

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составитель
С. М. Простов

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

**Методические указания по выполнению
индивидуальных заданий**

Рекомендовано учебно-методическими комиссиями
специальностей 21.05.04 Горное дело
и 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Гордиенко Р. Ф. – доцент кафедры теоретической и геотехнической механики

Удовицкий В. И. – председатель учебно-методической комиссии специальности 21.05.04 Горное дело

Покатилов А. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений

Простов Сергей Михайлович.

Динамический расчет плоского механизма: методические указания по выполнению индивидуальных заданий [Электронный ресурс] для обучающихся специальностей 21.05.04 Горное дело и 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений / сост.: С. М. Простов. – Электрон. дан. – Кемерово, 2019.

В предлагаемых указаниях представлены методические положения темы «Динамический расчет плоского механизма» курса «Теоретическая механика», индивидуальные задания и пример выполнения этих заданий для самостоятельной работы студентов.

© КузГТУ, 2019
© С. М. Простов,
составление, 2019

Цель и содержание задания

Задание предназначено для выработки у студентов навыков динамического расчета простейшего плоского механизма методами динамики механической системы и аналитической механики. В ходе выполнения задания студенты должны применить знания кинематики твердого тела, уяснить основные понятия динамики (кинетическая энергия тела, центр масс, момент инерции тела, работа активной силы и сил трения, главный вектор и главный момент сил инерции, возможное перемещение, обобщенные координаты, скорости, ускорения и силы), установить взаимосвязь, достоинства и недостатки методов расчета с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, общего уравнения динамики и уравнения Лагранжа II рода для механизма с одной степенью свободы.

Задание. Для механизмов, приведенных на рис. 1–3, определить ускорение центра масс тела 1.

Числовые данные для расчетов приведены в таблице, где P_1, P_2, P_3 – величины сил тяжести тел 1–3, Н; R_2 – радиус тела 2, м; R_3, r_3 – большой и малый радиус составного тела 3, м; i_3 – радиус инерции тела 3, м; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения, м.

Тело 2 считать в нечетных вариантах цилиндром, в четных – тонкостенной трубой. Нити, соединяющие тела, считать нерастяжимыми и несминаемыми. Нити параллельны соответствующим опорным поверхностям. Проскальзывание между нитями и поверхностями тел отсутствует. Трением качения при движении блока полиспаста в вариантах 9, 10, 19, 20, 23–30 пренебречь.

Углы на чертежах механизмов обозначены следующим образом: одной дугой – 30° , двумя дугами – 60° , дугой с поперечной чертой – 45° .

Порядок выполнения задания

1. Расчет с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

1.1. Кинематический расчет механизма

Задают произвольно скорость \overline{V}_1 центра масс тела 1.

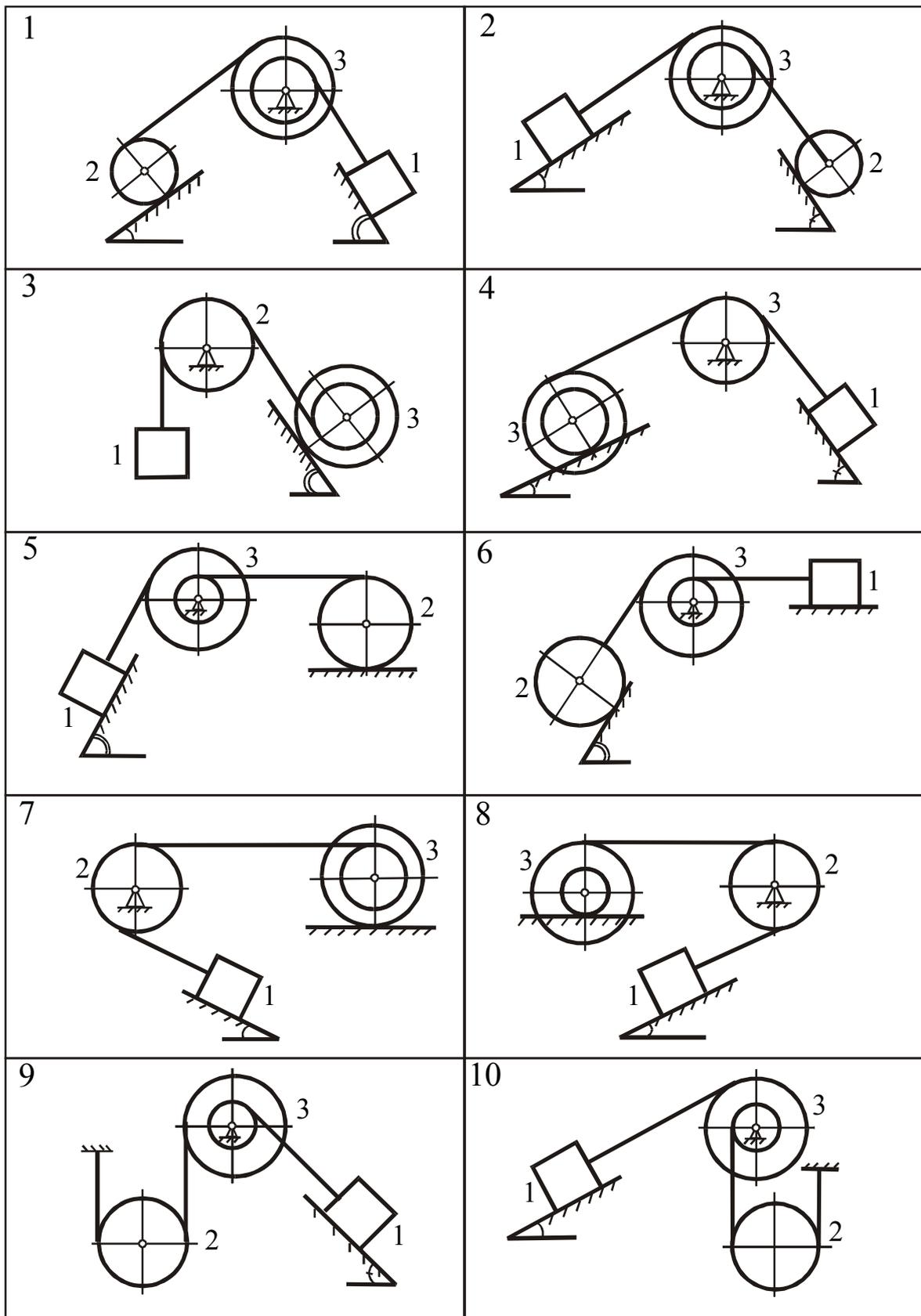


Рис. 1

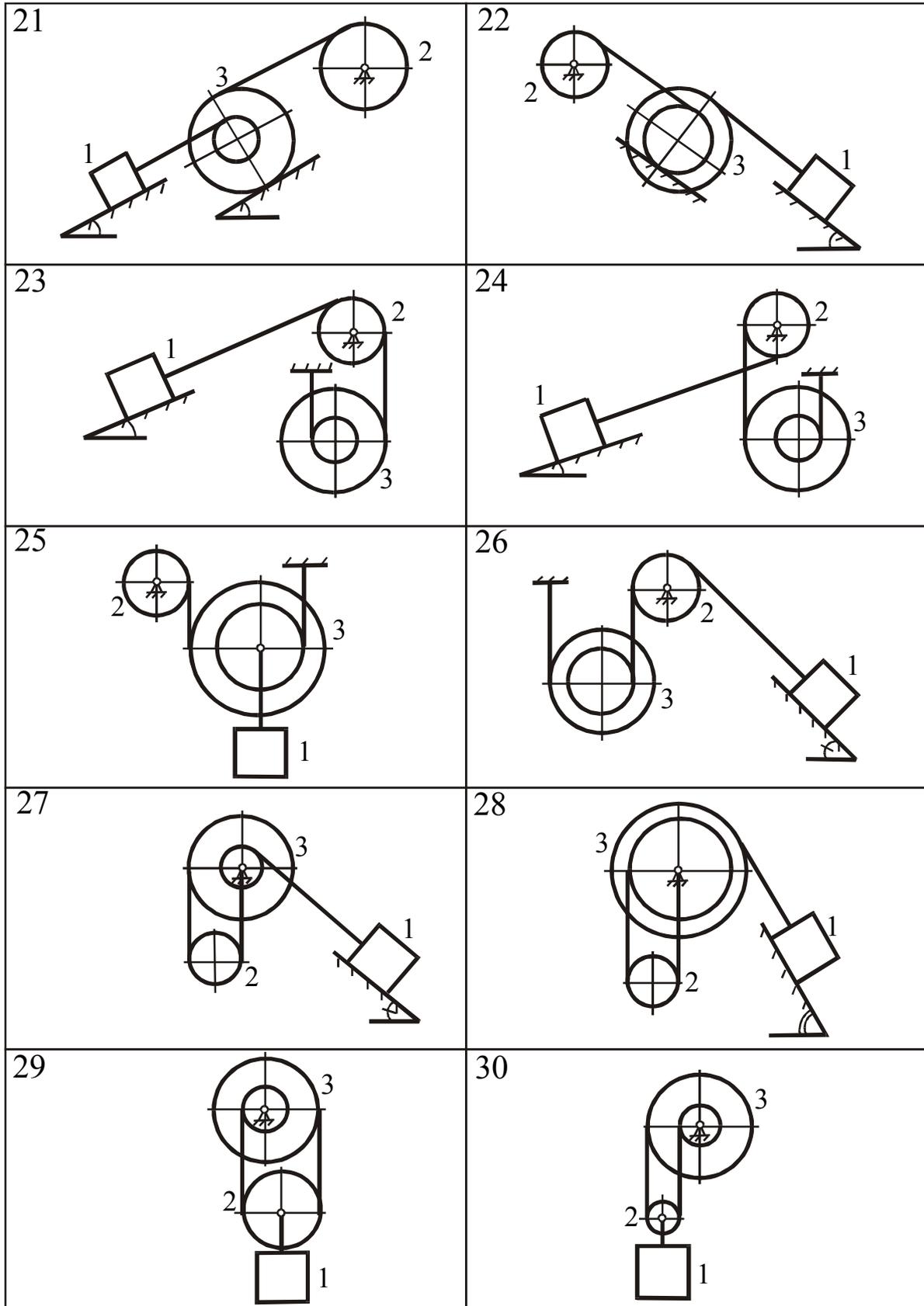


Рис. 3

Вари- ант	P_1	P_2	P_3	R_2	R_3	r_3	i_3	f	δ , М
	Н			М					
1	10	20	30	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,02
2	20	30	40	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,01
3	10	30	20	0,1	0,4	0,2	0,3	0,1	0,03
4	30	20	10	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,02
5	20	10	30	0,2	0,4	0,2	0,3	0,1	0,01
6	10	30	20	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,03
7	50	20	30	0,3	0,5	0,1	0,3	0,1	0,02
8	40	10	30	0,4	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
9	30	50	40	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1	
10	20	40	30	0,6	0,5	0,3	0,4	0,2	
11	10	20	30	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,03
12	20	30	10	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,01
13	50	40	10	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1	0,02
14	10	30	20	0,1	0,6	0,2	0,4	0,2	0,03
15	20	50	30	0,2	0,5	0,3	0,4	0,1	0,03
16	30	40	50	0,3	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
17	40	20	30	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,02
18	20	10	50	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
19	10	50	20	0,4	0,8	0,4	0,6	0,1	
20	30	10	50	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	
21	10	20	30	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1	0,02
22	20	40	10	0,1	0,5	0,2	0,3	0,2	0,03
23	50	40	10	0,4	0,6	0,3	0,4	0,1	
24	40	10	30	0,3	0,4	0,1	0,2	0,2	
25	10	20	30	0,2	0,4	0,2	0,3		
26	60	10	40	0,5	0,3	0,1	0,2	0,2	
27	30	40	50	0,3	0,6	0,2	0,3	0,1	
28	40	10	60	0,1	0,4	0,2	0,3	0,2	
29	10	20	30	0,3	0,2	0,1	0,2		
30	30	20	10	0,2	0,6	0,2	0,5		

Определяют направления и величины скоростей центров масс и угловых скоростей всех тел, используя кинематические зависимости для поступательного, вращательного и плоского движения тела [1, 2]. Плоское движение тела рассчитывают с помощью мгновенного центра скоростей, который при качении тела без проскальзывания по неподвижной поверхности находится в точке соприкосновения тела с этой поверхностью, а у блока полиспаста – на пересечении горизонтального диаметра с неподвижной нитью. Учитывают, что все точки растянутой нити имеют равные по величине скорости. Найденные направления скоростей указывают на рабочем чертеже.

1.2. Определение кинематических соотношений

Из п. 1.1 выписывают величины скоростей центров масс и угловых скоростей тел в долях от V_1 , опуская промежуточные и нулевые результаты. Путем почленного дифференцирования по времени полученных уравнений, считая V_1 неизвестной функцией времени, получают необходимые для дальнейших расчетов зависимости соответствующих ускорений от ускорения a_1 центра масс первого тела, а путем интегрирования при нулевых начальных условиях – зависимости соответствующих перемещений от перемещения s_1 центра масс первого тела. Направления ускорений и перемещений считают совпадающими с направлениями соответствующих скоростей.

После дифференцирования (интегрирования) первого уравнения в дальнейшем можно использовать метод аналогий.

1.3. Определение кинетической энергии T механизма в расчетном положении

Определяют кинетические энергии тел 1–3, используя формулы для поступательного, вращательного и плоского движения тела, при этом момент инерции тела 2 определяют по формуле для цилиндра (трубы), а тела 3 вычисляют через радиус инерции i_3 [1, 2].

Используя зависимости скоростей из п. 1.2 и суммируя результаты, получают зависимость T от заданной скорости V_1 .

1.4. Определение работ сил, приложенных к механизму

Рассматривают все силы, приложенные к телам механизма. Если сила является активной или реакцией реальной связи, ее указывают на отдельном чертеже (все внешние связи на нем отбрасывают), если реакцией идеальной связи – ее заносят в отдельный список и на чертеже не указывают.

Определяют по очереди работы указанных на чертеже сил и пар сил [1, 2], нанося на чертеж необходимые перемещения совпадающими по направлению с соответствующими скоростями из п. 1.1. Величины работ сил вычисляют через модули сил и перемещений точек их приложения, работ пар – через модули моментов пар и угловых перемещений тел. Учитывают, что работа силы тяжести положительна, если центр масс тела опускается, и отрицательна – если поднимается, а работы сил трения скольжения и качения всегда отрицательны.

Используя зависимости перемещений из п. 1.2 и суммируя результаты, получают зависимость суммы работ сил $\sum A_{F_k}$ от перемещения s_1 .

Внимание: если полученная сумма отрицательна, то действительное направление \bar{V}_1 противоположно ранее выбранному в п. 1.1. Следует указать, что все направления скоростей должны быть обратными, изменить знаки работ сил тяжести и найти новое значение суммы $\sum A_{F_k}$.

1.5. Составление расчетного уравнения и определение неизвестного ускорения a_1

Расчетное уравнение получают путем подстановки результатов пп. 1.3, 1.4 в уравнение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы [1, 2], считая начальную кинетическую T_0 механизма нулевой.

Дифференцируют по времени обе части расчетного уравнения и, учитывая, что $dV_1/dt = a_{1\tau} = a_1$, выражают a_1 .

2. Расчет с помощью общего уравнения динамики

2.1. Определение сил инерции

Определяют направления и величины главных векторов и главных моментов сил инерции тел механизма, используя формулы для посту-

пательного, вращательного и плоского движений тел [1, 2]. Направления ускорений выбирают из чертежа п. 1.1, необходимые соотношения ускорений используются из пункта п. 1.2. Направления сил инерции указывают на чертеже.

2.2. Задание механизму возможного перемещения

Задают возможное перемещение $\delta \bar{s}_1$ центру масс тела 1, совпадающее с \bar{s}_1 . Поскольку механизм имеет одну степень свободы, направления остальных возможных перемещений и соотношения между ними совпадают с направлениями и соотношениями для конечных перемещений, полученными в пп. 1.1 и 1.2.

2.3. Составление и решение расчетного уравнения

Определяют сумму элементарных работ активных сил и реакций реальных связей на заданном возможном перемещении. Используют сумму работ на конечном перемещении, полученную в п. 1.4, заменяя s_1 на δs_1 . Определяют сумму элементарных работ сил инерции на заданном возможном перемещении, используя чертеж п. 2.1 и указывая на нем необходимые возможные перемещения.

Найденные суммы подставляют в общее уравнения динамики [1, 2], с учетом соотношений, полученных в п. 2.1 и 2.2, производят сокращения и определяют величину a_1 .

Расхождение a_1 с величиной, найденной в п. 1.5, не должно превышать 1%.

3. Расчет с помощью уравнения Лагранжа II рода

3.1. Определение числа степеней свободы механизма

Методом «остановок» определяют, что механизм имеет одну степень свободы.

3.2. Выбор обобщенной координаты

За обобщенную принимают прямолинейную координату x , описывающую движение тела 1. Определяют обобщенные скорость \dot{x} и уско-

рение \ddot{x} . Указывают x на чертеже.

3.3. Составление расчетного уравнения и определение a_1

Используют выражение кинетической энергии T , полученное в п.1.3, заменяя в нем V_1 и s_1 на обобщенные скорость и координату.

Определяют производные от T по обобщенной скорости, координате и времени.

Задают элементарное приращение $\delta\bar{x}$ обобщенной координате x . Для определения обобщенной силы используют сумму конечных работ, полученную в п. 1.4, заменяя s_1 на δx .

Все найденные компоненты подставляют в уравнение Лагранжа II рода [1, 2] и определяют a_1 .

Расхождение a_1 с ранее найденными величинами не должно превышать 1%.

Пример. Для механизма на рис. 4:

$$\begin{aligned} P_1 &= 50 \text{ Н}; P_2 = 10 \text{ Н}; P_3 = 30 \text{ Н}; \\ R_2 &= 0,4 \text{ м (цилиндр)}; R_3 = 0,6 \text{ м}; \\ r_3 &= 0,2 \text{ м}; i_3 = 0,4 \text{ м}; f = 0,15; \delta = 0,02 \text{ м}. \end{aligned}$$

Решение

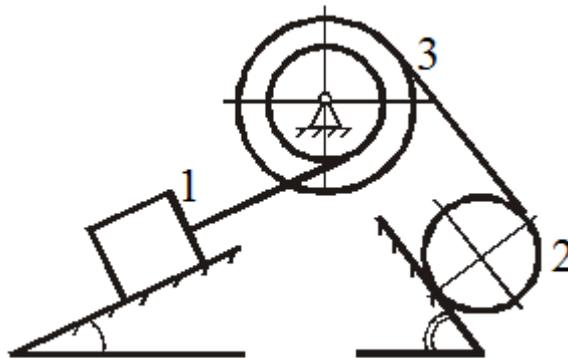


Рис. 4

1. Расчет с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

1.1. Тело 1. Движение поступательное. Задаем \bar{V}_1 . $\bar{V}'_1 = \bar{V}_1$.
Тело 3. Движение вращательное (O_3).

$$\omega_3 \cos \bar{V}_1; \omega_3 = V_1' / r_3 = V_1 / 0,2 = 5V_1;$$

$$\bar{V}_A \perp AO_3 \cos \omega_3; V_A = \omega_3 R_3 = 5V_1 \cdot 0,6 = 3V_1; \bar{V}_A = \bar{V}_B.$$

Тело 2. Движение плоское, особый случай $1 \rightarrow p_2$;

$$\omega_2 \cos \bar{V}_B; \omega_2 = V_B / Bp_2 = 3V_1 / 0,8 = 3,75V_1;$$

$$\bar{V}_2 \perp C_2 p_2 \cos \omega_2; V_2 = \omega_2 \cdot C_2 p_2 = 3,75V_1 \cdot 0,4 = 1,5V_1.$$

Направления скоростей приведены на рис. 5.

1.2. Результаты кинематического расчета скоростей:

$$\bar{V}_1; \omega_3 = 5V_1; \omega_2 = 3,75V_1; V_2 = 1,5V_1.$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 5 \frac{dV_1}{dt} \Rightarrow \varepsilon_3 = 5a_1.$$

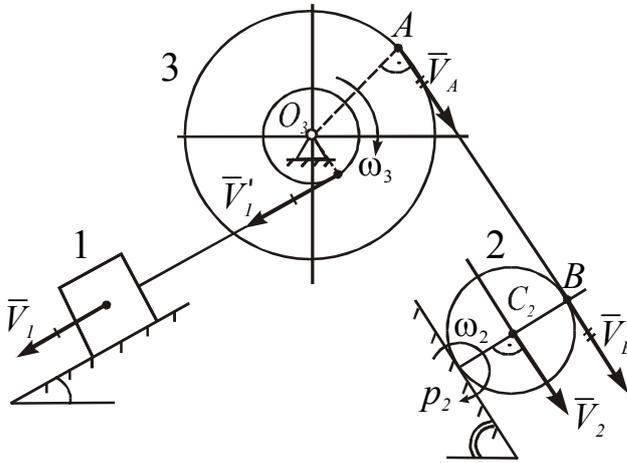


Рис. 5

Используя аналогию, получаем соотношение ускорений:

$$\bar{a}_1; \varepsilon_3 = 5a_1;$$

$$\varepsilon_2 = 3,75a_1;$$

$$a_2 = 1,5a_1.$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 5 \frac{ds_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = 5 \int_0^{s_1} ds_1 \Rightarrow$$

$$\varphi_3 = 5s_1.$$

Используя аналогию, получим соотношение перемещений:

$$\bar{s}_1; \varphi_3 = 5s_1; \varphi_2 = 3,75s_1; s_2 = 1,5s_1.$$

$$1.3. T_{1(ном)} = 0,5 \frac{P_1}{g} V_1^2 = 2,5V_1^2;$$

$$T_{3(вр)} = 0,5 J_3 \omega_3^2 = 0,5 \frac{P_3}{g} i_3^2 (5V_1)^2 = 6V_1^2;$$

$$T_{2(нл)} = 0,5 \frac{P_2}{g} V_2^2 + 0,5 J_2 \omega_2^2 = 0,5 \frac{P_2}{g} (1,5V_1)^2 +$$

$$+ 0,5 \cdot 0,5 \frac{P_2}{g} R_2^2 (3,75V_1)^2 = 1,68V_1^2;$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 10,18 V_1^2.$$

1.4. Реакции идеальных связей : $\bar{N}_1, \bar{T}_{13}, \bar{R}_3, \bar{T}_{32}, \bar{N}_2, \bar{F}_{mp2}$.

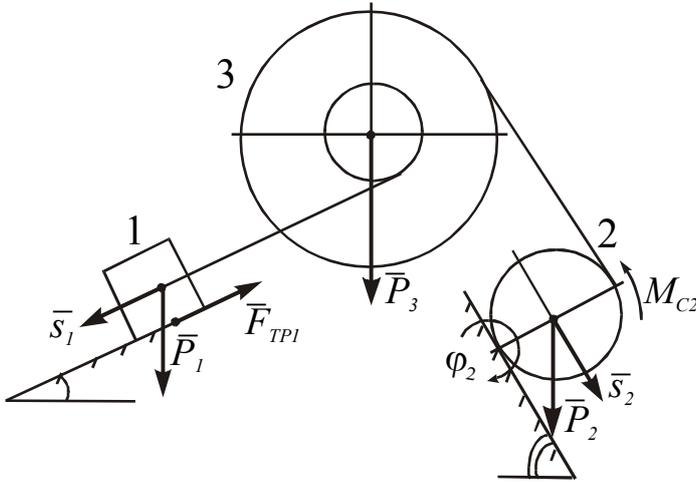


Рис. 6

Определим работы сил, используя рис. 6:

$$A_{P_1} = \bar{P}_1 \cdot \bar{s}_1 = P_1 s_1 \sin 30 = 25 s_1;$$

$$A_{mp1} = \bar{F}_{mp1} \cdot \bar{s}_1 = -f P_1 s_1 \cos 30 = -6,52 s_1;$$

$$A_{P_3} = \bar{P}_3 \cdot \bar{s}_3 = 0;$$

$$A_{P_2} = \bar{P}_2 \cdot \bar{s}_2 = P_2 s_2 \sin 60 = P_2 \cdot 1,5 s_1 \sin 60 = 14,1 s_1;$$

$$A_{M_{c2}} = -M_{c2} \varphi_2 = -\delta P_2 \cos 60 \cdot 3,75 s_1 = -0,32 s_1;$$

$$\sum A_{FK} = A_{P_1} + A_{T_{p1}} + A_{P_2} + A_{M_{c2}} = 32,26 s_1.$$

1.5. $T - T_0 = \sum A_{FK};$

$$10,18 V_1^2 = 32,26 s_1;$$

$$10,18 \cdot 2 V_1 \frac{dV_1}{dt} = 32,26 \frac{ds_1}{dt}; \quad a_1 = \frac{dV_1}{dt} = 1,59 \left(\frac{m}{c^2} \right).$$

2. Расчет с помощью общего уравнения динамики

2.1. $\bar{R}_1^u = -m_1 \bar{a}_1; \quad R_1^u = \frac{P_1}{g} a_1 = 5 a_1;$

$$M_3^u = -J_3 \varepsilon_3; \quad M_3^u = \frac{P_3}{g} i_3^2 \cdot 5 a_1 = 2,4 a_1;$$

$$\bar{R}_2^u = -m_2 \bar{a}_2; \quad R_2^u = \frac{P_2}{g} \cdot 1,5 a_1 = 1,5 a_1;$$

$$M_2^u = -J_2 \varepsilon_2; \quad M_2^u = 0,5 \frac{P_2}{g} R_2^2 \cdot 3,75 a_1 = 0,3 a_1.$$

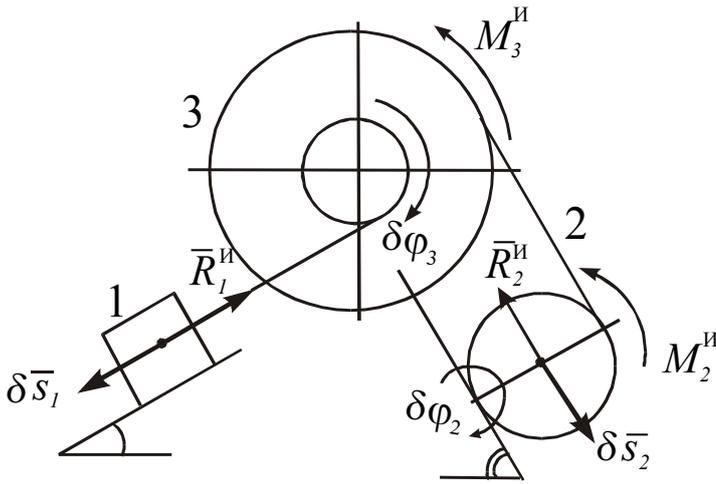


Рис. 7

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{F_K}^u &= -\bar{R}_1^u \cdot \delta s_1 - M_3^u \delta \varphi_3 - \bar{R}_2^u \cdot \delta s_2 - M_2^u \delta \varphi_2 = \\ &= -5a_1 \cdot \delta s_1 - 2,4a_1 \cdot 5\delta s_1 - 1,5a_1 \cdot 1,5\delta s_1 - 0,3a_1 \cdot 3,75\delta s_1 = -20,37a_1 \delta s_1. \\ \sum \delta A_{F_K} + \sum \delta A_{F_K}^u &= 0; \quad 32,26 - 20,37a_1 = 0; \quad a_1 = 1,59 \left(\text{м/с}^2 \right). \end{aligned}$$

3. Расчет с помощью уравнения Лагранжа II рода

3.1. При «остановке» тела 1, при несминаемости и отсутствии проскальзывания нитей тела 3 и 2 становятся неподвижными, поэтому $n_c = 1$.

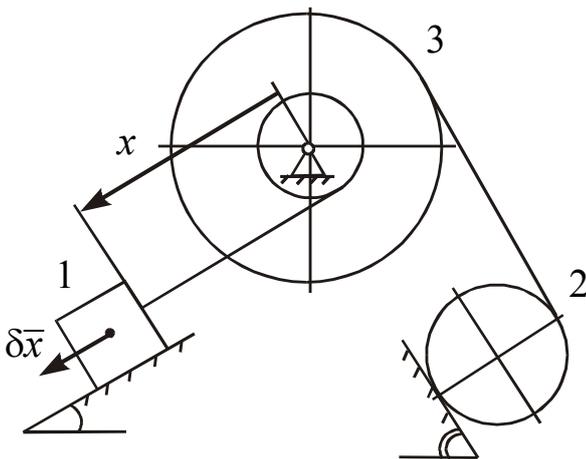


Рис. 8

3.2. $q = x$, $V_1 = \dot{x}$; $a_1 = \ddot{x}$ (рис. 8).

3.3. Из п. 1.3 : $T = 10,18\dot{x}^2$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 20,36\dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 20,36\ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Из п. 1.4:

$$\sum \delta A_{F_K} = 32,26 \delta x.$$

$$Q = \sum \delta A_{F_K} / \delta x = 32,26.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q;$$

$$20,36\ddot{x} = 32,26; \quad a_1 = \ddot{x} = 1,59 \left(\text{м/с}^2 \right).$$

Список рекомендованной литературы

1. Простов С. М. Теоретическая механика : учебное пособие для студ. спец. 130405.65, 270101.65 [Электронное издание]. – Кемерово, 2013. – 301 с.

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90975&type=utchposob:common>

3. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики [Электронный ресурс] : учебник для студентов вузов. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 720 с.