ламинарного режима течения параболический профиль скоростей.

Участок от входа в трубу, на котором стабилизируется параболический профиль скоростей, называется **начальным участком течения** ($l_{\text{нач}}$). За пределами этого участка эпюра скоростей остается неизменной, и описанная выше теория ламинарного режима течения является приемлемой. Аналогичный механизм трансформации эпюры скоростей на начальном участке происходит и при турбулентном режиме течения.

В условиях, когда в трубе режим движения ламинарный, на всем протяжении начального участка поток будет ламинарным.

Если интенсивность турбулентности на входе в трубу мала, сначала образуется ламинарный участок с перемежающимся движением и, наконец, турбулентный пограничный слой. При сильно турбулированном потоке на входе длина начального участка меньше, чем при ламинарном режиме.

Для случая ламинарного режима течения жидкости длину начального участка можно определить по приближенной формуле Шиллера

$$\frac{\ell_{\text{нач}}}{d} = 0,029 \text{Re} . \quad (7.16)$$

Сопротивление на начальном участке трубы получается больше, чем на последующих участках. Обусловлено это тем, что значение производной dV/dy у стенки трубы на начальном участке больше, чем на участках со стабилизировавшимся режимом течения. Тогда согласно формуле (1.18) будут больше и касательные напряжения. Причем, эти потери на трения будут тем больше, чем ближе рассматриваемое сечение к началу трубы, т. е. чем меньше координата X (см. рис. 7.2).

Потери напора на начальном участке трубы, длина которого $\ell \leq \ell_{\text{нач}}$, определяются по формулам (7.9) или (7.11) с введением в них поправочного коэффициента k , который больше единицы. Значения этого коэффициента могут быть найдены по графику (рис. 7.3), на котором он представлен как функция безразмерного параметра $(x \cdot 10^3) d / \text{Re}$.

Из графика следует, что при $x = \ell_{\text{нач}}$, $k = 1,09$, т. е. сопротивление всего начального участка трубы на 9 % больше, чем сопротивление участка такой же длины, но взятого в области стабилизированного ламинарного течения.

Когда длина ℓ трубы больше длины $\ell_{\text{нач}}$ начального участка, потери напора представляются как сумма потерь на начальном участке и на участке со стабилизированным течением:

$$h_{\text{тр}} = \left[1,09 \lambda_{\text{л}} \frac{\ell_{\text{нач}}}{d} + \lambda_{\text{л}} \frac{\ell - \ell_{\text{нач}}}{d} \right] \frac{V^2}{2g} ,$$

или с учетом выражений (7.11) и (7.16) будет

$$h_{\text{тр}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(0,165 + 64 \frac{\ell}{d} \right) \frac{V^2}{2g} . \quad (7.17)$$

Для начального участка трубы с плавным входом коэффициент Кориолиса (α) возрастает от единицы до двух (рис. 7.3).

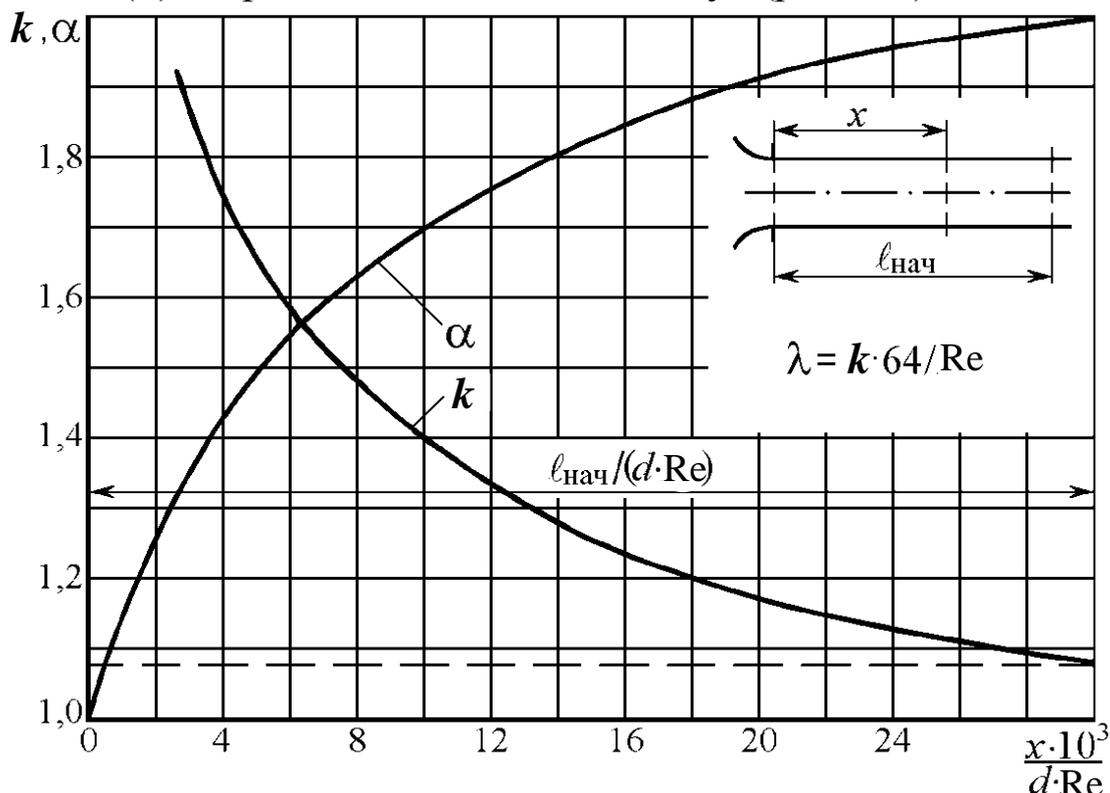


Рис. 7.3. Зависимость коэффициентов k и α для начального участка трубы

7.3. Ламинарное течение в зазоре

Эффективность работы гидравлических систем и аппаратов существенно зависит от точности подгонки сопрягаемых деталей, т. к. через зазоры происходят утечки рабочей жидкости. Поэтому знание закономерности течения жидкости в зазорах имеет большое практическое значение.

Рассмотрим ламинарное течение в зазоре, образованном двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми равно a (рис. 7.4).

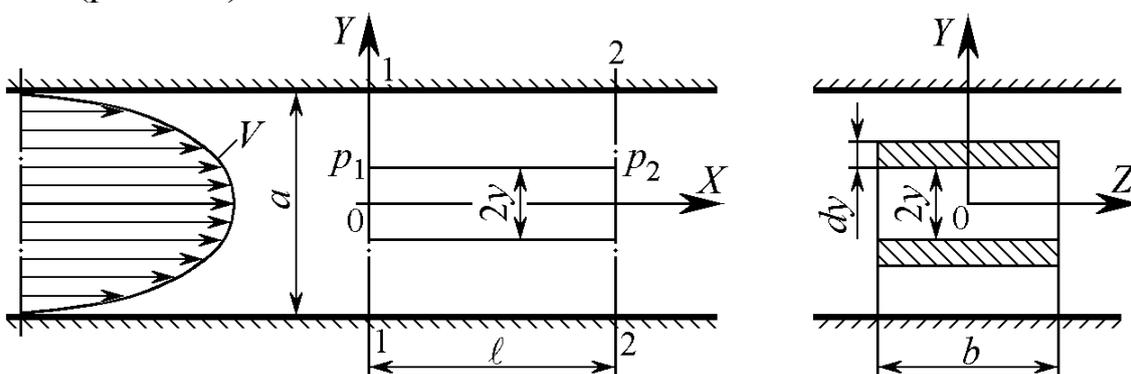


Рис. 7.4. Схема течения жидкости в зазоре

Возьмем для рассмотрения часть потока между двумя произвольными сечениями 1–1 и 2–2, расположенными на расстоянии ℓ друг от друга, и шириной b .

Высота взятой части потока равна $2y$ (по y в обе стороны от оси OX , проведенной вдоль потока на одинаковом расстоянии от ограничивающих стенок).

Составим уравнение сил, действующих на выделенный объем при равномерном его движении:

$$2yb(p_1 - p_2) = -\mu \frac{dV}{dy} 2\ell.$$

Приняв $b = 1$ и обозначив $p_1 - p_2 = \Delta p$, определим из этого выражения приращение скорости, соответствующее приращению координаты dy :

$$dV = -\frac{\Delta p}{\mu \ell} y dy,$$

и после интегрирования получим $V = -\frac{\Delta p}{2\mu \ell} y^2 + C$.

Постоянную интегрирования находим из граничных условий: при $y = 0,5a$ $V = 0$.

Тогда
$$C = \frac{\Delta p}{2\mu \ell} \frac{a^2}{4},$$

и формула закона распределения скоростей по живому сечению будет иметь вид

$$V = \frac{\Delta p}{2\mu \ell} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right). \quad (7.18)$$

Используя эту формулу, можно определить расход q , приходящийся на единицу ширины потока ($b = 1$), для чего возьмем две элементарных площадки размером $b \cdot dy = dy$, которые симметричны относительно оси OZ (см. рис. 7.4). Тогда элементарный расход составит

$$dq = V dS = \frac{\Delta p}{2\mu \ell} \int_0^{0,5a} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) 2dy.$$

Отсюда получим
$$q = \frac{\Delta p a^3}{12\mu \ell}. \quad (7.19)$$

Потерю давления на трение, имея в виду, что полный расход через зазор шириной $b \neq 1$ равен $Q = qb$, определяем по формуле

$$\Delta p = \frac{12\mu \ell Q}{a^3 b}. \quad (7.20)$$

На практике зачастую одна из стенок, образующих зазор, перемещается параллельно другой стенке с некоторой скоростью $V_{ст}$. Если давление в зазоре по длине постоянно ($\Delta p = 0$), то возникает так называемое фрикционное безнапорное движение жидкости. Оно обусловлено тем, что подвижная стенка увлекает за собой жидкость (рис. 7.5).

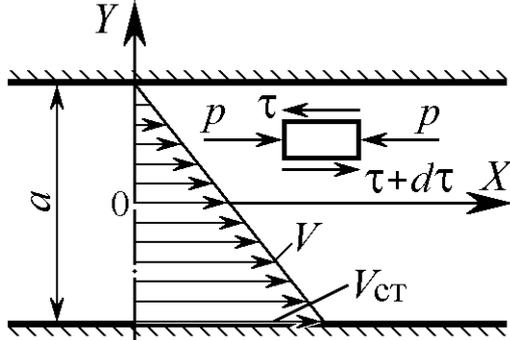


Рис. 7.5. Схема фрикционного безнапорного движения

Выделив в таком потоке элемент, как показано на рис. 7.5, рассмотрим действующие на него силы.

Поскольку давления p , приложенные к левой и правой граням элемента, равны друг другу, то для обеспечения равновесия сил необходимо равенство касательных напряжений на верхней и нижней

гранях, т. е. $d\tau = 0$.

Тогда формула (1.18) для данного случая примет вид

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dy} = C$$

и после интегрирования будет

$$V = -\frac{C}{\mu} y + C_1,$$

где y – координата положения вдоль оси y скорости V .

Постоянные C и C_1 находятся из граничных условий:

- при $y = a/2$, $V = 0$;
- при $y = -(a/2)$, $V = V_{ст}$.

Отсюда $C = \frac{V_{ст} \mu}{a}$ и $C_1 = \frac{V_{ст}}{2}$.

Тогда закон распределения скоростей имеет вид

$$V = \left(0,5 + \frac{y}{a}\right) V_{ст}. \quad (7.21)$$

Элементарный расход ($b = 1$) определяется по средней скорости:

$$q = 0,5 V_{ст} a. \quad (7.22)$$

В случае, когда перемещение стенки происходит при наличии перепада давления в жидкости, находящейся в зазоре, то закон распределения скоростей в нем находится как сумма скоростей от каждого действующего фактора, т. е. как сумма выражений (7.18) и (7.21):

$$V = \frac{\Delta p}{2\mu \ell} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \pm \left(0,5 + \frac{y}{a} \right) V_{ст}.$$

Знаки \pm в данном выражении обусловлены тем, что возможны два варианта:

а) направление движения стенки совпадает (рис. 7.6, а) с направлением течения жидкости под действием перепада давления (знак «+»);

б) направление движения стенки (рис. 7.6, б) противоположно течению жидкости (знак «-»).

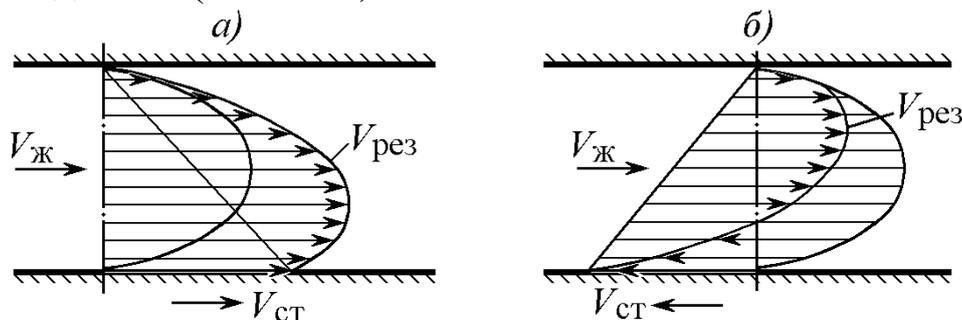


Рис. 7.6. Эпюры скоростей в зазоре с движущейся стенкой при действии перепада давления

Элементарный расход ($b = 1$) определяется по формуле

$$q = \frac{\Delta p a^3}{12\mu \ell} \pm 0,5aV_{ст}.$$

Первое слагаемое называется *расходом напорного течения*, а второе – *фрикционным расходом*.

Приведенные формулы могут быть использованы и в том случае, когда зазор образован двумя цилиндрическими поверхностями, например, поршнем и цилиндром, при условии малости зазора по сравнению с диаметрами цилиндрических поверхностей и при соосности сопрягаемых деталей (рис. 7.7, а).

Если поршень расположен в цилиндре с эксцентриситетом e , то зазор a будет переменной величиной (рис. 7.7, б):

$$a = R + e \cos \varphi - r = a_0 \left(1 - \frac{e}{a_0} \cos \varphi \right),$$

где $a_0 = R - r$.

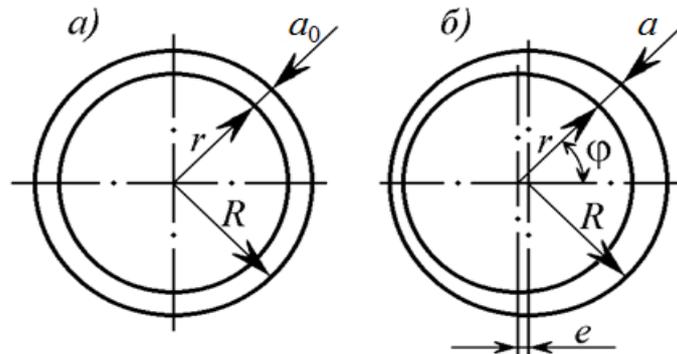


Рис. 7.7. Схемы кольцевых зазоров

Взяв элемент зазора шириной $rd\varphi$ как плоскую щель, получим следующее выражение элементарного расхода:

$$dQ = \frac{\Delta p a^3}{12\mu \ell} r d\varphi = \frac{\Delta p a_0^3}{12\mu \ell} \left(1 + \frac{e}{a_0} \cos \varphi \right)^3 r d\varphi.$$

Интегрируя по окружности, получим полный расход, который на практике интерпретируется как объем утечек через данное сопряжение:

$$Q = \frac{\Delta p a^3}{12\mu \ell} r \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{e}{a_0} \cos \varphi \right)^3 d\varphi = Q_0 \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{e}{a_0} \right)^2 \right],$$

где $Q_0 = \frac{\Delta p 2\pi r}{12\mu \ell} a_0^3$ – расход при соосном расположении поршня в цилиндре (см. рис. 7.7, а).

Из этого выражения следует, что при максимальном эксцентриситете ($e = a_0$) расход $Q = 2,5Q_0$.

7.4. Турбулентное течение

Турбулентный режим течения жидкости наиболее часто встречается в природе и технике, но в то же время представляет собой одно из сложнейших гидравлических явлений. Несмотря на многочисленные исследования в этой области, строгая теория турбулентного режима движения до настоящего времени еще не создана.

Как отмечалось выше (см. п. 5.1), нет и общих решений уравнений Навье – Стокса. Как следствие этого, при решении практических задач, наряду с применением отдельных полуэмпирических теорий и положений, широко используют экспериментальные данные и эмпирические формулы.

7.4.1. Двухслойная модель и основы теории турбулентного режима движения

Основной особенностью турбулентного режима движения является интенсивное перемешивание частиц жидкости.

При $Re > Re_{кр}$ нарушается устойчивость ламинарного движения частиц, когда в потоке помимо основных продольных составляющих скоростей частиц, возникают поперечные составляющие. Частицы жидкости начинают переходить из одной струйки в другую, вызывая тем самым перемешивание частиц жидкости и образование завихрений в потоке, т. е. движение становится турбулентным. Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к резкому возрастанию поперечных составляющих скоростей и перемещений частиц, что влечет за собой большую турбулизацию потока.

При ламинарном режиме движения касательные напряжения, зависящие только от вязкости жидкости, на оси потока равны нулю (см. рис. 7.1). Поэтому именно здесь, в первую очередь, наступает потеря устойчивости ламинарного движения. Турбулизации потока способствует и большая шероховатость стенок трубопроводов.

В результате поперечных перемещений и интенсивного перемешивания каждая частица жидкости в любой точке турбулентного потока в данный момент времени имеет свою по значению и направлению мгновенную местную скорость. Однако, как показывают измерения, значения местных скоростей колеблются около некоторых осредненных значений. Такое колебание местной скорости во времени называется *пульсацией скорости* (рис. 7.8). То же происходит и с давлением.

Рейнольдс предложил рассматривать мгновенные значения параметров турбулентного движения в виде суммы осредненных по времени значений и пульсационных добавок к ним. Тогда мгновенные значения скорости, давления и касательных напряжений запишутся в виде

$$V = \bar{V} + V'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \tau = \bar{\tau} + \tau'.$$

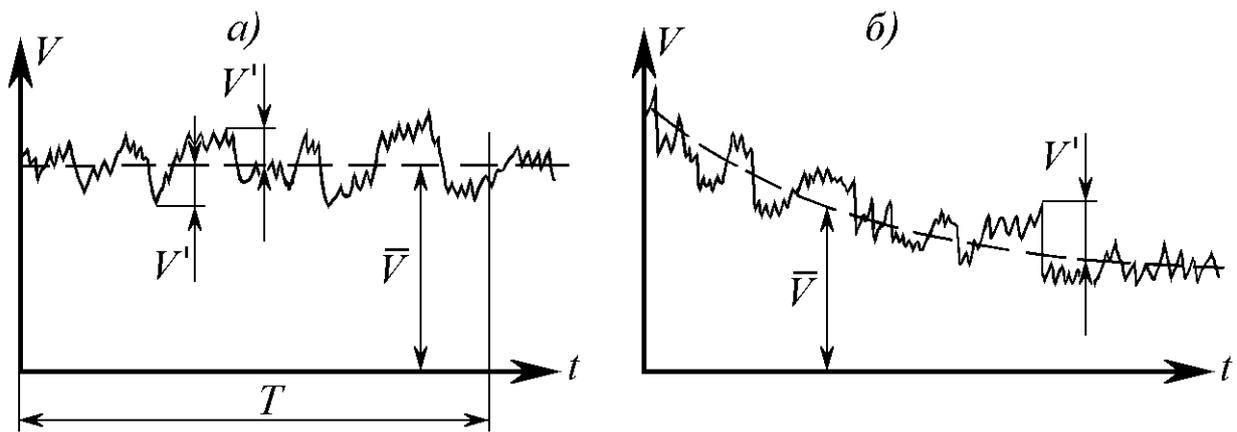


Рис. 7.8. Пульсации скорости в потоке при турбулентном режиме течения

Все параметры с чертой наверху представляют собой осредненные по времени их значения

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt; \quad \bar{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau dt.$$

где T – интервал времени осреднения.

Исходя из этого понятно, что значения осредненных по времени пульсационных добавок скорости и напряжений равны нулю

$$\bar{V}' = \frac{1}{T} \int_0^T V' dt = 0; \quad \bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0; \quad \bar{\tau}' = \frac{1}{T} \int_0^T \tau' dt = 0.$$

При рассмотрении турбулентного движения принимается, что интервал времени осреднения T достаточно велик, вследствие чего осредненное значение пульсирующей составляющей не изменяется, если выполнить повторное осреднение.

Местные осредненные скорости могут не зависеть от времени (рис. 7.8, а) или зависеть от времени (рис. 7.8, б). В первом случае говорят об установившемся, а во втором – об неустановившемся осредненном турбулентном движении.

Для оценки пульсационных добавок вводится стандарт, равный среднеквадратичному отклонению пульсационных составляющих:

$$\sigma_V = \sqrt{(\overline{V'^2})}; \quad \sigma_p = \sqrt{(\overline{p'^2})}; \quad \sigma_\tau = \sqrt{(\overline{\tau'^2})}.$$

Степенью (интенсивностью) турбулентности ε называют отношение среднеквадратичного отклонения пульсационной составляющей (добавки) скорости к характерной скорости потока (к осредненной местной скорости в данной точке, к средней по вертикали, к средней по живому сечению, к максимальной скорости и т. п.).

Здесь обратим внимание на необходимость четко различать осредненную (по времени в данной точке) и среднюю в данном живом сечении скорость $V_{cp} = Q/S$ (Q – расход, S – площадь живого сечения).

Турбулентность характеризуется также частотой пульсаций. Опыты показывают, что при турбулентном режиме движения наблюдаются довольно широкие спектры частот, но в большинстве процессов, происходящих при турбулентном напорном (в трубах) и безнапорном (в каналах и реках) движении, определяющими являются низкочастотные пульсации.

Основные закономерности турбулентного режима движения и расчетные зависимости описываются в гидродинамике с помощью полуэмпирической теории Прандтля – Кармана, созданной на основе схематической модели турбулентного потока.

По Прандтлю турбулентный поток состоит из двух областей: *ламинарного подслоя и турбулентного ядра*. По данным более поздних исследований Г. А. Гуржиенко, проведенных им в ЦАГИ, существует еще одна область – *переходный слой*. Совокупность ламинарного подслоя и переходного слоя называют в гидродинамике *пограничным (вязкостным) слоем* (рис. 7.9).

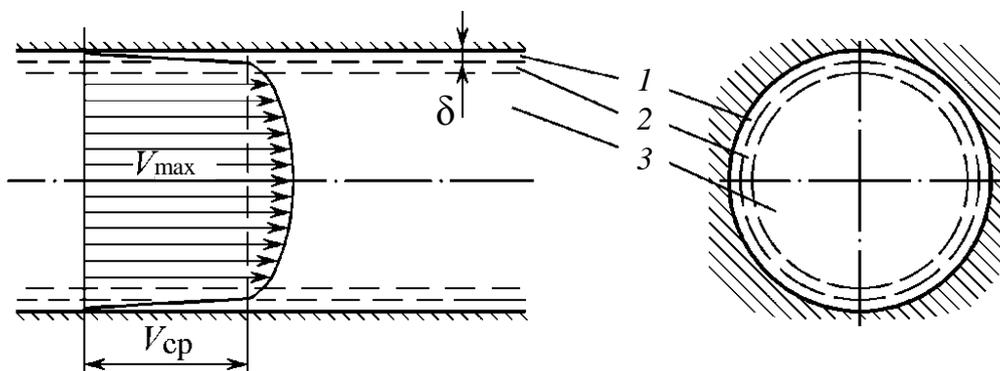


Рис. 7.9. Структура потока и эпюра скоростей при турбулентном режиме движения: 1 – ламинарный подслой; 2 – переходный слой; 3 – турбулентное ядро

Ламинарный подслой, расположенный непосредственно у стенок трубы, имеет весьма малую толщину δ , которая для развитого турбулентного потока может быть найдена по полуэмпирической формуле

$$\delta \approx \frac{30 \nu}{V_{cp} \sqrt{\lambda}} = \frac{30d}{Re \sqrt{\lambda}},$$

где ν – кинематическая вязкость; d – диаметр трубы; $V_{\text{ср}}$ – средняя по живому сечению скорость потока; λ – коэффициент Дарси.

Полуэмпирическая теория Прандтля основана на представлении о том, что при турбулентном перемешивании количество движения массы, переносимой в потоке за счет поперечной пульсационной составляющей скорости, остается неизменным на некотором пути, а затем изменяется скачком. Длина этого пути – так называемая **длина пути перемешивания** ℓ . Предполагается, что это расстояние частица жидкости проходит не взаимодействуя с другими частицами и сохраняет постоянным свое среднее количество движения. Длина пути перемешивания имеет аналог в виде длины свободного пробега молекул. Однако средняя длина пробега молекул мала по сравнению с размерами потока, а размеры турбулентных вихрей могут быть сопоставимы с размерами сечения потока.

Л. Прандтль предположил, что для полубезграничного потока вдоль стенки справедлива линейная зависимость длины пути перемешивания ℓ от расстояния z от стенки, т. е. $\ell = \chi z$, где χ – универсальная постоянная. С достаточной степенью точности эта гипотеза была подтверждена опытным путем для потока вблизи плоской стенки, однако оказалась неприменимой для течения в плоском канале и круглой трубе.

Для последних случаев предложены эмпирические зависимости.

Для установления причины повышения сопротивления движению при турбулентном режиме течения рассмотрим схему турбулентного установившегося потока, изображенного на рис. 7.10.

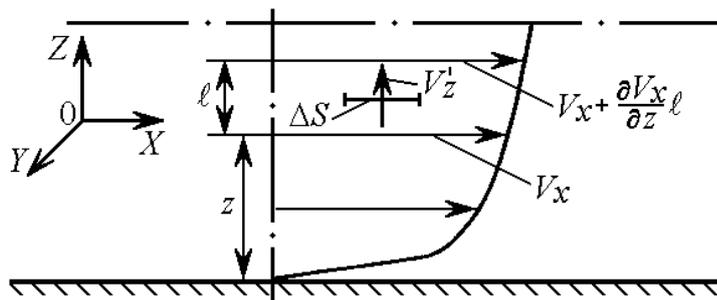


Рис. 7.10. Схема распределения скоростей в турбулентном потоке

Ось OX направлена вдоль осредненного движения потока.

Через площадку ΔS , нормальную к оси OZ , переносится жидкость со скоростью V'_z . Масса перенесенной за время Δt жидкости по гипотезе

Прандтля составит $\Delta m = \rho V'_z \Delta S \Delta t$.

Если до пересечения площадки продольная скорость этой массы жидкости равна V_x , а количество движения $\rho V'_z \Delta S \Delta t V_x$, то согласно

гипотезе Прандтля значения этих величин остаются постоянными на пути перемещения ℓ , а затем изменяются. На расстоянии ℓ от рассматриваемой площадки осредненная скорость потока станет равна

$$\overline{V_x} + \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \ell,$$

а количество движения массы будет

$$K = \rho V_z' \Delta S \Delta t \left(\overline{V_x} + \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \ell \right).$$

Изменение количества движения обусловлено действием некоторой продольной силы $\Delta R_{\text{турб}}$:

$$\Delta R_{\text{турб}} \Delta t = \rho V_z' \Delta S \Delta t \left(\overline{V_x} + \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \ell \right) - \rho V_z' \Delta S \Delta t.$$

Отсюда
$$\Delta R_{\text{турб}} = \rho V_z' \Delta S \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \ell.$$

Эту силу называют *силой турбулентного трения*.

Модуль касательного напряжения составит

$$\tau_{\text{турб}} = \frac{\Delta R_{\text{турб}}}{\Delta S} = \rho V_z' \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \ell.$$

Для двумерных равномерных потоков (см. рис. 7.10)

$$\overline{V_x} = f(z); \quad \overline{V_y} = 0; \quad \overline{V_z} = 0.$$

В этом случае
$$\frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} = \frac{d\overline{V_x}}{dz}.$$

Допуская, что $\frac{d\overline{V_x}}{dz} \ell \approx V_x'$, предыдущее выражение можно представить в виде

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho V_x' V_z'.$$

Таким образом, теория Прандтля объясняет происхождение турбулентных касательных напряжений обменом количества движения при перемешивании масс жидкости.

Далее Прандтль предположил, что величины V_x' и V_z' одного порядка. Тогда можно записать

$$\tau_{\text{турб}} = \rho \ell^2 \left(\frac{d\overline{V}_x}{dz} \right)^2. \quad (7.23)$$

Общее касательное напряжение при турбулентном режиме движения представляет собой сумму вязкостных напряжений $\tau_{\text{лам}}$ [см. формулу (1.18)] и $\tau_{\text{турб}}$:

$$\tau = \mu \frac{dV_x}{dz} + \rho \ell^2 \left(\frac{d\overline{V}_x}{dz} \right)^2. \quad (7.24)$$

Знак плюс в первом слагаемом взят потому, что отсчет расстояния z ведется от стенки.

В соответствии с приведенной двухслойной моделью турбулентного потока в турбулентном ядре $\tau_{\text{турб}} \gg \tau_{\text{лам}}$ и первым слагаемым в формуле (7.24) можно пренебречь и принять

$$\tau = \tau_{\text{турб}} = \rho \ell^2 \left(\frac{d\overline{V}_x}{dz} \right)^2.$$

Отсюда
$$\frac{d\overline{V}_x}{dz} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

Используя формулу Прандтля для длины пути перемешивания и введя обозначение

$$V^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},$$

проинтегрируем последнее выражение

$$V = \frac{V^*}{\chi} \ln z + C. \quad (7.25)$$

Эта формула выражает закон распределения скоростей в турбулентной области потока. Логарифмический вид формулы (7.25) получен как следствие гипотезы Прандтля и, как отмечалось выше, неприемлем для течений в плоских каналах и трубах. Тем не менее, это уравнение составляет основу теории турбулентных потоков и находит все более широкое применение. Большинство эмпирических формул также имеет логарифмический вид.

Из физической картины турбулентного режима течения жидкости следует, что распределение скоростей в турбулентном ядре более равномерное. Действительно, интенсивное перемешивание частиц жидкости, их переход из слоя в слой по живому сечению потока при-

водит к выравниванию значений скоростей. В связи с этим коэффициент Кориолиса α , учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению в уравнении Бернулли, при турбулентном течении значительно меньше, нежели при ламинарном.

Напомним, что при ламинарном режиме течения $\alpha = 2$ и не зависит от числа Рейнольдса.

При турбулентном режиме движения коэффициент Кориолиса является функцией Re и уменьшается с увеличением последнего (рис. 7.11) от $\alpha = 1,13$ при $Re = Re_{кр}$ до $\alpha = 1,025$ при $Re = 3 \cdot 10^6$.

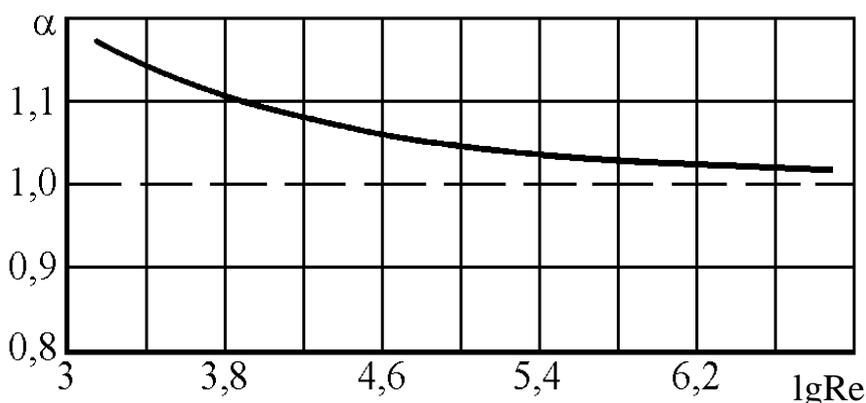


Рис. 7.11. Зависимость коэффициента Кориолиса от $lg Re$

7.4.2. Турбулентное течение в шероховатых трубах

Приведенные выше теоретические положения достаточно верно описывают физические процессы при турбулентном режиме движения жидкости. Это подтверждается результатами многочисленных экспериментов.

Вместе с тем, получить общие зависимости, позволяющие получить достоверные значения параметров потока, не удастся. В настоящее время основными являются эмпирические и полуэмпирические формулы, получаемые путем систематизации экспериментальных данных на основе теории гидродинамического подобия.

Как нам уже известно, основной формулой для потерь напора в круглых трубах является формула Дарси – Вейсбаха (5.22):

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Эта формула применима как при ламинарном, так и при турбулентном течении. Различие заключается лишь в значениях

коэффициента λ . Для ламинарного режима течения в п. 7.1 было получено

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (7.26)$$

В предыдущем пункте было показано, что касательные напряжения в турбулентном потоке обусловлены не только силами вязкости, а и действием силы турбулентного трения. Как следствие этого, потери напора на трение при турбулентном режиме больше, чем при ламинарном.

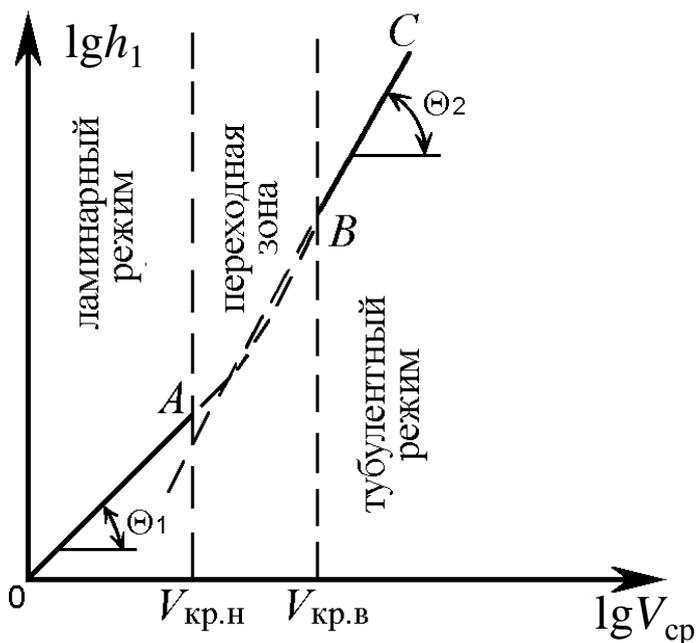


Рис. 7.12. Зависимость потерь напора от средней скорости потока жидкости

Исследования потерь напора по длине при равномерном движении в прямолинейных трубах показывают, что зависимость h_ℓ от средней скорости $V_{\text{ср}}$ в логарифмических координатах на графике предстает в виде отрезков прямых линий (рис. 7.12), уравнение которых имеет вид

$$\lg h_\ell = \lg b + m \lg V_{\text{ср}}.$$

При этом в общем виде эта зависимость будет выглядеть так: $h_\ell = b V_{\text{ср}}^m$,

где b – параметр, учитывающий влияние размеров трубы, шероховатости ее стенок и вид жидкости; m – показатель степени.

На рис. 7.12 отрезок $0A$, соответствующий ламинарному режиму, образует с осью абсцисс угол $\Theta_1 = 45^\circ$.

Тогда $m_1 = \text{tg}\Theta_1 = 1$. Действительно, как было показано в п. 7.1, при ламинарном режиме движения потери напора по длине пропорциональны первой степени скорости.

При турбулентном режиме движения, отрезок BC на графике составляет с осью абсцисс угол $\Theta_2 > \Theta_1$.

Установлено, что $m_2 = \text{tg}\Theta_2 = 1,75 - 2$.

Из теории гидродинамического подобия и анализа π -членов следует, что при турбулентном режиме коэффициент Дарси должен быть функцией не только основного критерия подобия напорных потоков

– числа Рейнольдса, а также может зависеть от безразмерного геометрического фактора – относительной шероховатости внутренней поверхности трубы (см. табл. 6.1), т. е. $\lambda_T = f(\text{Re}; \Delta/d)$, где Δ – средняя высота бугорков шероховатости; d – диаметр трубы.

Отметим здесь, что важен не абсолютный размер Δ выступов шероховатости, а именно относительная шероховатость Δ/d . Действительно, одна и та же абсолютная шероховатость может совершенно не оказывать влияния на сопротивление трубы большого диаметра, но способна значительно увеличить сопротивление трубы малого диаметра.

Когда шероховатость трубы не влияет на ее сопротивление, трубу называют *гидравлически гладкой*. В этом случае $\lambda_T = f(\text{Re})$.

Физическая картина поведения естественно шероховатых труб как гидравлически гладких выглядит следующим образом. Согласно двухслойной модели турбулентного потока у стенки трубы расположен ламинарный подслой толщиной δ (см. рис. 7.9). Если ламинарный подслой полностью перекрывает все выступы на стенке ($\delta > \Delta$), то имеем гидравлически гладкую трубу. При $\delta < \Delta$ труба *гидравлически шероховатая*. Значение δ зависит от значений Re , поэтому одна и та же труба может быть в одних условиях гидравлически гладкой, в других – шероховатой.

Существует целый ряд эмпирических и полуэмпирических формул λ_T для турбулентного режима движения в гидравлически гладких трубах:

$$\text{– формула П. К. Конакова} \quad \lambda_T = \frac{1}{(1,81 \lg \text{Re} - 1,5)^2}; \quad (7.27)$$

$$\text{– формула Блазиуса} \quad \lambda_T = \frac{0,316}{\sqrt[4]{\text{Re}}}. \quad (7.28)$$

Характер влияния числа Рейнольдса и относительной шероховатости на сопротивление труб виден из графика (рис. 7.13), который получен И. И. Никурадзе на основе многочисленных опытов с трубопроводами с искусственно созданной шероховатостью на их внутренней поверхности.

Шероховатость была получена путем приклейки песчинок определенного размера, полученного просеиванием песка через специальные сита. Тем самым была получена равномерно распределенная зернистая шероховатость.

При анализе графиков видно, что при ламинарном режиме движения, независимо от шероховатости стенок труб, все экспериментальные значения λ лежат на одной линии. В логарифмических координатах графика – это прямая I, описываемая уравнением (7.26).

При турбулентном режиме движения в гидравлически гладких трубах, независимо от их шероховатости, все точки располагаются также на одной линии II, называемой *зоной гладкостенных труб*. Эта линия описывается уравнениями (7.27) или (7.28).

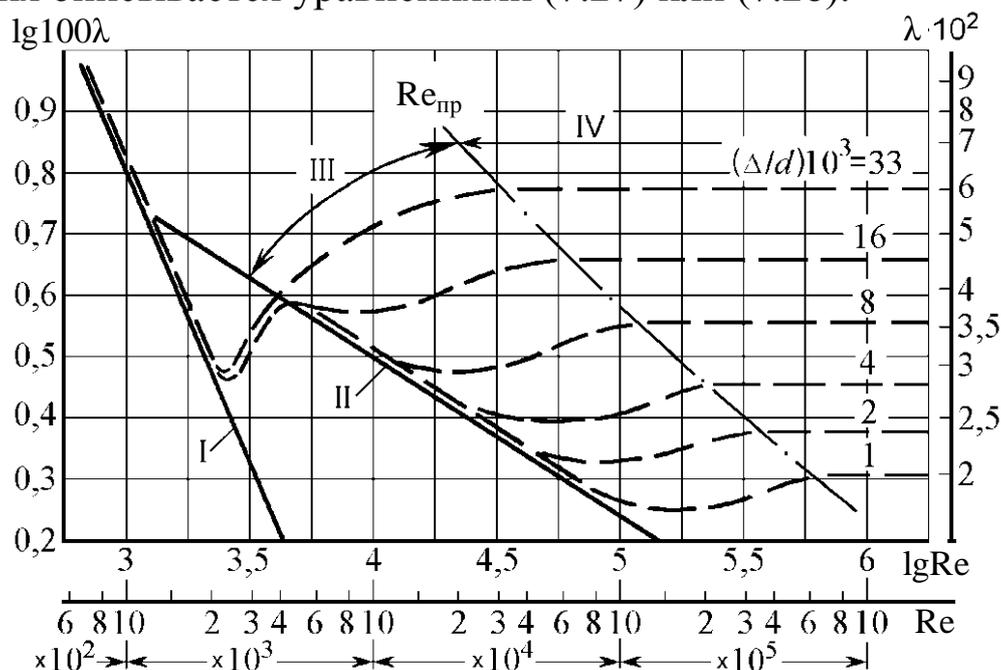


Рис. 7.13. Зависимости коэффициента Дарси от числа Рейнольдса и относительной шероховатости (по И. И. Никурадзе)

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса кривые для шероховатых труб начинают отклоняться от прямой II, соответствующей закону сопротивления гладких труб. Это зона III на рис. 7.13. Здесь потери напора зависят как от Re , так и от Δ/d .

Правее штрихпунктирной линии на графике располагается зона IV, в которой кривые зависимости λ становятся горизонтальными.

Это значит, что в этой зоне число Рейнольдса перестает влиять на величину потерь напора, т. е. $\lambda = f(\Delta/d)$. Обратившись к предыдущему параграфу, можем отметить, что в этом случае основную роль в формуле (7.24) играет второе слагаемое, т. е. $\tau_{турб}$.

Для зоны IV Никурадзе вывел формулу для λ в виде

$$\lambda = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{d}{\Delta}\right)^2}. \quad (7.29)$$

Опыты Никурадзе проводились на трубах, снабженных искусственной, равномерно распределенной зернистой шероховатостью. Для натуральных шероховатых труб зависимость $\lambda = f(\text{Re}; \Delta/d)$ получается несколько иной, с более плавным переходом от гидравлически гладких к шероховатым трубам. На рис. 7.14 приведен график, полученный Г. А. Муриным.

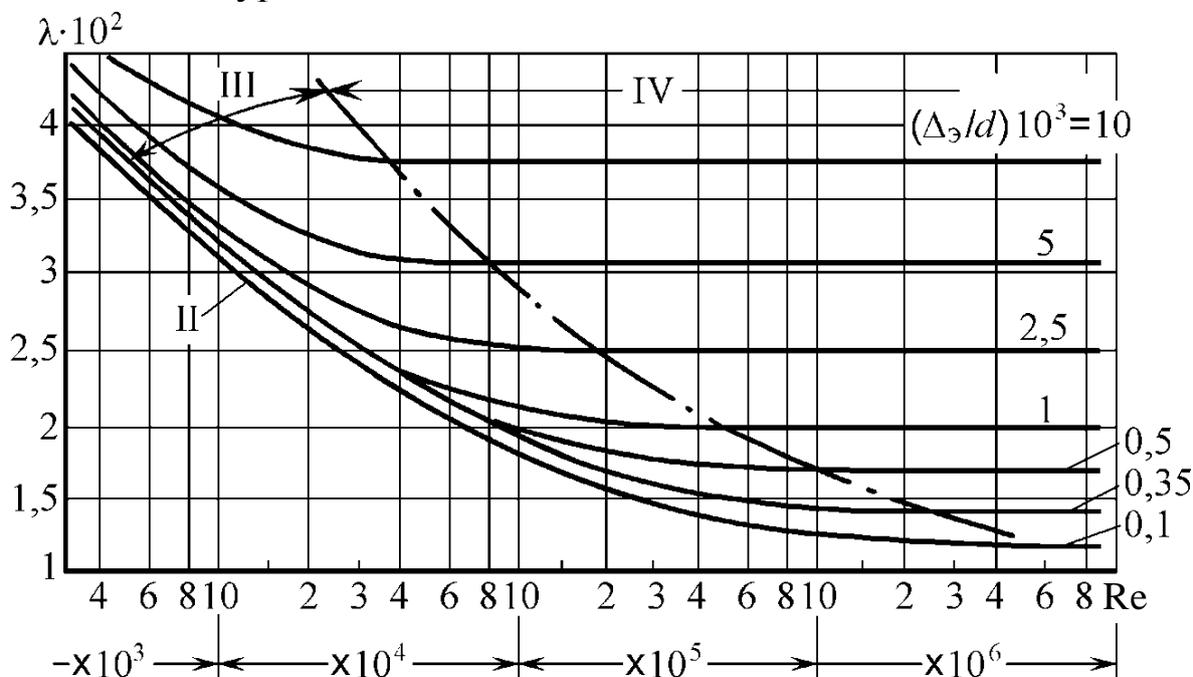


Рис. 7.14. Зависимость коэффициента Дарси от Re для труб с естественной шероховатостью (по Г. А. Мурину)

Различие в характере кривых, представленных на рис. 7.13 и 7.14, объясняется тем, что в натуральной трубе выступы шероховатости имеют различную высоту и при увеличении числа Рейнольдса начинают выступать за пределы ламинарного подслоя не одновременно, а постепенно по мере уменьшения толщины этого подслоя при увеличении Re .

Неравномерность шероховатости реальных труб существенно усложняет учет влияния шероховатости на потери напора. Поэтому на практике используют так называемую *эквивалентную шероховатость* Δ_3 , при которой потери напора в трубе получаются такими же, как и при фактической (неоднородной) шероховатости. Именно эквивалентная шероховатость Δ_3 использована Муриным для построения своих графиков.

Для практических расчетов по определению сопротивления реальных шероховатых труб широко используется формула, выведенная А. Д. Альтшулем:

$$\lambda_{\text{турб}} = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta_{\text{э}}}{d} + \frac{68}{\text{Re}}}. \quad (7.30)$$

Она универсальна, т. е. применима во всех зонах графика (см. рис. 7.14).

7.5. Местные гидравлические сопротивления

В пункте (5.4) указывалось, что гидравлические потери энергии делятся на потери по длине и местные потери.

Потери на трение по длине в прямых трубах постоянного сечения рассмотрены для ламинарного (см. п. 7.1) и турбулентного (см. п. 7.4.2) режимов течения. Показано, что эти потери обусловлены силами вязкостного трения.

Местными же сопротивлениями называют такие элементы трубопроводов, в которых потеря энергии происходит за счет деформации потока (изменение размеров и конфигурации русла, отрыв транзитного потока от стенок русла и вихреобразование).

В п. 5.4 были приведены примеры типичных местных сопротивлений и дана общая формула для расчета потерь на местном сопротивлении – формула Вейсбаха (5.20):

$$h = \xi \frac{V^2}{2g},$$

где ξ – коэффициент потерь.

При турбулентном режиме движения жидкости коэффициент потерь определяется в основном формой местных сопротивлений и очень мало изменяется с изменением абсолютных размеров русла, скорости потока и вязкости жидкости, т. е. с изменением числа Рейнольдса. Поэтому принимают обычно, что ξ не зависит от Re , что означает квадратический закон сопротивления.

Для большинства местных сопротивлений, даже простейших, получить теоретически расчетные зависимости пока не удастся. Поэтому для расчетов используются в основном экспериментальные данные в виде эмпирических формул, таблиц и графиков, которые приводятся в справочной литературе.

В данном параграфе в качестве примера рассмотрено типичное местное гидравлическое сопротивление – *внезапное расширение*, для которого при турбулентном режиме течения потерю напора можно достаточно точно определить теоретически.

При внезапном расширении русла (трубы) (рис. 7.15) поток срывается с кромки и расширяется не внезапно, как русло, а постепенно. Причиной этого является действие сил инерции.

В кольцевом пространстве между потоком и стенкой трубы образуются вихри, которые и являются причиной потерь энергии.

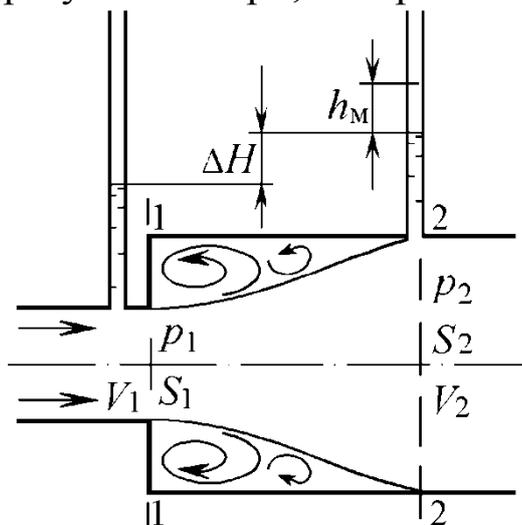


Рис. 7.15. Внезапное расширение трубы

Между вихрем и потоком происходит постоянный обмен частицами жидкости. В результате завихренные массы жидкости с границы транзитной струи проникают внутрь потока, где вращение постепенно гасится трением. Таким образом, потеря энергии происходит за счет сил трения, но только косвенно через вихреобразование, а не как по длине трубы.

Рассмотрим два сечения горизонтального потока:

1–1 – в плоскости расширения трубы и 2–2 – в том месте, где поток, расширившись, займет все сечение большой трубы. Поскольку между этими сечениями поток расширяется, то скорость его уменьшается, а давление возрастает. Поэтому второй пьезометр показывает напор больший, чем первый пьезометр на величину ΔH . Однако, если бы потерь напора на участке между сечениями не было, то второй пьезометр показал бы напор еще больший на величину h_m . Величина h_m и есть местная потеря напора на расширении. Составим уравнение Бернулли для выделенного участка:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_m.$$

В нашем случае геометрические высоты $Z_1 = Z_2$ (горизонтальный поток) и они взаимоуничтожаются. Кроме этого сделаем три допущения:

1) распределение скоростей в рассматриваемых сечениях равномерное, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2$, что обычно и принимается при развитии турбу-

лентном режиме течения;

2) касательные напряжения на боковой стенке трубы между сечениями 1–1 и 2–2 равны нулю, т. е. пренебрегаем силой трения, т. к. путь трения мал;

3) давление p_1 действует по всей площади S_2 сразу за сечением 1–1, потому что, хотя труба и расширилась, поток в сечении 1–1 сохранил свой поперечный размер, следовательно, ни скорость, ни давление еще не изменились.

Тогда исходное выражение уравнения Бернулли примет вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_m. \quad (7.31)$$

Применим закон об изменении количества движения к фиксированному объему, заключенному между сечениями 1–1, 2–2 и стенкой трубы. Для этого определим равнодействующую внешних сил, действующих на этот объем в направлении движения, т. е. от сил давления. Учитывая третье допущение, получим равнодействующую силу, численно равную секунднему импульсу:

$$R = (p_1 - p_2)S_2.$$

Соответствующее этому импульсу изменение количества движения находится как разность между секундным количеством движения, выносимым из рассматриваемого объема, и вносимым в него. При равномерном распределении скоростей по сечениям эта разность равна $Q\rho(V_2 - V_1)$.

Приравнявая одно к другому, получим

$$(p_1 - p_2)S_2 = Q\rho(V_2 - V_1).$$

Заменим расход через его выражение $Q = V_2S_2$ и разделим обе части этого выражения на $S_2\rho g$:

$$\frac{(p_1 - p_2)S_2}{S_2\rho g} = \frac{V_2S_2\rho}{S_2\rho g}(V_2 - V_1)$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2}{g}(V_2 - V_1).$$

Преобразуем правую часть этого уравнения

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{2V_2V_1}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

и перегруппируем его члены

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}.$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (7.31), можем сделать вывод, что

$$h_{в.р} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}, \quad (7.32)$$

т. е. потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору, определенному по разности скоростей. Это положение называют *теоремой Борда*, который вывел эту формулу. Полученный результат приводится к общему виду представления потерь на местном сопротивлении (формуле Вейсбаха) при помощи уравнения постоянства расхода (3.11): $S_1 V_1 = S_2 V_2$.

Исходя из этого можем записать

$$h_{в.р} = \xi \frac{V_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}. \quad (7.33)$$

Когда площадь S_2 весьма велика (например, выход из трубы в большой резервуар) по сравнению с площадью S_1 и, следовательно, скорость V_2 можно считать равной нулю, потеря напора на расширении составит

$$h_{расш} = \frac{V_1^2}{2g},$$

т. е. $\xi = 1$, т. к. теряется весь скоростной напор.

Доказанная теорема хорошо подтверждается опытом при турбулентном течении и широко используется в практических расчетах.

В заключение отметим, что при ламинарном режиме течения закон сопротивления является еще более сложным и исследован в меньшей степени, чем при турбулентном режиме течения. Если при турбулентном течении потери на местном сопротивлении с достаточной степенью точности можно считать пропорциональными скорости во второй степени, а коэффициенты потерь ξ , определяются в основном формой местного сопротивления и практически не зависят от Re , то при ламинарном течении потерю напора h_M следует представлять как сумму:

$$h_M = h_{тр} + h_{вихр}, \quad (7.34)$$

где $h_{тр}$ – потеря напора, обусловленная непосредственным действием сил вязкости в данном местном сопротивлении и скорости в первой степени; $h_{вихр}$ – потеря напора, связанная с деформацией потока

и вихреобразованием в самом местном сопротивлении или за ним и пропорциональная квадрату скорости.

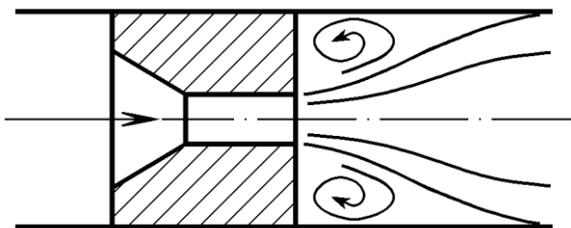


Рис. 7.16. Схема жиклера

Так, например, при течении через калиброванное отверстие (*жиклер*) (рис. 7.16) слева от плоскости расширения возникает потеря напора на вязкостное трение, а справа – на вихреобразование.

Учитывая закон сопротивления при ламинарном течении с поправкой на начальный участок (7.17), а также формулу Вейсбаха (5.19), выражение (7.34) можно представить в виде

$$h = \frac{A}{\text{Re}} \frac{V^2}{2g} + B \frac{V^2}{2g}, \quad (7.35)$$

где A и B – безразмерные константы, зависящие в основном от формы местного сопротивления.

Для снижения потерь при переходе потока жидкости из трубы меньшего диаметра в большой необходимо уменьшить величину вихреобразования. Это можно получить, сделав переход плавным. Таким элементом является диффузор (рис. 7.17), в котором скорость потока постепенно уменьшается, а давление увеличивается.

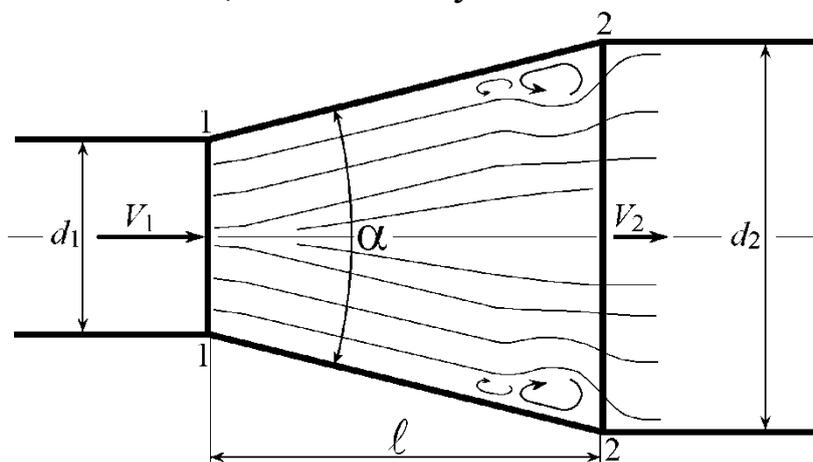


Рис. 7.17. Схема прохождения потоком диффузора

Частицы движущейся жидкости преодолевают нарастающее давление за счет своей кинетической энергии, которая уменьшается вдоль диффузора. Кинетическая энергия частиц уменьшается также и в направлении от оси трубы к стенкам. Слои жидкости у стенок обладают столь малой кинетической энергией, что не могут преодолеть нарастающего давления, останавливаются и начинают двигаться об-

ратно. Обратное движение (противоток) вызывает отрыв основного потока от стенки и вихреобразование. Это, как известно, связано с потерей напора.

Интенсивность этих явлений возрастает с увеличением угла конусности диффузора α , а вместе с этим растут и потери на вихреобразование в нем.

Кроме того, в диффузоре имеются потери на трение, подобные тем, которые возникают в трубах постоянного сечения, т. к. он имеет длину ℓ , геометрически связанную с углом конусности соотношением

$$\ell = \frac{d_2 - d_1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (7.36)$$

Поэтому полную потерю напора в диффузоре $h_{\text{диф}}$ следует рассматривать как сумму потерь на трение $h_{\text{тр}}$ и расширение $h_{\text{расш}}$:

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}}. \quad (7.37)$$

Потерю на трение можно приближенно подсчитать следующим образом. Рассмотрим круглый диффузор с прямолинейной образующей и углом конусности α (рис. 7.18).

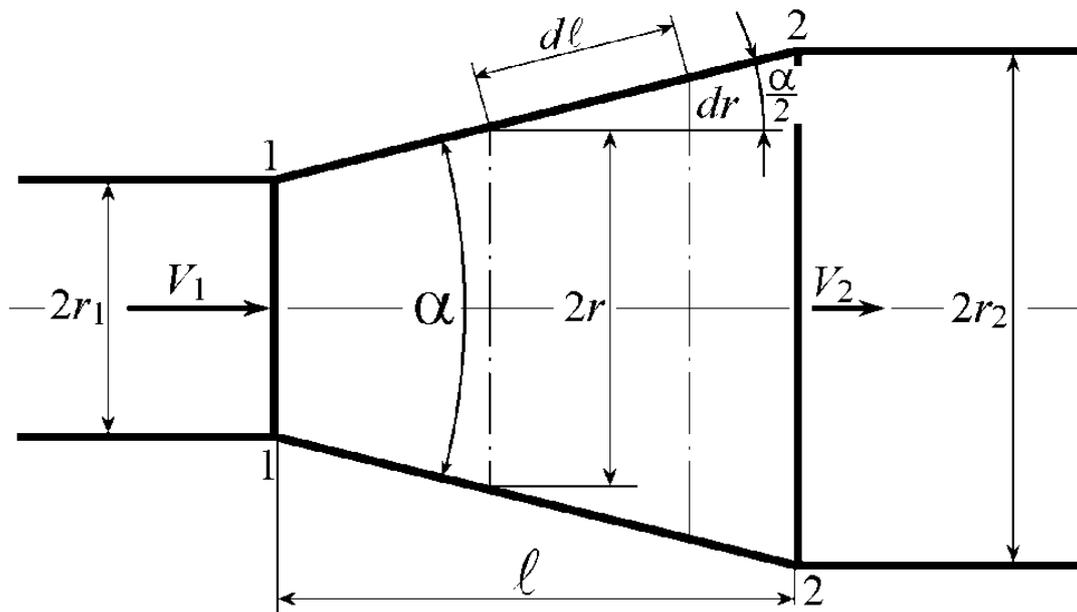


Рис. 7.18. Расчетная схема диффузора

Выделим элементарный отрезок диффузора длиной вдоль образующей $d\ell$ и для него выразим элементарную потерю напора на трение по формуле (5.22):

$$dh_{\text{тр}} = \lambda \frac{d\ell}{2r} \frac{V^2}{2g}, \quad (7.38)$$

где V – средняя скорость в сечении, радиус которого равен r .

Из рис. 7.18 имеем

$$d\ell = \frac{dr}{\sin(\alpha/2)}.$$

Далее, на основании уравнения постоянства расхода (3.11), можно записать

$$V = V_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2.$$

Подставим эти выражения в формулу (7.38):

$$dh_{\text{тр}} = \lambda \frac{dr}{2r \sin(\alpha/2)} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Пренебрегая изменением коэффициента λ по длине диффузора, проинтегрируем данное выражение в пределах от r_1 до r_2 :

$$dh_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right] \frac{V_1^2}{2g}. \quad (7.39)$$

Потеря напора на расширение (вихреобразование) в диффузоре имеет ту же природу, что и при внезапном расширении, но меньшее значение из-за плавного изменения сечения. Поэтому эти потери принято принимать такими же, что и внезапное расширение, но с поправочным коэффициентом k , называемым коэффициентом смягчения. Его численное значение (меньшее единицы) для диффузоров с углами конусности $\alpha < 20^\circ$ можно определять по приближенной формуле

$$k = \sin \alpha. \quad (7.40)$$

На основании этого можно представить потери на расширение для диффузора в виде

$$h_{\text{расш}} = k \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2g}. \quad (7.41)$$

Введем обозначение

$$n = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2,$$

n называется степенью расширения диффузора.

Тогда полная потеря напора в диффузоре в результате подстановки (7.39) и (7.41) в (7.37) опишется зависимостью

$$h_{\text{диф}} = \left[\frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{V_1^2}{2g}. \quad (7.42)$$

С учетом (7.40), коэффициент сопротивления диффузора выражается формулой

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (7.43)$$

Анализ данного выражения показывает, что при заданных λ и n первое слагаемое в формуле, обусловленное трением, при увеличении угла α уменьшается, т. к. диффузор становится короче. Однако второе слагаемое, обусловленное вихреобразованием, в этом случае будет увеличиваться. Таким образом, очевидно, функция $\xi_{\text{диф}} = f(\alpha)$ имеет минимум при некотором оптимальном значении угла α .

Если принять $\sin(\alpha/2) = (\sin \alpha)/2$, то оптимальное значение угла α опишется зависимостью [3]:

$$\alpha_{\text{опт}} = \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \frac{\lambda}{4}}. \quad (7.44)$$

При подстановке в эту формулу $\lambda = 0,015-0,025$ и $n = 2-4$ получим $\alpha = 6^\circ$, что соответствует экспериментальным данным.

На практике для сокращения длины диффузора обычно принимают $\alpha = 7-9^\circ$.

Если габариты не позволяют установить углы α , близкие к оптимальным, то при $\alpha > 15-25^\circ$ целесообразно отказаться от диффузора с прямолинейной образующей. На рис. 7.19, а приведена схема диффузора, у которого постоянный градиент давления вдоль оси.

Уменьшение потерь энергии в таких диффузорах по сравнению с обычными будет тем больше, чем больше угол α . Так при $\alpha = 40-60^\circ$ потери напора уменьшатся на 40 % [3].

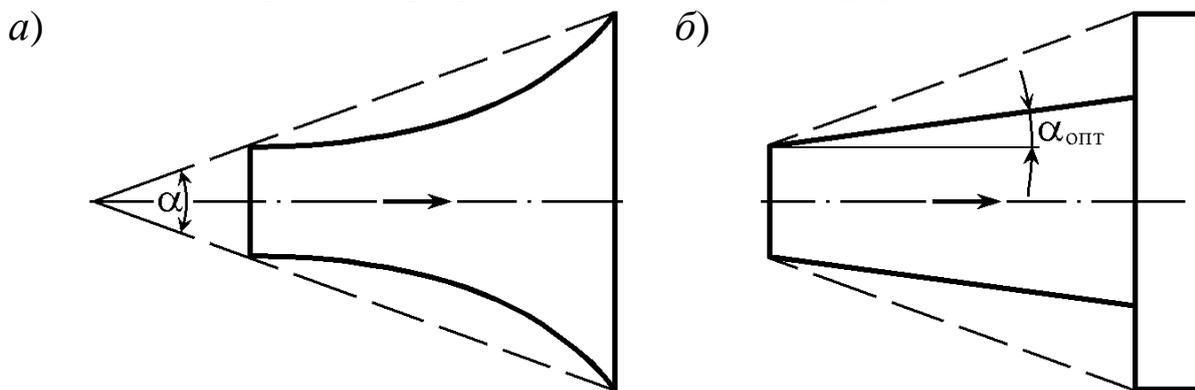


Рис. 7.19. Схемы диффузоров с ограниченной длиной

Неплохие результаты дает также ступенчатый диффузор, состоящий из обычного диффузора с оптимальным углом и следующего за ним внезапного расширения (рис. 7.19, б). Внезапное расширение в этой конструкции невелико и потери напора будут малы.

7.6. Контрольные вопросы

1. Согласно какой математической зависимости описывается распределение местной скорости по сечению цилиндрической трубы при равномерном ламинарном движении?

2. Как соотносятся максимальная и средняя скорости при равномерном ламинарном движении в цилиндрической трубе?

3. Как распределяются касательные напряжения по сечению трубы при ламинарном равномерном движении?

4. Каковы значения коэффициента Кориолиса (кинетической энергии) при ламинарном и турбулентном режимах движения в цилиндрической трубе?

5. От каких величин зависит коэффициент Дарси при равномерном ламинарном движении в цилиндрической трубе?

6. Что такое пульсационные скорости и пульсационные напряжения? Чему равны их осредненные во времени значения?

7. В чем различие осредненной местной скорости и средней в данном живом сечении скорости?

8. Какими величинами обычно характеризуют пульсационные составляющие местных скоростей давления?

9. Чему равна динамическая скорость?

10. В чем основные характерные черты двухслойной модели турбулентного потока?

11. Как рассчитывается толщина вязкого подслоя? Зависит ли толщина вязкого подслоя в данной трубе от температуры жидкости? В зависимости от каких других величин может изменяться толщина вязкого подслоя?

12. Поясните понятия «гидравлически гладкая» и «гидравлически шероховатая» труба.

13. Какие зоны сопротивления при равномерном турбулентном движении в трубах можно указать? В чем различия вида кривых зависимости коэффициента Дарси от числа Рейнольдса и от относительной шероховатости в трубах с равнозернистой шероховатостью и в трубах промышленного изготовления с естественной шероховатостью?

8. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

В данном разделе рассмотрены различные случаи истечения жидкости из резервуаров, емкостей, котлов через отверстия и насадки (короткие трубки различной формы) в атмосферу или пространство, заполненное газом или той же жидкостью. Особенность этого случая движения жидкости заключается в том, что в процессе истечения запас потенциальной энергии, которым обладает жидкость в резервуаре, превращается в кинетическую энергию струи со значительными или небольшими потерями. Подобное преобразование потенциальной энергии в кинетическую имеет широкое практическое применение, например, в пожаротушении, в гидравлических турбинах и т. д.

Основным вопросом, который решается в данном случае, является определение скорости истечения и расхода жидкости для различных форм отверстий и насадков.

8.1. Истечение через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре

Из большого резервуара (рис. 8.1, *а*) с жидкостью, находящейся под давлением p_1 , через малое отверстие ($d_o \ll 0,1H$) в стенке происходит истечение жидкости в воздушное (газовое) пространство. Это так называемое свободное истечение.

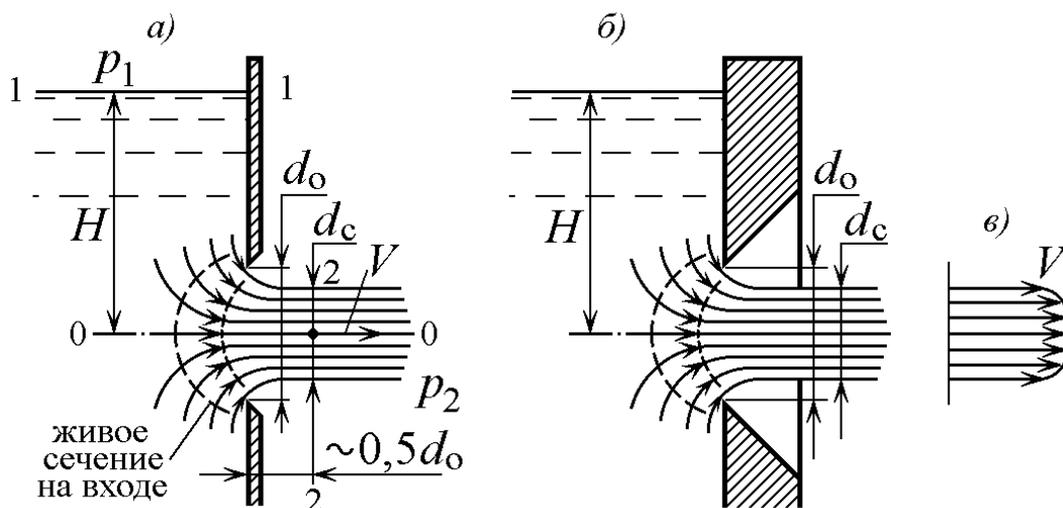


Рис. 8.1. Схема истечения жидкости через отверстие в тонкой стенке

Пусть отверстие имеет форму, показанную на рис. 8.1, *а*, или такое, как на рис. 8.1, *б*. Условия истечения жидкости в обоих случаях

будут совершенно одинаковыми. Частицы жидкости приближаются к отверстию из всего прилежащего объема, двигаясь ускоренно по различным плавным траекториям. Действующая центробежная сила направлена внутрь формирующейся струи. Сечение струи постепенно уменьшается. Сжатие продолжается и после выхода струи из резервуара. По мере удаления от отверстия кривизна линий тока уменьшается и на некотором расстоянии от стенки [обычно равным $(0,5-1)d_0$] движение становится плавно изменяющимся. Сечение, где движение становится плавно изменяющимся, называют *сжатым сечением струи*. Скорость во всех точках сжатого сечения практически одинакова ввиду малости сечения, и только наружный слой несколько заторможен из-за трения о кромку отверстия (рис. 8.1, в).

Так как размер отверстия мал по сравнению с напором H и дно резервуара не оказывает влияния на траектории частиц жидкости, подходящих к отверстию, то наблюдается *совершенное сжатие струи*, т. е. наибольшее ее сжатие.

Степень сжатия характеризуется коэффициентом сжатия ε , определяемым по формуле

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \left(\frac{d_c}{d_0} \right)^2, \quad (8.1)$$

где S_c и S_0 – площади сечения соответственно струи и отверстия.

Для определения скорости и расхода через отверстие составим уравнение Бернулли (5.16) для участка, ограниченного сечениями 1–1 (свободная поверхность жидкости в резервуаре) и 2–2 (сжатое сечение). Движение жидкости в этих сечениях можно считать плавно изменяющимся, т. е. применимо уравнение Бернулли.

В данном случае имеем

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Потери удельной энергии на участке определяются сопротивлением отверстия (местные потери), и представим их в виде формулы Вейсбаха (5.20):

$$h_{1-2} = \xi_0 \frac{V^2}{2g},$$

где ξ_0 – коэффициент потерь при истечении из отверстия с острой кромкой.

Перенесем известные члены уравнения в его левую часть:

$$H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = (\alpha_2 + \xi_0) \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Учитывая, что уравнение неразрывности $V_2 S_2 = V_1 S_1$ или $V_2 \varepsilon S_0 = V_1 S_1$ ($S_1, S_2 = S_c$ и S_0 – площади свободной поверхности жидкости в резервуаре, струи в сечении 2–2 и отверстия соответственно), можем записать

$$H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \left[\alpha_2 + \xi_0 + \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2 \right] \frac{V_2^2}{2g}.$$

Отсюда в общем случае ($p_1 \neq p_2$) средняя скорость в сжатом сечении определится как

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_0 - \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}. \quad (8.2)$$

Множитель $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_0 - \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon S_0}{S_1} \right)^2}}$ называется *коэффициентом скорости*.

тогда

$$V_2 = \varphi_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}. \quad (8.3)$$

На практике часто встречается ситуация, когда $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$, т. е. имеем открытый резервуар и истечение струи происходит в окружающую атмосферу.

Тогда формула (8.3) примет вид

$$V_2 = \varphi_0 \sqrt{2gH}. \quad (8.4)$$

Расход жидкости через отверстие составит $Q = V_2 S_c$ или с учетом формулы (8.1) $Q = V_2 \varepsilon S_0$.

Используя формулу (8.3), получим $Q = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}$

или в случае использования формулы (8.4) будет $Q = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2gH}$.

Произведение $\mu_0 = \varepsilon \varphi_0$ называют *коэффициентом расхода*.

$$\text{Тогда} \quad Q = \mu_0 S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} \quad (8.5)$$

$$\text{или} \quad Q = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH}. \quad (8.6)$$

Как уже отмечалось выше, распределение скоростей по сечению струи является равномерным лишь в средней части сечения (в ядре струи). Опыт показывает, что в ядре струи скорость практически равна идеальной:

$$V_{\text{н}} = \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}.$$

Поэтому введенный коэффициент скорости φ следует рассматривать как коэффициент средней скорости.

Из выражения (8.5) коэффициент расхода равен

$$\mu_o = \frac{Q}{S_o \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}} \quad \text{или} \quad \mu_o = \frac{Q}{S_o V_{\text{н}}}.$$

Это значит, что коэффициент расхода есть отношение действительного расхода к такому расходу $Q^* = S_o V_{\text{н}}$, который имел бы место при отсутствии сжатия струи и сопротивления. Величина Q^* не является расходом при истечении идеальной жидкости, т. к. сжатие струи будет иметь место и при отсутствии гидравлических потерь.

Коэффициенты сжатия струи ε , скорости φ_o и расхода μ_o зависят, в первую очередь, от типа отверстия, а также, как и все безразмерные коэффициенты в гидромеханике, от основного критерия гидродинамического подобия для напорных течений – числа Рейнольдса.

При истечении воды и воздуха, когда обычно имеет место развитый турбулентный режим движения, можно принимать $\varepsilon = 0,6-0,64$; $\xi \approx 0,06$; $\varphi_o = 0,97-0,98$ и тогда $\mu_o = 0,6-0,63$.

На практике часто приходится иметь дело не со свободным истечением жидкости, а с истечением в пространство, заполненное этой же жидкостью (рис. 8.2).

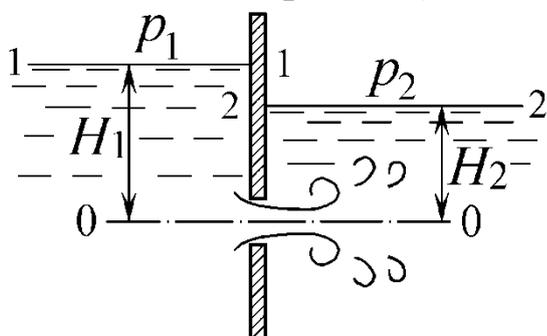


Рис. 8.2. Схема истечения под уровень

Такой случай называется *истечением под уровень*, или *истечением через затопленное отверстие*. В этом случае вся кинетическая энергия струи теряется на вихреобразование, как при внезапном расширении.

Запишем уравнение Бернулли для участка, ограниченного сечениями 1–1 и 2–2 (рис. 8.2), где скорости будем считать равными нулю:

$$H_1 + \frac{p_1}{\rho g} = H_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + h_0,$$

где V – скорость истечения в сжатом сечении; $h_0 = \xi_0 \frac{V^2}{2g}$ – потери напора на отверстии; ξ_0 – коэффициент потерь, имеющий примерно такое же значение, что и при истечении в атмосферу.

Составляющая $\alpha \frac{V^2}{2g}$ является потерей напора, связанной с внезапным расширением струи от сжатого состояния до сечения во втором резервуаре.

Исходя из этого уравнения, скорость истечения составит

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi}} \sqrt{2gH_p} = \varphi \sqrt{2gH_p}, \quad (8.7)$$

где $H_p = H_1 - H_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ – расчетный напор.

Расход жидкости составит

$$Q = VS_c = \xi \varphi S_o \sqrt{2gH_p} = \mu_o S_o \sqrt{2gH_p}. \quad (8.8)$$

Таким образом, имеем те же расчетные формулы, что и при свободном истечении, только расчетный напор H_p в данном случае представляет собой разность гидростатических напоров по обе стороны стенки, т. е. скорость и расход не зависят от высоты расположения отверстия.

Коэффициенты сжатия и расхода при истечении под уровень можно принимать те же, что и при истечении в атмосферу.

Применяя тот же метод, который был использован для вывода уравнения (8.2), и используя уравнение Бернулли для сжимаемого вязкого газа (5.10), можно получить формулу для определения скорости истечения газа из отверстия:

$$V_\Gamma = \varphi \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_n} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (8.9)$$

где ρ_n – начальная (в сечении 1–1) плотность газа.

Расход газа через отверстие составит $Q = \varepsilon S_o V_\Gamma \rho_n$, или с учетом формулы (8.9):

$$Q = \mu S_o \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \rho_n p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (8.10)$$

8.2. Истечение через насадки при постоянном напоре

Насадками называются присоединенные к отверстию в стенке резервуара или трубе короткие трубки определенной длины, в которых имеется напорное движение. Для определения скорости истечения и расхода жидкости через насадки применяют те же формулы, что и для малого отверстия в тонкой стенке, но коэффициенты ϵ , ϕ , μ в них имеют другие значения в зависимости от формы насадки. Основные типы насадков приведены на рис. 8.3.

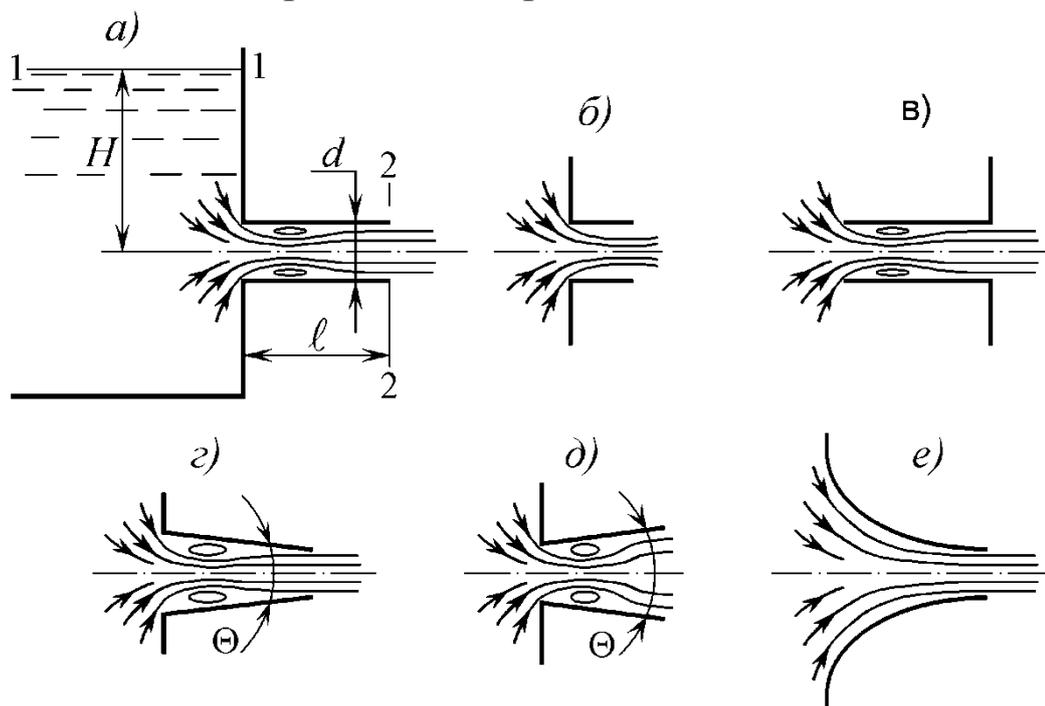


Рис. 8.3. Типы насадков

Внешним цилиндрическим насадком (насадком Вентури) называется прямая цилиндрическая трубка длиной $l = (3-4)d$, присоединенная под прямым углом с внешней стороны резервуара к отверстию того же диаметра (рис. 8.3, a).

При входе в такую короткую трубку кривизна линий тока (траекторий) значительна, благодаря чему во входной части трубки происходит сжатие потока подобное тому, что и при истечении через отверстие. Затем поток расширяется, заполняя все сечение насадки. Вокруг сжатого сечения образуется кольцевая вихревая водоворотная зона, подобно той, что имеет место при внезапном сужении трубопровода.

Содержащиеся в жидкости газы и выделившиеся из жидкости пары, зажатые в водоворотной зоне, довольно быстро уносятся тран-

зитным потоком. В вихревой зоне понижается давление. В связи с наличием вакуума в сжатом сечении действующий напор увеличивается на величину этого вакуума. Скорость в сжатом сечении увеличивается по сравнению с истечением через отверстие с острой кромкой. Насадок как бы "подсасывает" жидкость.

В то же время в насадке происходят и дополнительные по сравнению с отверстием с острой кромкой потери напора, связанные с внезапным расширением струи за сжатым сечением. Соотношение влияния "подсасывания" и указанных дополнительных потерь напора на пропускную способность и определяет степень изменения расхода через насадок по сравнению с отверстием.

Запишем уравнение Бернулли для участков между сечениями 1–1 и 2–2 (см. рис. 8.3, а).

Считая на выходе из насадка коэффициент Кориолиса $\alpha = 1$ и пренебрегая скоростным напором в сечении 1–1 ($\alpha_1 V_1/2g = 0$), получим при $p_1 = p_2$

$$H = (1 + \sum \xi) \frac{V^2}{2g},$$

где V – скорость в выходном сечении насадка (в сечении 2–2).

В рассматриваемом случае сопротивление движению жидкости состоит из сопротивлений при сужении, аналогичных сопротивлениям в отверстии в тонкой стенке, и сопротивлений при внезапном расширении струи от площади сжатого сечения S_c до площади на выходе из насадка S , т. е.

$$\sum \xi = \xi_0 + \xi_{в.р.}$$

Для расчетов удобнее все коэффициенты сопротивлений отнести к скорости V в выходном сечении насадка.

Определим численные значения коэффициентов сопротивлений при достаточно больших значениях числа Re , когда коэффициент сжатия струи не зависит от числа Re .

Коэффициент сопротивления при истечении через отверстие с острой кромкой, отнесенный к скорости в сжатом сечении V_c , равен $\xi_0 = 0,06$.

С учетом $\varepsilon = S_c/S = 0,61–0,64$ получим

$$\xi = 0,06 \left(\frac{S}{S_c} \right)^2 = 0,16–0,146.$$

При внезапном расширении струи в насадке от S_c до S , приняв $\xi = \frac{S_c}{S} = 0,61 - 0,64$, получим $\xi_{в.р} = \left(\frac{S}{S_c} - 1\right)^2 = 0,4 - 0,32$.

Коэффициент сопротивления при входе в насадок равен сумме коэффициентов сопротивлений на сужение и на расширение струи внутри насадка:

$$\xi_{вх} = \xi_0 + \xi_{в.р} \approx 0,5.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{вх}}} \sqrt{2gH} = \varphi_{ц.н} \sqrt{2gH}, \quad (8.11)$$

где $\varphi_{ц.н} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{вх}}} = 0,82$.

Коэффициент расхода для насадка равен $\mu_{ц.н} = \varphi_{ц.н}$, так как $\varepsilon = 1$, поскольку сжатия потока на выходе из насадка нет.

Опыты показали, что максимальные значения коэффициента расхода соответствуют длине насадка $l_{опт} = (3-4)d$, когда потери напора по длине малы и ими можно пренебречь.

При длине насадка $l_n < l_{опт}$ (рис. 8.3, б) струя отжимается наружным давлением от стенок насадка и истечение жидкости происходит аналогично истечению через отверстие. При $l_n > l_{опт}$ к действующим сопротивлениям добавляются сопротивления на трение по длине, т. е.

$$\sum \xi = \xi_0 + \xi_{в.р} + \xi_{дл} = \xi_{вх} + \lambda \frac{l}{d},$$

где λ – коэффициент Дарси.

При некоторой относительной длине насадка l/d коэффициент расхода через насадок равен коэффициенту расхода при истечении через отверстие с острой кромкой μ_0 . Эта длина составит

$$\frac{l}{d} = \frac{\left(\frac{1}{\mu_0^2} - 1 - \xi_{вх}\right)}{\lambda}. \quad (8.12)$$

При $\mu_0 = 0,6$ и $\lambda = 0,05$ будет $l/d = 25$.

Кроме цилиндрических наружных насадков в технике применяются *цилиндрические внутренние насадки* (рис. 8.3, в) и насадки другой формы.

На рис. 8.3, *з* показан **конический сходящийся насадок**, используемый в том случае, когда при данном полном напоре нужно максимально увеличить кинетическую энергию струи ради увеличения дальности полета струи и силы ее удара. Увеличение угла конусности приводит к уменьшению потерь на расширение струи после сжатия в пределах насадка. При углах конусности 13–14° эти потери практически ничтожны, т. к. в этом случае практически $S_c = S$.

Конический расходящийся насадок (рис. 8.3, *д*) используют для преобразования части кинетической энергии потока в потенциальную, когда нужно уменьшить скорость выхода жидкости или увеличить давление (например, в выходных элементах насосов и вентиляторов).

Наиболее совершенным является **коноидальный насадок** (рис. 8.3, *е*). Его форма соответствует форме вытекающей через отверстие струи. За счет этого сжатие струи на выходе из такого насадка отсутствует, т. е. $\epsilon = 1$. Ниже в табл. 8.1 приведены для сравнения характеристики рассмотренных типов насадков.

Таблица 8.1

Тип насадка или отверстия	Рисунок	ϕ	ϵ	μ
Круглое отверстие в тонкой стенке	8.1	0,98	0,64	0,62
Цилиндрический внешний насадок	8.3, <i>а</i>	0,82	1,00	0,82
Цилиндрический внутренний насадок	8.3, <i>в</i>	0,71	1,00	0,71
Конический сходящийся насадок ($\Theta = 13,4^\circ$)	8.3, <i>з</i>	0,98	0,98	0,95
Конический расходящийся насадок ($\Theta = 7^\circ$)	8.3, <i>д</i>	0,45	1,00	0,45
Коноидальный насадок	8.3, <i>е</i>	0,98	1,00	0,98

8.3. Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре

Истечение жидкости через отверстие при переменном напоре представляет значительный практический интерес, т. к. именно оно обычно наблюдается при опоражнении какой-либо емкости или при перетоке жидкости из одного резервуара в другой при затопленном отверстии между ними. Такой случай возможен и при изменении давления над свободной поверхностью жидкости закрытого резервуара, из которого происходит истечение.

При изменении напора во времени изменяются параметры потока (расход, скорость, давление). Поэтому истечение жидкости из резервуара при переменном напоре представляет один из случаев неустановившегося движения. Как следствие этого, уравнение Бернулли (см. п. 5), полученное для установившегося движения, в общем случае не пригодно. Однако при истечении из резервуара большой площади S_p через отверстие, насадок или трубу с площадью сечения $S_0 \ll S_p$ в открытое пространство или другой резервуар также большой площади уровни в резервуарах изменяются медленно. В этом случае ускорения струи малы, скорость изменяется заметно, только если процесс продолжителен.

Имеет место *квазиустановившееся течение*, т. е. течение, когда за небольшой промежуток времени течение практически не отличается от установившегося. При этом локальные силы инерции пренебрежимо малы.

При расчете параметров квазиустановившихся потоков принято время процессов разбивать на бесконечно большое число малых интервалов dt и в верхних пределах каждого интервала считать движение установившимся и пользоваться уравнением Бернулли (5.16).

Рассмотрим схему истечения, представленную на рис. 8.4.

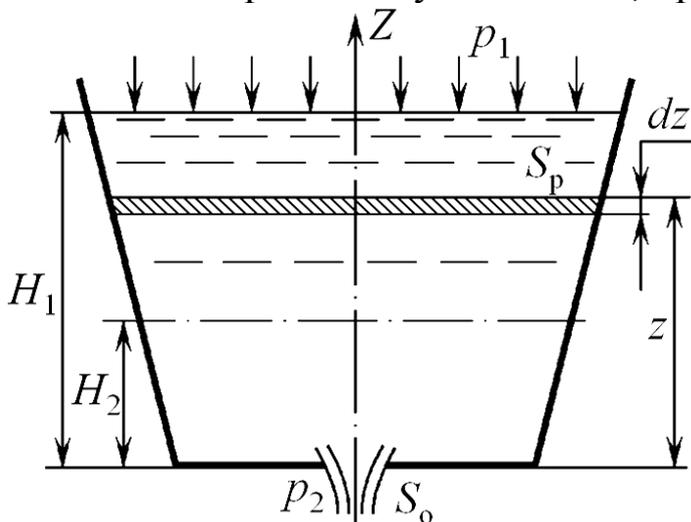


Рис. 8.4. Схема истечения через малое отверстие при переменном напоре

Поперечное сечение резервуара меняется по высоте, т. е. $S_p = f(z)$, но изменение происходит плавно.

Истечение из этого резервуара происходит через малое отверстие в днище. Площадь сечения отверстия равна S_0 . Давление на поверхности жидкости в резервуаре равно p_1 , а на выходе из отверстия — p_2 и в общем случае $p_1 \neq p_2$.

Основной задачей, решаемой в этом случае, является определение времени опораживания резервуара от уровня H_1 до H_2 .

Обозначив через z переменную высоту уровня жидкости в резервуаре, отсчитываемую от дна, и взяв бесконечно малый отрезок времени dt , можем записать следующее уравнение объемов:

$$-S_p dz = Q dt,$$

где $S_p dz$ – объем воды, вытекающий из резервуара (знак минус означает, что с уменьшением z объем вытекшей жидкости увеличивается); dz – изменение уровня в резервуаре за время dt ; Q – расход жидкости через отверстие, определяемый по формуле (8.5).

Отсюда имеем

$$-S_p dz = \mu S_o \sqrt{2g \left(z + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} dt.$$

Тогда будет

$$dt = \frac{S_p dz}{\mu S_o \sqrt{2g \left(z + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}}. \quad (8.13)$$

Получить решение этого уравнения можно в том случае, если известна зависимость $S_p = f(z)$.

Проинтегрируем это выражение по z от H_1 до H_2 для частного случая, когда $S_p = \text{const}$. Опуская промежуточные выкладки получим

$$t = \frac{2S_p (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu S_o \sqrt{2g}}.$$

В случае полного опораживания резервуара $H_2 = 0$.

Тогда

$$t = \frac{2S_p \sqrt{H_1}}{\mu S_o \sqrt{2g}} = \frac{2S_p \sqrt{H_1}}{\mu S_o \sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2S_p H_1}{\mu S_o \sqrt{2g H_1}} = \frac{2W}{Q_{\max}}, \quad (8.14)$$

где W – полный объем резервуара; Q_{\max} – максимальный расход жидкости в начале истечения при H_1 .

Следовательно, время полного опораживания резервуара в два раза больше времени истечения того же объема жидкости при постоянном напоре, равном первоначальному.

8.4. Свободные гидравлические струи

Свободной струей жидкости или газа называется поток не ограниченный твердыми границами. Различают **затопленные** и **незатопленные свободные струи**. Затопленной является струя, которая движется внутри объема жидкости. Незатопленная жидкая струя движется в газовом пространстве (чаще в воздухе). Форма поперечного сечения струи может быть различной и задается конструкцией элемента, из которого она выходит. Обычно таким элементом является раз-

личного вида насадок. Поток в струе может двигаться как в ламинарном, так и в турбулентном режимах. В практике чаще имеем турбулентную струю.

Ограничимся рассмотрением незатопленной струи воды, вытекающей через насадок с круглым поперечным сечением в атмосферу. Такие струи имеют широкое техническое применение. Примерами могут служить гидромониторные струи, используемые на вскрышных работах при открытой добыче полезных ископаемых, пожарные струи и дождевальные струи для полива.

Незатопленная струя имеет три характерных части: компактную, раздробленную и распыленную (рис. 8.5).

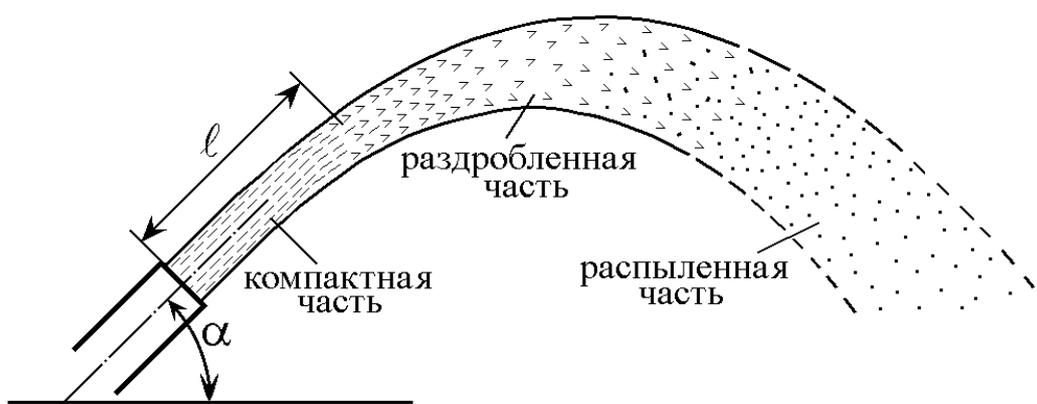


Рис. 8.5. Структура незатопленной свободной струи

Компактная часть струи сохраняет заданную насадком форму поперечного сечения и сплошность потока. В раздробленной части струя, расширяясь, делится на отдельные крупные части. В распыленной части струя, еще более расширившись, состоит из отдельных капель. Изменение структуры струи и ее полное разрушение обусловлено турбулентным обменом через границу струи между жидкостью и воздухом. Этот процесс называется *аэрацией*.

В зависимости от назначения к струям предъявляют различные требования. Так пожарная струя должна иметь большую ударную силу и радиус действия. Струя дождевальных установок, наоборот, должна иметь достаточно развитую распыленную часть, что достигается применением различных насадков-распылителей.

Гидромониторные струи должны иметь компактную часть максимально возможной длины, чтобы иметь большую мощность.

Для этого конструкция выходной части ствола гидромонитора выполняется такой, чтобы уменьшить внутренние колебания в струе и ее турбулентность.

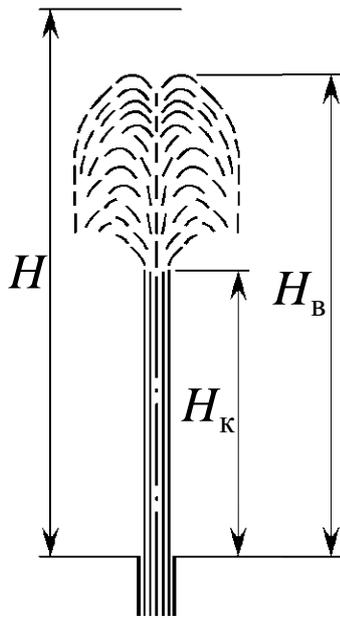


Рис. 8.6. Вертикальная струя

В литературе [14] приведена эмпирическая формула, полученная Н. П. Гавыриным, по определению длины компактной части струи гидромонитора с мощностью, достаточной для размыва грунтов

$$l \approx 0,415 \sqrt[3]{\alpha H^2 d_0},$$

где H – напор перед выходным отверстием диаметром d_0 ; α – угол наклона оси ствола к горизонту.

Эта формула применима для $d_0 \leq 0,05$ м, $H \leq 80$ м и $\alpha = 5 - 32^\circ$.

Высота вертикальной струи H_B из-за сопротивления окружающего воздуха всегда меньше напора на выходе из насадка H (рис. 8.6). Она описывается зависимостью [14]

$$H_B = \frac{H}{1 + \psi H},$$

где $\psi = \frac{0,00025}{d_0 + (10d_0)^3}$ – эмпирический коэффициент. Здесь d_0 измеряется в метрах.

Компактная часть струи может быть определена как [14]

$$H_k = \beta H_B,$$

где β – коэффициент, зависящий от H_B (рис. 8.7).

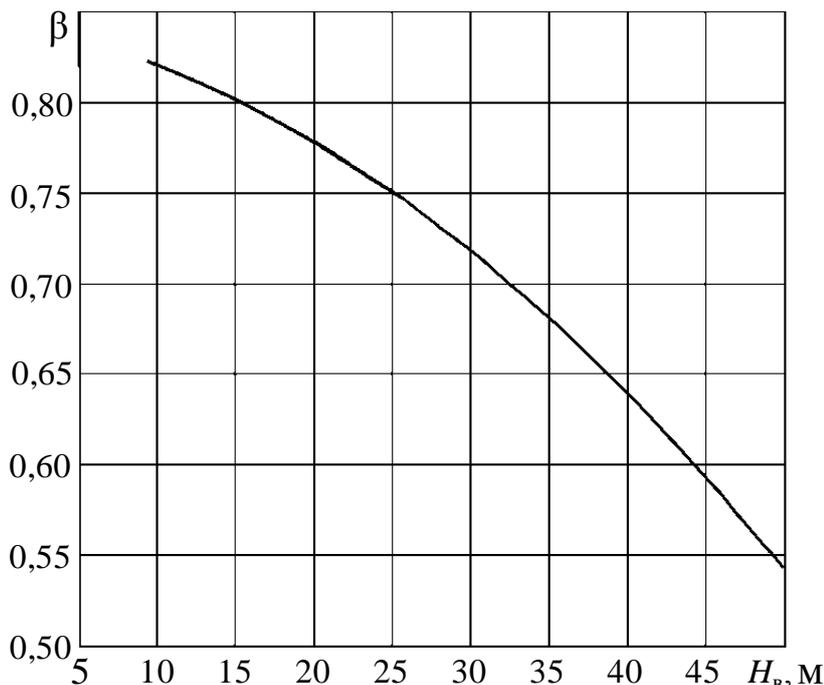


Рис. 8.7. Зависимость коэффициента β от H_B

Наклонные струи. Основным параметром, определяющим дальность полета струи, является угол наклона струи к горизонту α .

На рис. 8.8 траектория полета компактной части струи показана линией 0–1, а линией 0–2 – траектория полета с распыленной частью струи. Дальше точки 2 не попадают

даже отдельные капли.

Очевидно, что в области А располагаются пожарные и гидромониторные струи, а в области Б – дождевальные.

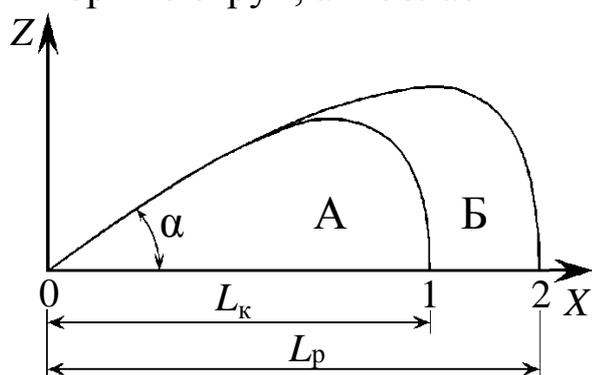


Рис. 8.8. Наклонные струи

По экспериментальным данным в предварительных расчетах принимается, что дальность полета компактной части струи равна высоте компактной части вертикальной струи, т. е. $L_k = H_k$.

Для наклонных струй с распыленной частью дальность полета струи определяется как

$$L_p = kH_v,$$

где k – коэффициент, зависящий от угла наклона струи α .

При изменении α от 0 до 90° k принимает значения от 1,4 до 1 [14]. Более подробно о дождевальных струях изложено в [14].

Обладая энергией, поток в струе при встрече с преградой оказывает на нее динамическое воздействие. На рис. 8.9 приведена схема воздействия струи на плоскую стенку.

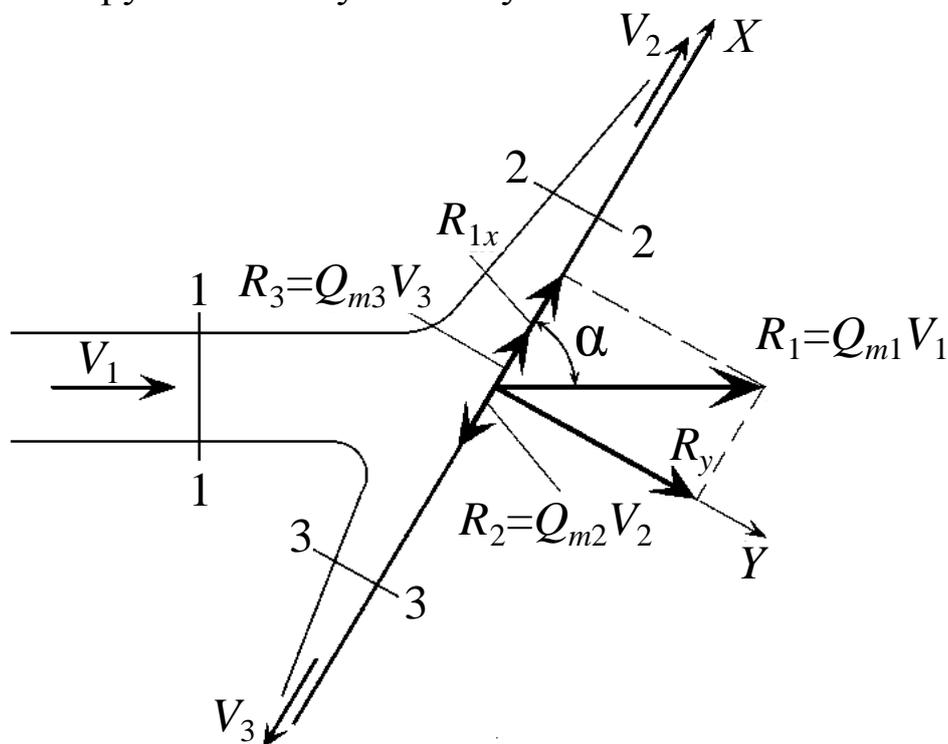


Рис. 8.9. Схема воздействия струи на плоскую стенку

Принимаем, что жидкость растекается по поверхности стенки только двумя потоками.

Это можно сделать, выполнив стенку в виде желоба.

Выделим участок потока сечениями 1–1, 2–2 и 3–3.

Силы избыточного давления жидкости в данных сечениях равны нулю и вес жидкости пренебрежимо мал. Поэтому сила действия потока на стенку только динамическая:

$$\bar{R} = \bar{R}_{\text{дин}} = Q_{m1}\bar{V}_1 - Q_{m2}\bar{V}_2 - Q_{m3}\bar{V}_3,$$

где $Q_{m1}, \bar{V}_1; Q_{m2}, \bar{V}_2$ и Q_{m3}, \bar{V}_3 – массовые расходы и скорости потока в соответствующих сечениях.

Знаем, что по формуле (3.7) массовый расход равен массе жидкости, прошедшей через поперечное сечение потока в единицу времени.

Пренебрегая силами трения жидкости по поверхности стенки ввиду их малости, принимаем, что сила R действия струи на стенку направлена перпендикулярно к стенке, т. е. сумма сил, действующих вдоль стенки, равна нулю

$$R_x = Q_{m1}V_1 \cos\alpha - Q_{m2}V_2 + Q_{m3}V_3 = 0, \quad (8.15)$$

где α – угол наклона стенки к оси струи.

Поэтому сила действия потока на стенку составит

$$R = R_y = Q_{m1}V_1 \sin\alpha. \quad (8.16)$$

В свою очередь имеем

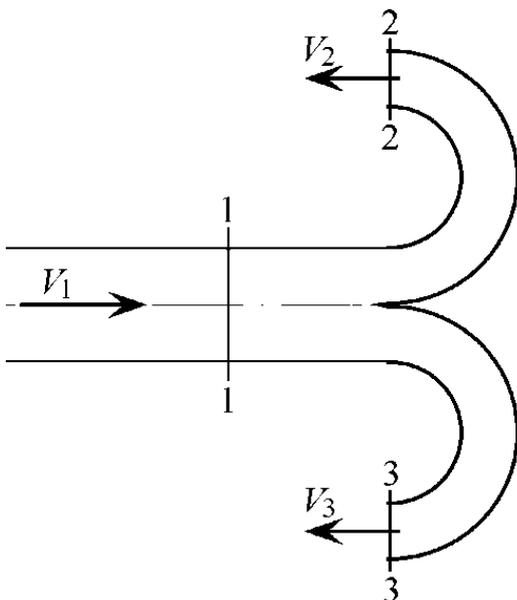


Рис. 8.10. Схема лопасти ковшевой турбины

$$Q_{m1} = Q_{m2} + Q_{m3}. \quad (8.17)$$

Совместное решение уравнений (8.15) и (8.17) позволяет определить Q_{m2} и Q_{m3} .

Вследствие искривления линии тока при растекании жидкости по стенке фактическое значение силы на 5–8 % меньше расчетного.

Силу воздействия струи на стенку можно увеличить, если стенку сделать ковшеобразной (рис. 8.10). Такую форму имеют лопасти ковшевых турбин.

Поток, пройдя лопасть, разворачивается в обратную сторону ($\alpha = \pi/2$).

Тогда сила действия потока на стенку направлена по оси потока и увеличится вдвое:

$$R = Q_{m1}V_1 \sin \pi/2 - Q_{m2}V_2 - Q_{m3}V_3 = 2Q_{m1}V_1,$$

так как вследствие принятых выше допущений $V_1 = V_2 = V_3$.

8.5. Контрольные вопросы

1. Запишите формулы для средней скорости в сжатом сечении и для расхода при истечении через малое незатопленное отверстие с острой кромкой.
2. Может ли коэффициент скорости быть меньше единицы, равен единице или больше единицы?
3. Изменяются ли значения коэффициента расхода при истечении через затопленные отверстия по сравнению с незатопленными?
4. Что называется внешним цилиндрическим насадком? Какие явления объясняют его повышенную пропускную способность по сравнению с малым отверстием с тонкой кромкой?
5. Как зависят расчетные коэффициенты при истечении через различные насадки от числа Рейнольдса?
6. Какие допущения приняты при рассмотрении истечения жидкости при переменном напоре?
7. Влияют ли геометрические параметры сосудов на конечные результаты расчета? Если влияют, то какие именно и каким образом?
8. Что называют свободной гидравлической струей?
9. Какова структура незатопленной свободной струи?
10. Как определяется сила действия потока струи на стенку?

9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

Все трубопроводы можно разделить на простые и сложные. **Простыми** являются трубопроводы, состоящие из труб одинакового диаметра и не имеющие по пути ответвлений, а **сложными** – трубопроводы, состоящие из простых, соединенных тем или иным образом.

С гидравлической точки зрения различают также короткие и длинные трубопроводы. К **коротким трубопроводам** относятся такие, в которых потери напора в местных сопротивлениях соизмеримы с потерями напора по длине на прямых участках трубопроводов. К **длинным трубопроводам** относятся такие, в которых потери напора по длине составляют 90–95 % от общих потерь. В таких трубопроводах потерями в местных сопротивлениях либо можно пренебречь, либо принять их ориентировочно равными 5–10 % от потерь напора по длине.

9.1. Простой трубопровод постоянного сечения

Жидкость движется по трубопроводу благодаря тому, что ее энергия в начале трубопровода больше, чем в конце. Этот перепад (разность) уровней энергии может быть создан тем или иным способом: работой насоса, за счет разности уровней жидкости или разностью давлений. Рассмотрим простой трубопровод постоянного сечения, состоящий из последовательно соединенных местных гидравлических сопротивлений (повороты трубы, фильтр, вентиль, обратный клапан) и прямых отрезков труб, изображенный на рис. 9.1, а.

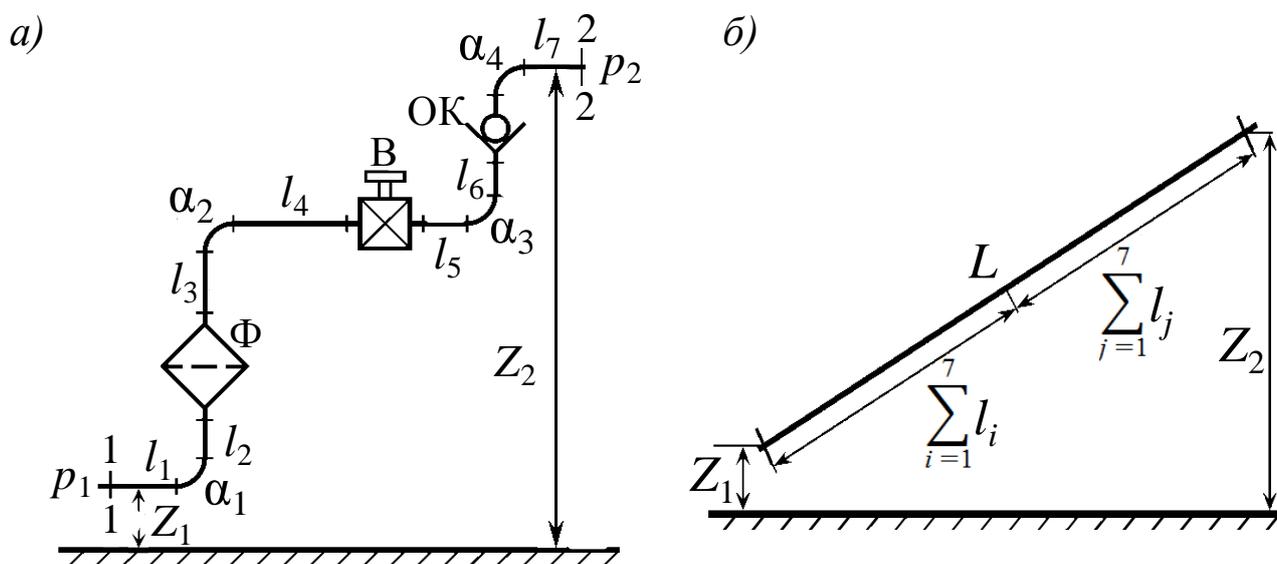


Рис. 9.1. Схема простого трубопровода

В начальном сечении 1–1 геометрическая высота равна Z_1 и избыточное давление p_1 , а в конечном 2–2 – соответственно Z_2 и p_2 . Скорость потока в этих сечениях при постоянном диаметре, равном d , будут одинакова и величина ее составляет V .

Запишем уравнение Бернулли (5.16) для принятых сечений 1–1 и 2–2. Считая $\alpha_1 = \alpha_2$ и скоростные напоры, которые в этом случае равны друг другу, получим

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \Sigma h_{1-2}$$

или
$$\frac{p_1}{\rho g} = Z_2 - Z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + \Sigma h_{1-2}, \quad (9.1)$$

где Σh_{1-2} – сумма потерь напора на участке трубопровода между сечениями 1–1 и 2–2.

Пьезометрическую высоту, стоящую в левой части уравнения (9.1), назовем *требуемым напором* $H_{\text{треб}}$. Он представляет собой такой напор, который необходимо создать в начальном сечении трубопровода для перемещения жидкости определенным расходом по данному трубопроводу от сечения 1–1 до сечения 2–2.

Требуемый напор расходуется [см. правую часть уравнения (9.1)] на подъем жидкости на высоту $(Z_2 - Z_1)$, преодоление противодействия p_2 в конечном сечении и на потери в гидравлических сопротивлениях Σh_{1-2} на данном участке.

Потери напора складываются из потерь по длине и в местных гидросопротивлениях, вычисляемых соответственно по формулам (5.22) и (5.20), т. е. в нашем случае будет

$$\Sigma h_{1-2} = \lambda \frac{\Sigma l}{d} \frac{V^2}{2g} + \Sigma \xi \frac{V^2}{2g}, \quad (9.2)$$

где Σl – суммарная длина прямых трубопроводов рассматриваемого участка; $\Sigma \xi$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений на участке.

Вычисление потерь напора таким способом очень громоздко и занимает много времени, особенно если трубопровод состоит из большого числа элементов и при изменяющемся расходе.

Выразим в полученном выражении (9.2) скорость через расход: $V = 4Q/\pi d^2$. Тогда после преобразований получим

$$\Sigma h_{1-2} = \left(\frac{8\lambda}{g \pi^2 d^5} \Sigma l + \frac{8}{g \pi^2 d^4} \Sigma \xi \right) Q^2.$$

Выражение, стоящее в скобках, называется *сопротивлением трубопровода* и обозначается A , т. е.

$$A = \frac{8\lambda}{g \pi^2 d^5} \Sigma l + \frac{8}{g \pi^2 d^4} \Sigma \xi \quad (9.3)$$

и
$$\Sigma h_{1-2} = A Q^2. \quad (9.4)$$

Во многих случаях практических расчетов используют так называемую расчетную длину трубопровода L , вводя понятие эквивалентной длины трубы $l_{\text{эКВ}}$. *Эквивалентной длиной* трубы называют такую длину условной трубы, которая по своему сопротивлению равнозначна (эквивалентна) данному местному сопротивлению при одинаковых расходах жидкости, т. е.

$$h_l = h_m \quad \text{или} \quad \lambda \frac{l_{\text{эКВ}}}{d} \frac{V^2}{2g} = \xi \frac{V^2}{2g},$$

откуда
$$l_{\text{эКВ}} = \frac{\xi}{\lambda} d. \quad (9.5)$$

Расчетная длина трубопровода определяется по формуле

$$L = \Sigma l_i + \Sigma l_{\text{эКВ}j}. \quad (9.6)$$

Тогда сопротивление трубопровода (9.3) будет описываться зависимостью

$$A = \frac{8\lambda L}{g \pi^2 d^5}. \quad (9.7)$$

В результате исходной схеме (рис. 9.1, а) будет эквивалентна расчетная схема, представленная на рис. 9.1, б.

Исходя из вышеизложенного требуемый напор будет определяться по формуле

$$H_{\text{треб}} = Z_2 - Z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + A Q^2. \quad (9.8)$$

Полученное уравнение называется *уравнением напорной характеристики трубопровода*, представленной в виде графика зависимости $H_{\text{треб}}$ от Q (рис. 9.2).

Очевидно, что для горизонтального трубопровода ($Z_1 = Z_2$) и при отсутствии противодавления в конце трубопровода ($p_2 = 0$) график $H_{\text{треб}}$ совпадает с графиком сопротивления трубопровода A .

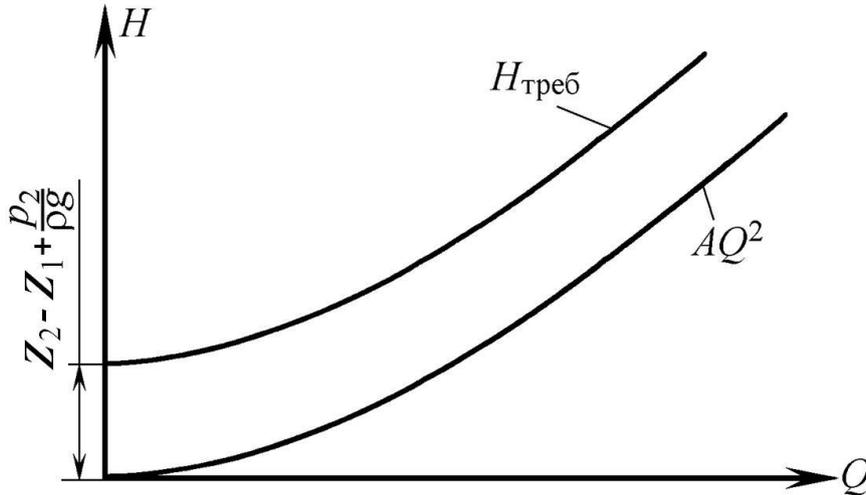


Рис. 9.2. Графики сопротивления (A) и напорной характеристики ($H_{\text{треб}}$) трубопровода

9.2. Соединения простых трубопроводов

Как отмечалось в начале данной главы, сложным трубопроводом называют различные соединения простых трубопроводов. Наиболее распространенными вариантами являются: последовательное, параллельное, разветвленное соединения и их различные комбинации.

А. Последовательное соединение

Примером такого соединения является схема, приведенная на рис. 9.3, а. Согласно этой схеме имеем последовательное соединение трех простых трубопроводов различной длины и диаметра.

Очевидно, что при подаче жидкости по такому трубопроводу расход во всех последовательно соединенных трубах один и тот же, а полная потеря напора между сечениями I и II равна сумме потерь напора во всех последовательно соединенных трубах. Таким образом, имеем следующие основные уравнения:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q, \\ H_{\text{треб}} = H_{\text{треб}1} + H_{\text{треб}2} + H_{\text{треб}3}. \end{cases} \quad (9.9)$$

Эти уравнения определяют правило построения характеристик последовательного соединения трубопроводов.

Пусть даны характеристики трубопроводов 1, 2 и 3 (рис. 9.3, б). Чтобы построить характеристику всего последовательного соедине-

ния, следует в соответствии с уравнениями (9.9) сложить напорные характеристики при одинаковых расходах. В рассматриваемом общем случае скорости в каждом из соединенных трубопроводов различны, т. к. различны их диаметры. Поэтому выражение требуемого напора данного соединения в отличие от формулы (9.8) должно содержать разность скоростных напоров в конце и начале трубопровода.

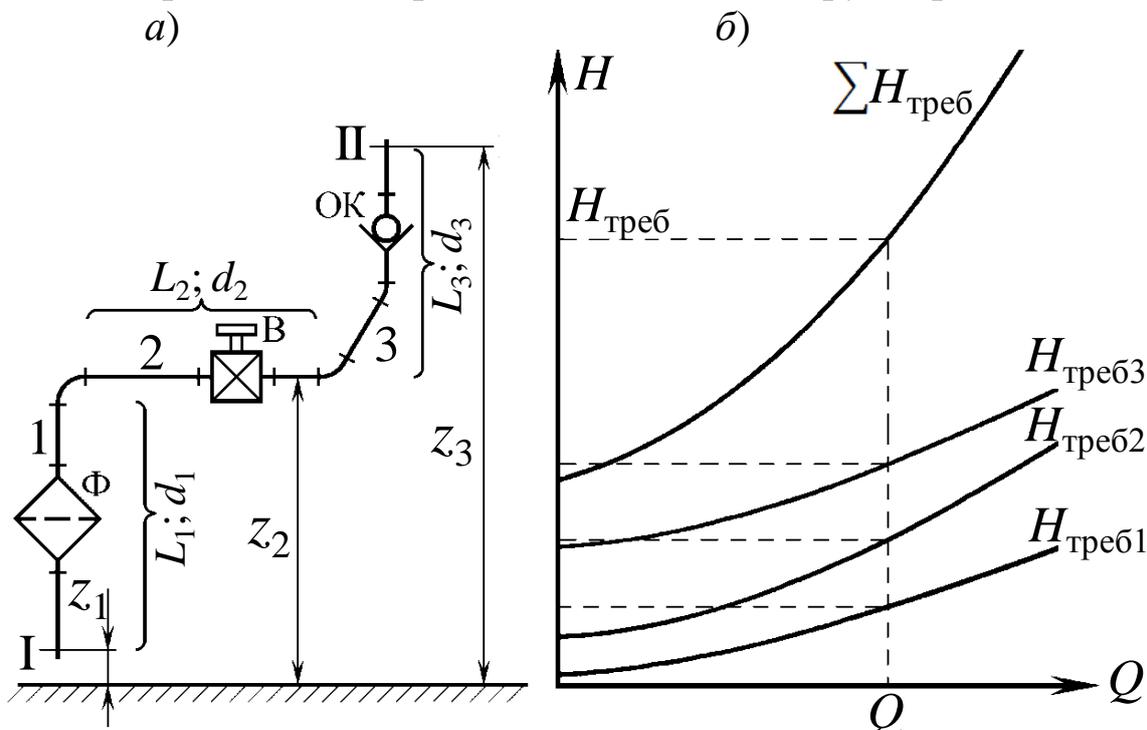


Рис. 9.3. Последовательное соединение простых трубопроводов

Для удобства вывода расчетной формулы представим схему, приведенную на рис. 9.3, а, в виде горизонтальной трубы (рис. 9.4).

Для каждого отдельного трубопровода требуемый напор описывается согласно формуле (9.8) выражениями

$$\begin{cases} H_{\text{треб}1} = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + (z_1 - z_0) + A_1 Q^2, \\ H_{\text{треб}2} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} + (z_3 - z_2) + A_2 Q^2, \\ H_{\text{треб}3} = \frac{p_4}{\rho g} = \frac{p_5}{\rho g} + (z_5 - z_4) + A_3 Q^2, \end{cases} \quad (9.10)$$

где A_1, A_2, A_3 – сопротивления соответствующих трубопроводов, вычисляемые по формуле (9.7).

Пьезометрический напор в конце трубопровода не равен пьезометрическому напору в начале следующего за ним трубопровода, т. к. при изменении диаметра трубы должен меняться и скоростной напор.

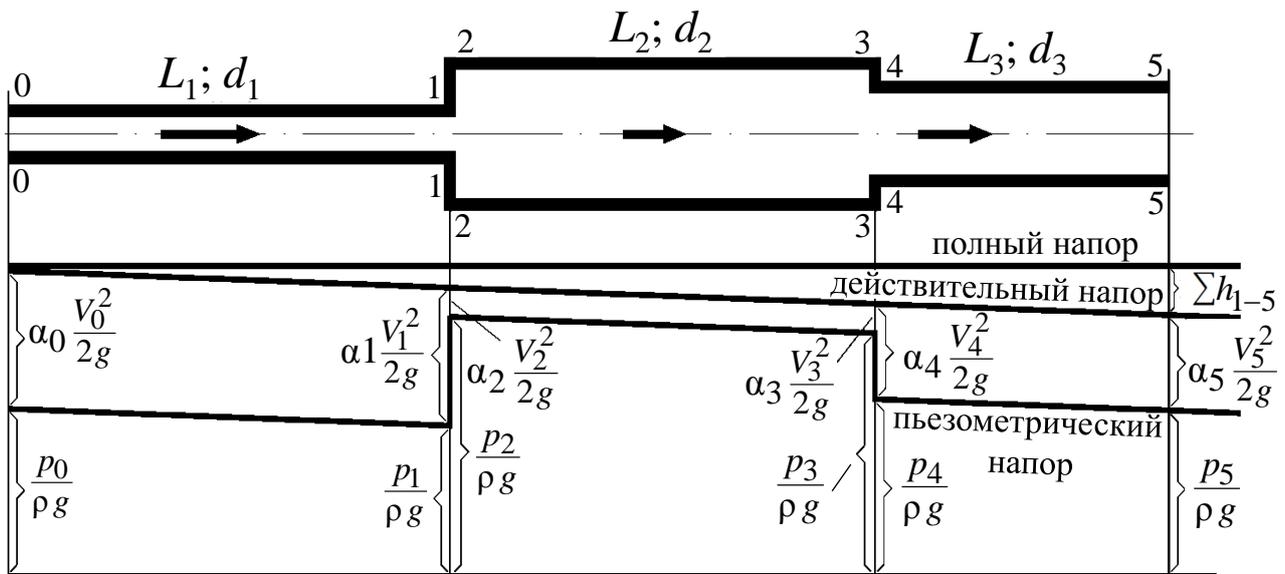


Рис. 9.4. Расчетная схема последовательного соединения трубопроводов

В связи с этим пьезометрический напор в конце 1-го трубопровода связан с пьезометрическим напором в начале 2-го трубопровода

соотношением
$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}, \quad (9.11)$$

и для перехода от 2-го к 3-му
$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_4}{\rho g} + \alpha_4 \frac{V_4^2}{2g} - \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g}. \quad (9.12)$$

Совместное решение уравнений (9.10), (9.11) и (9.12) позволяет получить расчетное выражение требуемого напора для последовательного соединения трубопроводов в виде

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_5}{\rho g} + (z_5 - z_0) - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \alpha_4 \frac{V_4^2}{2g} + A_c Q^2,$$

где $A_c = A_1 + A_2 + A_3$,

или после замены в этом выражении скоростей через расход

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_5}{\rho g} + (z_5 - z_0) + (A_c + C)Q^2,$$

где
$$C = \frac{8}{g \pi^2} \left(\frac{\alpha_4}{d_3^4} - \frac{\alpha_1}{d_1^4} \right).$$

Переходя к обозначениям рис. 9.3, окончательно получим

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_I}{\rho g} = \frac{p_{II}}{\rho g} + (z_3 - z_1) + (A_c + C)Q^2. \quad (9.13)$$

Б. Параллельное соединение

Такое соединение нескольких простых трубопроводов между точками I и II показано на рис. 9.5, а.

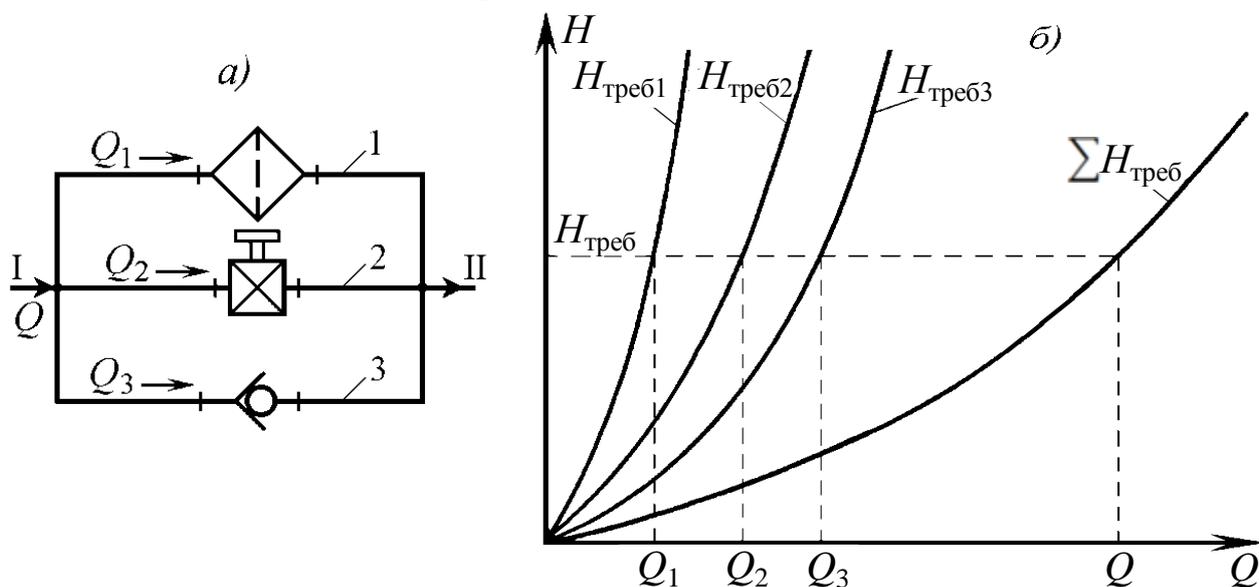


Рис. 9.5. Параллельное соединение простых трубопроводов

Основные уравнения такого соединения имеют вид

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ H_{\text{треб}} = H_{\text{треб1}} = H_{\text{треб2}} = H_{\text{треб3}}. \end{cases} \quad (9.14)$$

Согласно второму уравнению можем записать

$$A_1 Q_1^2 = A_2 Q_2^2 = A_3 Q_3^2$$

или

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = \sqrt{\frac{A_3}{A_2}}, \quad \frac{Q_3}{Q_1} = \sqrt{\frac{A_1}{A_3}}. \quad (9.15)$$

Из этих уравнений определяются расходы в каждом простом трубопроводе. Совместное решение уравнений (9.14) и (9.15) позволяет найти общий расход жидкости в данном соединении;

$$Q = \sqrt{H_{\text{треб}} \left(\frac{1}{\sqrt{A_1}} + \frac{1}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{\sqrt{A_3}} \right)^2} \quad (9.16)$$

и требуемый напор:

$$H_{\text{треб}} = \frac{Q^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{A_1}} + \frac{1}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{\sqrt{A_3}} \right)^2}. \quad (9.17)$$

Графически решение поставленной задачи осуществляется путем сложения расходов при одинаковом напоре $H_{\text{треб}}$ (рис. 9.5, б).

Приведенные зависимости справедливы также и в том случае, когда трубопроводы 1, 2 и 3 (см. рис. 9.6) не сходятся в одной точке II, а подают жидкость в разные места, но на выходе трубопроводов одинаковое давления ($p_1 = p_2 = p_3$) и равные высоты ($Z_1 = Z_2 = Z_3$). Если эти условия не выполняются, то имеет место так называемое *разветвление трубопроводов* (рис. 9.6).

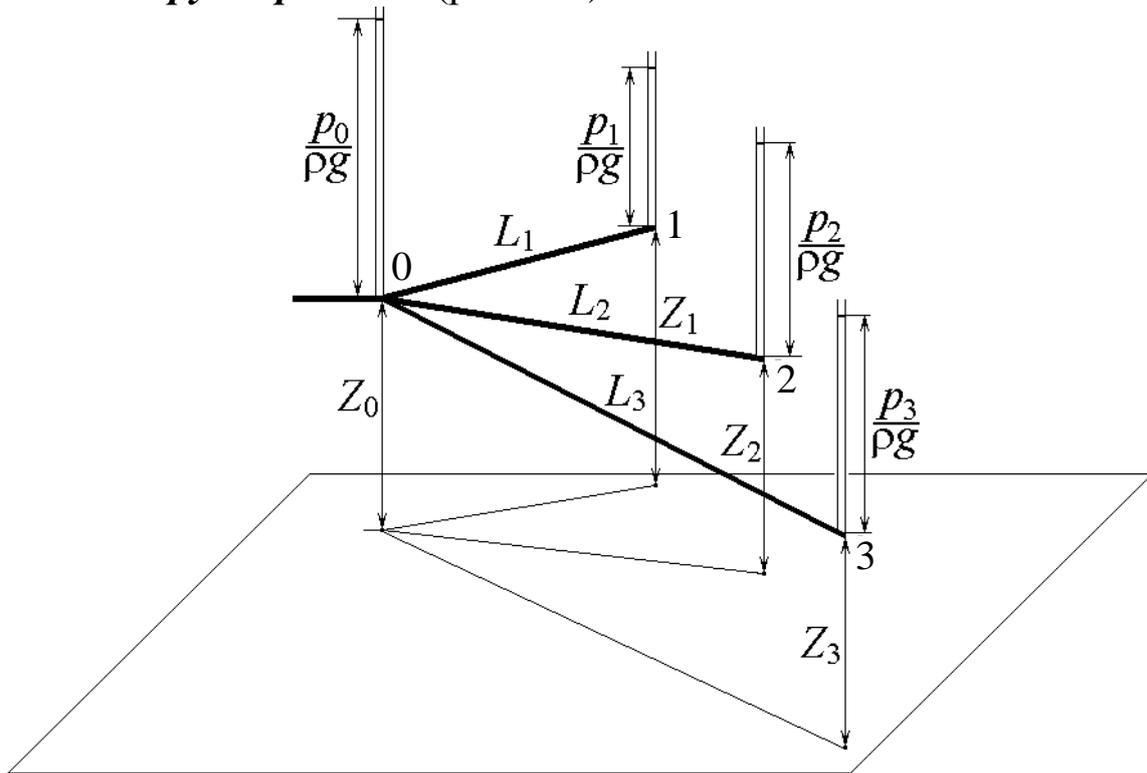


Рис. 9.6. Разветвленный трубопровод

Найдем связь между напором в точке разветвления $H_0 = p_0/\rho g$ и расходами Q_1 , Q_2 и Q_3 в трубопроводах, считая направление течения жидкости от точки 0 к точкам 1, 2 и 3.

Запишем уравнение Бернулли для начального и конечного сечений первого трубопровода:

$$\frac{p_0}{\rho g} + Z_0 + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + Z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \sum h_1.$$

Поскольку трубопровод 1 простой ($d_1 = \text{const}$), то $V_0 = V_1$.

Обозначая $H_0 = \frac{p_0}{\rho g} + Z_0$, $H_1 = \frac{p_1}{\rho g} + Z_1$ и выражая потери

напора через расход $\sum h_1 = A_1 Q_1^m$ (при ламинарном режиме течения $m = 1$, а при турбулентном – $m = 2$), получаем

$$H_0 = H_1 + A_1 Q_1^m .$$

Аналогично для двух других трубопроводов можно записать

$$H_0 = H_2 + A_2 Q_2^m ; \quad H_0 = H_3 + A_3 Q_3^m .$$

К этим трем уравнениям добавляется очевидное условие

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 .$$

Таким образом, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: H_0 , Q_1 , Q_2 и Q_3 .

Основной задачей по расчету разветвленного трубопровода является определение расходов по трубопроводам Q_1 , Q_2 и Q_3 , а также требуемый напор $H_{\text{треб}} = H_0$ при известных размерах ветвей, давлениях в конечных сечениях и сопротивлениях трубопроводов.

Построение кривой напора H_0 для разветвленного трубопровода выполняется сложением кривых потребных напоров для ветвей по правилу сложения характеристик параллельных трубопроводов (рис. 9.7) – сложением абсцисс (Q) при одинаковых ординатах (H).

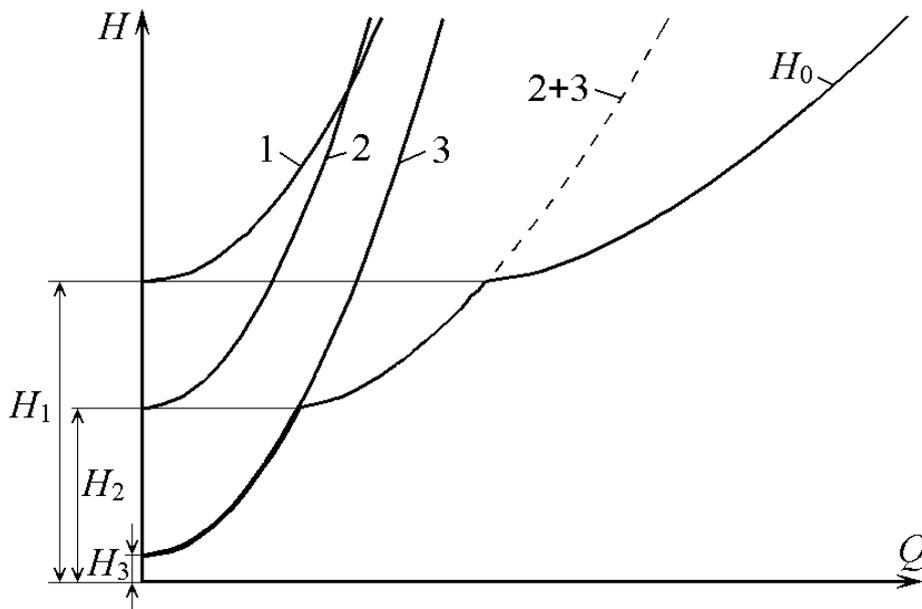


Рис. 9.7. Характеристики разветвленного трубопровода

9.3. Трубопроводные системы с насосной подачей жидкости

Выше рассмотрены, по существу, лишь отдельные участки простых и сложных трубопроводов, а не вся система подачи жидкости. На практике наиболее распространенными являются системы с насосной подачей жидкости. Примером такой системы является схема насосной установки, приведенная на рис. 9.8.

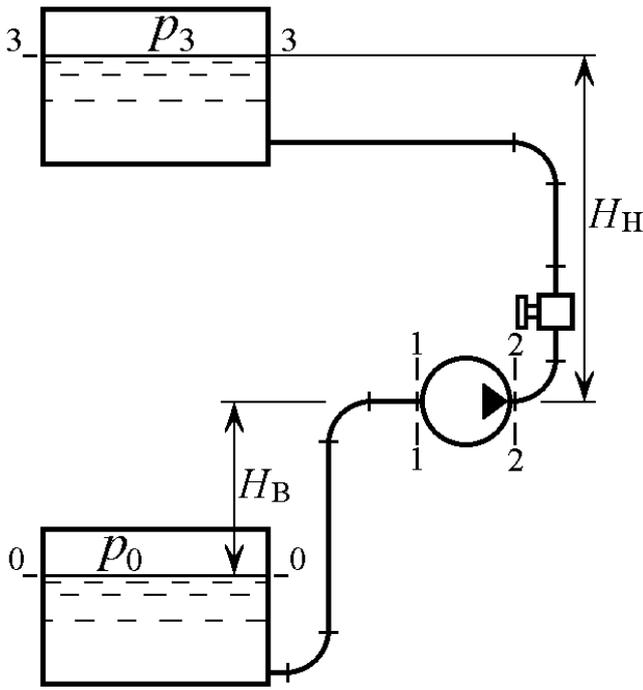


Рис. 9.8. Насосная установка

геометрической высотой нагнетания, а трубопровод, по которому движется жидкость от насоса, **нагнетающим (напорным) трубопроводом**.

Полный напор, необходимый для перемещения жидкости по трубопроводам установки (ее подъема, преодоления противодействия и сопротивлений), создается в данном случае насосом и может быть выражен разностью полных напоров в сечениях 2–2 и 1–1, т. е. на выходе и на входе из насоса:

$$H_{\text{треб}} = H_{\text{треб}2} - H_{\text{треб}1}. \quad (9.18)$$

Для определения полного напора на входе в насос ($H_{\text{треб}1}$) составим уравнение Бернулли для потока во всасывающем трубопроводе, т. е. для сечений 0–0 и 1–1:

$$Z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_{0-1}.$$

Приняв за начало отсчета сечение 0–0 и $\alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = 0$, ввиду его практической малости, в соответствии со схемой установки (рис. 9.8) получим

$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + H_B + h_{0-1}. \quad (9.19)$$

Это уравнение является основным для расчета всасывающих трубопроводов. Оно показывает, что процесс всасывания (подъем

Задача данной насосной установки заключается в обеспечении перемещения жидкости из нижнего бака с давлением p_0 в другой бак с давлением p_3 ($p_3 \neq p_0$). Высота расположения оси насоса относительно уровня жидкости в нижнем баке H_B называется **геометрической высотой всасывания**, а трубопровод, по которому жидкость поступает к насосу, **всасывающим трубопроводом**. Высота расположения верхнего уровня жидкости H_H называется **геометрической высотой нагнетания**, а трубопровод, по которому движется жидкость от насоса, **нагнетающим (напорным) трубопроводом**.

жидкости на высоту H_v , сообщения ей кинетической энергии и преодоления всех гидравлических сопротивлений) происходит за счет использования давления p_0 . Так как это давление обычно бывает весьма ограниченным, то расходовать его следует так, чтобы перед входом в насос остался некоторый запас давления p_1 , необходимый для его нормальной бескавитационной (без нарушения сплошности потока) работы.

Из выражения (9.19) полный напор на входе в насос составит

$$H_{\text{треб1}} = \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} - H_v - h_{0-1}. \quad (9.20)$$

Запишем уравнение Бернулли для движения жидкости по напорному трубопроводу, т. е. для сечений 2–2 и 3–3:

$$Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + h_{2-3}.$$

Пренебрегая малым скоростным напором в сечении 3–3 и имея согласно схеме (см. рис. 9.8) $Z_2 = 0$ (начало отсчета) и $Z_3 = H_n$, получим выражение полного напора на выходе насоса в виде

$$H_{\text{треб2}} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + H_n + h_{2-3}. \quad (9.21)$$

Подставляя (9.20) и (9.21) в (9.18), получим

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + H_\Gamma + \Sigma h_{0-3}, \quad (9.22)$$

где $H_\Gamma = H_v + H_n$ – полная геометрическая высота подъема жидкости; $\Sigma h_{0-3} = h_{0-2} + h_{2-3}$ – сумма гидравлических потерь во всасывающем и напорном трубопроводах.

Представив гидравлические потери в виде (9.4), выражение (9.22) запишем в следующем виде:

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + H_\Gamma + A Q^2. \quad (9.23)$$

Данное уравнение показывает, какой напор необходимо преодолеть (создать насосом) для перемещения по данной системе трубопроводов жидкости с требуемым расходом.

Очевидно, что должно быть соблюдено равенство

$$H_{\text{нас}} = H_{\text{треб}}. \quad (9.24)$$

На этом равенстве основывается метод расчета насосных установок, который заключается в совместном построении в одном и том же масштабе на одном графике двух кривых: требуемого напора $H_{\text{треб}} = f(Q)$ и характеристики насоса $H_{\text{нас}} = f(Q)$ и нахождения их точки пересечения (рис. 9.9).

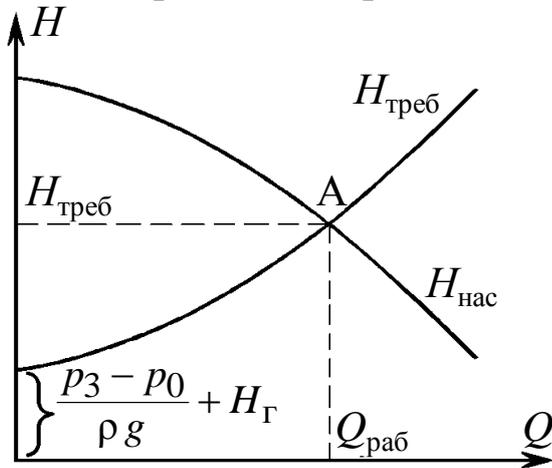


Рис. 9.9. Характеристики установки с насосной подачей

Именно в точке пересечения (точка А на рис. 9.9) выполняется равенство (9.24). Эта точка называется *рабочей точкой*. Она является единственно возможной при данных характеристиках $H_{\text{треб}}$ и $H_{\text{нас}}$. Если получаемая при этом рабочая подача (расход) $Q_{\text{раб}}$ не соответствует требуемой, то необходимо изменить характеристики либо $H_{\text{треб}}$, либо $H_{\text{нас}}$. Подробнее о работе насоса на сеть (систему трубопроводов установки)

будет рассказано в дальнейшем, когда будут рассмотрены конструкции насосов и их характеристики.

В заключение рассмотрим схемы наиболее часто встречающихся на практике вариантов насосных установок (рис. 9.10).

На рис. 9.10, а приведена установка, у которой $p_3 = p_0$, и тогда уравнение (9.23) примет вид

$$H_{\text{треб}} = H_{\Gamma} + A Q^2.$$

Примером такой установки являются оросительные установки, шахтный водоотлив и др.

На рис. 9.10, б приведена схема, когда жидкость подается с более высокого уровня на нижний.

Примером такой системы является шахтный пожарно-оросительный трубопровод. В этой схеме $p_0 \approx p_3 = p_{\text{атм}}$, а H_{Γ} отрицательно. Тогда выражение полного напора (9.23) примет вид

$$H_{\text{треб}} = A Q^2 - H_{\Gamma}.$$

На рис. 9.10, в приведена схема, подобная отопительной системе, когда вода подается сначала в батареи отопительной системы, а затем в бак, расположенный в верхней части здания. Из бака вода снова поступает в насос.

В этом случае $H_{\Gamma} = 0$ и $p_0 = p_3 = p_{\text{атм}}$.

Следовательно, уравнение (9.23) для данной схемы будет

$$H_{\text{треб}} = A Q^2.$$

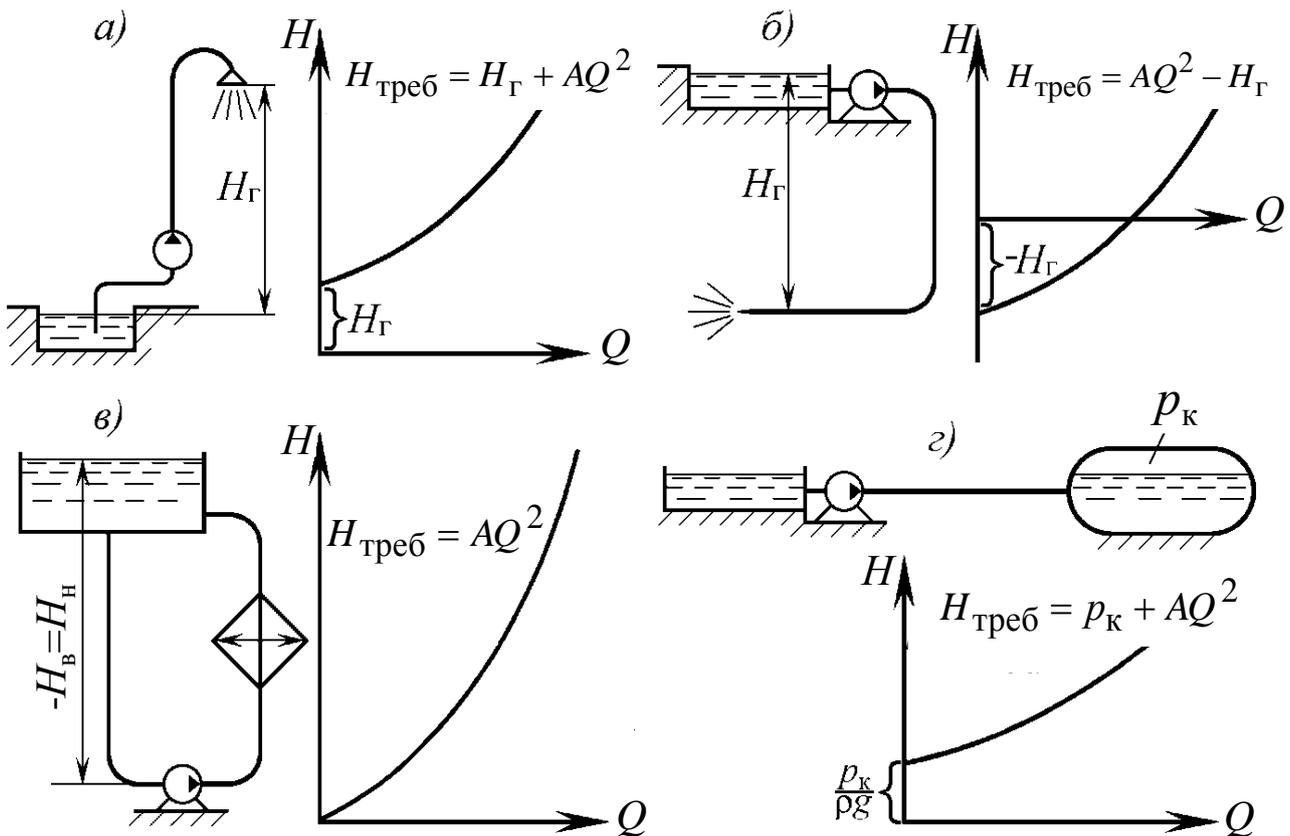


Рис. 9.10. Схемы и напорные характеристики различных насосных установок

На рис. 9.10, г показана схема горизонтальной насосной установки системы питания парового котла, избыточное давление пара в котором равно p_k . В этом случае $H_r = 0$, а $p_3 = p_k + p_{\text{атм}}$ и $p_0 = p_{\text{атм}}$. Тогда составляющая

$$\frac{p_3 - p_0}{\rho g} = \frac{p_k}{\rho g},$$

а уравнение напорной характеристики примет вид

$$H_{\text{треб}} = \frac{p_k}{\rho g} + A Q^2.$$

Судя по виду уравнения (9.23) и его вариация для различных насосных установок, мы имеем квадратичную зависимость требуемого напора от расхода (скорости) жидкости. Однако это соответствует действительности не всегда. Так при ламинарном режиме течения жидкости потери напора по длине трубопровода пропорциональны скорости (расходу) в первой степени [см. формулу (7.10)]. Но это не

значит, что уравнение (9.23) справедливо только для турбулентного режима течения жидкости. Дело заключается в том, что в п. 7.1 мы договорились все зависимости потерь напора приводить к одному виду – формуле Вейсбаха (5.22). Так при ламинарном режиме течения жидкости коэффициент Дарси зависит от числа Рейнольдса [см. формулу (7.11)], которое в свою очередь зависит от скорости потока [см. формулу (6.13)].

В уравнении (9.23) для ламинарного движения сопротивление трубопровода A [см. формулу (9.7)] будет зависеть от расхода, т. е. $A_{\lambda} = f(Q)$. Поэтому будет линейная зависимость $H_{\text{тр}}^{\text{об}}$ от расхода. На практике ламинарный режим течения возможен при весьма малых расходах, что встречается в реальных условиях крайне редко. Поэтому линейным участком графика полного напора при малых расходах можно без ущерба пренебречь.

9.4. Гидравлический удар в трубах

Гидравлический удар – явление резкого повышения давления, возникающего при напорном движении жидкости в трубе при быстром изменении скорости потока в одном из сечений. Это явление характеризуется возникновением волны повышенного или пониженного давления, распространяющейся от места изменения скорости. Процесс обусловлен упругими деформациями жидкости и стенок трубопровода и протекает очень быстро.

Все это позволяет представить гидравлический удар как неустановившееся напорное движение упругой жидкости в упругом трубопроводе, т. е. значения местных скоростей и давлений в пространстве, занятом движущейся жидкостью, изменяются с течением времени [см. формулу (3.1)].

К возникновению гидравлического удара могут приводить различные причины. Наиболее часто встречающейся на практике причиной является быстрое закрытие или открытие запорных и регулирующих устройств. В ряде случаев гидроудар возникает и при внезапной остановке насоса.

В большинстве случаев гидравлический удар приводит к отрицательным последствиям. При резком уменьшении скорости движения воды в стальных трубопроводах (резкое закрытие задвижки) на каждое уменьшение скорости в 1 м/с давление в трубопроводе возрастает примерно на 1–1,2 МПа. Такой значительный рост давления

может привести к нарушению целостности трубопроводов и других устройств гидросистемы.

При внезапной остановке насоса или резком открытии задвижки возникает гидравлический удар с резким падением давления вплоть до давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. Как следствие этого, возможно нарушение сплошности потока и развитие кавитационных явлений.

Вместе с тем, в некоторых случаях гидравлический удар может оказывать и положительное воздействие. Примером может служить гидравлический таран – неэнергоёмкий механизм для водоснабжения, использующий гидравлический удар для подъема воды.

Первые исследования явления гидравлического удара были выполнены Н. Е. Жуковским в 1898 г. Он детально проанализировал физическую картину процесса, вывел дифференциальные уравнения удара и дал их решение, нашел основные расчетные зависимости для вычисления изменения давления при гидравлическом ударе.

Физическую картину явления рассмотрим для случая гидравлического удара при мгновенном закрытии затвора, расположенного в конце прямолинейной горизонтальной цилиндрической трубы круглого поперечного сечения, подсоединенной к открытому резервуару (рис. 9.10).

Пусть в конце трубы, по которой жидкость движется со скоростью V_0 , произведено мгновенное закрытие задвижки (рис. 9.11, а). Тогда скорость частиц жидкости, натолкнувшись на задвижку, будет погашена ($V = 0$), а их кинетическая энергия перейдет в работу деформации жидкости и трубы. Стенки трубы растягиваются, а жидкость сжимается вследствие повышения давления с $p_0 = \rho g H_0$ до $p_0 + \Delta p_{\text{уд}}$.

На заторможенные частицы у затвора набегают другие соседние с ними частицы и тоже останавливаются. В результате сечение $n-n$ перемещается влево со скоростью C , которая называется **скоростью ударной волны**, а само сечение $n-n$ – **фронтом ударной волны**.

Когда фронт ударной волны дойдет до резервуара, жидкость по всей трубе окажется остановленной и сжатой, а стенки трубы – растянутыми (рис. 9.11, б). Но такое состояние не является равновесным, т. к. давление в трубе больше, чем в резервуаре.

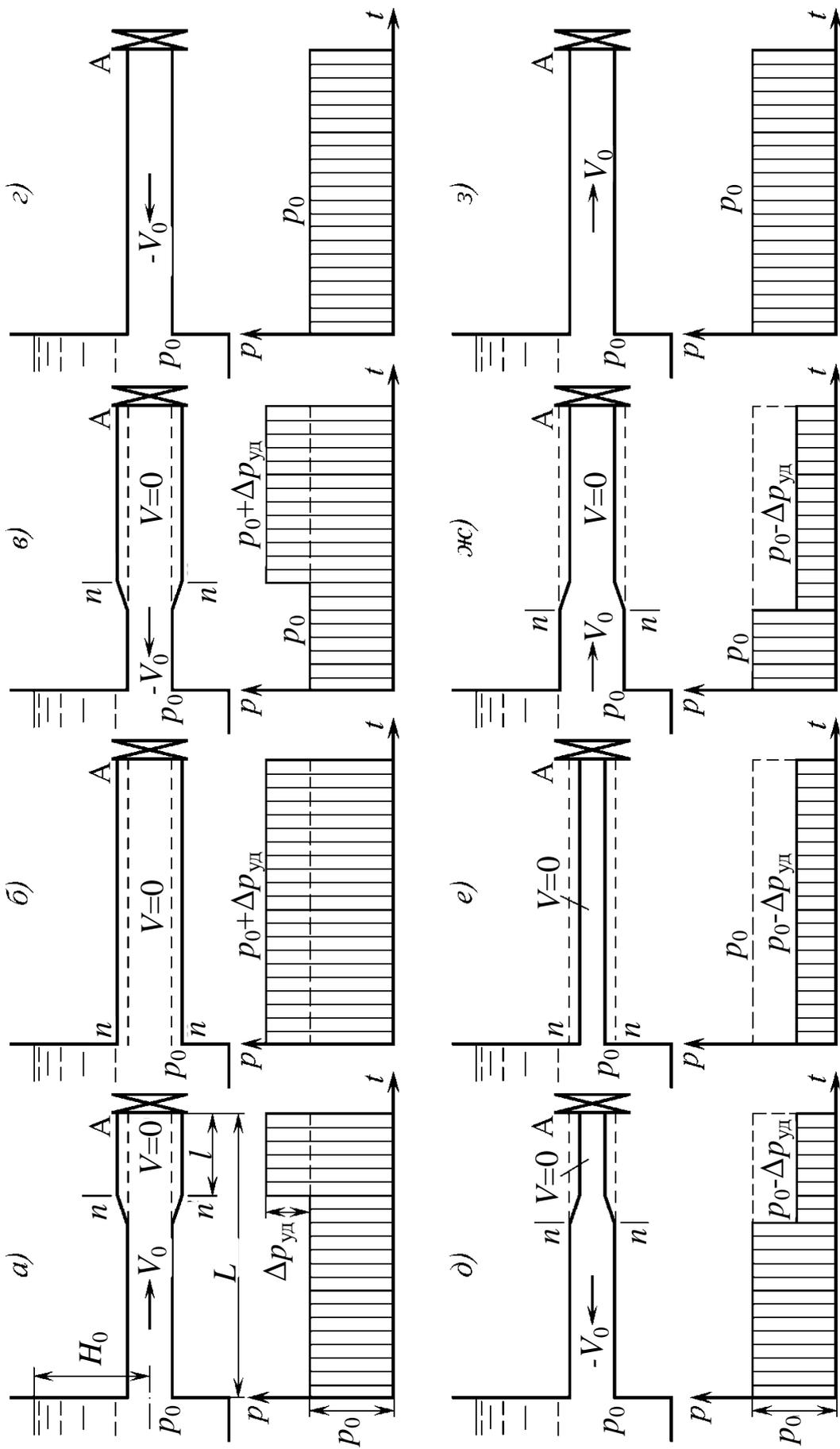


Рис. 9.11. Стадии гидравлического удара при мгновенном закрытии затвора

Под действием перепада давления $\Delta p_{\text{уд}}$ частицы жидкости устремляются из трубы в резервуар и фронт ударной волны перемещается теперь вправо в сторону задвижки с той же скоростью C . Слева за фронтом ударной волны давление становится равным p_0 . Энергия сжатой жидкости и деформации стенок трубы полностью переходит в кинетическую энергию, и жидкость в трубе приобретает начальную скорость V_0 , но направленную теперь в обратную сторону (рис. 9.11, в). Это значит, что жидкость уходит из трубы и давление у задвижки падает на величину $\Delta p_{\text{уд}}$ (рис. 9.11, з).

Однако такое состояние опять же не является равновесным, поскольку жидкость в трубе движется по инерции со скоростью V_0 . У задвижки давление падает от p_0 до $p_0 - \Delta p_{\text{уд}}$, и эта область пониженного давления распространяется в сторону резервуара (рис. 9.11, д). За фронтом ударной волны скорость жидкости равна нулю, а стенки трубы сжаты. На рис. 9.11, е показан момент, когда фронт ударной волны (сечение $n-n$) достиг резервуара. Жидкость остановилась, и давление в трубе ниже давления в резервуаре на величину $\Delta p_{\text{уд}}$. Стенки всей трубы находятся в сжатом состоянии. Перепад давления обуславливает возникновение течения жидкости из резервуара в трубу со скоростью V_0 (рис. 9.11, ж). За образовавшимся фронтом ударной волны стенки трубы принимают свой первоначальный размер. Очевидно, что как только ударная волна достигнет задвижки (рис. 9.11, з), возникнет ситуация, уже имевшая место в момент закрытия задвижки. Весь цикл гидравлического удара повторится. В реальных условиях процесс, естественно, не бесконечен, т. к. происходит замедление движения жидкости из-за трения в трубе и рассеивания энергии в резервуаре. В опытах Н. Е. Жуковского было зарегистрировано до 12 полных циклов. Реальный процесс гидравлического удара иллюстрируется осциллограммой, приведенной на рис. 9.12, а.

Штриховыми линиями показано теоретическое изменение давления в точке А (см. рис. 9.11) непосредственно у задвижки (закрытие задвижки мгновенное).

Сплошной линией показан примерный вид действительной картины изменения давления во времени. Задвижка закрывается хоть и быстро, но не мгновенно.

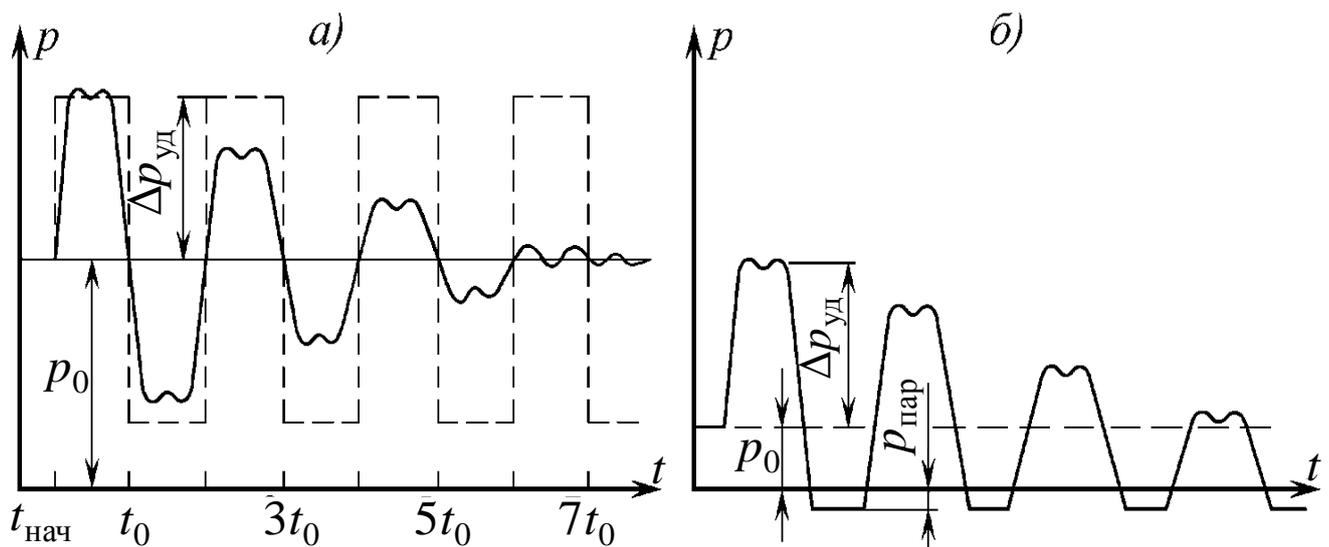


Рис. 9.12. Изменение давления у затвора при учете потерь на трение в трубе без нарушения сплошности потока (а) и при ее возникновении (б)

Кроме того, имеет место затухание колебаний давления, т. е. уменьшение его амплитуды из-за трения в трубе и ухода энергии в резервуар.

Приведенная картина изменения давления имеет место лишь в том случае, когда $p_0 > \Delta p_{уд}$, т. е. давление всегда больше нуля. Если же давление p_0 невелико, то увеличение давления на величину $\Delta p_{уд}$ возможно, а вот снижение давления может быть только до величины давления насыщенных паров используемой жидкости при данной температуре (рис. 9.12, б). В моменты падения давления до значения $p_{пар}$ происходит отрыв жидкости от задвижки, возникает кавитация и образуется паровая каверна. Задвижка и трубопровод подвергаются действию сильных динамических нагрузок, приводящих к эрозии внутренних стенок этих элементов.

Повышение давления при гидравлическом ударе можно определить применив теорему об изменении количества движения к массе остановившейся жидкости (рис. 9.13).

Пусть за время dt фронт ударной волны прошел от задвижки путь $d\ell$. Тогда изменение количества движения сжатого объема будет

$$[(p_0 + \Delta p_{уд}) - p_0] S dt = \rho S (V_0 - 0) d\ell,$$

где S – площадь поперечного сечения трубы; ρ – плотность жидкости.

Отсюда скорость распространения ударной волны

$$C = \frac{d\ell}{dt} = \frac{\Delta p_{уд}}{\rho V_0},$$

откуда

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 C. \quad (9.25)$$

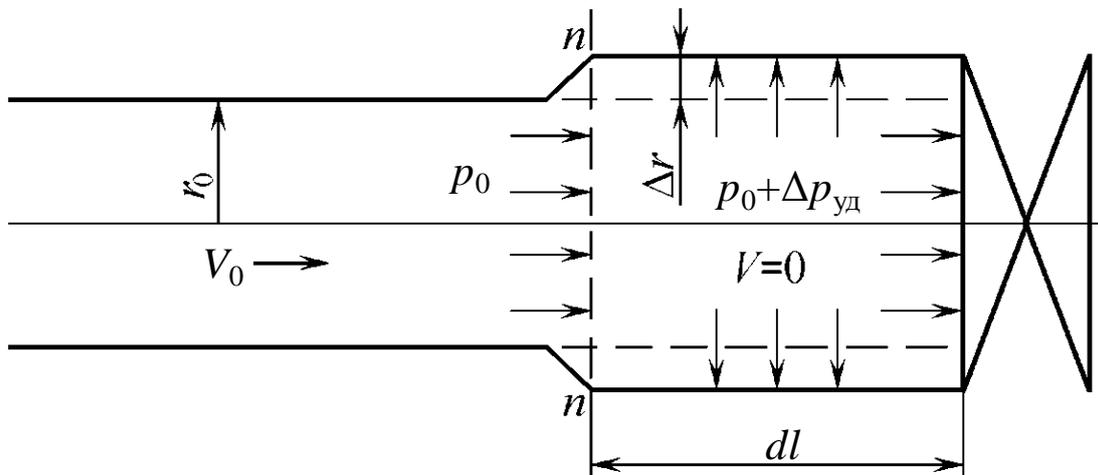


Рис. 9.13. Схема перемещения ударной волны за время dt

Полученное выражение носит название **формулы Жуковского**.

Для нахождения входящей в эту формулу скорости ударной волны C определим ударное давление $\Delta p_{\text{уд}}$ через работу деформации (растяжения стенок трубы и сжатия жидкости), в которую переходит кинетическая энергия жидкости.

Кинетическая энергия жидкости в трубе радиусом r_0 и длиной L составит

$$\mathcal{E}_k = \frac{m V_0^2}{2} = \pi r_0^2 L \rho \frac{V_0^2}{2}. \quad (9.26)$$

Работа деформации равна потенциальной энергии деформированного тела и составляет половину произведения силы на удлинение.

Работу деформации стенок трубы представляем как работу сил давления на пути Δr (см. рис. 9.13)

$$A_{\text{ст}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}} 2\pi r_0 L \Delta r}{2}. \quad (9.27)$$

По закону Гука нормальное напряжение в материале стенки трубы описывается выражением

$$\sigma = \frac{2\pi[(r_0 + \Delta r) - r_0]}{2\pi r_0} E_c = \frac{\Delta r}{r_0} E_c, \quad (9.28)$$

где E_c – модуль упругости стенок трубы.

В свою очередь, σ связано с давлением $\Delta p_{\text{уд}}$ и толщиной стенки трубы δ отношением

$$\sigma = \frac{\Delta p_{\text{уд}} r_0}{\delta}. \quad (9.29)$$

Решая совместно (9.27), (9.28) и (9.29), получим выражение работы деформации стенок трубы в виде

$$A_{\text{ст}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r_0^3 L}{\delta E_c}. \quad (9.30)$$

Работу сжатия жидкости объемом W можно представить как работу сил давления на пути $d\ell$ (см. рис. 9.12), т. е.

$$A_{\text{ж}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}} S d\ell}{2} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}}{2} dW.$$

Аналогично закону Гука для линейного удлинения относительное уменьшение объема жидкости dW/W связано с давлением зависимостью

$$E_{\text{ж}} \frac{dW}{W} = \Delta p_{\text{уд}},$$

где $E_{\text{ж}}$ – среднее для данного $\Delta p_{\text{уд}}$ значение адиабатного модуля упругости жидкости (см. п. 1.3.1).

Тогда работу сжатия жидкости можно описать выражением

$$A_{\text{ж}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r_0^2 L}{\delta E_{\text{ж}}}. \quad (9.31)$$

Уравнение энергий $\mathcal{E}_k = A_{\text{ст}} + A_{\text{ж}}$ с учетом (9.26), (9.30) и (9.31) примет вид

$$\pi r_0^2 L \rho = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r_0^3 L}{\delta E_c} + \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r_0^2 L}{\delta E_{\text{ж}}}.$$

Решая его относительно $\Delta p_{\text{уд}}$, будем иметь

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{ж}}} + \frac{2\rho r_0}{\delta E_c}}}. \quad (9.32)$$

Приравнивая выражения (9.25) и (9.32), получим формулу скорости распространения ударной волны в виде

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{ж}}} + \frac{2\rho r}{\delta E_c}}}. \quad (9.33)$$

Если представить, что стенки трубы абсолютно жесткие ($E_c = \infty$), то формула (9.33) примет вид

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{ж}}}},$$

т. е. получим скорость звука в однородной упругой среде [см. формулу (1.12)].

Так как в рассматриваемом случае стенки трубы не абсолютно жесткие, то величина C несколько меньше скорости звука.

Поскольку гидравлический удар приводит к отрицательным последствиям, то необходимо при проектировании гидравлических систем учитывать возможное повышение давления и предусматривать способы предотвращения и смягчения гидравлического удара.

Наиболее эффективным способом снижения $\Delta p_{уд}$ является устранение возможности возникновения гидравлического удара за счет увеличения времени срабатывания задвижек и других устройств. Большой эффект достигается установкой перед этими устройствами компенсаторов в виде воздушно-гидравлических колпаков, гидроаккумуляторов и предохранительных клапанов.

Уменьшение скорости движения жидкости в трубопроводе за счет увеличения диаметра трубы, или уменьшения длины трубопровода также способствует снижению ударного давления.

9.5. Контрольные вопросы

1. Что такое простой трубопровод? В чем различие между гидравлически длинным и коротким трубопроводами?
2. Какие основные задачи решаются при расчетах установившегося напорного движения в простых трубопроводах?
3. На основе каких уравнений решаются указанные основные задачи?
4. В каком виде записывается формула для расхода при расчетах гидравлически длинного трубопровода при установившемся напорном движении? Как учитываются при этом местные потери напора и скоростные напоры?
5. В связи с чем в формулы для расхода и для напора вводятся поправочные коэффициенты? Как определить, нужно ли применять указанные коэффициенты?

6. Как зависит изменение потерь напора в квадратичной области сопротивления от изменения диаметра трубопровода при остальных неизменных параметрах?

7. В чем гидравлические особенности работы трубопроводов из последовательно и из параллельно соединенных труб? Как учитываются при расчете этих трубопроводов области сопротивления?

8. Чем характерен гидравлический удар? Какие основные причины могут привести к возникновению гидравлического удара?

9. Какие допущения принимаются при рассмотрении гидравлического удара при мгновенном закрытии затвора в трубопроводе?

10. Как применяется теорема об изменении количества движения при выводе зависимости для определения повышения давления в трубопроводе при гидравлическом ударе и мгновенном закрытии затвора?

11. Как изменяется давление в различные моменты времени и в различных сечениях по длине трубопровода при мгновенном закрытии затвора, как в этом случае изменяются средние скорости по живому сечению?

12. Каковы особенности диаграммы изменения давлений в различных сечениях трубопровода по длине, если закрытие затвора произошло мгновенно?

13. От каких факторов зависит повышение давления при мгновенном закрытии затвора (при гидравлическом ударе)?

14. От каких факторов зависит скорость распространения волны гидравлического удара в трубопроводе? Запишите формулу для указанной скорости.

15. Одинакова ли при прочих равных условиях скорость распространения ударной волны в трубопроводе, изготовленном из стали и из железобетона?

16. Как влияет на скорость распространения ударной волны наличие воздуха в воде (или в жидкости) и наличие твердых частиц в жидкости?

10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛОПАСТНЫХ НАСОСОВ

Устройства, которые осуществляют прямое или обратное преобразование механической энергии в энергию потока жидкости, называются *гидравлическими машинами*.

Гидромашины, осуществляющие прямое преобразование механической энергии приводного двигателя в энергию потока жидкости, называются *насосами*.

Обратное преобразование энергии потока жидкости в механическую энергию на рабочем органе какой-либо машины осуществляет *гидравлический двигатель*.

Насосы являются одной из самых распространенных разновидностей гидромашин. История возникновения и развития насосов показывает, что первоначально они предназначались исключительно для подъема воды. Однако в настоящее время область их применения настолько широка и многообразна, что определение насоса как машины для перекачки воды было бы слишком узким. Помимо водоснабжения и канализации городов, промышленных предприятий и электростанций, насосы применяются для орошения и осушения земель, аккумулирования гидроэнергии, транспортирования материалов. Существуют специальные насосы для нефтяной, химической, бумажной, пищевой и других отраслей промышленности. Насосы используются при производстве строительных работ для намыва земляных сооружений, водопонижения, откачки воды из котлованов, подачи бетона и строительных растворов к сооружениям и т. п.

Насосы применяются при разработке месторождений и транспортировании полезных ископаемых гидравлическим способом, при гидроудалении отходов промышленных предприятий. В качестве вспомогательных устройств насосы служат в системах смазки и охлаждения машин. Таким образом, классифицировать насосы по их назначению весьма затруднительно. Более логичной представляется классификация, основанная на различиях в принципе их действия гидромашин. С этой точки зрения все существующие в настоящее время насосы могут быть разделены на следующие три основные группы: лопастные, объемные и струйные насосы.

Лопастные насосы преобразуют энергию за счет динамического взаимодействия потока перекачиваемой жидкости и лопастей вращающегося колеса, которое и является основным рабочим органом насоса. К ним относятся центробежные, вихревые и осевые насосы.

Объемные насосы работают за счет изменения объема рабочих камер, периодически соединяющихся с входным (всасывающим) и выходным (нагнетающим) патрубками. Различают объемные насосы с возвратно-поступательным движением рабочего органа (поршневые, плунжерные и диафрагменные) и с вращательным движением рабочего органа (шестеренные, пластинчатые и винтовые).

Струйные насосы работают по принципу смешения потока перекачиваемой жидкости со струей жидкости, пара или газа, обладающей большим запасом кинетической энергии.

Особую группу составляют водоподъемники некоторых специальных типов. К ним относятся **воздушный подъемник (эрлифт)**, **гидравлический таран** и **шнековый насос**.

Области применения насосов различных типов [17] приведены на рис. 10.1.

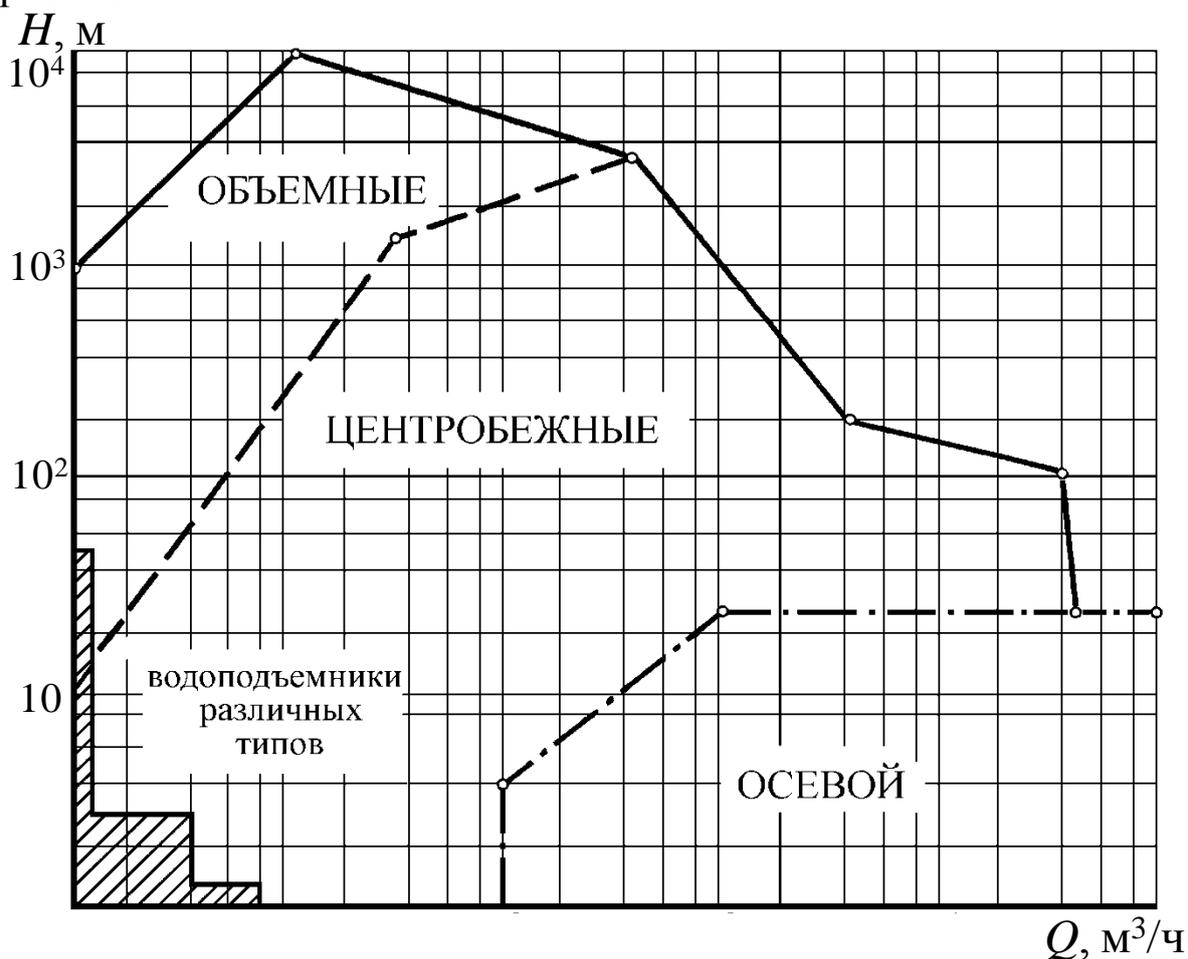


Рис. 10.1. Пределы изменения параметров насосов различных типов

Наибольшую область применения имеют **центробежные лопастные насосы**, примеры использования которых можно найти практически во всех отраслях хозяйственной деятельности человека.

Лопастные гидродвигатели (**гидротурбины**) широко использу-

ются в энергетике на гидроэлектростанциях. Мощность современных гидротурбин доходит до 650 тыс. кВт.

Струйные насосы (называемые также *инжекторами, эжекторами, гидроэлеваторами*) имеют невысокий КПД – до 0,2–0,35. Несмотря на это, они распространены широко, так как благодаря простому устройству, малым габаритным размерам, отсутствию подвижных частей они надежны, легко размещаются в труднодоступных местах, способны подавать агрессивные и загрязненные жидкости и выполнять функции смесителей.

Объемные насосы и гидродвигатели обычно используются в силовых *гидропередачах*, назначением которых является передача энергии от приводного двигателя к исполнительному рабочему органу, а также преобразования вида и скорости движения последнего посредством жидкости.

Гидравлический привод, включающий в себя гидропередачу из объемных гидромашин, называется *гидростатическим (объемным) приводом*, а при использовании лопастных гидромашин – *гидродинамическим приводом*.

Весьма широкая область применения гидравлических приводов, особенно в горнодобывающей промышленности и машиностроении, обуславливает знание его конструкции, характеристик и особенностей эксплуатации большим кругом технических специалистов современного производства. Именно этим объясняется чтение в вузах курса, объединяющего как теорию покоя и течения жидкости (теоретическую гидромеханику), так и теорию и характеристики насосных установок и гидравлических приводов.

К числу лопастных насосов, серийно выпускаемых отечественной промышленностью и нашедших наибольшее распространение, относятся центробежные, осевые и вихревые насосы. Как уже отмечалось ранее, работа этих насосов основана на общем принципе – силовом взаимодействии лопастей рабочего колеса с обтекающим их потоком перекачиваемой жидкости. Однако механизм этого взаимодействия у насосов перечисленных типов различен, что, естественно, приводит к существенным различиям в их конструкции и эксплуатационных показателях.

Центробежные насосы. Основным рабочим органом центробежного насоса (рис. 10.2) является свободно вращающееся внутри корпуса 1 колесо 2, насаженное на вал 3.

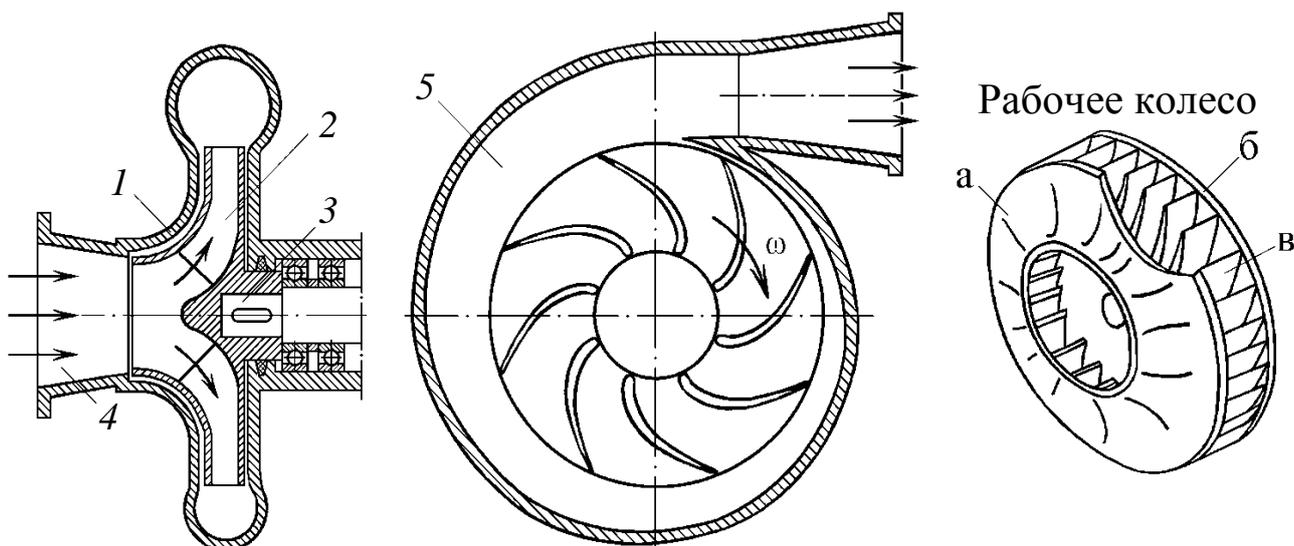


Рис. 10.2. Схема центробежного насоса консольного типа

Рабочее колесо состоит из ведомого (а) и ведущего (б) дисков, между которыми располагаются лопатки (в), изогнутые в большинстве случаев в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Внутренние поверхности дисков и боковые поверхности лопастей образуют так называемые межполосные каналы колеса, которые для нормальной работы должны быть предварительно заполнены перекачиваемой жидкостью.

При вращении рабочего колеса жидкость, находящаяся в межполосных каналах, увлекается лопатками колеса во вращательное движение. Поэтому на каждый объем жидкости массой m , находящейся в межполосном канале на расстоянии r от оси вала, будет действовать центробежная сила

$$R_{ц} = m \omega^2 r, \quad (10.1)$$

где ω – угловая скорость вращения вала.

Под действием этой силы жидкость выбрасывается из рабочего колеса в спиральный отвод 5 корпуса насоса и далее поступает в напорный трубопровод. Движение жидкости от оси колеса к его периферии приводит к возникновению разрежения в центре колеса, за счет которого жидкость по подводу 4 поступает в насос из бака по всасывающему трубопроводу.

В зависимости от требуемых параметров, назначения и условий работы в настоящее время разработано большое число разнообразных конструкций центробежных насосов.

Напор одноступенчатых центробежных насосов, выпускаемых отечественной промышленностью, достигает 120 м, подача – 15 м³/с.

Серийные многоступенчатые насосы развивают напор до 2000 м при подаче до 0,001 м³/с. КПД одноступенчатых насосов составляет 0,85–0,9, а у многоступенчатых снижается до 0,4–0,45.

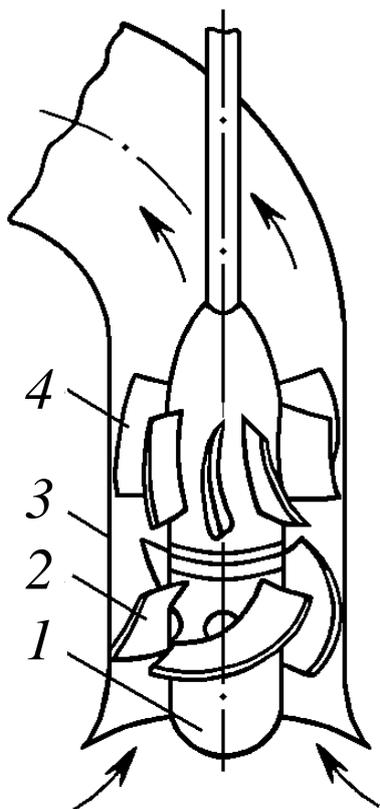


Рис. 10.3. Схема осевого насоса

Осевые насосы. Рабочее колесо осевого насоса похоже на гребной винт корабля (рис. 10.3). Оно состоит из втулки 1, на которой закреплено несколько лопастей 2, представляющих собой удобообтекаемое изогнутое крыло с закругленной передней, набегающей на поток кромкой. Механизм передачи энергии от рабочего колеса жидкости тот же, что и у центробежного насоса. Рабочее колесо насоса вращается в трубчатой камере 3, благодаря чему основная масса потока в пределах колеса движется в осевом направлении, что, кстати говоря, и определило название насоса. Двигаясь поступательно, перекачиваемая жидкость одновременно несколько закручивается ра-

бочим колесом. Для устранения этой закрутки служит выправляющий аппарат 4, через который жидкость проходит перед выходом в отвод, соединяемый с напорным трубопроводом. Жидкость подводится к рабочим колесам небольших осевых насосов с помощью конических патрубков. У крупных насосов для этой цели служат камеры и всасывающие трубы относительно сложной формы.

Подача серийно выпускаемых осевых насосов составляет от 0,5 до 45 м³/с при напорах до 40 м. Таким образом, по сравнению с центробежными осевые насосы имеют значительно большую подачу, но меньший напор. КПД осевых насосов достигает 0,9 и выше. Изменение в определенных пределах угла установки лопастей рабочего колеса позволяет поддерживать высокое значение КПД насоса в широком диапазоне изменения его рабочих параметров.

Вихревые насосы. Рабочим органом вихревого насоса является рабочее колесо 3 с радиальными или наклонными лопатками (рис. 10.4).

Рабочее колесо 3 располагается в цилиндрическом корпусе 1 с малыми торцевыми зазорами. В боковых и периферийной стенках корпуса имеется концентричный канал 2, начинающийся у входа отверстия 6 и заканчивающийся у напорного 4.

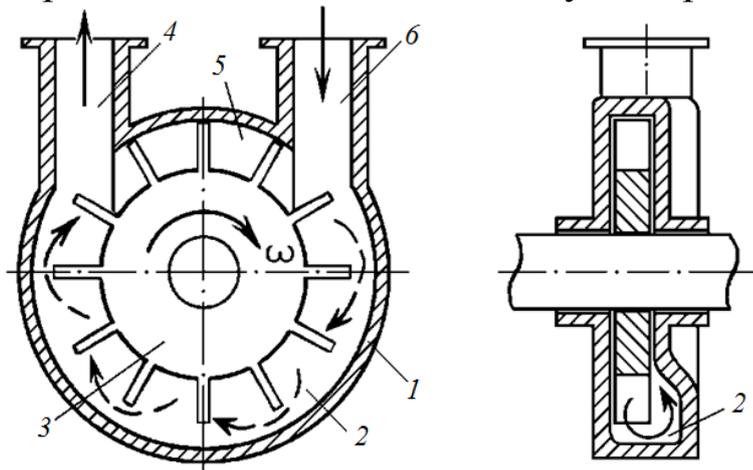


Рис. 10.4. Схема вихревого насоса

Всасывающий и напорный каналы разделены перемычкой 5.

При вращении рабочего колеса жидкость увлекается лопастями и одновременно под воздействием центробежной силы закручивается. Таким образом, в кольцевой полости работающего насоса образуется кольце-

вое вихревое движение, почему насос и называется вихревым. Отличительная особенность вихревого насоса заключается в том, что одна и та же частица жидкости, двигаясь по винтовой траектории от всасывающего до нагнетающего патрубка, многократно попадает в межлопастное пространство колеса, где каждый раз получает дополнительное приращение энергии, а следовательно, и напора. Благодаря этому вихревой насос в состоянии развить напор в 2–4 раза больший, чем центробежный насос при одном и том же диаметре колеса, т. е. при одной и той же окружной скорости.

Достоинством вихревых насосов является также и то, что они обладают самовсасывающей способностью, исключая необходимость заливки корпуса и всасывающей линии насоса перекачиваемой жидкостью перед каждым пуском.

Недостатком вихревых насосов является сравнительно невысокий КПД (0,25–0,5), а также быстрый износ их деталей при работе на жидкостях, содержащих взвешенные твердые частицы.

Серийно выпускаемые вихревые насосы имеют подачу до $0,01 \text{ м}^3/\text{с}$ и напор до 90 м.

10.1. Основное уравнение лопастных насосов

Преобразование подводимой к насосу механической энергии в энергию движения жидкости в лопастных насосах производится за счет непосредственного силового воздействия лопастей рабочего колеса на жидкость, заполняющую его межлопастные каналы. Рабочее колесо является, таким образом, основным элементом насоса, а кинематические показатели (траектория движения, значения и направления скоростей и т. п.) движущейся через колесо жидкости оказывают решающее влияние на энергетические параметры насоса (напор, подача, КПД).

В основу представления об установившемся движении потока через рабочее колесо центробежного насоса положена гипотеза о струйном течении жидкости, т. е. поток в рабочем колесе осесимметричный. Согласно этой гипотезе, траектория каждой частицы жидкости в пределах межлопастного канала колеса по форме совпадает с кривой очертания лопасти (рис. 10.5, *а*).

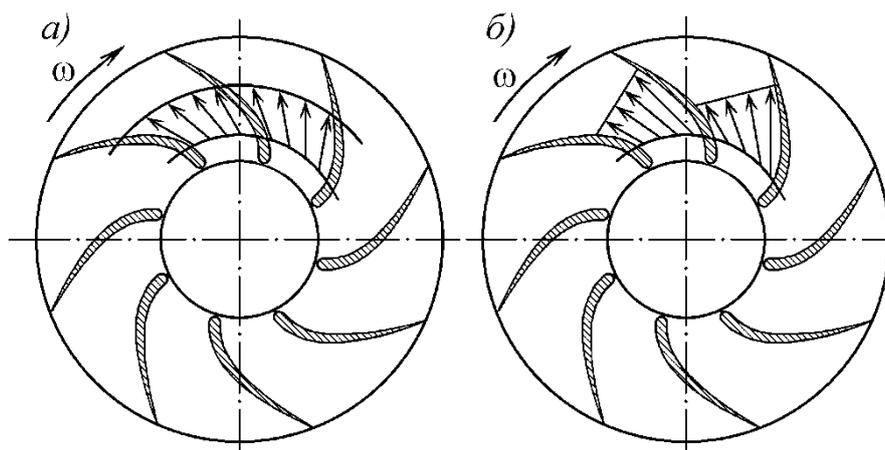


Рис. 10.5. Схемы движения жидкости в рабочем колесе центробежного насоса

В действительности поток жидкости в рабочем колесе не является осесимметричным. Давление на лицевой стороне лопатки (передняя сторона лопатки по отношению к направлению ее движения) больше, чем на ее тыльной стороне. Согласно уравнению Бернулли, чем больше давление, тем меньше скорость. Поэтому относительная скорость частиц, движущихся вдоль лицевой стороны лопатки, меньше относительной скорости частиц, движущихся вдоль ее тыльной стороны (рис. 10.5, *б*). Относительные траектории частиц, непосредственно примыкающих к лопатке, совпадают по форме с лопат-

кой. Траектории же остальных частиц отличаются от нее. Тем не менее, при расчете проточной части колес центробежных насосов с часто расположенными лопастями, образующими каналы большой длины по сравнению с размерами поперечного сечения, такое допущение в первом приближении является вполне обоснованным.

В рабочем колесе насоса частицы жидкости за счет непосредственного силового воздействия лопастей совершают вращательное движение вместе с ними, называемое переносным. Одновременно под действием центробежной силы частицы жидкости двигаются от центра колеса к его периферии. Это движение называется относительным. Сумма относительного и переносного движений дает абсолютное движение жидкости, т. е. ее движение относительно неподвижного корпуса насоса. Скорость абсолютного движения V (абсолютная скорость) равна геометрической сумме скорости C жидкости относительно рабочего колеса (относительной скорости) и окружной скорости U рабочего колеса (переносной скорости):

$$\vec{V} = \vec{C} + \vec{U}. \quad (10.2)$$

Приняв гипотезу осесимметричности потока жидкости, идущей через рабочее колесо, можно представить параллелограмм сложения скоростей для произвольной точки k внутри колеса в виде, представленном на рис. 10.6, а. Согласно схеме бесконечного числа лопаток относительная скорость C направлена по касательной к лопатке. Переносная скорость U направлена по касательной к окружности, на которой расположена рассматриваемая точка, и численно равна окружной скорости на этой окружности:

$$U = \omega R, \quad (10.3)$$

где R – радиус окружности, на которой расположена точка; ω – угловая скорость вращения колеса.

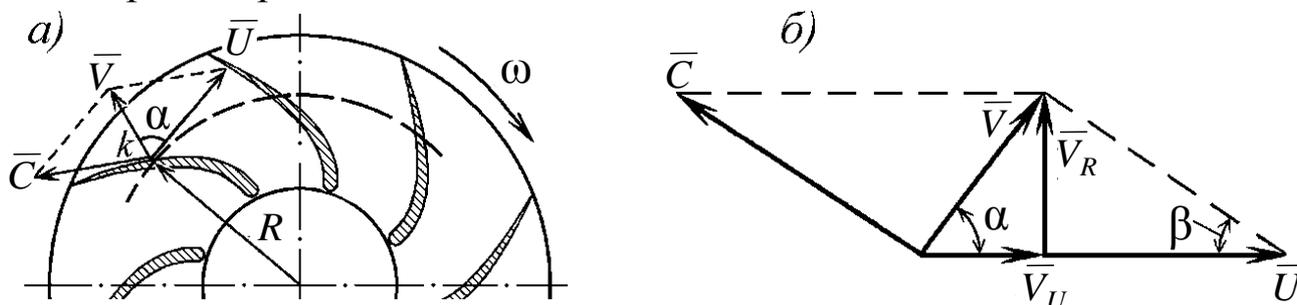


Рис. 10.6. Параллелограмм скоростей движения жидкости в рабочем колесе центробежного насоса

Абсолютную скорость V можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие: V_U – окружную составляющую абсо-

лутной скорости и V_R – меридиональную (радиальную) скорость (рис. 10.6, б), как проекцию абсолютной скорости на плоскость, проходящую через ось колеса и рассматриваемую точку. Эта плоскость называется меридиональной.

Подобным образом можно построить параллелограммы скоростей для любой точки внутри колеса, в том числе и на окружностях входа в рабочее колесо и выхода из него (рис. 10.7).

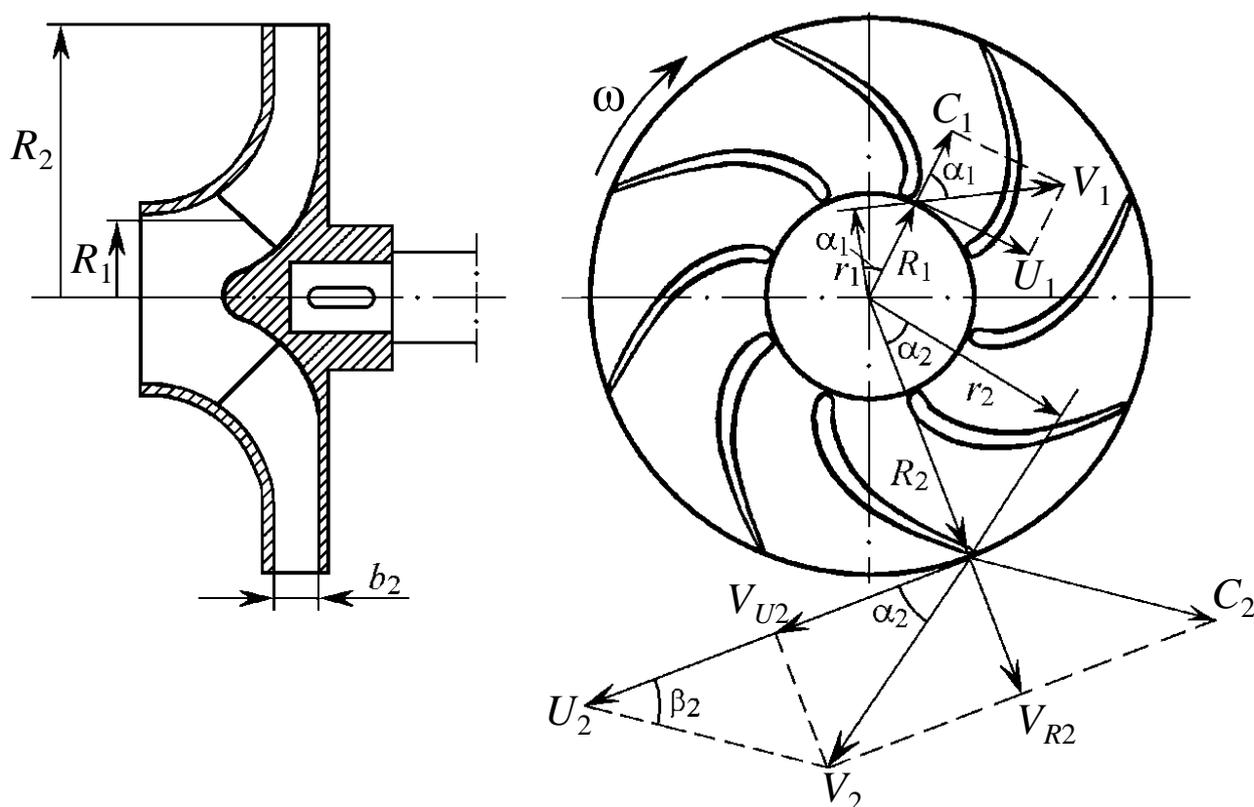


Рис. 10.7. Параллелограммы скоростей потока жидкости на входе в рабочее колесо центробежного насоса и на выходе из него

На схеме принято обозначение всех параметров индексом 1 для входа в рабочее колесо, а индексом 2 – для выхода из него.

Меридиональная скорость потока жидкости на выходе из рабочего колеса составит

$$V_{R2} = V_2 \sin \alpha_2, \quad (10.4)$$

где α_2 – угол между абсолютной V_2 и переносной U_2 скоростями жидкости на выходе из рабочего колеса.

Именно с этой скоростью поток жидкости поступает из рабочего колеса в спиральный отвод насоса, определяя его производительность:

$$Q_H = V_{R2} S_2, \quad (10.5)$$

где S_2 – площадь сечения потока жидкости, нормального к направлению меридиональной скорости на выходе из рабочего колеса.

Сечение потока S_2 имеет форму поверхности вращения в виде боковой поверхности цилиндра с радиусом R_2 и высотой, равной ширине b_2 лопатки рабочего колеса по выходной кромке (рис. 10.7).

$$S_2 = 2\pi R_2 b_2 \psi, \quad (10.6)$$

где ψ – коэффициент стеснения потока лопатками колеса, учитывающий, что часть площади занята лопатками определенной толщины ($\psi = 0,75–0,88$).

С учетом этого выражения, а также (10.4) формула (10.5) примет вид

$$Q_{нт} = 2\pi R_2 b_2 \psi V_2 \sin \alpha_2. \quad (10.7)$$

Однако не вся жидкость, вышедшая в спиральный отвод насоса, поступит в нагнетающий патрубок.

Часть жидкости в виде утечек через зазоры между рабочим колесом и стенками корпуса вернется в подвод, где давление ниже, чем в отводе. Поэтому $Q_{нт}$ по выражению (10.7) должна рассматриваться как теоретическая подача, а реальная производительность насоса определится по формуле

$$Q_n = 2\pi R_2 b_2 \psi V_2 \sin \alpha_2 \eta_o, \quad (10.8)$$

где η_o – объемный КПД насоса ($\eta_o = 0,95–0,98$).

Для установления величины напора, развиваемого насосом, используется классическая теорема об изменении моментов количества движения, которая может быть сформулирована следующим образом: производная по времени от главного момента количества движения системы материальных точек относительно некоторой оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на эту систему, т. е.

$$\frac{d[(mV)r]}{dt} = \Sigma M, \quad (10.9)$$

где m – масса рассматриваемой системы материальных точек; V – абсолютная скорость их движения; r – расстояние до оси.

Удобство теоремы об изменении моментов количества движения в приложении к сплошной среде заключается в том, что с ее помощью динамическое взаимодействие между жидкостью и ограничивающими поверхностями можно определить по характеру течения в контрольных сечениях без учета структуры потока внутри выделенного объема.

Применяя теорему к установившемуся движению жидкости через рабочее колесо центробежного насоса между сечениями от входа в колесо до выхода из него, допустим, что при струйном характере течения приращение энергии на этом участке происходит без гидравлических потерь. Кроме того, дифференцирование в уравнении (10.9) заменим рассмотрением изменения момента количества движения массы жидкости на 1 с.

При подаче насоса Q за принятый промежуток времени от входа в колесо до выхода из него пройдет масса жидкости

$$m = \rho Q,$$

где ρ – плотность перекачиваемой жидкости.

Согласно схемы (см. рис. 10.7) моменты количества движения этой массы жидкости на входе и выходе рабочего колеса составят

$$M_{\text{вх}} = \rho Q V_1 r_1; \quad M_{\text{вых}} = \rho Q V_2 r_2.$$

С учетом сделанных допущений уравнение (10.9) может быть переписано в виде

$$\Sigma M = \rho Q (V_2 r_2 - V_1 r_1). \quad (10.10)$$

Из схемы, приведенной на рис. 10.7, можно записать

$$r_1 = R_1 \cos \alpha_1 \quad \text{и} \quad r_2 = R_2 \cos \alpha_2.$$

Тогда будет $\Sigma M = \rho Q (V_2 R_2 \cos \alpha_2 - V_1 R_1 \cos \alpha_1)$. (10.11)

Из всех внешних сил, действующих на массу жидкости, заполняющей межлопастные каналы рабочего колеса (силы тяжести и давления), только крутящий момент на валу рабочего колеса отличен от нуля, т. е. $\Sigma M = M_{\text{кр}}$.

Мощность, затрачиваемая на вращение рабочего колеса, составит

$$N = M_{\text{кр}} \omega.$$

Эта мощность преобразуется рабочим колесом в энергию потока жидкости с расходом Q и напором H_T , т. е.

$$N = \rho g Q H_T.$$

Тогда $M_{\text{кр}} \omega = \rho g Q H_T$ и с учетом (10.11) будет

$$\rho Q (V_2 R_2 \cos \alpha_2 - V_1 R_1 \cos \alpha_1) \omega = \rho g Q H_T.$$

Отсюда напор, создаваемый рабочим колесом насоса, определится зависимостью

$$H_T = \frac{(V_2 R_2 \cos \alpha_2 - V_1 R_1 \cos \alpha_1) \omega}{g}.$$

Имея в виду, что $U = \omega R$, окончательно получим

$$H_T = \frac{V_2 U_2 \cos \alpha_2 - V_1 U_1 \cos \alpha_1}{g}. \quad (10.12)$$

Эта зависимость была впервые выведена в середине XVIII в. Леонардом Эйлером. Она называется *уравнением Эйлера* или *основным уравнением лопастного насоса*.

Поскольку данная зависимость выведена без учета каких-либо потерь энергии, то напор H_T следует считать теоретическим.

Анализ основного уравнения (10.12) показывает, что напор центробежного насоса тем больше, чем больше составляющая $V_2 U_2 \cos \alpha_2$.

Видно, что напор насоса можно увеличить за счет увеличения выходного диаметра рабочего колеса или за счет увеличения частоты вращения, т. к. $U_2 = \omega R_2 = 2\pi n R_2$.

Повышение напора может быть также достигнуто уменьшением угла α_2 . Теоретически произведение $V_2 U_2 \cos \alpha_2$ имеет максимум при $\alpha_2 = 0$, однако, согласно уравнению (10.8), это означает прекращение подачи. Поэтому при конструировании рабочих колес центробежных насосов обычно принимают $\alpha_2 = 8-12^\circ$.

Не меняя параметры потока жидкости на выходе из рабочего колеса напор насоса, согласно основному уравнению, достигает максимума, если

$$V_1 U_1 \cos \alpha_1 = 0. \quad (10.13)$$

Это будет при $\alpha_1 = 90^\circ$, т. к. $\cos 90^\circ = 0$.

Из параллелограмма скоростей (см. рис. 10.7) видно, что вектор абсолютной скорости жидкости V_1 в этом случае будет направлен по радиусу ($V_1 = V_{R1}$), поэтому условие (10.13) обычно называют условием радиального входа.

Подводы многих конструкций, например прямоосный конфузور, не закручивают поток, и теоретический напор в этом случае определится как

$$H_T = \frac{V_2 U_2 \cos \alpha_2}{g}. \quad (10.14)$$

10.2. Характеристика центробежного насоса

Рабочие органы насоса рассчитывают для определенного сочетания подачи, напора и частоты вращения, причем размеры и форму

проточной части выбирают так, чтобы гидравлические потери при работе на этом режиме были минимальными. Такое сочетание подачи, напора и частоты вращения называется расчетным режимом. При эксплуатации насос может работать на режимах, отличающихся от расчетного. Так, изменение подачи насоса при помощи задвижки будет приводить к изменению и напора, развиваемого им. Для правильной эксплуатации насоса необходимо знать, как изменяется напор, КПД и мощность, потребляемая насосом при изменении его подачи, т. е. знать характеристику насоса, под которой понимается зависимость напора, мощности и КПД от подачи насоса при постоянной частоте вращения рабочего колеса.

Ограничимся рассмотрением случая подвода жидкости к рабочему колесу без закрутки, т. е. когда теоретический напор описывается зависимостью (10.14).

Из плана скоростей на выходе из рабочего колеса (см. рис. 10.7) можно записать

$$V_2 \cos \alpha_2 = U_2 - \frac{V_2 \sin \alpha_2}{\operatorname{tg} \beta_2}. \quad (10.15)$$

Выразив меридиональную скорость $V_{R2} = V_2 \sin \alpha_2$ из (10.7) и подставив ее в (10.15), а затем в (10.14), получим

$$H_T = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2}{2\pi R_2 b_2 \psi g \operatorname{tg} \beta_2} Q_{HT}. \quad (10.16)$$

Из уравнения следует, что теоретический напор при бесконечном числе лопаток имеет линейную зависимость от расхода Q_{HT} через рабочее колесо насоса (рис. 10.8).

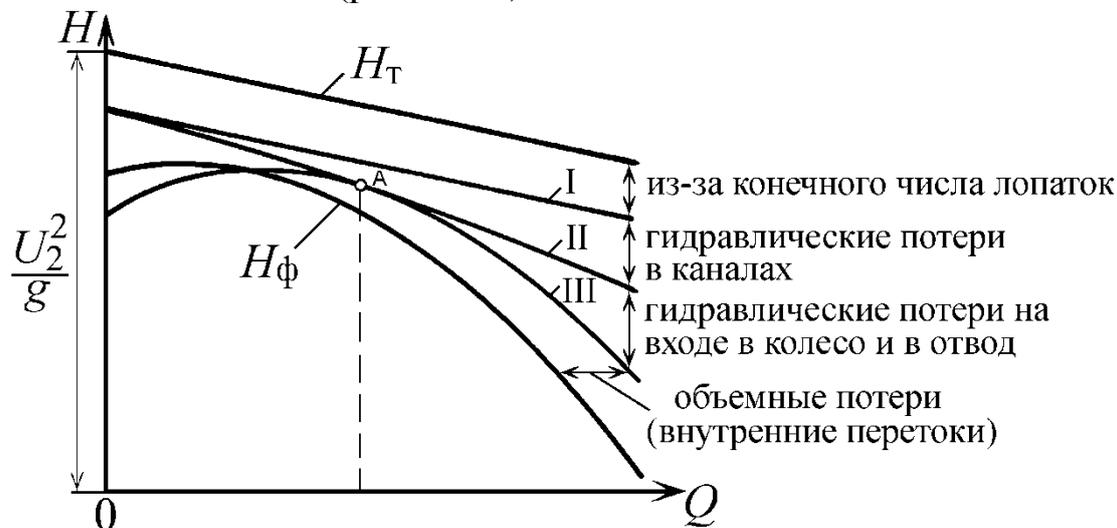


Рис. 10.8. Зависимость напора центробежного насоса от его подачи

При подаче, равной нулю (вентиль в напорном трубопроводе закрыт полностью), будем иметь $H_T = U_2^2/g$.

Как отмечалось выше, в реальных конструкциях насосов поток жидкости в межлопастных каналах не осесимметричный из-за конечного числа лопастей (см. рис. 10.5, б). Конечное число лопастей приводит к "недокрутке" потока, обусловленной инерционностью частиц жидкости. В результате наблюдается уменьшение окружной составляющей абсолютной скорости V_{U2} и, как следствие этого, снижение напора насоса. Эта потеря напора для конкретной конструкции насоса очень мало зависит от подачи насоса, поэтому линия I располагается ниже и, примерно, параллельно H_T .

Напор, развиваемый насосом, меньше теоретического на величину гидравлических потерь, которые по своему характеру можно разделить на два вида:

а) потери в каналах подвода, рабочего колеса и отвода (потери в каналах) – h_k ;

б) потери на входе в рабочее колесо и в отвод – $h_{вх}$.

Потери в каналах насоса, как потери по длине и на местных сопротивлениях, приближенно пропорциональны скорости жидкости во второй степени и, следовательно, подаче насоса во второй степени:

$$h_k = kQ_H^2,$$

где k – сопротивление каналов.

На рис. 10.8 кривая II отражает напор насоса с учетом этих потерь.

Потери на входе в рабочее колесо обусловлены тем, что при нерасчетных режимах угол входа потока на лопатку колеса не совпадает с углом входного элемента лопатки (рис. 10.9).

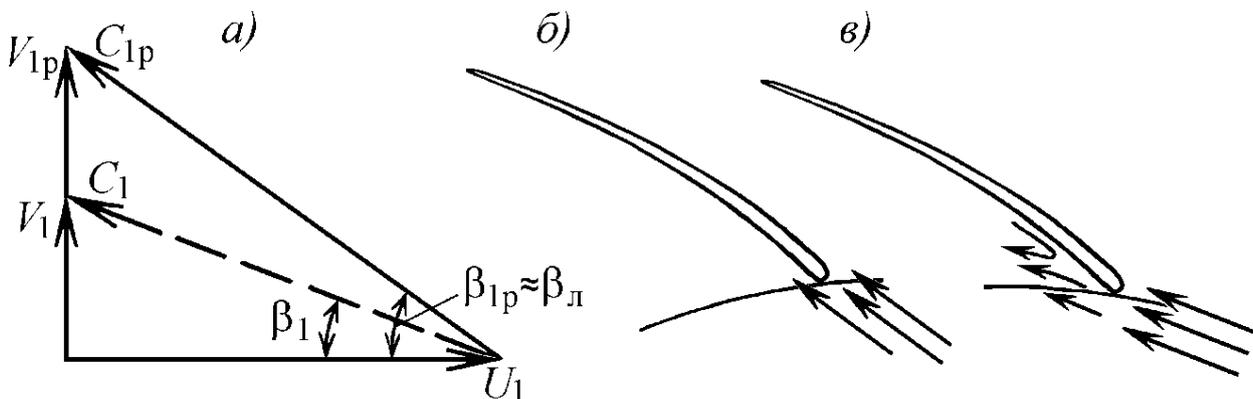


Рис. 10.9. Планы скоростей и схемы потоков на входе в рабочее колесо при разных режимах работы насоса

Поскольку рассматривается случай радиального входа потока в рабочее колесо, то планы скоростей на входе в колесо при любой подаче будут в виде прямоугольных треугольников ($V_{U1} = 0$).

На рис. 10.9, а с индексом "р" показан план скоростей, соответствующий расчетному режиму. В этом режиме вектор относительной скорости C_{1p} составляет угол с вектором переносной скорости U_1 , равный углу входного элемента лопатки рабочего колеса ($\beta_{1p} \approx \beta_{л}$). Поток входит в колесо практически без потерь (рис. 10.9, б). Если, например, уменьшим подачу, то меридиональная скорость (и равная ей абсолютная V_1) на входе уменьшится. Это приведет и к изменению угла β_1 между векторами относительной C_1 и переносной U_1 скоростей.

Направление входа потока на лопатки колеса не совпадает с направлением входного элемента лопатки ($\beta_1 \neq \beta_{л}$). Поток отрывается от лопатки, и образуется вихревая зона (рис. 10.9, в), наличие которой ведет к потерям энергии.

Причина *потерь у входа в отвод* заключается в том, что сечение отвода рассчитывается так, чтобы при расчетном режиме момент скорости жидкости ($V_2 R_2$) в отводе был равен моменту скорости на выходе из рабочего колеса ($V_{2p} R_2$). При этом никакого изменения скоростей у входа в отвод нет, а потери отсутствуют.

При уменьшении подачи насоса через то же сечение отвода проходит меньший расход жидкости. Следовательно, скорости в отводе и их момент при уменьшении подачи уменьшаются пропорционально последней. Скорости же на выходе из рабочего колеса возрастают (рис. 10.10).

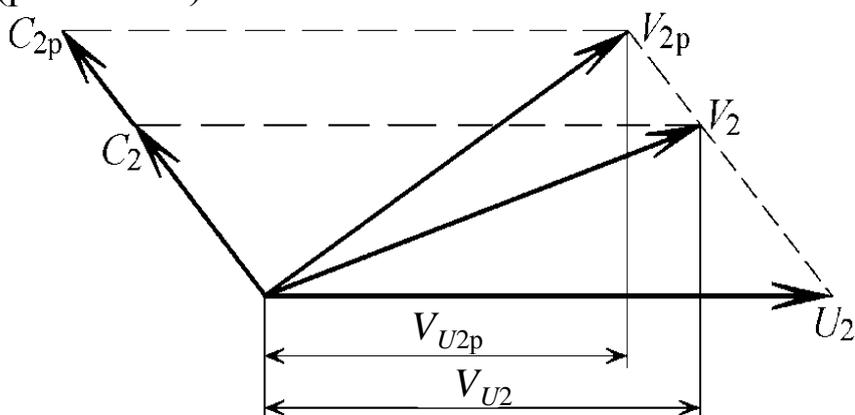


Рис. 10.10. Планы скоростей на выходе из рабочего колеса при разных режимах

Таким образом, при подачах, меньших расчетной, момент скорости жидкости на выходе из рабочего колеса больше, чем в отводе. Аналогично при подачах, больших расчетной, момент скорости жидкости

в отводе больше, чем на выходе из рабочего колеса.

Следовательно, при подачах, отличных от расчетной, потоки вытекающей из рабочего колеса и движущейся по отводу жидкости имеют разные моменты скорости. При слиянии этих потоков в отводе будет наблюдаться вихреобразование, а значит и потери энергии.

На рис. 10.8 линия III отображает напор насоса с учетом рассмотренных гидравлических потерь. Точка А соответствует расчетному режиму насоса, при котором эти потери равны нулю.

Как отмечалось выше, подача насоса отличается от расхода через рабочее колесо на величину утечек [см. формулу (10.8)]. Учет утечек приводит к сдвигу итоговой кривой напоров (H_{ϕ}) влево на величину утечек (см. рис. 10.8).

Мощность на приводном валу насоса можно определить из следующих соображений. Каждая единица веса жидкости, прошедшая через насос, приобретает энергию в количестве H , а за единицу времени через насос протекает жидкость весом $\rho g Q$. Следовательно, энергия, приобретенная за единицу времени жидкостью, прошедшей через насос, или полезная мощность насоса

$$N_{\Pi} = \rho g H Q. \quad (10.17)$$

Мощность насоса N больше полезной мощности N_{Π} на величину потерь в насосе, которые оцениваются КПД насоса η

$$\eta = \frac{N_{\Pi}}{N}. \quad (10.18)$$

Потери мощности в насосе делят на механические, объемные и гидравлические.

Механические потери обусловлены трением в подшипниках и в уплотнениях вала, а также трением наружной поверхности рабочих колес о жидкость (дисковое трение). Мощность, оставшаяся за вычетом механических потерь, передается рабочим колесом жидкости, которую принято называть гидравлической мощностью. Ее можно определить, подставив в (10.17) выражение теоретического напора H_T из (10.16). Для этого перепишем формулу (10.16) в виде

$$H_T = A - B Q_{HT}, \quad (10.19)$$

где $A = \frac{U_2^2}{g} = \text{const}$; $B = \frac{U_2}{2\pi R_2 b_2 \psi g \text{tg } \beta_2} = \text{const}$.

Тогда формула (10.17) для определения гидравлической мощности примет вид

$$N_{\text{д}} = \rho g (A Q_{HT} - B Q_{HT}^2). \quad (10.20)$$

Это уравнение является уравнением параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $Q_{нт} = 0$ и $Q_{нт} = A/B$ (рис. 10.11). Механические потери мало зависят от подачи насоса. Прибавив мощность, затраченную на механические потери, к гидравлической, получим зависимость I.

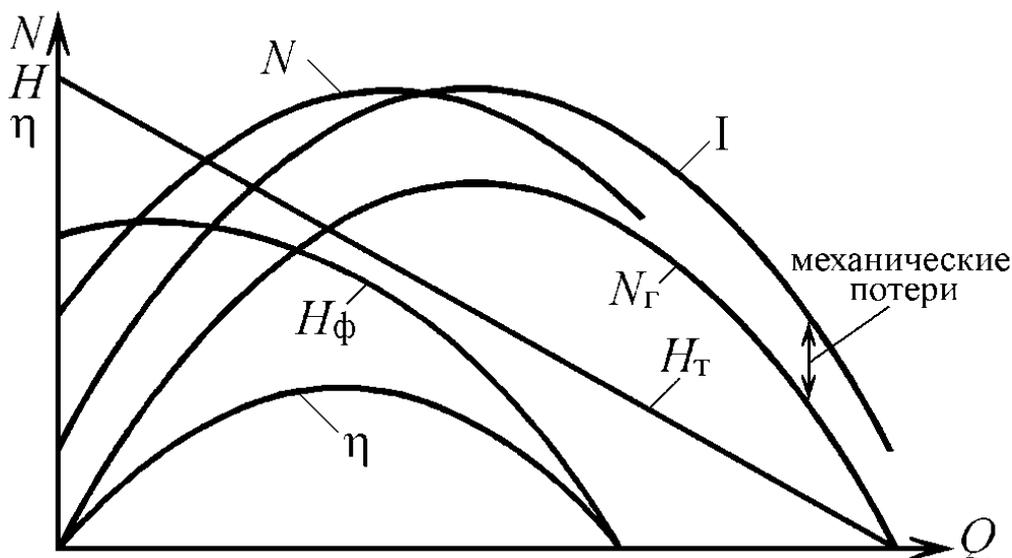


Рис. 10.11. Теоретическая характеристика центробежного насоса

Для получения графика мощности насоса N остается учесть *объемные потери*, при этом кривую I необходимо сместить влево на величину утечек.

Имея кривые $N = f(Q)$ и $H_{\phi} = f(Q)$, можно построить кривую КПД по уравнению

$$\eta = \frac{\rho g Q_{н} H_{\phi}}{N} . \quad (10.21)$$

График КПД пересекает ось абсцисс при $Q = 0$ и $H_{\phi} = 0$.

Приведенные выше рассуждения являются приближенными, т. к. они не учитывают ряд факторов, влияющих на напор и мощность. В частности, они не учитывают вторичных токов, возникающих при малых подачах, неустановившегося движения жидкости в межлопастных каналах при нерасчетных режимах и т. д. Поэтому характеристика насоса, построенная теоретически на основании описанных рассуждений, плохо согласуется с данными опыта и может быть получена лишь в результате испытаний насоса.

10.3. Работа насоса на сеть

В п. 9.3 было выведено уравнение напора $H_{\text{треб}}$ (9.23), который необходимо преодолеть (создать насосом) для перемещения по системе трубопроводов насосной установки, называемой сетью, жидкости с требуемым расходом. Очевидно, сообщить необходимую энергию жидкости в насосной установке может только насос, т. е. должно быть соблюдено условие (9.24), заключающееся в обеспечении равенства напора, создаваемого насосом $H_{\text{нас}}$, и требуемого напора рассматриваемой установки $H_{\text{треб}}$ при заданной (требуемой) производительности $Q_{\text{раб}}$.

Графически это условие обеспечивается в точке пересечения двух кривых: требуемого напора $H_{\text{треб}} = f(Q)$ и характеристики насоса $H_{\text{нас}} = f(Q)$ (см. рис. 9.9). Эта точка пересечения (точка A на рис. 9.9 и 10.12) является единственно возможным режимом работы данной насосной установки с данным насосом. Действительно, предположим, что насос работает в режиме, соответствующем точке B на рис. 10.12. В этом случае напор, сообщаемый насосом жидкости, на ΔH_1 больше напора, расходуемого при движении жидкости по трубопроводам установки. Избыток энергии в жидкости идет на приращение ее кинетической энергии. Следовательно, скорость жидкости увеличивается, что, в свою очередь, приводит к увеличению расхода. Расход будет расти от Q_B до Q_A , когда избытка энергии в жидкости не будет.

Если подача насоса больше Q_A (точка C), то сообщаемый насосом напор меньше требуемого на ΔH_2 .

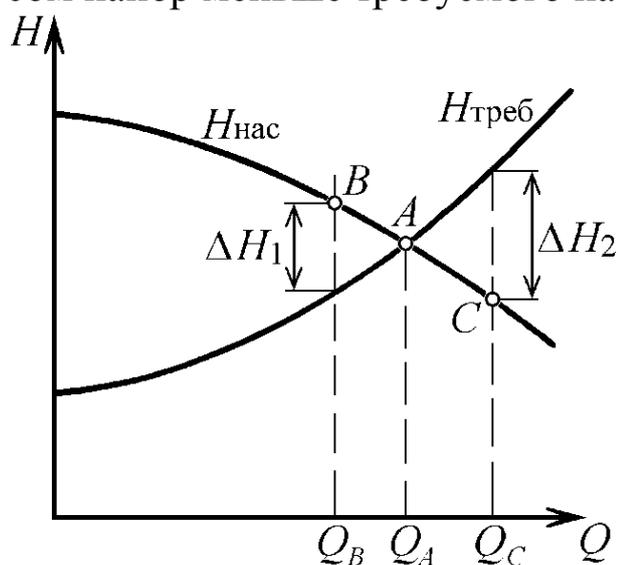


Рис. 10.12. Определение режима работы насоса на сеть

Недостаток энергии восполняется за счет собственной кинетической энергии жидкости. Это приводит к уменьшению скорости движения и, следовательно, уменьшению расхода от Q_C до Q_A .

В некоторых случаях работа насосной установки является неустойчивой: подача резко изменяется от наибольшего значения до нуля, напор колеблется в значительных пределах, наблюдаются гидравлические удары, шум и сотрясение всей насосной уста-

новки. Это явление называется *помпаж*.

Помпаж происходит у насосов, имеющих кривую напоров $H_{\text{нас}} = f(Q)$ с задающей левой ветвью (рис. 10.13), т. е. кривую напоров, у которой $H_{\text{нас}} = \max$ при $Q_{\text{нас}} > 0$. Такую характеристику имеют, как правило, тихоходные насосы.

Явление помпажа можно наблюдать, например, у насосной установки, изображенной на рис. 10.13.

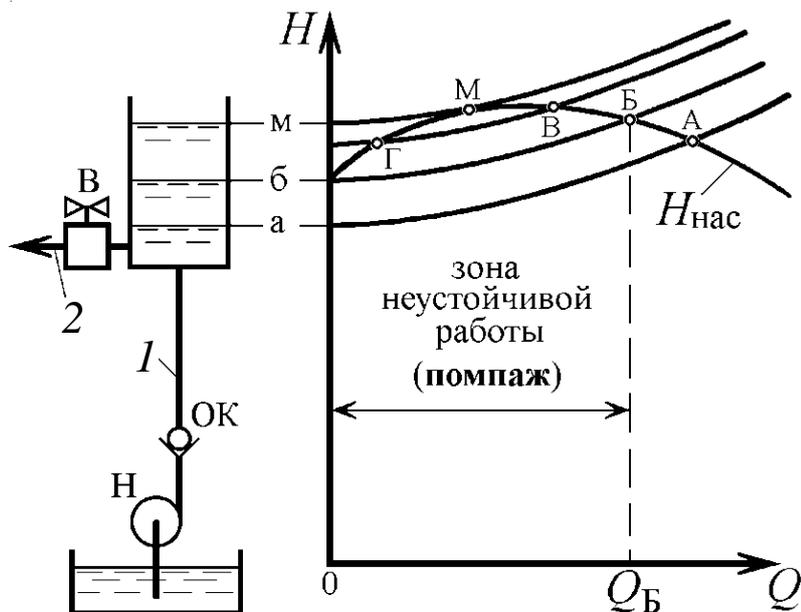


Рис. 10.13. К определению зоны неустойчивой работы насоса

Насос Н подает жидкость через обратный клапан ОК по трубопроводу 1 из нижнего бака в верхний, откуда она поступает по трубе 2 к потребителю. Пусть в начальный момент верхний бак заполнен жидкостью до уровня а. В этом случае насос работает в режиме, определяемом точкой А своей характеристики. Если расход жидкости, отводимый к потреби-

телю, начнет уменьшаться (например, за счет прикрытия вентиля В), то уровень жидкости в верхнем баке будет расти. Характеристика сети смещается вверх, и режимная точка будет последовательно занимать положения Б, В и М на кривой характеристики насоса. Если уровень жидкости в верхнем баке будет по-прежнему подниматься, то характеристика сети пройдет еще выше и требуемый напор станет больше напора, который способен создать насос. Избыточным напором обратный клапан ОК закрывается. Подача насоса становится равной нулю при напоре (H_0), соответствующем точке 0, т. е. произошел срыв подачи. Из-за отсутствия притока жидкости в верхний бак уровень жидкости в нем будет понижаться (жидкость продолжает уходить из верхнего бака по трубе 2). Как только уровень жидкости понизится до высоты б, когда $H_{\text{треб}} = H_0$, насос снова вступит в работу. Подача резко, скачкообразно возрастет до $Q_{\text{Б}}$, соответствующей рабочей точке Б. Уровень в верхнем баке опять начнет постепенно подниматься, и явление срыва подачи повторится.

Срыв подачи насоса и переход его на режим с нулевой подачей работы может получиться и при неизменной характеристике сети (уровень в верхнем баке остается постоянным), если характеристика сети пересекает характеристику насоса в двух точках (В и Г на рис. 10.13). Это может возникнуть при снижении частоты вращения насоса (например, из-за временного падения напряжения электросети, питающей приводной электродвигатель). При этом характеристика насоса понизится и произойдет срыв подачи насоса до нуля. При последующем повышении частоты вращения насос будет продолжать работать при $Q_n = 0$, т. к. напор, создаваемый им в этом случае, меньше требуемого для сети.

Из приведенных рассуждений следует, что опасность помпажа исключается при работе насосной установки на режимах, соответствующих точкам на характеристике насоса, расположенным правее точки Б.

10.4. Подобие насосов. Формулы пересчета

При проектировании насосных установок выбор насоса в ряде случаев может оказаться довольно сложной задачей. Так если требуемая подача задана строго определенным значением $Q_{\text{треб}}$ (или с малым диапазоном допустимых значений), то подобрать насос, у которого напорная характеристика пересечет заданную характеристику сети именно при $Q_{\text{треб}}$, окажется невозможно. Обусловлено это ограниченной номенклатурой насосов, выпускаемых серийно. Естественно, положительное решение можно искать путем изменения характеристики сети. Однако и в этом случае существуют ограничения, не позволяющие получить положительный результат. Так, при ограниченной установленной мощности приводного двигателя нельзя изменять характеристику сети путем прикрытия вентиля в напорном трубопроводе, т. к. введение дополнительного сопротивления течению жидкости требует дополнительных затрат энергии (напора).

Экономически целесообразнее уметь изменять характеристику насоса в желаемом направлении. Задача усложняется тем, что точные характеристики насоса в настоящее время можно получать только экспериментально. Предварительное определение расчетных параметров проектируемой машины, исследование рабочих режимов на моделях и распространение полученных результатов на натурные

насосы возможно на основе теории подобия гидромеханических процессов, приведенной в п. 6.1.

Приняв обозначение природы индексом n , а модели – индексом m , согласно п. 6.1, запишем условия подобия по данной теории применительно к лопастному насосу.

А. Геометрическое подобие

$$M_L = \frac{D_n}{D_m} = \frac{b_n}{b_m} = \dots = \text{const}, \quad (10.22)$$

или также

$$M_L = \frac{b_n}{D_n} = \frac{b_m}{D_m} = \dots = \text{const}, \quad (10.23)$$

где D_n, b_n и D_m, b_m – соответственно диаметр и ширина рабочих колес натурального и модельного насосов.

Б. Кинематическое подобие

$$M_L = \frac{V_n}{V_m} = \frac{C_n}{C_m} = \frac{U_n}{U_m} = \frac{n_n D_n}{n_m D_m} = \text{const}. \quad (10.24)$$

При этом, очевидно, для соблюдения кинематического подобия необходимо также выдержать постоянным отношение скорости протекания жидкости к скорости движения вращающихся деталей, т. е.

$$\frac{V_n}{U_n} = \frac{V_m}{U_m} = \text{const}. \quad (10.25)$$

В этих выражениях V – абсолютная, C – относительная и U – переносная скорости, n – частота вращения рабочих колес натурального и модельного насосов.

Из условий (10.24) и (10.25) следует, что должно быть получено равенство углов параллелограммов скоростей в сходственных точках потока жидкости в рабочих колесах натурального и модельного насосов:

$$\alpha_{2n} = \alpha_{2m}. \quad (10.26)$$

Напомним, что α_2 – угол между направлениями векторов абсолютной и переносной скорости потока на выходе из рабочего колеса. Из формулы (10.7) можно записать, соответственно, для натурального и модельного насосов

$$V_{2n} = \frac{Q_n}{\pi D_{2n} b_{2n} \sin \alpha_{2n}} \quad \text{и} \quad V_{2m} = \frac{Q_m}{\pi D_{2m} b_{2m} \sin \alpha_{2m}}.$$

Далее, имея в виду условия (10.23) и (10.26), получим, что абсолютные скорости прямо пропорциональны подачам и обратно пропорциональны квадратам диаметров подобных насосов, т. е.

$$V_{2н} = \frac{Q_n}{M_L D_{2н}^2} \quad \text{и} \quad V_{2м} = \frac{Q_m}{M_L D_{2м}^2}. \quad (10.27)$$

В. Динамическое подобие

Условием гидродинамического подобия является равенство чисел Эйлера, Рейнольдса, Фруда и Струхала (см. п. 6.1). В практике моделирования гидравлических машин наибольшее значение имеет критерий подобия Эйлера, который применительно к рассматриваемой задаче может быть выражен следующим образом:

$$Eu = \frac{p}{\rho V^2} = \frac{gH_n}{V_2^2}. \quad (10.28)$$

Напомним, что согласно п. 2.2 имеем $p = \rho gH$. Условие гидродинамического подобия в данном случае запишется так:

$$Eu_n = Eu_m.$$

Это условие, имея в виду (10.27) и (10.28), можно представить в виде

$$\frac{Q_n}{D_{2н}^2 \sqrt{H_n}} = \frac{Q_m}{D_{2м}^2 \sqrt{H_m}}. \quad (10.29)$$

Данное уравнение устанавливает зависимость между двумя основными энергетическими параметрами (подача, напор) натурального и модельного насосов.

В заключение нельзя обойти молчанием факт, что полного подобия между натурным и модельным насосами практически получить не удастся. Так, при больших масштабах моделирования невозможно смоделировать, например, соответствие шероховатостей, ограничивающих поток поверхностей и зазоров. Аналогично трудно выполнить равенство чисел Рейнольдса натурности и модели. Теоретический анализ возможности выполнения этого условия показывает, что кинематическая вязкость жидкости модельного потока ν_m должна быть меньше кинематической вязкости натурального потока ν_n в $M_L^{3/2}$ число раз.

Однако такая ситуация не должна разочаровывать. Большой опыт гидравлического моделирования вообще и моделирования ло-

пастных насосов, в частности, показывает, что при работе насоса в *области автомодельности* ($Re > Re_{кр}$) изменение числа Re не оказывает заметного влияния на гидравлический КПД. Исследованиями установлено, что серийно выпускаемые насосы общего назначения находятся в области автомодельности и их гидравлический КПД остается неизменным в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса.

Исходя из этого приводимые ниже формулы пересчета позволяют получить достаточно точные результаты.

Для вывода этих формул примем, что геометрически подобные друг другу рабочие колеса одностипных насосов диаметрами D_H и D_M вращаются соответственно с частотами n_H и n_M , создавая при этом напоры H_H и H_M и обеспечивая подачи Q_H и Q_M .

В соответствии с формулой (10.8) подачи натурального и модельного насосов составят соответственно,

$$\begin{aligned} Q_H &= \pi D_{2H} b_{2H} \psi_H V_{2H} \sin \alpha_{2H} \eta_{оH}, \\ Q_M &= \pi D_{2M} b_{2M} \psi_M V_{2M} \sin \alpha_{2M} \eta_{оM}. \end{aligned}$$

Возьмем отношение этих подач с учетом условий подобия (10.22–10.26)

$$\frac{Q_H}{Q_M} = \frac{n_H}{n_M} \left(\frac{D_H}{D_M} \right)^3 \frac{\eta_{оH}}{\eta_{оM}}. \quad (10.30)$$

Отношение напоров сравниваемых насосов в соответствии с формулой (10.14) примет вид

$$\frac{H_H}{H_M} = \left(\frac{n_H D_H}{n_M D_M} \right)^2 \frac{\eta_{гH}}{\eta_{гM}}. \quad (10.31)$$

Мощности насосов, определяемые по формуле (10.17), составят

$$N_H = \rho g H_H Q_H \eta_H \quad \text{и} \quad N_M = \rho g H_M Q_M \eta_M.$$

Отношение мощностей натурального и модельного насосов с подстановкой выражений (10.30) и (10.31) будет иметь вид

$$\frac{N_H}{N_M} = \left(\frac{n_H}{n_M} \right)^3 \left(\frac{D_H}{D_M} \right)^5 \frac{\eta_H}{\eta_M}, \quad (10.32)$$

где $\eta_H = \eta_{оH} \eta_{гH} \eta_{мH}$ и $\eta_M = \eta_{оM} \eta_{гM} \eta_{мM}$ – полные КПД насосов.

Формулы пересчета (10.30), (10.31) и (10.32) дают возможность с большой точностью рассчитать основные параметры проектируемого насоса, если известны параметры насоса, геометрически ему подобному. Формулы пересчета также дают возможность, испытав

насос при одной частоте вращения, определить его параметры для другой частоты. Видно, что можно варьировать диаметр рабочего колеса.

Самым сложным при использовании этих формул является вопрос определения КПД. Для пересчета КПД насоса с модели на натуру был предложен целый ряд полуэмпирических формул, но широкого распространения они не получили из-за ограниченных возможностей их применения.

При малом диапазоне изменения n_n от n_m и D_n от D_m , а также при предварительных расчетах можно принять в первом приближении равными все значения η_n и η_m .

Отметим два частных случая использования формул пересчета, когда имеем дело с одним и тем же насосом, перекачивающим одну и ту же жидкость.

1. К чему приведет изменение частоты вращения насоса?

В этом случае формулы пересчета примут вид

$$\begin{aligned} Q_{\text{нов}} &= Q_{\text{стар}} \frac{n_{\text{нов}}}{n_{\text{стар}}}, \\ H_{\text{нов}} &= H_{\text{стар}} \left(\frac{n_{\text{нов}}}{n_{\text{стар}}} \right)^2, \\ N_{\text{нов}} &= N_{\text{стар}} \left(\frac{n_{\text{нов}}}{n_{\text{стар}}} \right)^3. \end{aligned} \quad (10.33)$$

2. К чему приведет изменение диаметра рабочего колеса?

Очевидно, изменение диаметра рабочего колеса может вестись только в направлении его уменьшения за счет обточки рабочего колеса. В этом случае формулы пересчета будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{\text{нов}} &= Q_{\text{стар}} \left(\frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}} \right)^3, \\ H_{\text{нов}} &= H_{\text{стар}} \left(\frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}} \right)^2, \\ N_{\text{нов}} &= N_{\text{стар}} \left(\frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}} \right)^5. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Однако большее соответствие расчетных величин реальным значениям будет получено по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{нов}} &= Q_{\text{стар}} \frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}}, \\
 H_{\text{нов}} &= H_{\text{стар}} \left(\frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}} \right)^2, \\
 N_{\text{нов}} &= N_{\text{стар}} \left(\frac{D_{\text{нов}}}{D_{\text{стар}}} \right)^3.
 \end{aligned}
 \tag{10.35}$$

Эти два частных случая являются ключом к решению проблемы, которая была поставлена в начале данного параграфа. Из формул (10.33)–(10.35) видно, что, изменяя либо частоту вращения, либо диаметр рабочего колеса, можно получить такую характеристику насоса, которая пересечет характеристику сети в точке с требуемыми режимными параметрами. Поэтому рассмотрим этот вопрос более подробно.

10.4.1. Изменение характеристики насоса при изменении его частоты вращения

Допустим, что имеется характеристика насоса для частоты вращения n (рис. 10.14) и необходимо получить характеристику насоса для частоты вращения n_1 (в данном случае $n_1 < n$).

Зададимся рядом значений подачи насоса (Q_A, Q_B, Q_V) и определим по исходным графикам соответствующие им значения напора (H_A, H_B, H_V) (рис. 10.14, а) и мощности (N_A, N_B, N_V) (рис. 10.14, б).

Воспользовавшись формулами (10.33), вычислим новые значения параметров, приняв $n_{\text{нов}} = n_1$. По новым значениям подачи (Q_{A1}, Q_{B1}, Q_{V1}) и соответствующим им значениям напора (H_{A1}, H_{B1}, H_{V1}) (рис. 10.14, а) и мощности (N_{A1}, N_{B1}, N_{V1}) (рис. 10.14, б) строятся искомые графики.

Поскольку допускаем, что КПД остается неизменным, то исходные точки значений КПД ($\eta_{\Gamma}, \eta_{\text{Д}}, \eta_{\text{Е}}$) сместятся влево ($n_1 < n$) для новых значений подач ($\eta_{\Gamma 1}, \eta_{\text{Д} 1}, \eta_{\text{Е} 1}$) (рис. 10.14, б).

Если будет построено несколько характеристик для различных частот вращения, то соединив сходственные точки (А, А₁...А_і или Б, Б₁...Б_і и т. п.) получим так называемые параболы подобных режимов

(штрихпунктирные линии на рис. 10.14, а). Уравнения этих парабол подобных режимов получаются из несложных преобразований формул (10.33).

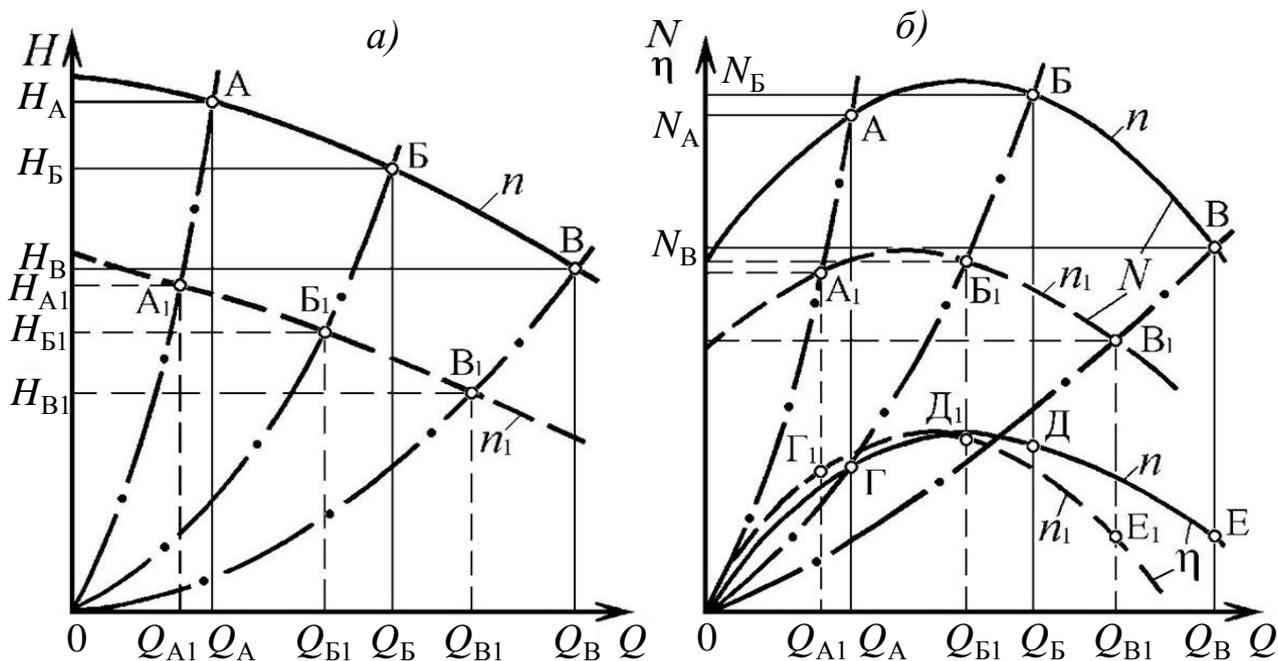


Рис. 10.14. Характеристики центробежного насоса при изменении его частоты вращения

Выразим из формулы подач отношение частот вращения

$$\frac{n_{\text{нов}}}{n_{\text{стар}}} = \frac{Q_{\text{нов}}}{Q_{\text{стар}}}$$

и, подставив его в формулы напора и мощности, получим

$$H_{\text{нов}} = \frac{H_{\text{стар}}}{Q_{\text{стар}}^2} Q_{\text{нов}}^2 \quad \text{и} \quad N_{\text{нов}} = \frac{N_{\text{стар}}}{Q_{\text{стар}}^3} Q_{\text{нов}}^3.$$

Поскольку для конкретного насоса имеем

$$\frac{H_{\text{стар}}}{Q_{\text{стар}}^2} = k = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{N_{\text{стар}}}{Q_{\text{стар}}^3} = k_1 = \text{const},$$

получим уравнения парабол с вершиной в начале координат

$$H_{\text{нов}} = k Q_{\text{нов}}^2 \quad (10.36)$$

и
$$N_{\text{нов}} = k_1 Q_{\text{нов}}^3. \quad (10.37)$$

Параболы подобных режимов представляют собой геометрическое место точек, определяющих режимы работы насоса, подобные режиму в рассматриваемой исходной точке (точке **A** или **B**, или **B**).

Уравнение (10.36) позволяет по заданной режимной точке определить, при какой частоте вращения n_x она будет получена при использовании данного (выбранного) насоса.

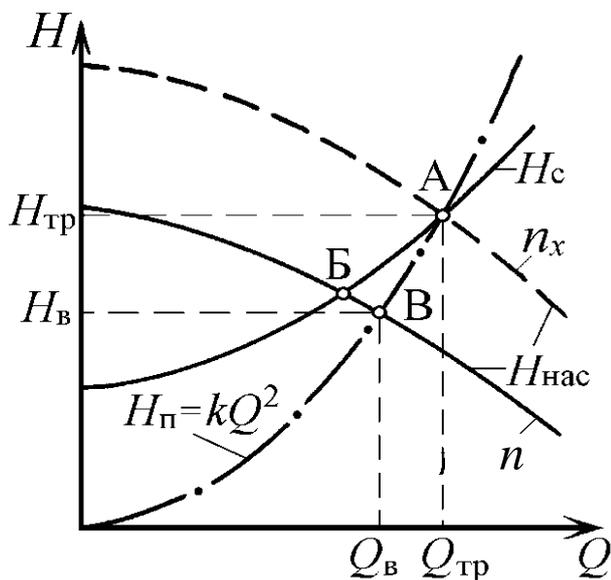


Рис. 10.15. Отыскание требуемой частоты вращения насоса

Пусть имеем следующую картину (рис. 10.15).

Насосная установка имеет характеристику H_c , а выбранный насос – $H_{нас}$. Они пересекаются в точке Б, которая, однако, не является требуемой режимной точкой. При требуемой подаче $Q_{тр}$ это должна быть точка А. Таким образом, необходимо пересчитать характеристику насоса при частоте вращения n на некоторую новую частоту вращения n_x , при которой новая характеристика насоса прошла бы через точку А.

Точки А и Б не являются точками подобных режимов, и поэтому воспользоваться сразу формулами (10.33) невозможно. Исходя из этого, прежде всего, необходимо на характеристике насоса $H_{нас}$ найти по заданной режимной точке точку подобного режима точке А.

По формуле (10.36) определим уравнение параболы подобных режимов в виде

$$H_{п} = \frac{H_{тр}}{Q_{тр}^2} Q^2$$

и построим ее график, который пройдет, естественно, через точку А и пересечет исходную характеристику насоса в точке В. Точки А и В являются точками подобных режимов. Поэтому взяв значения $Q_в$ и $H_в$ по формулам (10.33), можно определить n_x . Значения n_x , рассчитанные по Q и H , могут незначительно различаться между собой, что объясняется неточностью снятия значений с графика. Нивелируют неточность, определив среднее арифметическое значение n_x . Зная значения n_x , можно по формулам (10.33) построить новые характеристики насоса, обеспечивающие требуемый режим работы насосной установки.

Из вышеизложенного можно заключить, что одни и те же значения подачи и напора могут быть получены в насосах с различной частотой вращения. Естественно, что конструкции рабочих колес и всех элементов проточной части насосов, равно как и их размеры, при этом меняются. Таким образом, для того чтобы воспользоваться методом гидромеханического подобия при проектировании нового насоса, следует выбрать среди всего многообразия существующих насосов, имеющих высокие технико-экономические показатели, такой насос, у которого режим, подобный заданному режиму работы нового насоса, был бы близок к оптимальному. Для этого необходимо найти параметр, который служил бы критерием подобия и, следовательно, был бы одинаков для всех подобных насосов.

Определив по заданным H , Q и n нового насоса этот критерий подобия и сравнив его с критерием подобия имеющихся конструкций, получим возможность подобрать необходимый насос.

Для отыскания этого критерия воспользуемся формулами (10.30) и (10.31), переписав их в другом виде и приняв постоянными КПД:

$$\frac{Q_H}{n_H D_H^3} = \frac{Q_M}{n_M D_M^3} \quad \text{и} \quad \frac{H_H}{n_H^2 D_H^2} = \frac{H_M}{n_M^2 D_M^2}.$$

Отсюда следует постоянство отношений вида

$$\frac{Q}{nD^3} = g = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{H}{n^2 D^2} = h = \text{const}.$$

Таким образом, величины g и h одинаковы для подобных насосов, работающих в подобных режимах. Поэтому они являются критериями подобия. Однако они не могут быть определены для нового насоса, т. к. неизвестен его диаметр D .

Исключим из рассмотрения диаметр D , проведя следующие преобразования. Возведем g в квадрат и h в куб и разделим первое на второе:

$$g^2 = \frac{Q^2}{n^2 D^6}, \quad h^3 = \frac{H^3}{n^6 D^6} \quad \text{и} \quad \frac{g^2}{h^3} = \frac{Q^2 n^6 D^6}{H^3 n^2 D^6}.$$

Далее последовательно можем записать

$$\frac{g^2}{h^3} = \frac{Q^2 n^4}{H^3} \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{\frac{g^2}{h^3}} = \sqrt[4]{\frac{Q^2 n^4}{H^3}}.$$

$$\text{Отсюда} \quad \frac{\sqrt{a}}{b^{3/4}} = n \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = n_y = \text{const} . \quad (10.38)$$

Как параметры q и h , так и n_y одинаковы для геометрически подобных насосов при работе их на подобных режимах независимо от плотности перекачиваемой жидкости. Следовательно, параметр n_y является искомым критерием подобия и называется *удельной частотой вращения*.

На практике получил распространение параметр n_s в 3,65 раза больший, чем n_y :

$$n_s = 3,65n \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} . \quad (10.39)$$

Он называется *коэффициентом быстроходности*.

Входящие в формулы (10.38) и (10.39) параметры имеют следующие размерности: Q [м³/с], H [м] и n [об/мин]. В этом случае если насос, геометрически подобный данному, при подаче $Q = 0,075$ м³/с имеет напор $H = 1$ м, то согласно уравнению (10.39) его коэффициент быстроходности n_s равен частоте вращения насоса. Действительно,

$$n_s = 3,65n \frac{\sqrt{0,075}}{1^{3/4}} = n .$$

Поэтому коэффициентом быстроходности называют частоту вращения насоса, геометрически подобного данному, который при напоре 1 м подает 0,075 м³/с.

Если в формуле (10.39) изменить частоту вращения рабочего колеса n данного насоса, то в соответствии с уравнениями (10.33) должны быть пересчитаны подача Q , напор H и мощность N . Легко установить, что подстановка новых значений этих параметров в формулу (10.39) приводит к тем же численным значениям n_s . Таким образом, выходит, что коэффициент быстроходности остается постоянным для всех режимов работы насоса и зависит только от его конструкции.

В действительности это не так из-за того, что КПД насоса изменяется с изменением режима его работы. Поэтому для внесения определенности в понятие коэффициента быстроходности условились в формулу (10.39) подставлять оптимальные значения подачи и напора и называть его коэффициентом быстроходности насоса.

10.4.2. Изменение характеристики насоса при изменении диаметра его рабочего колеса

В соответствии с формулами (10.34) и (10.35) вторым способом изменения характеристики является обточка рабочего колеса по наружному диаметру D_2 . На практике этот способ зачастую является единственно возможным, поскольку способ изменения частоты вращения рабочего колеса насоса обуславливает наличие приводного двигателя с изменяемой частотой вращения или требует замены последнего. Вместе с тем величина обточки рабочего колеса возможна в весьма ограниченных пределах из-за заметного снижения КПД насоса при больших значениях обточки. О допустимой величине обточки, зависящей от коэффициента быстроходности насоса можно судить по данным, приведенным в табл. 10.1.

Относительная величина обточки определяется по формуле

$$\frac{D_2 - D_2^{об}}{D_2},$$

где D_2 , $D_2^{об}$ – наружные диаметры рабочего колеса насоса, соответственно, до и после обточки.

Таблица 10.1

Коэффициент быстроходности	60	120	200	300	350	>350
Относительная величина обточки	0,2	0,15	0,11	0,09	0,07	0

Определим напорную характеристику насоса для диаметра обточки $D_2^{об}$ по известной его напорной характеристике для диаметра D_2 (рис. 10.16, *a*). Для этого используем формулы пересчета (10.35) в виде

$$Q_{об} = Q \frac{D_2^{об}}{D_2} \quad \text{и} \quad H_{об} = \left(\frac{D_2^{об}}{D_2} \right)^2. \quad (10.40)$$

В результате подстановки пары значений Q и H для точки на исходной характеристике получим соответствующую пару значений $Q_{об}$ и $H_{об}$ для точки на искомой характеристике.

Так, для точки А (рис. 10.16, *a*) со значениями Q_A и H_A получим новую пару значений Q_B , H_B для точки Б новой характеристики. При

другом диаметре обточки точке А будет соответствовать и другая точка (например, точка В на рис. 10.16, а). Но все соответствующие точки (А, Б, В и т. п.) будут лежать на параболе, называемой параболой обточки.

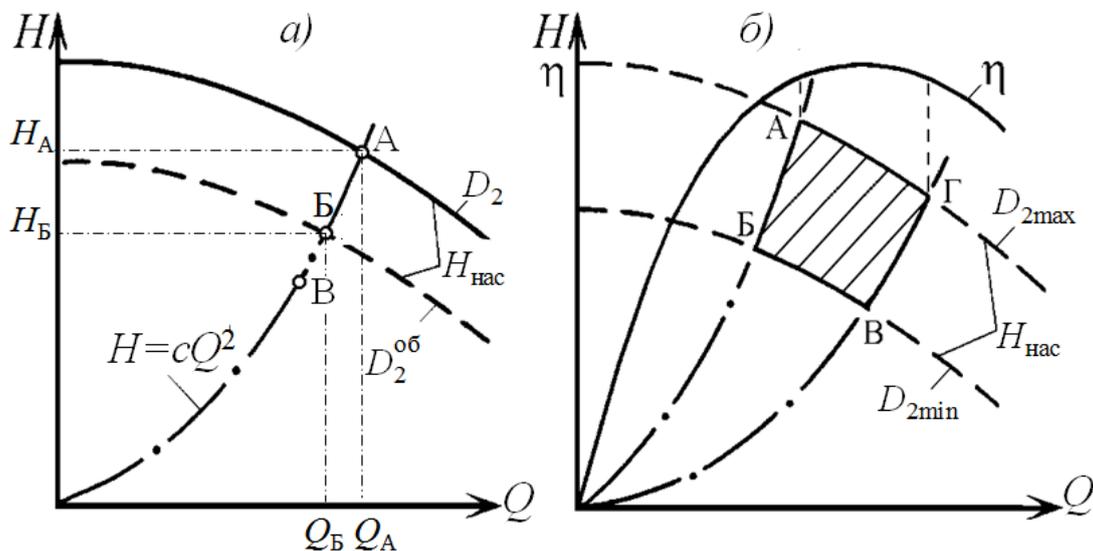


Рис. 10.16. Характеристики насоса при обточке рабочего колеса

Уравнение параболы обточки находим из формул (10.40).

Из уравнения подач выразим отношение диаметров и подставим его в уравнение напоров для соответственных друг другу точек А и Б:

$$H_B = H_A \left(\frac{Q_B}{Q_A} \right)^2$$

откуда следует, что $\frac{H_B}{Q_B^2} = \frac{H_A}{Q_A^2} = \text{const} = c$.

Это значит, что уравнение параболы обточки имеет вид

$$H = cQ^2. \quad (10.41)$$

Следовательно, режимы, удовлетворяющие уравнениям (10.40), располагаются на параболе, имеющей вершину в начале координат.

Обратим внимание читателя на то, что при обточке рабочего колеса геометрическое подобие нарушается. Поэтому парабола обточки, несмотря на все свое внешнее сходство с параболой подобных режимов (10.36), ничего общего с ней не имеет.

Насос выгодно эксплуатировать только в области высоких КПД и больших высот всасывания. Поэтому должна использоваться не вся характеристика насоса, а только его часть. На рис. 10.16, б показана

заштрихованная область АБВГ, называемая полем насоса, охватывающая режимы работы насоса в области оптимальных значений КПД. Линии АГ и БВ, ограничивая область сверху и снизу, соответствуют характеристикам насоса при максимальном и минимальном значениях диаметра рабочего колеса. Линии АБ и ВГ представляют собой параболы обточки, ограничивающие область допустимым снижением КПД. Поля насосов приводятся в справочной литературе и очень удобны для выбора насосов как при проектировании, так и в эксплуатационных расчетах насосных установок.

Используя параболу обточки, можно решить задачу определения необходимого диаметра обточки D_{2x} , при котором характеристика насоса пройдет через заданную режимную точку.

Пусть имеем насосную установку с характеристикой сети H_c и насос с характеристикой $H_{нас}$, которая пересекает H_c в точке Б, в то время как режимной точкой должна быть точка А (рис. 10.17).

По формуле (10.41) строим параболу обточки, проходящую через режимную точку А:

$$H = \frac{H_A}{Q_{тр}^2} Q^2.$$

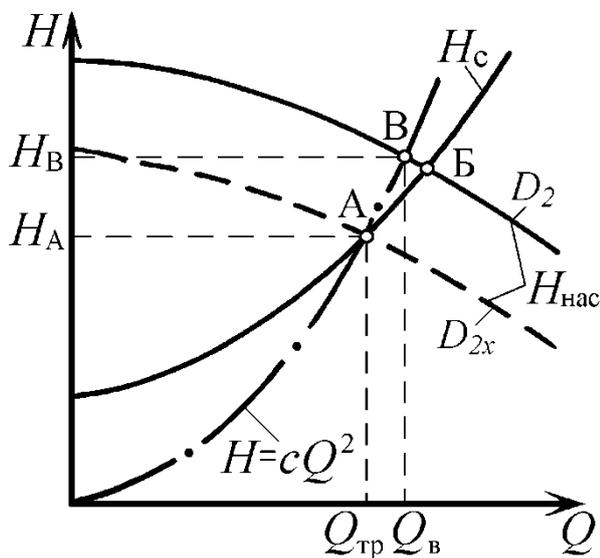


Рис. 10.17. Отыскание диаметра обточки рабочего колеса

Эта параболу обточки пересекает исходную характеристику насоса в точке В.

Используя значения Q_B и H_B , по формулам (10.40) вычисляем искомый диаметр обточки

$$D_{2x} = \frac{Q_A}{Q_B} D_2 \quad \text{и} \quad D_{2x} = D_2 \sqrt{\frac{H_A}{H_B}}.$$

Отклонения в значениях D_{2x} , рассчитанных по этим формулам, объясняются неточностью снятия с графиков значений Q_A , Q_B , H_A и H_B . В расчет берется среднее значение D_{2x} . Полученное значение

диаметра обточки необходимо сравнить с допустимым значением обточки по табл. 10.1 для данного насоса. По известному теперь диаметру D_{2x} и формулам (10.40) строится искомая характеристика насо-

са, которая проходит через режимную точку А. На рис. 10.17 эта характеристика изображена штриховой линией.

10.5. Высота всасывания насосов. Кавитация

Движение жидкости по всасывающему трубопроводу и подвод ее к рабочему колесу осуществляется за счет разности давления над свободной поверхностью жидкости в приемном резервуаре и абсолютного давления в потоке у входа в колесо. Согласно уравнению (9.19) абсолютное давление на входе в насос равно

$$\frac{p_n}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} - H_v - \alpha_1 \frac{V_n^2}{2g} - h_{0-1}, \quad (10.42)$$

где p_n и V_n – давление и абсолютная скорость в потоке жидкости на входе в насос; H_v – высота всасывания; p_0 – давление на свободной поверхности жидкости в приемном резервуаре; h_{0-1} – сумма потерь напора во всасывающем трубопроводе установки.

Из формулы (10.42) видно, что увеличение высоты всасывания H_v приводит к снижению абсолютного давления на входе в насос, и если это давление упадет до давления насыщенного пара перекачиваемой жидкости при данной температуре $p_{\text{пар}}$, то возникнет явление кавитации (см. п. 1.3). Для лопастных гидромашин явление кавитации особенно нежелательно. Рабочее колесо представляет собой совокупность большого числа межлопастных каналов, конфигурация которых специально подбирается такой, чтобы поток жидкости проходил по ним с наименьшими потерями энергии. Поэтому любое изменение геометрии проходного сечения межлопастного канала существенно ухудшает энергетические параметры гидромашин.

Как отмечалось в п. 10.1 (см. рис. 10.5), поток в лопастном насосе не осесимметричный. Скорости частиц жидкости у тыльной стороны лопаток больше, чем у лицевой стороны. Поэтому, согласно уравнению Бернулли, абсолютное давление у тыльной стороны лопатки будет, соответственно, меньшим, чем у лицевой. Следовательно, самое низкое давление в межлопастном канале будет с тыльной стороны лопатки у ее входной кромки. У гидравлической турбины будет наблюдаться обратная картина. На рис. 10.18 показан примерный график изменения давления в потоке жидкости вдоль хорды лопатки с ее тыльной стороны.

На участке **а–б** хорды давление в потоке жидкости оказалось ниже давления насыщенных паров $p_{\text{пар}}$, в результате чего здесь образовалась парогазовая кавитационная зона. После точки **б** давление в потоке снова стало больше $p_{\text{пар}}$ и парогазовые пузырьки схлапываются (сокращаются в размерах). Очевидно, что величина кавитационной зоны зависит от величины давления на входе в рабочее колесо $p_{\text{н}}$. Чем меньше будет $p_{\text{н}}$, тем больше будет размер кавитационной зоны, которая будет увеличиваться как по длине, так и в поперечном направлении, вплоть до полного заполнения межлопастного канала. Снижение энергетических параметров (подача, напор) и уменьшение КПД являются прямым следствием возникновения кавитации в любой гидравлической машине. Неустойчивость кавитационной зоны и вызванные появлением этой зоны деформации потока жидкости (вихреобразования, вторичные течения жидкости и т. п.) приводят к значительным пульсациям давления в потоке, которые оказывают динамическое воздействие на поверхности, направляющие поток.

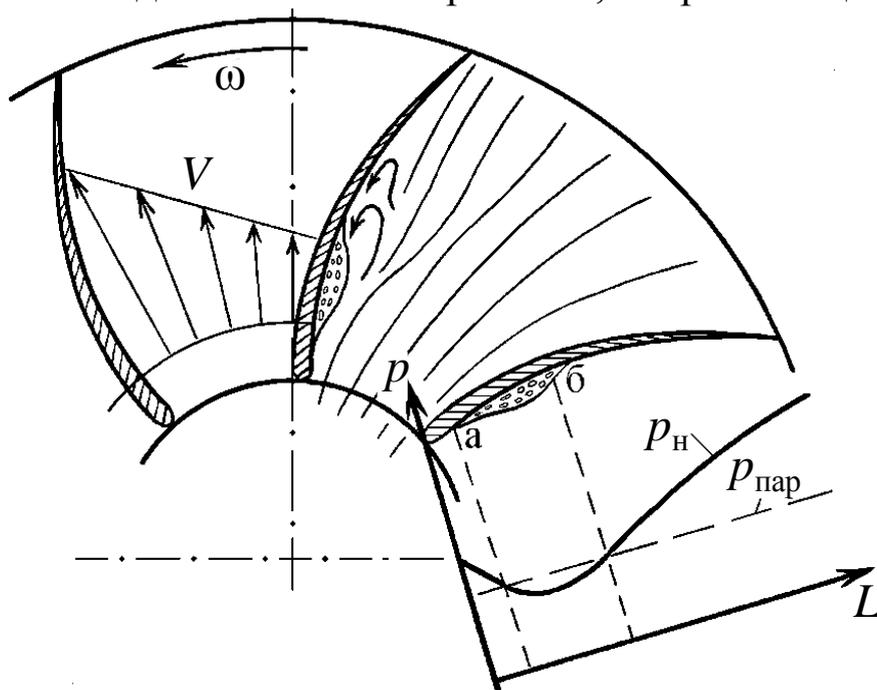


Рис. 10.18. Кавитационные явления в центробежном насосе

Разрушение (схлопывание) кавитационных пузырей при переносе их потоком в область с давлением выше $p_{\text{пар}}$ происходит очень быстро. Это приводит к возникновению местных ударных повышений давления $p_{\text{н}}$ в 100 и более раз. Наложение большого числа таких ударов приводит к появлению характерного шипящего звука, который всегда сопутствует кавитации. И, наконец, в подавляющем большинстве случаев кавитация сопровождается эрозией (разруше-

нием) поверхности, на которой возникают и некоторое время существуют кавитационные пузырьки. Механические повреждения рабочих органов гидравлических машин в результате кавитационной эрозии могут за относительно короткий срок достигнуть таких размеров, которые сделают эксплуатацию гидромашин невозможной.

Таким образом, обязательным является обеспечение условий бескавитационной работы насосной установки на всех возможных режимах ее эксплуатации.

Из уравнения (10.42) следует, во-первых, что необходимо свести к минимуму гидравлические потери во всасывающем трубопроводе. Это может быть достигнуто (см. п. 5.4 и 7.5) за счет увеличения диаметра всасывающей трубы и сведения к минимуму числа местных гидравлических сопротивлений.

Во-вторых, необходимо уменьшать высоту всасывания $H_{\text{в}}$. Следует сразу сказать, что определение допустимой высоты всасывания с учетом геодезической отметки расположения насоса и температуры перекачиваемой жидкости является первым и наиболее надежным мероприятием, направленным на ослабление или предотвращение кавитации. Создание же некоторого запаса путем уменьшения высоты всасывания при увеличении подпора (давления p_0), по сравнению с подсчитанными величинами, гарантирует, как правило, надежную бескавитационную работу насоса.

Наибольшее значение геометрической высоты всасывания может быть найдено с помощью уравнения (10.42) при условии, что в момент возникновения кавитации $p_{\text{н}} = p_{\text{пар}}$:

$$H_{\text{в}}^{\text{max}} = \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{\text{пар}}}{\rho g} - \alpha_1 \frac{V_{\text{н}}^2}{2g} - h_{0-1}. \quad (10.43)$$

Высота всасывания насоса, являясь одним из основных параметров, определяющих компоновочное решение насосной установки, в то же время не дает возможности численно оценить степень развития кавитации, а следовательно, и сравнить между собой кавитационные характеристики насосов, постоянно изменяющиеся в процессе эксплуатации. Использование в этих целях геометрической высоты всасывания невозможно хотя бы потому, что она включает в себя гидравлические потери, свойственные конструктивным особенностям конкретной установки.

Поэтому в насосостроении для сравнения кавитационных качеств насосов, количественной оценки степени развития кавитации

и анализа вопроса о выборе допустимых высот всасывания пользуются критерием, смысл которого определяется из следующих рассуждений.

Для нормальной бескавитационной работы насоса необходимо, чтобы давление p_n на входе в насос было больше критического, в качестве которого принимают давление $p_{\text{пар}}$ насыщенных паров перекачиваемой жидкости. Это значит, что удельная энергия потока на входе в насос [см. формулу (9.20)], отнесенная к его оси, должна быть достаточной для обеспечения скоростей и ускорений в потоке при входе в насос и преодоления сопротивлений без падения местного давления до величины, ведущей к возникновению кавитации. В связи с этим решающее значение приобретает не абсолютная величина удельной энергии потока, а превышение ее над энергией, соответствующей давлению $p_{\text{пар}}$:

$$\Delta h = \mathcal{E}_n g - \frac{p_{\text{пар}}}{\rho g} = \frac{p_n}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_n^2}{2g} - \frac{p_{\text{пар}}}{\rho g}. \quad (10.44)$$

Величина Δh называется кавитационным запасом. Он представляет собой запас механической энергии в потоке над давлением насыщенного пара. Используя уравнения (10.43) и (10.44), можем записать

$$H_B^{\text{max}} = \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{\text{пар}}}{\rho g} - \Delta h - h_{0-1}. \quad (10.45)$$

Для каждого насоса существует некоторое минимальное значение кавитационного запаса. В настоящее время общепризнанной является формула, предложенная С. С. Рудневым:

$$\Delta h_{\text{min}} = 10 \left(\frac{n \sqrt{Q}}{c} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (10.46)$$

где c — постоянная, зависящая от конструктивных особенностей насоса.

Для обеспечения надежной работы насоса допускаемая в эксплуатации высота всасывания должна иметь некоторый запас. Для этого вводится коэффициент запаса φ ($\varphi = 1,1-1,5$)

$$H_B^{\text{доп}} = \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{\text{пар}}}{\rho g} - \varphi \Delta h_{\text{min}} - h_{0-1}. \quad (10.47)$$

При эксплуатации насоса следует контролировать, не работает ли насос в режиме недопустимо сильной кавитации. Такой контроль

удобно производить по показанию вакуумметра, установленного на входном патрубке насоса. Для этого надо знать допустимый вакуум на входе в насос. Из уравнения (10.42) такой вакуум или вакуумметрическая высота всасывания

$$H_{\text{вак}} = \frac{p_0 - p_{\text{н}}}{\rho g} - \alpha \frac{V_{\text{н}}^2}{2g}. \quad (10.48)$$

Исходя из этого и (10.47) допустимая вакуумметрическая высота всасывания определится по формуле

$$H_{\text{вак}}^{\text{доп}} = \frac{p_0 - p_{\text{пар}}}{\rho g} - \Delta h_{\text{мин}}. \quad (10.49)$$

Определенные в результате проведения испытаний на кавитационных стендах значения $\Delta h_{\text{мин}}$ и $H_{\text{вак}}^{\text{доп}}$ приводятся в официальных каталогах насосов, выпускаемых заводами-изготовителями.

В заключение отметим, что при изменении характеристики насоса путем изменения частоты вращения рабочего колеса (см. п. 10.4.1) будет меняться и допустимая вакуумметрическая высота всасывания насоса. Поэтому при пересчете характеристик напора и мощности надо также пересчитать и характеристику $H_{\text{вак}}$ по формуле

$$H_{\text{вак.}x}^{\text{доп}} = 10 \left[10 - H_{\text{вак}}^{\text{доп}} \left(\frac{n_x}{n} \right)^2 \right], \quad (10.50)$$

где $H_{\text{вак}}^{\text{доп}}$ – допустимая вакуумметрическая высота всасывания для исходной известной частоты вращения n ; $H_{\text{вак.}x}^{\text{доп}}$ – допустимая вакуумметрическая высота всасывания для новой частоты вращения n_x .

10.6. Контрольные вопросы

1. Опишите принцип действия основных типов лопастных насосов.
2. Сравните типы лопастных насосов по их возможностям.
3. Запишите основное уравнение центробежного насоса. На основании каких допущений оно выведено? Какие потери напора имеют место при работе центробежного насоса?
4. Как определяется режим работы насосной установки?

5. Запишите критерии гидродинамического подобия, используемые для пересчета характеристик центробежного насоса.
6. Как влияет частота вращения и величина обточки рабочего колеса на подачу насоса? Что такое коэффициент быстроходности?
7. Что такое поле насоса?
8. Чем ограничивается высота всасывания центробежного насоса?
9. Объясните причины явления кавитации у центробежного насоса.
10. Что выражает формула С. С. Руднева?
11. При каком способе изменения характеристики насоса изменится допустимая вакуумметрическая высота?

11. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Цель данного раздела – получение студентами навыков применения теоретических сведений к решению типичных инженерных задач по изучаемому курсу.

Будучи практическим дополнением теоретической части курса данный раздел содержит только те определения и формулы, которые не получили отражение в предыдущих разделах данного учебного пособия.

Для успешного освоения курса полезно использовать сборники задач [18, 19].

11.1. Физические свойства жидкостей

Пример 1. Определить плотность смеси минеральных масел, полученной из 10 л масла И-Л-А-7 плотностью $\rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3$ и 20 л масла И-ГТ-А-100 плотностью $\rho_2 = 910 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Плотность смеси находим путем деления ее массы на объем по формуле (1.5):

$$\rho = \frac{\rho_1 W_1 + \rho_2 W_2}{W_1 + W_2} = \frac{870 \cdot 0,01 + 910 \cdot 0,02}{0,01 + 0,02} = 896,7 \text{ кг/м}^3.$$

Пример 2. Определить максимальный объем жидкости, который можно залить в резервуар диаметром $D = 1,2 \text{ м}$ и высотой $H = 2,5 \text{ м}$, при условии, что она не выльется из резервуара при нагревании от начальной температуры $t_n = 5 \text{ }^\circ\text{С}$ до конечной температуры $t_k = 40 \text{ }^\circ\text{С}$. Вычислить высоту столба жидкости при t_n . Жидкость – бензин с коэффициентом теплового объемного расширения $\alpha = 0,00124 \text{ 1/}^\circ\text{С}$.

Решение. Согласно формуле (1.16) искомый объем жидкости $W_{\text{ж}}$ находим по разности температур $\Delta t = t_k - t_n = 35 \text{ }^\circ\text{С}$, считая объем жидкости после нагревания равным объему резервуара

$$(W_{\text{р}} = \frac{\pi D^2}{4} H):$$

$$W_{\text{ж}} = \frac{W_{\text{р}}}{1 + \alpha \Delta t} = \frac{\pi D^2 H}{4(1 + \alpha \Delta t)} = \frac{\pi \cdot 1,2^2 \cdot 2,5}{4(1 + 0,00124 \cdot 35)} = 2,71 \text{ м}^3.$$

Высоту столба жидкости находим, разделив полученный объем жидкости на площадь резервуара:

$$h_{\text{ж}} = \frac{4W_{\text{ж}}}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 2,71}{\pi \cdot 1,2^2} = 2,396 \text{ м.}$$

Пример 3. Для проверки на герметичность и прочность трассы трубопровода длиной $\ell = 400$ м и диаметром $d = 500$ мм ее подвергают испытанию давлением. Определить объем воды, который необходимо дополнительно подать в трубопровод во время испытания для подъема давления от $p_{\text{н}} = 0,1$ МПа до $p_{\text{к}} = 8$ МПа. Расширение трубопровода не учитывать.

Объемный модуль упругости воды $E = 2060$ МПа.

Решение. Из формулы (1.10) находим

$$\begin{aligned} \Delta W &= \beta_p \Delta p W_0 = \frac{1}{E} (p_{\text{к}} - p_{\text{н}}) \frac{\pi d^2}{4} \ell = \\ &= \frac{1}{2,06 \cdot 10^9} (8 - 0,1) \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4} 400 = 0,301 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Пример 4. На рис. 11.1 приведена схема подшипника скольжения, состоящего из цапфы радиусом $r = 40$ мм и опоры шириной $L = 100$ мм. Зазор между цапфой и опорой постоянен и равен $\delta = 0,2$ мм.

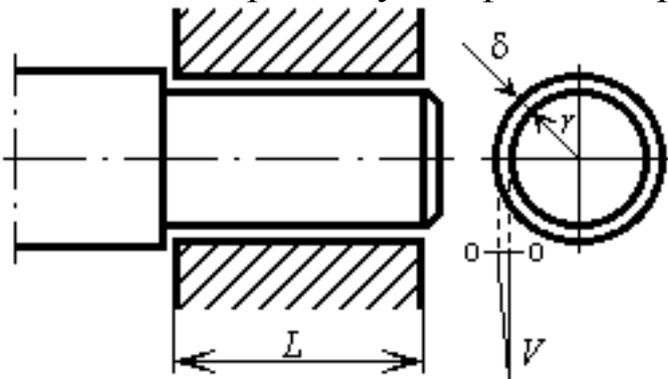


Рис. 11.1. Схема подшипника скольжения

Определить мощность, теряемую на преодоление трения в подшипнике, если зазор заполнен смазкой плотностью $\rho = 910$ кг/м³ и с кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = 80$ мм²/с.

Цапфа вращается с частотой $n = 500$ мин⁻¹.

Считать, что скорость жидкости в зазоре изменяется по линейному закону от 0 у стенки опоры до $V = \pi r n / 30$ у поверхности цапфы.

Решение. В данном случае используется формула (1.20).

Градиент скорости в зазоре при линейном ее убывании составит

$$\frac{dV}{dy} = \frac{V}{\delta} = \frac{\pi r n}{30 \delta}.$$

Площадь поверхности цапфы $S = 2 \pi r L$.

Динамический коэффициент вязкости

$$\mu = \rho \nu = 910 \cdot 80 \cdot 10^{-6} = 0,0728 \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

Сила трения в подшипнике (сила вязкости)

$$R_{\mu} = \mu \frac{dV}{dy} S = \mu \frac{\pi r n}{30\delta} 2\pi r L = \mu \frac{\pi^2 r^2 n L}{15\delta}.$$

Момент силы трения относительно цапфы

$$M = R_{\mu} r = \mu \frac{\pi^2 r^3 n L}{15\delta}.$$

Мощность, теряемая на преодоление трения в подшипнике:

$$N = M\omega = \mu \frac{\pi^3 r^3 n^2 L}{450\delta} = \frac{0,0728 \cdot \pi^3 \cdot 0,04^3 \cdot 0,1 \cdot 500^2}{450 \cdot 0,0002} = 40,1 \text{ Вт}.$$

11.2. Гидростатика

В этом разделе гидравлики рассматривается круг задач, посвященных воздействию покоящейся жидкости на ограничивающие ее поверхности.

Равновесие жидкости описывается дифференциальными уравнениями Эйлера (2.5) или в виде основного уравнения равновесия в дифференциальной форме (2.6).

Если на жидкость действует только сила тяжести, то решение уравнения (2.6) примет вид (2.3) или (2.4).

На практике часто встречаются также такие частные случаи относительного покоя жидкости, как равномерное вращение сосуда с жидкостью и поступательное движение сосуда с постоянным ускорением. В этих случаях решения дифференциального уравнения равновесия имеют вид соответственно (2.13) и (2.14).

Давление, рассчитанное по отмеченным зависимостям, является полным (абсолютным) гидростатическим давлением в рассматриваемой точке объема жидкости.

Плоскость, проведенная через точки объема жидкости, в которых давление равно атмосферному, называется **пъезометрической плоскостью**.

На рис. 11.2 показан открытый сосуд. В этом случае пъезометрическая плоскость совпадает со свободной поверхностью жидкости в сосуде.

Если сосуд закрыт и на свободную поверхность действует дав-

ление p_0 больше, чем атмосферное $p_{\text{атм}}$, то пьезометрическая плоскость располагается над свободной поверхностью жидкости (рис. 11.3, а) и проходит через уровень пьезометра, присоединенного к сосуду.

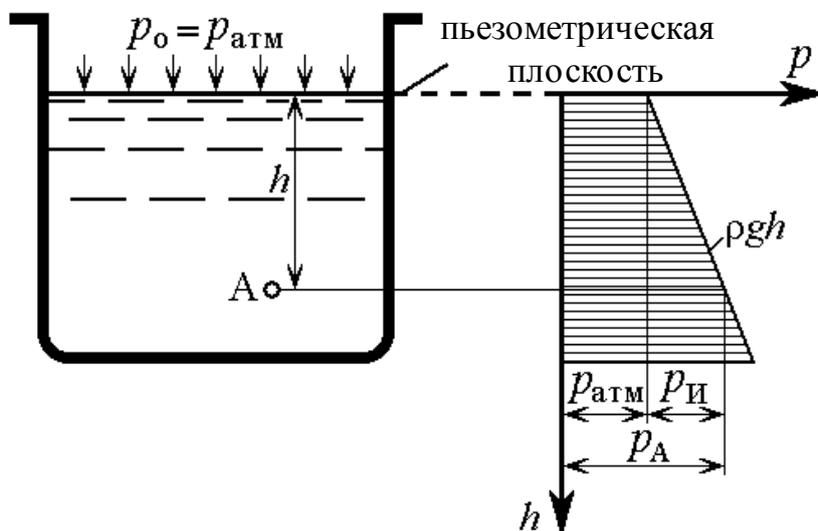


Рис. 11.2. Схема равновесия жидкости в открытом сосуде

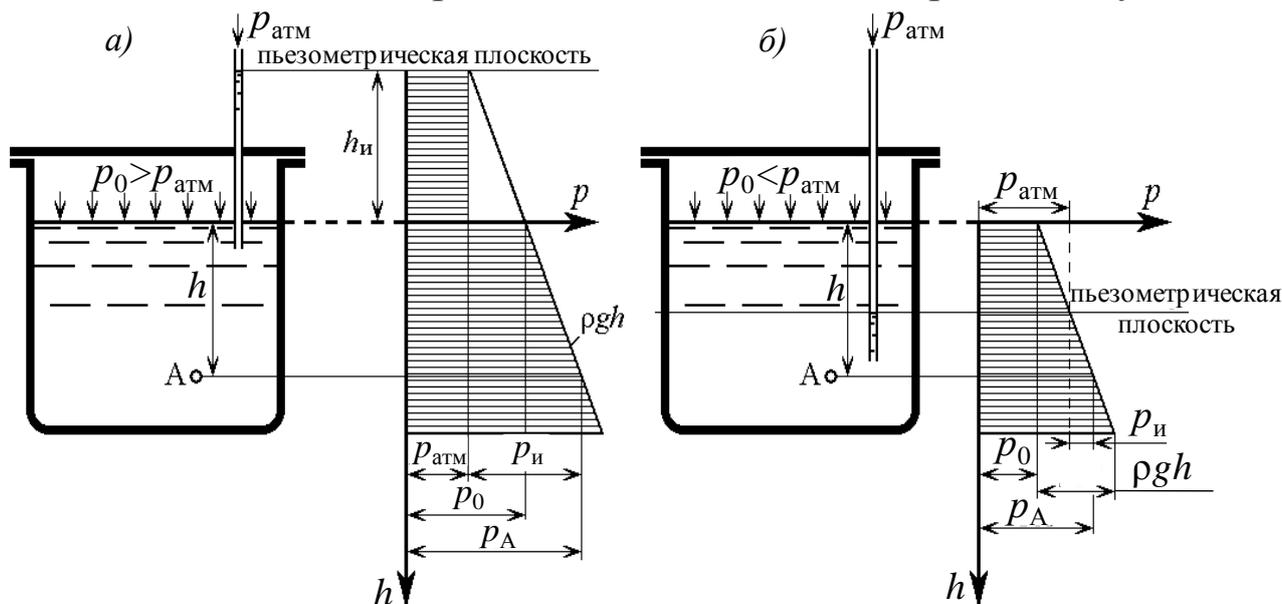


Рис. 11.3. Схемы равновесия жидкости в закрытом сосуде

Если $p_0 < p_{\text{атм}}$, то пьезометрическая плоскость проходит ниже свободной поверхности (рис. 11.3, б).

Превышение абсолютного давления над атмосферным называют **избыточным (манометрическим) давлением** (на рис. 11.3 это $p_{\text{И}}$). Если абсолютное давление меньше атмосферного, то говорят о **вакууме**:

$$P_{\text{вак}} = P_{\text{атм}} - p.$$

Зная закон распределения давления по объему жидкости, реша-

ют задачи воздействия жидкости на ограничивающие объем стенки.

На рис. 11.4, *a* показана схема действия жидкости на люк, расположенный на наклонной плоской стенке.

В данном случае стенка подвергается одностороннему давлению жидкости и результирующая R сил давления, нормальная к поверхности люка, определяется по выражению

$$R = p_{\text{сн}} S = \rho g h_c S, \quad (11.1)$$

где $p_{\text{сн}}$ – избыточное давление в центре тяжести площади S (в точке C на рис. 11.4, *a*); S – смоченная площадь люка; h_c – расстояние от центра тяжести площади S до пьезометрической плоскости.

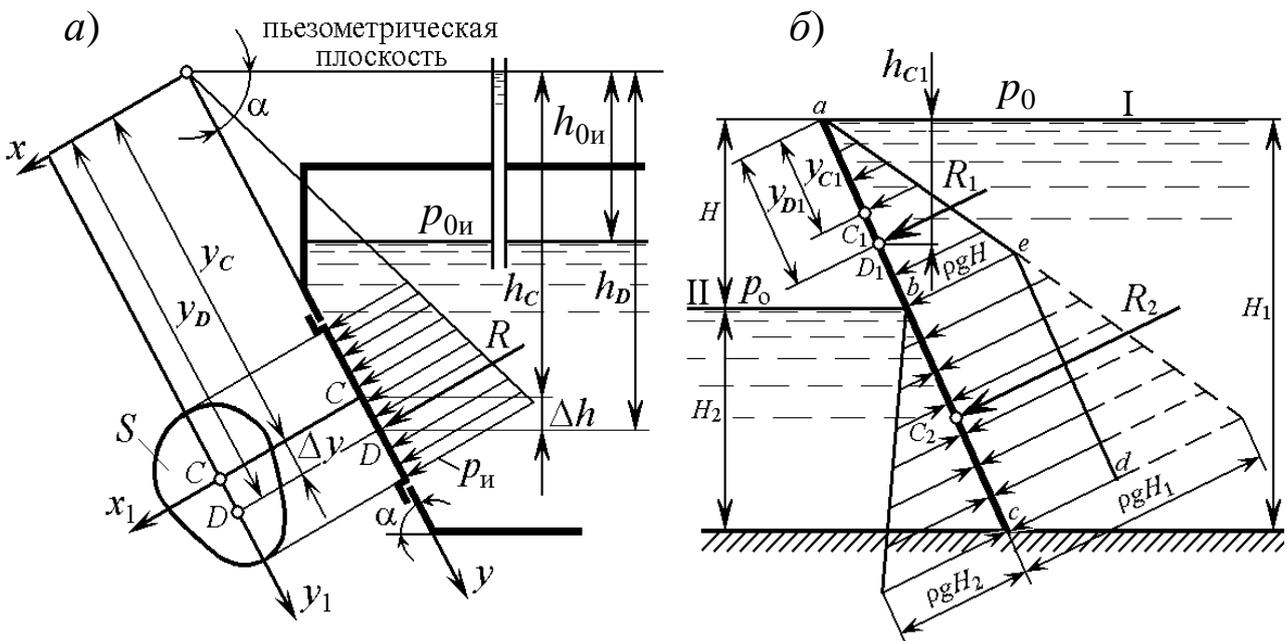


Рис. 11.4. Схемы воздействия жидкости на наклонные плоские стенки

При избыточном давлении $p_{0и}$ на свободной поверхности

$$(p_{0и} = p_0 - p_{\text{атм}})$$

пьезометрическая плоскость проходит над свободной поверхностью жидкости на расстоянии

$$h_{0и} = \frac{p_{0и}}{\rho g}.$$

Центр давления (точка приложения силы R) не совпадает с центром тяжести площади S . Положение центра давления (точка D на рис. 11.4, *a*) в плоскости стенки определяется формулами

$$y_D = y_c + \frac{J_c}{S \cdot y_c}; \quad (11.2)$$

где y_D и y_c – расстояния от центра давления D и центра тяжести C до

линии пересечения плоскости стенки с пьезометрической плоскостью (ось X); J_c – момент инерции площади люка относительно оси X_1 , проходящей через центр тяжести площади люка.

Если ось x_1 или перпендикулярная ей центральная ось y_1 являются осями симметрии люка, центр давления лежит на оси y_1 .

Если оси x_1 и y_1 не являются осями симметрии, необходимо определить кроме смещения Δy также и смещение Δx центра давления относительно центра тяжести площади люка вдоль оси x_1 :

$$\Delta x = \frac{J_{x_1 y_1}}{S \cdot y_c},$$

где $J_{x_1 y_1}$ – центробежный момент инерции площади люка относительно осей x_1 и y_1 , лежащих в его плоскости и проходящих через его центр тяжести.

При двухстороннем воздействии жидкостей на плоскую стенку (рис. 11.4, б) следует сначала определять силы давления на каждую сторону стенки, а затем найти их результирующую.

Пример 5. В сообщающиеся сосуды (рис. 11.5) налиты вода ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$) и бензин. Определить плотность бензина, если высота столба жидкости в левом сосуде $h_1 = 350 \text{ мм}$, а в правом сосуде $h_2 = 460 \text{ мм}$. Граница раздела воды и бензина находится на высоте $h = 100 \text{ мм}$.

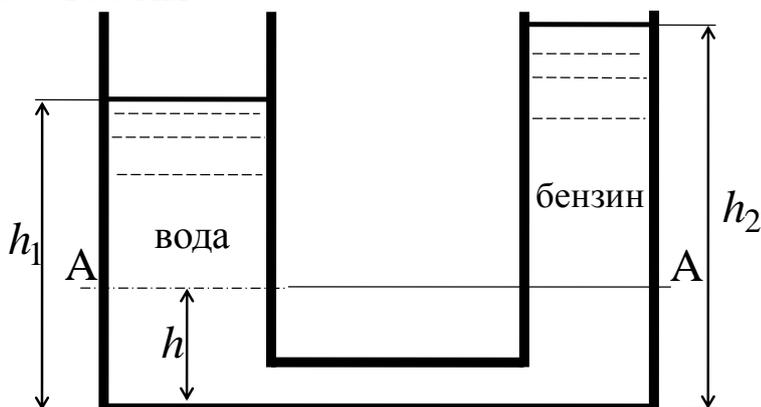


Рис. 11.5. Схема сообщающихся сосудов, заполненных разнородными жидкостями

Решение. В данном случае все горизонтальные плоскости являются поверхностями уровня, во всех точках которых давления равны.

Проведем такую плоскость А–А через границу раздела жидкостей. Согласно уравнению (2.3) избыточное

давление в точках плоскости А–А для левого сосуда составит

$$p_{\text{ил}} = \rho g(h_1 - h),$$

а для правого сосуда

$$p_{\text{ип}} = \rho_1 g(h_2 - h),$$

где ρ_1 – плотность бензина.

Приравнивая правые части этих выражений, находим искомую плотность бензина:

$$\rho_1 = \rho \frac{h_1 - h}{h_2 - h} = 1000 \frac{350 - 100}{460 - 100} = 694 \text{ кг/м}^3.$$

Пример 6. В боковой стенке закрытого сосуда (рис. 11.6) имеется круглое отверстие диаметром $d = 200$ мм, закрытое плоской крышкой. Сосуд заполнен водой ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$) до уровня $Z_0 = 1,5$ м. Центр отверстия находится на расстоянии $Z = 0,15$ м от дна сосуда.

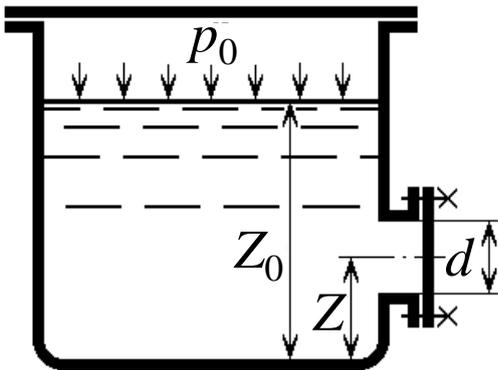


Рис. 11.6. Схема действия давления жидкости на вертикальную стенку

Определить разрывное усилие, действующее на один из четырех болтов, крепящих крышку, если давление на свободной поверхности жидкости $p_0 = 10$ МПа.

Решение. Сила давления жидкости на плоские стенки (поверхности) рассчитывается по формуле $R = p_c S$, где S – площадь смоченной поверхности стенки; p_c – гидростатическое давление в центре тяжести этой площади.

Для данного примера имеем:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 0,031416 \text{ м}^2;$$

$$p_c = p_0 + \rho g(Z_0 - Z) = 10^7 + 1000 \cdot 9,81 \cdot (1,5 - 0,15) = 10013243,5 \text{ Па.}$$

Разрывное усилие, приходящееся на один болт, составит

$$R_1 \approx \frac{R}{4} = \frac{10013243,5 \cdot 0,031416}{4} = 78644,014 \text{ Н.}$$

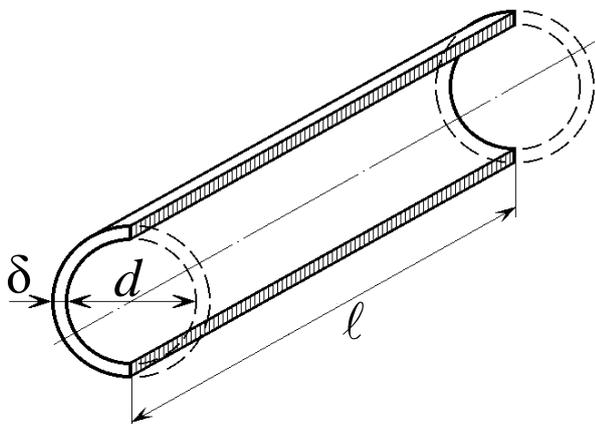


Рис. 11.7. Схема стальной трубы

Пример 7. Найти минимальную толщину δ стенок стальной трубы (рис. 11.7) диаметром $d = 50$ мм, если давление жидкости $p = 10$ МПа, а допустимое напряжение на растяжение для стали $[\sigma] = 150$ МПа. Весом жидкости можно пренебречь.

Решение. Сила, разрывающая трубу по диаметральному сечению, равна силе давления жид-

кости на проекцию цилиндрической поверхности на диаметральную плоскость:

$$R = pld.$$

Эта сила воспринимается двумя сечениями стенки трубы, поэтому $pld = 2[\sigma]l\delta$.

Тогда
$$\delta = \frac{pd}{2[\sigma]} = \frac{10 \cdot 50}{2 \cdot 150} = 1,67 \text{ мм.}$$

На практике для повышения гарантии целостности трубопровода толщину стенок увеличивают, вводя двух-, трехкратный запас прочности.

Пример 8. Определить силу давления жидкости на закругление (рис. 11.8), а также отрывающее и сдвигающее усилия, которые возникают на стыковочных фланцах, соединяющих закругление с прямолинейными участками трубопровода, если диаметр трубы $d = 250$ мм, угол поворота $\alpha = 60^\circ$, избыточное давление жидкости $p = 1,5$ МПа. Весом жидкости пренебречь.

Решение. На закругление действуют силы гидростатического давления $|R_1| = |R_2| = pS$, где S – площадь поперечного сечения трубы.

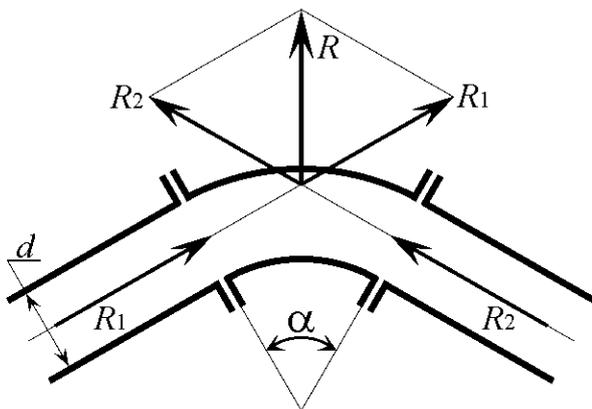


Рис. 11.8. Схема закругления трубопровода

$$|R_1| = |R_2| = 1500000 \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} = 73631,077 \text{ Н.}$$

Равнодействующая этих двух сил

$$R = 2p \frac{\pi d^2}{4} \cos \alpha = 2 \cdot 1500000 \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cos 60^\circ = 73631,077 \text{ Н.}$$

Отрывающее усилие на стыках равно силе гидростатического давления, а сдвигающее усилие на стыках составит

$$R_{сд} = R \cos \frac{\alpha}{2} = 73631,077 \cdot \cos 30^\circ = 63766,384 \text{ Н.}$$

Пример 9. Для управления задвижкой, установленной на трубопроводе, используется гидроцилиндр (рис. 11.9, а), перемещение ко-

того осуществляется за счет энергии жидкости, находящейся в самом трубопроводе. Избыточное давление жидкости в трубе диаметром $D_T = 1,2$ м составляет $p_{\text{раб}} = 1,2$ МПа. Масса подвижных частей устройства $m = 205$ кг. Коэффициент трения в направляющих задвижки равен $f = 0,3$. Сила трения в гидроцилиндре составляет 4 % от веса подвижных частей.

Определить диаметр поршня гидроцилиндра $D_{\text{п}}$, необходимый для подъема задвижки, если диаметр штока $d_{\text{ш}} = 100$ мм.

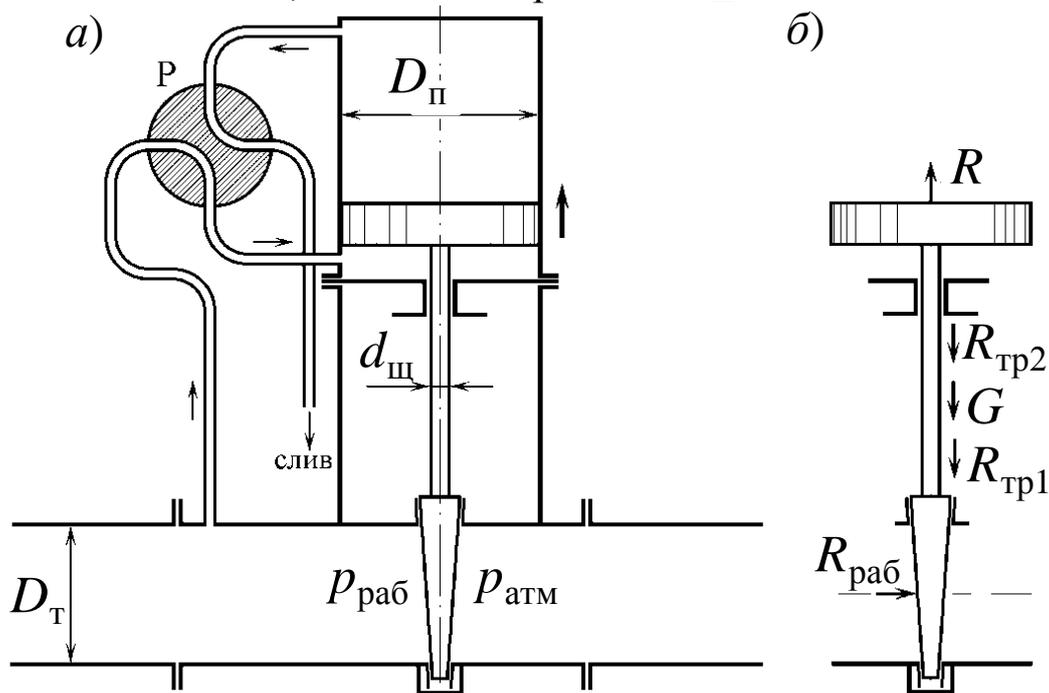


Рис. 11.9. Схема гидравлического привода задвижки

Решение. Схема сил, действующих в рассматриваемой системе, приведена на рис. 11.9, б, где

$R_{\text{раб}}$ – сила давления жидкости в трубе на задвижку, равная

$$R_{\text{раб}} = p_{\text{раб}} \frac{\pi D_T^2}{4};$$

$R_{\text{тр1}}$ – сила трения в направляющих задвижки, равная

$$R_{\text{тр1}} = R_{\text{раб}} f;$$

$R_{\text{тр2}}$ – сила трения в гидроцилиндре, равная

$$R_{\text{тр2}} = 0,05G;$$

G – сила веса подвижных частей устройств ($G = m g$);

R – сила давления жидкости на поршень, равная

$$R = p_{\text{раб}} \frac{\pi (D_{\text{п}}^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4}.$$

В момент открывания задвижки поршень гидроцилиндра нахо-

дится в равновесии, поэтому

$$R = R_{\text{тр}1} + R_{\text{тр}2} + G$$

или

$$p_{\text{раб}} \frac{\pi (D_{\text{п}}^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4} = p_{\text{раб}} \frac{\pi D_{\text{т}}^2}{4} f + 0,05 m g + m g.$$

Из этого уравнения находим требуемый диаметр поршня гидроцилиндра:

$$D_{\text{п}} = \sqrt{D_{\text{т}}^2 f + \frac{4,2 m g}{\pi p_{\text{раб}}} + d_{\text{ш}}^2} = \sqrt{1,2 \cdot 0,3 + \frac{4,2 \cdot 205 \cdot 9,81}{\pi \cdot 1,2 \cdot 10^6} + 0,1^2} = 0,61 \text{ м.}$$

Пример 10. Определить величину предварительного сжатия пружины X дифференциального предохранительного клапана (рис. 11.10), необходимую для того, чтобы клапан открывался при давлении $p = 5$ МПа. Диаметры поршней $D = 25$ мм и $d = 20$ мм, а жесткость пружины $c = 45$ Н/мм.

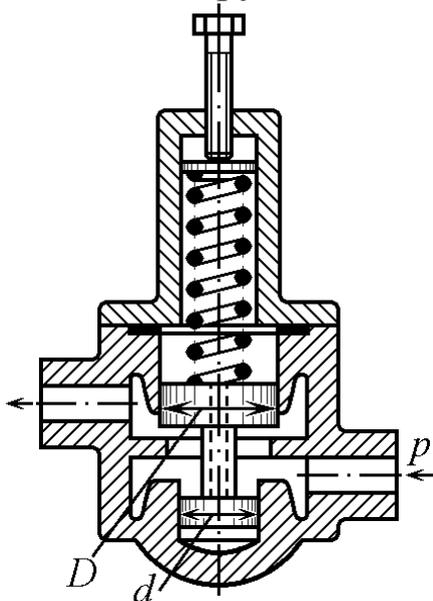


Рис. 11.10. Предохранительный клапан

Решение. Сила давления жидкости на большой поршень направлена вверх

$$R_1 = p \frac{\pi (D^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4},$$

где $d_{\text{ш}}$ – диаметр штока.

Сила давления жидкости на малый поршень направлена вниз

$$R_2 = p \frac{\pi (d^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4}.$$

Сила предварительного сжатия пружины направлена вниз

$$R_{\text{пр}} = c x.$$

В момент открытия клапана запирающий элемент находится в равновесии:

$$R_1 - R_2 - R_{\text{пр}} = 0,$$

или

$$p \frac{\pi (D^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4} - p \frac{\pi (d^2 - d_{\text{ш}}^2)}{4} - c x = 0.$$

Из этого уравнения находим искомую величину предварительного сжатия пружины:

$$x = \frac{p \pi (D^2 - d^2)}{4c} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,025^2 - 0,02^2)}{4 \cdot 45} = 19,6 \text{ мм.}$$

Пример 11. Во избежание переполнения водой резервуар снабжен клапаном с поплавком (рис. 11.11). При достижении в резервуаре определенного уровня воды всплывающий поплавок откроет сливной клапан.

Определить диаметр D цилиндрического поплавка высотой $h = 100$ мм, при котором максимальный уровень воды в резервуаре не будет превышать $H = 1,3$ м. Поплавок погружен в жидкость на $2/3$ своего объема. Вес клапана с тягой и поплавком составляет $G = 20$ Н, а диаметр седла клапана $d = 90$ мм.

В данной задаче используется *закон Архимеда* (см. п. 2.8):

$$R_A = \rho g W,$$

где W – объем погруженной части тела.

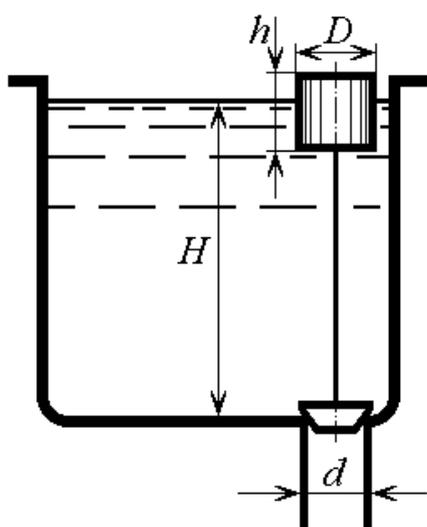


Рис. 11.11. Схема резервуара

Решение. На систему «поплавок – клапан» кроме архимедовой силы действуют сила веса системы G и сила давления воды на клапан R_K , равная

$$R_K = \rho g H \frac{\pi d^2}{4}.$$

Условие равновесия системы «поплавок – клапан» записывается в виде

$$R_A = G + R_K,$$

или $\rho g W = G + \rho g H \frac{\pi d^2}{4}.$

Из условия задачи $W = \frac{2}{3} \frac{\pi D^2}{4} h.$

Тогда искомый диаметр поплавка будет равен

$$D = \sqrt{\frac{6G}{\pi \rho g h} + \frac{3H d^2}{2h}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 20}{\pi \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,1} + \frac{3 \cdot 1,3 \cdot 0,09^2}{2 \cdot 0,1}} = 0,444 \text{ м.}$$

Пример 12. Определить избыточное давление бензина ($\rho = 750$ кг/м³), подводимого к поплавковой камере карбюратора от бензонасоса (рис. 11.12) по трубке диаметром $d = 5$ мм, если в момент открытия отверстия, перекрываемого иглой, цилиндрический поплавок ($R = 30$ мм, $h = 50$ мм) погружен в жидкость наполовину.

Масса поплавка $m_{\text{п}} = 30$ г, масса иглы $m_{\text{и}} = 15$ г, плечи рычага $a = 45$ мм, $b = 20$ мм.

Трением в шарнире и массой рычага, а также архимедовой силой, действующей на иглу, пренебречь.

Решение. В момент открытия отверстия рычаг находится в равновесии под действием:

– силы давления бензина на иглу $R = p \frac{\pi d^2}{4}$;

– веса поплавка $G_{\text{п}} = m_{\text{п}} g$;

– веса иглы $G_{\text{и}} = m_{\text{и}} g$;

– силы Архимеда, выталкивающей поплавок $R_{\text{А}} = \rho g W$,

где W – объем части поплавка (цилиндра), погруженной в жидкость,

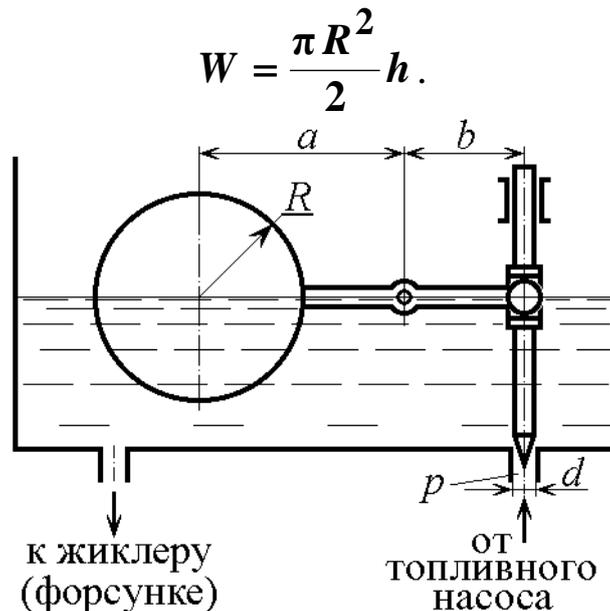


Рис. 11.12. Схема поплавковой камеры карбюратора

Условие равновесия системы обеспечивается при равенстве нулю суммы моментов действующих сил относительно оси вращения рычага

$$R_{\text{А}} a + G_{\text{и}} b - G_{\text{п}} a - R b = 0$$

или

$$\rho g \frac{\pi R^2}{2} h a + m_{\text{и}} g b - m_{\text{п}} g a - p \frac{\pi d^2}{4} b = 0.$$

Из данного уравнения находим требуемое давление

$$p = \frac{2 \rho g \pi R^2 h a + 4 m_{\text{и}} g b - 4 m_{\text{п}} g a}{\pi d^2 b} =$$

$$= \frac{2 \cdot 750 \cdot 9,81 \cdot \pi \cdot 0,03^2 \cdot 0,05 \cdot 0,045 + 4 \cdot 0,015 \cdot 9,81 \cdot 0,02 - 4 \cdot 0,03 \cdot 9,81 \cdot 0,045}{\pi \cdot 0,005^2 \cdot 0,02} =$$

$$= 33,4 \text{ кПа.}$$

Пример 13. Автомобиль-самосвал (рис. 11.13) перевозит строительный раствор ($\rho = 2550 \text{ кг/м}^3$). Кузов, имеющий длину $\ell = 3 \text{ м}$, ширину $b = 1,8 \text{ м}$ и высоту $h = 0,8 \text{ м}$, заполнен раствором на $3/4$ своей высоты.

Определить длину пути разгона L автомобиля от скорости $V_0 = 0$ до $V = 40 \text{ км/ч}$ и максимальное ускорение a , при котором раствор не выплеснется из кузова. Какое усилие при этом ускорении действует на задний борт кузова?

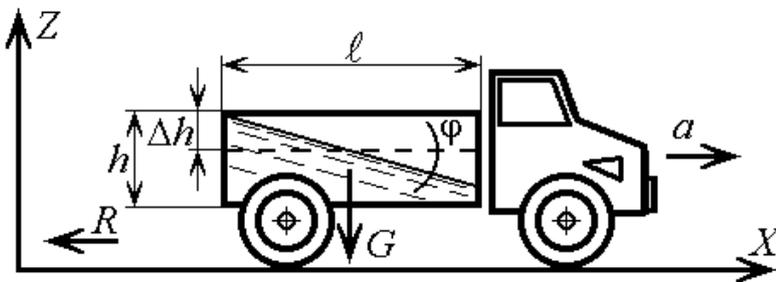


Рис. 11.13. Автомобиль-самосвал

Движение автомобиля считать прямолинейным и равноускоренным.

Решение. В данном случае на жидкость действуют две взаимно перпендикулярные силы:

тяжести G и инерции R . Закон распределения давлений описывается выражением (2.14). Для свободной поверхности будем иметь

$$z = -\frac{a}{g} x + C,$$

где $\frac{a}{g} = \text{tg}\varphi$ – тангенс угла наклона свободной поверхности жидкости к горизонту, который по условию задачи не может быть больше, чем

$$\text{tg}\varphi = \frac{\Delta h}{0,5\ell} = \frac{0,25h}{0,5\ell} = \frac{0,25 \cdot 0,8}{0,5 \cdot 3} = 0,1333.$$

Следовательно, максимальное ускорение автомобиля

$$a = g \text{tg}\varphi = 9,81 \cdot 0,1333 = 1,308 \text{ м/с}^2.$$

Длину пути разгона автомобиля находим из уравнений равноускоренного движения:

$$L = \frac{at^2}{2}, \quad V = at.$$

Тогда

$$L = \frac{V^2}{2a} = \frac{\left(\frac{40000}{3600}\right)^2}{2 \cdot 1,308} = 47,193 \text{ м.}$$

Сила давления раствора на задний борт

$$R_d = \rho g h_c S,$$

где h_c – координата центра тяжести плоскости заднего борта площадью S .

$$R_d = 2550 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,8}{2} \cdot 1,8 \cdot 0,8 = 14,4 \text{ кН.}$$

Пример 14. Открытый цилиндрический сосуд радиусом $R = 0,65$ м и высотой $H = 2,5$ м вращается вокруг своей вертикальной оси с частотой вращения $n = 2 \text{ с}^{-1}$ (рис. 11.14).

Определить максимально допустимую высоту столба жидкости в сосуде $h_{ж}$, чтобы жидкость не вылилась из него.

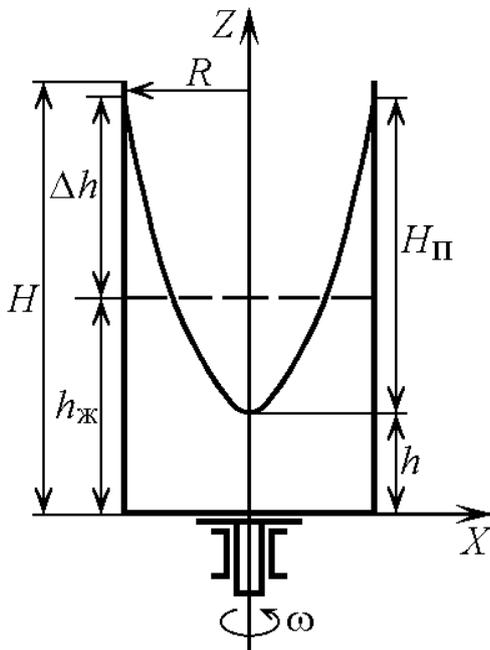


Рис. 11.14. Схема вращения сосуда с жидкостью

Решение. На жидкость в этом случае действуют две массовые силы: сила тяжести и центробежная сила (см. п. 2.4.1). Поверхности уровня представляют собой параболоиды вращения с вертикальной осью. Свободная поверхность, которая также является поверхностью уровня, описывается уравнением (2.10), а ордината h вершины параболоида вычисляется по формуле (2.11).

Решение задачи находим из условия, что объем жидкости в сосуде $W_{ж}$ остается постоянным

$$W_{ж} = W_c - W_{п},$$

где W_c – полный объем сосуда; $W_{п}$ – объем параболоида в пределах высоты $H_{п}$.

$$H_{п} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad \text{и} \quad W_{п} = \frac{\pi R^2}{2} H_{п}.$$

Тогда

$$2\pi R^2 h_{ж} = \pi R^2 H - \frac{\pi R^2}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Имея в виду, что $\omega = 2\pi n$, из этого уравнения находим $h_{ж}$:

$$h_{ж} = H - \frac{\pi^2 n^2 R^2}{g} = 2,5 - \frac{\pi^2 \cdot 2^2 \cdot 0,65^2}{9,81} = 0,8 \text{ м.}$$

11.3. Кинематика и динамика движения жидкости

11.3.1. Основные понятия. Уравнение Бернулли

При решении задач движения потока жидкости или его отдельной части прежде всего устанавливаются вид движения, который может быть установившимся и неустановившимся, равномерным и неравномерным, напорным и безнапорным, плавно изменяющимся и резко изменяющимся, ламинарным и турбулентным.

Установившимся называется такое движение жидкости, при котором скорость и давление в любой ее точке с течением времени не изменяются. При неустановившемся движении скорость и давление жидкости изменяются во времени.

Установившееся движение называется равномерным, если живые сечения потока, средние скорости и местные скорости в соответствующих точках всех живых сечений одинаковы. В противном случае движение называется неравномерным.

Напорным называется такое движение жидкости в закрытом русле, при котором поток не имеет свободной поверхности, а давление отличается от атмосферного. При безнапорном движении жидкость имеет свободную поверхность, давление во всех точках которой равно атмосферному.

Геометрической характеристикой потока является живое сечение – поверхность внутри потока, нормальная в каждой точке к соответствующей линии тока. Часть периметра живого сечения, соприкасающаяся с твердыми стенками, называется смоченным периметром (см. п. 3.1). Отношение площади S живого сечения к смоченному периметру χ называется гидравлическим радиусом [см. формулу (3.5)].

Для круглой трубы диаметром d при напорном течении гидравлический радиус равен $R_{\Gamma} = d / 4$, а для напорного потока в трубе прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$):

$$R_{\Gamma} = \frac{bh}{2(b+h)}.$$

Объемным расходом называется количество жидкости, проходящее через живое сечение потока в единицу времени. Он может быть установлен экспериментально

$$Q = W/t,$$

где W – объем мерного бака; t – время его наполнения, или вычислен по формуле

$$Q = \int_S V dS ,$$

где V – местная скорость в центре тяжести элементарной площадки площадью dS .

Расчет расхода по этой формуле для потока конечных размеров зачастую затруднен ввиду сложности определения закона изменения скорости по поперечному сечению потока. Поэтому на практике используют понятие средней скорости.

Средней скоростью V_{cp} называется такая фиктивная скорость, одинаковая для всех точек живого сечения, при которой расход, подсчитанный по формуле

$$Q = V_{cp} S ,$$

был бы равен фактическому расходу.

Если поток подчиняется условию сплошности (неразрывности) течения, то для установившегося движения соблюдается постоянство расхода через все живые сечения потока согласно формулам (3.10) или (3.11).

Динамика движения жидкости описывается дифференциальными уравнениями Навье – Стокса (5.4), которые в настоящее время могут быть решены только для ряда частных случаев.

Для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости решение уравнений Навье – Стокса можно представить в виде уравнения Бернулли (5.16), которое удобно использовать в практических расчетах.

Пример 15. Определить расход, среднюю и максимальную скорости в поперечном сечении трубопровода диаметром $d = 250$ мм (рис. 11.15), если распределение местных скоростей по сечению описывается уравнением

$$V_i = 50(r_0^2 - r^2),$$

где $r_0 = 0,5d$ – внутренний радиус трубы; r – радиус точки, в которой вычисляется скорость V_i . На каком расстоянии от оси трубы местная скорость равна средней скорости?

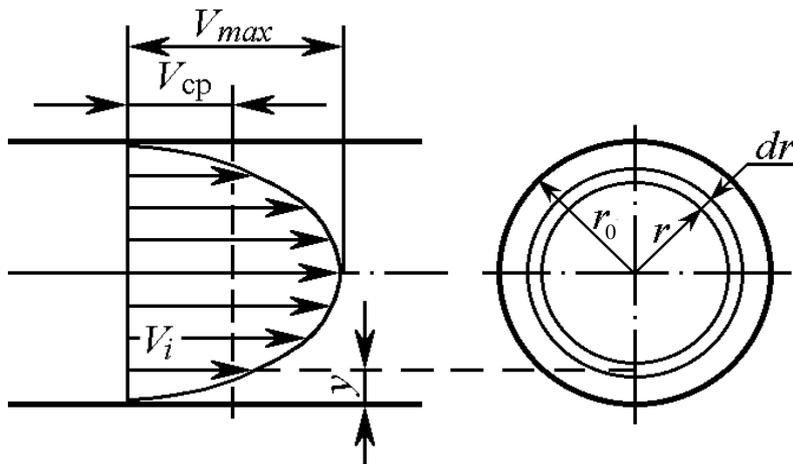


Рис. 11.15. Схема течения жидкости в трубе

Решение. Выберем элементарную площадку в виде кольца радиусом r и шириной dr . Ввиду малости площадки считаем скорости частиц жидкости во всех ее точках одинаковыми.

Площадь элементарной площадки равна $dS = 2\pi r dr$ и тогда

расход жидкости составит

$$Q = \int_S V_i dS = \int_0^{r_0} 50(r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{25}{16} \pi d^4$$

$$= \frac{25}{16} \cdot \pi \cdot 0,25^4 = 0,0192 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Средняя скорость

$$V_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,0192}{\pi \cdot 0,25^2} = 0,39 \text{ м/с}.$$

Максимальная скорость будет на оси трубы ($r = 0$)

$$V_{max} = 50r_0^2 = 50 \left(\frac{0,25}{2} \right)^2 = 0,78 \text{ м/с}.$$

Расстояние r_1 от оси трубы до точек, в которых местная скорость равна средней, определяем из условия $V_{cp} = V_i$, т. е.

$$V_{cp} = 50(r_0^2 - r_1^2).$$

Тогда

$$r_1 = \sqrt{\frac{50r_0^2 - V_{cp}}{50}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 0,125^2 - 0,39}{50}} = 0,083 \text{ м}.$$

Пример 16. По горизонтальной трубе диаметром $d_1 = 100$ мм, имеющей сужение $d_2 = 50$ мм (рис. 11.16), движется вода с расходом $Q = 10$ л/с. Определить абсолютное давление в узком сечении, если уровень воды в открытом пьезометре перед сужением $h_1 = 1,5$ м.

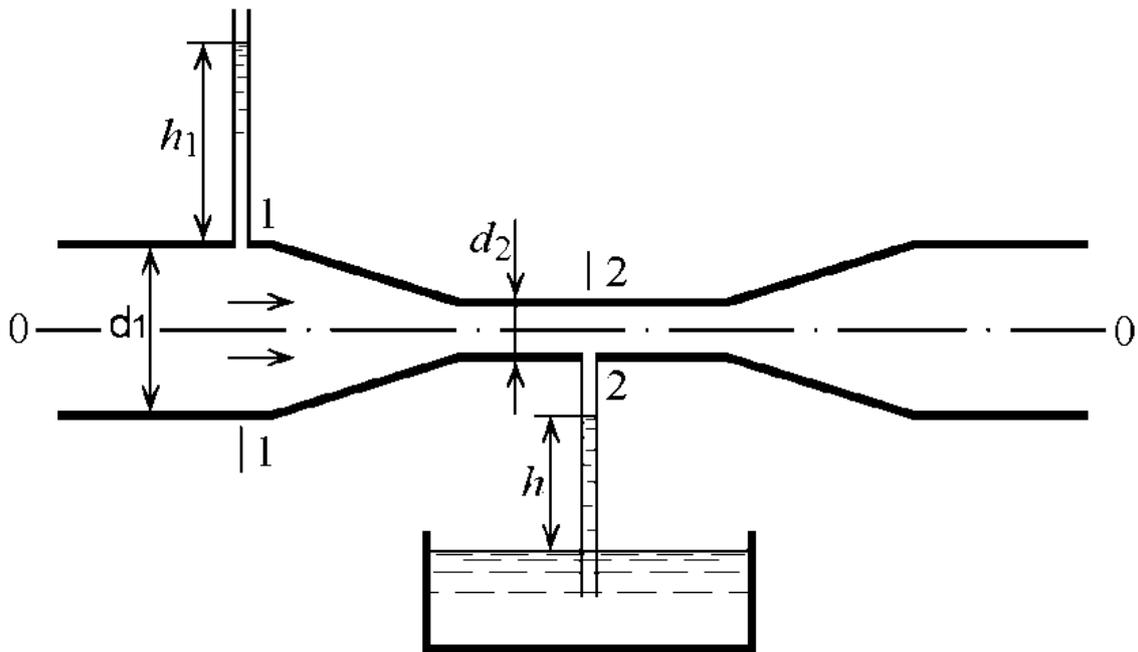


Рис. 11.16. Схема трубопровода

На какую высоту h поднимется столбик ртути ($\rho = 13600 \text{ кг/м}^3$) в пьезометре, подсоединенном в узком сечении? При каком расходе возможно возникновение явления кавитации, если температура воды составляет $20 \text{ }^\circ\text{C}$? Потерями напора пренебречь. Принять коэффициент Кориолиса $\alpha = 2$ и атмосферное давление $p_a = 0,1 \text{ МПа}$.

Решение. Применим уравнение Бернулли [см. формулу (5.16)] для участка трубы, ограниченного сечениями 1–1 и 2–2, относительно плоскости сравнения 0–0

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g} + \Sigma h_{1-2},$$

где $z_1 = z_2 = 0$; $p_1 = p_a + \rho g h_1$; $V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}$; $V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}$; $\Sigma h_{1-2} = 0$.

Тогда давление в узком сечении трубы составит

$$p_2 = \frac{8Q^2 \alpha \rho}{\pi^2} \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) + \rho g h_1 + p_a,$$

$$p_2 = \frac{8 \cdot 0,01^2 \cdot 2 \cdot 1000}{\pi^2} \left(\frac{1}{0,1^4} - \frac{1}{0,05^4} \right) + 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 + 100000 =$$

$$= 90397,92 \text{ Па.}$$

Высоту h подъема столбика ртути в пьезометре определяем из условия

$$p_2 = p_a - \rho_{\text{рт}} g h.$$

Получаем

$$h = \frac{p_a - p_2}{\rho_{рт} g} = \frac{100000 - 90397,92}{13600 \cdot 9,81} = 0,072 \text{ м.}$$

Явление кавитации (см. п. 1.3) возникает в движущейся жидкости в случае местных понижений давления до давления насыщенных паров при данной температуре. В нашем случае это в сечении 2–2.

Из справочных данных [17] находим, что при температуре воды 20 °С давление насыщенного пара составляет $p_{\text{пар}} = 2400$ Па.

В формулу для расчета p_2 вместо него подставим $p_{\text{пар}}$, откуда найдем Q :

$$Q = \sqrt{\frac{(\rho g h_1 + p_a - p_{\text{пар}}) \pi^2}{8 \alpha \rho \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right)}} = \sqrt{\frac{(1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 + 100000 - 2400) \cdot \pi^2}{8 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{1}{0,05^4} - \frac{1}{0,1^4} \right)}} = 0,0215 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Пример 17. Выходное сечение жиклера карбюратора (рис. 11.17) расположено выше уровня бензина в поплавковой камере на $\Delta h = 5$ мм, вакуум в диффузоре $p_{\text{вак}} = 12000$ Па.

Пренебрегая потерями напора, найти расход бензина Q , если диаметр жиклера $d = 1$ мм. Плотность бензина $\rho = 680 \text{ кг/м}^3$.

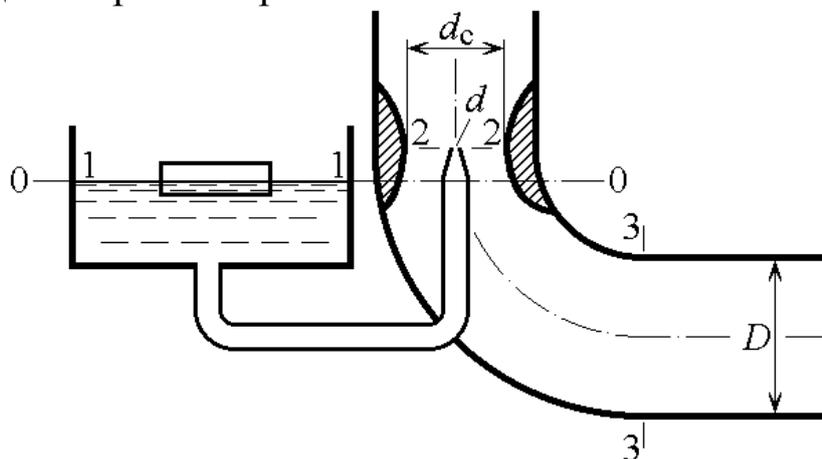


Рис. 11.17. Схема топливного жиклера

В этом случае

$$z_1 = 0; z_2 = \Delta h; p_1 = p_a; V_1 = 0; p_2 = p_a - p_{\text{вак}}; \alpha = 1,1; \Sigma h_{1-2} = 0.$$

Тогда имеем выражение

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_a - p_{\text{вак}}}{\rho g} + \Delta h + \alpha \frac{V_2^2}{2g}.$$

Решение. Применим уравнение Бернулли для участка, ограниченного сечениями 1–1 и 2–2, относительно плоскости сравнения 0–0, совпадающей со свободной поверхностью бензина в поплавковой камере.

Отсюда находим скорость истечения бензина из жиклера

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \left(\frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} - \Delta h \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{1,1} \left(\frac{12000}{680 \cdot 9,81} - 0,005 \right)} = 5,656 \text{ м/с.}$$

Расход бензина

$$Q = V_2 \frac{\pi d^2}{4} = 5,656 \frac{\pi \cdot 0,001^2}{4} = 4,44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с} = 444 \text{ см}^3/\text{с.}$$

11.3.2. Гидравлические сопротивления. Режимы течения

В приведенных выше примерах потерями пренебрегали ввиду их очевидной малости. В реальных гидравлических системах, содержащих длинные участки трубопроводов и устройства (аппараты), пренебрегать потерями уже нельзя.

Гидравлические потери принято разделять на местные потери и потери по длине (см. п. 5.4), которые рассчитываются соответственно по формулам Вейсбаха (5.20) и Дарси – Вейсбаха (5.22). Особенности течения жидкости по трубопроводам при разных режимах течения рассмотрены в п. 7.1 и п. 7.4.2.

Пример 18. По трубе длиной $L = 6,5$ м и диаметром $d = 15$ мм качают бензин ($\rho = 700 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0,93 \text{ мм}^2/\text{с}$) с расходом $Q = 0,9$ л/с.

Определить потери давления в трубе, имеющей относительную шероховатость $\Delta = 0,12$ мм.

Решение. Скорость движения жидкости по трубе

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,0009}{\pi \cdot 0,015^2} = 5,093 \text{ м/с.}$$

Режим течения жидкости в трубе определим по числу Рейнольдса, вычисляемому по формуле (6.13):

$$\text{Re} = \frac{V d}{\nu} = \frac{5,093 \cdot 0,015}{0,00000093} = 82144,487 > 2320 = \text{Re}_{\text{кр}},$$

т. е. имеем турбулентный режим.

В этом случае для определения коэффициента Дарси используем формулу Альтшуля (7.30):

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}}} = 0,11 \cdot 4 \sqrt{\frac{0,12}{15} + \frac{68}{82144,487}} = 0,03372.$$

Потери давления в трубе определяем по формуле (5.22):

$$\Delta p = \rho g h_{\text{тр}} = \rho g \lambda \frac{L V^2}{d 2g} = 700 \cdot 9,81 \cdot 0,03372 \frac{6,5}{0,015} \frac{5,093^2}{2 \cdot 9,81} = 132655,4 \text{ Па.}$$

Пример 19. Определить потери напора в системе охлаждения двигателя внутреннего сгорания (рис. 11.18), включающей в себя центробежный насос, радиатор ($\xi_1 = 5$), термостат ($\xi_2 = 3$), трубопроводы ($\xi_3 = 1,5$) и водяную рубашку двигателя ($\xi_4 = 4,5$), если расход воды $Q = 4,2$ л/с. Трубопроводы диаметром $d = 50$ мм имеют суммарную длину $L = 1,5$ м и относительную шероховатость стенок $\Delta = 0,1$ мм.

Кинематический коэффициент вязкости охлаждающей жидкости $\nu = 0,55$ мм²/с.

Все коэффициенты местных сопротивлений отнесены к скорости в трубопроводе.

Решение. Расчетная скорость жидкости в системе

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,0042}{\pi \cdot 0,05^2} = 2,14 \text{ м/с.}$$

Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{V d}{\nu} = \frac{2,14 \cdot 0,05}{0,0000055} = 194545,45 > 2320 = \text{Re}_{\text{кр}},$$

т. е. имеем турбулентный режим.

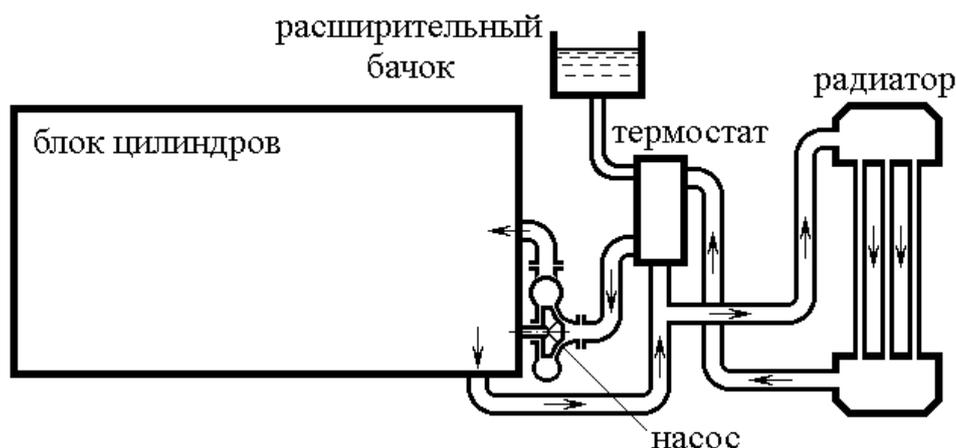


Рис. 11.18. Схема системы охлаждения двигателя

Коэффициент Дарси

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}}} = 0,11 \cdot 4 \sqrt{\frac{0,1}{50} + \frac{68}{194545,45}} = 0,0242.$$

Потери напора в системе охлаждения

$$h_{\text{п}} = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \lambda \frac{L}{d}) \frac{V^2}{2g} =$$

$$= (5 + 3 + 1,5 + 4,5 + 0,0242 \frac{1,5}{0,05}) \frac{2,14^2}{2 \cdot 9,81} = 3,437 \text{ м.}$$

11.4. Гидравлический расчет трубопроводов

Основные теоретические положения и зависимости по данному вопросу приведены в 9-й главе данного учебного пособия.

При практических расчетах простых трубопроводов встречаются следующие типовые задачи.

Задача 1. Требуется определить расход жидкости Q при заданных: длине рассматриваемого участка трубопровода (L), диаметре (d) и относительной шероховатости стенок (Δ) трубы, отметок высот (z_1 и z_2) и давлений (p_1 и p_2), соответственно начального и конечного сечений рассматриваемого участка, а также местных сопротивлений ($\Sigma \xi$).

При такой постановке задачи возникают затруднения в определении коэффициента Дарси (λ), который в общем случае зависит от числа Рейнольдса, а значит и от скорости. Поэтому схема расчета следующая.

1. Зададимся определенной точностью расчетов.
2. Из формулы (9.2) выразим скорость движения жидкости по трубопроводу:

$$V = \sqrt{\frac{2g h_{1-2}}{\lambda \frac{L}{d} + \Sigma \xi}}.$$

Для расчета по этой формуле принимается

$$h_{1-2} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right),$$

а коэффициент Дарси вычисляется по формуле Альтшуля (7.30).

3. По полученному значению скорости вычисляем число Рейнольдса и новое значение коэффициента Дарси.

4. Снова вычисляем скорость движения жидкости по трубопроводу.

5. Повторяем вычисления по пунктам 3 и 4 до тех пор, пока последнее значение скорости не будет отличаться от предыдущего с заданной точностью расчетов.

Задача 2. Заданы: расход жидкости (Q), геометрические размеры трубопровода (L , d , Δ), отметки высот (z_1 и z_2), местные сопротив-

ления ($\Sigma \xi$) и давление в конечном сечении трубопровода (p_2). Требуется найти давление в начальном сечении трубопровода (p_1).

Решение. Сначала определяют скорость жидкости в трубопроводе V , число Рейнольдса Re , область гидравлического сопротивления, коэффициент Дарси λ и потери напора h_{1-2} .

Из уравнения (9.1) находят давление p_1 .

Задача 3. Определить диаметр трубопровода, при котором расход жидкости равен Q , если заданы давления (p_1 и p_2), отметки высот (z_1 и z_2), местные сопротивления ($\Sigma \xi$), длина трубопровода L и относительная шероховатость его стенок Δ .

Решение. В уравнении (9.1) неизвестными в этом случае являются диаметр трубопровода и коэффициент Дарси. Поэтому искомый диаметр трубопровода может быть найден способом последовательных приближений, аналогично как в задаче 1.

Пример 20. Всасывающий трубопровод насоса имеет длину $L = 5$ м и диаметр $d = 32$ мм, высоту всасывания $H_B = 0,8$ м (рис. 11.19). Определить давление в конце трубопровода (перед насосом), если расход масла ($\rho = 890$ кг/м³, $\nu = 10$ мм²/с) $Q = 50$ л/мин, коэффициент сопротивления колена $\xi_K = 0,3$, вентиля $\xi_B = 4,5$, фильтра $\xi_F = 10$.

Решение. Определяем скорость и число Рейнольдса

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,000833}{\pi \cdot 0,032^2} = 1,036 \text{ м/с}, \quad Re = \frac{V d}{\nu} = \frac{1,036 \cdot 0,032}{0,00001} = 3315,2.$$

Коэффициент Дарси вычислим по формуле Блазиуса (7.28)

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{3315,2}} = 0,042.$$

Сумма коэффициентов местных сопротивлений

$$\Sigma \xi = \xi_F + 2\xi_K + \xi_B = 10 + 2 \cdot 0,3 + 4,5 = 15,1.$$

Потери напора во всасывающем трубопроводе

$$\begin{aligned} h_{II} &= (\Sigma \xi + \lambda \frac{L}{d}) \frac{V^2}{2g} = \\ &= (15,1 + 0,042 \frac{5}{0,032}) \frac{1,036^2}{2 \cdot 9,81} = 1,2 \text{ м.} \end{aligned}$$

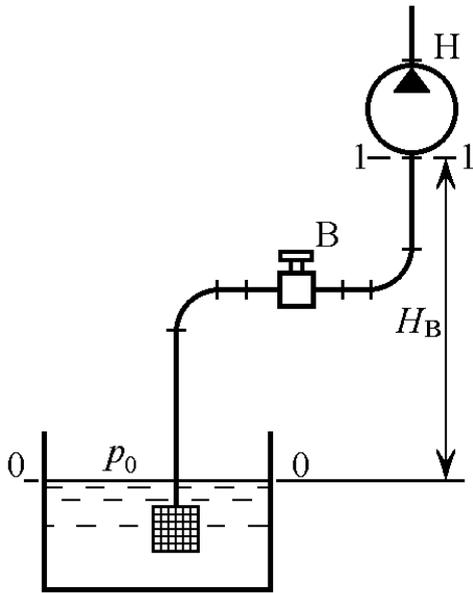


Рис. 11.19. Схема всасывающего трубопровода

Запишем уравнение Бернулли для сечений 0–0 и 1–1 (плоскостью сравнения является сечение 0–0)

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_0 + \alpha \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} + h_{\Pi},$$

где $z_0 = 0$; $z_1 = H_{\text{в}}$; $V_0 = 0$; $h_{\Pi} = 1,2$;

$V_1 = 1,036 \text{ м/с}$; $p_0 = p_{\text{а}} = 10^5 \text{ Па}$.

Считая $\alpha \approx 1$, находим давление перед насосом

$$p_1 = p_{\text{а}} - \rho g(H_{\text{в}} + h_{\Pi}) - \frac{\rho}{2} V_1^2,$$

$$p_1 = 100000 - 890 \cdot 9,81(0,8 + 1,2) - \frac{890}{2} 1,036^2 = 82000 \text{ Па}.$$

Пример 21. На рис. 11.20, а изображена объемная гидропередача, предназначенная для подъема груза G . Рабочая жидкость из бака всасывается насосом Н по трубопроводу 1 и подается по нагнетающей линии, состоящей из трубопроводов 2, 3 и 4, обратного клапана ОК и гидрораспределителя Р, в поршневую полость гидроцилиндра ГЦ. Происходит подъем груза.

При переводе гидрораспределителя Р в левую позицию поршневая полость гидроцилиндра ГЦ соединяется сливной линией (трубопроводы 5 и б) с баком. Осуществляется опускание груза. Насос в этот момент также соединен со сливом, т. е. разгружен от давления.

Рабочая жидкость – минеральное масло И-ЛГ-А-22 с плотностью $\rho = 880 \text{ кг/м}^3$ и кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = 12 \text{ мм}^2/\text{с}$.

Подача насоса $Q = 94 \text{ л/мин} = 0,00157 \text{ м}^3/\text{с}$, общая длина трубопроводов 2, 3 и 4 $L = 7,5 \text{ м}$, относительная шероховатость стенок труб $\Delta = 0,1 \text{ мм}$.

Коэффициенты сопротивления: колена $\xi_{\text{к}} = 0,35$, обратного клапана $\xi_{\text{ок}} = 2$, гидрораспределителя $\xi_{\text{р}} = 2,5$, штуцера на входе в гидроцилиндр $\xi_{\text{ш}} = 1$.

Определить диаметр трубопроводов 2, 3 и 4 при условии, что потеря давления в напорной гидролинии не должна превышать $\Delta p = 0,15 \text{ МПа}$. Вертикальным расстоянием между насосом и гидроцилиндром пренебречь.

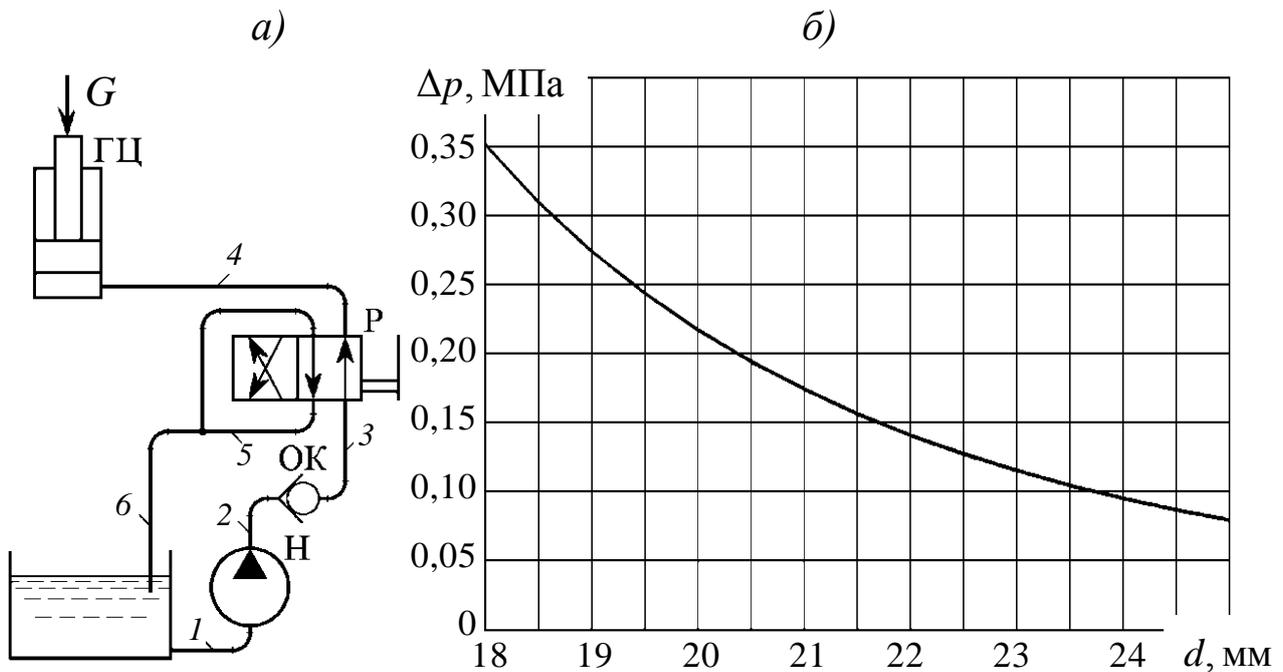


Рис. 11.20. Схема объемной гидропередачи

Решение. Для условий данной задачи уравнение Бернулли принимает вид

$$\Delta p = \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum \xi \right) \frac{\rho}{2} V^2.$$

Из этого выражения диаметр трубы d найдем графоаналитическим способом. Для этого задаемся рядом диаметров d и последовательно вычисляем:

- скорость течения масла $V = \frac{4Q}{\pi d^2},$

- число Рейнольдса $Re = \frac{V d}{\nu},$

- коэффициент Дарси $\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re}}$ и потери давления Δp

по формуле, приведенной выше.

Результаты расчетов сводим в табл. 11.1.

Таблица 11.1

$d,$ мм	$V,$ м/с	Re	λ	$\Delta p,$ МПа	$d,$ мм	$V,$ м/с	Re	λ	$\Delta p,$ МПа
18	6,17	9254,56	0,0349	0,3532	22	4,13	7571,92	0,0358	0,1408
19	5,54	8767,48	0,0351	0,2754	23	3,78	7242,70	0,0361	0,1151
20	4,99	8329,11	0,0353	0,2176	24	3,47	6940,92	0,0363	0,0948
21	4,53	7932,48	0,0356	0,1741	25	3,2	6663,29	0,0366	0,0788

По данным таблицы строим график $\Delta p = f(d)$ (см. рис. 11.20, б).

Из графика находим, что диаметр трубы, отвечающий условию задачи, не может быть меньше $d = 21,75$ мм. Ориентируясь на сортамент стальных бесшовных холоднодеформированных труб, используемых в объемном гидроприводе, выбираем ближайший больший диаметр трубы.

На практике, как правило, имеют дело с различными вариантами соединений простых трубопроводов. В этом случае их называют сложными. Наиболее распространенными вариантами являются: последовательное и параллельное соединения (см. п. 9.2).

При последовательном соединении трубопроводов основными расчетными зависимостями являются уравнения (9.9), а при параллельном соединении – уравнения (9.14). В обоих случаях расчет приходится вести способом последовательных приближений или графоаналитическим способом.

Пример 22. Из резервуара-хранилища (рис. 11.21, а) заливается бензин ($v = 0,8$ мм²/с) по трубопроводу, состоящему из последовательного соединения труб диаметром $d_1 = 50$ мм и $d_2 = 32$ мм, в железнодорожную цистерну вместимостью $W = 2700$ л. Первая труба имеет длину $L_1 = 25$ м, два колена и вентиль, а вторая имеет длину $L_2 = 35$ м, одно колено и вентиль. Коэффициенты сопротивления колена и вентиля равны соответственно $\xi_k = 0,8$ и $\xi_v = 7,5$.

Определить время наполнения цистерны бензином.

Решение. Время наполнения цистерны $T = W/Q$ зависит от расхода, а значит и от скорости течения бензина, которая зависит от сопротивления трубопровода. Поскольку в общем случае коэффициент Дарси зависит от числа Рейнольдса, а значит и от скорости течения, то задачу будем решать графоаналитическим способом.

Уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 относительно плоскости сравнения 0–0 для заданных условий

$$V_1 = 0; a_1 = p_2 = p_a; z_1 = H; z_2 = 0.$$

примет вид $H = h_{п1} + h_{п2}$, где $h_{п1}$ и $h_{п2}$ – потери напора в соответствующей трубе.

Учтем потери напора на входе в трубопровод ($\xi_{вх} = 0,5$) и на выходе из него ($\xi_{вых} = 1,0$), а также вычислим потери напора на внезапном сужении:

$$\xi_c = 0,5 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right] = 0,5 \left[1 - \left(\frac{32}{50} \right)^2 \right] = 0,3.$$

a)

б)

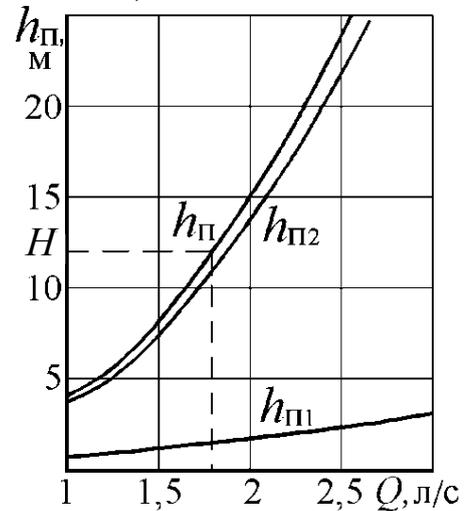
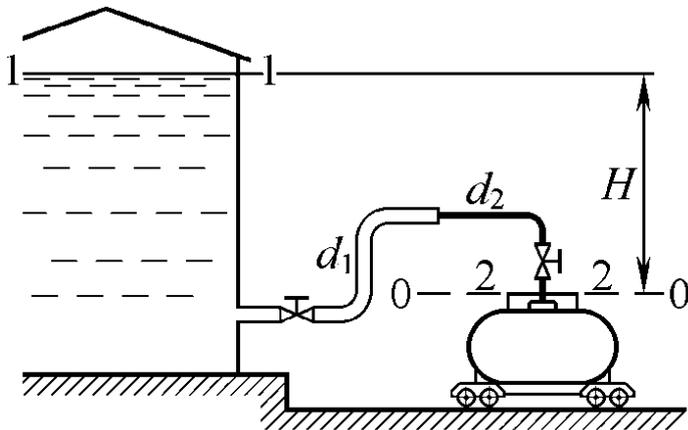


Рис. 11.21. Схема последовательного соединения трубопроводов

Тогда расчетные зависимости потерь напора в трубах

$$h_{п1} = \left(\xi_{вх} + 2\xi_{к} + \xi_{в} + \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \right) \frac{8Q^2}{g \pi^2 d_1^2};$$

$$h_{п2} = \left(\xi_c + \xi_{к} + \xi_{в} + \xi_{вых} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \right) \frac{8Q^2}{g \pi^2 d_2^2}.$$

Подставим известные величины в эти выражения:

$$h_{п1} = (66,2\lambda_1 + 1,27) \cdot 10^5 Q^2; \quad h_{п2} = (864\lambda_2 + 7,58) \cdot 10^5 Q^2.$$

Задаваясь расходом Q , последовательно вычисляем в соответствующей трубе скорость движения бензина, число Рейнольдса, коэффициент Дарси и потери напора. Результаты расчета сводим в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Труба	Q , л/с	V , м/с	Re	λ	$h_{п}$, м
1	1	0,51	31800	0,031	0,33
	2	1,02	62600	0,029	1,28
	3	1,53	95400	0,029	2,87
2	1	1,24	49800	0,033	3,57
	2	2,49	99600	0,031	13,7
	3	3,73	149000	0,031	31,2

По полученным данным строим графики зависимостей потери напора $h_{п1} = f(Q)$, $h_{п2} = f(Q)$ и $h_{п} = h_{п1} + h_{п2}$ (см. рис. 11.21, б).

С помощью графика $h_{п} = f(Q)$ по заданному значению $H = 12$ м находим расход бензина: $Q = 1,8$ л/с.

Время наполнения цистерны $T = \frac{W}{Q} = \frac{2700}{1,8} = 1500$ с = 25 мин.

Пример 23. Горизонтальный трубопровод состоит (рис. 11.22, а) из трубы 1 ($d_1 = 32$ мм, $L_1 = 6$ м), труб 2 и 3 ($d_2 = 16$ мм, $L_2 = 8$ м, $d_3 = 20$ мм, $L_3 = 5,9$ м), образующих разветвление, и трубы 4 ($d_4 = 32$ мм, $L_4 = 8$ м). Насос, установленный в начале трубопровода, создает избыточное давление $p_A = 130$ кПа. В конце трубопровода избыточное давление составляет $p_B = 10$ кПа.

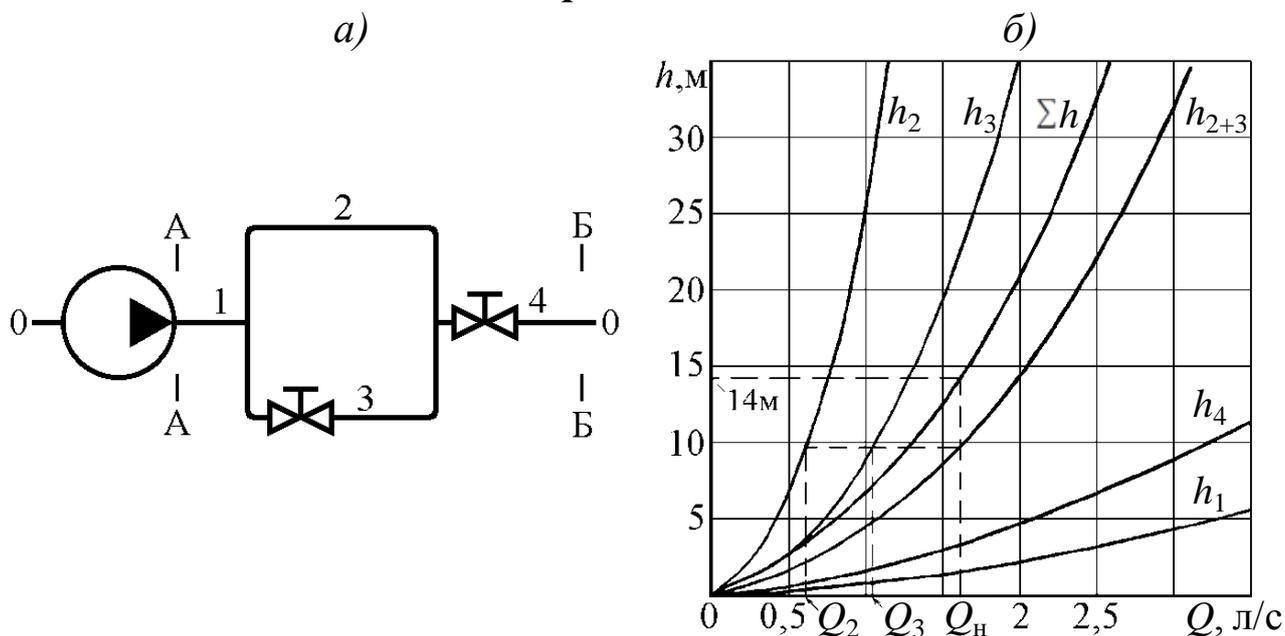


Рис. 11.22. Схема трубопровода с разветвлением

Перекачивается жидкость плотностью $\rho = 880$ кг/м³ с кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = 20$ мм²/с.

Определить подачу насоса и расход жидкости в отдельных частях. В расчетах учесть только сопротивления вентилях ($\xi_B = 4$).

Решение. Уравнение Бернулли для сечений А–А и Б–Б относительно плоскости сравнения 0–0 для данных условий задачи ($z_A = z_B = 0$; $V_1 = V_2$, т. к. $d_1 = d_4$) примет вид

$$h_{\Sigma} = h_1 + h_{2+3} + h_4 = \frac{p_A - p_B}{\rho g} = \frac{13000 - 1000}{880 \cdot 9,81} = 14 \text{ м,}$$

где h_{2+3} – суммарные потери напора разветвленной части трубопровода.

Потери напора по трубам описываются зависимостями

$$h_1 = \lambda_1 \frac{L_1 V_A^2}{d_1 2g}; \quad h_2 = \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{d_2 2g}; \quad h_3 = (\zeta_B + \lambda_3 \frac{L_3}{d_3}) \frac{V_3^2}{2g};$$

$$h_4 = (\zeta_B + \lambda_4 \frac{L_4}{d_4}) \frac{V_B^2}{2g}.$$

Порядок расчета в данном примере во многом аналогичен порядку расчета предыдущего примера. Поэтому подробнее остановимся только на порядке определения коэффициента Дарси (λ), поскольку задаваясь в начале расчетов малыми значениями расхода, с большой долей вероятности будем иметь ламинарный режим течения в какой-либо трубе. С увеличением расхода режим течения может стать турбулентным. Это влечет за собой необходимость более тщательного выбора формулы для определения коэффициента Дарси. Так, при ламинарном режиме течения коэффициент λ при расчете трубопроводов объемных гидropередач вычисляют не по формуле (6.39), а используют формулу $\lambda = A/Re$ ($A = 75$ для стальных труб и $A = 150$ для гибких рукавов).

Объясняется это тем, что в объемных гидropередачах используются стальные бесшовные холоднодеформированные трубы, а не водогазопроводные сварные. При турбулентном режиме течения для области гидравлически гладких труб ($3000 < Re < 20d/\Delta$) применяется формула Блазиуса (6.41).

В переходной области турбулентного течения ($20d/\Delta < Re < 500d/\Delta$) применяется формула Альтшуля (7.28).

В квадратичной области сопротивления (область гидравлически шероховатых труб) применяют формулу Шифринсона

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d}}.$$

Подробности можно найти в п. 7.4.2.

Результаты расчетов по данному примеру сведены в табл. 11.3.

По данным таблицы строим графики зависимостей потерь напора по трубам $h_1 = f(Q)$, $h_2 = f(Q)$, $h_3 = f(Q)$ и $h_4 = f(Q)$ (см. рис. 11.22, б).

Путем сложения абсцисс кривых $h_2 = f(Q)$ и $h_3 = f(Q)$ строим график суммарных потерь напора разветвленной части трубопровода $h_{2+3} = f(Q)$, а складывая ординаты кривых $h_1 = f(Q)$,

$h_{2+3} = f(Q)$ и $h_4 = f(Q)$ получаем график суммарных потерь напора всего трубопровода $h_{\Sigma} = f(Q)$.

Таблица 11.3

Труба	Q , л/с	V , м/с	Re	Формула для λ	λ	h_i , м
1	1,5	1,87	2990	Блазиуса	0,043	1,26
	2,0	2,49	3980		0,040	2,06
	2,5	3,11	4980		0,038	3,02
2	0,5	2,49	1990	Ламинарный режим	0,032	5,06
	0,75	3,73	2980	Блазиуса	0,043	15,30
	1,0	4,98	3980		0,040	25,30
3	0,6	1,91	1910	Ламинарный режим	0,034	2,61
	1,0	3,18	3180	Блазиуса	0,042	8,46
	1,4	4,46	4400		0,039	15,74
4	1,5	1,87	2990	Блазиуса	0,043	2,63
	2,0	2,49	3980		0,040	4,43
	2,5	3,11	4980		0,038	6,66

По известному значению суммарных потерь напора $h_{\Sigma} = 14$ м с помощью графика $h_{\Sigma} = f(Q)$ находим подачу насоса (полный расход жидкости в трубопроводе) $Q_n = 1,65$ л/с, а по графикам $h_2 = f(Q)$ и $h_3 = f(Q)$ – расходы в отдельных ветвях $Q_2 = 0,6$ л/с, $Q_3 = 1,05$ л/с.

Пример 24. На рис. 11.24 приведена схема водоснабжения населенного пункта, которая представляет собой разветвленный трубопровод.

Исходные данные:

1) перекачиваемая жидкость – вода ($\nu = 0,00000118$ м²/с, $\rho = 1000$ кг/м³);

2) характеристики трассы трубопроводов:

- геометрические высоты $Z_1 = 8$ м; $Z_2 = 2$ м; $Z_3 = -5$ м;

- расчетные длины трубопроводов $L_1 = 500$ м; $L_2 = 70$ м; $L_3 = 100$ м [см. формулу (9.6)];

3) параметры у потребителей $p_1 = p_2 = p_3 = 200000$ Па;

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 20$ л/мин = $0,000333$ м³/с;

4) используемые трубы – стальные водогазопроводные по ГОСТ 3262–75 (табл. 11.4), $\Delta = 0,00015$ м – шероховатость используемых труб;

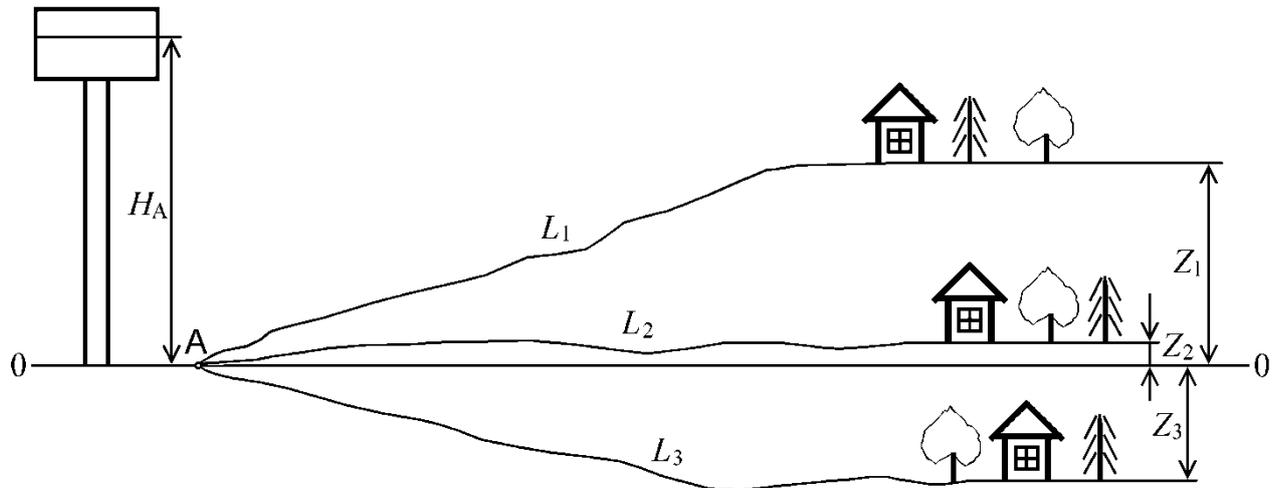


Рис. 11.24. Схема водоснабжения

Таблица 11.4

Условный проход d_y , мм	Наружный диаметр d_n , мм	Толщина стенки δ , мм		
		легкие	обыкновенные	усиленные
6	10,2	1,8	2,0	2,5
8	13,5	2,0	2,2	2,8
10	17,0	2,0	2,2	2,8
15	21,3	2,5	2,8	3,2
20	26,8	2,5	2,8	3,2
25	33,5	2,8	3,2	4,0
32	42,3	2,8	3,2	4,0
40	48,0	3,0	3,5	4,0
50	60,0	3,0	3,5	4,5
65	75,5	3,2	4,0	4,5
80	88,5	3,5	4,0	4,5
90	101,3	3,5	4,0	4,5

Решение. Принимаем трубы:

- для 1-й линии – труба 25×3,2, ГОСТ3262–75 с внутренним диаметром $d_1 = 0,0271$ м;

- для 2-й линии – труба 20×2,8, ГОСТ3262–75 с внутренним диаметром $d_2 = 0,0212$ м;

- для 3-й линии – труба 20×2,8, ГОСТ3262–75 с внутренним диаметром $d_3 = 0,0212$ м.

Устанавливаем возможный режим течения.

Для удобства строим график зависимости для приведенного сортамента труб (рис. 11.25)

$$\text{Re} = \frac{V_i d_i}{\nu} = \frac{4Q_i}{\pi d_i \nu}$$

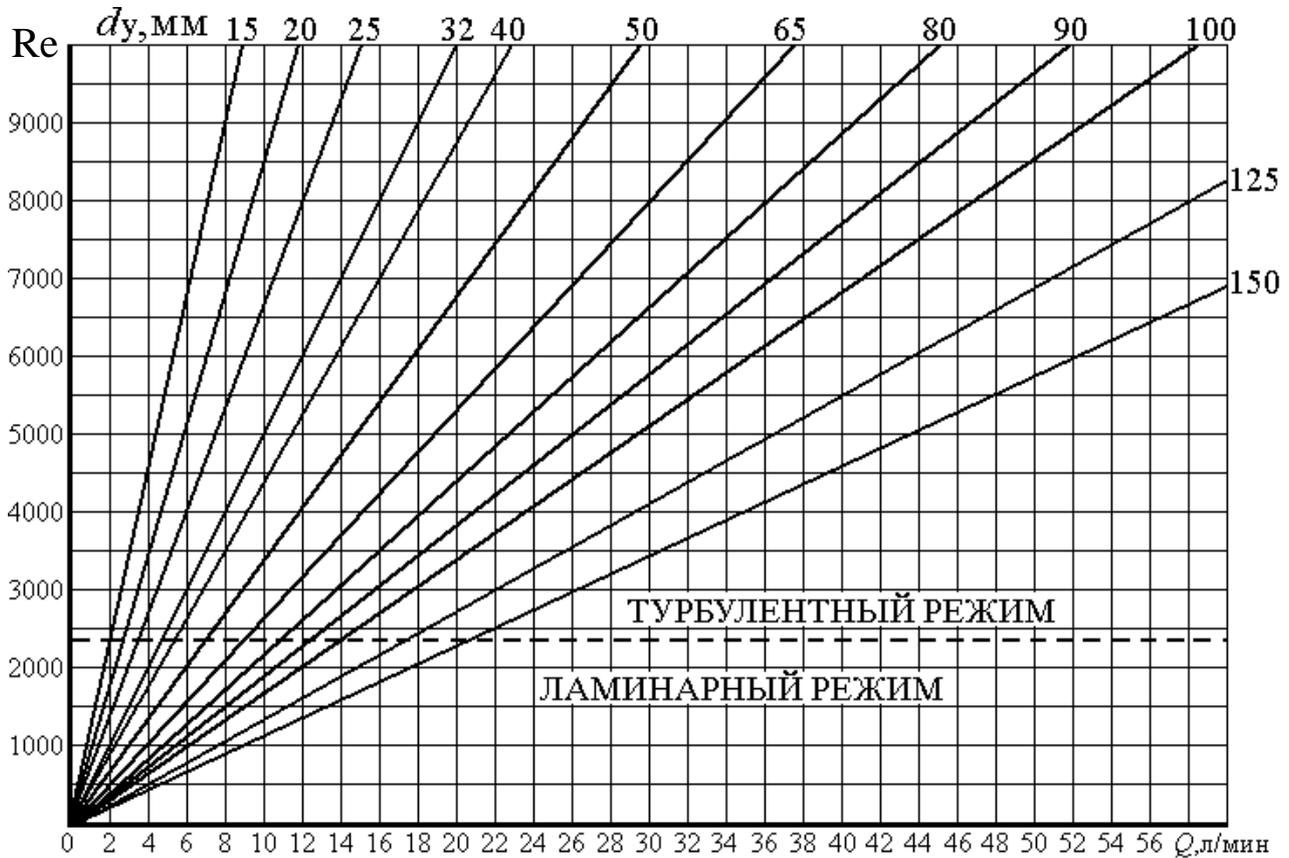


Рис. 11.25. Зависимость числа Рейнольдса от диаметра трубы (d_y) и расхода в ней (Q)

Из графика следует, что при желаемом расходе $Q_i = 20$ л/мин будет турбулентный режим.

Для расчета λ используем формулу Альтшуля

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}}}$$

Для 1-й линии – $\lambda_1 = 0,0353484$; для 2-й и 3-й линий – $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,0356945$.

Последовательно вычисляем для каждого трубопровода:

сопротивление $A_i = \frac{8\lambda_i L_i}{g \pi^2 d_i^5}$

и требуемый напор $H_{\text{треби}} = Z_i + \frac{p_i}{\rho g} + A_i Q^2$.

Результаты расчетов представляем в виде графиков (рис. 11.26).

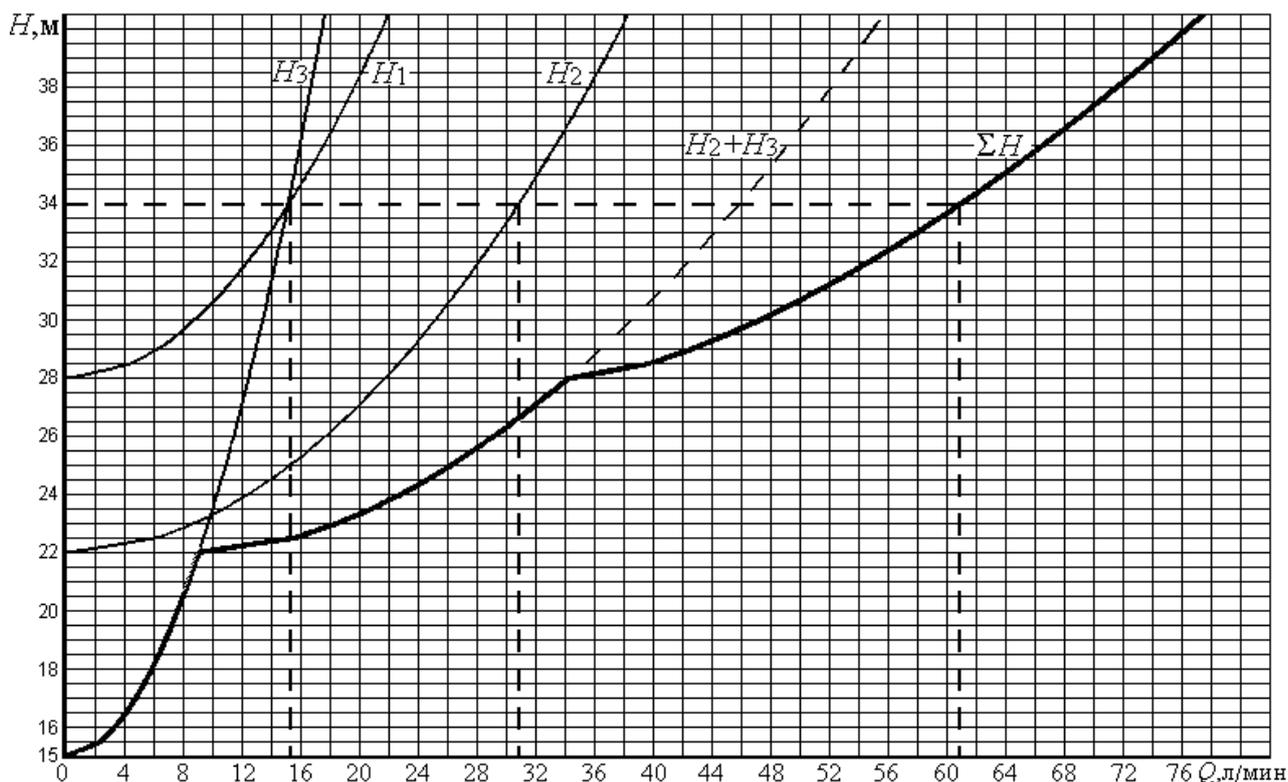


Рис. 10.26. Напорные характеристики трубопроводов рассматриваемой задачи

Графики потребных напоров для отдельных ветвей обозначены соответственно H_1 , H_2 и H_3 , а график потребного напора для всего разветвления ΣH . График ΣH получен путем сложения расходов ветвей при одинаковых напорах.

Из графика видно, что потребители будут получать разное количество воды. Так при $\Sigma H = H_A = 34$ м расход в 1-й и 3-й линии составит 15,5 л/мин, во 2-й – 30,8 л/мин.

Если будет $\Sigma H = H_A \leq 28$ м, то расход в 1-й линии будет равен нулю.

Для получения равных расходов во всех линиях необходимо обеспечить условие $H_1 = H_2 = H_3$ при заданном расходе $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 20$ л/мин. Это можно получить путем прикрытия вентилей на входе в соответствующие трубопроводы (увеличивается L_i).

В нашем примере сопротивление в 1-й линии наибольшее. Поэтому вентиль на входе в нее оставляем полностью открытым ($L_1 = 500$ м). Прикрываем вентили на линиях 2 и 3 так, чтобы обеспечить приведенное выше условие. Расчеты показывают, что должно быть $L_2 = 225$ м и $L_3 = 320$ м. Графики напорных характеристик трубопроводов в этом случае пересекаются в одной точке $Q = 20$ л/мин $H = 39$ м (рис. 11.27).

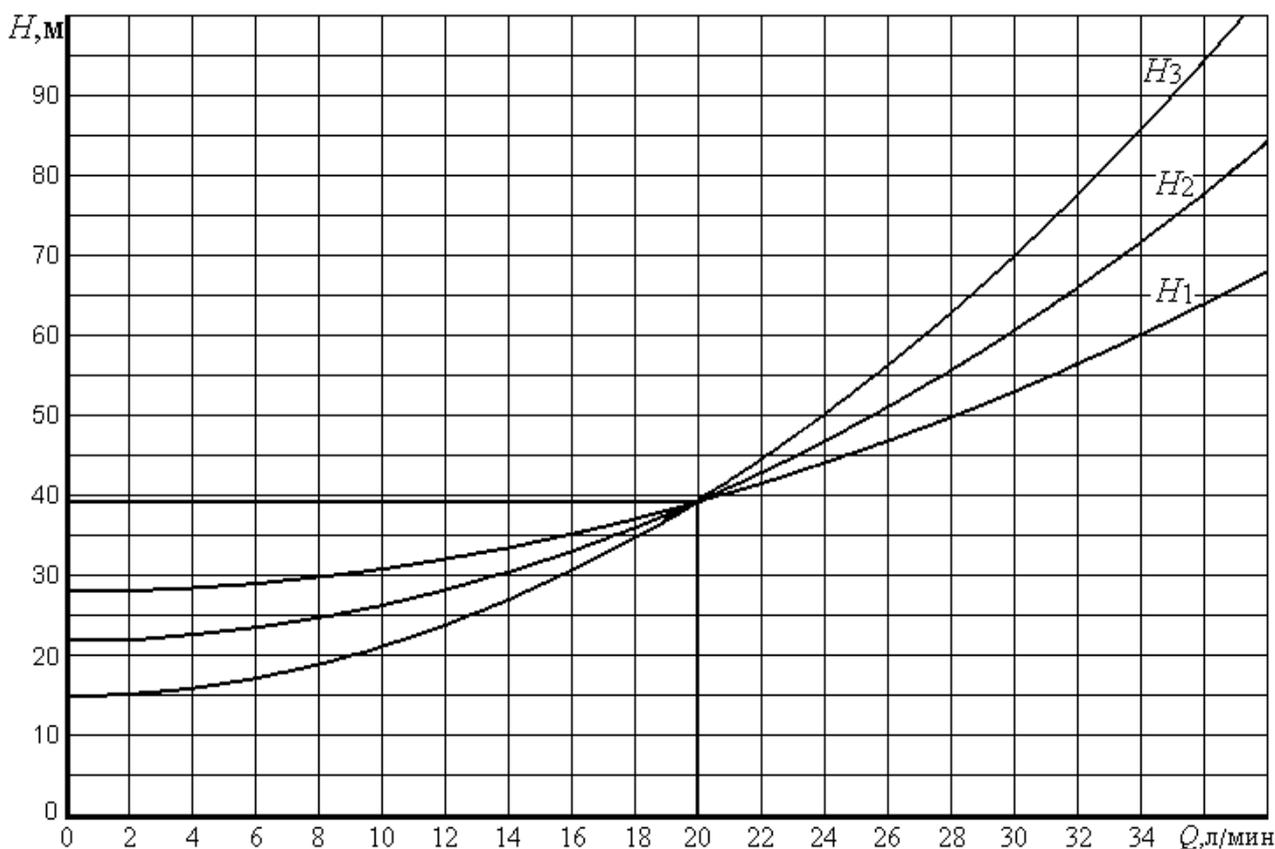


Рис. 10.27. Напорные характеристики трубопроводов с равным расходом в них

Следует отметить, что требуемый результат достигнут за счет увеличения сопротивлений трубопроводов 2 и 3. Как следствие этого, требуемый напор ΣH увеличился и составил 39 м.

11.5. Гидравлический удар в трубах

Гидравлический удар – явление резкого повышения давления, возникающего при напорном движении жидкости в трубе при быстром изменении скорости потока в одном из сечений. Он может возникнуть при быстром закрытии или открытии запорных и регулирующих устройств и при внезапной мгновенной остановке насоса.

Основные теоретические положения, описывающие данное явление, изложены в п. 9.4.

Отрицательные последствия гидравлического удара выражаются в разрушении трубопроводов и других устройств гидросистемы. Поэтому при проектировании гидросистем следует предусматривать меры по снижению вероятности появления гидравлического удара

и производить расчеты на прочность трубопроводов и других устройств гидросистемы с учетом этого явления.

Пример 25. Стальная труба диаметром $d = 150$ мм с толщиной стенок $\delta = 4$ мм может подвергнуться прямому гидравлическому удару. Скорость течения воды в трубе $V = 5$ м/с, а давление до удара $p = 0,3$ МПа.

Произвести проверку на прочность трубы, если объемный модуль упругости воды $E_{\text{в}} = 2000$ МПа, объемный модуль упругости стали $E_{\text{с}} = 200000$ МПа, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, допустимое напряжение на растяжение для стали $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение. Определяем скорость распространения ударной волны по формуле (9.33)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{ж}}} + \frac{\rho d}{\delta E_{\text{с}}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1000}{2 \cdot 10^9} + \frac{1000 \cdot 150}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11}}}} = 1206 \text{ м/с.}$$

Повышение давления при гидравлическом ударе определяем по формуле Жуковского (8.25):

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho V c = 1000 \cdot 5 \cdot 1206 = 6,03 \text{ МПа.}$$

Полное давление жидкости

$$p_{\text{п}} = p + \Delta p_{\text{уд}} = 0,3 + 6,03 = 6,33 \text{ МПа.}$$

Сила, разрывающая трубу по диаметральному сечению, воспринимается двумя стенками (см. рис. 11.7):

$$p d L = 2 \sigma L \delta.$$

Откуда напряжение в стенке трубы

$$\sigma = \frac{p_{\text{п}} d}{2 \delta} = \frac{6,33 \cdot 150}{2 \cdot 4} = 118,7 < 150 \text{ МПа.}$$

Следовательно, прочность трубы достаточна.

Пример 26. От насоса H (рис. 11.28) к распределителю P по трубопроводу длиной $L = 7,5$ м и диаметром $D = 16$ мм подводится жидкость (минеральное масло И-Г-А-46 с плотностью $\rho = 900$ кг/м³ и модулем упругости $E_{\text{ж}} = 1,35 \times 10^9$ МПа) с расходом $Q = 1$ л/с.

Для защиты от разрушающего давления установлен шариковый предохранительный клапан ПК с жесткостью пружины $c_{\text{п}} = 50$ Н/мм и диаметром шарика $d = 12$ мм.

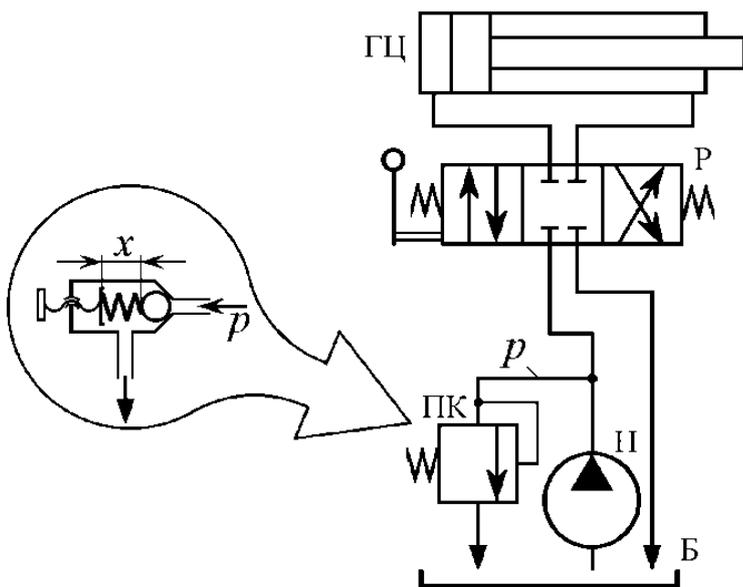


Рис. 11.28. Схема объемной гидропередачи

Определить величину предварительного сжатия пружины клапана X , при котором клапан срабатывает во время гидравлического удара, если время закрытия распределителя $T = 0,03$ с, толщина стенки трубы $\delta = 1$ мм, модуль упругости материала трубы $E_T = 1,13 \cdot 10^{11}$ МПа и начальное давление в системе $p = 0,5$ МПа.

Решение. Определяем скорость распространения

ударной волны c и скорость жидкости в трубопроводе V :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{ж}} + \frac{\rho D}{\delta E_T}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{900}{1,35 \cdot 10^9} + \frac{900 \cdot 15}{1,13 \cdot 10^{11}}} = 1122,18 \text{ м/с};$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,001}{\pi \cdot 0,016^2} = 4,97 \text{ м/с}.$$

Повышение давления при прямом гидравлическом ударе

$$\Delta p_{уд} = \rho V c = 900 \cdot 4,97 \cdot 1122,18 = 5,023 \text{ МПа}.$$

Продолжительность фазы гидравлического удара

$$T_{\phi} = \frac{2L}{c} = \frac{2 \cdot 7,5}{1122,18} = 0,0134 \text{ с} < 0,03 \text{ с} = T.$$

Следовательно, в данном случае имеет место не прямой гидравлический удар.

Повышение давления при непрямом гидравлическом ударе

$$\Delta p_{уд}^H = \frac{T_{\phi}}{T} \Delta p_{уд} = \frac{0,0134}{0,03} \cdot 5,023 = 2,244 \text{ МПа}.$$

Величину предварительного сжатия пружины клапана X определяем из уравнения равновесия шарика предохранительного клапана

$$c_{II} X = (p + \Delta p_{уд}^H) \frac{\pi d^2}{4}.$$

Откуда
$$X = \frac{(p + \Delta p_{уд}^H) \pi d^2}{4 c_{II}} = \frac{(0,5 + 2,244) \cdot \pi \cdot 0,012^2}{4 \cdot 50} = 6,2 \text{ мм}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Научное направление гидромеханики и основ гидравлики нашло широкое применение в различных отраслях производства, таких как гидроэнергетика, горное производство, машиностроение, строительство и т. д.

Рассмотренные теоретические вопросы по гидростатике, кинематике и динамике жидкости являются предпосылкой решения практических задач, связанных с различными гидравлическими явлениями.

Не все теоретические выкладки в гидромеханике можно оценить с большой точностью, поэтому применение теории подобия позволяет скорректировать и получить более глубокие показатели по гидравлическим процессам и тем самым получить оптимальные параметры натурального объекта.

Теория истечения жидкости через отверстия и насадки необходима для расчета конструкции гидромониторов, получения рациональных конструктивных параметров форсунок для динамического воздействия струи на твердую поверхность и систем пылеподавления.

Гидравлический расчет трубопроводов позволяет минимизировать потери на трубопроводах последовательного и параллельного соединения при различных диаметрах труб. Теоретические основы расчета трубопроводных систем с насосной подачей жидкости и теория работы лопастных насосов способствуют правильному выбору насосных агрегатов.

Представленные примеры практических расчетов помогут студентам получить навыки применения теоретических основ гидромеханики и гидравлики к решению типовых инженерных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль, А. Д. Гидравлика и аэродинамика : учеб. для вузов / А. Д. Альтшуль, Л. С. Животовский, Л. П. Иванов. – Москва : Стройиздат, 1987. – 414 с.
2. Альтшуль, А. Д. Гидравлические сопротивления. – Москва : Стройиздат, 1970. – 215 с.
3. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы : учебник для машиностроительных вузов / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. – 2-е изд. – Москва : Машиностроение, 1982. – 424 с.
4. Войткунский, Я. И. Гидромеханика : учебник / Я. И. Войткунский, Ю. И. Фаддеев, К. К. Федяевский. – Ленинград : Судостроение, 1982. – 450 с.
5. Гейер, В. Г. Гидравлика и гидропривод : учебник для вузов / В. Г. Гейер, В. С. Дулин, А. Н. Заря. – 3-е изд. – Москва : Недра, 1991. – 450 с.
6. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика. – Москва : Машиностроение, 1987. – 440 с.
7. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – Москва : Машиностроение, 1975. – 559 с.
8. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика : учебник : в 2 ч. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – Москва : Физматгиз, 1963. – 2 ч. – 728 с.
9. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа : учебник для вузов. – 6-е изд. – Москва : Наука, 1987. – 840 с.
10. Патрашев, А. Н. Прикладная гидромеханика / А. Н. Патрашев, Л. А. Кивако, С. И. Гожий. – Москва : Воениздат, 1970. – 684 с.
11. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика : учеб. пособие. – Москва : Машиностроение, 1976. – 504 с.
12. Самойлович, Г. С. Гидроаэромеханика. – Москва : Машиностроение, 1980. – 280 с.
13. Седов, И. И. Методы теории размерности и подобия в механике. – Москва : Наука, 1970. – 440 с.
14. Штеренлихт, Д. В. Гидравлика: учебник для вузов : в 2 т. – Москва : Энергоатомиздат, 1991. – 2 т.
15. Гудилин, Н. С. Гидравлика и гидропривод : учеб. пособие / Н. С. Гудилин, Е. М. Кривенко, Б. С. Маховиков, И. Л. Пастоев ; под общ. ред. И. Л. Пастоева. – 3-е изд., стереотип. – Москва : Изд-во МГГУ, 2001. – 520 с.

16. Асатур, К. Г. Гидромеханика : учебник для вузов / К. Г. Асатур, Б. С. Маховиков. – Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского горного института, 2001. – 253 с.
17. Турк, В. И. Насосы и насосные станции : учеб. для вузов / В. И. Турк, А. В. Минаев, В. Я. Карелин. – Москва : Стройиздат, 1977. – 304 с.
18. Вакина, В. В. Машиностроительная гидравлика. Примеры расчетов / В. В. Вакина, И. Д. Денисенко, А. Л. Столяров. – Киев : Вища школа ; Головное изд-во, 1986. – 208 с.
19. Сборник задач по машиностроительной гидравлике : учеб. пособие для машиностроительных вузов / Д. А. Бутаев, З. А. Колмыкова, Л. Г. Подвидз и др. ; под общ. ред. И. И. Куколевского, Л. Г. Подвидза. – 4-е изд. перераб. – Москва : Машиностроение, 1981. – 464 с.
20. Чугаев, Р. Р. Гидравлика : учебник для вузов. – 4-е изд. доп. и перераб. – Ленинград : Энергоиздат ; Ленинград. отд-ние, 1982. – 672 с.
21. Скорняков, Н. М. Гидравлика (теоретический курс с примерами практических расчетов) : учеб. пособие / Н. М. Скорняков, В. Н. Вернер, В. В. Кузнецов ; ГУ КузГТУ. – Кемерово, 2003. – 223 с.
22. Скорняков, Н. М. Проектирование и расчет объемной гидропередачи : учеб. пособие / Н. М. Скорняков, В. В. Кузнецов, К. А. Ананьев ; КузГТУ. – Кемерово, 2010. – 104 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ	5
1.1. Отличительные особенности различных состояний вещества.....	5
1.2. Силы, действующие на жидкость. Давление в жидкости...	8
1.3. Основные свойства жидкостей и газов	10
1.4. Контрольные вопросы	19
2. ГИДРОСТАТИКА	21
2.1. Гидростатическое давление и его свойство	21
2.2. Основное уравнение гидростатики	24
2.3. Измерение давления.....	26
2.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости.....	32
2.5. Решение дифференциальных уравнений равновесия жидкости для ряда частных случаев	35
2.5.1. Равномерное вращение сосуда с жидкостью	355
2.5.2. Прямолинейное движение сосуда с постоянным ускорением.....	38
2.6. Сила давления жидкости на плоскую стенку.....	39
2.7. Сила давления жидкости на цилиндрическую стенку	41
2.8. Плавание тел. Закон Архимеда.....	44
2.9. Контрольные вопросы	46
3. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ.....	48
3.1. Общие положения и определения	48
3.2. Расход. Уравнение расхода	51
3.3. Движение жидкой частицы. Понятие о вихревом и потенциальном движении.....	52
3.4. Ускорение жидкой частицы	57
3.5. Контрольные вопросы	58
4. ДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	59
4.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости	59
4.2. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости	65
4.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкого газа.....	71
4.4. Контрольные вопросы	73
5. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.....	75

5.1. Напряжения в движущейся вязкой жидкости.....	75
5.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости при установившемся движении	81
5.3. Уравнение Бернулли для потока при установившемся движении вязкой жидкости.....	82
5.3.1. Удельная энергия потока.....	83
5.3.2. Уравнение Бернулли для потока	85
5.4. Общие сведения о гидравлических потерях	87
5.5. Контрольные вопросы	90
6. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ.....	92
6.1. Теория подобия гидромеханических процессов.....	93
6.2. Метод размерностей в гидромеханике	102
6.3. Режимы течения жидкости в трубах. Опыты Рейнольдса..	107
6.4. Контрольные вопросы	112
7. НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБАХ	113
7.1. Теория ламинарного течения в круглых трубах	113
7.2. Начальный участок ламинарного течения	119
7.3. Ламинарное течение в зазоре.....	121
7.4. Турбулентное течение	125
7.4.1. Двухслойная модель и основы теории турбулентного режима движения	126
7.4.2. Турбулентное течение в шероховатых трубах.....	132
7.5. Местные гидравлические сопротивления	137
7.6. Контрольные вопросы	145
8. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ	146
8.1. Истечение через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре.....	146
8.2. Истечение через насадки при постоянном напоре	151
8.3. Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре	154
8.4. Свободные гидравлические струи.....	156
8.5. Контрольные вопросы	161
9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ	162
9.1. Простой трубопровод постоянного сечения	162
9.2. Соединения простых трубопроводов.....	165
9.3. Трубопроводные системы с насосной подачей жидкости..	170
9.4. Гидравлический удар в трубах	175
9.5. Контрольные вопросы	182

10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛОПАСТНЫХ НАСОСОВ.....	184
10.1. Основное уравнение лопастных насосов.....	190
10.2. Характеристика центробежного насоса.....	195
10.3. Работа насоса на сеть	201
10.4. Подобие насосов. Формулы пересчета	203
10.4.1. Изменение характеристики насоса при изменении его частоты вращения	208
10.4.2. Изменение характеристики насоса при изменении диаметра его рабочего колеса	213
10.5. Высота всасывания насосов. Кавитация.....	216
10.6. Контрольные вопросы	220
11. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ.....	222
11.1. Физические свойства жидкостей.....	222
11.2. Гидростатика.....	224
11.3. Кинематика и динамика движения жидкости.....	236
11.3.1. Основные понятия. Уравнение Бернулли.....	236
11.3.2. Гидравлические сопротивления. Режимы течения	241
11.4. Гидравлический расчет трубопроводов.....	243
11.5. Гидравлический удар в трубах	255
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	258
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	259

Кузнецов Владимир Всеволодович
Ананьев Кирилл Алексеевич

ГИДРОМЕХАНИКА И ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ
(Теоретический курс с примерами практических расчетов)

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 08.10.2013. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 15,34
Уч.-изд. л. 16,50
Тираж 500 экз. Заказ

КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Полиграфический цех КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4 а