

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Г.А. КУРИЛЕНКО

# ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2018

УДК 539.3/.6(075.8)

К 931

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В.Г. Атапин*

д-р техн. наук, профессор *А.В. Гуськов*

Работа подготовлена на кафедре ПЛА и предназначена для студентов II и III курсов МТФ по направлению 15.03.02 – Технологические машины и оборудование и 15.03.05 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

**Куриленко Г.А.**

К 931

Основы сопротивления материалов: учебное пособие / Г.А. Куриленко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. –139 с.

ISBN 978-5-7782-3567-0

Учебное пособие предназначено для инженерно-технических направлений и специальностей механико-технологического факультета и в нем сделан акцент на самые ключевые проблемы курса сопротивления материалов.

Пособие охватывает основные вопросы статической прочности, жесткости и устойчивости стержня при простых деформациях (растяжение-сжатие, кручение и плоский изгиб) и сложных деформациях. Также рассмотрены динамические задачи (расчет элементов конструкций при движении с ускорением, инженерная теория удара, расчет на прочность при колебаниях) и даны элементы теории пластин и оболочек.

По всем темам приводятся типовые примеры с решениями.

УДК 539.3/.6(075.8)

ISBN 978-5-7782-3567-0

© Куриленко Г.А., 2018

© Новосибирский государственный  
технический университет, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	6
<b>Глава 1. Алгоритм расчета на прочность. Основные понятия курса .....</b>	<b>9</b>
1.1. Алгоритм расчета на прочность .....	9
1.2. Составление расчетной схемы.....	9
1.3. Расчет опорных реакций .....	11
1.4. Понятие о внутренних силах. Их расчет.....	11
1.5. Напряжения и деформации. Связь между ними (закон Гука).....	14
1.6. Условие прочности .....	17
1.7. Основные допущения и ограничения, накладываемые на все задачи в сопротивлении материалов (основные гипотезы и принципы) .....	17
<b>Глава 2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии         бруса .....</b>	<b>19</b>
2.1. Вывод расчетных формул для напряжений и деформаций.....	19
2.2. Условие прочности .....	22
2.3. Три типа задач при расчетах на прочность.....	23
2.4. Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии .....	23
<b>Глава 3. Механические характеристики материалов .....</b>	<b>29</b>
3.1. Испытание на растяжение образцов из малоуглеродистой стали .....	29
3.2. Испытание на сжатие образцов из малоуглеродистой стали .....	34
3.3. Испытание на растяжение и сжатие образцов из серого чугуна .....	35
3.4. Таблица основных механических характеристик малоуглеродистых сталей и серых чугунов .....	35
3.5. Хрупкость и пластичность .....	36
<b>Глава 4. Теория напряженно-деформированного состояния .....</b>	<b>37</b>
4.1. Напряженное состояние точки .....	37
4.2. Деформированное состояние в точке. Объемная деформация. Обобщенный закон Гука .....	43

<b>Глава 5. Теории предельных напряженных состояний (теории прочности)</b> .....	49
5.1. Назначение теорий прочности. Эквивалентное напряжение .....	49
5.2. Теория наибольших касательных напряжений (3-я теория прочности) .....	50
5.3. Энергетическая теория прочности (4-я теория) .....	50
5.4. Обобщенная теория прочности Мора .....	52
<b>Глава 6. Кручение брусьев круглого поперечного сечения</b> .....	54
6.1. Вывод расчетных формул для напряжений и перемещений .....	54
6.2. Рациональные формы поперечных сечений при кручении .....	60
<b>Глава 7. Геометрические характеристики плоских сечений</b> .....	62
7.1. Статические моменты сечения .....	62
7.2. Моменты инерции сечения .....	63
7.3. Свойства моментов инерции .....	64
<b>Глава 8. Плоский (прямой) изгиб прямых брусьев</b> .....	68
8.1. Классификация изгибов .....	68
8.2. Дифференциальные зависимости Журавского при плоском поперечном изгибе .....	69
8.3. Вывод формулы для расчета напряжений при чистом плоском изгибе .....	71
8.4. Условие прочности .....	77
8.5. Поперечный плоский изгиб .....	78
8.6. Расчет на жесткость при плоском изгибе .....	83
<b>Глава 9. Сложное нагружение</b> .....	86
9.1. Основные понятия .....	86
9.2. Алгоритм расчета на прочность .....	86
9.3. Совместное действие изгиба и кручения .....	87
<b>Глава 10. Энергетические методы определения перемещений</b> .....	90
10.1. Принцип возможных перемещений для деформируемых систем .....	90
10.2. Вывод интеграла Мора .....	90
10.3. Алгоритм определения перемещений по интегралу Мора .....	92
10.4. Вычисление интеграла Мора по способу Верещагина .....	93
10.5. Вычисление интеграла Мора по формуле Симпсона .....	95

<b>Глава 11. Устойчивость равновесия сжатых стержней (продольный изгиб)</b> .....	97
11.1. Понятие об устойчивости.....	97
11.2. Определение критической силы по Эйлеру.....	98
11.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.....	99
11.4. Пределы применимости формулы Эйлера .....	100
11.5. Определение критических напряжений для стержней малой гибкости, когда $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ .....	101
<b>Глава 12. Расчет на прочность при движении с ускорением</b> .....	103
<b>Глава 13. Инженерная теория удара</b> .....	105
13.1. Допущения инженерной теории удара.....	105
13.2. Понятие о динамическом перемещении, динамической силе и коэффициенте динамичности .....	105
13.3. Приведение массы тела, воспринимающего удар, к точке соударения.....	106
13.4. Энергетический метод определения коэффициента динамичности .....	108
13.5. Расчет на прочность и жесткость по инженерной теории удара .....	110
<b>Глава 14. Расчет на прочность и жесткость при колебаниях</b> .....	111
14.1. Основные понятия .....	111
14.2. Собственные колебания систем с одной степенью свободы без наличия сил сопротивления.....	112
14.3. Собственные колебания систем с одной степенью свободы с линейным затуханием .....	113
14.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления .....	114
<b>Глава 15*. Элементы теории пластин и оболочек</b> .....	117
15.1. Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек по безмоментной теории .....	117
15.2. Изгиб цилиндрической оболочки при симметричном нагружении ....	122
15.3. Изгиб круглых симметрично нагруженных пластин.....	127
Вопросы и задания для самоконтроля .....	134
Библиографический список .....	138

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие написано на основе лекций, читаемых автором в НГТУ для студентов механико-технологического факультета. Автор опускает некоторые второстепенные вопросы, акцентируя внимание только на самых основных, но в то же время для формирования научного кругозора студентов дается часть материала, помеченного звездочкой, которую можно при необходимости опустить без ущерба для понимания остального текста.

Перед тем как приступить к изучению новой дисциплины, необходимо понять, какое место она занимает в науке. Сопротивление материалов – это один из разделов механики – науки, изучающей законы взаимодействия материальных тел. Этой науке около 5000 лет, столько же, сколько и современной человеческой цивилизации. За это время механика разделилась на отдельные направления, поскольку в одной науке было трудно сконцентрировать весь объем накопленных знаний. Единой классификации этих направлений механики не существует, но ее можно попытаться изобразить в виде схемы, представленной на рисунке.



В основе *релятивистской механики* лежит теория относительности, и она используется при скоростях движения тел, близких к скорости

света  $c = 300\,000$  км/с. В релятивистской механике сформулированы законы, применимые для всей механики.

*Квантовая механика* – это механика элементарных частиц, масса которых стремится к нулю и которые движутся со скоростями, близкими к скорости света. В основе квантовой механики лежит соотношение неопределенности Гейзенберга.

И релятивистской, и квантовой механикой занимаются физики.

*Классическая механика (или просто механика)* – частный случай релятивистской механики, когда скорости тел относительно невелики, а массы – относительно велики. Это инженерная наука, которую условно называют *механикой*.

Разберемся в разветвлениях этой механики. Все науки призваны изучать реальные природные явления и реальные объекты. Но учитывать все свойства реальных объектов практически невозможно, поэтому все науки занимаются моделями (или расчетными схемами) изучаемых явлений и объектов, в которых какие-то свойства не учитываются или смягчаются. Как правило, свойства изучаемого объекта описываются соответствующими уравнениями и получается его математическая модель, с которой дальше и работают.

Так, в *теоретической механике* не учитывается деформируемость тел, и поэтому из ее рамок выпадают вопросы прочности.

*Механика деформируемого твердого тела*, опираясь на законы теоретической механики и учитывая дополнительно деформируемость тела, позволяет решать вопросы прочности. Эта обширная наука о прочности за 300 с лишним лет своего существования также разделилась на несколько направлений: теория упругости, теория пластичности, механика разрушения, сопротивление материалов и т. д.

Вот мы и подошли к тому, что сопротивление материалов является одним из разделов механики деформируемого твердого тела. Чтобы понять, какое место в этой науке занимает *сопротивление материалов*, сопоставим его с *теорией упругости*.

Отметим еще раз, что все науки, призванные изучать реальные объекты, на самом деле занимаются их расчетными схемами, в которых накладываются ограничения на рассматриваемую задачу, касаемые формы тела, нагрузки, внешних условий и т. д.

*Теория упругости* – наиболее общая наука о прочности, в которой учитываются практически все свойства объекта, влияющие на прочность, и накладывается только одно ограничение: деформации тела должны быть упругими, т. е. после снятия нагрузки его размеры и

форма должны полностью восстанавливаться. В результате математическая модель в теории упругости получается очень сложной, и уравнения, ее описывающие, не имеют, как правило, аналитического решения, и даже численными методами их нередко трудно решить. Теория упругости позволяет достаточно точно описать математически задачу, но для ее практического решения нужно что-то упростить, наложить какие-то ограничения. Без этого теория упругости будет чисто описательной наукой.

Поэтому на противоположном полюсе механики деформируемого твердого тела и находится инженерная наука о прочности – сопротивление материалов.

*Сопротивление материалов* – наука о прочности, а точнее – это раздел механики деформируемого твердого тела, рассматривающий методы расчета на прочность и жесткость типовых элементов конструкций при условии их долговечности и экономичности.

*Задачей курса сопротивления материалов* является разработка достаточно простых инженерных приемов расчета типовых деталей. При этом на решаемую задачу накладывается максимально возможное количество ограничений и допущений на форму тела, свойства материала, нагрузку и т. д. В результате расчетные формулы получаются удобными для практических инженерных расчетов.

## Глава 1

# АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КУРСА

### 1.1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

Оказывается, что все задачи сопротивления материалов можно в принципе решить по одному алгоритму (рис. 1).

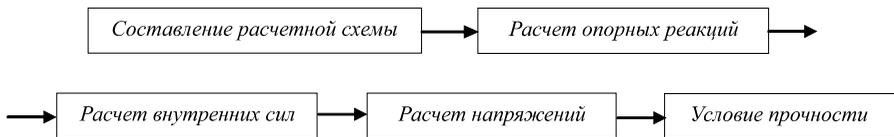


Рис. 1

Рассмотрим ступени этого алгоритма.

### 1.2. СОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ

При составлении расчетной схемы производится схематизация детали, опор и нагрузки.

**Схематизация детали.** При всем разнообразии конструктивных элементов их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм, а именно к четырем.

1. Форма бруса (рис. 2). Брус – это тело, у которого длина существенно (в 10 и более раз) превышает характерный размер поперечного сечения. Ось бруса может иметь любую форму. Брус может быть плоским или пространственным.

Брус – основное тело, рассматриваемое в сопротивлении материалов.



Рис. 2

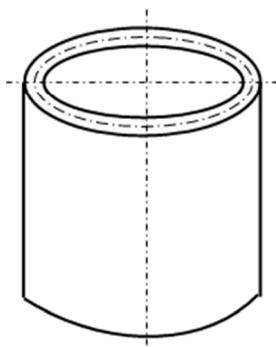


Рис. 3

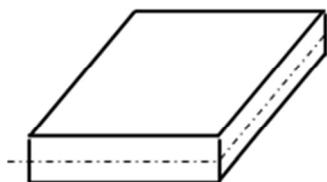


Рис. 4

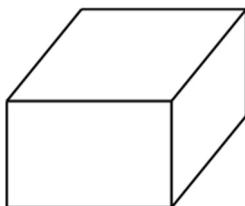


Рис. 5

2. Форма оболочки (рис. 3). Оболочкой называется тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми существенно меньше других размеров оболочки. Поверхность, равноудаленная от внешней и внутренней поверхности, называется срединной поверхностью. Линия пересечения срединной поверхности с верхним торцом показана на рисунке штрихпунктиром. Форма оболочки может быть любая. На рис. 3 показана цилиндрическая оболочка. В сопротивлении материалов рассматриваются оболочки простейшей формы.

3. Форма пластины (рис. 4).

Пластина – оболочка с плоской срединной поверхностью. Пластина может быть прямоугольной, круглой, треугольной и т. д. В сопротивлении материалов рассматриваются пластины простейшей формы.

4. Массивное тело – элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (рис. 5). В сопротивлении материалов массивные тела не рассматриваются, их рассчитывают в теории упругости.

Какую бы деталь ни придумал конструктор, он на расчетной схеме должен ее изобразить в виде одной из приведенных форм либо в виде какой-то совокупности этих форм.

**Схематизация опор и нагрузки.** Опоры и нагрузка схематизируются так же, как и в теоретической механике.

### 1.3. РАСЧЕТ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Опорные реакции рассчитываются так же, как и в теоретической механике, из уравнений равновесия, составленных без учета деформации тела (далее будет сказано подробно, почему в этом случае пренебрегают деформациями).

### 1.4. ПОНЯТИЕ О ВНУТРЕННИХ СИЛАХ. ИХ РАСЧЕТ

В теоретической механике внутренние силы не рассматриваются. Там все силы являются внешними. В сопротивлении материалов, где учитывается деформация тела, вводится понятие внутренних сил, без определения которых вопросы прочности тела решить не удастся.

*Внутренние силы* – это силы упругого взаимодействия между частицами материала внутри тела при его деформировании внешними силами. Исчезают внешние силы – отсутствуют и внутренние силы.

*Расчет внутренних сил.* Рассмотрим некоторое тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (рис. 6, а). От внешних сил тело деформируется, следовательно, внутри него возникают внутренние силы. Пусть частичка 1 внутри тела давит на соседнюю частичку с какой-то силой. По третьему закону Ньютона эта соседняя частичка давит на исходную с такой же по величине, но противоположно направленной силой (рис. 6, а). Поэтому эти две внутренние силы взаимно уравновешены и в сумме дают ноль. То же можно сказать и про любую другую пару частиц, например 2. Таким образом, все внутренние силы взаимно уравновешены и на равновесие всего тела влияния не оказывают.

Для расчета внутренних сил применяется *метод сечений*. Он заключается в том, что в интересующем нас месте мысленно проводится

сечение, разделяющее тело на две части  $A$  и  $B$  (как правило, это поперечное сечение, перпендикулярное продольной оси бруса) – рис. б, б. Затем какая-то часть тела мысленно отбрасывается, а к оставшейся части со стороны отброшенной прикладываются внутренние силы (рис. б, в), которые теперь для рассматриваемой части становятся

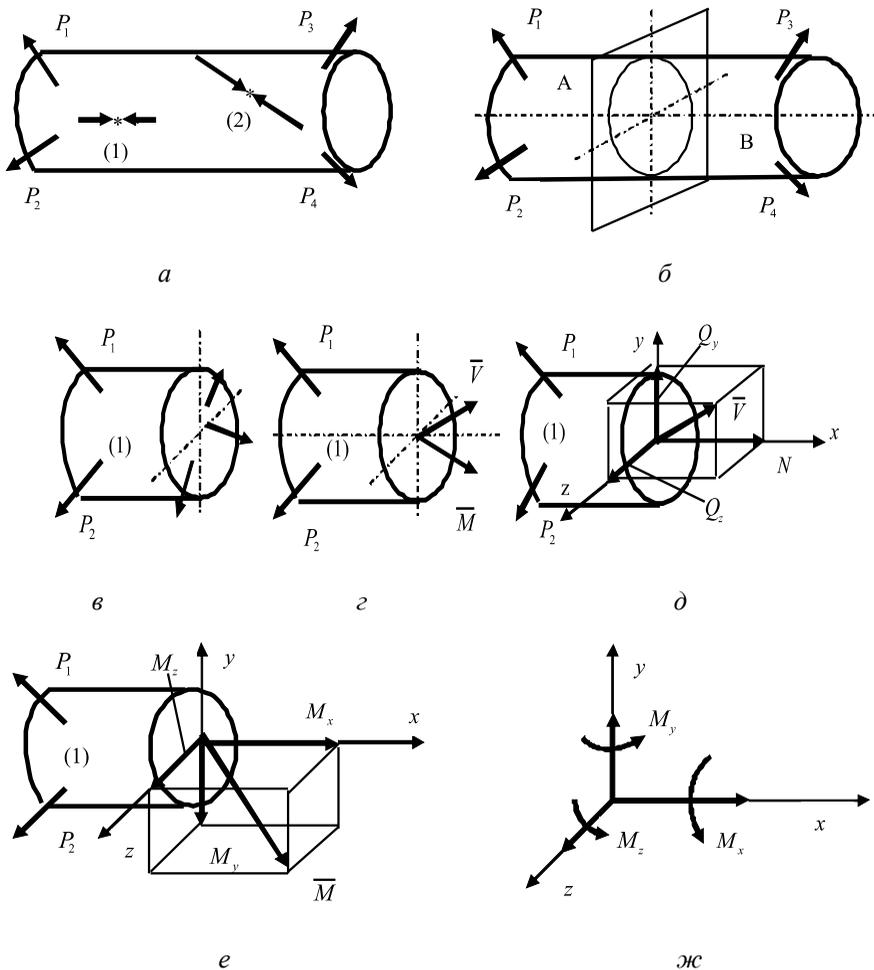


Рис. 6

внешними силами. Этих сил – бесчисленное количество. Методами теоретической механики эту систему сил приводим к центру тяжести поперечного сечения и получаем главный вектор  $\bar{V}$  и главный момент  $\bar{M}$  внутренних сил в этом сечении (рис. 6, *з*), которые проецируем на координатные оси (рис. 6, *д*, *е*). В результате получаем три составляющие главного вектора и три составляющие главного момента, которые имеют свои названия:

$N$  – нормальная внутренняя сила;

$Q_y, Q_z$  – поперечные внутренние силы;

$M_x$  – крутящий внутренний момент;

$M_y, M_z$  – изгибающие внутренние моменты.

На рис. 6, *ж* внутренние моменты показаны и в векторной форме, и в виде наглядных криволинейных стрелок.

Для расчета шести внутренних сил мы имеем шесть уравнений равновесия (1) для рассматриваемой отсеченной части тела, из которых и рассчитываются составляющие внутренних сил:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma P_{ix} + N = 0; \\ \Sigma Y &= \Sigma P_{iy} + Q_y = 0; \\ \Sigma Z &= \Sigma P_{iz} + Q_z = 0; \\ \Sigma m_x &= \Sigma m_x(P_i) + M_x = 0; \\ \Sigma m_y &= \Sigma m_y(P_i) + M_y = 0; \\ \Sigma m_z &= \Sigma m_z(P_i) + M_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В этих уравнениях  $P_i$  – внешние силы, приложенные к рассматриваемой части тела.

## 1.5. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ (ЗАКОН ГУКА)

Знание внутренних сил – необходимое, но недостаточное условие для суждения о прочности тела, поскольку при их расчете не учитываются размеры поперечных сечений. Поэтому вводится понятие напряжений и связанных с ними деформаций.

*Напряжение* – это интенсивность внутренней силы, т. е. это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения. На рис. 7 показано произвольное сечение бруса площадью  $A$ , по которому распределены внутренние силы. Выделим достаточно малый элемент площади сечения  $\Delta A$ , в котором действует внутренняя сила  $\Delta F$ .

Среднее напряжение по площади  $\Delta A$

$$\overline{P}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta A} \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} \right]. \quad (2)$$

В расчетах напряжение всегда связывают с точкой. Это будет полное напряжение:

$$\overline{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta A} [\text{Па}]. \quad (3)$$

Полное напряжение всегда связано с точкой и сечением через данную точку. В каждом новом сечении, проведенном через точку, будет новое полное напряжение.

Полное напряжение раскладывается на координатные оси (рис. 8):

$\sigma$  – нормальное напряжение,

$\tau_{xy}, \tau_{xz}$  – касательные напряжения.

Напряжение – это параметр, по которому можно судить о прочности тела.

*Деформации* в общефизическом смысле – это изменение формы и размеров тела под нагрузкой. В сопротивлении материалов деформации имеют количественное содержание и разделяются на *линейные* и *угловые*.

*Линейные деформации* – это относительные изменения длины бесконечно малых отрезков в результате деформирования тела.

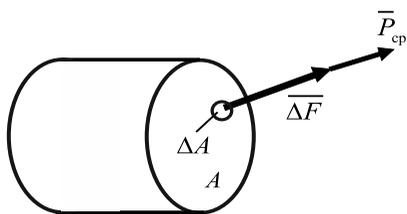


Рис. 7

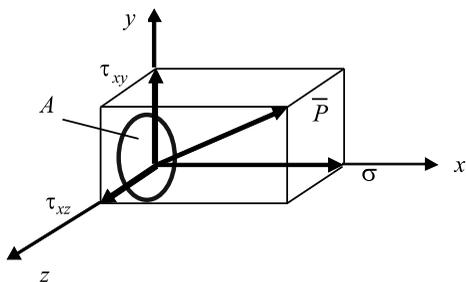


Рис. 8

*Угловые деформации* – изменение первоначально прямых углов в результате деформирования тела между двумя бесконечно малыми отрезками в данной точке в рассматриваемой плоскости.

Рассмотрим для простоты плоское тело (рис. 9). В произвольной точке  $B$  проведем два бесконечно малых взаимно перпендикулярных отрезка  $dx$  и  $dy$ . После приложения нагрузки точка  $B$  заняла положение  $B_1$ , а отрезки  $dx$  и  $dy$  удлинились на  $\Delta dx$  и  $\Delta dy$  и повернулись на углы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

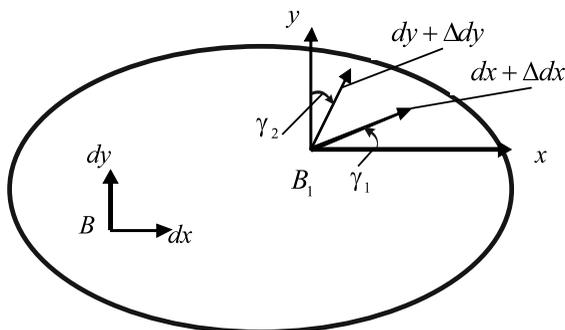


Рис. 9

Линейная деформация в точке  $B$  в направлении  $x$ :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}. \quad (4)$$

Аналогично  $\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ .

Угловая деформация в точке  $B$  в плоскости  $xy$ :

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (5)$$

Таким образом, линейные деформации связаны с точкой и направлением. В каждом новом направлении в данной точке будет другая линейная деформация.

Угловые деформации связаны с точкой, плоскостью и положением прямого угла в плоскости. В каждой новой плоскости, проведенной через точку, будет новая угловая деформация.

*Связь между напряжениями и деформациями (закон Гука).* Между напряжениями и деформациями существует объективная связь. Впервые ее подсмотрел у природы в XVII веке великий английский ученый и изобретатель Роберт Гук. Правда, эту связь он установил для частного случая – работы бруса на растяжение-сжатие:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (6)$$

Этот закон чаще пишут в упрощенном виде:  $\sigma = E\varepsilon$ .

Как видим, закон Гука устанавливает простейшую линейную связь для этого случая между нормальными напряжениями и линейными деформациями в направлении напряжений. В этой формуле  $E$  – *модуль упругости* первого рода (модуль Юнга). Это важнейшая механическая характеристика материала, характеризующая жесткость материала и связывающая напряжения и деформации при упругом деформировании.

Для общего случая нагружения на основе фундаментального закона Гука (6) и закона Пуассона мы в дальнейшем выведем так называемый обобщенный закон Гука.

## 1.6. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

Условие прочности в сопротивлении материалов носит чисто логический характер: максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$  в рассчитываемой детали не должно превышать так называемое допускаемое напряжение  $[\sigma]$ :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}. \quad (7)$$

В формуле (7) максимальным напряжением может быть не только нормальное, но и касательное или эквивалентное напряжение (об этом речь будет идти далее).  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение, недопустимое для данного материала;  $[n]$  – нормативный, или допускаемый, коэффициент запаса прочности, создающий необходимый запас прочности.

## 1.7. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА ВСЕ ЗАДАЧИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ (ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И ПРИНЦИПЫ)

Эти ограничения относятся к материалу детали и нагрузке.

1. Гипотеза о *сплошности материала* детали: предполагается, что материал детали сплошным непрерывным образом заполняет весь ее объем, при этом не учитываются возможные усадочные раковины, пузырьки воздуха, оставшиеся в материале, и т. д.

2. Гипотеза об *однородности и изотропности материала*: свойства материала во всем объеме детали одинаковы и не зависят от направления.

3. Гипотеза об *идеальной упругости материала*. Эта гипотеза используется и в теории упругости и является ограничением на свойства материала и нагрузку.

4. Гипотеза о *малости деформаций* детали. Деформация считается малой, если ею можно пренебречь при расчете опорных реакций. Поэтому инженер в каждом конкретном случае сам решает, какую

деформацию считать малой в зависимости от необходимой точности расчета. Это ограничение на нагрузку, материал детали и ее форму.

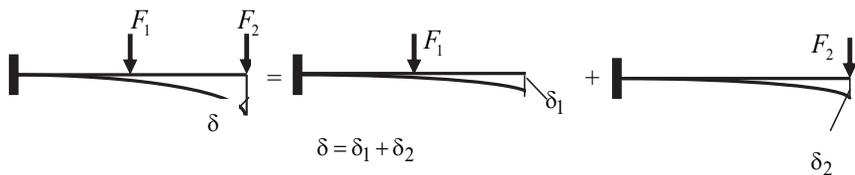


Рис. 10

5. *Принцип независимости действия сил*: если на тело действует несколько сил, то его расчет на прочность и жесткость можно проводить от каждой силы в отдельности, а затем результаты сложить. Этот принцип иллюстрируется на рис. 10.

## Глава 2

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ БРУСА

При этом виде нагружения все внешние силы действуют вдоль продольной оси бруса, а из внутренних сил возникает только нормальная сила (рис. 11).

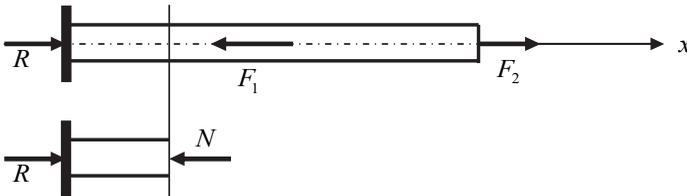


Рис. 11

#### 2.1. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

В сопротивлении материалов формулы для напряжений и деформаций при всех видах нагружения выводятся в одной последовательности.

##### Мысленный эксперимент (рис. 12)

Нанесем мысленно на плоскую боковую поверхность бруса ортогональную сетку (систему параллельных и взаимно перпендикулярных горизонтальных и вертикальных линий) – рис. 12. Затем нагрузим брус растягивающим (или сжимающим) усилием. При этом и горизонтальные, и вертикальные линии сместятся параллельно самим себе, как это показано на рисунке, и что важно, они не искривятся. Вертикальные линии имитируют следы поперечных сечений на боковой поверхности бруса.

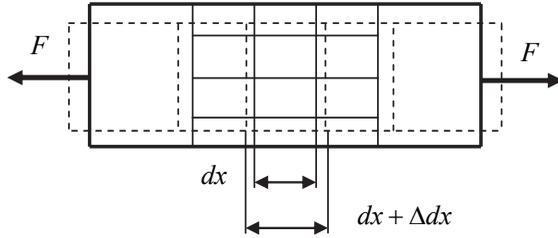


Рис. 12

На основе этого эксперимента можно выдвинуть *гипотезу плоских поперечных сечений*: поперечные сечения, плоские и перпендикулярные оси бруса до приложения нагрузки, после приложения нагрузки остаются плоскими и перпендикулярными оси бруса.

Далее мы будем опираться на эту гипотезу.

### Статическое обследование задачи

Цель этого обследования – установить на основе элементарного здравого смысла, какие возникают напряжения в поперечных сечениях, и связать их с внутренними силами самой общей интегральной зависимостью.

На рис. 13 показано произвольное поперечное сечение бруса. Во всех точках сечения возникают только нормальные напряжения, потому что продольные волокна удлиняются (или укорачиваются при сжимающей нагрузке). Как распределяются эти напряжения по сечению, пока неизвестно, но формула (а) очевидна:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (a)$$

Эта формула – результат статического обследования.

### Геометрическое обследование

Пусть расстояние между двумя вертикальными линиями до приложения нагрузки будет  $dx$  (см. рис. 12). После приложения нагрузки это расстояние станет  $dx + \Delta dx$ . Вследствие гипотезы плоских сечений линейная деформация во всех точках любой из этих вертикальной линии будет постоянной:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \text{const.} \quad (б)$$

Формула (б) по сути – это математическая запись закона плоских поперечных сечений и результат геометрического обследования.

Сделаем теперь задел на будущее: сформулируем закон поперечных деформаций (закон Пуассона). При растяжении бруса его продольные размеры увеличиваются, а поперечные – уменьшаются. Пусть поперечное сечение бруса – прямоугольное (рис. 14). Первоначальный его размер показан сплошными линиями, а после деформации – пунктирными. Поперечные деформации

$$\varepsilon_y = \frac{b-b_1}{b}, \quad \varepsilon_z = \frac{a-a_1}{a}.$$

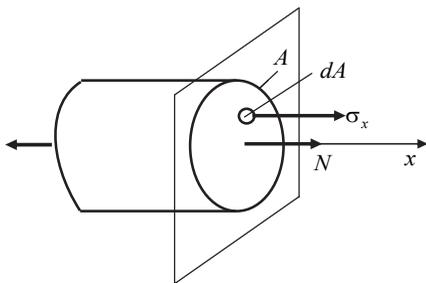


Рис. 13

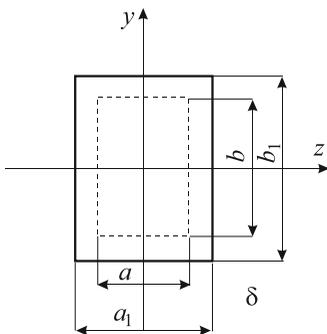


Рис. 14

Пуассон подсмотрел у природы связь между поперечными и продольными деформациями:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\text{поп}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}. \quad (8)$$

Оказалось, что поперечные деформации не зависят от направления и являются постоянной долей продольной деформации.  $\mu$  – коэффициент Пуассона (механическая характеристика материала), определяющий эту долю.

**Физическое обследование** дает связь между напряжениями и деформациями. В данном случае она очевидна – это закон Гука:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (в)$$

### Синтез

Решим совместно уравнения (а), (б) и (в).

С учетом (б) из (в):  $\sigma_x = \text{const}$ . С учетом этого из (а) получаем формулу для напряжений:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (9)$$

Выведем теперь формулу для расчета удлинений участка бруса длиной  $l$ . Из (б) с учетом (в):  $\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x dx}{E} = \frac{N dx}{EA}$ .

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA}. \quad (10)$$

Если на рассматриваемом участке  $N = \text{const}$ ,  $A = \text{const}$ , формула (10) упрощается:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (11)$$

Заметим, что в формуле (11)  $\frac{EA}{l} = c_{p-c}$  – жесткость бруса при растяжении-сжатии (здесь учтены все параметры, влияющие на жесткость бруса). Поэтому формула (11) легко сводится к общефизической формуле, связывающей силу, деформацию и жесткость:  $\Delta l = \frac{N}{c}$ .

## 2.2. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]. \quad (12)$$

Если площадь сечения  $A$  по длине бруса не изменяется, то условие прочности упрощается:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (13)$$

## 2.3. ТРИ ТИПА ЗАДАЧ ПРИ РАСЧЕТАХ НА ПРОЧНОСТЬ

1. *Проверочный расчет*, при котором просто проверяется прочность по формуле (12) или (13).

2. *Расчет нагрузки*

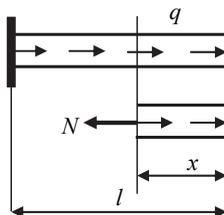
Из (13):  $N_{\max} \leq [\sigma]A$ .

3. *Конструкторский расчет* (расчет размеров сечения)

Из (13):  $A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$ .

**Пример.** Проверить брус на прочность и найти его удлинение при

$$q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad l = 1 \text{ м},$$
$$A = 1 \text{ см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$
$$\sigma_{\text{пред}} = 500 \text{ МПа}, \quad [n] = 2.$$



Решение

$$N(x) = qx. \quad N_{\max} = ql. \quad \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{10^4 \cdot 1}{10^{-4}} = 100 \text{ МПа}.$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]} = \frac{500}{2} = 250 \text{ МПа}. \quad \sigma_{\max} < [\sigma] \text{ – брус прочный.}$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA} = \int_0^l \frac{qxdx}{EA} = \frac{ql^2}{2EA} = \frac{10^4 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 0,25 \text{ мм}.$$

## 2.4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Как было сказано ранее (в теоретической механике), в статически неопределимых системах рассчитать опорные реакции с помощью одних уравнений равновесия невозможно. Покажем на примере фермы, как это можно сделать методами сопротивления материалов. Но сначала

несколько слов о фермах – уникальных конструкциях, придуманных инженерами.

*Ферма* – конструкция, состоящая из стержней, связанных между собой с помощью шарниров, привязанная к фундаменту также только шарнирами и вся нагрузка должна быть приложена только в узлах (в шарнирах). Особенность фермы в том, что все ее стержни работают только на растяжение или сжатие. Покажем это на примере простой статически определимой фермы на рис. 15.

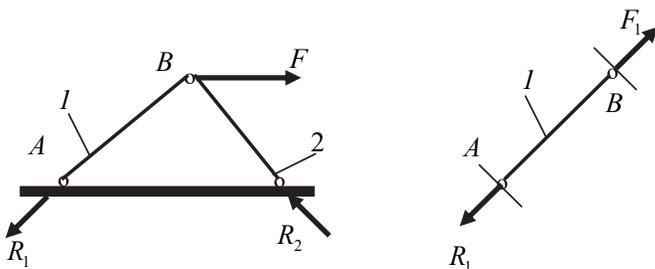


Рис. 15

Вырежем мысленно стержень  $1$  по шарнирам. В шарнирах на стержень действуют только силы  $F_1, R_1$ , направление которых мы не знаем. Уравнение равновесия  $\Sigma m_B = 0$  возможно только в том случае, если сила  $R_1$  направлена вдоль стержня. Аналогично из уравнения равновесия  $\Sigma m_A = 0$  получим, что и сила  $F_1$  действует вдоль стержня. Обе реакции в этой ферме легко находятся из уравнений равновесия.

Теперь рассмотрим статически неопределимую ферму (рис. 16, а).

Ферма для простоты взята симметричной, стержни  $1$  и  $3$  – одинаковые. Имеем три опорные реакции, следовательно, ферма один раз статически неопределима, поскольку имеем систему сходящихся сил (все внешние силы сходятся в точке  $B$ ), для которой можно использовать только два уравнения равновесия.

Статическая неопределимость раскрывается в определенной последовательности.

### Статика

Записываются возможные уравнения равновесия. В данной задаче их удобно записать через внутренние силы в стержнях, поскольку, как

это очевидно, они равняются соответствующим опорным реакциям. Для этого мысленно вырезаем узел  $B$  (рис. 16, б) и уравнения равновесия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= -N_1 \sin \alpha + N_3 \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_1 = N_3; \\ \Sigma Y &= N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha = F. \end{aligned} \right\}$$

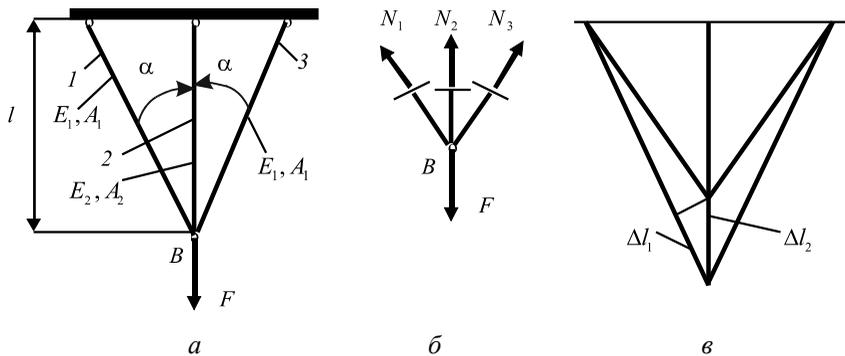


Рис. 16

Из второго уравнения с учетом первого получим одно уравнение статики с двумя неизвестными:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = F. \quad (14)$$

### Геометрия

Теперь надо получить уравнение деформаций, дающее связь между деформациями входящих в систему элементов. В данном примере – это соотношение между удлинениями стержней (рис. 16, в). На этом рисунке  $\Delta l_2$  очевидно, а  $\Delta l_1$  получается как разность между новой длиной стержня  $l$  и спроецированной на него первоначальной длиной этого стержня.

Из полученного прямоугольного треугольника получаем уравнение деформаций (при этом учитывается принцип малости деформаций – изменением угла  $\alpha$  пренебрегаем):

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (15)$$

## Физика

Физические уравнения связывают силовое (14) и геометрическое (15) уравнения. Они составляются на основе уравнения (11):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

Учитывая, что (рис. 16, а)  $l_2 = l$ ,  $l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}$ , получим:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}. \quad (16)$$

## Синтез

Решая совместно уравнения (14)–(16), получаем:

$$N_1 = \frac{FE_1 A_1 \cos^2 \alpha}{E_2 A_2 + 2E_1 A_1 \cos^3 \alpha}, \quad N_2 = \frac{FE_2 A_2}{E_2 A_2 + 2E_1 A_1 \cos^3 \alpha}. \quad (17)$$

Проанализируем формулы (17).

Допустим, что стержень  $l$  начинает утоньшаться все более и более ( $E_1 A_1 \Rightarrow 0$ ). Казалось бы, он должен разрушиться. Но оказывается, что скорее разрушится стержень 2, что следует из формул (17), поскольку  $N_1 \Rightarrow 0$ , а  $N_2$  увеличивается, иными словами, стержень 1 передает свою нагрузку на стержень 2.

Аналогичная ситуация возникнет при утоньшении стержня 2 – он будет передавать свою нагрузку на стержень 1.

Теперь рассмотрим другую задачу: ферма та же, что и на рис. 16, а, но нагрузка  $F$  отсутствует, а вся ферма нагрелась от увеличения температуры на  $\Delta t$ . В этом случае в ферме возникнут температурные напряжения и деформации. Они рассчитываются по такому же алгоритму.

Очевидно, что уравнение статики примет вид  $2N_1 \cos \alpha + N_2 = 0$ .

Уравнение деформаций не изменится, а в физических уравнениях на основе принципа независимости действия сил появятся дополнительные температурные слагаемые:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha} + \beta_1 \Delta t \frac{l}{\cos \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2} + \beta_2 \Delta t \cdot l.$$

В этих уравнениях  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты линейного расширения соответствующих стержней, а далее также совместно решаются полученные уравнения.

И, наконец, рассмотрим еще одну задачу. Та же ферма, без нагрузки, но изготовлена с дефектом: стержень 2 короче на небольшую величину  $\delta$  (рис. 17, а). Но ферму собрали, приложив определенные усилия, и в ней возникли так называемые монтажные напряжения и внутренние силы. Они рассчитываются по аналогичному алгоритму.

Уравнение статики будет такое же, как и в предыдущей задаче:  $2N_1 \cos \alpha + N_2 = 0$ .

Получим теперь деформационное уравнение (рис. 17, б).

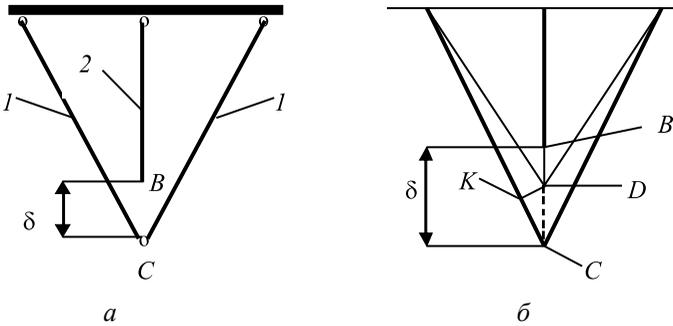


Рис. 17

При сборке стержень 2 растянули и точка  $B$  совместилась с точкой  $C$  (рис. 17, б). Стержень 2 как пружина растянулся и теперь стремится сжаться, но при этом он сжимает и стержни 1. Точка  $C$  занимает окончательное положение в точке  $D$ . В итоге получилось:

$$\Delta l_2 = BD, \quad DC = \delta - \Delta l_2, \quad \Delta l_1 = KC.$$

Из треугольника  $KCD$  получаем деформационное уравнение

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2) \cos \alpha.$$

Физические уравнения приобретают вид

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}.$$

Теперь подведем итоги и отметим особенности статически неопределимых задач.

1. В статически неопределимых системах распределение внутренних сил зависит не только от внешней нагрузки, но и от жесткостей входящих в нее элементов. Чем жестче элемент, тем большую нагрузку он воспринимает и наоборот (см. рис. 16).

2. В таких системах возникают температурные напряжения и внутренние силы от изменения температуры (см. рис. 16).

3. В статически неопределимых системах возникают монтажные напряжения и внутренние силы от неточности изготовления входящих в нее элементов (см. рис. 17).

4. Расчет таких систем довольно затруднителен и поэтому, как правило, он выполняется с использованием компьютеров.

## Глава 3

# МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Механические характеристики материалов определяются при испытаниях специальных образцов, изготовленных из данных материалов. Существует великое множество испытаний. Мы рассмотрим самое распространенное и информативное испытание на растяжение и сжатие образцов из малоуглеродистой стали и серых чугунов – наиболее широко используемых в машиностроении материалов.

### 3.1. ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ ОБРАЗЦОВ ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

На рис. 18 изображен стандартный образец для испытания на растяжение.

$d_0 = 8$  мм,  $l_0 = 80$  мм – размеры рабочей части образца; на концах образца находятся технологические утолщения для закрепления в захватах испытательной машины.

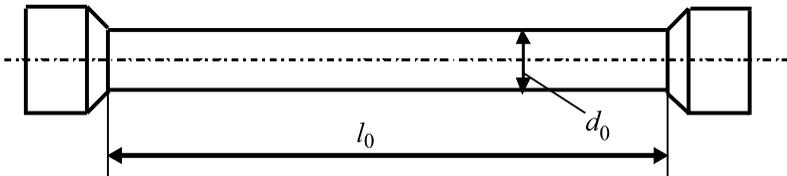


Рис. 18

При испытаниях образец растягивается медленно возрастающими силами  $F$  (рис. 19, а). При этом строится машинная диаграмма растяжения: зависимость удлинения рабочей части образца  $\Delta l$  от  $F$ .

Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали имеет характерный вид (рис. 19, б). Рассмотрим эту диаграмму по участкам и выясним, какие механические характеристики определяются.

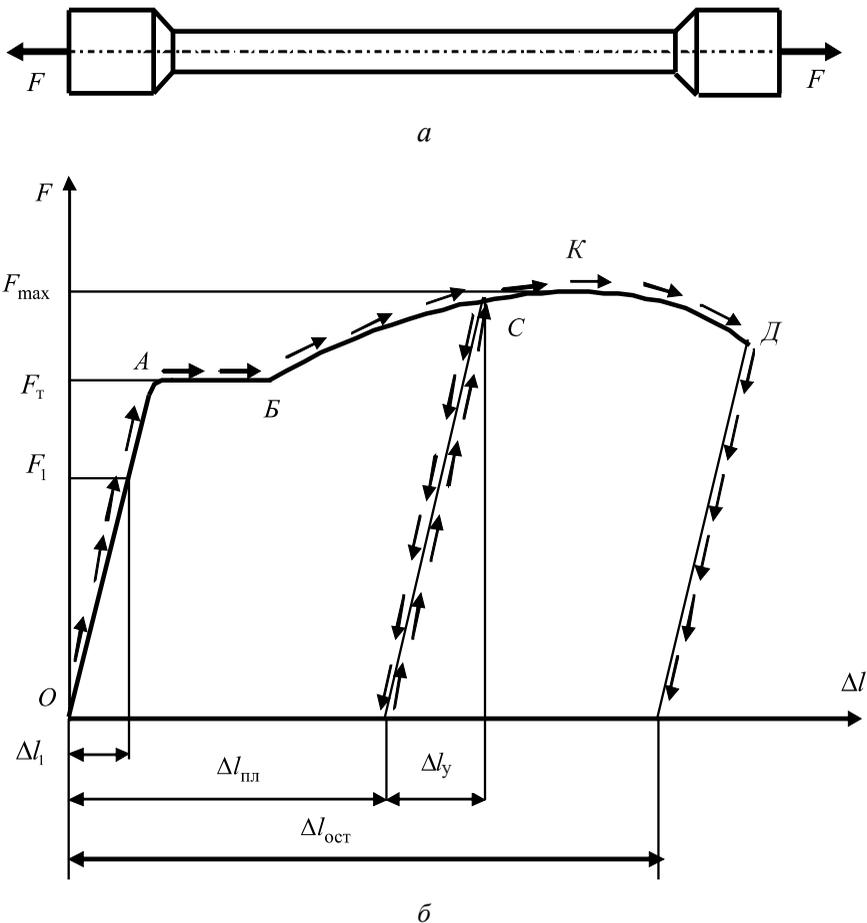


Рис. 19

Участок *OA*. Это участок упругого деформирования материала, на котором соблюдается закон Гука и линии нагрузки и разгрузки совпадают. На этом участке определяется модуль упругости первого рода  $E$ . Для этого в любой точке участка фиксируется растягивающая сила  $F_1$

и соответствующее  $\Delta l_1$ . Из формулы (11):  $E = \frac{N \cdot l}{A \cdot \Delta l}$ . С учетом того, что у нас  $N = F_1$ ,  $l = l_0$ ,  $A = A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ ,  $\Delta l = \Delta l_1$ , получим формулу для определения модуля упругости:

$$E = \frac{4F_1 l_0}{\pi d_0^2 \Delta l_1}.$$

*Участок АБ.* Это площадка текучести. На этом участке образец вытягивается без роста нагрузки. Явление текучести материала наблюдается только у малоуглеродистых сталей. Как известно, стали состоят из кристаллов феррита (чистое железо) и углеродистых (перлитовых) прослоек. Перлитовые прослойки плохо сопротивляются касательным напряжениям. Когда максимальные касательные напряжения в растягиваемом образце (как будет показано далее, они имеют место в сечениях, расположенных под углом  $\pm 45^\circ$  к оси образца) достигают критического значения, перлитовые прослойки, которые оказались ориентированными в этих направлениях, внезапно в массовом порядке разрушаются, в результате чего образец и вытягивается. Это так называемое микроразрушение материала, при котором его несущая способность сохраняется. На этом участке определяется важнейшая прочностная характеристика материала – предел текучести (соответствующее этой площадке напряжение):

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

*Участок БК.* Это участок упрочнения материала. Нагрузка растет медленнее, микроразрушение перлитовых прослоек продолжается. В произвольной точке *С* участка образец разгружается. При этом линия разгрузки идет параллельно участку *ОА*. Если теперь образец нагрузить вновь, то у него будет отсутствовать площадка текучести, а его область упругого деформирования возрастет, как это видно из диаграммы. Поэтому этот участок и называется участком упрочнения.

Это явление упрочнения материала широко используется в технике и называется *наклепом* или *нагартовкой*. Частные виды наклепа: дробеструйная, пескоструйная или водоструйная обработка поверхности детали, в результате которых упрочняется поверхностный слой детали.

Из рис. 19 видно, что

$$\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_{пл},$$

где  $\Delta l_y$  – упругая часть деформации, а  $\Delta l_{пл}$  – пластическая (остаточная) часть деформации, вызванная необратимым процессом микроразрушения перлитовых прослоек.

*Участок КД* – участок разрушения. В точке *К* начинается процесс макроразрушения, который с точки зрения прочности детали уже недопустим: в самом слабом месте рабочей части образца образуется *шейка* – местное сужение (рис. 20), которое быстро развивается.

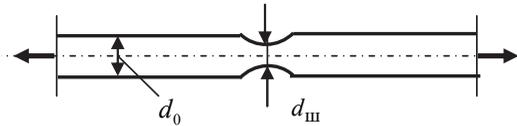


Рис. 20

В точке *К* определяется вторая важнейшая прочностная характеристика материала – предел прочности при растяжении:

$$\sigma_{пчр} = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

*Точка Д.* В этой точке образец разрывается на две части. Линия снятия нагрузки параллельна линии *ОА*. По этой точке определяются две характеристики пластических свойств материала:

- относительное остаточное удлинение при разрушении

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} 100 \%;$$

- относительное остаточное сужение сечения при разрушении

$\psi = \frac{A_0 - A_{\min}}{A_0} 100 \%$ , где  $A_{\min} = \frac{\pi d_{\text{ш}}^2}{4}$  – площадь сечения в месте разрыва.

Таким образом, при испытаниях на растяжение образцов из малоуглеродистой стали *определяются пять важных механических характеристик*:  $E$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{пчр}$ ,  $\delta$ ,  $\psi$ .

Заметим, что машинная диаграмма  $F - \Delta l$  не только отражает свойства материала, но и зависит от размеров образца: при испытаниях более тонкого образца она вытянется вдоль оси абсцисс, а более толстого образца – вдоль оси ординат. Желательно, конечно, иметь диаграмму, отражающую только свойства материала. Для этого нужно машинную диаграмму перестроить в условную диаграмму растяжения  $\sigma - \varepsilon$ , где условное напряжение  $\sigma = \frac{F}{A_0}$ , линейная деформация  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  (рис. 21).

Эта диаграмма называется условной, потому что она не учитывает изменение площади поперечного сечения при подсчете условного напряжения, но зато она отражает только свойства материала. Кстати, до точки  $K$ , по которой определяется  $\sigma_{\text{пчр}}$ , условные напряжения практически совпадают с истинными напряжениями  $\sigma_{\text{ист}} = \frac{F}{A_{\text{ист}}}$ .

Здесь  $A_{\text{ист}}$  – истинная площадь сечения.

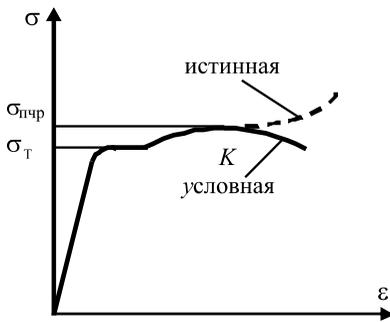


Рис. 21

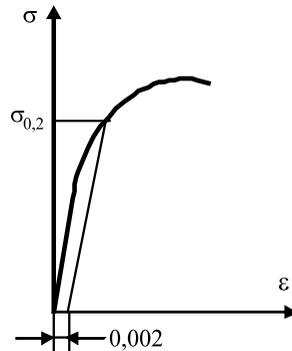


Рис. 22

Наконец, заметим, что для материалов, у которых нет площадки текучести, иногда вводят понятие условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$  – это такое напряжение, при котором при разгрузке образца деформация  $\varepsilon = 0,002$  (рис. 22).

### 3.2. ИСПЫТАНИЕ НА СЖАТИЕ ОБРАЗЦОВ ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Схема испытания на сжатие показана на рис. 23. Образцы – сравнительно короткие, чтобы при сжатии не теряли устойчивость.

Малоуглеродистая сталь – пластичный материал (далее об этом будет сказано подробнее). Пластичные материалы при сжатии не разрушаются, потому образец сплющивается до тех пор, пока хватает усилия пресса. Предел прочности при сжатии  $\sigma_{\text{ПЧС}}$  отсутствует, но можно сказать, что  $\sigma_{\text{ПЧС}} \Rightarrow \infty$ .

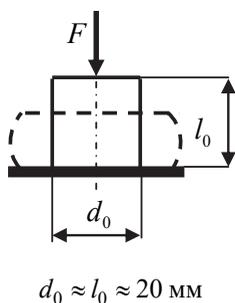


Рис. 23

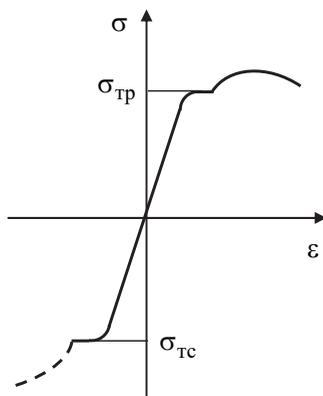


Рис. 24

На рис. 24 совмещены диаграммы растяжения и сжатия, из которых видно, что модули упругости  $E$  при растяжении и сжатии одинаковы, пределы текучести также по модулю равны:  $\sigma_{\text{Тр}} = |\sigma_{\text{Тс}}| = \sigma_{\text{T}}$ , поэтому у предела текучести индексы растяжения или сжатия не ставят. Из этого следует, что для малоуглеродистых сталей из испытаний на сжатие новой информации не получают, и поэтому их проводят только для новых материалов.

### 3.3. ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ОБРАЗЦОВ ИЗ СЕРОГО ЧУГУНА

Испытания проводятся на таких же образцах и определяются те же механические характеристики. Серые чугуны – хрупкие материалы и разрушаются при сжатии. Поэтому у серых чугунов определяется также предел прочности при сжатии  $\sigma_{\text{пчс}}$ . Особенность всех хрупких материалов в том, что они лучше воспринимают сжимающие нагрузки, чем растягивающие. Это хорошо видно из рис. 25, на котором совмещены диаграммы растяжения и сжатия:  $|\sigma_{\text{пчс}}| > \sigma_{\text{пчр}}$ . Модули упругости при растяжении и сжатии одинаковы.

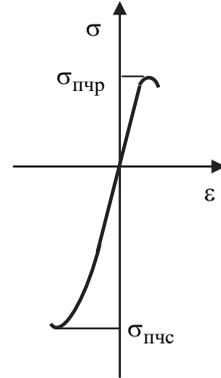


Рис. 25

### 3.4. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАЛОУГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ И СЕРЫХ ЧУГУНОВ

В табл. 1 приведены усредненные данные. Характеристики пластичности  $\delta$ ,  $\psi$  у малоуглеродистых сталей существенно выше, чем у чугунов. Малоуглеродистые стали – типичные представители пластичных материалов, а серые чугуны – хрупких материалов.

Таблица 1

Материал	$E$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_{\text{пчр}}$ , МПа	$\sigma_{\text{пчс}}$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %
Малоуглеродистая сталь	$2 \cdot 10^5$	300	450	–	25	65
Серые чугуны	$1 \cdot 10^5$	–	100	500	2	2

Все эти характеристики зависят от температуры. Приведенные данные соответствуют температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ .

### 3.5. ХРУПКОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

В природе не существует ни хрупких, ни пластичных материалов, а существует хрупкое или пластичное состояние материала в зависимости от температуры, скорости нагружения и поля напряжений в детали.

Чем выше температура, меньше скорость нагружения и равномернее поле напряжений, тем материал более склонен к пластичному состоянию, а чем меньше температура, выше скорость нагружения и неравномернее поле напряжений, тем материал более склонен к хрупкому состоянию.

Но тем не менее материалы условно подразделяют на хрупкие и пластичные в зависимости от их поведения в нормальных условиях:  $t = 20^\circ\text{C}$ , статическая нагрузка и равномерное поле напряжений. Какого-то единого критерия не существует, но есть весьма приближенный критерий: если  $\delta < 5\%$ , материал считается хрупким. По этому критерию видно, что серые чугуны – хрупкий материал, а малоуглеродистые стали – пластичный.

## Глава 4

# ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

### 4.1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЧКИ

Как мы уже знаем, напряжение связано с точкой и с сечением, проведенным через точку. Поэтому в каждой точке действует бесчисленное количество напряжений.

*Напряженное состояние точки* – это совокупность всех напряжений по всем возможным сечениям, которые можно провести через данную точку.

Для изучения напряженного состояния точки вокруг нее мысленно вырезают кубик с бесконечно короткими ребрами и показывают составляющие полных напряжений, действующих по граням этого кубика (рис. 26).

Эти составляющие напряжений записывают в виде матрицы, которую назвали *тензором напряжений*  $T_H$ .

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Далее будет показано, что зная тензор напряжений, можно определить напряжения по любому сечению, проведенному через данную точку. Заметим, что на рис. 26 не показаны напряжения, действующие по невидимым граням кубика, поскольку они равны и противоположно направлены соответствующим напряжениям на противоположной видимой площадке.

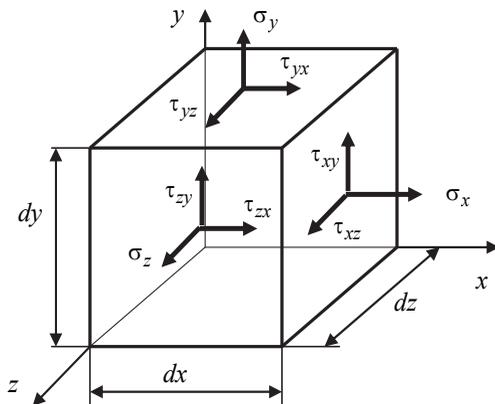


Рис. 26

*Закон парности касательных напряжений:* касательные напряжения, действующие во взаимно перпендикулярных площадках и направленные либо к общему ребру, либо от него, равны по величине.

Докажем этот закон. Запишем уравнение равновесия (с учетом напряжений по невидимым граням кубика):

$$\begin{aligned} \Sigma m_x = & \tau_{xz} dydz \frac{dy}{2} - \tau_{xz} dydz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dydz \frac{dz}{2} + \\ & + \tau_{xy} dydz \frac{dz}{2} - \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} + \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} + \tau_{yz} dx dz dy - \\ & - \tau_{zy} dx dy dz + \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} - \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} = 0, \end{aligned}$$

откуда получим:  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Аналогично из уравнений равновесия:  $\Sigma m_y = 0$  и  $\Sigma m_z = 0$ , будем иметь равенство двух других пар касательных напряжений.

Итак, закон парности касательных напряжений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Мы получили, что тензор напряжений (18) описывается не девятью, а шестью напряжениями в рассматриваемой точке.

Вращая кубик вокруг его центра масс, изменяем положения его граней, и напряжения на них также изменяются. С помощью тензорного анализа доказано, что кубик может занять при этом только одно положение, когда на его гранях исчезнут касательные напряжения. Такие грани называются *главными гранями или площадками*, действующие по ним нормальные напряжения – *главными напряжениями*, а оси координат, перпендикулярные главным площадкам, – *главными осями*.

Главные напряжения обозначаются:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При этом соблюдается иерархия – с учетом знака напряжения:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

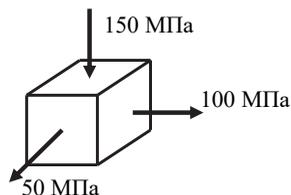
### Пример

Кубик ориентирован главными площадками.

Требуется расставить индексы у главных напряжений.

Решение

$$\sigma_1 = 100 \text{ МПа}, \sigma_2 = 50 \text{ МПа}, \sigma_3 = -150 \text{ МПа}.$$



Виды напряженных состояний классифицируются в соответствии с главными напряжениями (рис. 27).



Рис. 27

Заметим, что первые два напряженных состояния называются также *сложными*, а последнее одноосное – *простым* напряженным состоянием.

Докажем теперь, что *зная напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, можно найти напряжения в любой произвольной площадке в данной точке.*

Пусть через данную точку (кубик на рис. 28, *a*) проведено произвольное сечение с нормалью  $\nu$ . Отсеченная от кубика призма  $OBCD$  показана на рис. 28, *б*. Напряжения по граням кубика известны (рис. 28, *б*), направляющие косинусы нормали  $\nu$  также известны:  $l, m, n$ . Требуется найти составляющие полного напряжения  $X, Y, Z$  по проведенному сечению.

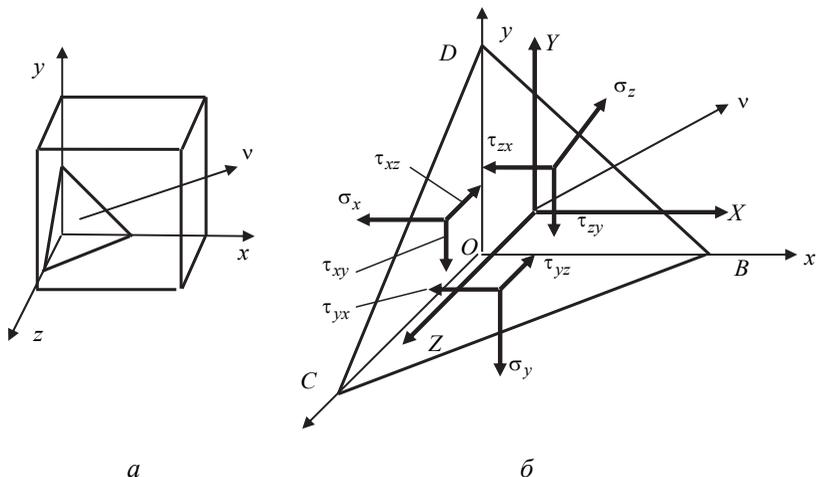


Рис. 28

Обозначим через  $A$  площадь треугольника  $BCD$ , тогда:

$A_x = Al$  – площадь треугольника  $OCD$ ,

$A_y = Am$  – площадь треугольника  $OBC$ ,

$A_z = An$  – площадь треугольника  $OBD$ .

Составим уравнения равновесия для призмы:

$$\Sigma F_x = XA - \sigma_x A_x - \tau_{yx} A_y - \tau_{zx} A_z = 0,$$

$$\Sigma F_y = YA - \sigma_y A_y - \tau_{xy} A_x - \tau_{zy} A_z = 0,$$

$$\Sigma F_z = ZA - \sigma_z A_z - \tau_{yz} A_y - \tau_{xz} A_x = 0,$$

из которых и выразим искомые напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Рассмотрим две практические задачи теории напряженного состояния точки.

**Задача 1.** Точка находится в плоском напряженном состоянии и ориентирована главными площадками (рис. 29). Требуется найти нормальное и касательное напряжения в площадке, проведенной под произвольным углом  $\alpha$  к площадке с одним из главных напряжений.

**Решение**

Направляющие косинусы нормали  $v$ :  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \sin \alpha$ ,  $n = 0$ .

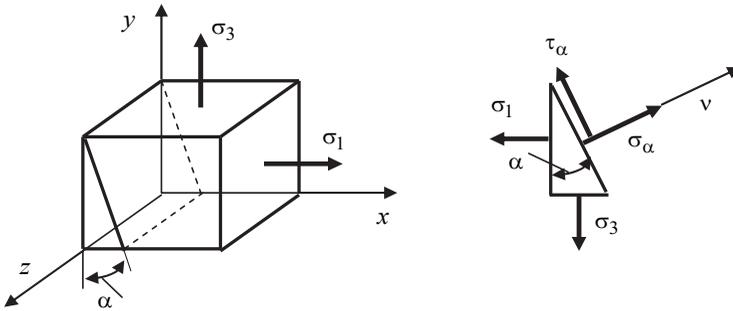


Рис. 29

Напряжения:  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_y = \sigma_3$ ,  $\sigma_z = 0$ , касательные напряжения равны нулю.

По формулам (20):  $X = \sigma_1 \cos \alpha$ ,  $Y = \sigma_3 \sin \alpha$ ,  $Z = 0$ .

Проецируя  $X$  и  $Y$  на направления  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из второй формулы (21) следует, что  $\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|$  действуют в диагональных сечениях при  $\alpha = \pm 45^\circ$ .

**Задача 2.** Точка находится в плоском напряженном состоянии (рис. 30). Требуется найти главные напряжения и положение главных площадок.

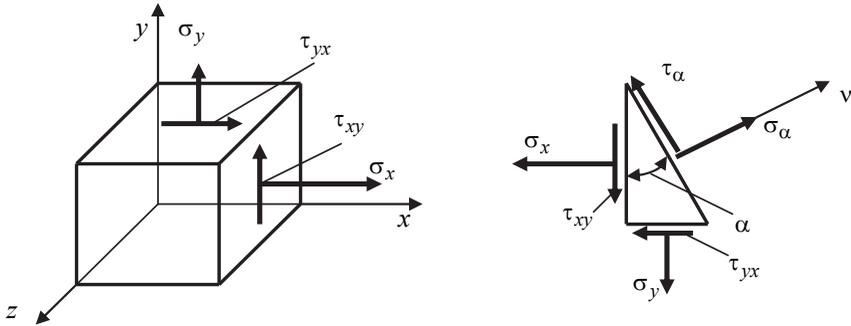


Рис. 30

Одно главное напряжение уже известно:  $\sigma_z = 0$ . Для нахождения двух других главных напряжений вырезаем из кубика призму (рис. 30), наклонная плоскость которой повернута вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$ . Направляющие косинусы нормали  $\nu$  этой плоскости:  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \sin \alpha$ ,  $n = 0$ . Затем, как и в задаче 1, с помощью формул (20) определяем  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Чтобы наклонная плоскость стала главной площадкой, надо найти такой ее угол поворота  $\alpha_0$ , при котором исчезнет касательное напряжение ( $\alpha_0$  – угол поворота кубика вокруг оси  $z$ , при котором все его грани становятся главными):

$$\tau_{\alpha_0} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (23)$$

Формула (23) соответствует двум углам  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ . Для определения двух других главных напряжений надо угол  $\alpha_0$  подставить в первую формулу (21):

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (24)$$

## 4.2. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

По аналогии с понятием напряженного состояния точки вводится понятие *деформированного состояния в точке* – это совокупность всех линейных и угловых деформаций по всем возможным направлениям и плоскостям, которые можно провести через данную точку. Деформированное состояние точки также характеризуется тензором деформаций:

$$T_d = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (25)$$

*Главные деформации* – это линейные деформации в направлении главных напряжений. Они обозначаются, как и главные напряжения,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  при соблюдении иерархии  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ . Главные деформации обозначены на рис. 31 через изменение длины ребер кубика в результате его деформирования.

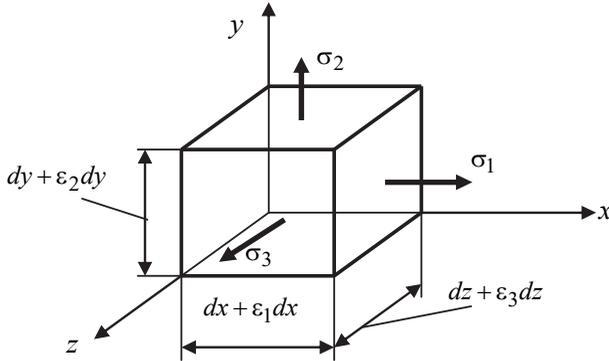


Рис. 31

Подсчитаем относительное изменение объема  $e$  кубика при его деформировании:

$$e = \frac{V_1 - V}{V},$$

где  $V = dx dy dz$  – объем кубика до его деформирования;  $V_1 = dx(1 + \varepsilon_1) dy(1 + \varepsilon_2) dz(1 + \varepsilon_3)$  – объем кубика после его деформирования. Подставляя  $V$  и  $V_1$  в формулу для  $e$  с точностью до величин высшего порядка малости, получаем

$$e \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Поскольку изменения объема вызывают только линейные деформации, эту формулу можно обобщить на произвольное напряженное состояние:

$$e \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (26)$$

Выведем теперь *обобщенный закон Гука* на основе частного закона Гука (6) и закона Пуассона (8). Обратимся к рис. 31, на котором изображена точка, ориентированная в главных площадках, по которым

действуют главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Воспользуемся принципом независимости действия сил. Допустим, что действует одно напряжение  $\sigma_1$ . Соответствующие ему линейные деформации согласно законам Гука и Пуассона показаны правее  $\sigma_1$  в табл. 2. Точно так же поступаем с напряжениями  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  и заполняем табл. 2.

Т а б л и ц а 2.

Напряжение	Деформации		
	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$
$\sigma_1$	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$
$\sigma_2$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$
$\sigma_3$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Теперь складываем по столбцам табл. 2 линейные деформации и получаем обобщенный закон Гука для точки, ориентированной в главных площадках:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Легко понять, что если точка ориентирована произвольным образом, то линейные деформации вызывают только нормальные напряжения, а угловые деформации вызывают касательные напряжения, причем каждая пара касательных напряжений – угловую деформацию в плоскости своего действия (рис. 32).

Обобщенный закон Гука для произвольно ориентированной точки описывается формулами (28):

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right], \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}.
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

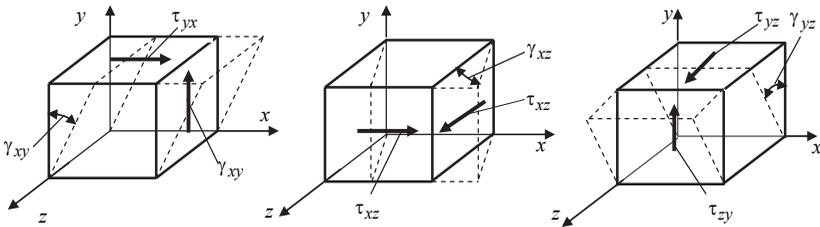


Рис. 32

В формулах (28)  $G$  – модуль упругости второго рода.

С учетом обобщенного закона Гука формула (26) для объемной деформации примет вид

$$e = \frac{1-\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (29)$$

Определим теперь удельную потенциальную энергию при объемном напряженном состоянии. Возьмем кубик, ориентированный в главных

площадках (см. рис. 31).  $F_x = \sigma_1 dydz$  – сила, связанная с напряжением  $\sigma_1$ , совершает при деформировании кубика работу на перемещении  $\varepsilon_1 dx$ :

$$W_x = \frac{F_x}{2} \varepsilon_1 dx = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 dx dy dz}{2}$$

(берется среднее значение силы, поскольку она возрастает от нуля до конечного значения). Соответственно

$$W_y = \frac{\sigma_2 \varepsilon_2 dx dy dz}{2}, \quad W_z = \frac{\sigma_3 \varepsilon_3 dx dy dz}{2}.$$

Вся работа деформирования переходит в потенциальную энергию кубика  $U$ :

$$U = W_x + W_y + W_z = \frac{(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dx dy dz}{2}.$$

Разделим это выражение на объем кубика  $V = dx dy dz$  и получим *удельную потенциальную энергию деформирования  $u$* :

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (30)$$

Подставляя в (30) формулы (28), получаем

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right]. \quad (31)$$

Разделим теперь  $u$  на *удельную энергию изменения объема  $u_{об}$*  и *удельную энергию изменения формы  $u_{ф}$*  на кубике, ориентированном в главных площадках:  $u = u_{об} + u_{ф}$  (рис. 33).

Чтобы выделить из  $u$  (рис. 33, *а*) объемную энергию  $u_{об}$  (рис. 33, *б*), надо из главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  выделить одинаковые напряжения  $\sigma_0$  (рис. 33, *б*). Для нахождения  $\sigma_0$  надо приравнять относительное изменение объема  $e$  (формула 29) в точках рис. 33, *а* и рис. 33, *б*:

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = e = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0^2,$$

откуда

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (32)$$

Далее по формуле (31) находим

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (33)$$

Теперь очевидно, что главные напряжения в кубике на рис. 33, в, в котором изменяется только форма:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_3 - \sigma_0.$$

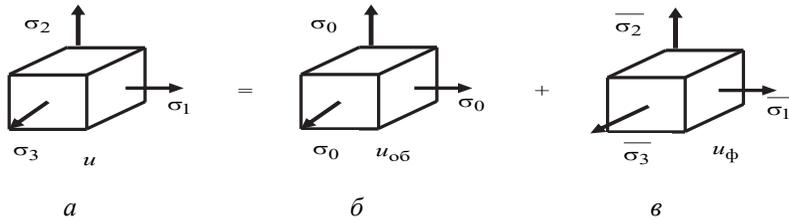


Рис. 33

Подставляя эти напряжения в (31), получаем

$$u_{\Phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3). \quad (34)$$

## Глава 5

# ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ (ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ)

### 5.1. НАЗНАЧЕНИЕ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Теории прочности нужны для расчета на прочность точек, находящихся в сложном напряженном состоянии.

Введем некоторые понятия.

*Эквивалентные напряженные состояния:* точки находятся в эквивалентных напряженных состояниях, если при увеличении действующих на них напряжений в одно и то же число раз они одновременно достигают предельных напряженных состояний.

*Предельного напряженного состояние* – это такое напряженное состояние, при котором в материале точки начинают происходить качественные изменения: материал или разрушается, или начинает течь.

*Идея всех теорий прочности заключается в том, что точку, находящуюся в сложном напряженном состоянии, сводят к точке, находящейся в условиях эквивалентного одноосного растяжения с напряжением  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  (рис. 34). И непосредственной задачей теорий прочности является выразить эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  через главные напряжения исходной точки.*

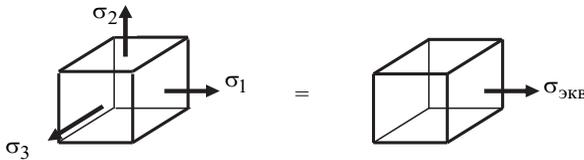


Рис. 34

Мы рассмотрим три теории прочности, наиболее широко используемые в инженерной практике.

## 5.2. ТЕОРИЯ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (3-я ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ)

Эта теория основана на четкой физической идее: точки являются эквивалентными в смысле прочности, если у них одинаковы максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$ , поскольку пластичные материалы начинают течь в направлении  $\tau_{\max}$ , а хрупкие – разрушаться.

Находим  $\tau_{\max}$  в исходной точке (формула для  $\tau_{\max}$  была получена в задаче 1 теории напряженного состояния точки):  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

В эквивалентной точке:  $\sigma_1 = \sigma_{\text{эКВ}}$ ,  $\sigma_3 = 0$  и  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{эКВ}}}{2}$ .

Приравниваем эти  $\tau_{\max}$  и получаем

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (35)$$

## 5.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ (4-я ТЕОРИЯ)

Эксперименты, проведенные в разных странах, показали, что на прочность точки практически влияет только энергия формоизменения  $u_{\phi}$ . Поэтому согласно 4-й теории прочности точки являются эквивалентными в смысле прочности, если у них одинаковы  $u_{\phi}$ .

Для исходной точки по формуле (34)

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 \right).$$

В эквивалентной точке  $u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\text{эКВ}}^2$ .

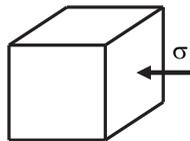
Приравнивая эти  $u_{\phi}$  и проведя несложные преобразования, получаем

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (36)$$

Рассмотрим два примера.

### Пример 1

Точка находится в условиях одноосного сжатия. Найти  $\sigma_{\text{экв}}$  по 3-й и 4-й теории прочности.

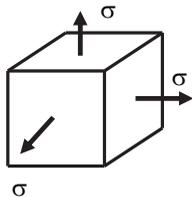


#### Решение

Вообще говоря, поскольку точка находится в одноосном напряженном состоянии, для расчета ее на прочность нет необходимости пользоваться какими-либо теориями прочности. Но поступим формально и выполним условие задачи.

Главные напряжения в точке:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma$ . По обеим теориям прочности получаем  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma$ . Это значит, что и 3-я и 4-я теории прочности не видят разницы между одноосным растяжением и одноосным сжатием. Следовательно, эти теории прочности можно применять только для пластичных материалов, у которых в качестве предельного напряжения берется предел текучести  $\sigma_T$ , который, как мы знаем, одинаков при растяжении и сжатии.

### Пример 2



Точка находится в условиях трехмерного равномерного растяжения. Найти  $\sigma_{\text{экв}}$  по 3-й и 4-й теории прочности.

#### Решение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma.$$

По обеим теориям прочности  $\sigma_{\text{экв}} = 0$ . Это значит, что трехмерное равномерное растяжение эквивалентно ненагруженной точке и 3-ю и 4-ю теорию нельзя применять, когда главные напряжения близки по величине.

Подводя итог под 3-й и 4-й теорией прочности, отметим, что эти теории в оговоренных рамках широко используются в инженерной практике. 4-я энергетическая теория дает немного более точный результат за счет учета  $\sigma_2$ . Но их главный недостаток – их нельзя использовать для хрупких материалов.

## 5.4. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА

Немецкий инженер и ученый К.О. Мор исповедовал научную концепцию Ньютона: я гипотез не изобретаю. В конце XIX и начале XX века в течение двух десятилетий он проводил эксперименты по изучению влияния главных напряжений на прочность различных материалов для разработки своей теории прочности. Все выводы он делал, исходя из результатов своих экспериментов. Первый вывод – главное напряжение  $\sigma_2$  незначительно влияет на прочность, и его можно не учитывать. Это по сути экспериментальное подтверждение 3-й теории прочности. Поэтому при дальнейшей разработке теории он проводил эксперименты с образцами, находящимися в двухосном напряженном состоянии. Он брал определенное соотношение между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и, пропорционально увеличивая напряжения, доводил образец до предельного напряженного состояния. Соответствующие значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  Мор наносил на график (рис. 35).

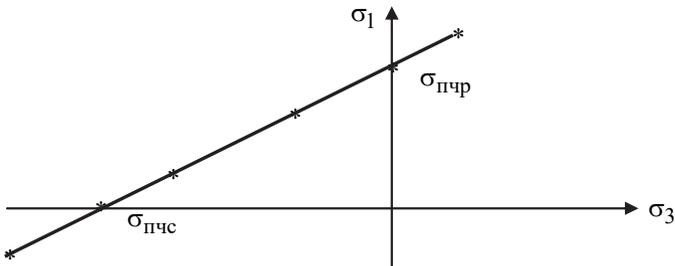


Рис. 35

К своему удивлению он увидел, что все эти точки с высокой точностью легли на одну прямую. Далее было написано уравнение полученной экспериментальной прямой в отрезках:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{пчр}} + \frac{\sigma_3}{-\sigma_{пчс}} = 1,$$

откуда получаем

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{пчр}}{\sigma_{пчс}} \sigma_3 = \sigma_{пчр}. \quad (a)$$

Обратимся теперь к точке, находящейся под действием  $\sigma_{\text{экв}}$  (см. рис. 34), и доведем ее до предельного напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{пчр}}. \quad (б)$$

Правые части формул (а) и (б) одинаковы. Приравнивая в них левые части, получаем знаменитую формулу Мора:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (37)$$

где  $k = \frac{\sigma_{\text{пчр}}}{\sigma_{\text{пчс}}}$ , если материал хрупкий, и  $k = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тс}}} = 1$ , если материал пластичный.

Вот почему теория К.О. Мора называется обобщенной теорией прочности: для пластичных материалов она переходит в 3-ю теорию прочности (теорию наибольших касательных напряжений), а для хрупких материалов – в 1-ю теорию прочности (мы эту устаревшую теорию не рассматривали, но согласно ей  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$ . Если взять предельно хрупкий материал, то  $\sigma_{\text{пчр}} \ll \sigma_{\text{пчс}}$  и  $k \Rightarrow 0$ , следовательно,  $\sigma_{\text{экв}} \approx \sigma_1$ ).

Поэтому теорию прочности Мора можно применять и для хрупких, и для пластичных материалов в рамках оговоренных выше ограничений.

Заметим, что теории прочности, годной для всех случаев, не существует.

## Глава 6

### КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении вся внешняя нагрузка (и активная и реактивная) сводится к крутящим относительно продольной оси  $x$  моментам (рис. 36).

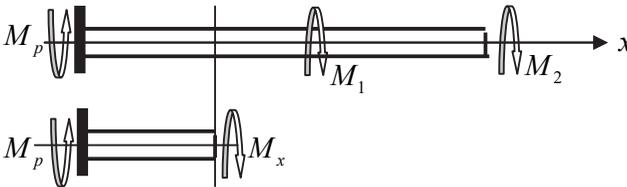


Рис. 36

Внутренние силы также сводятся только к крутящим моментам  $M_x$  (рис. 36).

#### 6.1. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

##### Мысленный эксперимент

На цилиндрической боковой поверхности бруса мысленно нанесем ортогональную сетку: несколько вертикальных окружностей и несколько горизонтальных образующих (рис. 37). Затем нагрузим брус внешними крутящими моментами. При этом окружности, которые являются как бы следами поперечных сечений на поверхности бруса, не искривятся, а повернутся в своей плоскости на некоторый угол, расстояние между ними не изменится. Горизонтальные образующие пре-

вратятся в винтовые линии, наклоненные к своему первоначальному положению на некоторый угол  $\gamma$ .

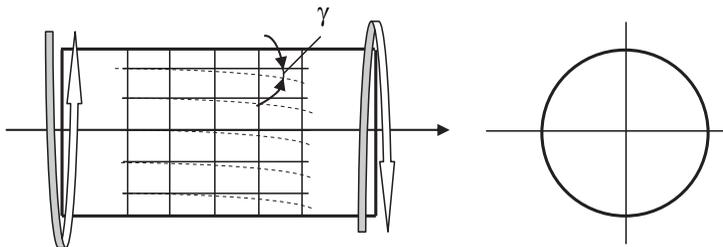


Рис. 37

На основе этих наблюдений можно выдвинуть следующие две гипотезы.

1. Гипотеза плоских поперечных сечений, поскольку они не искривились.

2. Отсутствие в поперечных сечениях нормальных напряжений, поскольку расстояния между ними не изменились.

Далее с учетом этих гипотез будем строить теорию кручения.

### Статическое обследование задачи

Надо установить, какие возникают напряжения в поперечных сечениях, и связать их с внутренними силами. Из второй гипотезы очевидно, что в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения.

Докажем, что во всех точках поперечного сечения касательные напряжения  $\tau$  перпендикулярны радиусу  $\rho$  (рис. 38). Возьмем вначале точку  $K$  на контуре сечения и мысленно вырежем вокруг нее элементарный объем – своеобразный кубик (рис. 39).

На рис. 39, б этот кубик показан в увеличенном масштабе. По грани кубика, совпадающей с плоскостью поперечного сечения, действует касательное напряжение, направление которого мы не знаем. Разложим его на составляющую  $\tau_1$ , перпендикулярную радиусу, и составляющую  $\tau_2$ , направленную вдоль радиуса. По закону парности касательных напряжений в перпендикулярных гранях возникают парные и равные им напряжения (рис. 39, б). Парное напряжение  $\tau_2$  действует по наружной цилиндрической поверхности и равно нулю, поскольку на этой поверхности отсутствует нагрузка. Поэтому на контуре

сечения  $\tau = \tau_1$  и  $\tau$  перпендикулярно  $\rho$ . Если теперь двигаться вдоль радиуса к центру сечения, то нетрудно убедиться, что во всех точках  $\tau$  будет перпендикулярно  $\rho$ .

Связь между  $M_x$  и  $\tau$  очевидна (рис. 38):

$$M_x = \int_A \tau dA\rho. \tag{a}$$

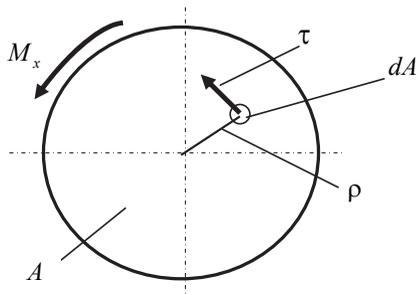


Рис. 38

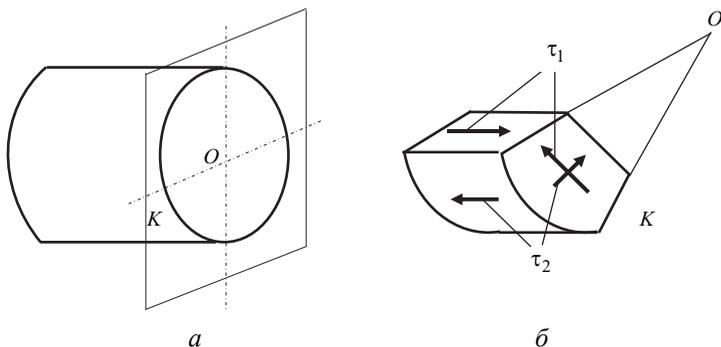


Рис. 39

### Геометрическое обследование задачи

Выделим в произвольном месте элемент бруса длиной  $dx$  на текущем радиусе  $\rho$  и покажем его деформацию в соответствии с принятыми гипотезами (рис. 40).

Правое сечение по отношению к левому повернулось на угол  $d\varphi$ , поперечное сечение не искривилось, горизонтальная образующая пре-

вратилась в винтовую линию, наклоненную к первоначальному положению на угол  $\gamma$ . С точностью до величин высшего порядка малости длина дуги на поперечном сечении, ограниченной углами  $\gamma$  и  $d\varphi$ , будет  $l_{\text{дуги}} = \gamma dx = \rho d\varphi$ , откуда получаем соотношение, описывающее геометрическую сторону задачи:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (б)$$

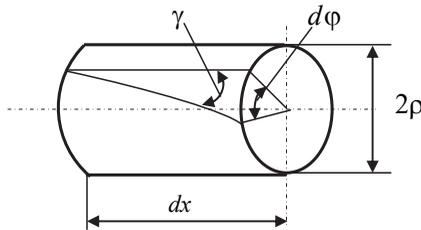


Рис. 40

### Физическая сторона задачи

$\gamma$  – это угловая деформация, вызванная касательными напряжениями  $\tau$ . Они связаны обобщенным законом Гука (это и есть физическое уравнение):

$$\tau = G\gamma. \quad (в)$$

### Синтез

Подставляем (б) в (в):

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (г)$$

Подставляем (г) в (а) и после несложных преобразований получаем

$$d\varphi = \frac{M_x dx}{GI_p}, \quad (д)$$

где  $I_p = \int_A \rho^2 dA$  – полярный момент инерции поперечного сечения (своеобразная геометрическая характеристика сечения; для простых форм сечений она приводится в справочниках).

Из формулы (д) получаем выражение для расчета углов поворота на длине  $l$  участка бруса (это расчет на жесткость при кручении):

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x dx}{GI_p}. \quad (38)$$

Если на участке бруса  $l$   $M_x = \text{const}$  и  $I_p = \text{const}$ , то формула (38) упрощается:

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}. \quad (39)$$

Чтобы получить теперь формулу для расчета напряжений, подставим (д) в (г):

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho. \quad (40)$$

Как видим, напряжения в сечении линейно зависят от радиуса (рис. 41).

Максимальные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_x \rho_{\max}}{I_p}$$

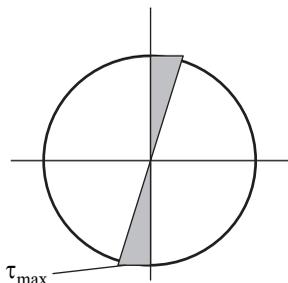


Рис. 41

возникают на контуре сечения. Эту формулу обычно упрощают. Вводят обозначение: полярный момент сопротивления сечения

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (41)$$

С учетом (41)

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \quad (42)$$

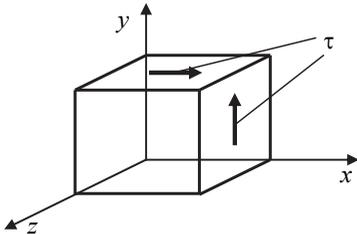
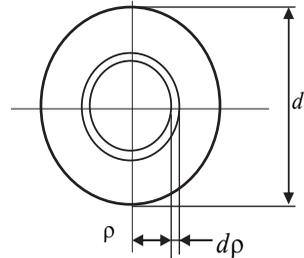
### Пример

Рассчитать полярный момент инерции  $I_p$  и полярный момент сопротивления  $W_p$  для круглого сечения.

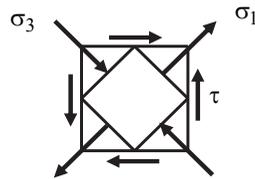
Выделим  $dA$  в виде бесконечно тонкого кольца радиусом  $\rho$  толщиной  $d\rho$ . Тогда  $dA = 2\pi\rho d\rho$ .

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Проанализируем *напряженное состояние* в различных точках поперечного сечения (см. рис. 41). Вырежем элементарный кубик вокруг произвольной точки сечения (рис. 42). В поперечном сечении (грань кубика с нормалью  $x$ ) действует касательное напряжение  $\tau$ . В грани с нормалью  $y$  действует такое же  $\tau$  по закону парности касательных напряжений. В грани с нормалью  $z$  отсутствуют всякие напряжения. Такое напряженное состояние называется *напряженным состоянием чистого сдвига*. Найдем положение главных площадок и все главные напряжения.



a



б

Рис. 42

Одна главная площадка (с нормалью  $z$ ) и главное напряжение  $\sigma_z = 0$  уже известны. Исходные данные для расчета положения двух других главных площадок и действующих по ним главных напряжений:  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ . По формулам (23) и (24) находим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty, \quad \text{откуда } \alpha_0 = 45^\circ.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau. \Rightarrow \sigma_1 = \tau, \sigma_3 = -\tau.$$

Положение главных площадок и главные напряжения показаны на рис. 42, б.

### Условие прочности

$$\tau_{\max} = \left( \frac{M_x}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau]. \quad (43)$$

Спрашивается, откуда взять  $[\tau]$ ? Для этого надо проводить испытания образцов на кручение и находить предельные касательные напряжения. Но, оказывается, можно обойтись без этих дополнительных испытаний, если подойти к напряженному состоянию при кручении как к сложному (плоскому) напряженному состоянию и найти эквивалентное напряжение опасной точки по какой-то теории прочности. Например, по 3-й теории прочности для опасной точки, в которой действует максимальное касательное напряжение,  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max}$ . Условие прочности для этой точки:  $\sigma_{\text{экв}} = 2\tau_{\max} \leq [\sigma]$ , откуда

$$\tau_{\max} \geq \frac{[\sigma]}{2}. \quad (44)$$

Левые части в (43) и (44) одинаковы, поэтому, приравнявая правые части, получаем  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ , и нет необходимости проводить испытания образцов на кручение.

## 6.2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Сравним сплошное круглое сечение и кольцевое (трубчатое) сечение (рис. 43). Как видно из эпюра напряжений, в сплошном сечении поле напряжений – неравномерное и средняя часть сечения недогружена. В кольцевом сечении поле напряжений более равномерное и явно недогруженных точек нет. Поэтому кольцевое сечение с точки зре-

ния экономичности более рационально. Трубчатый вал всегда будет легче при той же нагрузке.

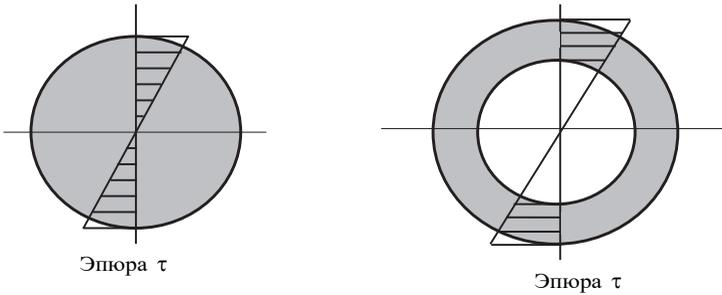


Рис. 43

Заметим, что мы рассмотрели только круглые формы поперечных сечений валов. Другие формы сечений менее экономичны, поскольку у них менее равномерные поля напряжений.

## Глава 7

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В расчетах на прочность и жесткость участвуют некоторые новые более сложные геометрические характеристики поперечных сечений. Рассмотрим эти характеристики и их свойства.

#### 7.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЯ

Возьмем произвольное поперечное сечение бруса (рис. 44) площадью  $A$ . Выделим элемент площади  $dA$  с координатами  $y, z$  и составим два интеграла:

$$S_z = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA, \quad (45)$$

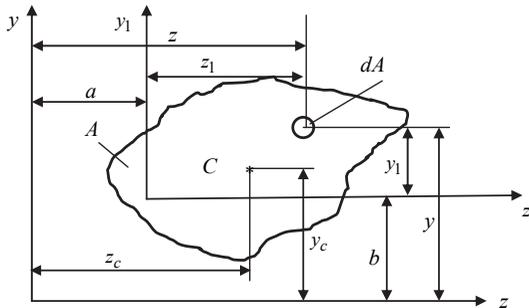


Рис. 44

где  $S_z$  и  $S_y$  – статические моменты сечения соответственно относительно осей  $z$  и  $y$ .

Рассмотрим пересчет статических моментов на параллельно смещенные оси. Обозначим расстояние между осями  $z$  и  $z_1$  через  $b$ , а между осями  $y$  и  $y_1$  – через  $a$ . Тогда очевидны следующие зависимости:

$$S_{z_1} = \int_A (y-b) dA = S_z - bA; \quad S_{y_1} = \int_A (z-a) dA = S_y - aA. \quad (46)$$

Формулы (46) позволяют пересчитывать статические моменты на параллельно смещенные оси.

Рассмотрим подробнее первую формулу (46). Величину  $b$  всегда можно подобрать так, чтобы произведение  $bA$  было равно  $S_z$ . Тогда статический момент  $S_{z_1}$  обращается в нуль. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Среди семейства параллельных осей центральная ось является единственной. Как следует из первой формулы (46), расстояние до центральной оси от произвольной оси  $z$  будет

$$b = y_c = \frac{S_z}{A}. \quad (47)$$

Аналогично для другого семейства параллельных осей:

$$a = z_c = \frac{S_y}{A}. \quad (48)$$

## 7.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Осевые моменты инерции вычисляются по следующим формулам:

- осевые

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA; \quad (49)$$

- центробежный

$$I_{zy} = \int_A zy dA; \quad (50)$$

- полярный

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (51)$$

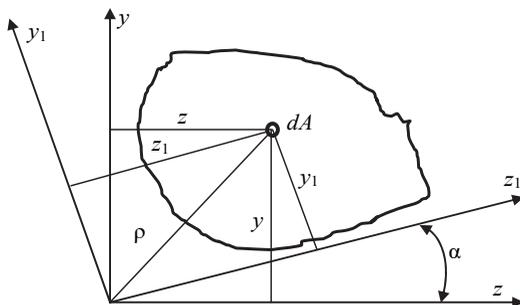


Рис. 45

В формуле (51)  $\rho$  – расстояние от начала координат до  $dA$  (рис. 45).

### 7.3. СВОЙСТВА МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

1. Поскольку  $\rho^2 = y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2 = \text{const}$  (см. рис. 45), то *полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции*:

$$I_p = I_z + I_y. \quad (52)$$

2. Так как все моменты инерции являются определенными интегралами, то *момент инерции сложной фигуры  $I$  можно представить как сумму моментов инерции простых фигур  $I_i$* , на которые можно разделить сложную фигуру:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (53)$$

3. *Центробежный момент инерции симметричного сечения относительно осей, одна из которых является осью симметрии, равен нулю.*

Докажем это на примере равнобедренного треугольника (рис. 46). Ось  $y$  является осью симметрии. Разобьем треугольник на две симметричные фигуры I и II. Выделим на них две симметрично расположенные элементарные площади  $dA_1$  и  $dA_2$ :  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = -z_2$ . Следовательно,  $I_{zy} = I_{zy}^I + I_{zy}^{II} = 0$ .

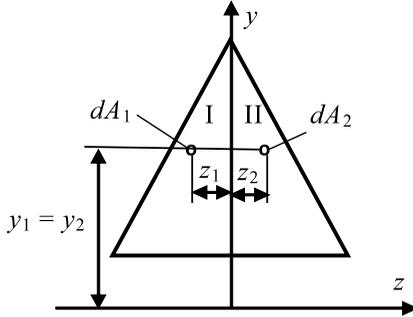


Рис. 46

4. Выведем формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей. Для этого снова обратимся к рис. 44. Будем считать, что нам известны моменты инерции относительно осей  $z$  и  $y$ , а требуется определить их относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ :

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA; \quad I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA. \quad (54)$$

Подставляя сюда  $y_1 = y - b$  и  $z_1 = z - a$ , получим:

$$I_{z_1} = \int_A (y - b)^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A (z - a)^2 dA; \quad I_{y_1 z_1} = \int_A (y - b)(z - a) dA.$$

Раскрываем скобки:

$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z - 2bS_z + b^2 A, \\ I_{y_1} &= I_y - 2aS_y + a^2 A, \\ I_{y_1 z_1} &= I_{zy} - bS_y - aS_z + abA. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

По формулам (55) можно пересчитывать осевые и центробежный моменты инерции на параллельные оси.

Если оси  $z$  и  $y$  – центральные, то  $S_z = S_y = 0$  и формулы (55) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + b^2 A, \\ I_{y_1} &= I_y + a^2 A, \\ I_{y_1 z_1} &= I_{zy} + abA. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

5. Получим формулы *изменения моментов инерции при повороте осей координат*. На рис. 45 оси  $z$  и  $y$  будем считать исходной системой координат, в которой нам известны осевые и центробежный моменты инерции  $I_z, I_y, I_{zy}$ .

Система координат  $z_1 y_1$  – это исходная система координат, повернутая на угол  $\alpha$ . Из аналитической геометрии известны формулы, связывающие координаты произвольной точки в этих системах координат:

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha, \quad z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Рассчитаем соответствующие моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$  по формулам (54):

$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha, \\ I_{z_1 y_1} &= I_{zy} \cos 2\alpha + \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

По формулам (57) можно пересчитывать осевые и центробежный моменты инерции на повернутые оси.

6. Введем понятия *главных осей* и *главных моментов инерции*. Проанализируем формулы (57). При изменении угла  $\alpha$  осевые моменты инерции  $I_{z_1}$  и  $I_{y_1}$  будут изменяться, а их сумма останется постоянной, потому что в соответствии с формулой (52) она равняется полярному моменту инерции  $I_p$ , который не изменяется. Следовательно, существует такой угол  $\alpha = \alpha_0$ , при котором один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время как другой момент инерции принимает минимальное значение. Дифференцируя, напри-

мер,  $I_{z_1}$  по  $\alpha$  и приравнявая производную нулю, получаем формулу для расчета  $\alpha_0$ :

$$\frac{dI_{z_1}}{d\alpha} = -2I_z \sin \alpha \cos \alpha + 2I_y \cos \alpha \sin \alpha - 2I_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (58)$$

При этом значении угла  $\alpha_0$  один из осевых моментов будет наибольшим, а другой – наименьшим. Одновременно центробежный момент инерции  $I_{z_1 y_1}$  при указанном  $\alpha_0$  обращается в нуль, что видно из третьей формулы (57).

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными осями*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Определим их. Для этого первые две формулы (57) перепишем в виде:

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha.$$

Учитывая, что

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \quad \text{и} \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

исключаем при помощи выражения (58) угол  $\alpha$ . Тогда

$$I_{\max/\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}. \quad (59)$$

Верхний знак соответствует максимальному моменту инерции, а нижний – минимальному.

## Глава 8

# ПЛОСКИЙ (ПРЯМОЙ) ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

### 8.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗГИБОВ

При плоском (прямом) изгибе вся внешняя нагрузка должна находиться в одной так называемой силовой плоскости и силовая плоскость должна проходить через какие-то главные центральные оси инерции поперечных сечений (рис. 47). На рис. 47 плоскость  $xu$  – силовая плоскость.

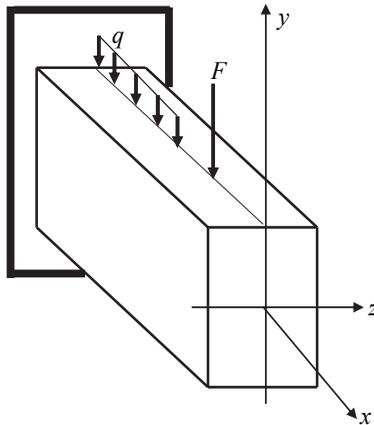


Рис. 47

При плоском изгибе могут возникнуть две внутренние силы:  $Q_y$  и  $M_z$  (рис. 48, а).

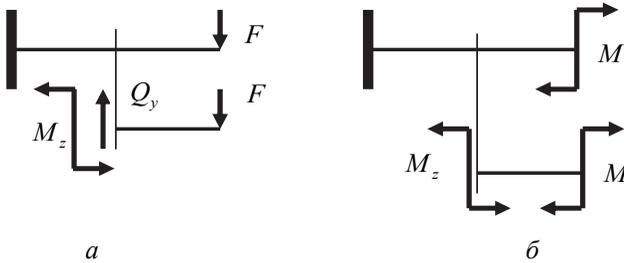


Рис. 48

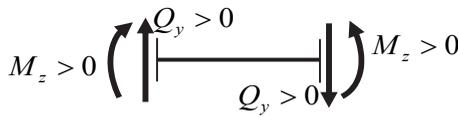


Рис. 49

По внутренним силам плоские изгибы разделяются на *чистые*, когда возникает только одна внутренняя сила  $M_z$  (рис. 48, б), и *поперечные*, когда возникают обе внутренние силы (рис. 48, а).

Введем правило знаков для  $Q_y$  и  $M_z$ . На рис. 49 показаны положительные направления этих внутренних сил для правого и левого сечения.

## 8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ЖУРАВСКОГО ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Выдающийся русский инженер и ученый Д. И. Журавский установил дифференциальные зависимости между внутренними силами при плоском поперечном изгибе и между внутренними силами и распределенной внешней нагрузкой  $q$ .

Пусть балка находится в равновесии при произвольной распределенной нагрузке  $q(x)$ . Вырежем элемент балки длиной  $dx$  и покажем условно положительные направления для  $Q_y$  и  $M_z$ . Будем считать распределенную нагрузку на бесконечно малой длине  $dx$  постоянной (рис. 50). Заметим, что при переходе от левого сечения к правому на

элементе  $dx$  аргумент  $x$  получает приращение, следовательно, и функции  $Q_y$  и  $M_z$  также получают соответствующие приращения.

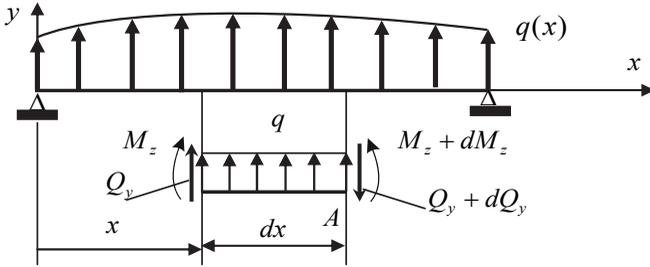


Рис. 50

Составим два уравнения равновесия для вырезанного элемента  $dx$ :

$$\Sigma Y = Q_y + q dx - Q_y - dQ_y = 0,$$

откуда получаем первое дифференциальное уравнение:

$$q = \frac{dQ_y}{dx}, \quad (60)$$

дающее информацию о поведении эпюра  $Q_y$ : на участке, где  $q < 0$ , эпюр  $Q_y$  убывает; на участке, где  $q > 0$ , эпюр  $Q_y$  возрастает; на участке, где  $q = 0$ , эпюр  $Q_y$  остается постоянным,

$$\Sigma m_A = -M_z - Q_y dx + q dx \frac{dx}{2} + M_z + dM_z = 0,$$

откуда с точностью до величины высшего порядка малости получаем второе дифференциальное уравнение

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}, \quad (61)$$

дающее аналогичную информацию о поведении эпюра  $M_z$  в зависимости от знака эпюра  $Q_y$ .

Подставляя теперь (61) в (60), получаем третье дифференциальное уравнение Журавского:

$$q = \frac{d^2 M_z}{dx^2}, \quad (62)$$

которое дает информацию о кривизне эпюра  $M_z$  в зависимости от знака  $q$ .

Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского дают возможность не только проверять построение эпюров  $Q_y$  и  $M_z$ , но и быстрее их строить.

### 8.3. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

#### Мысленный эксперимент

На плоской боковой поверхности бруса мысленно нанесем ортогональную сетку: ряд вертикальных и ряд горизонтальных линий (рис. 51, *а*). Затем нагрузим брус изгибающими моментами (рис. 51, *б*) и зафиксируем изменение ортогональной сетки: вертикальные линии, которые имитируют следы поперечных сечений на боковой поверхности, не искривятся, повернутся на некоторый угол и останутся перпендикулярными изогнутой оси бруса; горизонтальные линии превратятся в дуги окружностей, расстояния между ними не изменятся. Ортогональность сетки сохранится. На основе этих наблюдений можно выдвинуть следующие гипотезы.

1. *Гипотеза плоских поперечных сечений.*

2. *Гипотеза о ненадавливании продольных волокон*, поскольку расстояния между горизонтальными линиями не изменились.

3. *Гипотеза о существовании нейтрального слоя.* Поскольку часть горизонтальных линий удлинилась, а часть укоротилась (рис. 51, *б*), из этого следует, что между ними существует линия, длина которой не изменилась. Эти линии и образуют так называемый нейтральный слой. На основании этих гипотез будем строить теорию чистого плоского изгиба.

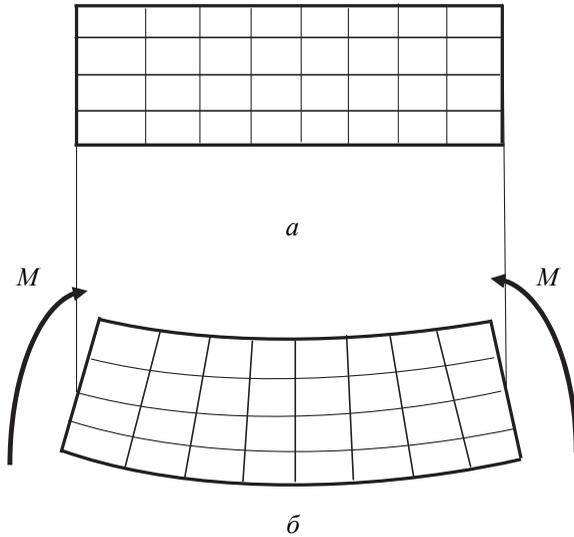


Рис. 51

### Статическое обследование задачи

Рассмотрим произвольное поперечное сечение бруса (рис. 52). Из гипотезы о ненадавливании продольных волокон следует, что в сечении отсутствуют касательные напряжения. Поскольку длина продольных волокон изменяется, в сечении действуют нормальные напряжения, причем разного знака. На рис. 53 представлен в изометрии элемент бруса длиной  $dx$ , в сечении которого показаны нормальные напряжения, которые образуют нормальные силы разного знака и в сумме равные нулю (первая формула (а)):

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = 0, \\ M_z &= - \int_A y \sigma dA \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и изгибающий момент  $M_z$  – вторая формула (а).

Знак «-» в формуле для  $M_z$  согласуется с принятым правилом знаков:  $M_z > 0$  при положительной кривизне изогнутой оси бруса (как у нас). Из рис. 53 видно, что в верхней части сечения  $y > 0$ , а  $\sigma < 0$ , а в

нижней  $y < 0$ , а  $\sigma > 0$ , поэтому знак « $\leftarrow$ » необходим, чтобы выполнялось условие  $M_z > 0$ .

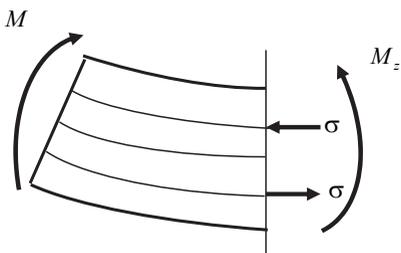


Рис. 52

На данном этапе сделаем предположение о положении нейтрального слоя (н.с.). Допустим, н.с. находится в плоскости  $xz$  (рис. 53). Линия пересечения н.с. с поперечным сечением называется нейтральной линией (н.л.). При сделанном предположении н.л. совпадает с осью  $z$ . Заметим, что координаты  $y$  на рис. 53 отложены от н.л. Чуть позже мы докажем, что сделанное предположение о нахождении н.с. и соответственно н.л. является верным.

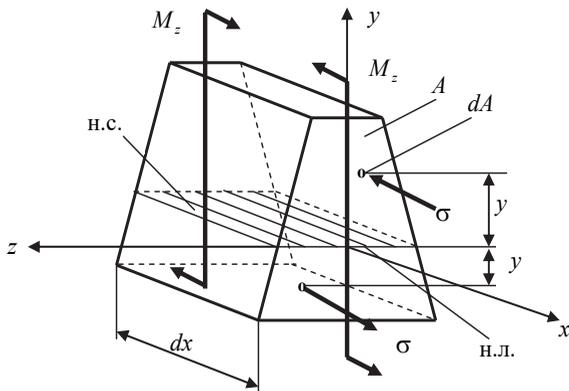


Рис. 53

### Геометрическое обследование

Рассмотрим с учетом выдвинутых гипотез деформацию элемента  $dx$ . На рис. 54, *a* показан элемент до деформации, а на рис. 54, *б* – после деформации.

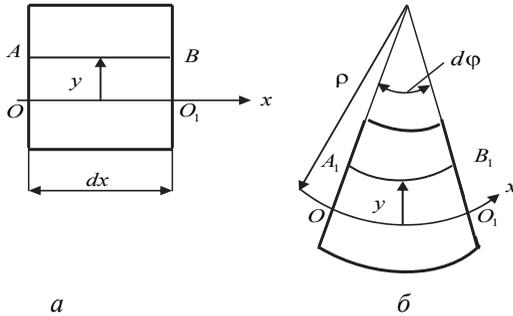


Рис. 54

Определим линейную деформацию произвольного отрезка  $AB$ , взятого на координате  $y$ . Отрезок  $OO_1$  лежит на оси  $x$ , поэтому он находится в н.с. Как видно из рис. 54, а:  $AB = OO_1 = dx$ . После деформации длина отрезка  $OO_1$  не изменилась, отрезок  $AB$  укоротился (рис. 54, б). Вычислим длины отрезка  $AB$  до и после деформации через  $\rho$  – радиус кривизны н.с. и  $d\varphi$  – угол поворота правого сечения относительно левого:  $AB = \rho d\varphi$ ,  $A_1B_1 = (\rho - y)d\varphi$ .

Геометрическое уравнение – линейная деформация произвольного бесконечно малого отрезка  $AB$ :

$$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = -\frac{y}{\rho}. \quad (\text{б})$$

### Физика

Закон Гука дает нам связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (\text{в})$$

### Синтез

Подставляем (б) в (в):

$$\sigma = -E\frac{y}{\rho}. \quad (\text{г})$$

Подставляем (г) в первое уравнение (а):  $N = -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$ , откуда

$\int y dA = 0$ . Как известно из геометрии, этот интеграл является статиче-

ским моментом сечения, а статический момент любой плоской фигуры равен нулю относительно ее центральных осей. Вот мы и доказали предположение о расположении н.с., сделанное ранее.

Теперь подставим (г) во второе уравнение (а):

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

В этом выражении  $\int_A y^2 dA = I_z$  – момент инерции сечения относительно центральной оси  $z$  (геометрическая характеристика сечения при изгибе). С учетом этого  $M_z = \frac{EI_z}{\rho}$ , откуда получим формулу для кривизны изогнутой оси бруса:

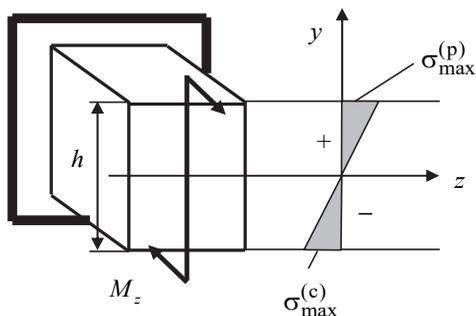
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (д)$$

Подставляем теперь (д) в (г) и получаем формулу для расчета напряжений в любой точке сечения (знак « $\leftarrow$ » в этой формуле по умолчанию опущен, поскольку по направлению  $M_z$  всегда можно узнать знак напряжения):

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (63)$$

### Пример

Построить эпюру напряжений по прямоугольному поперечному сечению.



Из формулы (63) следует что  $\sigma$  линейно зависит от  $y$ . При таком направлении  $M_z$  видно, что верхняя часть сечения растягивается, а нижняя сжимается. Поскольку ось  $z$  является осью симметрии, максимальные растягивающие  $\sigma_{\max}^{(p)}$  и максимальные сжимающие  $\sigma_{\max}^{(c)}$  напряжения равны по модулю:

$$\sigma_{\max}^{(p)} = \left| \sigma_{\max}^{(c)} \right| = \sigma_{\max} = \frac{M_z h / 2}{I_z}.$$

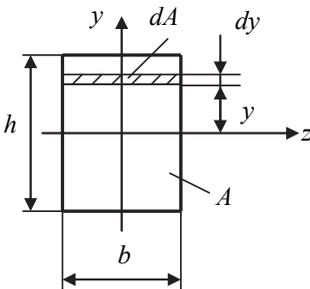
Чтобы упростить формулы для максимальных напряжений, ввели понятие момента сопротивления сечения

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}.$$

Теперь формула для максимальных напряжений приобретает простой вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (64)$$

### Пример



Рассчитать  $I_z$  и  $W_z$  для прямоугольного сечения.

Выделим элемент площади, как показано на рисунке:  $dA = bdy$ , тогда

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy = \frac{bh^3}{12}; \quad W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

## 8.4. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

**Хрупкий материал:**  $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ .

*Первый случай:* ось  $z$  не является осью симметрии

На рис. 55 показано сечение в виде тавра, у которого ось  $z$  не является осью симметрии. В этом случае следует рассмотреть два условия прочности:

$$\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{M_z h_1}{I_z} \leq [\sigma_c]; \quad \sigma_{\max}^{(p)} = \frac{M_z h_2}{I_z} \leq [\sigma_p]. \quad (65)$$

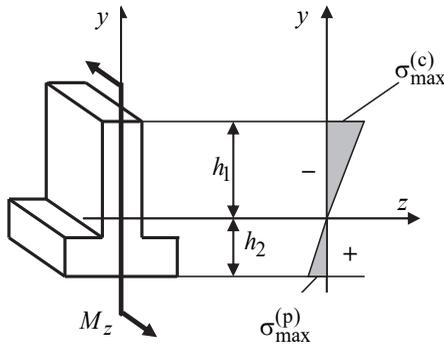


Рис. 55

Если разделить первое условие прочности на второе, то получим формулу для рационального положения центра тяжести таких сечений:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]}. \quad (66)$$

Как видим, в нашем случае сечение ориентировано рационально относительно нагрузки.

*Второй случай:* ось  $z$  является осью симметрии

В этом случае максимальные растягивающие и сжимающие напряжения по модулю равны и рассматривается одно условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_p]. \quad (67)$$

**Пластичный материал:**  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ , если в качестве предельного напряжения берется предел текучести.

Для пластичных материалов рассматривается в этом случае одно условие прочности.

## 8.5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

### Основные положения

В этом случае в поперечных сечениях бруса к изгибающим моментам  $M_z$  добавляются поперечные силы  $Q_y$ , что приводит к несоблюдению гипотезы плоских сечений. Но в рамках гипотезы малости деформаций искривлением поперечных сечений можно пренебречь, поэтому формула для нормальных напряжений, полученная ранее, сохраняется. К нормальным напряжениям  $\sigma$  добавляются касательные напряжения  $\tau$ , лежащие, как и сила  $Q_y$ , в плоскости сечения (рис. 56).

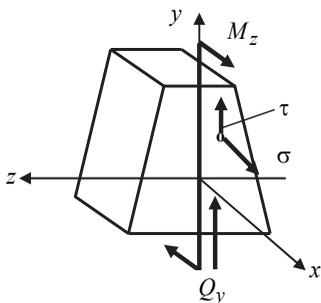


Рис. 56

К нормальным напряжениям  $\sigma$  добавляются касательные напряжения  $\tau$ , лежащие, как и сила  $Q_y$ , в плоскости сечения (рис. 56).

### Вывод расчетной формулы для касательных напряжений

Рассмотрим элемент бруса длиной  $dx$  (рис. 57, а). В его поперечных сечениях действуют внутренние поперечные силы и изгибающие моменты, от которых возникают нормальные и касательные напряжения. Эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 57, б.

Наша задача – получить формулу для касательных напряжений. Определим касательные напряжения  $\tau$  на произвольном уровне  $y$ . Для этого мысленно отсечем из рассматриваемого элемента его верхнюю часть, расположенную выше уровня  $y$ . По его боковым поверхностям действуют касательные напряжения, закон распределения которых мы пока не знаем, а по нижней грани по закону парности касательных напряжений действуют интересующие нас  $\tau$  на уровне  $y$  (рис. 57, б).

На рис. 57, в дан вид на левую боковую поверхность элемента  $dx$ , на котором показаны напряжения  $\tau$ . Площадь поперечного сечения отсеченной верхней части обозначена  $A^*$ . На уровне  $y_1$  выделен эле-

мент площади  $dA^*$ , по которому действует нормальное напряжение  $\sigma = \frac{M_z y_1}{I_z}$ . На всю площадь  $A^*$  действует нормальная сила  $N^* = \int_{A^*} \sigma dA^* = \frac{M_z}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA^*$ . Заметим, что интеграл в этом выражении представляет собой статический момент площади сечения  $A^*$  относительно центральной оси  $z$ :  $S_z^* = \int_{A^*} y_1 dA^*$ . Окончательное выражение для нормальной силы:  $N^* = \frac{M_z}{I_z} S_z^*$ .

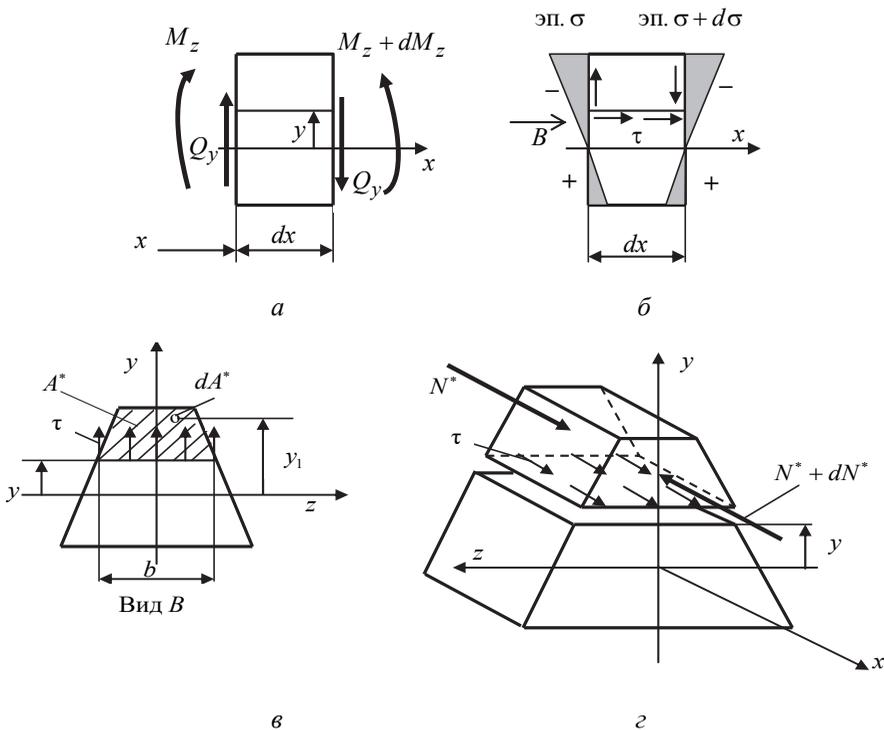


Рис. 57

На рис. 57, *z* показана в изометрии отсеченная верхняя часть элемента  $dx$ . Действующая по его правому сечению нормальная сила получит приращение

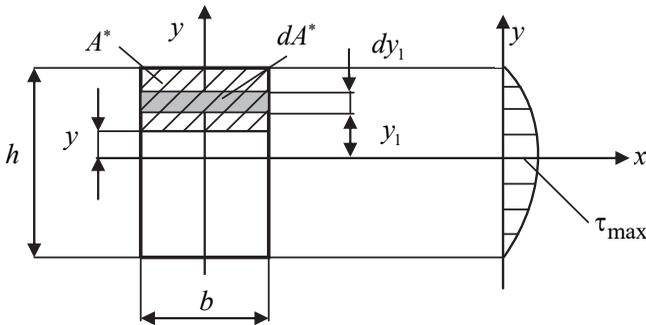
$$dN^* = \frac{dM_z S_z^*}{I_z}. \quad (68)$$

Спроецируем все силы, действующие на верхнюю часть элемента, на ось  $x$ :  $\Sigma X = \tau b dx + N^* - N^* - dN^* = 0$ , откуда после подстановки  $dN^*$  (68) и выражения (61) получаем формулу Журавского для расчета касательных напряжений при поперечном плоском изгибе:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b}. \quad (69)$$

### Пример

Построить эпюру касательных напряжений от  $Q_y$  для прямоугольного сечения.



Выделим элемент площади  $dA^*$  на площади сечения  $A^*$ :

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad dA^* = b dy_1, \quad S_z^* = \int_{A^*} y_1 dA^* = \int_y^{h/2} y_1 b dy_1 = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Получили уравнение параболы. Строим ее:

- при  $y = \pm \frac{h}{2}$   $\tau = 0$ ;
- при  $y = 0$   $\tau = \tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{bh}$ .

### Исследование напряженного состояния при поперечном плоском изгибе

На рис. 58 показаны эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  в прямоугольном поперечном сечении бруса. Рассмотрим напряженные состояния характерных точек в сечении, обозначенных на рисунке. Для этого вырежем мысленно элементарные кубики в районе каждой точки.

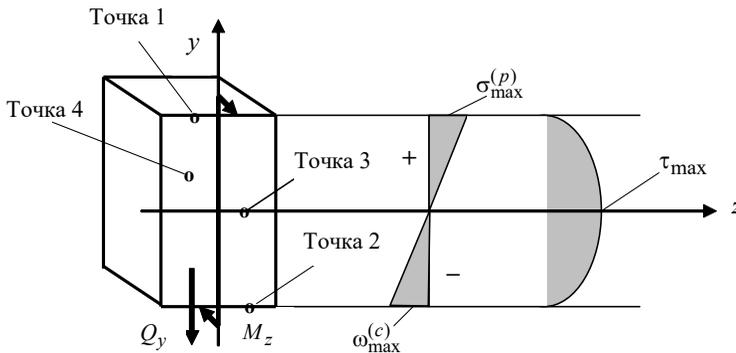
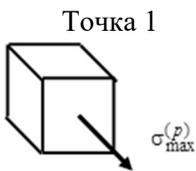


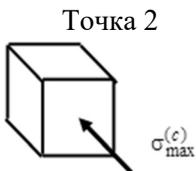
Рис. 58



Точка находится в условиях одноосного растяжения.

Условие прочности точки:

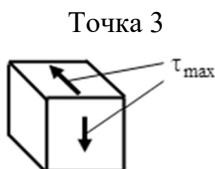
$$\sigma_{\max}^{(p)} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_p].$$



Точка находится в условиях одноосного сжатия.

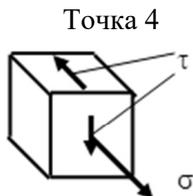
Условие прочности точки:

$$\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_c].$$



Точка находится в условиях чистого сдвига.  
Условие прочности:

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{bh} \leq [\tau].$$



Точка находится в сложном напряженном состоянии.

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}, \quad \tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b}.$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p].$$

### Сравнение максимальных нормальных и касательных напряжений

Сравнение проведем на примере консольного бруса прямоугольного сечения (рис. 59).

Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ .

$$Q_{y\max} = F, \quad M_{z\max} = Fl.$$

Определим максимальные напряжения.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{12Fl}{bh^3}, \quad \tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{y\max}}{bh} = \frac{1,5F}{bh}.$$

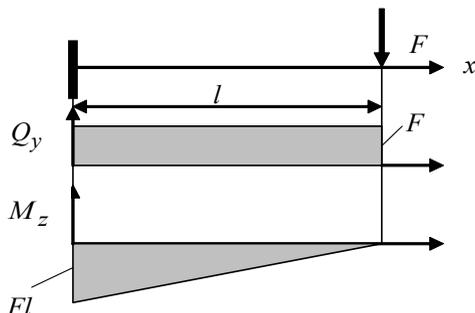


Рис. 59

Сравним  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  :  $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{4l}{h}$ .

Учитывая, что у бруса  $l \gg h$ , получим

$$\sigma_{\max} \gg \tau_{\max}.$$

*Вывод.* Практический расчет брусьев, работающих на изгиб, проводится по одним нормальным напряжениям. Исключение составляют только короткие брусья при больших поперечных нагрузках.

## 8.6. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

### Перемещения при изгибе, связь между ними

Разберемся, какие перемещения имеют поперечные сечения бруса при изгибе. Из рис. 60 видно, что произвольное сечение на координате  $x$  (на расчетной схеме это точка) в результате деформации бруса имеет линейное перемещение (прогиб)  $y$  и угловое (поворот)  $\theta$ .

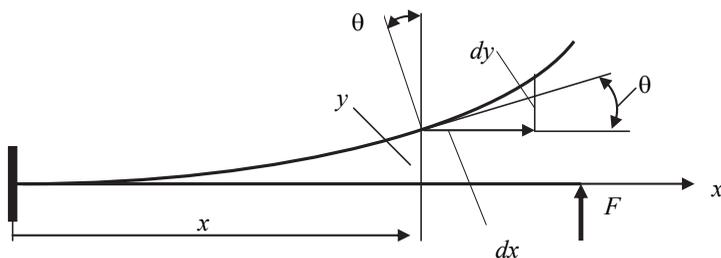


Рис. 60

Между  $y$  и  $\theta$  с точностью до величин высшего порядка малости (рис. 60) существует дифференциальная связь:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y'$ .

На основании гипотезы малости деформаций имеем  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ . Окончательная формула:

$$\theta = y' = \frac{dy}{dx}. \quad (70)$$

### Расчет на жесткость методом непосредственного интегрирования

В разделе 8.3 была получена формула кривизны изогнутой оси балки при изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (71)$$

С другой стороны, известна формула кривизны из аналитической геометрии:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (72)$$

В рамках гипотезы о малости деформаций, которая, как мы знаем, принята в курсе сопротивления материалов,  $\theta = \frac{dy}{dx} \ll 1$ . Поэтому формула (72) упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (73)$$

Приравнивая теперь правые части (71) и (73), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (74)$$

Интегрируя это уравнение, можно рассчитать прогибы и углы поворотов поперечных сечений балки при изгибе.

#### Пример

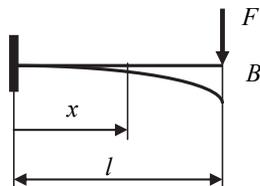
Известно:  $F, l, E, I_z$ .

Найти прогиб  $y_B$  и угол поворота  $\theta_B$  свободного конца балки  $B$ .

### Решение

На произвольной координате  $x$  изгибающий момент  $M_z(x) = -F(l-x)$ . Знак « $-$ » указывает на отрицательную кривизну изогнутой оси балки.

Дифференциальное уравнение (74) принимает вид



$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(l-x).$$

Интегрируем это уравнение:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C. \quad (\text{а})$$

Интегрируем уравнение (а):

$$EI_z y = -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + Cx + D. \quad (\text{б})$$

Граничные условия: при  $x = 0$   $\frac{dy}{dx} = 0$  и  $y = 0$ .

Подставив первое граничное условие в (а), получим  $C = 0$ .

Подставив второе граничное условие в (б), получим  $D = 0$ .

Уравнения (а) и (б) принимают окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} EI_z \theta &= -Flx + \frac{Fx^2}{2}, \\ EI_z y &= -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

При  $x = l$  из первого уравнения (в) находим  $\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI_z}$ , а из вто-

рого:  $y_B = -\frac{Fl^3}{3EI_z}$ .

## Глава 9

### СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

#### 9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Сложное нагружение – это сочетание простых видов нагружения (растяжение-сжатие, кручение и плоский изгиб) в различных формах.

Задачи на сложное нагружение решаются с использованием принципа независимости действия сил, позволяющего разделить сложное нагружение на простые виды.

#### 9.2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

1. Нагрузка разделяется на простые виды.

2. Строятся необходимые эпюры внутренних сил при простых видах нагружения.

3. По этим эпюрам находится одно или несколько опасных сечений. Опасное сечение будет одно, если в нем сходятся максимальные значения всех внутренних сил. Если же такого сечения нет, то в качестве опасных рассматривается несколько сечений, в каждом из которых какие-то внутренние силы являются максимальными.

4. Строятся эпюры напряжений в опасном (опасных) сечении (сечениях).

5. По этим эпюрам по тем же критериям, по которым находится опасное сечение, определяется (определяются) одна или несколько опасных точек.

6. Анализируются напряженные состояния опасных точек и рассматриваются их условия прочности.

### 9.3. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Существует несколько частных случаев сложного нагружения: ко-сой изгиб, внецентренное растяжение-сжатие, совместное действие изгиба и кручения и др.

Мы рассмотрим на простом примере только наиболее часто встречающийся случай – совместное действие изгиба и кручения.

#### Пример

На рис. *a* показан брус, работающий на совместное действие изгиба и кручения. Пусть сечение бруса – круг диаметром  $d$ . Требуется рассчитать брус на прочность.

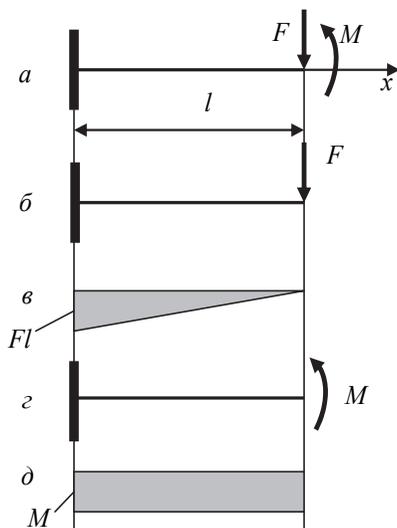
#### Решение

Рассмотрим только изгиб бруса – рис. *б*. На рис. *в* построен эпюр изгибающих моментов:  $M_z_{\max} = Fl$ .

На рис. *г* выделено только кручение бруса. На рис. *д* построен эпюр крутящих моментов  $M_x = M = \text{const}$ .

Опасным оказалось левое сечение бруса, в котором оба внутренних момента имеют максимальное значение:

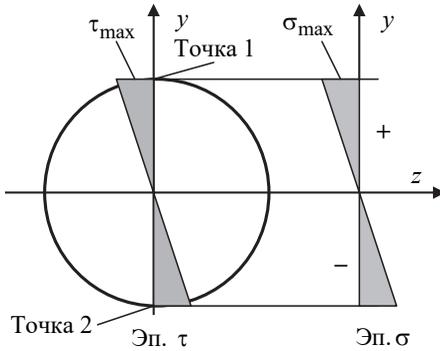
$$M_{z_{\max}} = Fl, \quad M_{x_{\max}} = M.$$



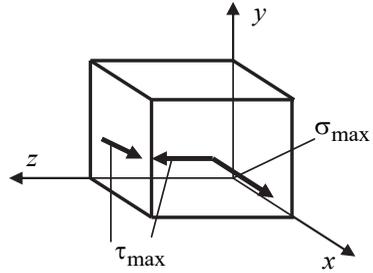
Строим эпюры нормальных (от  $M_{z \max}$ ) и касательных (от  $M_{x \max}$ ) напряжений в опасном сечении – рис. *е*.

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_p}$  действуют по контуру сечения, а максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z}$  действуют в точках 1 и 2. Эти точки и будут опасными.

Поскольку они равноопасные, исследуем напряженное состояние только одной точки 1 – рис. *ж*.



*е*



*ж*

Площадка с нормалью  $y$  – главная.  $\sigma_y = 0$  – одно из главных напряжений. Найдем два других главных напряжения. По двум неглавным площадкам действуют напряжения:  $\sigma_x = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{\max}$ . По формуле (24) находим два других главных напряжения:

$$\sigma'_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Теперь известны все главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma'_{\max}, \quad \sigma_3 = \sigma'_{\min}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = 0.$$

По 3-й теории прочности найдем эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Подставляем сюда найденные значения главных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z \max}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x \max}{W_p}\right)^2}.$$

Условие прочности:  $\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]$ .

## Глава 10

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 10.1. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Если деформируемой системе, находящейся в равновесии под действием некоторой системы внешних сил, придается малая возможная деформация, то возможная работа, совершаемая внешними силами на соответствующих перемещениях, будет равна работе, совершаемой внутренними силами на соответствующих деформациях.

С помощью этого принципа можно получить интеграл Мора, позволяющий определить перемещение любой точки рассчитываемого объекта в любом направлении.

### 10.2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛА МОРА

Рассмотрим произвольное тело в виде криволинейного бруса, находящегося в равновесии под произвольной нагрузкой, – состояние « $F$ » (рис. 61,  $a$ ). Требуется найти перемещение  $\delta_{lF}$  произвольной точки бруса в произвольном направлении  $l-l$ . Вырежем мысленно в любом месте бруса бесконечно малый элемент длиной  $dx$ .

По торцам этого элемента в общем случае нагружения бруса действуют внутренние силы:  $N_F, M_{xF}, M_{yF}, M_{zF}$  (поперечными силами пренебрегаем, поскольку их вклад в напряженное состояние незначителен). Эти силы вызывают деформации:

$$\Delta dx = \frac{N_F dx}{EA}, \quad d\varphi = \frac{M_{xF} dx}{GI_p}, \quad d\theta^{(M_z)} = \frac{M_{zF} dx}{EI_z}, \quad d\theta^{(M_y)} = \frac{M_{yF} dx}{EI_y}.$$

Заметим, что углы поворота сечений от изгибающих моментов в формулах для деформаций в состоянии « $I$ » выводятся из дифференциальных уравнений изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_z}{EI_z} \Rightarrow d\theta = \frac{M_z dx}{EI_z}.$$

Построим вспомогательное состояние « $I$ » (рис. 61, б). Для этого сбрасываем с бруса всю нагрузку, а затем в рассматриваемой точке в направлении  $l-l$  прикладываем единичную силу.

От этой силы по торцам элемента  $dx$  будут действовать внутренние силы:

$$\overline{N}_1, \overline{M}_{x1}, \overline{M}_{y1}, \overline{M}_{z1}.$$

Теперь системе в состоянии « $I$ » дадим малое возможное перемещение, обусловленное состоянием « $F$ », и получим состояние « $I + F$ » (рис. 61, в).

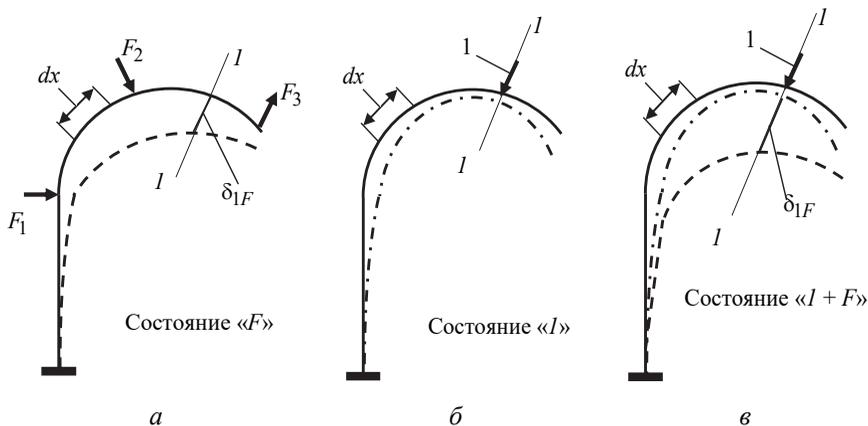


Рис. 61

Затем применим к системе в состоянии « $I$ » принцип возможных перемещений для деформируемых систем.

Единственная активная единичная сила совершит работу на перемещении  $\delta_{1F}$ . Эту работу приравняем работе внутренних сил на торцах элемента  $dx$  в состоянии « $I$ » на перемещениях торцов этого элемента в состоянии « $F$ » и суммируем эту работу по всему брусу.

Опустив единицу в качестве множителя, в итоге получим интеграл Мора, позволяющий определить  $\delta_{IF}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{IF} = & \sum \int_l \frac{N_F \bar{N}_1 dx}{EA} + \sum \int_l \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1} dx}{GI_p} + \\ & + \sum \int_l \frac{M_{yF} \bar{M}_{y1} dx}{EI_y} + \sum \int_l \frac{M_{zF} \bar{M}_{z1} dx}{EI_z}. \end{aligned} \quad (75)$$

Интеграл Мора часто записывают в упрощенном виде. При сложном нагружении, когда имеют место внутренние моменты и нормальные силы, вкладом нормальных сил в напряженно-деформированное состояние можно пренебречь, а все моментные слагаемые условно объединить. В итоге получим упрощенную форму интеграла Мора:

$$\delta = \sum \int_l \frac{M_F M_1 dx}{EI}. \quad (76)$$

Заметим, что с помощью интеграла Мора вычисляются линейные и угловые перемещения.

### **10.3. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ИНТЕГРАЛУ МОРА**

1. Составляются аналитические выражения для внутренних сил на всех силовых участках бруса.

2. Строится вспомогательное единичное состояние. Для этого снимается вся силовая нагрузка на брус, а затем в расчетной точке в интересующем направлении прикладывается единичный силовой фактор: если определяется линейное перемещение, то это единичная сила, а если – угловое, то это единичный момент.

3. Составляются аналитические выражения для внутренних сил на всех силовых участках бруса для единичного состояния.

4. Составляется интеграл Мора, по которому вычисляется искомое перемещение. Если получается положительное значение интеграла, то направление перемещения совпадает с направлением единичной силы, а если – отрицательное, то перемещение направлено против единичной силы.

### Пример

Определить  $\delta_B$  – вертикальное перемещение свободного конца консольного бруса.

Решение

Брус имеет один силовой участок

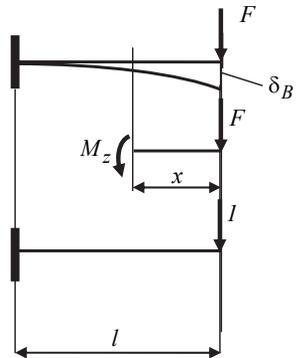
$$M_{zF} = -Fx.$$

Строим единичное состояние:

$$M_{z1} = -1x.$$

Составляем и вычисляем интеграл Мора:

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M_{zF} M_{z1} dx}{EI_z} = \int_0^l \frac{Fx \cdot x}{EI_z} = \frac{Fl^3}{3EI_z}.$$



Интеграл получился положительным, поэтому перемещение направлено вниз (по единичной силе).

## 10.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МОРА ПО СПОСОБУ ВЕРЕЩАГИНА

В двадцатых годах прошлого столетия русский студент Александр Верещагин разработал графоаналитический способ взятия интеграла Мора, позволяющий исключить операцию интегрирования. Но на способ Верещагина накладываются два ограничения: рассматриваемые участки должны быть прямолинейными и постоянной жесткости. Выведем формулу Верещагина.

На рассматриваемом участке длиной  $l$  (рис. 62) построен эпюр  $M_F(x)$ , который может иметь произвольную форму, и эпюр  $M_1(x)$ , который в рамках принятых ограничений будет линейным. Нам надо взять интеграл Мора  $\delta = \int_l M_F(x)M_1(x)dx$ , из которого вынесена за знак интеграла постоянная жесткость сечения  $EI$ . Представим функцию  $M_1(x)$  в виде  $M_1(x) = a + bx$ . Подставляем ее в интеграл Мора:

$$\int_l M_F(x)M_1(x)dx = a \int_l M_F(x)dx + b \int_l xM_F(x)dx.$$

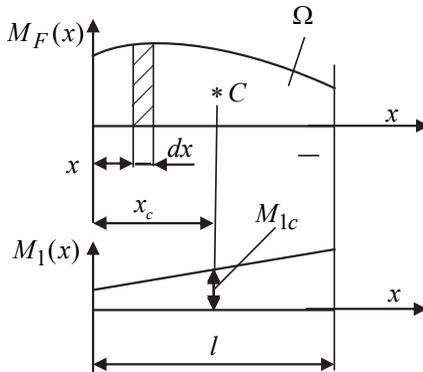
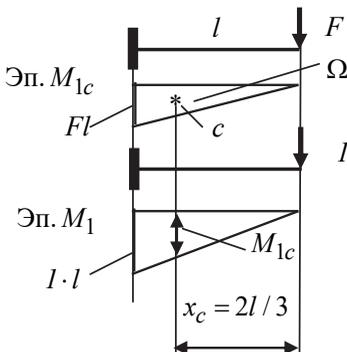


Рис. 62

Первый интеграл в правой части этого выражения представляет площадь силового эпюра  $\Omega$ , а второй интеграл – статический момент площади  $\Omega$  относительно оси  $M_F(x)$ , который, как известно из геометрии, равен произведению площади фигуры  $\Omega$  на координату ее центра тяжести  $x_c$ . В результате получаем

$$\int_l M_F(x)M_1(x)dx = a\Omega + b\Omega x_c = \Omega(a + bx_c).$$

Выражение в скобке в правой части – это значение момента  $M_{1c} = M_1(x_c)$  на единичном эпюре  $M_1(x)$ , взятое на координате центра



тяжести  $x_c$  площади  $\Omega$ .

В результате получаем формулу Верещагина:

$$\int_0^l M_F(x)M_1(x)dx = \Omega \cdot M_1(x_c). \quad (77)$$

**Пример**

Определить прогиб свободного конца консольной балки (тот же пример).

На рисунке построен силовой эпюр  $M_F$ . Его площадь  $\Omega = Fl^2/2$ . Координата центра тяжести  $x_c = 2l/3$ . Построены единичное состояние и эпюр изгибающих моментов  $M_1$ .  $M_{1c} = 2l/3$ . Прогиб свободного конца по формуле Верещагина:

$$\delta = \frac{1}{EI_z} \Omega M_{1c} = \frac{Fl^3}{3EI_z}.$$

### 10.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МОРА ПО ФОРМУЛЕ СИМПСОНА

Чтобы воспользоваться графоаналитической формулой Симпсона, надо на каждом силовом участке бруса также построить силовые эпюры  $M_F$ , затем построить единичное состояние и эпюры  $M_1$  для него. На использование формулы Симпсона накладываются те же два ограничения, что и на формулу Верещагина, и добавляется еще одно ограничение: силовые эпюры должны описываться функциями порядка не выше второго.

Формулу Симпсона для участка бруса мы дадим без вывода. Ее смысл понятен из рис. 63.

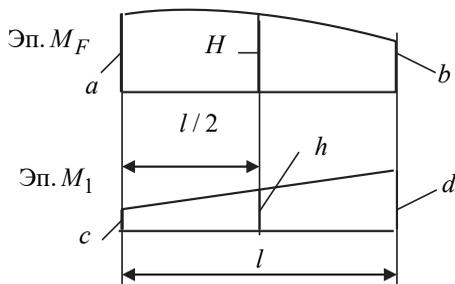
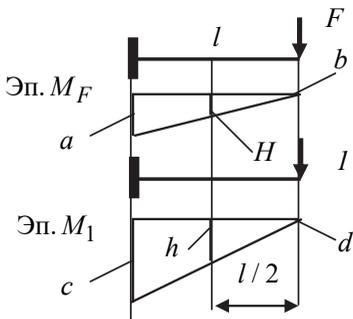


Рис. 63

Формула Симпсона:

$$\int_l M_F M_1 dx = \frac{l}{6} (ac + 4Hh + bd). \quad (78)$$



### Пример

Рассмотрим ту же консольную балку и определим по формуле Симпсона прогиб свободного конца.

Решение.

$$a = Fl, \quad H = \frac{Fl}{2}, \quad b = 0,$$

$$c = 1 \cdot l, \quad h = \frac{1 \cdot l}{2}, \quad d = 0.$$

По формуле Симпсона

$$\delta = \frac{l}{6EI_z} (ac + 4Hh + bd) = \frac{Fl^3 + Fl^3}{6EI_z} = \frac{Fl^3}{3EI_z},$$

что совпадает с предыдущими результатами

Подводя итог под энергетическими методами определения перемещений, отметим, что предпочтение отдается графоаналитическим методам Верещагина и Симпсона из-за их простоты. Но применять их можно только в рамках оговоренных выше ограничений.

## Глава 11

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ (ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

### 11.1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

В сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые системы.

*Устойчивость деформируемой системы* – это ее способность сохранять первоначальную (исходную) форму равновесия. Как правило, вопросы устойчивости относятся к сжатым конструктивным элементам, в основном к сжатым стержням.

Пусть стержень сжимается силой  $F$ . Чтобы выяснить, устойчивое или неустойчивое состояние равновесия у стержня, надо дать ему малое возмущение (рис. 64), а затем убрать его. Если стержень вернется в первоначальное состояние, то его состояние равновесия – устойчивое. Для данного конкретного стержня это зависит от величины сжимающей силы.

*Критической силой*  $F_{кр}$  называется минимальное значение сжимающей силы, при которой происходит потеря устойчивости.

*Критическое напряжение*  $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$ . Допускаемая сила  $[F]_y = \frac{F_{кр}}{[n]_y}$ , допускаемое напряжение  $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y}$ . В этих формулах  $[n]_y$  – нормативный коэффициент запаса устойчивости.



Рис. 64

Условие устойчивой, надежной работы стержня можно записать в виде

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_y. \quad (79)$$

## 11.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ПО ЭЙЛЕРУ

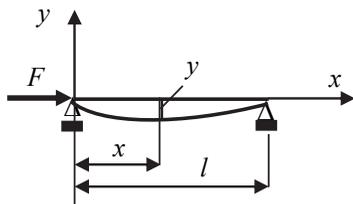


Рис. 65

В XVII веке Леонард Эйлер определил критическую силу для схемы, показанной на рис. 65. Он исходил из дифференциального уравнения изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{и}}{EI_{\min}}. \quad (a)$$

Естественно, он считал, что потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной изгибной жесткости.

Изгибающий момент возникает за счет прогиба балки от потери устойчивости:  $M_{и} = -Fy$ . Подставим  $M_{и}$  в (a) и введем обозначение

$$k^2 = \frac{F}{EI_{\min}}, \quad (б)$$

в результате дифференциальное уравнение изогнутой оси балки примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0. \quad (в)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (г)$$

Граничные условия: при  $x = 0$   $y = 0$ ; при  $x = l$   $y = 0$ .

Подставляя первое граничное условие в (г), получаем  $C_2 = 0$ .

Подставляя второе граничное условие в (г), получаем  $C_1 \sin kl = 0$ .

В этом равенстве  $C_1 \neq 0$ , поскольку тогда мы приходим к тривиальному

решению  $y = 0$ , что соответствует неискривленной оси бруса. Поэтому остается принять  $\sin kl = 0$ . Это возможно при условии

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad (\text{д})$$

где  $n = 0, 1, 2, 3$  и т. д. Подставляя (д) в (б), получаем значение сжимающей силы  $F$ , при которой искривляется ось бруса,

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

Это и будет выражение для расчета критической силы. Но следует отбросить  $n = 0$ , что опять приведет к тривиальному решению – отсутствию  $F$ , и принять  $n = 1$ , а это соответствует первой форме искривленной оси бруса и минимальному значению критической силы. Итак, формула Эйлера имеет вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (80)$$

### 11.3. ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ОТ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Формула Эйлера получена при условиях закрепления стержня, показанных на рис. 65. При других условиях закрепления следует пользоваться обобщенной формулой Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\text{пр}}^2}, \quad (81)$$

где приведенная длина  $l_{\text{пр}} = \mu l$  (здесь  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, который вычисляется и приводится в справочниках).

На рис. 66 даны значения  $\mu$  для некоторых случаев.

Из рис. 66 виден геометрический смысл коэффициента  $\mu$ : он показывает, на какой части длины  $l$  укладывается одна полуволна синусоиды изогнутой оси стержня при потере его устойчивости.

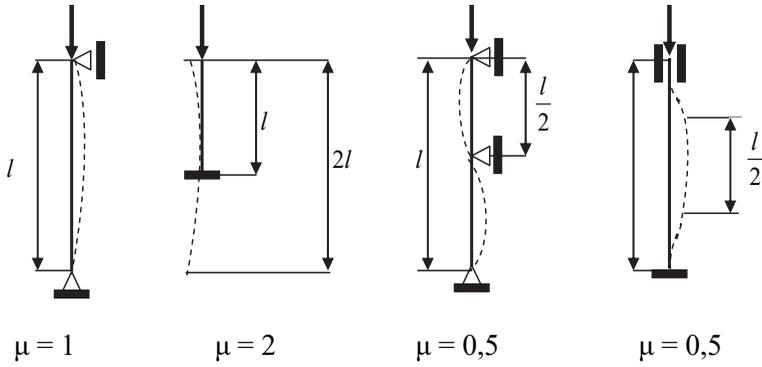


Рис. 66

### 11.4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Преобразуем формулу Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A}. \tag{a}$$

Введем понятие минимального радиуса инерции сечения  $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ . Формула (a) примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}. \tag{б}$$

Введем понятие гибкости стержня  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ . Формула Эйлера примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{82}$$

Формула Эйлера выведена из дифференциального уравнения изогнутой оси балки, полученного в рамках ограничений, накладываемых на все задачи в курсе сопротивления материалов. Одним из этих огра-

ничений является работа в области упругих деформаций. Строго говоря, максимальным напряжением, при котором деформации будут упругими, является предел пропорциональности материала  $\sigma_{\text{пц}}$ . Поэтому формулу Эйлера можно применять, если

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

Выразим отсюда  $\lambda$  :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Назовем правую часть этого выражения предельной гибкостью стержня  $\lambda_{\text{пред}}$  :

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (83)$$

Таким образом, мы получили окончательное условие применимости формулы Эйлера:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}. \quad (84)$$

### 11.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ МАЛОЙ ГИБКОСТИ, КОГДА $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$

На рис. 67 показана диаграмма  $\sigma_{\text{кр}} - \lambda$ , из которой видно, что для стержней большой гибкости (зона I:  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ ) критическое напряжение следует вычислять по формуле Эйлера. Для стержней средней гибкости (зона II:  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$ ) критические напряжения вычисляются по эмпирической формуле Ясинского. Для стали эта формула имеет вид  $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$ , где  $a$  и  $b$  – экспериментально определяемые коэффициенты (для стали 3:  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа). Для стержней малой гибкости (зона III:  $\lambda \leq \lambda_0$ ), которые не могут потерять устойчивость и работают

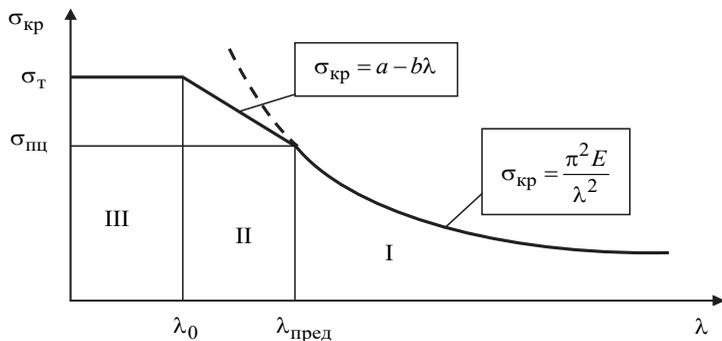


Рис. 67

только на сжатие, предельное напряжение равняется пределу текучести  $\sigma_T$ . Для любого материала значение граничных между зонами точек  $\lambda_0$  и  $\lambda_{пред}$  можно легко рассчитать. Для сталей  $\lambda_0 \approx 50$ ,  $\lambda_{пред} \approx 100$ .

## Глава 12

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДВИЖЕНИИ С УСКОРЕНИЕМ

Динамические задачи в принципе отличаются от статических тем, что в динамике или вся механическая система, или ее отдельные части движутся с ускорением. Многие такие системы удобно рассчитывать на прочность с помощью принципа Даламбера, который можно рассматривать как искусственный прием, позволяющий эти динамические задачи свести к задачам статическим.

*Принцип Даламбера для механической системы:* если к каждой точке системы, движущейся с ускорением, добавить силы инерции, то совокупность действующих на систему сил и сил инерции образует систему сил, находящуюся в равновесии, и к ней можно будет применять все уравнения статики.

Покажем на примере применение принципа Даламбера (рис. 68).

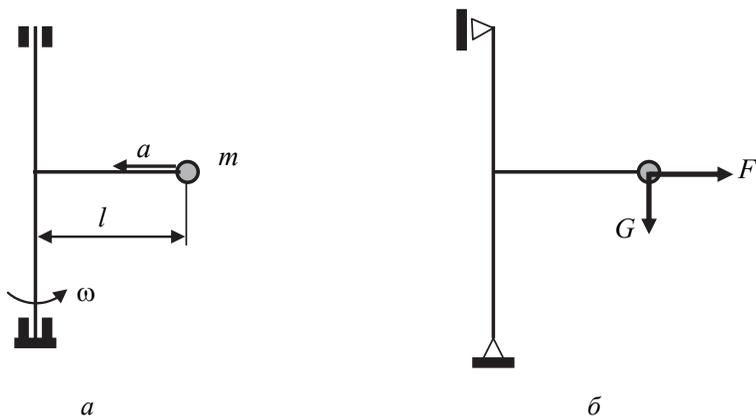


Рис. 68

### Пример

Рама с закрепленной на ней массой  $m$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $BC$ . Масса  $m$  находится на расстоянии  $l$  от оси вращения. Пренебрегая массой рамы по отношению к массе  $m$ , изобразить адекватную статическую расчетную схему задачи.

### Решение

На рис. 68, *a* показана исходная динамическая задача. На массу  $m$  действует нормальное (центростремительное) ускорение  $a = \omega^2 l$ . Добавив в соответствии с принципом Даламбера к гравитационной силе  $G = mg$ , приложенной к массе  $m$  (единственной активной силе) силу инерции  $F = |F_{\text{ин}}| = ma$ , получим адекватную статическую расчетную схему задачи (рис. 68, *б*).

## Глава 13

### ИНЖЕНЕРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

#### 13.1. ДОПУЩЕНИЯ ИНЖЕНЕРНОЙ ТЕОРИИ УДАРА

Удар – такой случай динамического действия силы, когда нагрузка прикладывается с большой начальной скоростью. Это довольно сложное физико-механическое явление, поэтому при описании удара используются различные упрощения и в зависимости от этого существуют несколько теорий удара. Мы рассмотрим простейшую инженерную теорию удара, в которой используются следующие допущения.

1. Тело, воспринимающее удар, подчиняется закону Гука.
2. Тело, наносящее удар, является абсолютно твердым.
3. Кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию тела, воспринимающего удар.
4. Удар считается неупругим, т. е. ударяющее тело не отскакивает после удара, а продолжает двигаться вместе с телом, воспринимающим удар, на пути его деформирования.

#### 13.2. ПОНЯТИЕ О ДИНАМИЧЕСКОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ, ДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЕ И КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИНАМИЧНОСТИ

На рис. 69, *а* показан стержень, на верхний торец которого падает с какой-то высоты масса  $m$ . При соударении на стержень действует динамическая сила  $F_d$  (рис. 69, *б*). Если массу  $m$  положить без начальной скорости на стержень, то на него будет действовать статическая сила  $F_{ст} = mg$  (рис. 69, *в*). Стержни будут деформироваться на  $\delta_{ст}$  и  $\delta_d$  соответственно от статической и динамической сил. Совершенно

очевидно, что динамические сила и деформации будут больше соответствующих статических силы и деформации. Как видно из рис. 70, в соответствии с первым допущением инженерной теории удара можно записать:

$$\frac{F_{\text{д}}}{F_{\text{ст}}} = \frac{\delta_{\text{д}}}{\delta_{\text{ст}}} = k_{\text{д}}. \quad (85)$$

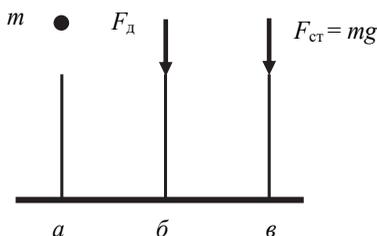


Рис. 69

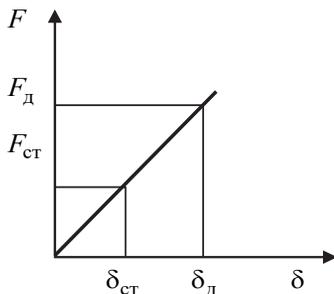


Рис. 70

В этой формуле  $k_{\text{д}}$  – коэффициент динамичности, показывающий, во сколько раз динамическое действие сил при ударе превышает статическое.

### 13.3. ПРИВЕДЕНИЕ МАССЫ ТЕЛА, ВОСПРИНИМАЮЩЕГО УДАР, К ТОЧКЕ СОУДАРЕНИЯ

Пусть на стержень длиной  $l$  с высоты  $H$  падает масса  $m$  (рис. 71, а). Приведем распределенную массу стержня к точке соударения (рис. 71, б) и назовем ее приведенной массой  $m_{\text{пр}} = km_{\text{стержня}}$ , где  $k$  – коэффициент приведения;  $m_{\text{стержня}} = Al\rho$  – масса всего стержня ( $A$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – плотность материала стержня).

Эпюра скоростей поперечных сечений  $v$  стержня после соударения показана на рис. 71, в. Подсчитаем кинетическую энергию  $T$  после соударения стержня с распределенной массой и кинетическую энергию  $T_1$  приведенной массы:

$$dm_{\text{стержня}} = A dx \rho, \quad dT = \frac{dm_{\text{стержня}} v_x^2}{2}, \quad T = \int_0^l dT = \frac{A \rho}{2} \int_0^l v_x^2 dx.$$

$$T_1 = \frac{m_{np} v_1^2}{2} = \frac{k A l \rho v_1^2}{2}.$$

Приравнявая  $T$  и  $T_1$ , получаем

$$k = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{v_x}{v_1} \right)^2 dx.$$

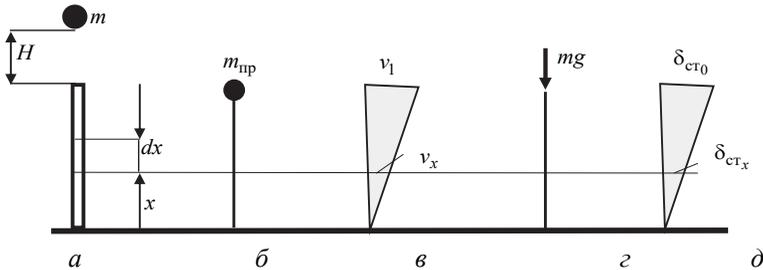


Рис. 71

Построим вспомогательное состояние от действия статической силы (рис. 71, г) и эпюр перемещений сечений  $\delta_{ct}$  для этого состояния (рис. 72, д). Из сопоставления эпюр  $v$  и  $\delta_{ct}$  следует, что  $\frac{v_x}{v_1} = \frac{\delta_x}{\delta_{ct0}}$ .

Подставляем это соотношение в формулу для  $k$  и получаем окончательное выражение для коэффициента приведения:

$$k = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\delta_x}{\delta_{ct0}} \right)^2 dx. \quad (86)$$

### 13.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИНАМИЧНОСТИ

Рассмотрим три стадии удара.

*Первая стадия:* полет ударяющего тела до соприкосновения с  $m_{\text{пр}}$  (рис. 72, а).

Если у падающей массы не было начальной скорости, то скорость ее соударения со стержнем

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (\text{а}_1)$$

*Вторая стадия:* процесс соударения (рис. 72, б). По закону сохранения импульса определяем начальную скорость слипшихся масс:

$$v_1 = \frac{mv}{m + m_{\text{пр}}}. \quad (\text{б}_1)$$

*Третья стадия:* движение слипшихся масс до полной остановки (рис. 72, в). Опишем эту стадию соответствующими уравнениями.

Закон сохранения энергии

$$U = W + T. \quad (\text{в}_3)$$

Начальная кинетическая энергия слипшихся масс:

$$T = \frac{(m + m_{\text{пр}})v_1^2}{2}. \quad (\text{г}_3)$$

Уменьшение потенциальной энергии ударяющей массы на пути их совместного движения  $\delta_d$ :

$$W = mg\delta_d. \quad (\text{д}_3)$$

$U$  – потенциальная энергия стержня, полученная им на деформации  $\delta_d$ :

$$U = \frac{1}{2}F_d\delta_d. \quad (\text{е}_3)$$

Введем в выражения для  $\delta_d$  и  $F_d$  коэффициент динамичности:

$$\delta_d = \delta_{\text{ст0}}k_d, \quad F_d = mgk_d. \quad (\text{з}_3)$$

Подставляем формулы (з<sub>3</sub>) в (д<sub>3</sub>) и (е<sub>3</sub>), а формулы (а<sub>1</sub>) и (б<sub>1</sub>) в (г<sub>3</sub>), а затем полученные выражения – в закон сохранения энергии (в<sub>3</sub>), из решения которого и получаем формулу для коэффициента динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст0} \left(1 + \frac{m_{пр}}{m}\right)}}. \quad (87)$$

Во многих случаях формулу (87) упрощают. В ряде задач  $m_{пр} \ll m$ . В этом случае

$$k_d \approx 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст0}}}. \quad (88)$$

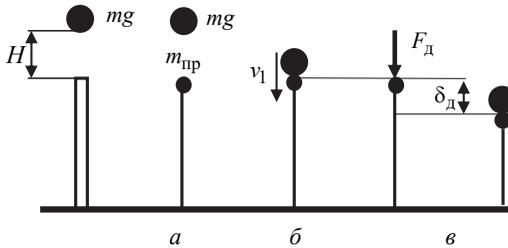


Рис. 72

При больших скоростях соударения  $\frac{2H}{\delta_{ст0}} \gg 1$  и формула (88) принимает вид

$$k_d \approx \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст0}}}. \quad (89)$$

### 13.5. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПО ИНЖЕНЕРНОЙ ТЕОРИИ УДАРА

1. Динамическая задача при ударе сводится к вспомогательной статической задаче, когда к точке соударения прикладывается статическая сила, равная весу тела, наносящего удар.

2. В этой статической задаче рассчитываются необходимые напряжения  $\sigma_{ст}$  и перемещения  $\delta_{ст}$ .

3. Рассчитывается коэффициент динамичности  $k_d$ .

4. Определяются необходимые динамические напряжения  $\sigma_d$  и перемещения  $\delta_d$  по формулам:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} k_d; \quad \delta_d = \delta_{ст} k_d. \quad (90)$$

#### **Пример**

Определить коэффициент динамичности при мгновенном приложении нагрузки всей своей величиной без начальной скорости.

#### **Решение**

В этом случае  $H = 0$  и по формуле (87)  $k_d = 2$ .

## Глава 14

# РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

### 14.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В сопротивлении материалов с точки зрения прочности представляют интерес колебания упругих систем. Механическое упругое колебание – это явление периодического изменения по величине и направлению взаимных перемещений различных точек упругой системы при ее деформировании. Далее под термином «колебание» мы будем понимать только такие колебания.

Колебания прежде всего различают по *числу степеней свободы* – это число независимых координат, определяющих положение системы.

При изучении упругих колебаний различают *собственные и вынужденные колебания*. *Собственные колебания* совершает система, которая выведена из состояния равновесия и затем предоставлена сама себе. *Вынужденные колебания* происходят в упругой системе под действием изменяющихся во времени внешних сил. Собственные колебания с точки зрения прочности опасности не представляют, но мы начнем именно с них, поскольку из собственных колебаний определяется важнейший параметр колебательной системы – ее собственная (круговая) частота, учитываемая при расчетах на прочность при вынужденных колебаниях.

Заметим также, что при составлении расчетной схемы колебательную систему стараются разложить на две части: массовую и упругую. Если это удастся сделать, то задача существенно упрощается. Представим, что на каком-то упругом стержне закреплено тело, масса которого во много раз превышает массу стержня, и эта масса совершает колебания, в результате которых стержень испытывает переменные по величине и направлению деформации. Такую систему вполне можно разде-

лить на массовую (массивное тело) и упругую (стержень) части. В расчетах будет фигурировать только жесткость стержня.

Мы будем рассматривать только системы с одной степенью свободы, которые можно разделить на две части: массовую и упругую.

## 14.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ БЕЗ НАЛИЧИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

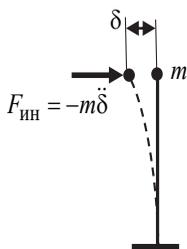


Рис. 73

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из стержня с изгибной жесткостью  $c$  и закрепленной на его конце точечной массой  $m$  (рис. 73), совершающую собственные поперечные колебания.

Для написания уравнения движения воспользуемся выражением для перемещений в канонической форме:

$$\delta = \Delta_{1F_{\text{ин}}} = -\delta_{11}m\ddot{\delta},$$

откуда получаем уравнение движения в стандартном виде

$$\ddot{\delta} + \omega^2\delta = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}m} = \frac{c}{m}.$$

Здесь  $\omega$  – круговая частота колебательной системы.

### Пример

Определить собственную частоту поперечных колебаний системы, изображенной на рис. 74. Известны: длина стержня  $l$ , изгибная жесткость сечений  $EI$  – постоянна по длине стержня, величина закрепленной массы  $m$ .

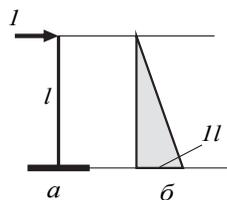


Рис. 74

Решение

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}. \tag{91}$$

Для расчета  $\delta_{11}$  (перемещения точки крепления массы от единичной силы в направлении колебаний) строим единичное состояние  $I$

(рис. 74, а) и эпюр изгибающих моментов (рис. 74, б). Перемножая этот эпюр сам на себя по формуле Верещагина, получаем

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EI}, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

### 14.3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

В реальных колебательных системах всегда имеются силы неупругого сопротивления  $R$ , которые чаще всего принимают пропорциональными скорости перемещения:  $R = \alpha \dot{\delta}$  ( $\alpha$  – коэффициент пропорциональности). Рассмотрим такую колебательную систему (рис. 75).

В этом случае на массу  $m$  действуют две силы в направлении колебаний. Сложим их:

$$X_1 = -m\ddot{\delta} - \alpha\dot{\delta}.$$

Каноническая форма уравнения перемещений:

$$\delta = \Delta_{X_1} = \delta_{11}(-m\ddot{\delta} - \alpha\dot{\delta}).$$

Преобразуем его к стандартному виду

$$\ddot{\delta} + 2n\dot{\delta} + \omega^2\delta = 0, \quad \text{где } 2n = \frac{\alpha}{m}.$$

Решение этого уравнения:

$$\delta = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi), \tag{92}$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} \approx \omega$ , поскольку, как правило,  $n \ll \omega$ .

График функции (92) характеризует затухающий характер процесса колебаний.

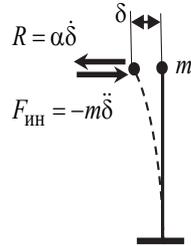


Рис. 75

## 14.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В этом случае (рис. 76) к силе инерции и силе сопротивления добавляется возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону  $S \sin(pt)$ , где  $p$  – круговая частота ее изменения.

Складываем все три силы:

$$X_1 = S \sin(pt) - m\ddot{\delta} - \alpha\dot{\delta}.$$

Запишем каноническую форму уравнения перемещений:

$$\delta = \Delta_{X_1} = \delta_{11}(S \sin(pt) - m\ddot{\delta} - \alpha\dot{\delta}).$$

С учетом обозначения  $2n = \frac{\alpha}{m}$  придадим ему стандартный вид:

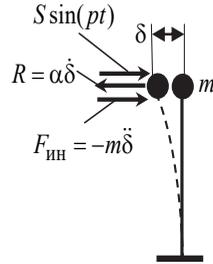


Рис. 76

$$\ddot{\delta} + 2n\dot{\delta} + \omega^2\delta = \frac{S}{m}\sin(pt). \quad (93)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из общего решения однородного уравнения (92) и частного решения, которое будем искать в виде

$$\delta_{\text{част}} = C \sin(pt). \quad (94)$$

В итоге получаем

$$\delta = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \delta_{\text{част}} = C \sin(pt). \quad (95)$$

Общее решение однородного уравнения (92) через какой-то промежуток времени сводится к нулю, а коэффициент  $C$  в частном решении представляет собой амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_{\text{вын}} = C.$$

Подставив частное решение (94) в уравнение (93) и выполнив необходимые алгебраические преобразования, получим рабочую формулу для  $A_{\text{вын}}$ :

$$A_{\text{вын}} = \delta_{\text{ст}}^{(S)} \beta, \quad (96)$$

где  $\beta$  – коэффициент нарастания вынужденных колебаний, рассчитываемый по формуле

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}}, \quad (97)$$

а  $\delta_{\text{ст}}^{(S)} = \delta_{11} S$  – перемещение точки крепления массы  $m$  на стержне от статического действия максимального значения возмущающей силы в направлении колебаний.

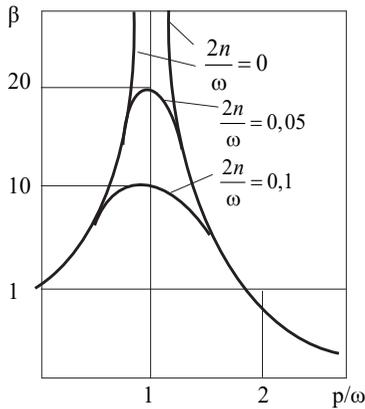


Рис. 77

На рис. 77 построена так называемая амплитудно-частотная характеристика, показывающая зависимость коэффициента  $\beta$ , рассчитанного по формуле (97), от отношения  $\frac{p}{\omega}$ . Как видно из этой характеристики,

в диапазоне  $0,5 < \frac{p}{\omega} < 1,5$  коэффициент  $\beta$  резко возрастает – это так называемая резонансная зона, попадание в которую, как правило, приводит к разрушению колебательной системы. Явление резкого возрастания амплитуды колебаний называется *резонансом*. Максимальное

значение  $\beta$  в резонансной зоне зависит от величины силы неупругого сопротивления, характеризуемой коэффициентом  $n$ : чем меньше сила сопротивления, тем больше амплитуда резонансных колебаний. При  $n \rightarrow 0$   $A_{\text{вын}} \rightarrow \infty$ .

Для отстройки от резонанса надо изменять отношение  $\frac{P}{\omega}$ . Это удобней всего делать, изменяя собственную частоту колебательной системы [формулу (97)], варьируя ее жесткостью.

Отметим следующее обстоятельство. Поскольку из резонансной зоны в любом случае нужно выходить, формулу (97) для расчета  $\beta$  можно упростить, приняв  $n = 0$ :

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{P^2}{\omega^2}}. \quad (98)$$

Это следует из амплитудно-частотной характеристики: вне резонансной зоны все кривые сливаются, т. е. силы сопротивления практически не влияют на амплитуду колебаний.

Таким образом, расчет на прочность и жесткость при вынужденных колебаниях выполняется в определенной последовательности. Сначала рассматривается вспомогательная статическая задача, в которой к точке крепления сосредоточенной массы  $m$  прикладывается максимальное значение возмущающей силы  $S$ . В этой задаче рассчитываются необходимые напряжения  $\sigma_{\text{ст}}$  и перемещения  $\delta_{\text{ст}}$ . Затем по формуле (98) рассчитывается коэффициент нарастания вынужденных колебаний  $\beta$ . После этого рассчитываются динамические напряжения и перемещения по формулам:

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{ст}}\beta, \quad \delta_{\text{д}} = \delta_{\text{ст}}\beta. \quad (98)$$

## Глава 15\*

### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Расчет на прочность пластин и оболочек в рамках довольно существенных ограничений, накладываемых на их форму, нагрузку, условия закрепления, рассматривается в курсе сопротивления материалов. Более сложные пластины и оболочки рассматриваются в курсе теории упругости. Мы в рамках нашего курса ограничимся рассмотрением простейших задач теории пластин и оболочек.

#### 15.1. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

##### 15.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

У осесимметричных оболочек срединная поверхность – это поверхность вращения. Учитывая тонкостенность оболочки, можно принять, что возникающие в ней напряжения постоянны по толщине и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Теория оболочек, построенная на этом допущении, называется *безмоментной теорией оболочек*. Условием применимости этой теории служит также отсутствие в оболочке резких переходов, защемлений, и внешняя нагрузка не должна содержать сосредоточенных сил и моментов.

##### 15.1.2. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ

Вырежем из оболочки бесконечно малый элемент  $K$  двумя меридиональными и двумя нормальными сечениями (рис. 78). Этот элемент в изометрии показан на рис. 79, *а*, а его три проекции – на рис. 79, *б*.

Пусть в оболочке находится газ под давлением  $q$ . Обозначим через  $\rho_m$  радиус кривизны дуги меридиана, а через  $\rho_t$  – радиус кривизны

нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана. Дуги меридиана элемента  $K$  ограничены углом  $d\theta$ , а дуги элемента в нормальном сечении – углом  $d\varphi$ . Длины этих дуг соответственно будут:  $dS_m = \rho_m d\theta$ ,  $dS_t = \rho_t d\varphi$ . Суммарные силы, действующие по граням элемента:

$$Q_m = \sigma_m dS_t \delta, \quad Q_t = \sigma_t dS_m \delta, \quad Q_q = q dS_t dS_m,$$

где  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  – соответственно меридиональное и тангенциальное напряжение.

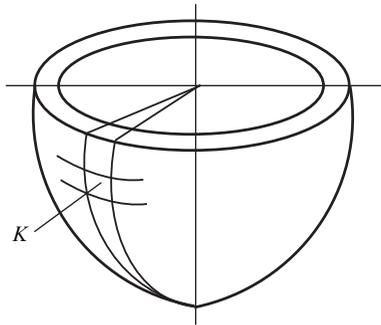


Рис. 78

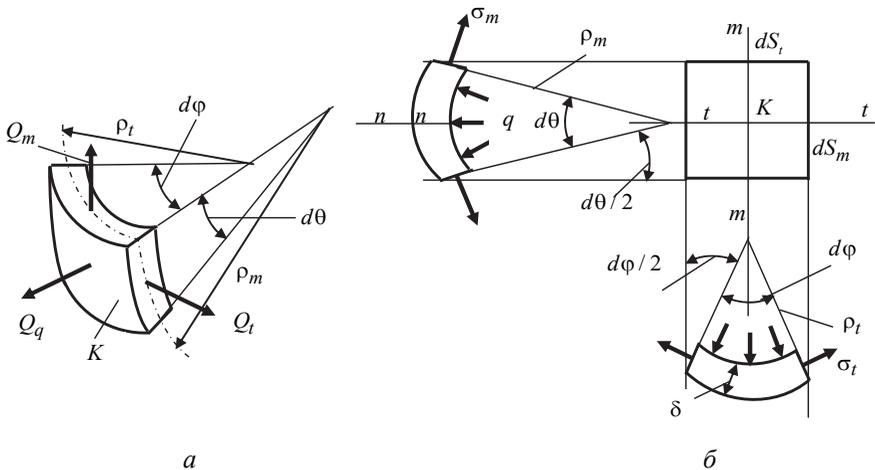


Рис. 79

Составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на нормаль  $n-n$ :

$$\Sigma F_{n-n} = q dS_t dS_m - 2\sigma_t \delta dS_m \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - 2\sigma_m \delta dS_t \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0,$$

откуда получим формулу Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}. \quad (100)$$

Составим второе уравнение равновесия для части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 80).

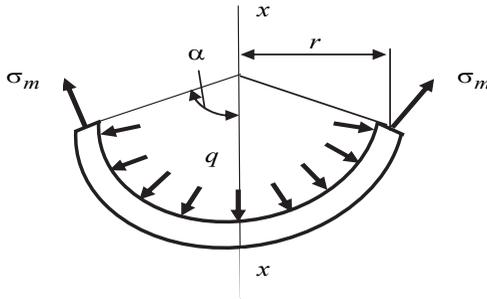


Рис. 80

Спроецируем все силы на ось  $x-x$ :  $\Sigma F_{x-x} = \sigma_m 2\pi r \delta \sin \alpha - q \pi r^2 = 0$ .

Из этого уравнения определим  $\sigma_m$ , а затем из уравнения Лапласа  $\sigma_t$ .

### Пример

Рассчитать на прочность и жесткость тонкостенную сферическую оболочку, в которой находится газ под давлением  $q$ . Радиус срединной поверхности оболочки  $r$ , толщина стенки  $\delta$  (рис. 81, а).

Решение

Уравнение Лапласа:  $\frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r} = \frac{q}{\delta}$ , откуда  $\sigma = \frac{qr}{2\delta}$ .

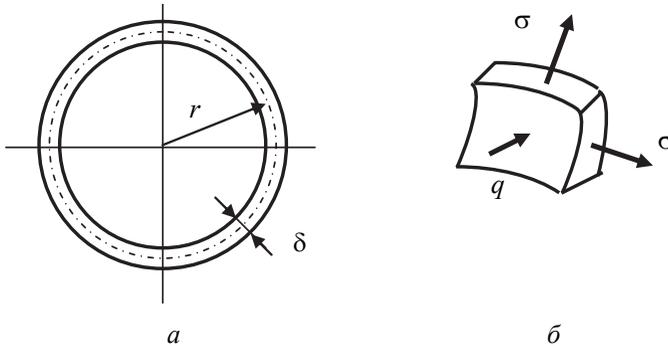


Рис. 81

Вырежем в произвольном месте элемент оболочки (рис. 81, б). Главные напряжения:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma_3 = -q \approx 0$ , поскольку  $q \ll \sigma$ , как это видно из полученной формулы для  $\sigma$ .

Эквивалентное напряжение по 3-й теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma = \frac{qr}{2\delta}.$$

Условие прочности:  $\sigma_{\text{экв}} = \frac{qr}{2\delta} \leq [\sigma].$

### Пример

Рассчитать на прочность и жесткость тонкостенную цилиндрическую оболочку, находящуюся под внутренним давлением газа  $q$ .

#### Решение

Вырежем бесконечно малый элемент оболочки двумя меридиональными и двумя окружными сечениями. Запишем уравнение Лапласа: поскольку  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = r$ , из уравнения Лапласа получаем  $\sigma_t = \frac{qr}{\delta}$ .

Из уравнения равновесия (рис. 82, б)  $\Sigma F_{x-x} = \sigma_m 2\pi r \delta - q\pi r^2 = 0$  получим:  $\sigma_m = \frac{qr}{2\delta}$ .

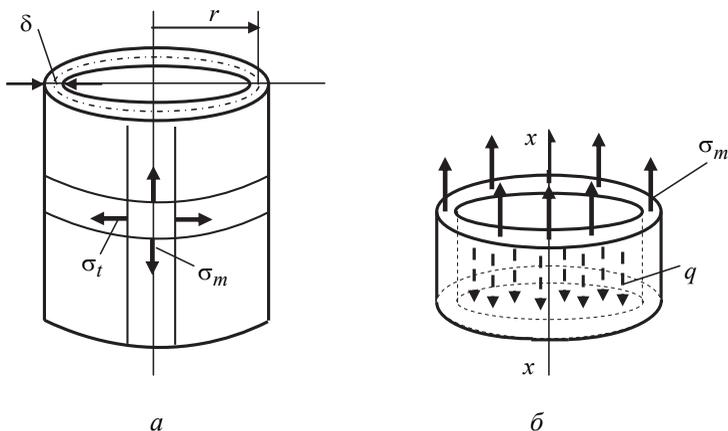


Рис. 82

Главные напряжения:  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m$ ,  $\sigma_3 = -q \approx 0$ .

По 3-й теории прочности  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{qr}{\delta} \leq [\sigma]$ .

Сравнивая эквивалентные напряжения у сферической и цилиндрической оболочки, видим, что сферическая оболочка может выдержать в два раза большую нагрузку.

Выполним расчет на жесткость.

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m) = \frac{qr \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{E\delta},$$

откуда

$$\Delta r = \frac{qr^2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{E\delta} \leq [\Delta r].$$

## 15.2. ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

Выше был рассмотрен случай растяжения оболочек без изгиба (безмоментная теория). Теперь остановимся на более общем случае, когда в сечениях оболочки возникают и изгибающие моменты, и нормальные силы.

Рассчитаем на прочность симметрично нагруженный тонкостенный цилиндр постоянной толщиной  $h$  и радиусом срединной поверхности  $R$  (рис. 83).

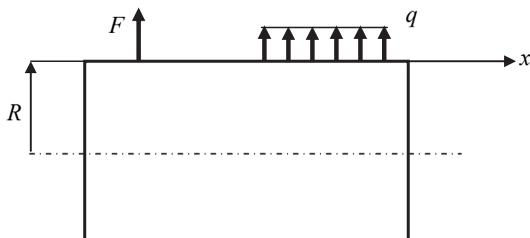


Рис. 83

Обозначим через  $w$  радиальное перемещение, а через  $\vartheta$  – угол наклона касательной к образующей срединной поверхности (рис. 84, а). При этом

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}. \quad (101)$$

Относительное удлинение  $\varepsilon_x$  отрезка  $AB$ , расположенного на расстоянии  $y$  от срединной поверхности (рис. 84, б), складывается из удлинения  $\varepsilon_0$  срединной поверхности и удлинения, обусловленного искривлением образующей цилиндра:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (102)$$

Относительное удлинение в окружном направлении

$$\varepsilon_z = \frac{w}{R}. \quad (103)$$

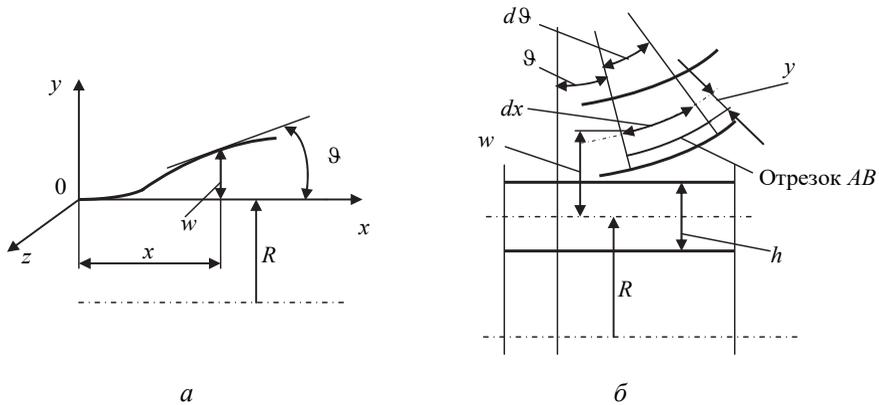


Рис. 84

Линейным деформациям  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_z$  соответствуют напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ , связанные с ними обобщенным законом Гука:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_z), \quad \sigma_z = \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_x).$$

С учетом (102) и (103) эти выражения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} + y \frac{d\theta}{dx} \right), \\ \sigma_z = \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \mu\varepsilon_0 + \frac{w}{R} + \mu y \frac{d\theta}{dx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Рассмотрим элемент оболочки с размерами  $dx$ ,  $dz$ ,  $h$  (рис. 85, а). Нормальные силы в площадках  $hdz$  и  $hdy$ , отнесенные к единице длины, будут

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right), \quad T_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dy = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{R} + \mu\varepsilon_0 \right). \quad (105)$$

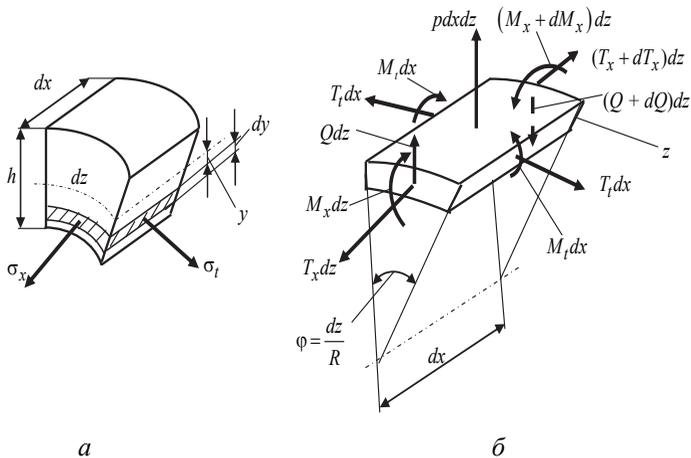


Рис. 85

Изгибающие моменты, отнесенные к единице длины,

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t y dy = D\mu \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (106)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – жесткость оболочки на изгиб.

Теперь составим уравнения равновесия. На рис. 85, *a* показаны силы и моменты, приложенные к граням элемента. К определенным четырём силовым факторам по формулам (105) и (106) добавлены поперечные силы  $Q$  и внешние силы, характеризуемые давлением  $p$ . При переходе от передней грани с координатой  $x$  к задней грани с координатой  $x + dx$  силы получают соответствующие приращения.

Проецируя все силы на ось цилиндра, получаем  $dT_x = 0$ ,  $T_x = \text{const}$ .

Проецируем силы на направление радиуса:

$$-T_t dx \frac{dz}{R} - dQ dz + p dx dz = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dx} = p - \frac{T_t}{R}. \quad (107)$$

Составляем еще одно уравнение равновесия:

$$\Sigma m_z = -Qdzdx + dM_x dz = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{dM_x}{dx}. \quad (108)$$

Преобразуем полученные уравнения. Из уравнений (104) исключаем  $\varepsilon_0$ , а из (107) и (108) – поперечную силу  $Q$ . В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} T_t &= \frac{Eh}{R} w + \mu T_x, \\ \frac{d^2 M_x}{dx^2} &= p - \frac{T_t}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Исключаем из этих уравнений  $T_t$ :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu}{R} T_x.$$

Наконец, исключим  $M_x$  из полученного уравнения, используя первую формулу (106), и получим уравнение относительно одного неизвестного  $w$ :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{p}{D} - \frac{\mu T_x}{RD}, \quad (110)$$

где

$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}. \quad (111)$$

Решение уравнения (110) можно искать в виде

$$w = e^{-kx} (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx) + e^{kx} (c_3 \sin kx + c_4 \cos kx) + w^*, \quad (112)$$

где  $w^*$  – частное решение, которое зависит от функции  $p(x)$ .

Для определения четырех постоянных в уравнении (112) необходимо задать четыре граничных условия и затем решить систему четырех уравнений.

*Граничные условия*

1. Край защемлен:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0.$$

2. Шарнирно опертый край:

$$w = 0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (M_x = 0).$$

3. Свободный край:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3w}{dx^3} = 0 \quad (Q = 0).$$

4. Край нагружен силой  $Q_0$  и моментом  $M_0$  :

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = M_0; \quad D \frac{d^3w}{dx^3} = Q_0.$$

Наибольшие напряжения определяются выражениями (104) при  $y = \pm \frac{h}{2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x \max} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \left( \varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right) \pm \frac{h}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \right], \\ \sigma_{t \max} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \left( \mu \varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right) \pm \mu \frac{h}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \right]. \end{aligned} \right\}$$

Если исключить отсюда при помощи выражений (105) и (106) величины

$$\left( \varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right), \left( \mu \varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right), \frac{d^2 w}{dx^2}, \mu \frac{d^2 w}{dx^2},$$

то получим

$$\sigma_{x \max} = \frac{T_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_{t \max} = \frac{T_t}{h} \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (113)$$

### 15.3. ИЗГИБ КРУГЛЫХ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН

Будем считать, что прогибы пластины  $w$  существенно меньше ее толщины  $h$  (такие пластины называются тонкими плитами). В этом случае можно считать, что нормальные напряжения в сечениях, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с изгибными напряжениями, т. е. надавливание между слоями пластины отсутствует.

Перейдем к определению напряжений в таких пластинах, нагруженных силами, симметрично расположенными относительно ее оси  $y$  (рис. 86, *a*). Деформации, перемещения и напряжения будут также симметричными относительно оси  $y$ . Прогиб  $w$  связан с углом поворота нормали  $\vartheta$  очевидным соотношением (рис. 86, *b*)

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr}. \quad (114)$$

Знак «минус» в (114) берется в соответствии с рис. 86, *b*. С уменьшением прогиба  $w$  угол  $\vartheta$  возрастает.

На рис. 87 показано осевое сечение пластины. Точки, расположенные на нормали  $BD$ , после изгиба пластины образуют нормаль  $B_1D_1$ , повернутую на угол  $\vartheta$ . Нормаль  $AC$  повернется на угол  $\vartheta + d\vartheta$ .

Отрезок  $CD$ , расположенный на расстоянии  $y$  от срединной поверхности, получает относительное удлинение

$$\varepsilon_r = y \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (115)$$

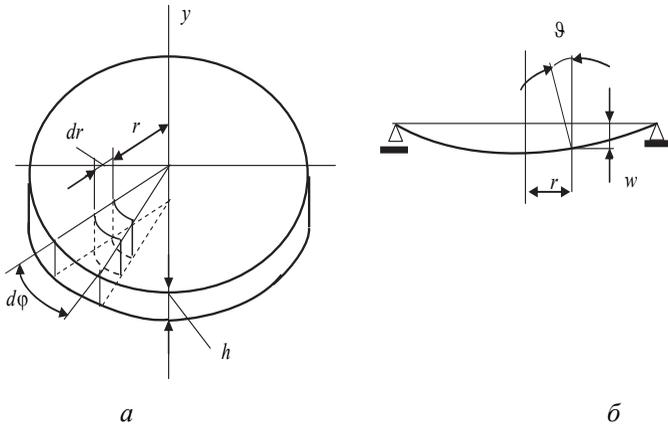


Рис. 86

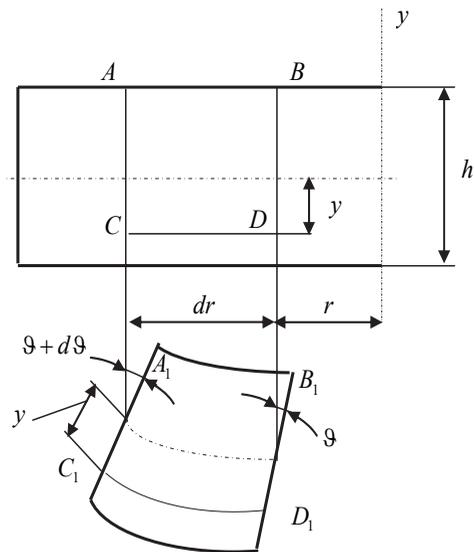


Рис. 87

Относительное удлинение в точке  $D$  в окружном направлении

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + y\theta) - 2\pi r}{2\pi r} = y \frac{\theta}{r}. \quad (116)$$

Двумя осевыми сечениями, проведенными под углом  $d\varphi$  друг к другу, и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r + dr$  выделим элемент пластины, показанный на рис. 86 и рис. 88, *a*. Поскольку в сечениях, параллельных срединной плоскости, нормальными напряжениями можно пренебречь, выразим напряжения через линейные деформации  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_t$  с помощью обобщенного закона Гука:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r). \quad (117)$$

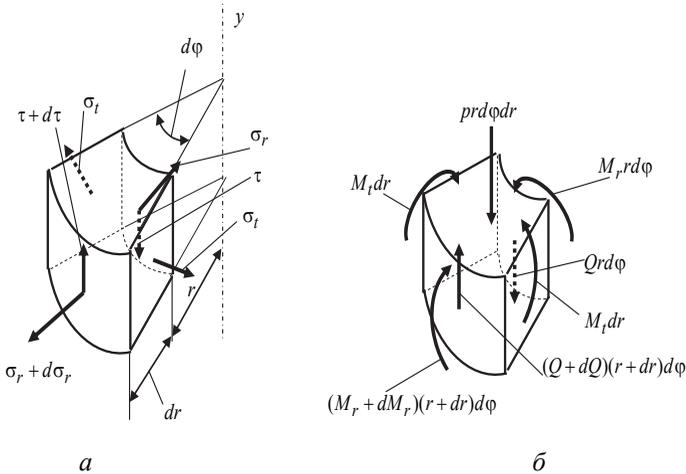


Рис. 88

Подставив в (117) полученные выражения (115) и (116), получаем:

$$\sigma_r = \frac{Ey}{1-\mu^2} \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad (118)$$

$$\sigma_t = \frac{Ey}{1-\mu^2} \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right).$$

На гранях элемента возникают и касательные напряжения. Из условий симметрии очевидно, что они могут возникать только на площадках, перпендикулярных радиусу  $r$ , и только в вертикальном

направлении (рис. 88, *a*). Зная напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ , определим моменты, приходящиеся на единицу длины сечения:

$$M_r r d\varphi = r d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r y dy, \quad M_t dr = dr \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t y dy.$$

Подставляя в эти формулы выражения (117), получаем:

$$M_r = D \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad M_t = D \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right), \quad (119)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – жесткость пластины на изгиб.

Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma Y(Q + dQ)(r + dr)d\varphi - Qrd\varphi - prd\varphi dr = 0,$$

откуда

$$pr = \frac{d}{dr}(Qr); \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_z = (M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r d\varphi - \\ - pr dr d\varphi \frac{dr}{2} - M_t dr d\varphi + (Q + dQ)(r + dr)d\varphi dr = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r r) = Qr. \quad (121)$$

Подставляем (119) в (121):

$$r \frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{Qr}{D}.$$

Из этого выражения получаем

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta r) \right] = -\frac{Q}{D}. \quad (122)$$

Два раза интегрируем (122):

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int (r \int Q dr) dr. \quad (123)$$

Константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из граничных условий, таких же, как и для оболочек.

Поперечная сила  $Q$  может быть найдена из уравнения равновесия (120).

После того как найдем функцию  $\vartheta$  (123), из выражений (119) определим изгибающие моменты  $M_r$  и  $M_t$ , а из формулы (114) – прогиб  $w$ .

Получим теперь расчетные формулы для напряжений. Для этого выражения

$$\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} = \frac{M_r}{D} \quad \text{и} \quad \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{M_t}{D},$$

полученные из (119), подставим в (118):

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} y, \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} y. \quad (124)$$

Наибольшие напряжения имеют место при  $y = \pm \frac{h}{2}$ :

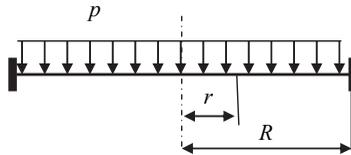
$$\sigma_{r \max} = \pm \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_{t \max} = \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (125)$$

### Пример

Определить максимальный прогиб и максимальное эквивалентное напряжение в круглой пластине, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $p$ .

Для центральной части пластины, отсеченной окружностью радиусом  $r$ , из уравнения равновесия  $Q \cdot 2\pi r = p\pi r^2$  находим:

$$Q = \frac{pr}{2}. \quad (a)$$



Из выражения (123) после двукратного интегрирования с учетом (a) будем иметь

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Угол поворота  $\vartheta$  в центре пластины должен быть равен нулю. Это возможно только в том случае, если  $C_2 = 0$ . Таким образом,

$$\vartheta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D}. \quad (б)$$

Кроме того, на контуре при  $r = R$  угол  $\vartheta = 0$  и из (б) получаем

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D}.$$

Формула (б) принимает вид

$$\vartheta = \frac{p}{16D} (R^2 r - r^3). \quad (в)$$

Из (119) с учетом (в) получим выражения для моментов:

$$M_r = \frac{p}{16} \left[ R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu) \right], \quad M_t = \frac{p}{16} \left[ R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu) \right]. \quad (г)$$

Далее из (114) с учетом (в) получим

$$w = \frac{p}{16D} \left( C_3 - \frac{1}{2} R^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \right),$$

где постоянная  $C_3 = \frac{R^4}{4}$  из условия, что на контуре  $w = 0$ .

Формула для прогиба принимает окончательный вид:

$$w = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (\text{д})$$

Максимальный прогиб будет при  $r = 0$ :

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D}.$$

Переходим к напряжениям. Из формул (г) для моментов видно, что максимальное по модулю значение имеет момент  $M_r$  вблизи защемления при  $r = R$ :  $|M_{r\max}| = \frac{2pR^2}{16} (1 + \mu)$ . Тангенциальный момент в

этих же точках, вычисленный по формуле (г),  $|M_t| = \frac{2\mu pR^2}{16}$ .

Очевидно, что опасными будут точки на поверхности пластины вблизи защемления, и главные напряжения в этих точках вычисляем по формулам (125):

$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{2pR^2}{16} \frac{6}{h^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu pR^2}{16} \frac{6}{h^2}, \quad \sigma_3 = 0.$$

Максимальное эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{эkv max}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{3}{4} \frac{pR^2}{h^2}.$$

# **ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ**

## **Глава 1**

1. Что представляют собой внутренние силы и как они определяются?
2. Понятие о напряжениях. Разложение напряжений на координатные оси.
3. Понятие о деформациях. Линейные и угловые деформации.
4. Связь между напряжениями и деформациями. Закон Гука.
5. Алгоритм расчета на прочность.

## **Глава 2**

1. Формула для расчета напряжений в поперечных сечениях бруса.
2. Формула для расчета удлинения участка бруса.
3. Условия прочности для хрупких и пластичных материалов.
4. Три типа задач при расчетах на прочность.
5. Особенности расчета статически неопределимых стержней.

## **Глава 3**

1. Какие механические характеристики определяются при испытаниях на растяжение?
2. Дайте характеристики основных участков диаграммы растяжения образца из малоуглеродистой стали.
3. Какие свойства материала характеризуют определенные механические характеристики?
4. Дайте характеристику хрупких и пластичных материалов.

## **Глава 4**

1. Что такое напряженное состояние точки?
2. Что такое деформированное состояние точки?
3. Дайте определения главных площадок, главных напряжений и главных осей.
4. Как определить положение главных площадок и величины главных напряжений в плоском напряженном состоянии?
5. Виды напряженных состояний.
6. Обобщенный закон Гука.

## **Глава 5**

1. Назначение теорий прочности.
2. Теория наибольших касательных напряжений.
3. Энергетическая теория прочности.
4. Обобщенная теория прочности Мора.

## **Глава 6**

1. Формула для расчета напряжений в поперечных сечениях вала при кручении.
2. Рациональные формулы поперечных сечений вала при кручении.
3. Анализ напряженного состояния при кручении.
4. Расчет угловых перемещений при кручении.

## **Глава 7**

1. Статические моменты плоских сечений.
2. Моменты инерции.
3. Свойства моментов инерции.
4. Моменты сопротивления.

## **Глава 8**

1. Классификация изгибов.
2. Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского. Их использование при построении эпюр внутренних сил при плоском изгибе.

3. Формула для расчета нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.
4. Формула Журавского для расчета касательных напряжений при поперечном плоском изгибе.
5. Анализ напряженного состояния различных точек сечения при поперечном плоском изгибе.
6. Рациональные формы поперечных сечений при плоском изгибе.
7. Расчет на жесткость при плоском изгибе.

## **Глава 9**

1. Понятие о сложном нагружении.
2. Алгоритм расчета на прочность при сложном нагружении.
3. Виды сложного нагружения.

## **Глава 10**

1. Интеграл Мора. Алгоритм расчета на жесткость по интегралу Мора.
2. Графоаналитическая формула Верещагина.
3. Графоаналитическая формула Симпсона.

## **Глава 11**

1. Что рассчитывается на устойчивость в сопротивлении материалов?
2. Формула Эйлера.
3. Учет условий закрепления стержня при расчете критической силы.
4. Понятие о гибкости стержня.
5. Зависимость критического напряжения от гибкости стержня.

## **Глава 12**

1. Принцип Даламбера.
2. Определение динамических опорных реакций.

## **Глава 13**

1. Основные допущения инженерной теории удара.
2. Понятие о коэффициенте динамичности.
3. Формула для коэффициента динамичности.
4. Расчет на прочность и жесткость по инженерной теории удара.

## **Глава 14**

1. Собственные и вынужденные колебания.
2. Собственная частота. Ее расчет для механической системы с одной степенью свободы.
3. Расчет на прочность и жесткость систем с одной степенью свободы при вынужденных колебаниях.
4. Резонанс. Отстройка от резонанса.

## **Глава 15**

1. Безмоментная теория оболочек. Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек.
2. Порядок расчета на изгиб оболочек при симметричном нагружении.
3. Порядок расчета круглых симметрично нагруженных пластин.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Учебники

1. *Атапин В.Г.* Сопротивление материалов. – М.: Юрайт, 2015. – Серия: «Бакалавр. Академический курс».
2. *Ахметзянов М.Х., Лазарев И.Б.* Сопротивление материалов. – Новосибирск: Изд-во СГУПС, 1997.
3. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. *Тимошенко С.П., Дж. Гере.* Механика материалов: пер. с англ. – М.: Мир, 1976.
5. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. – 591 с.

### Учебные пособия, сборники задач

6. *Куриленко Г.А.* Тестовые задачи по курсу «Сопротивление материалов». – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 12 с.
7. *Куриленко Г.А.* Расчетно-проектировочные задания по прикладной механике. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 12 с.
8. *Куриленко Г.А.* Краткий курс прикладной механики. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 123 с.
9. *Куриленко Г.А., Айрапетян В.С.* Техническая механика. – Новосибирск: Изд-во СГУГиТ, 2017. – 133 с.
10. *Савелькаев С.В., Айрапетян В.С., Куриленко Г.А., Григорьева Г.В.* Прикладная механика. Ч. 1. – Новосибирск: Изд-во СГУГиТ, 2016. – 163 с.
11. *Савелькаев С.В., Айрапетян В.С., Куриленко Г.А., Григорьева Г.В.* Прикладная механика. Ч. 2. – Новосибирск: Изд-во СГУГиТ, 2016. – 227 с.

**Куриленко Георгий Алексеевич**

**ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

**Учебное пособие**

Редактор *И.Л. Кескевич*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 14.05.2018. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.  
Уч.-изд. л. 8,13. Печ. л. 8,75. Изд. № 47. Заказ № 807. Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20