

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители  
Е. Н. Грибанов  
А. В. Чередниченко

## **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

### **Методические материалы**

для студентов специальности СПО  
09.02.07 Информационные системы и программирование

Рекомендовано цикловой методической комиссией  
математических и естественнонаучных дисциплин  
в качестве электронного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Николаева Е. А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Ощепкова Е. А., председатель цикловой методической комиссии математических и естественнонаучных дисциплин

**Грибанов Евгений Николаевич**

**Чередниченко Алла Валерьевна**

**Численные методы:** методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся специальности СПО 09.02.07 Информационные системы и программирование очной формы обучения / сост. Е. Н. Грибанов, А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведены методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «**Численные методы**», позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

© КузГТУ, 2018

© Грибанов Е. Н.,  
Чередниченко А. В.,  
составление, 2018

## Оглавление

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения .....	3
Тема 1. Элементы теории погрешностей .....	3
Практическое занятие 1. Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами .....	3
Самостоятельная работа по теме 1 .....	4
Тема 2. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений .....	5
Практическое занятие 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных.....	5
Самостоятельная работа по теме 2 .....	6
Тема 3. Решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений .....	6
Практическое занятие 3. Решение систем линейных уравнений приближёнными методами.....	6
Практическое занятие 4. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона.....	7
Самостоятельная работа по теме 3 .....	8
Тема 4. Интерполирование и экстраполирование функций .....	8
Практическое занятие 5. Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона .....	8
Практическое занятие 6. Применение метода наименьших квадратов для нахождения параметров линейной и нелинейной зависимости...	3
Самостоятельная работа по теме 4 .....	4
Тема 5. Численное интегрирование .....	5
Практическое занятие 7. Вычисление интегралов методами численного интегрирования.....	5
Самостоятельная работа по теме 5 .....	5
Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений .....	3
Практическое занятие 8. Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений .....	3
Самостоятельная работа по теме 6 .....	3
Критерии оценки практической работы.....	5
Список источников.....	6

# Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

## Тема 1.

### Элементы теории погрешностей

Источники и классификация погрешностей результата численного решения задачи

### Практическое занятие 1.

#### Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами

**Цель:** изучить основные источники погрешностей.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Практические задания:**

**Задание 1:** а) Определить, какое равенство точнее.  
б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата. в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

1.1. а)  $14/_{17} = 0,824$ ,  $\sqrt{53} = 7,28$ ; б)  $23,3748$ ,  $\delta = 0,27\%$ ; в)  $0,645$

1.2. а)  $7/_{3} = 2,33$ ,  $\sqrt{58} = 7,62$ ; б)  $13,5726 \pm 0,0072$ ; в)  $4,8556$

1.3. а)  $27/_{31} = 0,871$ ,  $\sqrt{43} = 6,48$ ; б)  $0,088748$   $\delta = 0,56\%$ ; в)  $71,385$

1.4. а)  $23/_{9} = 2,56$ ,  $\sqrt{87} = 9,33$ ; б)  $4,57633 \pm 0,00042$ ; в)  $6,8346$ .

**Задание 2.** Число  $X$ , все цифры верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для полученного числа  $X_1 \approx X$  найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности. В записи числа  $X_1$  укажите количество верных цифр (в узком и широком смысле).

Вычислите с помощью калькулятора значение величины  $Z$  при заданных значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , используя «ручные»

расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений двумя способами:

- 1) по правилам подсчета цифр;
- 2) по методу строгого учета границ абсолютных погрешностей.

Данные приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные для решения задания 2

№	X	Z	a	b	c
1	7,32147	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,2399	4,893	1,172
2	0,007275	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a+3b}}$	11,437	0,60937	8,67081
3	45,548	$\frac{a-bc}{\ln a+3b}$	10,589	0,5894	0,125
4	10,7818	$\frac{b^2-\ln c}{\sqrt{c-a}}$	2,038	3,91253	5,0075

### Самостоятельная работа по теме 1

**Задание 1.** а) Определить, какое равенство точнее. б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата. в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

1.1. а)  $6/7 = 0,857$ ,  $\sqrt{41} = 6,40$ ; б)  $46,7843 \delta = 0,32\%$ ; в)  $7,38$ .

1.2. а)  $12/7 = 1,71$ ,  $\sqrt{47} = 6,86$ ; б)  $0,38725 \pm 0,00112$ ; в)  $0,00646$ .

**Задание 2.** Число X, все цифры верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для полученного числа  $X_1 \approx X$  найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности. В записи числа  $X_1$  укажите количество верных цифр (в узком и широком смысле).

Вычислите с помощью калькулятора значение величины  $Z$  при заданных значениях параметров  $a, b$  и  $c$ , используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений двумя способами:

- 1) по правилам подсчета цифр;
- 2) по методу строгого учета границ абсолютных погрешностей.

Данные приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Исходные данные

№	X	Z	a	b	c
1	1,005745	$\frac{a - \cos b}{13c + b}$	3,149	0,85	0,007
2	35,3085	$\frac{\sqrt{a + b}}{3a - c}$	9,6574	1,404	1.126

## Тема 2.

### Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Постановка задачи локализации корней. Численные методы решения уравнений.

#### Практическое занятие 2.

#### Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных

**Цель:** изучить основные методы решения нелинейных уравнений.

**Продолжительность работы:** 180 мин.

**Практические задания:**

**Задание 1.** Найти решение методом Ньютона с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  следующих уравнений:

1)  $\cos x - e^{-x} + 0,5 = 0;$

2)  $3 - \sqrt{x} - 0,5 \ln x = 0;$

3)  $x^2 - e^{-x^2} = 0$ .

**Задание 2.** Найти решение методом секущих с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  следующих уравнений:

1)  $1,5 - 0,4\sqrt{x^3} - 0,5\ln x = 0$ ;

2)  $0,2e^{-x^2} - \sqrt{x} + 3 = 0$ .

**Задание 3.** Найти решение с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  методом половинного деления следующего уравнения:

$$x - \sin x - 0,25 = 0$$

### Самостоятельная работа по теме 2

**Задание 1.** Найти решение методом Ньютона с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  следующего уравнения:

$$x^5 - 3x^3 + 1 = 0$$

**Задание 2.** Найти решение методом секущих с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  следующего уравнения:

$$\sqrt{x^2 + 2} = 2e^x$$

**Задание 3.** Найти решение с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  методом половинного деления следующего уравнения:

$$\operatorname{arctg}(x^2 - 2) = 0,5$$

### Тема 3. Решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений

Метод Гаусса. Метод итераций решения СЛАУ. Метод Зейделя.

#### Практическое занятие 3.

#### Решение систем линейных уравнений приближёнными методами

**Цель:** изучить основные методы решения систем линейных уравнений.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Практические задания:**

**Задание 1.** Найти решение системы уравнений методом Гаусса и методом итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ . В методе

Гаусса оценить точность полученных результатов, в методе итераций определить число итераций:

$$\begin{cases} 8x + y + z = 2,3 \\ 2x + 8y + z = 3,9 \\ x + y + 10z = 3,6 \end{cases}$$

**Задание 2.** Найти решение системы уравнений методом Гаусса и методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 23 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 11 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 28 \end{cases}$$

**Задание 3.** Найти решение системы уравнений методом Гаусса и методом итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . В методе Гаусса оценить точность полученных результатов, в методе итераций определить число итераций:

$$\begin{cases} 3,241x_1 + 0,197x_2 + 0,643x_3 + 0,236x_4 = 0,454 \\ 0,257x_1 + 3,853x_2 + 0,342x_3 + 0,427x_4 = 0,371 \\ 0,324x_1 + 0,317x_2 + 2,793x_3 + 0,238x_4 = 0,465 \\ 0,438x_1 + 0,326x_2 + 0,483x_3 + 4,229x_4 = 0,822 \end{cases}$$

#### Практическое занятие 4.

##### Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

**Цель:** изучить основные методы численного решения систем нелинейных уравнений.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Практические задания:**

**Задание 1.** Локализуите корни системы уравнений графически. Найдите с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  все корни системы нелинейных уравнений, используя метод Ньютона:

$$1) \begin{cases} \cos(x - 1) + y - 1 = 0 \\ \sin y + 2x - 1,6 = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} \cos(y - 1) + x - 0,8 = 0; \\ y - \cos x - 2 = 0 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x^5 + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^3 - 3 = 0 \end{cases}$$

### Самостоятельная работа по теме 3

**Задание 1.** Найти решение системы уравнений методом Гаусса и методом итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . В методе Гаусса оценить точность полученных результатов, в методе итераций определить число итераций:

$$\begin{cases} 2,389x_1 + 0,273x_2 + 0,126x_3 + 0,418x_4 = 0,144 \\ 0,329x_1 + 2,796x_2 + 0,179x_3 + 0,279x_4 = 0,297 \\ 0,186x_1 + 0,275x_2 + 2,987x_3 + 0,316x_4 = 0,529 \\ 0,197x_1 + 0,219x_2 + 0,274x_3 + 3,127x_4 = 0,869 \end{cases}$$

**Задание 2.** Локализуите корни системы уравнений графически. Найдите с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  все корни системы нелинейных уравнений используя метод Ньютона:

$$1) \begin{cases} x^4 + y^2 - 6 = 0 \\ y + \ln(x + 6) - 2 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} \cos x - y + x - 1 = 0 \\ x^2 + \sin y - 2 = 0 \end{cases}.$$

**Тема 4. Интерполирование и экстраполирование функций**  
Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционные формулы Ньютона. Интерполирование сплайнами.

### Практическое занятие 5.

#### Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона

**Цель:** изучить методы построения интерполяционных многочленов.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

#### Практические задания:

**Задание 1.** Функция задана таблично в узлах. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Построить таблицы конечных и разделенных разностей. Построить полином Ньютона.

1)

$x$	3	5	7	9	10
$y$	5,06	7,8	19,42	50	76,6

2)

$x$	1	3	5	7	8
$y$	35,9	47,9	69,5	62,3	25,4

### Практическое занятие 6.

#### Применение метода наименьших квадратов для нахождения параметров линейной и нелинейной зависимости

**Цель:** изучить применение метода наименьших квадратов для нахождения параметров линейной и нелинейной зависимости.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

#### Практические задания:

**Задание 1.** Методом наименьших квадратов найти параметры линейной зависимости по следующей выборке:

1)

$x_i$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$y_i$	2	8	10	14	20	24	28	28	34	40

2)

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$y_i$	43	38	35	37	36	32	36	27	30	26	23	24	13	15	14

**Задание 2.** На основе наблюдений получены следующие результаты:

$x_i$	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10
$y_i$	8	6	4	2	2	4	6	8	14	16

Используя метод наименьших квадратов найти параметры зависимости  $y = a + bx + cx^2$ .

**Задание 3.** На основе наблюдений получены следующие результаты:

$x_i$	0,034	0,394	0,754	1,114	1,474	1,833	2,193	2,553
$y_i$	2,156	2,988	3,377	3,708	3,802	3,900	4,067	4,129

Используя метод наименьших квадратов найти параметры зависимости:  $y = a + b \ln x$ .

**Задание 4.** Предполагая зависимость  $y = ae^{bx}$  найти значения параметров  $a$  и  $b$  по заданной выборке:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	4,1	3,4	2,7	2,2	1,8	1,5	1,2	1,1

### Самостоятельная работа по теме 4

**Задание 1.** Функция задана таблично в узлах. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Построить таблицы конечных и разделенных разностей. Построить полином Ньютона.

$x_i$	0,5	1	1,5	2	2,5
$y_i$	3,775	4,4	1,5	9,4	8,375

**Задание 2.** Методом наименьших квадратов найти параметры линейной зависимости по следующей выборке:

$x_i$	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	26
$y_i$	12	16	17	6	13	7	5	6	5	2	12

**Задание 3.** Предполагая зависимость  $y = \frac{ax}{b+x}$  найти значения параметров  $a$  и  $b$  по заданной выборке:

$x_i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y_i$	3,333	5	6	6,667	7,143	7,5	7,778	8	8,182	8,333

**Задание 4.** Предполагая зависимость  $y = a + \frac{b}{x}$  найти значения параметров  $a$  и  $b$  по заданной выборке:

$x_i$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$y_i$	15	14,091	13,333	12,692	12,143	11,667	11,25	10,882	10,556	10,263

**Задание 5.** Предполагая зависимость  $y = \frac{a\sqrt{x}}{b+\sqrt{x}}$  найти значения параметров  $a$  и  $b$  по заданной выборке:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	2,500	2,929	3,170	3,333	3,455	3,551	3,629	3,693

## Тема 5. Численное интегрирование

Формулы Ньютона–Котеса: методы прямоугольников, трапеций, парабол. Интегрирование с помощью формул Гаусса.

### Практическое занятие 7.

#### Вычисление интегралов

#### методами численного интегрирования

**Цель:** изучить применение метода численного вычисления определенного интеграла.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

#### Практические задания:

**Задание 1.** Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами  $2h$  и  $h$ . Дайте уточненную оценку погрешности. Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами  $2h$  и  $h$ . Дайте уточненную оценку погрешности. Вычислите определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Сравните приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

1)  $\int_{0,2}^1 \sqrt{x} \ln x dx$ ;

2)  $\int_{-0,4}^{0,8} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ;

3)  $\int_0^1 x^3 \arctg x dx$ .

#### Самостоятельная работа по теме 5

**Задание 1.** Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами  $2h$  и  $h$ . Дайте уточненную оценку погрешности. Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами  $2h$  и  $h$ . Дайте уточненную оценку погрешности. Вычислите определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Сравните приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

1)  $\int_0^1 \frac{x dx}{x+1}$ ;

2)  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ ;

3)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+1}$ .

## Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод Эйлера. Уточнённая схема Эйлера. Метод Рунге–Кутта.

### Практическое занятие 8.

#### Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений

**Цель:** изучить применение метода численного решения дифференциального уравнения.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Практические задания:**

#### *Задание 1.*

1.1. Решить задачу Коши:  $y' = f(x; y)$   $y(a) = y_0$  на отрезке  $[a; b]$ . 1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью  $10^{-4}$ .

1.2. Найти решение задачи Коши на отрезке  $[a; b]$  методом Рунге–Кутта (IV) с точностью  $10^{-4}$ . Построить приближённую интегральную кривую.

1.3. Найти решение задачи Коши на отрезке  $[a; b]$  методом Эйлера. Построить на одном графике приближённую интегральную кривую.

1.4. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближённым. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближённого решения от точного.

1.5. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

а)  $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}$ ,  $y(0) = 0,5$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,

б)  $2xy' + 2y = xy^3$ ,  $y(1) = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1,8$ .

в)  $xy' + y = 2y^2 \ln x$ ,  $y(1) = 0,5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

#### Самостоятельная работа по теме 6

1.1. Решить задачу Коши:  $y' = f(x; y)$   $y(a) = y_0$  на отрезке  $[a; b]$ . 1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью  $10^{-4}$ .

1.2. Найти решение задачи Коши на отрезке  $[a; b]$  методом Рунге–Кутты (IV) с точностью  $10^{-4}$ . Построить приближенную интегральную кривую.

1.3. Найти решение задачи Коши на отрезке  $[a; b]$  методом Эйлера. Построить на одном графике приближенную интегральную кривую.

1.4. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

1.5. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

а)  $y' - y = 2xy^2, y(-1) = 0,2, a = -1, b = 0,6.$

б)  $xy' + y = \frac{1}{3}xy^3, y(1) = 1, a = 1, b = 2.$

## Критерии оценки практической работы

Отметка	Критерии	Показатели по 100-й шкале
5 (отлично)	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения и получены верные ответы	100 баллов
	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения, но имеется одна - две вычислительные ошибки	(90;100) баллов
4 (хорошо)	– работа выполнена полностью, но при выполнении обнаружилось недостаточное владение навыками работы в рамках поставленной задачи	(85;90) баллов
	– правильно выполнена большая часть работы (свыше 85%) – работа выполнена полностью, но использованы наименее оптимальные подходы к решению поставленной задачи	(80;85) баллов
3 (удовлетворительно)	– работа выполнена не полностью, допущено более трех ошибок, но обучающийся владеет основными навыками работы, требуемыми для решения поставленной задачи.	(65;79) баллов
2 (неудовлетворительно)	– допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными знаниями, умениями и навыками работы или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.	(50;65) баллов
	– работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и навыков работы по проверяемой теме.	(30;50) баллов

### Список источников

1. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс]. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 336 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=672966> – Загл. с экрана.
2. Зенков, А. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 122 с. – Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/chislennye-metody-415025> – Загл. с экрана.
3. Манюкова, Н. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 140 с. – Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/chislennye-metody-423132> – Загл. с экрана.