Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.М. КРАСЮК, А.А. РЫКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2018

УДК 531.01(075.8)
К 785

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *В.П. Гилета*
канд. техн. наук, доцент,
зав. кафедрой машиноведения НГПУ *А.В. Кириллов*

Красюк А.М.
К 785 Теоретическая механика. Задания для расчетно-графических работ: учебное пособие / А.М. Красюк, А.А. Рыков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 172 с.

ISBN 978-5-7782-3631-8

Настоящая работа является руководством к решению студентами расчетно-графических работ по курсу «Теоретическая механика».

В работе приведены варианты заданий и примеры решения задач по основным разделам курса, необходимые краткие теоретические сведения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям как машиностроительного, так и технологического профиля.

УДК 531.01(075.8)

ISBN 978-5-7782-3631-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большинство задач, содержащихся в задачниках и сборниках заданий по теоретической механике, имеют решения, опубликованные в Интернете. Например, на многих сайтах приведены решения задач широко используемого в учебном процессе многих вузов «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под редакцией А.А. Яблонского. Студенты часто пользуются такими источниками информации, что снижает качество освоения дисциплины. Предыдущее пособие авторов, опубликованное в 2013 году, также «устарело» по вышесказанной причине. Эти обстоятельства побудили авторов к написанию настоящего пособия.

При его написании использовались как задания, составленные авторами, так и работы, приведенные в библиографическом списке. Условия этих заданий были изменены и дополнены.

Предлагаемое пособие содержит задания для расчетно-графических работ по следующим разделам: статика, кинематика и динамика. Предложено 16 заданий по 50–56 вариантов в каждом, которые охватывают основные темы дисциплины «Теоретическая механика» для машиностроительных и технологических специальностей. В каждом задании приведен пример решения задачи. По некоторым темам, например «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы», приводятся задания разной сложности. Это позволяет дифференцированно подойти к использованию сборника для студентов машиностроительных и технологических направлений подготовки.

СТАТИКА

ЗАДАНИЕ С1

Определение реакций опор твердого тела

На схемах, изображенных на рис. С1.2–С1.6, показано твердое тело, закрепленное посредством жесткой заделки (защемление). Необходимо определить все реактивные факторы и выполнить проверку правильности решения.

Примеры решения задач на определение реакций опор твердого тела

Задача

Дано: схема конструкции (рис. С1.1, *а*):

$G = 10$ кН; $P = 5$ кН; $M = 8$ кН $\cdot$ м; $S = 2$ кН;

$q = 0,5$ кН/м; $\alpha = 60°$; $l = 1$ м.

Определить: реакцию опоры *A* и реакцию стержня *CD*.

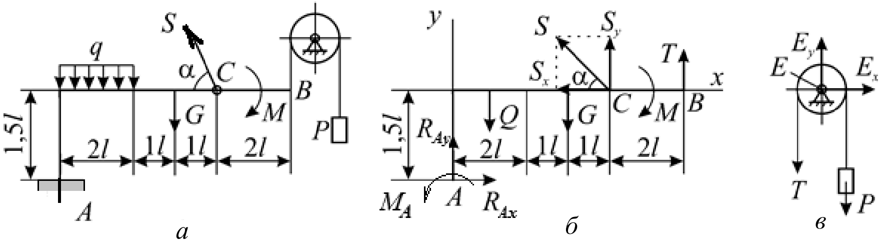


Рис. С1.1

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки *AB*. Покажем все действующие на балку активные силы (рис. 1.1, *б*): заданную силу *G*, равнодействующую *Q* распределенной нагрузки $(Q = q \cdot 2 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ кН})$, усилие *T* со стороны нити и пару сил с моментом *M*.

2. Отбросим связи (глухую заделку *A*) и заменим их действие соответствующими реакциями связей: R_{Ax}, R_{Ay} и M_A.

3. Балка *AB* находится в равновесии под действием плоской системы сил. Прежде чем записать условие равновесия тела под действием плоской системы сил, определим усилие *T*, действующее на балку со стороны нити. Для этого рассмотрим равновесие блока с грузом *P*. Отбросив связи (неподвижный шарнир *E* и нить), заменим их действие реакциями связей $(E_x,\ E_y \text{ и } T)$ и покажем активную силу *P* (рис. С1.1, *в*).

Записав одно условие равновесия получившейся плоской системы сил $\left(\sum m_E(F_i) = 0\right)$, убеждаемся, что $T = P$, так как $Tr - Pr = 0$, где r – радиус блока. Следовательно, на балку *AB* со стороны нити действует такая же, но противоположно направленная сила $T = P = 5$ кН.

4. Запишем условия равновесия плоской системы сил, действующих на балку *AB* (рис. С1.1, *б*):

$$\sum F_{ix} = 0;\quad R_{Ax} - S\cos\alpha = 0; \tag{С1.1}$$

$$\sum F_{iy} = 0;\quad R_{Ay} - Q - G + S\sin\alpha + T = 0; \tag{С1.2}$$

$$\sum m_A = 0;\quad M_A - Ql - G\cdot 3l + S_x\cdot 1{,}5l + S_y\cdot 4l - M + T\cdot 6l = 0. \tag{С1.3}$$

Учитываем, что составляющие

$$S_x = S\cos\alpha = 2\cdot 0{,}5 = 1,\qquad S_y = S\sin\alpha = 2\cdot 0{,}87 = 1{,}73.$$

5. Решим получившуюся систему алгебраических уравнений относительно неизвестных реакций связи. Перепишем уравнение (С1.3) в виде:

$$M_A = Ql + G\cdot 3l - S_x\cdot 1{,}5l - S_y\cdot 4l + M - T\cdot 6l;$$

$$M_A = 1\cdot 1 + 10\cdot 3 - 1\cdot 1{,}5 - 1{,}73\cdot 4 + 8 - 5\cdot 6 = 0{,}58 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

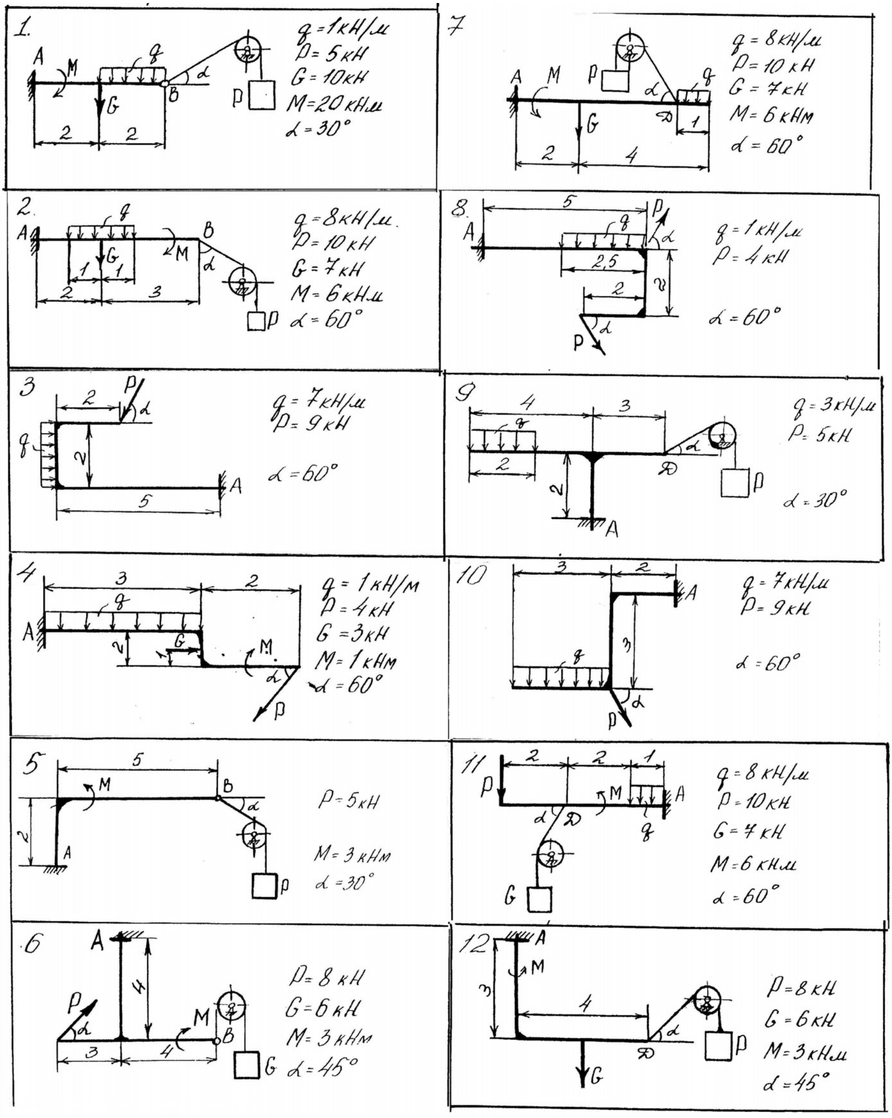

1.
q = 1 кН/м
P = 5 кН
G = 10 кН
M = 20 кНм
α = 30°
7
q = 8 кН/м
P = 10 кН
G = 7 кН
M = 6 кНм
α = 60°
2.
q = 8 кН/м.
P = 10 кН
G = 7 кН
M = 6 кНм
α = 60°
8.
q = 1 кН/м
P = 4 кН
α = 60°
3
q = 7 кН/м
P = 9 кН
α = 60°
9
q = 3 кН/м
P = 5 кН
α = 30°
4
q = 1 кН/м
P = 4 кН
G = 3 кН
M = 1 кНм
α = 60°
10
q = 7 кН/м
P = 9 кН
α = 60°
5
P = 5 кН
M = 3 кНм
α = 30°
11
q = 8 кН/м
P = 10 кН
G = 7 кН
M = 6 кНм
α = 60°
6
P = 8 кН
G = 6 кН
M = 3 кНм
α = 45°
12
P = 8 кН
G = 6 кН
M = 3 кНм
α = 45°

Рис. С1.2

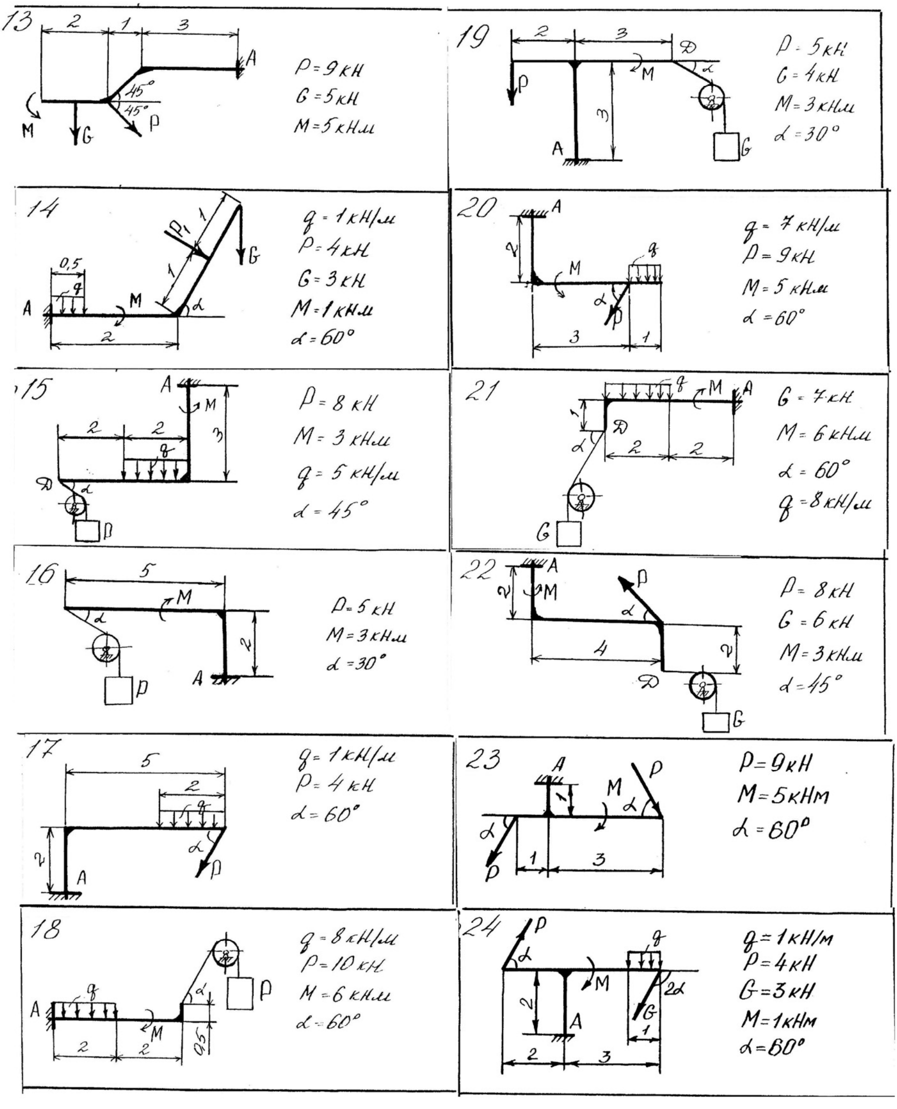

13
P=9кН
G=5кН
M=5кНм
19
P=5кН
G=4кН
M=3кНм
α=30°
14
q=1кН/м
P=4кН
G=3кН
M=1кНм
α=60°
20
q=7кН/м
P=9кН
M=5кНм
α=60°
15
P=8кН
M=3кНм
q=5кН/м
α=45°
21
G=7кН
M=6кНм
α=60°
q=8кН/м
16
P=5кН
M=3кНм
α=30°
22
P=8кН
G=6кН
M=3кНм
α=45°
17
q=1кН/м
P=4кН
α=60°
23
P=9кН
M=5кНм
α=60°
18
q=8кН/м
P=10кН
M=6кНм
α=60°
24
q=1кН/м
P=4кН
G=3кН
M=1кНм
α=60°

Рис. С1.3

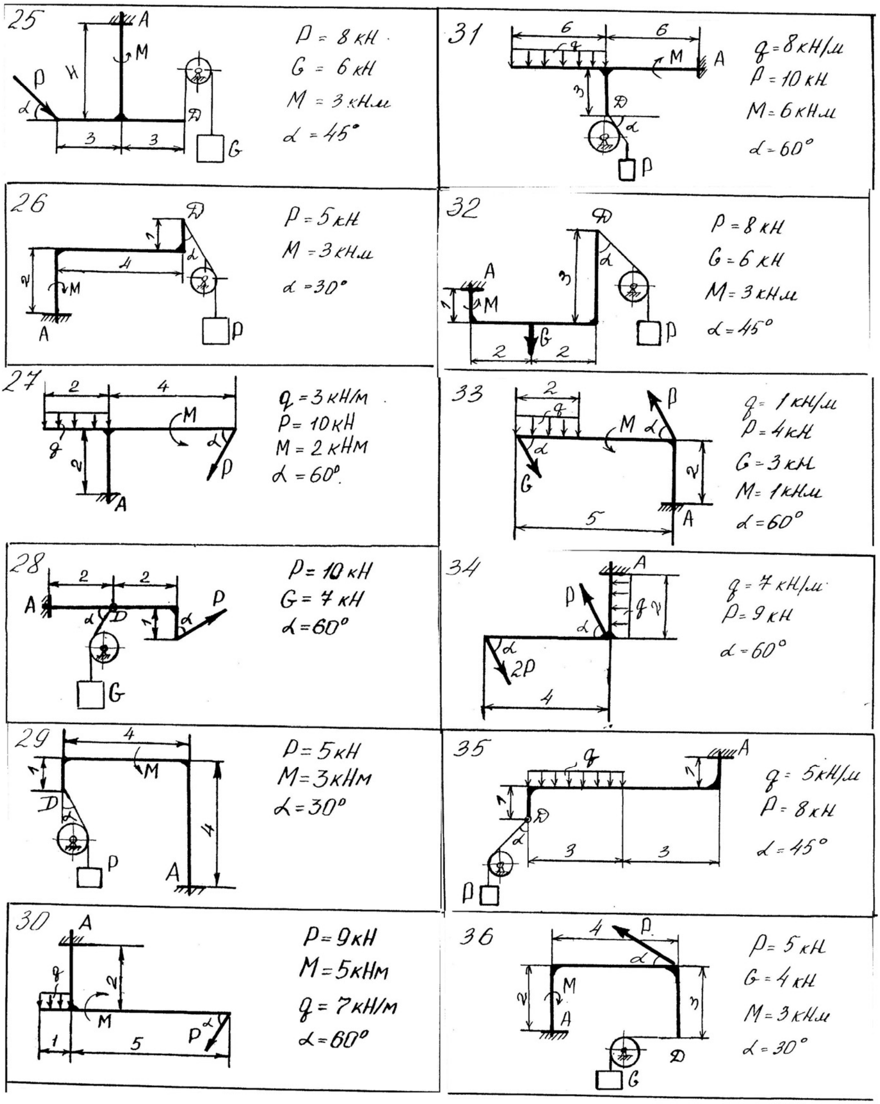

25
P = 8 кН
G = 6 кН
M = 3 кНм
α = 45°
31
q = 8 кН/м
P = 10 кН
M = 6 кНм
α = 60°
26
P = 5 кН
M = 3 кНм
α = 30°
32
P = 8 кН
G = 6 кН
M = 3 кНм
α = 45°
27
q = 3 кН/м
P = 10 кН
M = 2 кНм
α = 60°
33
q = 1 кН/м
P = 4 кН
G = 3 кН
M = 1 кНм
α = 60°
28
P = 10 кН
G = 7 кН
α = 60°
34
q = 7 кН/м
P = 9 кН
α = 60°
29
P = 5 кН
M = 3 кНм
α = 30°
35
q = 5 кН/м
P = 8 кН
α = 45°
30
P = 9 кН
M = 5 кНм
q = 7 кН/м
α = 60°
36
P = 5 кН
G = 4 кН
M = 3 кНм
α = 30°

Рис. С1.4

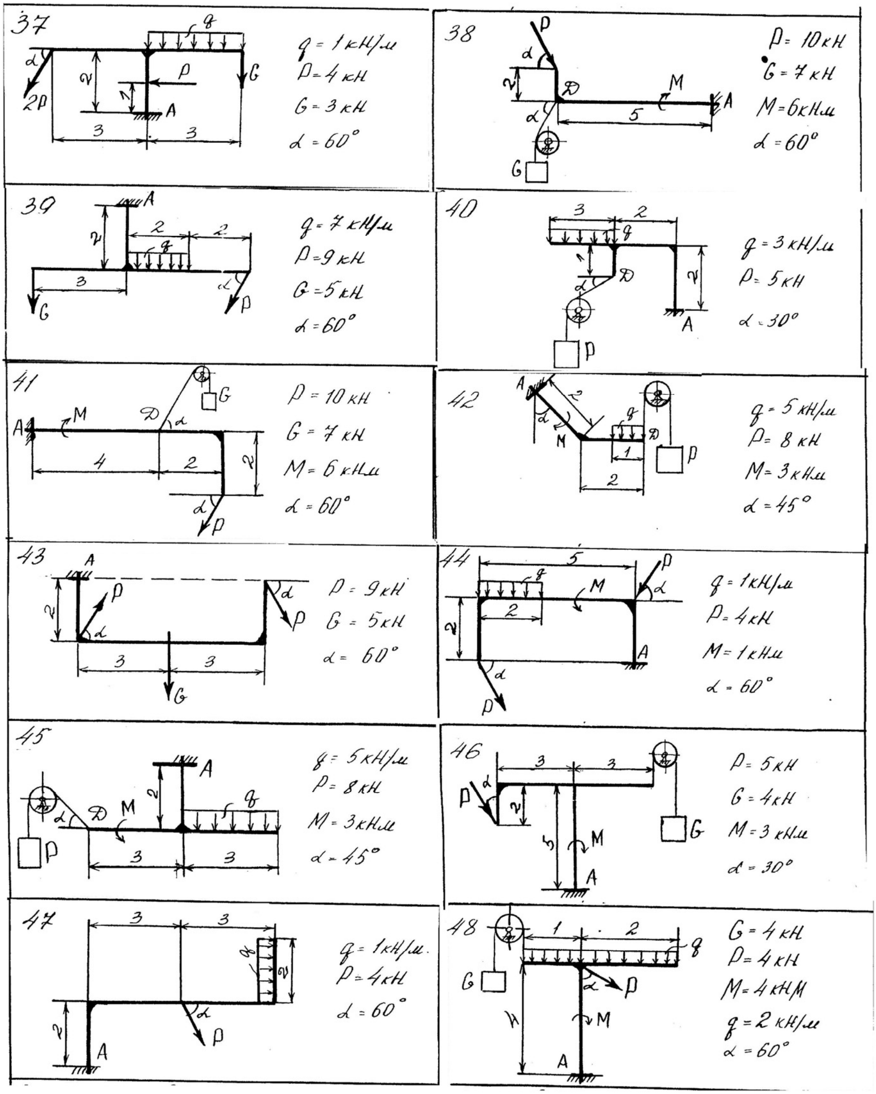

37
q = 1 кН/м
P = 4 кН
G = 3 кН
α = 60°
38
P = 10 кН
G = 7 кН
M = 6 кНм
α = 60°
39
q = 7 кН/м
P = 9 кН
G = 5 кН
α = 60°
40
q = 3 кН/м
P = 5 кН
α = 30°
41
P = 10 кН
G = 7 кН
M = 6 кНм
α = 60°
42
q = 5 кН/м
P = 8 кН
M = 3 кНм
α = 45°
43
P = 9 кН
G = 5 кН
α = 60°
44
q = 1 кН/м
P = 4 кН
M = 1 кНм
α = 60°
45
q = 5 кН/м
P = 8 кН
M = 3 кНм
α = 45°
46
P = 5 кН
G = 4 кН
M = 3 кНм
α = 30°
47
q = 1 кН/м
P = 4 кН
α = 60°
48
G = 4 кН
P = 4 кН
M = 4 кНм
q = 2 кН/м
α = 60°

Рис. С1.5

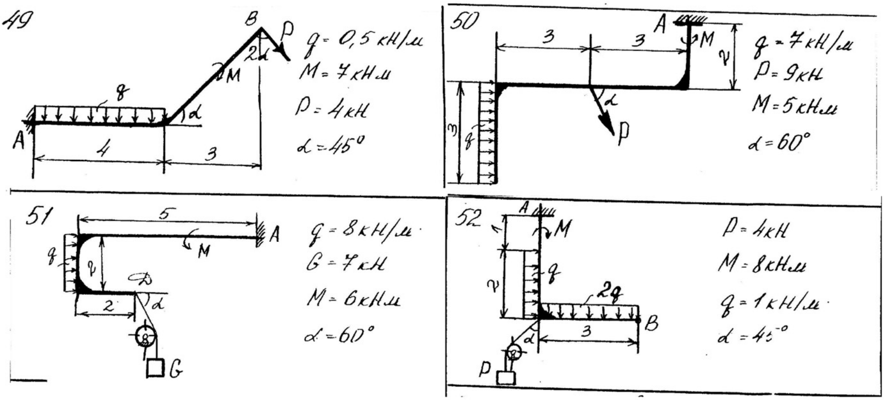


Рис. C1.6

Из уравнений (С1.1) и (С1.2) найдем R_{Ax} и R_{Ay}:

$$R_{Ax} = S\cos\alpha = 2\cdot 0,5 = 1 \text{ кН},$$

$$R_{Ay} = Q + G - S\sin\alpha - T = 1 + 10 - 2\cdot 0,87 - 5 = 4,27 \text{ кН}.$$

Все неизвестные реакции имеют положительный знак, их направления верно показаны на рис. С1.1, *б*.

Выполним проверку:

$$\sum m_B = R_{Ax}\cdot 1,5l - R_{Ay}\cdot 6l + M_A + Q\cdot 5l + G\cdot 3l - S\sin\alpha\cdot 2l - M =$$

$$= 1\cdot 1,5 - 4,27\cdot 6 + 0,58 + 1\cdot 5 + 10\cdot 3 - 2\cdot 0,87\cdot 2 - 8 = -0,02,$$

$$M_A = 0,58 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad R_{Ax} = 1 \text{ кН}, \quad R_{Ay} = 4,27 \text{ кН}.$$

При правильном решении задачи эта сумма должна быть равна нулю. Из-за погрешностей округления (округление при расчетах следует производить в третьей значащей цифре) эта сумма может несколько отличаться от нуля, но не должна превышать 1 % от наибольшего слагаемого уравнения.

Новый центр (в рассматриваемом случае точка *B*) следует выбирать так, чтобы момент каждой из искомых реактивных сил относительно этой точки не был равен нулю, т. е. новая точка не должна лежать на линии действия искомой силы.

ЗАДАНИЕ С2

Определение реакций опор твердого тела

На схемах, изображенных на рис. С2.2–С2.6, показано твердое тело, закрепленное посредством шарнирных опор. Необходимо определить все реактивные факторы и выполнить проверку правильности решения.

Примеры решения задач на определение реакций опор твердого тела

Задача

Дано: схема конструкции (рис. С2.1, *а*):

$G = 10$ кН; $P = 5$ кН; $M = 8$ кН·м;

$q = 0,5$ кН/м; $\alpha = 60°$; $l = 1$ м.

Определить: реакцию опоры *A* и реакцию стержня *CD*.

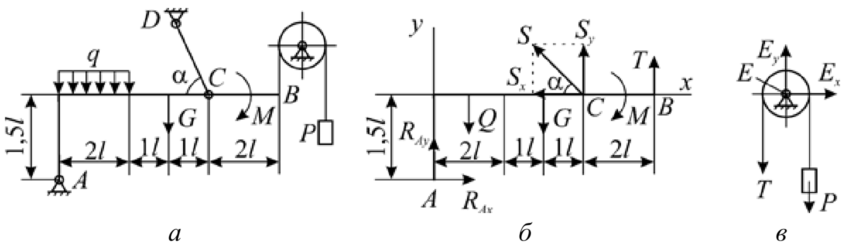


Рис. С2.1

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки *AB*. Покажем все действующие на балку активные силы (рис. С2.1, *б*): заданную силу *G*, равнодействующую *Q* распределенной нагрузки $(Q = q \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1\ \text{кН})$, усилие *T* со стороны нити и пару сил с моментом *M*.

2. Отбросим связи (неподвижный шарнир *A* и стержень *CD*) и заменим их действие соответствующими реакциями связей: R_{Ax}, R_{Ay} и *S*.

3. Балка *AB* находится в равновесии под действием плоской системы сил. Прежде чем записать условие равновесия тела под действием плоской системы сил, определим усилие *T*, действующее на балку со стороны нити. Для этого рассмотрим равновесие блока с грузом *P*. Отбросив связи (неподвижный шарнир *E* и нить), заменим их действие реакциями связей $(E_x,\ E_y$ и $T)$ и покажем активную силу *P* (рис. С2.1, *в*).

Записав одно условие равновесия получившейся плоской системы сил $\left(\sum m_E(F_i) = 0\right)$, убеждаемся, что *T* = *P*, так как $Tr - Pr = 0$, где *r* – радиус блока. Следовательно, на балку *AB* со стороны нити действует такая же, но противоположно направленная сила *T* = *P* = 5 кН.

4. Запишем условия равновесия плоской системы сил, действующих на балку *AB* (рис. С2.1, *б*):

$$\sum F_{ix} = 0;\ \ R_{Ax} - S\cos\alpha = 0; \tag{С2.1}$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ \ R_{Ay} - Q - G + S\sin\alpha + T = 0; \tag{С2.2}$$

$$\sum m_A = 0;\ \ \ -Ql - G\cdot 3l + S_x \cdot 1,5l + S_y \cdot 4l - M + T\cdot 6l = 0. \tag{С2.3}$$

Для определения момента силы *S* относительно точки *A* ее разложили на составляющие $S_x = S\cos\alpha$, $S_y = S\sin\alpha$ и воспользовались теоремой Вариньона о моменте равнодействующей.

5. Решим получившуюся систему алгебраических уравнений относительно неизвестных реакций связи. Перепишем уравнение (С2.3) в виде

$$-Q\cdot l - 3l\cdot G + S\cos\alpha\cdot 1,5l + S\sin\alpha\cdot 4l - M + 6l\cdot T = 0$$

и найдем из него *S*:

$$S = \frac{Ql + 3l\cdot G + M - 6l\cdot T}{1,5l\cdot\cos\alpha + 4l\cdot\sin\alpha} = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 10 + 8 - 6\cdot 5}{1,5\cos 60^\circ + 4\sin 60^\circ} = 2,14\ \text{кН}.$$

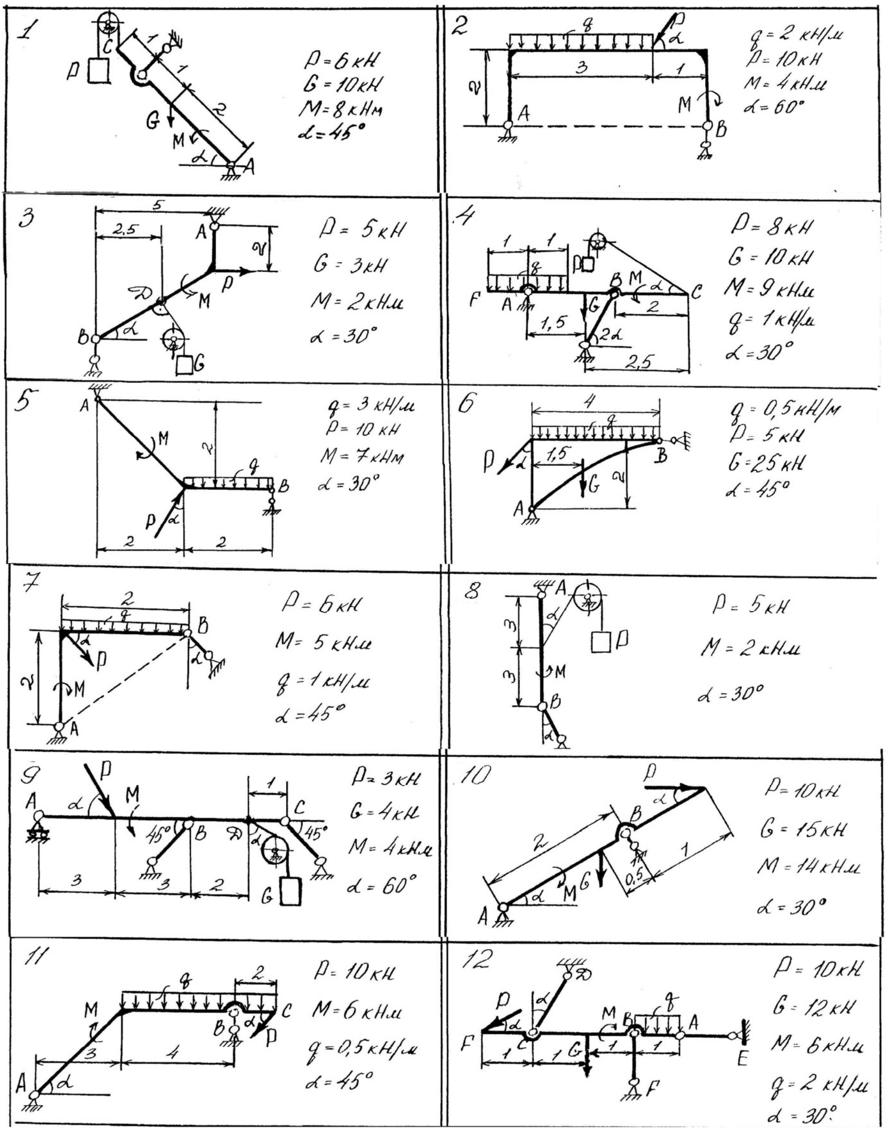

1
P = 6 кН
G = 10 кН
M = 8 кНм
α = 45°
2
q = 2 кН/м
P = 10 кН
M = 4 кНм
α = 60°
3
P = 5 кН
G = 3 кН
M = 2 кНм
α = 30°
4
P = 8 кН
G = 10 кН
M = 9 кНм
q = 1 кН/м
α = 30°
5
q = 3 кН/м
P = 10 кН
M = 7 кНм
α = 30°
6
q = 0,5 кН/м
P = 5 кН
G = 25 кН
α = 45°
7
P = 6 кН
M = 5 кНм
q = 1 кН/м
α = 45°
8
P = 5 кН
M = 2 кНм
α = 30°
9
P = 3 кН
G = 4 кН
M = 4 кНм
α = 60°
10
P = 10 кН
G = 15 кН
M = 14 кНм
α = 30°
11
P = 10 кН
M = 6 кНм
q = 0,5 кН/м
α = 45°
12
P = 10 кН
G = 12 кН
M = 6 кНм
q = 2 кН/м
α = 30°

Рис. С2.2

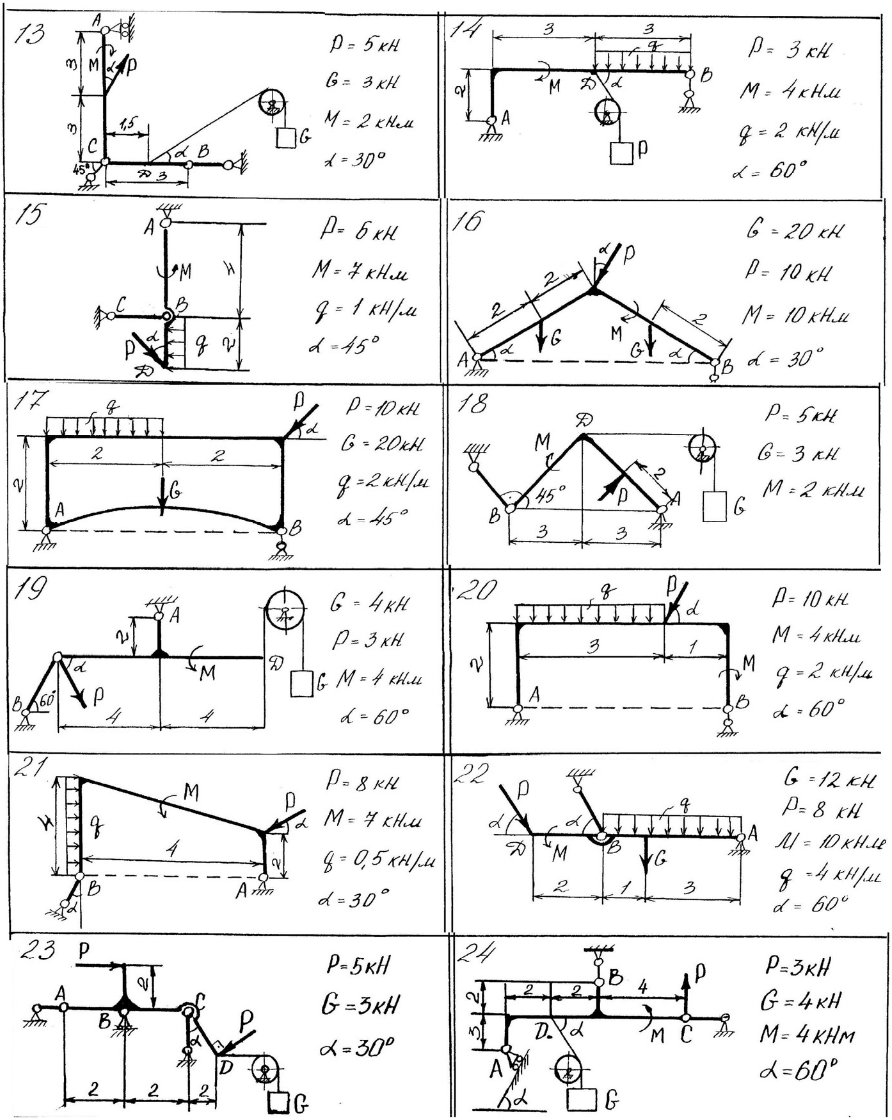

13
P = 5 кН
G = 3 кН
M = 2 кНм
α = 30°
14
P = 3 кН
M = 4 кНм
q = 2 кН/м
α = 60°
15
P = 6 кН
M = 7 кНм
q = 1 кН/м
α = 45°
16
G = 20 кН
P = 10 кН
M = 10 кНм
α = 30°
17
P = 10 кН
G = 20 кН
q = 2 кН/м
α = 45°
18
P = 5 кН
G = 3 кН
M = 2 кНм
19
G = 4 кН
P = 3 кН
M = 4 кНм
α = 60°
20
P = 10 кН
M = 4 кНм
q = 2 кН/м
α = 60°
21
P = 8 кН
M = 7 кНм
q = 0,5 кН/м
α = 30°
22
G = 12 кН
P = 8 кН
M = 10 кНм
q = 4 кН/м
α = 60°
23
P = 5 кН
G = 3 кН
α = 30°
24
P = 3 кН
G = 4 кН
M = 4 кНм
α = 60°

Рис. С2.3

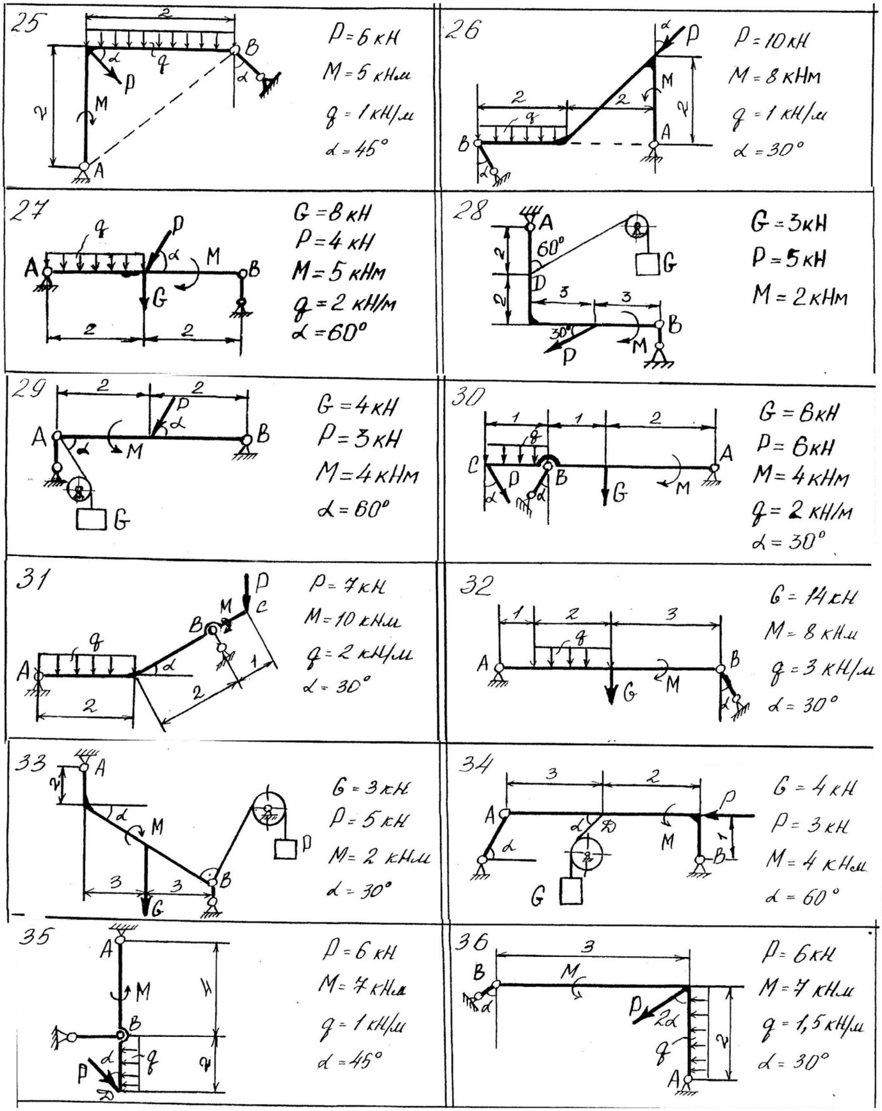

25
P = 6 кН
M = 5 кН·м
q = 1 кН/м
α = 45°
26
P = 10 кН
M = 8 кНм
q = 1 кН/м
α = 30°
27
G = 8 кН
P = 4 кН
M = 5 кНм
q = 2 кН/м
α = 60°
28
G = 3кН
P = 5кН
M = 2кНм
29
G = 4кН
P = 3кН
M = 4кНм
α = 60°
30
G = 6кН
P = 6кН
M = 4кНм
q = 2 кН/м
α = 30°
31
P = 7кН
M = 10 кН·м
q = 2 кН/м
α = 30°
32
G = 14кН
M = 8 кН·м
q = 3 кН/м
α = 30°
33
G = 3кН
P = 5кН
M = 2 кН·м
α = 30°
34
G = 4кН
P = 3кН
M = 4 кН·м
α = 60°
35
P = 6 кН
M = 7 кН·м
q = 1 кН/м
α = 45°
36
P = 6кН
M = 7 кН·м
q = 1,5 кН/м
α = 30°

Рис. С2.4

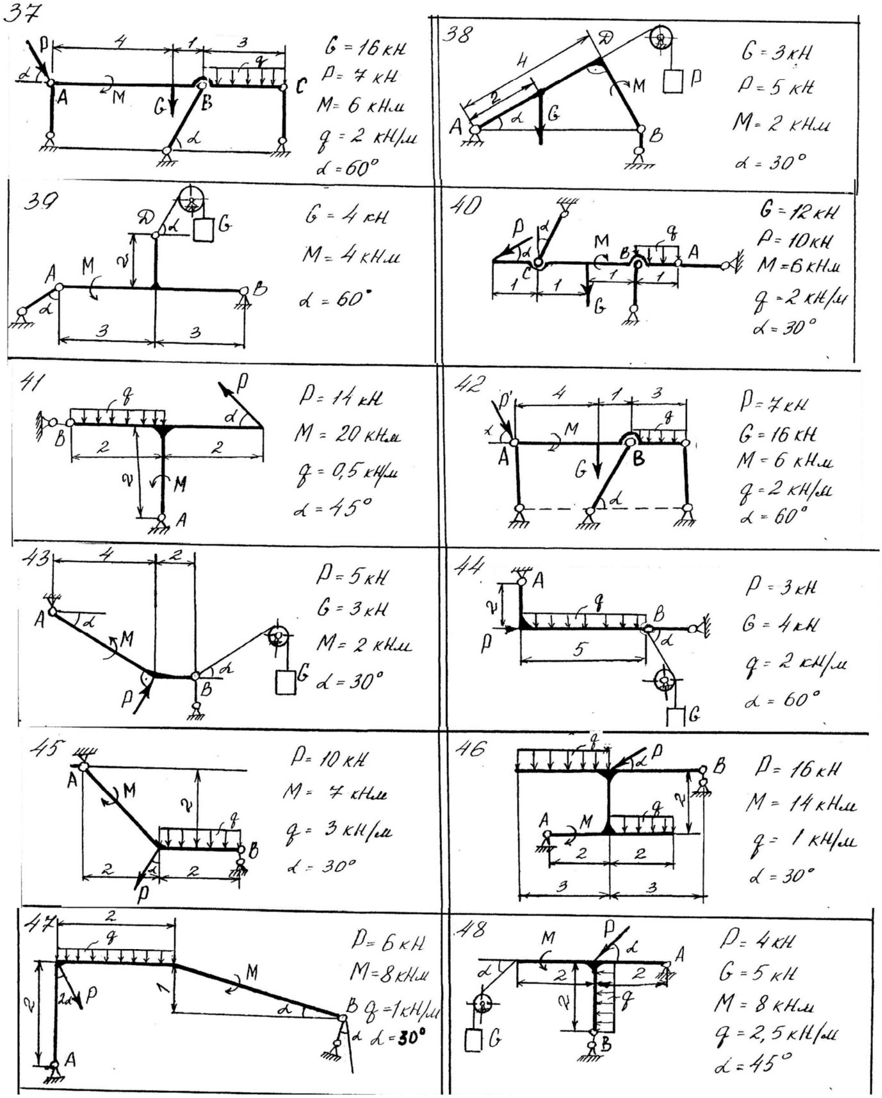

37
G = 16 кН
P = 7 кН
M = 6 кН.м
q = 2 кН/м
α = 60°
38
G = 3 кН
P = 5 кН
M = 2 кН.м
α = 30°
39
G = 4 кН
M = 4 кН.м
α = 60°
40
G = 12 кН
P = 10 кН
M = 6 кН.м
q = 2 кН/м
α = 30°
41
P = 14 кН
M = 20 кН.м
q = 0,5 кН/м
α = 45°
42
P = 7 кН
G = 16 кН
M = 6 кН.м
q = 2 кН/м
α = 60°
43
P = 5 кН
G = 3 кН
M = 2 кН.м
α = 30°
44
P = 3 кН
G = 4 кН
q = 2 кН/м
α = 60°
45
P = 10 кН
M = 7 кН.м
q = 3 кН/м
α = 30°
46
P = 16 кН
M = 14 кН.м
q = 1 кН/м
α = 30°
47
P = 6 кН
M = 8 кН.м
q = 1 кН/м
α = 30°
48
P = 4 кН
G = 5 кН
M = 8 кН.м
q = 2,5 кН/м
α = 45°

Рис. С2.5

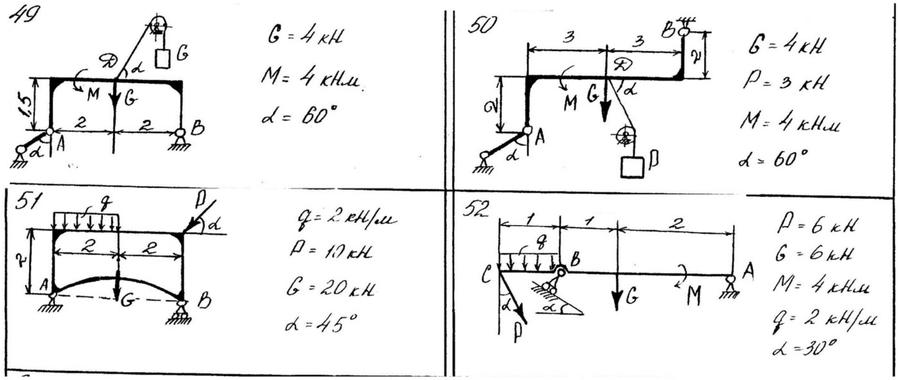


Рис. C2.6

Из уравнения (C2.1) найдем R_{Ax}:

$$R_{Ax} = S\cos\alpha = 2{,}14\cos 60^\circ = 1{,}07 \text{ кН},$$

а из уравнения (C2.2) найдем R_{Ay}:

$$R_{Ay} = Q + G - S\sin\alpha - T = 1 + 10 - 2{,}14\sin 60^\circ - 5 = 4{,}15 \text{ кН}.$$

Все неизвестные реакции имеют положительный знак, их направления верно показаны на рис. C2.1, *б*.

Проверка

Для проверки правильности решения вычислим сумму моментов всех сил рассмотренной системы относительно точки B:

$$\sum m_B(F_i) = R_{Ax}\cdot 1{,}5l - R_{Ay}\cdot 6l + Q\cdot 5l + G\cdot 3l - S\sin\alpha\cdot 2l - M =$$

$$= 1{,}07\cdot 1{,}5 - 4{,}15\cdot 6 + 1\cdot 5 + 10\cdot 3 - 2{,}14\sin 60^\circ\cdot 2 - 8 = -\,0{,}0016 \cong 0; \quad \text{(C2.4)}$$

$$R_{Ax} = 1{,}07 \text{ кН}, \quad R_{Ay} = 4{,}15 \text{ кН}, \quad S = 2{,}14 \text{ кН}.$$

При правильном решении задачи эта сумма должна быть равна нулю. Из-за погрешностей округлений (округления при расчетах следует производить в третьей значащей цифре) сумма моментов всех сил может несколько отличаться от нуля, но не должна превышать 1 % от наибольшего слагаемого уравнения (С2.4).

Новый центр (в рассматриваемом случае точка *B*) следует выбирать так, чтобы момент каждой из искомых реактивных сил относительно этой точки не был равен нулю, т. е. новая точка не должна лежать на линии действия искомой силы.

ЗАДАНИЕ С3

Определение реакций опор составной конструкции

Конструкция, представленная на рис. С3.2–С3.6, состоит из двух тел. Определить реакции опор и выполнить проверку правильности решения.

Пример выполнения задания

Задача

Дано: схема конструкции (рис. С1.3, *а*);

$M = 4$ кН $\cdot$ м; $P = 0{,}5$ кН $\cdot$ м; $\alpha = 30°$.

Размеры на рисунке указаны в метрах.

Определить: реакции в опорах *A*, *C* и усилие во внутреннем шарнире *B*.

Решение

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции *ABC* (составную конструкцию, согласно принципу отвердевания, можно рассматривать как одно твердое тело).

2. Покажем все действующие на конструкцию активные силы (рис. С3.2, *б*): заданную силу *P* и пару сил с моментом *M*.

3. Отбросим связи – заделку в точке *A* и подвижный шарнир *C* (шарнир *B* при рассмотрении равновесия всей конструкции не является связью) и заменим их действие соответствующими реакциями: R_{Ax}, R_{Ay}, M_A, R_C.

4. Запишем условия равновесия получившейся плоской системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0;\ \ R_{Ax} - R_C \sin\alpha + P = 0\ ; \qquad (С3.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0;\;\; R_{Ay} - R_C \cos\alpha = 0\,; \qquad \text{(С3.2)}$$

$$\sum m_A(F_i) = 0;\;\; M_A - M + R_{Cy}\cdot 3 - R_{Cx}\cdot 4 + P\cdot 2{,}5 = 0\,. \qquad \text{(С3.3)}$$

Получилась система трех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных.

5. Для составления дополнительных уравнений и нахождения силы давления в шарнире *B* рассмотрим равновесие балки *BC*.

6. Покажем (рис. С3.2, *в*) все действующие на балку *BC* активные силы (силу *P*) и реакции связи: R_{Bx}, R_{Bx} и R_C (для балки *BC* связями являются соединительный шарнир *B* и подвижный шарнир *C*).

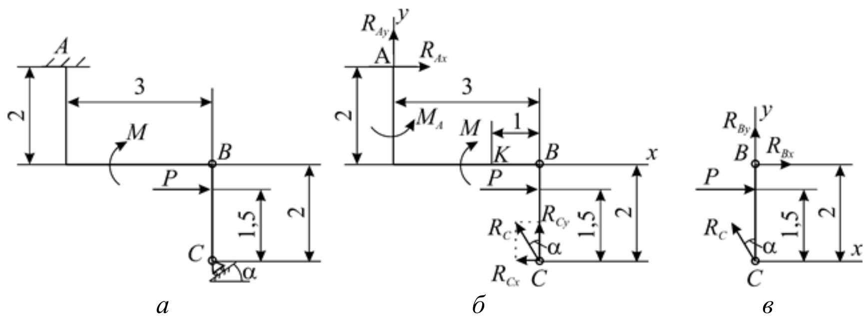


Рис. С3.1

7. Запишем условия равновесия получившейся системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0;\;\; R_{Bx} - R_C \sin\alpha + P = 0\,; \qquad \text{(С3.4)}$$

$$\sum F_{iy} = 0;\;\; R_{By} - R_C \cos\alpha = 0\,; \qquad \text{(С3.5)}$$

$$\sum m_B(F_i) = 0;\;\; P\cdot 0{,}5 - R_C \sin\alpha \cdot 2 = 0\,. \qquad \text{(С3.6)}$$

Решая систему шести линейных алгебраических уравнений (С3.1) – (С3.6), найдем шесть неизвестных реакций.

Из уравнения (С3.6):

$$R_C = \frac{P\cdot 0{,}5}{\sin\alpha\cdot 2} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{\sin 30^\circ \cdot 2} = 0{,}250 \text{ кН}\,.$$

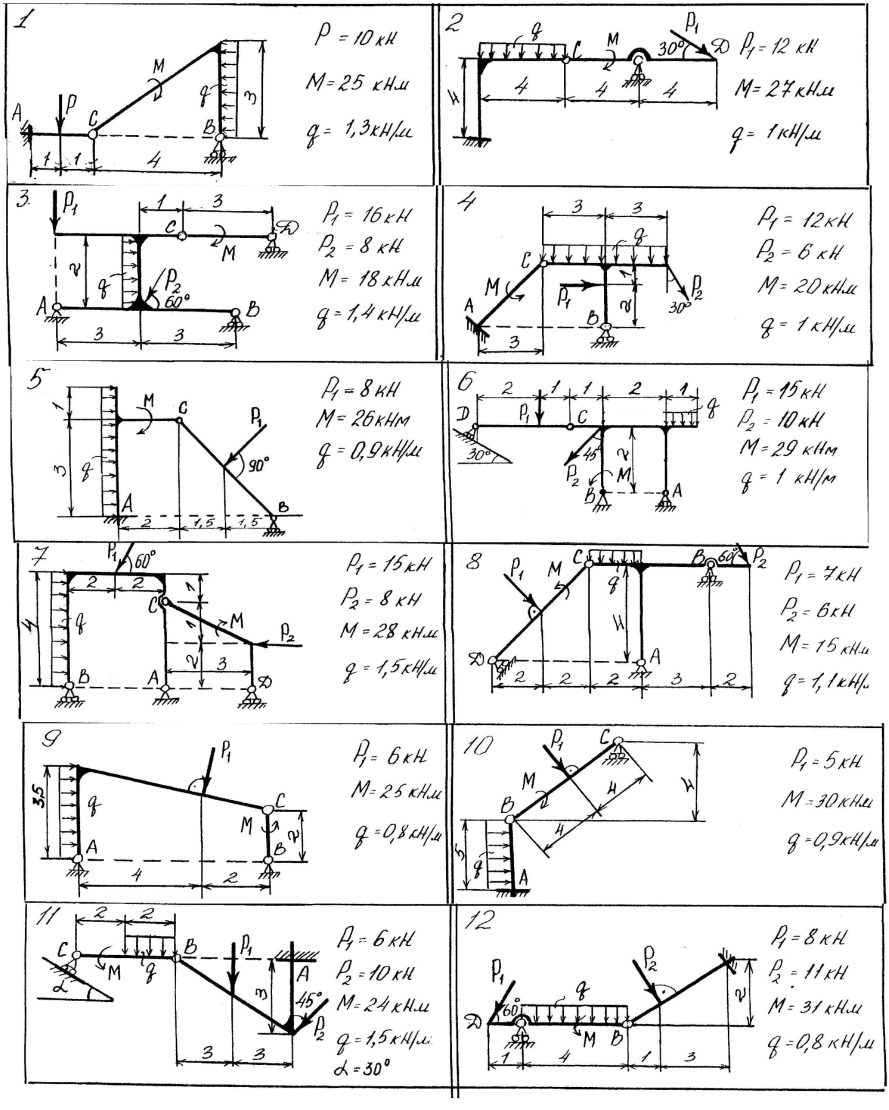

1
P = 10 кН
M = 25 кНм
q = 1,3 кН/м
2
P1 = 12 кН
M = 27 кНм
q = 1 кН/м
3
P1 = 16 кН
P2 = 8 кН
M = 18 кНм
q = 1,4 кН/м
4
P1 = 12 кН
P2 = 6 кН
M = 20 кНм
q = 1 кН/м
5
P1 = 8 кН
M = 26 кНм
q = 0,9 кН/м
6
P1 = 15 кН
P2 = 10 кН
M = 29 кНм
q = 1 кН/м
7
P1 = 15 кН
P2 = 8 кН
M = 28 кНм
q = 1,5 кН/м
8
P1 = 7 кН
P2 = 6 кН
M = 15 кНм
q = 1,1 кН/м
9
P1 = 6 кН
M = 25 кНм
q = 0,8 кН/м
10
P1 = 5 кН
M = 30 кНм
q = 0,9 кН/м
11
P1 = 6 кН
P2 = 10 кН
M = 24 кНм
q = 1,5 кН/м
α = 30°
12
P1 = 8 кН
P2 = 11 кН
M = 31 кНм
q = 0,8 кН/м

Рис. С3.2

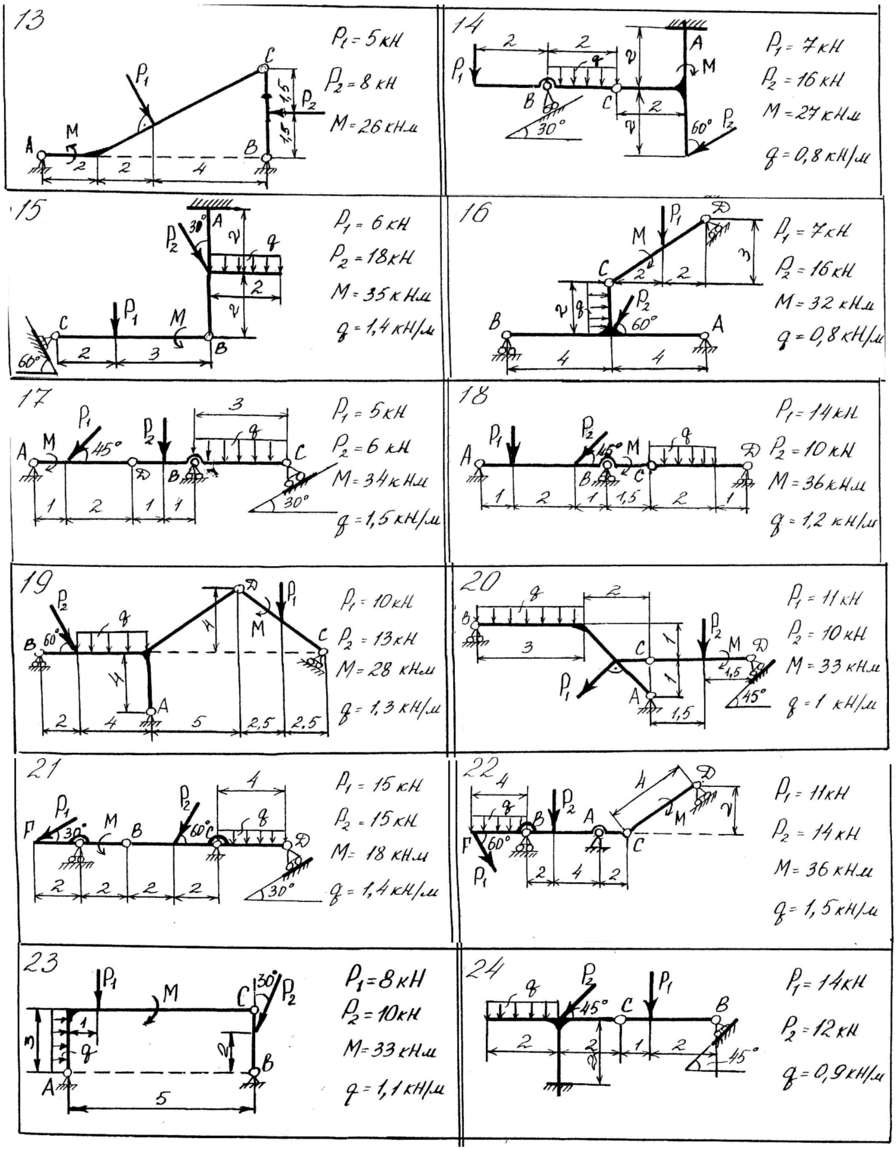

13
P1 = 5 кН
P2 = 8 кН
M = 26 кНм
14
P1 = 7 кН
P2 = 16 кН
M = 27 кНм
q = 0,8 кН/м
15
P1 = 6 кН
P2 = 18 кН
M = 35 кНм
q = 1,4 кН/м
16
P1 = 7 кН
P2 = 16 кН
M = 32 кНм
q = 0,8 кН/м
17
P1 = 5 кН
P2 = 6 кН
M = 34 кНм
q = 1,5 кН/м
18
P1 = 14 кН
P2 = 10 кН
M = 36 кНм
q = 1,2 кН/м
19
P1 = 10 кН
P2 = 13 кН
M = 28 кНм
q = 1,3 кН/м
20
P1 = 11 кН
P2 = 10 кН
M = 33 кНм
q = 1 кН/м
21
P1 = 15 кН
P2 = 15 кН
M = 18 кНм
q = 1,4 кН/м
22
P1 = 11 кН
P2 = 14 кН
M = 36 кНм
q = 1,5 кН/м
23
P1 = 8 кН
P2 = 10 кН
M = 33 кНм
q = 1,1 кН/м
24
P1 = 14 кН
P2 = 12 кН
q = 0,9 кН/м

Рис. С3.3

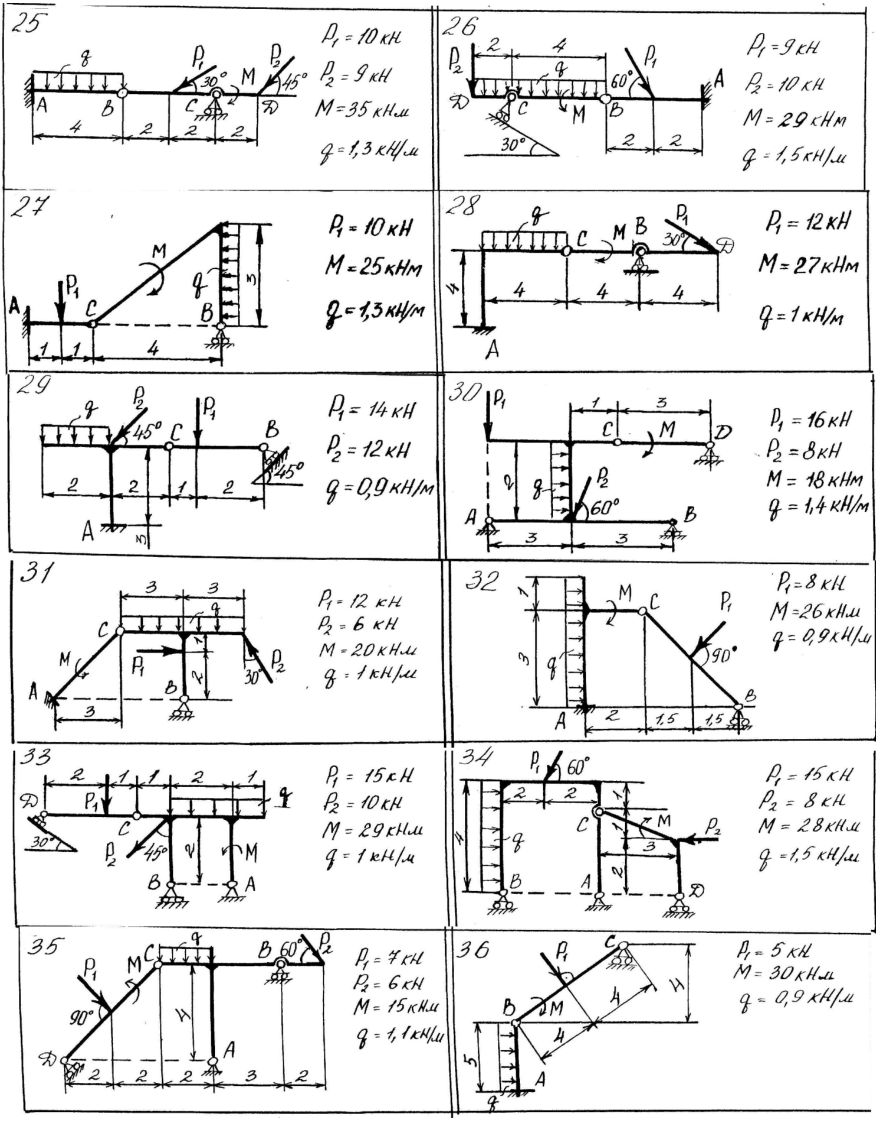

25
P_1 = 10 кН
P_2 = 9 кН
M = 35 кНм
q = 1,3 кН/м
26
P_1 = 9 кН
P_2 = 10 кН
M = 29 кНм
q = 1,5 кН/м
27
P_1 = 10 кН
M = 25 кНм
q = 1,3 кН/м
28
P_1 = 12 кН
M = 27 кНм
q = 1 кН/м
29
P_1 = 14 кН
P_2 = 12 кН
q = 0,9 кН/м
30
P_1 = 16 кН
P_2 = 8 кН
M = 18 кНм
q = 1,4 кН/м
31
P_1 = 12 кН
P_2 = 6 кН
M = 20 кНм
q = 1 кН/м
32
P_1 = 8 кН
M = 26 кНм
q = 0,9 кН/м
33
P_1 = 15 кН
P_2 = 10 кН
M = 29 кНм
q = 1 кН/м
34
P_1 = 15 кН
P_2 = 8 кН
M = 28 кНм
q = 1,5 кН/м
35
P_1 = 7 кН
P_2 = 6 кН
M = 15 кНм
q = 1,1 кН/м
36
P_1 = 5 кН
M = 30 кНм
q = 0,9 кН/м

Рис. С3.4

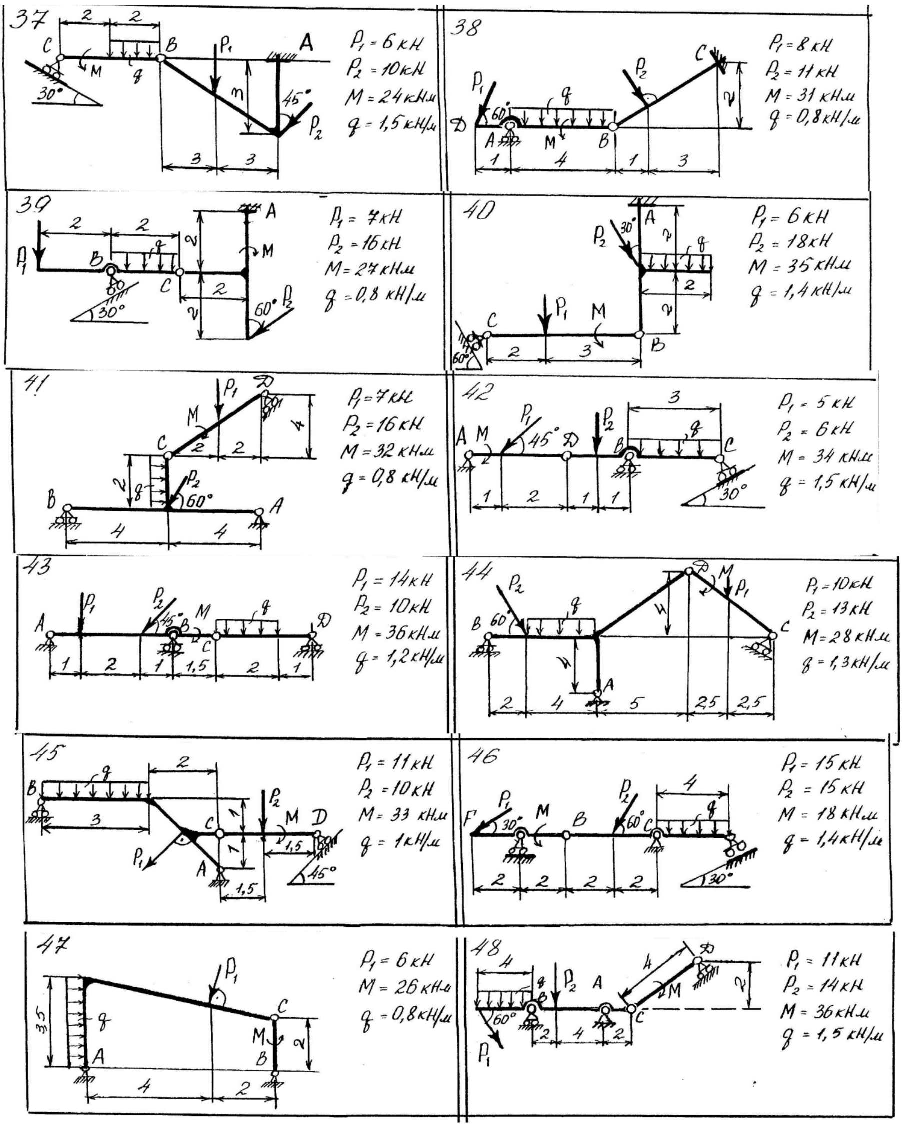

37
P1 = 6 кН
P2 = 10 кН
M = 24 кНм
q = 1,5 кН/м
38
P1 = 8 кН
P2 = 11 кН
M = 31 кНм
q = 0,8 кН/м
39
P1 = 7 кН
P2 = 16 кН
M = 27 кНм
q = 0,8 кН/м
40
P1 = 6 кН
P2 = 18 кН
M = 35 кНм
q = 1,4 кН/м
41
P1 = 7 кН
P2 = 16 кН
M = 32 кНм
q = 0,8 кН/м
42
P1 = 5 кН
P2 = 6 кН
M = 34 кНм
q = 1,5 кН/м
43
P1 = 14 кН
P2 = 10 кН
M = 36 кНм
q = 1,2 кН/м
44
P1 = 10 кН
P2 = 13 кН
M = 28 кНм
q = 1,3 кН/м
45
P1 = 11 кН
P2 = 10 кН
M = 33 кНм
q = 1 кН/м
46
P1 = 15 кН
P2 = 15 кН
M = 18 кНм
q = 1,4 кН/м
47
P1 = 6 кН
M = 26 кНм
q = 0,8 кН/м
48
P1 = 11 кН
P2 = 14 кН
M = 36 кНм
q = 1,5 кН/м

Рис. С3.5

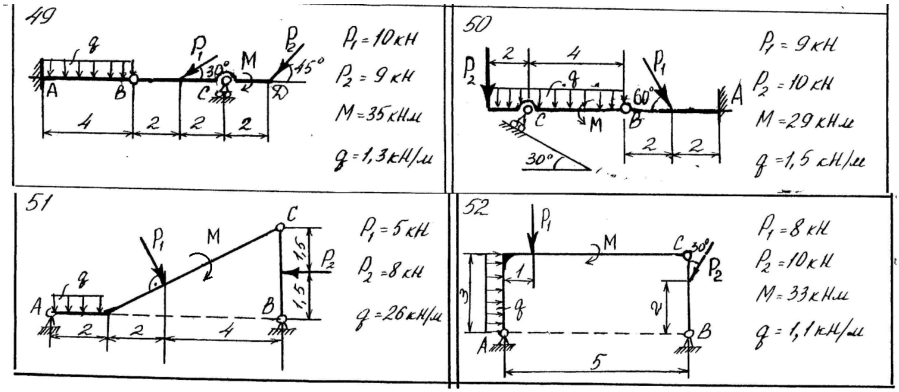


Рис. С3.6

Из уравнений (С3.4) и (С3.5):

$$R_{Bx} = R_C \sin\alpha - P = 0{,}25 \sin 30° - 0{,}5 = -0{,}375 \text{ кН};$$

$$R_{By} = -R_C \cos\alpha = -0{,}25 \sin 30° = -0{,}217 \text{ кН}.$$

Из уравнения (С3.3):

$$M_A = M + R_{Cy} \cos\alpha \cdot 3 + R_C \sin\alpha \cdot 4 - P \cdot 2{,}5 = 4 - 0{,}25 \cos 30° \cdot 3 +$$

$$+ 0{,}25 \sin 30° \cdot 4 - 0{,}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка

Чтобы удостовериться в правильности полученного решения, проверим выполнение условия равновесия системы сил (рис. С3.2, *б*) в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно нового центра – точки *K*:

$$\sum m_K(F_i) = M_A - M - R_{Ay} \cdot 2 - R_{Ax} \cdot 2 - R_C \sin\alpha \cdot 2 + R_C \cos\alpha \cdot 1 + P \cdot 0{,}5 =$$

$$= 2{,}6 - 4 - (-0{,}217) \cdot 2 - (-0{,}375) \cdot 2 - 0{,}25 \sin 30° \cdot 2 +$$

$$+ 0{,}25 \cos 30° \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}01 \cong 0;$$

$$M_A = 2{,}60\ \text{кН} \cdot \text{м}, \quad R_C = 0{,}250\ \text{кН};$$

$$R_{Ax} = -0{,}375\ \text{кН}, \quad B_x = -0{,}375\ \text{кН};$$

$$R_{Ay} = -0{,}217\ \text{кН}, \quad B_y = -0{,}217\ \text{кН}.$$

Давление R_B в шарнире B равно реакции связи, т. е.

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{(-0{,}375)^2 + (-0{,}217)^2} = 0{,}433\ \text{кН}.$$

КИНЕМАТИКА

ЗАДАНИЕ К1

Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, нормальное и касательное ускорение, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице.

Таблица данных

Номер варианта	$x(t)$, см	$y(t)$, см	t_1, с
1	$-2t^3 + 3$	$-5t$	0,5
2	$4\cos^2\pi t + 2$	$4\sin 2\pi t$	3
3	$3t^2 + 2$	$-4t$	0,5
4	$5\sin^2(\pi t/6)$	$5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
5	$-\cos(\pi t^3/3)$	$\sin(\pi t^3/3)$	1
6	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
7	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
8	$7\sin^2\pi t - 5$	$-7\cos^2\pi t + 1$	6
9	$2\sin(\pi t/3) - 1$	$-3\cos(\pi t/3) + 1$	6
10	$6\sin\pi t^2 - 2$	$6\cos\pi t^2$	1
11	$7t^2 - 3$	$5t$	0,5
12	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
13	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin(\pi t/6)$	1
14	$-6t$	$-2t^2 - 4$	2
15	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$4\sin(\pi t/3)$	1
16	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0

Окончание таблицы

Номер варианта	$x(t)$, см	$y(t)$, см	t_1, с
17	$-5t^2 - 4$	$3t$	3
18	$1 + 3\cos(\pi t^2)$	$3\sin(\pi t^2) + 3$	1
19	$3t$	$4t^2 + 1$	0,5
20	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
21	$-2t + 2$	$-2/(t + 1)$	2
22	$5\cos(\pi t^2)$	$-5\sin(\pi t^2)$	1
23	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
24	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$7\cos(\pi t^2/6)$	1
25	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
26	$2\cos(\pi t^2) - 2$	$-2\sin(\pi t^2) + 3$	1
27	$-2t^2 + 3$	$-5t$	3
28	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
29	$4\sin^2(\pi t/3)$	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	1
30	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
31	$-4t^2 + 1$	$-3t$	0,5
32	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
33	$3 - 9\sin(\pi t^2)$	$9\cos(\pi t^2) + 5$	1
34	$8\cos^2(\pi t) + 2$	$-8\sin^2(\pi t) + 7$	2
35	$3t^2 + 1$	$-4t$	0,5
36	$2\sin(\pi t/3)$	$3\cos(\pi t/3) + 4$	1
37	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
38	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
39	$4\cos(\pi t)$	$4\sin(\pi t)$	3
40	$7\sin(\pi t^2) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2)$	6
41	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
42	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
43	$6\sin(\pi t^2) - 2$	$6\cos(\pi t^2) + 3$	6
44	$4\cos(\pi t/3)$	$2\sin(\pi t/3) - 3$	1
45	$7t^2 - 3$	$5t$	0,25
46	$4t^2 + 1$	$-3t$	0,5
47	$1 + 3\cos(\pi t^2)$	$3\sin(\pi t^2) + 3$	3
48	$5\sin^2(\pi t)$	$5\cos^2(\pi t) - 3$	2
49	$5\cos(\pi t^2)$	$5\sin(\pi t^2)$	1
50	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	1
51	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0

Пример выполнения задания

Закон движения точки задан уравнениями: $x = 5\sin\frac{\pi}{4}t$; $y = 5\cos\frac{\pi}{4}t$, где t измеряется в секундах, а координаты – в метрах.

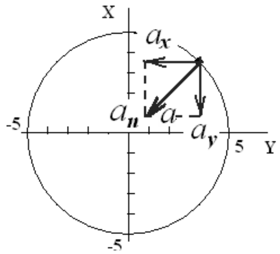


Рис. К1.1

Определить вид траектории и для момента времени $t = 1$ с найти: V_x, V_y, V, a_x, a_y, a, a_τ, a_n, ρ.

Решение

Для определения уравнения траектории возведем в квадрат оба уравнения движения и сложим их: $x^2 + y^2 = 5^2$. Это уравнение окружности радиусом $R = 5$ (рис. К1.1).

При $t = 1$ с $x = 5 \cdot 0{,}707 \approx 3{,}5$; $y = 5 \cdot 0{,}707 \approx 3{,}5$.

Найдем скорость точки:

$$V_x = \dot{x} = \frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t;$$

$$V_y = \dot{y} = -\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}t;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{5\pi}{4} = 4{,}9 \text{ м/с}.$$

Изобразим полученные векторы скоростей на рис. К1.1.

Найдем ускорение точки координатным способом:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = -\frac{5\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t;$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = -\frac{5\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{5\pi}{16} \text{ м/с}^2.$$

Полученные векторы ускорений изобразим на рис. К1.2.

Найдем ускорение точки в естественных координатах:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{5^2\pi^2}{16\cdot 5} = \frac{5\pi^2}{16}; \qquad a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{5\pi^2}{16} \text{ м/с}^2.$$

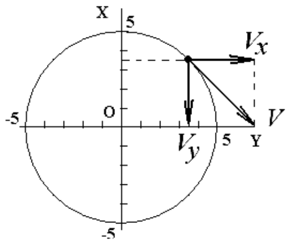


Рис. К1.2

Ускорения точки, вычисленные разными способами, совпали. Следовательно, решение верно.

Радиус кривизны определяем по формуле $\rho = \dfrac{V^2}{a_n}$.

Таким образом, $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{\frac{25\pi^2}{16}}{\frac{5\pi^2}{16}} = 5$ м. Это также подтверждает правильность решения.

ЗАДАНИЕ К2

Определение скоростей и ускорений точек тела при поступательном и вращательном движении

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *A* определить скорость точки *M*, а также ее нормальное, касательное и полное ускорение в момент времени, указанный в условии задачи. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные представлены на рис. К2.3–К2.9.

Пример решения задачи

Задача

На рис. К2.1 показана схема механизма, состоящего из барабана *1*, на который наматывается трос, перекинутый через неподвижные блоки *2* и *3*. К неподвижному блоку *3* на нить подвешен груз *A*.

Дано: $\omega = 10\ \text{с}^{-1}$; $\varepsilon = 20\ \text{с}^{-2}$; $R = 0{,}4$ м; $R_3 = 0{,}3$ м; $r_3 = 0{,}2$ м.

Определить: скорость V и ускорение a точки E и груза A.

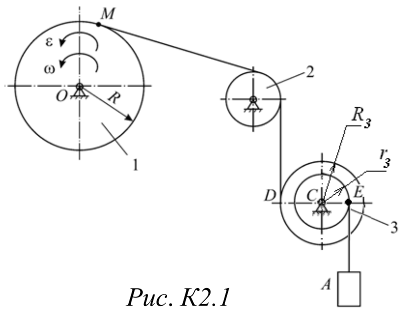


Рис. К2.1

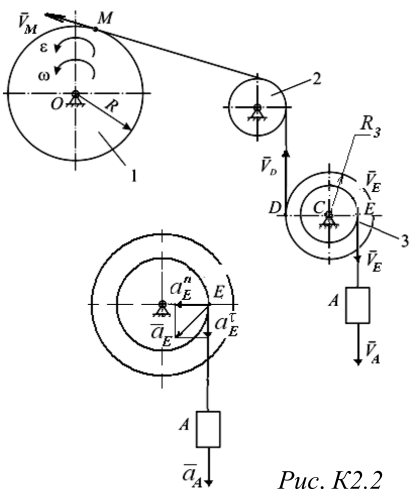


Рис. К2.2

Решение

Груз *A* движется поступательно вниз. Определим сначала скорость точки *D* тела, совершающего вращательное движение.

Точка *D* принадлежит нерастяжимой нити, следовательно, на участке нити *MD* скорости всех точек нити по модулю одинаковы и равны скорости точки *M* барабана *1*, в которой точки троса начинают контактировать с барабаном (точка *M* нити не может перемещаться относительно точки *M* барабана). Следовательно,

$$V_D = V_M .$$

Скорость точки D определена как $V_D = V_M = \omega R = 10 \cdot 0,4 = 4$ м/с, вектор скорости направлен вверх. Зная скорость точки D, можно определить угловую скорость блока *3* и, следовательно, определить скорость точки E:

$$\omega_3 = \frac{V_D}{R_3}; \quad V_E = \omega_3 r_3 = \frac{V_D}{R_3} r_3 = \frac{4}{0,3} 0,2 \approx 2,7 \text{ м/с} .$$

Скорость точки E равна скорости нити и соответственно равна скорости груза A: $V_A = V_E$.

Ускорение точки E (рис. К2.2) складывается из нормального и касательного ускорений:

$$a_E = \sqrt{\left(a_E^n\right)^2 + \left(a_E^\tau\right)^2} ;$$

$$a_E^n = \frac{V_E^2}{r_3} = \frac{2,7^2}{0,2} = 36,4 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_E^\tau = \frac{dV_E}{dt} = \varepsilon_3 r_3 = \frac{d\left(\frac{V_D}{R_3} r_3\right)}{dt} = \frac{r_3}{R_3} \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R r_3}{R_3} \frac{d\omega}{dt} = \frac{R r_3}{R_3} \varepsilon = 5,3 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_E = \sqrt{(36,4)^2 + (5,3)^2} = 36,8 \text{ м/с}^2 .$$

Так как точка A движется прямолинейно, то

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV_E}{dt} = a_E^\tau = 36,4 \text{ м/с}^2 .$$

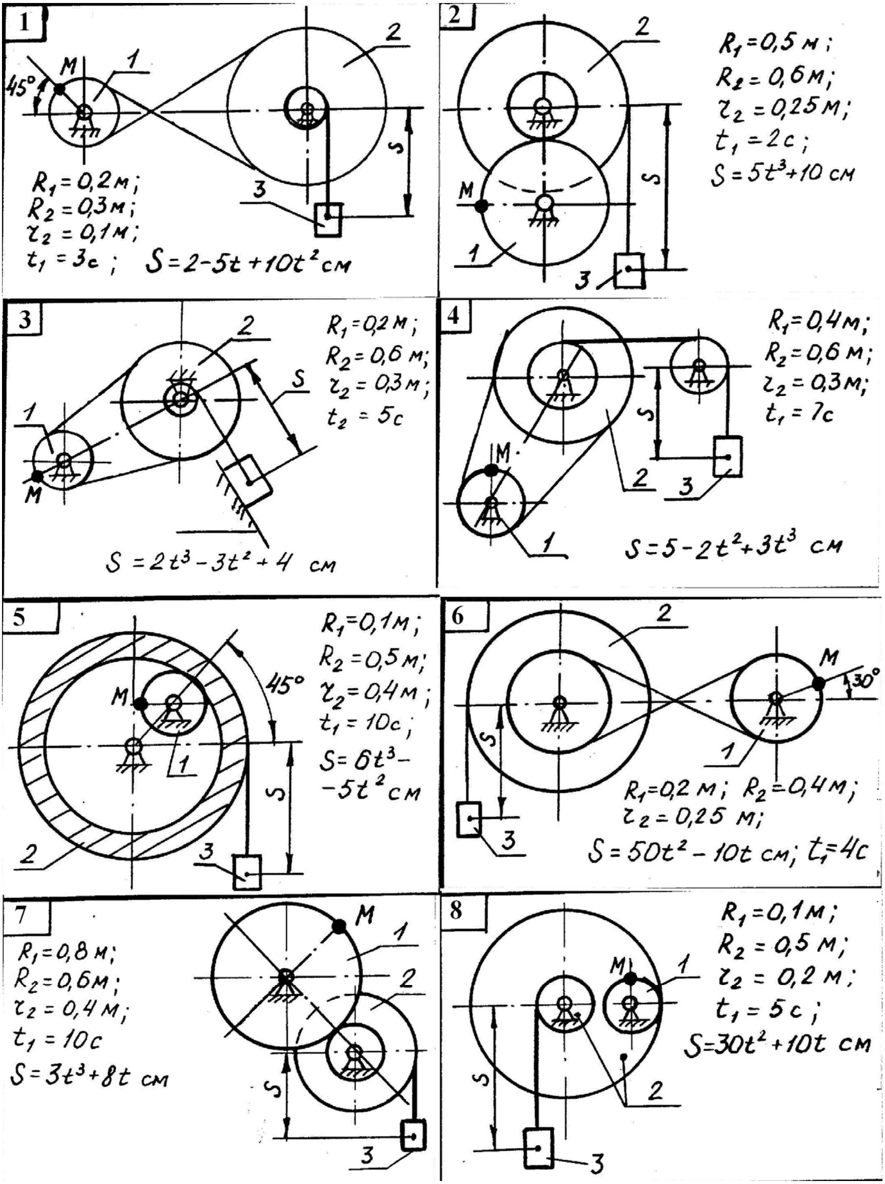
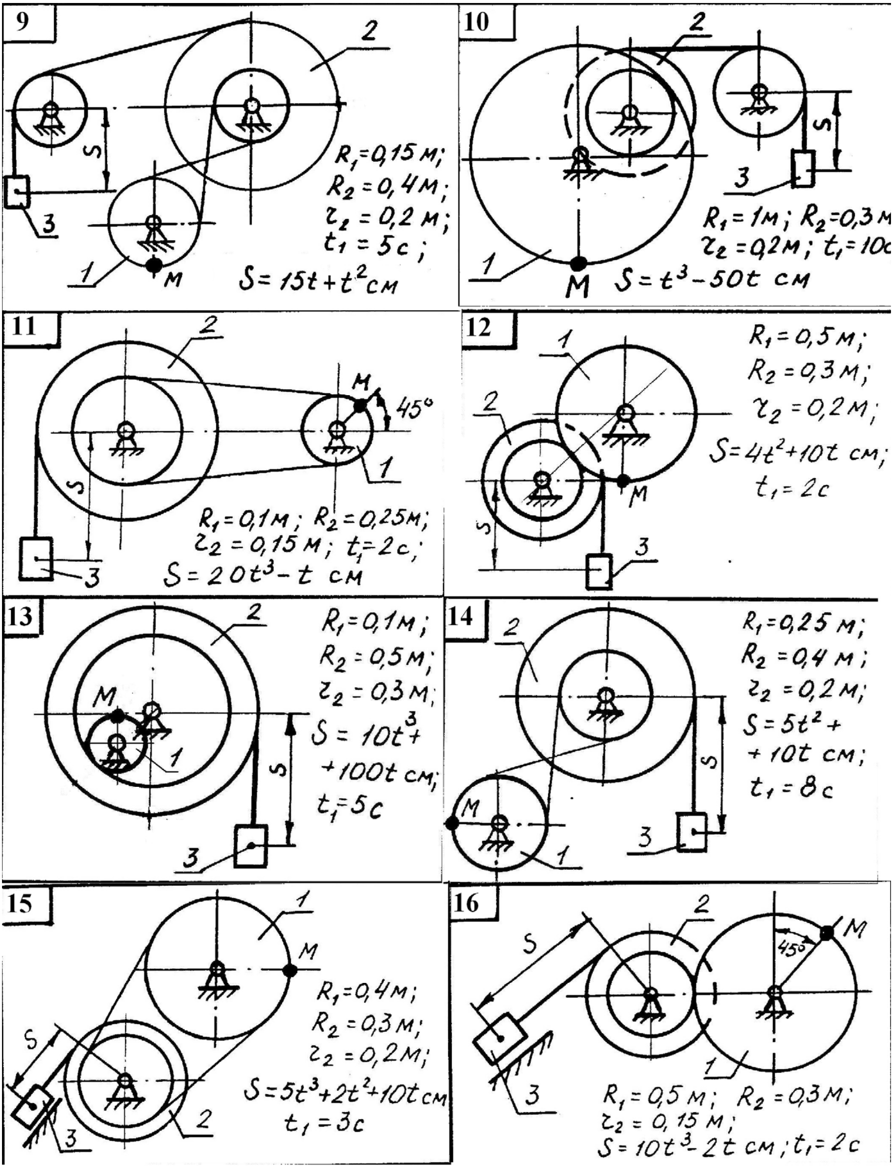

1
M
45°
1
2
3
S
$R_1 = 0{,}2$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}1$ м;
$t_1 = 3$ с; $S = 2 - 5t + 10t^2$ см
2
2
M
1
3
S
$R_1 = 0{,}5$ м;
$R_2 = 0{,}6$ м;
$r_2 = 0{,}25$ м;
$t_1 = 2$ с;
$S = 5t^3 + 10$ см
3
1
2
M
S
$R_1 = 0{,}2$ м;
$R_2 = 0{,}6$ м;
$r_2 = 0{,}3$ м;
$t_2 = 5$ с
$S = 2t^3 - 3t^2 + 4$ см
4
M
1
2
3
S
$R_1 = 0{,}4$ м;
$R_2 = 0{,}6$ м;
$r_2 = 0{,}3$ м;
$t_1 = 7$ с
$S = 5 - 2t^2 + 3t^3$ см
5
M
45°
1
2
3
S
$R_1 = 0{,}1$ м;
$R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}4$ м;
$t_1 = 10$ с;
$S = 6t^3 -$
$- 5t^2$ см
6
2
M
30°
1
3
S
$R_1 = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}4$ м;
$r_2 = 0{,}25$ м;
$S = 50t^2 - 10t$ см; $t_1 = 4$ с
7
M
1
2
3
S
$R_1 = 0{,}8$ м;
$R_2 = 0{,}6$ м;
$r_2 = 0{,}4$ м;
$t_1 = 10$ с
$S = 3t^3 + 8t$ см
8
M
1
2
3
S
$R_1 = 0{,}1$ м;
$R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
$t_1 = 5$ с;
$S = 30t^2 + 10t$ см

Рис. К2.3



9
2
3
1
M
R1=0,15 м;
R2=0,4 м;
r2=0,2 м;
t1=5 с;
S=15t+t2 см
10
2
3
1
M
R1=1м; R2=0,3 м
r2=0,2м; t1=10с
S=t3-50t см
11
2
M
45°
1
3
R1=0,1м; R2=0,25м;
r2=0,15 м; t1=2с;
S=20t3-t см
12
1
2
M
3
R1=0,5 м;
R2=0,3 м;
r2=0,2 м;
S=4t2+10t см;
t1=2с
13
2
M
1
3
R1=0,1м;
R2=0,5м;
r2=0,3м;
S=10t3+
+100t см;
t1=5с
14
2
M
1
3
R1=0,25 м;
R2=0,4 м;
r2=0,2 м;
S=5t2+
+10t см;
t1=8с
15
1
M
S
2
3
R1=0,4м;
R2=0,3м;
r2=0,2м;
S=5t3+2t2+10t см
t1=3с
16
S
2
M
45°
1
3
R1=0,5 м; R2=0,3м;
r2=0,15 м;
S=10t3-2t см; t1=2с

Рис. К2.4

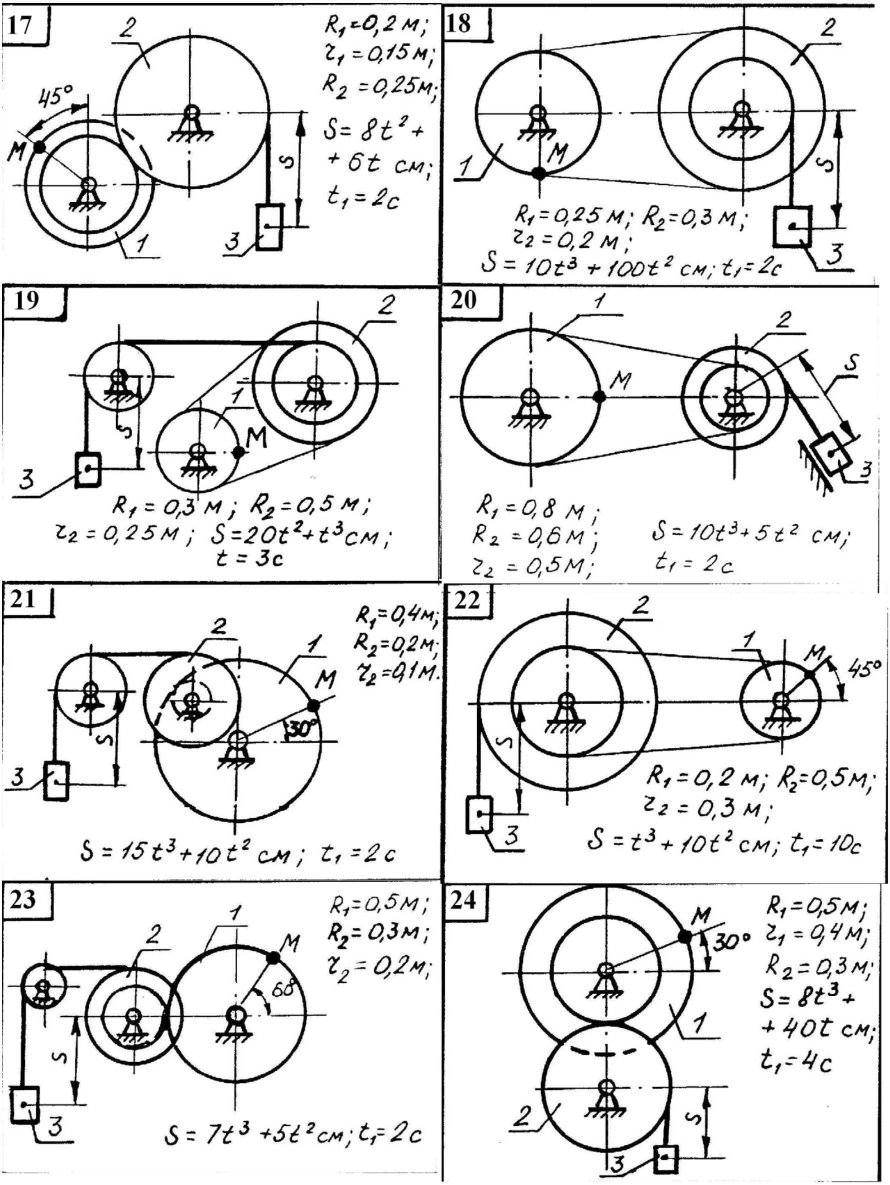

17
$R_1 = 0{,}2$ м;
$r_1 = 0{,}15$ м;
$R_2 = 0{,}25$ м;
$S = 8t^2 + 6t$ см;
$t_1 = 2$ с
45°
M
1
2
3
S
18
$R_1 = 0{,}25$ м; $R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
$S = 10t^3 + 100t^2$ см; $t_1 = 2$ с
M
1
2
3
S
19
$R_1 = 0{,}3$ м; $R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}25$ м; $S = 20t^2 + t^3$ см;
$t = 3$ с
M
1
2
3
S
20
$R_1 = 0{,}8$ м;
$R_2 = 0{,}6$ м;
$r_2 = 0{,}5$ м;
$S = 10t^3 + 5t^2$ см;
$t_1 = 2$ с
M
1
2
3
S
21
$R_1 = 0{,}4$ м;
$R_2 = 0{,}2$ м;
$r_2 = 0{,}1$ м.
$S = 15t^3 + 10t^2$ см; $t_1 = 2$ с
30°
M
1
2
3
S
22
$R_1 = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}3$ м;
$S = t^3 + 10t^2$ см; $t_1 = 10$ с
45°
M
1
2
3
S
23
$R_1 = 0{,}5$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
$S = 7t^3 + 5t^2$ см; $t_1 = 2$ с
60°
M
1
2
3
S
24
$R_1 = 0{,}5$ м;
$r_1 = 0{,}4$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$S = 8t^3 + 40t$ см;
$t_1 = 4$ с
30°
M
1
2
3
S

Рис. К2.5

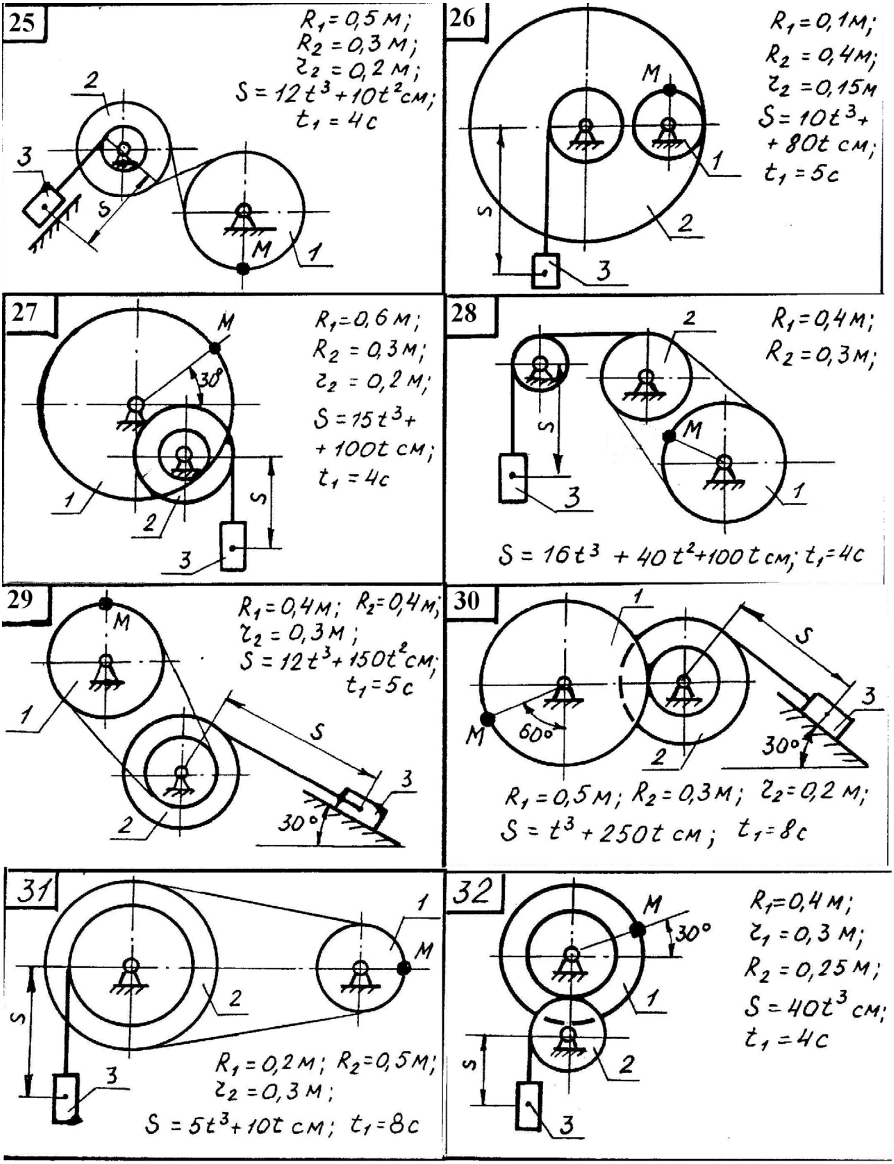

25
$R_1 = 0,5$ м; $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $S = 12t^3 + 10t^2$ см; $t_1 = 4$с
26
$R_1 = 0,1$м; $R_2 = 0,4$м; $r_2 = 0,15$м; $S = 10t^3 + 80t$ см; $t_1 = 5$с
27
$R_1 = 0,6$ м; $R_2 = 0,3$м; $r_2 = 0,2$ м; $S = 15t^3 + 100t$ см; $t_1 = 4$с
30°
28
$R_1 = 0,4$м; $R_2 = 0,3$м;
$S = 16t^3 + 40t^2 + 100t$ см; $t_1 = 4$с
29
$R_1 = 0,4$м; $R_2 = 0,4$м; $r_2 = 0,3$м; $S = 12t^3 + 150t^2$ см; $t_1 = 5$с
30°
30
60°
30°
$R_1 = 0,5$ м; $R_2 = 0,3$м; $r_2 = 0,2$ м;
$S = t^3 + 250t$ см; $t_1 = 8$с
31
$R_1 = 0,2$м; $R_2 = 0,5$м; $r_2 = 0,3$ м;
$S = 5t^3 + 10t$ см; $t_1 = 8$с
32
30°
$R_1 = 0,4$ м; $r_1 = 0,3$ м; $R_2 = 0,25$ м; $S = 40t^3$ см; $t_1 = 4$с

Рис. К2.6

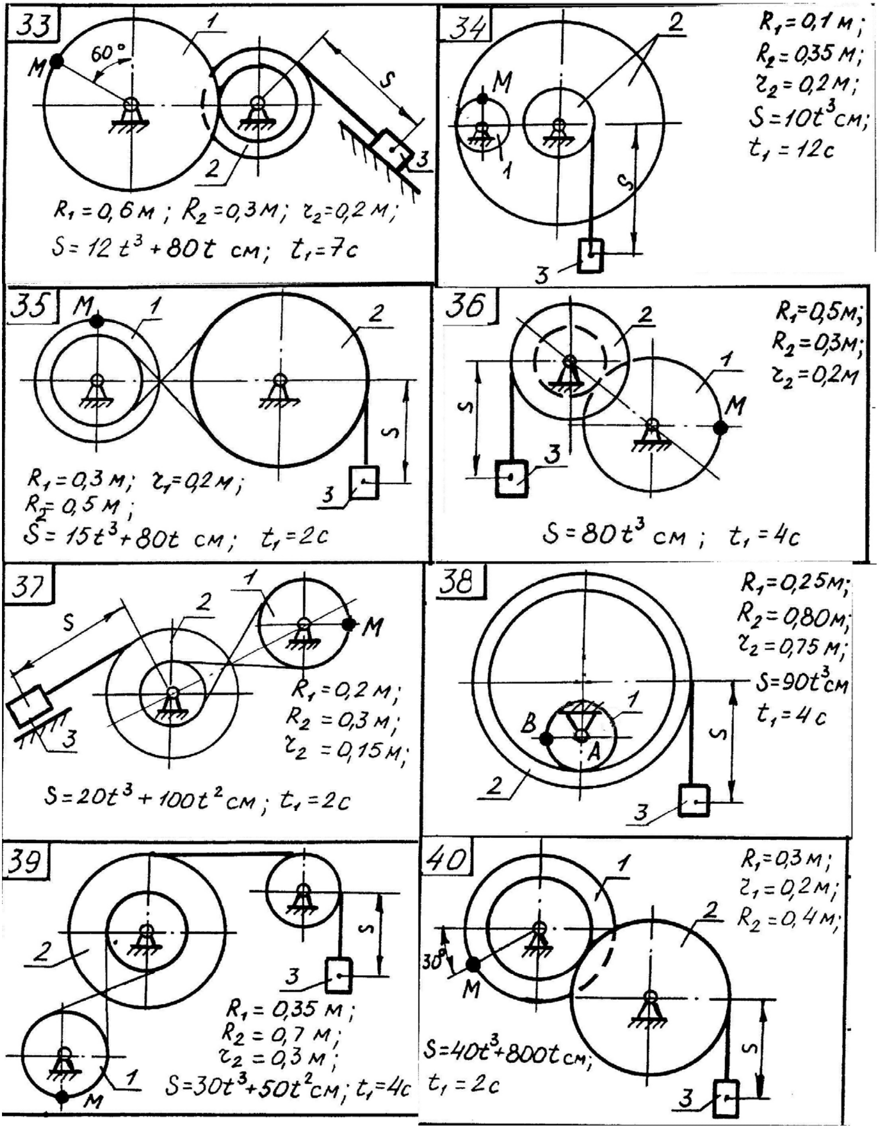
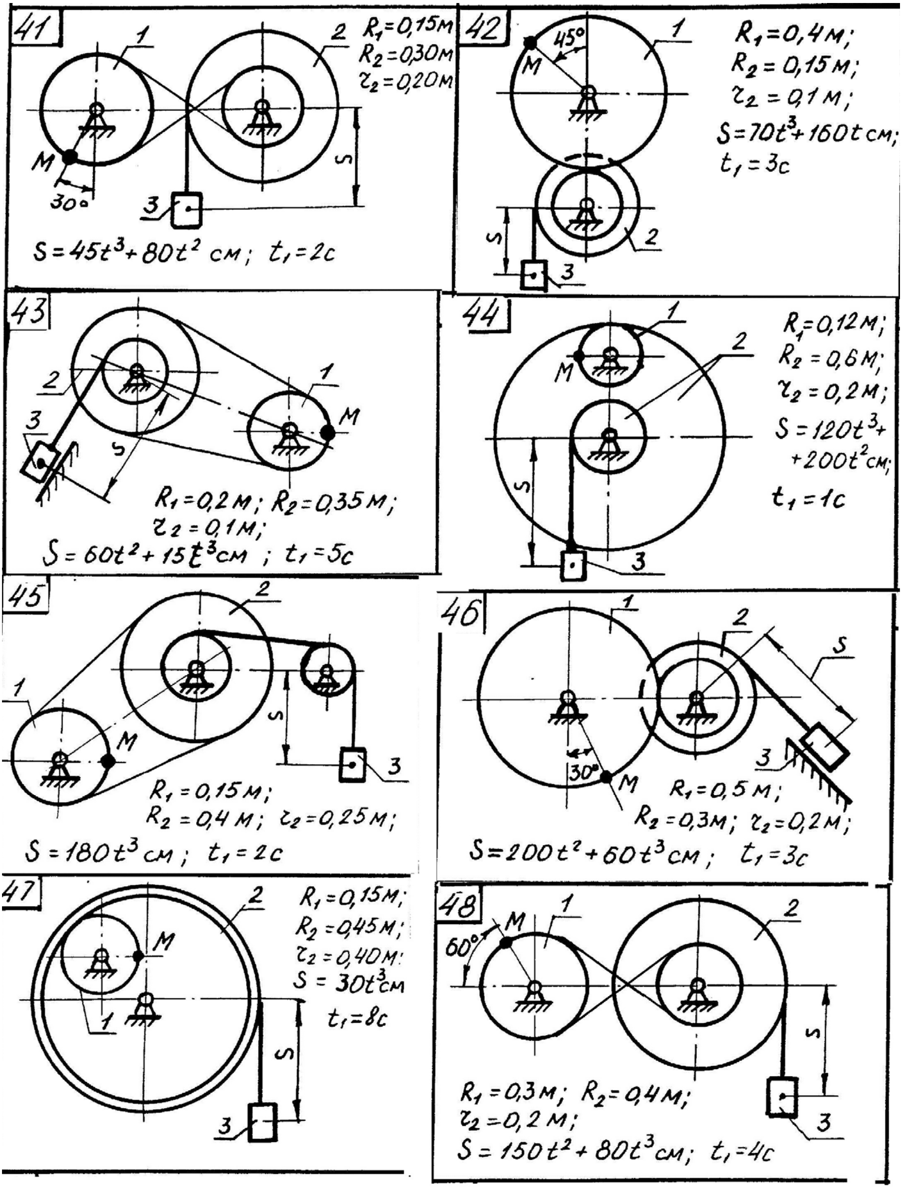

33
M
60°
1
2
s
3
$R_1 = 0,6$ м ; $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м;
$S = 12t^3 + 80t$ см; $t_1 = 7$с
34
M
1
2
s
3
$R_1 = 0,1$ м ;
$R_2 = 0,35$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
$S = 10t^3$ см;
$t_1 = 12$с
35
M
1
2
s
3
$R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,5$ м ;
$S = 15t^3 + 80t$ см; $t_1 = 2$с
36
2
1
M
s
3
$R_1 = 0,5$м;
$R_2 = 0,3$м;
$r_2 = 0,2$м
$S = 80t^3$ см ; $t_1 = 4$с
37
s
2
1
M
3
$R_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,15$ м;
$S = 20t^3 + 100t^2$ см ; $t_1 = 2$с
38
$R_1 = 0,25$м;
$R_2 = 0,80$м;
$r_2 = 0,75$ м;
$S = 90t^3$см
$t_1 = 4$с
1
B
A
s
2
3
39
2
s
3
1
M
$R_1 = 0,35$ м ;
$R_2 = 0,7$ м ;
$r_2 = 0,3$ м ;
$S = 30t^3 + 50t^2$см; $t_1 = 4$с
40
1
2
30°
M
$R_1 = 0,3$ м;
$r_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,4$ м;
$S = 40t^3 + 800t$ см;
$t_1 = 2$с
s
3

Рис. К2.7



41
$R_1=0,15$ м
$R_2=0,30$ м
$r_2=0,20$ м
M
30°
$S=45t^3+80t^2$ см; $t_1=2$ с
42
45°
M
$R_1=0,4$ м;
$R_2=0,15$ м;
$r_2=0,1$ м;
$S=70t^3+160t$ см;
$t_1=3$ с
43
M
$R_1=0,2$ м; $R_2=0,35$ м;
$r_2=0,1$ м;
$S=60t^2+15t^3$ см ; $t_1=5$ с
44
M
$R_1=0,12$ м;
$R_2=0,6$ м;
$r_2=0,2$ м;
$S=120t^3+$
$+200t^2$ см;
$t_1=1$ с
45
M
$R_1=0,15$ м;
$R_2=0,4$ м; $r_2=0,25$ м;
$S=180t^3$ см ; $t_1=2$ с
46
30°
M
$R_1=0,5$ м;
$R_2=0,3$ м; $r_2=0,2$ м;
$S=200t^2+60t^3$ см ; $t_1=3$ с
47
M
$R_1=0,15$ м;
$R_2=0,45$ м;
$r_2=0,40$ м;
$S=30t^3$ см
$t_1=8$ с
48
M
60°
$R_1=0,3$ м; $R_2=0,4$ м;
$r_2=0,2$ м;
$S=150t^2+80t^3$ см; $t_1=4$ с

Рис. К2.8

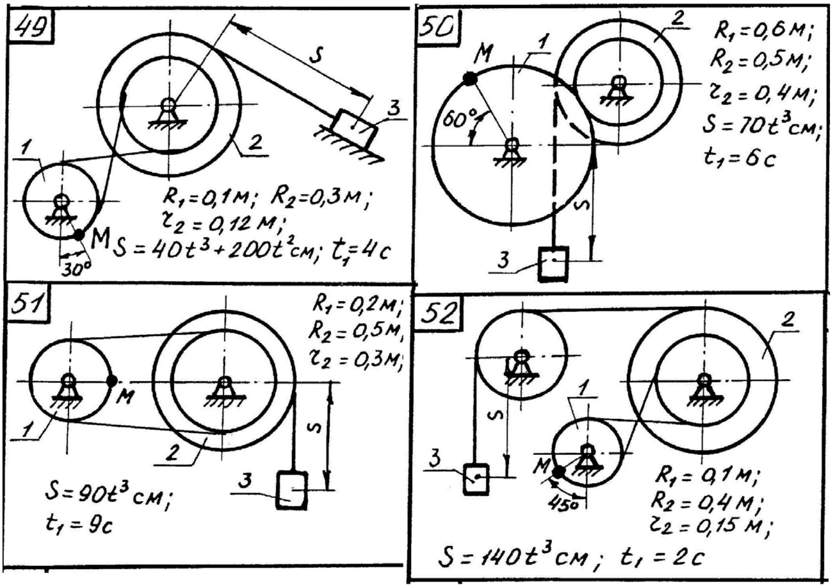


Рис. К2.9

ЗАДАНИЕ К3

Кинематический анализ плоского планетарного механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения всех точек, обозначенных на рис. К3.1, а также угловую скорость и угловое ускорение звеньев, которым эти точки принадлежат. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные представлены на рис. К3.2–К3.8.

Пример выполнения задания

Задача

На рис. К3.1, *а* показана схема планетарного механизма, состоящего из неподвижного колеса радиусом R, кривошипа (водила) OA, вращающегося вокруг оси колеса *1* и подвижного колеса *2*, шарнирно соединенного с кривошипом *OA*; $R = 0{,}2$ м, $r = 0{,}1$ м. При вращении кривошипа *OA* колесо *2* катится без скольжения по колесу *1*. В некоторый момент времени механизм находится в положении, соответствующем изображенному на рис. K3.1, *а*, при этом угловая скорость и угловое ускорение кривошипа равны: $\omega_{OA} = 10\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\ \text{с}^{-2}$. Определить скорость и ускорение точки *M*.

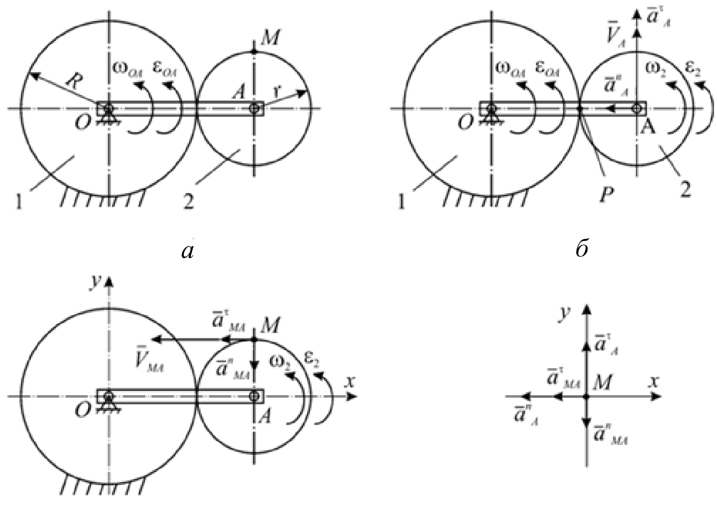


Рис. K3.1

Решение

Точка *M* принадлежит колесу *2*. Для определения скорости и ускорения этой точки необходимо найти скорость и ускорение какой-нибудь другой точки, которая впоследствии будет принята за полюс колеса *2*. В качестве полюса следует принимать такую точку, скорость и ускорение которой либо известны, либо их нетрудно найти. В данном случае такой точкой *A* является шарнир. Точка *A* принадлежит одновременно двум звеньям механизма: колесу *2* и кривошипу *OA*.

Определим скорость и ускорение шарнирной точки *A*. В данный момент времени известны угловая скорость ω_{OA} и угловое ускорение ε_{OA}, поэтому модуль скорости V_A и модуль ускорения a_A определяются по формулам:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0{,}3 = 3 \text{ м/с};$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0{,}3 = 30 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot l_{OA} = 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6 \text{ м/с},$$

где $l_{OA} = R + r = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ м.

Вектор скорости точки *A* направлен перпендикулярно прямой *AO* в сторону вращения кривошипа *OA*, т. е. вверх (рис. К3.1, *б*). Так как направление ε_{OA} совпадает с направлением ω_{OA}, тангенциальная составляющая ускорения a_A^τ совпадает с направлением скорости точки *A*, а нормальное ускорение a_A^n направлено от точки *A* к оси вращения.

Определим угловую скорость ω_2 колеса *2*. Последовательность рассуждения при выборе метода решения такова: закон движения колеса *2* неизвестен, колесо *2* совершает плоское движение, известно положение мгновенного центра скоростей (точка *P* на рис. К3.1, *б*), который находится в точке контакта колес *1* и *2*, так как колесо *2* катится без скольжения по неподвижному колесу *1*:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{l_{AP}} = \frac{V_A}{r} = \frac{3}{0{,}1} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Определим угловое ускорение ε_2 колеса *2*.

Зависимости $\varphi_2(t)$ и $\omega_2(t)$ неизвестны, однако расстояние от точки *A* до мгновенного центра скоростей (точки *P*) постоянно и равно r, следовательно, можно найти производную по времени от угловой скорости ω_2 (тангенциальная составляющая ускорения точки *A* – a_A^τ найдена ранее):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_A}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{r} = \frac{0{,}6}{0{,}1} = 6 \text{ с}^{-2}.$$

Определим скорости и ускорения точки M колеса *2*.

Рассуждения при выборе метода решения производятся в следующей последовательности: точка M принадлежит телу, входящему в состав механизма, однако угловая скорость ω_2 этого тела и его ускорение ε_2 известны (определены ранее), тело совершает плоское движение, причем известны скорость и ускорение точки A (которые определены ранее).

Приняв точку A за полюс, получим

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA},$$

где $V_{MA} = \omega_2 \cdot l_{MA} = 30 \cdot 0{,}1 = 3$ м/с.

Спроектировав уравнение на оси Ox и Oy (рис. К3.1, *г*), получим:

$$V_{Mx} = V_{MA} = 3 \text{ м/с}; \quad V_{My} = V_A = 3 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24 \text{ м/с}.$$

Согласно теореме об ускорении точки при плоском движении

$$\vec{a}_M = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau,$$

где $a_{MA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{MA} = 30^2 \cdot 0{,}1 = 90$ м/с^2, $a_{MA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_{MA} = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$ м/с^2 .

Спроектировав уравнение на оси координат, получим:

$$a_{Mx} = -a_A^n - a_{MA}^\tau = -30 - 0{,}6 = -30{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My} = a_A^\tau - a_{MA}^n = 0{,}6 - 90 = -89{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{(-30{,}6)^2 + (-89{,}4)^2} = 94{,}5 \text{ м/с}^2.$$

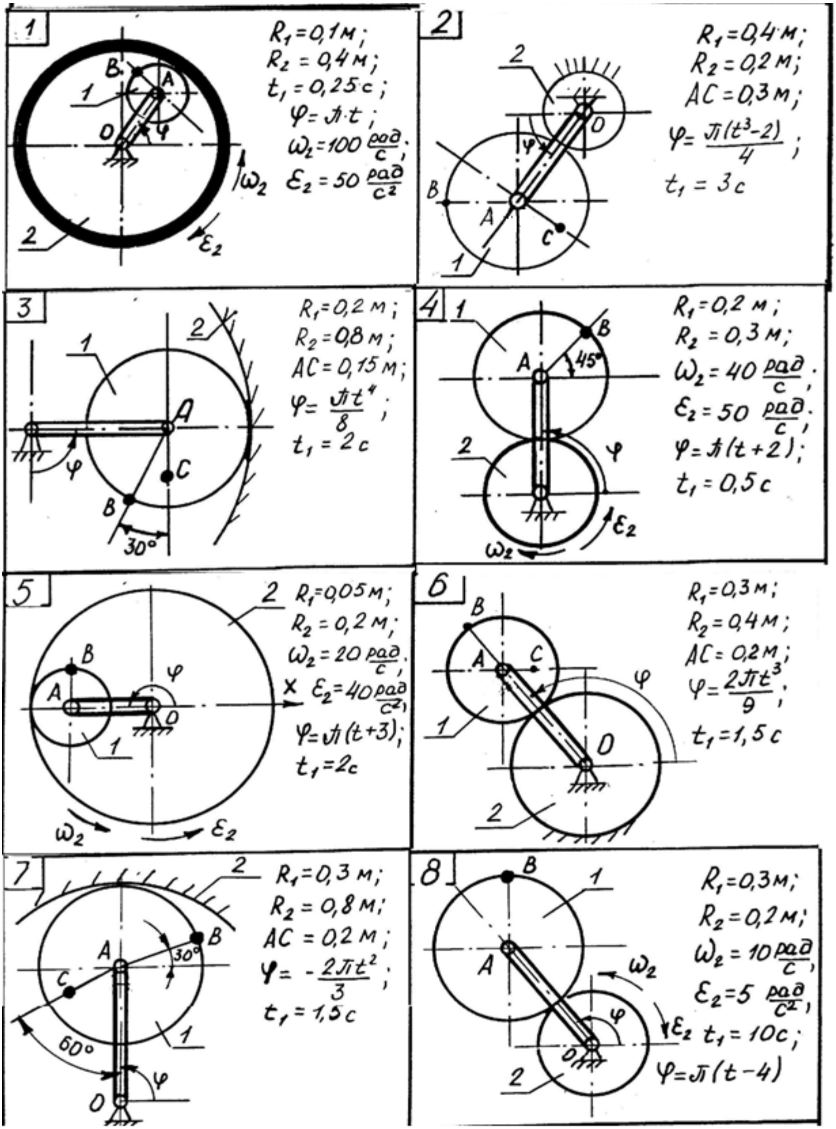

1
R₁=0,1м; R₂=0,4м; t₁=0,25с; φ=πt; ω₂=100 рад/с; ε₂=50 рад/с²
2
R₁=0,4м; R₂=0,2м; AC=0,3м; φ=π(t³−2)/4; t₁=3с
3
R₁=0,2м; R₂=0,8м; AC=0,15м; φ=πt⁴/8; t₁=2с
30°
4
R₁=0,2м; R₂=0,3м; ω₂=40 рад/с; ε₂=50 рад/с; φ=π(t+2); t₁=0,5с
45°
5
R₁=0,05м; R₂=0,2м; ω₂=20 рад/с; ε₂=40 рад/с²; φ=π(t+3); t₁=2с
6
R₁=0,3м; R₂=0,4м; AC=0,2м; φ=2πt³/9; t₁=1,5с
7
R₁=0,3м; R₂=0,8м; AC=0,2м; φ=−2πt²/3; t₁=1,5с
30°
60°
8
R₁=0,3м; R₂=0,2м; ω₂=10 рад/с; ε₂=5 рад/с²; t₁=10с; φ=π(t−4)

Рис. К3.2

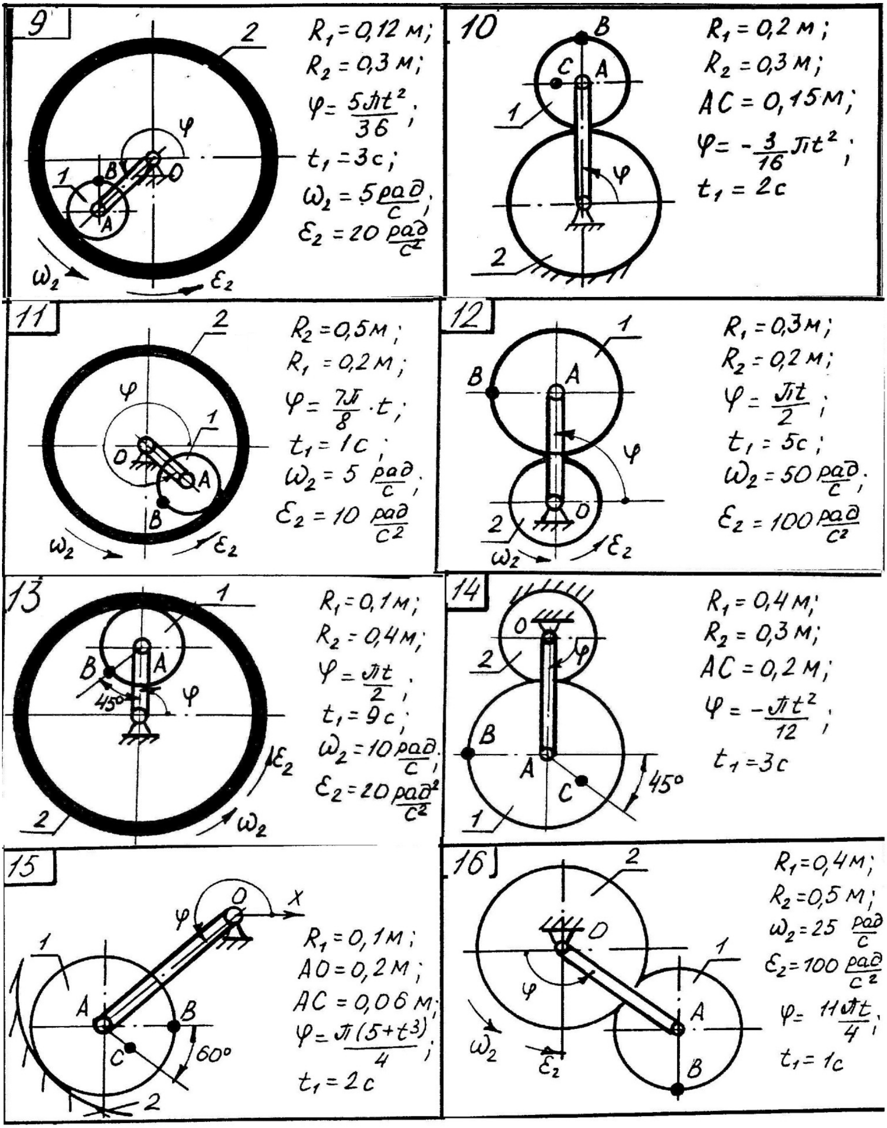

9
R1 = 0,12 м; R2 = 0,3 м; φ = 5πt²/36; t1 = 3 с; ω2 = 5 рад/с; ε2 = 20 рад/с²
10
R1 = 0,2 м; R2 = 0,3 м; AC = 0,15 м; φ = −(3/16)πt²; t1 = 2 с
11
R2 = 0,5 м; R1 = 0,2 м; φ = (7π/8)·t; t1 = 1 с; ω2 = 5 рад/с; ε2 = 10 рад/с²
12
R1 = 0,3 м; R2 = 0,2 м; φ = πt/2; t1 = 5 с; ω2 = 50 рад/с; ε2 = 100 рад/с²
13
R1 = 0,1 м; R2 = 0,4 м; φ = πt/2; t1 = 9 с; ω2 = 10 рад/с; ε2 = 20 рад/с²
45°
14
R1 = 0,4 м; R2 = 0,3 м; AC = 0,2 м; φ = −πt²/12; t1 = 3 с
45°
15
R1 = 0,1 м; AO = 0,2 м; AC = 0,06 м; φ = π(5+t³)/4; t1 = 2 с
60°
16
R1 = 0,4 м; R2 = 0,5 м; ω2 = 25 рад/с; ε2 = 100 рад/с²; φ = 11πt/4; t1 = 1 с

Рис. К3.3

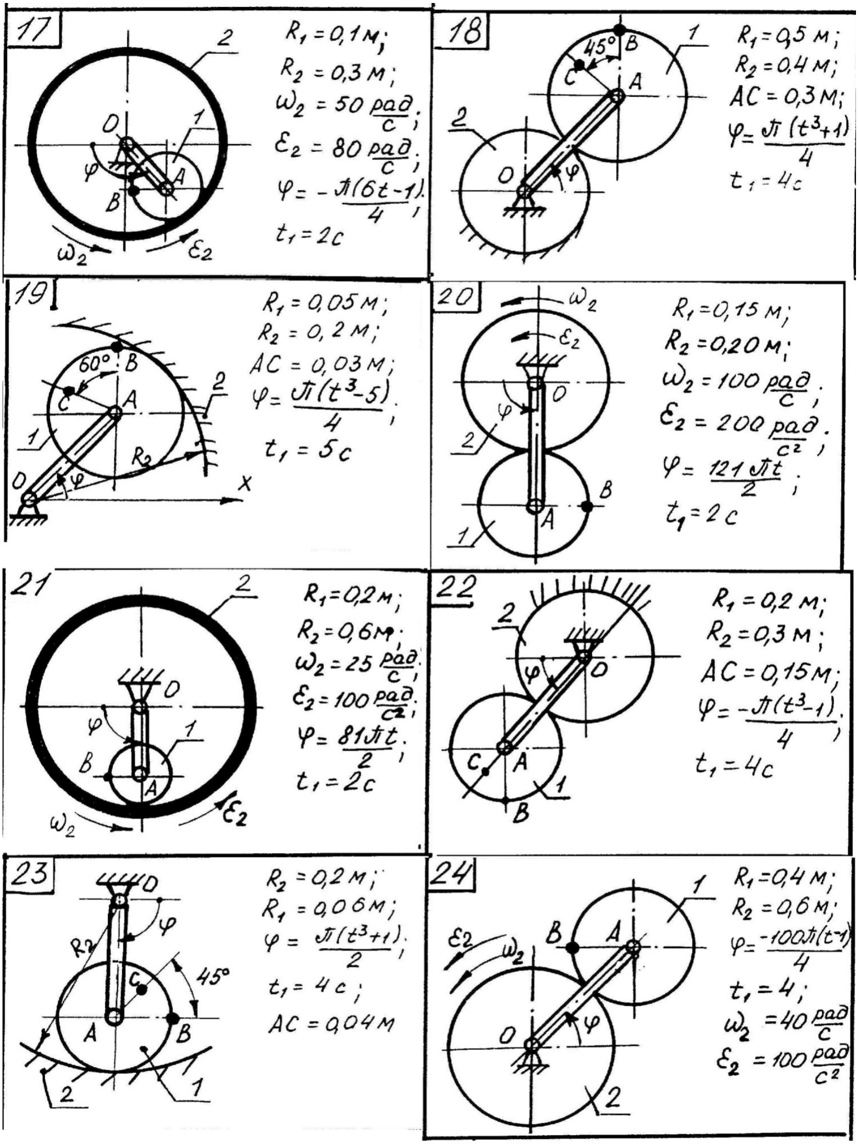

17
R₁ = 0,1 м;
R₂ = 0,3 м;
ω₂ = 50 рад/с;
ε₂ = 80 рад/с;
φ = −π(6t−1)/4;
t₁ = 2 с
18
R₁ = 0,5 м;
R₂ = 0,4 м;
AC = 0,3 м;
φ = π(t³+1)/4
t₁ = 4 с
19
R₁ = 0,05 м;
R₂ = 0,2 м;
AC = 0,03 м;
φ = π(t³−5)/4;
t₁ = 5 с
20
R₁ = 0,15 м;
R₂ = 0,20 м;
ω₂ = 100 рад/с;
ε₂ = 200 рад/с²;
φ = 121πt/2;
t₁ = 2 с
21
R₁ = 0,2 м;
R₂ = 0,6 м;
ω₂ = 25 рад/с;
ε₂ = 100 рад/с²;
φ = 81πt/2;
t₁ = 2 с
22
R₁ = 0,2 м;
R₂ = 0,3 м;
AC = 0,15 м;
φ = −π(t³−1)/4;
t₁ = 4 с
23
R₂ = 0,2 м;
R₁ = 0,06 м;
φ = π(t³+1)/2;
t₁ = 4 с;
AC = 0,04 м
24
R₁ = 0,4 м;
R₂ = 0,6 м;
φ = −100π(t−1)/4
t₁ = 4;
ω₂ = 40 рад/с
ε₂ = 100 рад/с²

Рис. К3.4

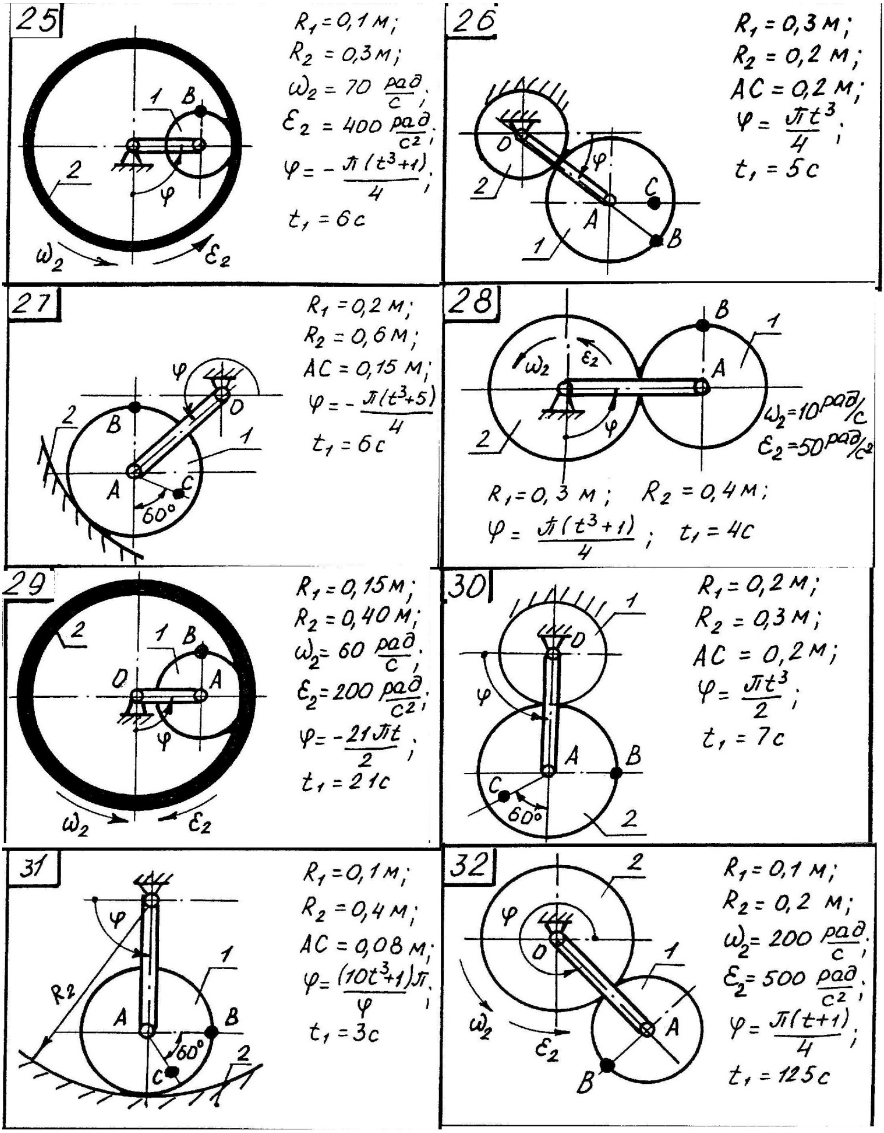

25
R1 = 0,1 м;
R2 = 0,3 м;
ω2 = 70 рад/с;
ε2 = 400 рад/с²;
φ = −π(t³+1)/4;
t1 = 6с
1
B
2
φ
ω2
ε2
26
R1 = 0,3 м;
R2 = 0,2 м;
AC = 0,2 м;
φ = πt³/4;
t1 = 5с
O
φ
C
2
A
B
1
27
R1 = 0,2 м;
R2 = 0,6 м;
AC = 0,15 м;
φ = −π(t³+5)/4
t1 = 6с
φ
O
2
B
1
A
C
60°
28
B
1
ω2
ε2
A
2
φ
ω2 = 10 рад/с
ε2 = 50 рад/с²
R1 = 0,3 м; R2 = 0,4 м;
φ = π(t³+1)/4; t1 = 4с
29
R1 = 0,15 м;
R2 = 0,40 м;
ω2 = 60 рад/с;
ε2 = 200 рад/с²;
φ = −21πt/2;
t1 = 21с
2
1
B
O
A
φ
ω2
ε2
30
R1 = 0,2 м;
R2 = 0,3 м;
AC = 0,2 м;
φ = πt³/2;
t1 = 7с
1
O
φ
A
B
C
60°
2
31
R1 = 0,1 м;
R2 = 0,4 м;
AC = 0,08 м;
φ = (10t³+1)π/4
t1 = 3с
φ
R2
1
A
B
60°
C
2
32
R1 = 0,1 м;
R2 = 0,2 м;
ω2 = 200 рад/с;
ε2 = 500 рад/с²;
φ = π(t+1)/4;
t1 = 125 с
2
φ
O
1
ω2
ε2
A
B

Рис. К3.5

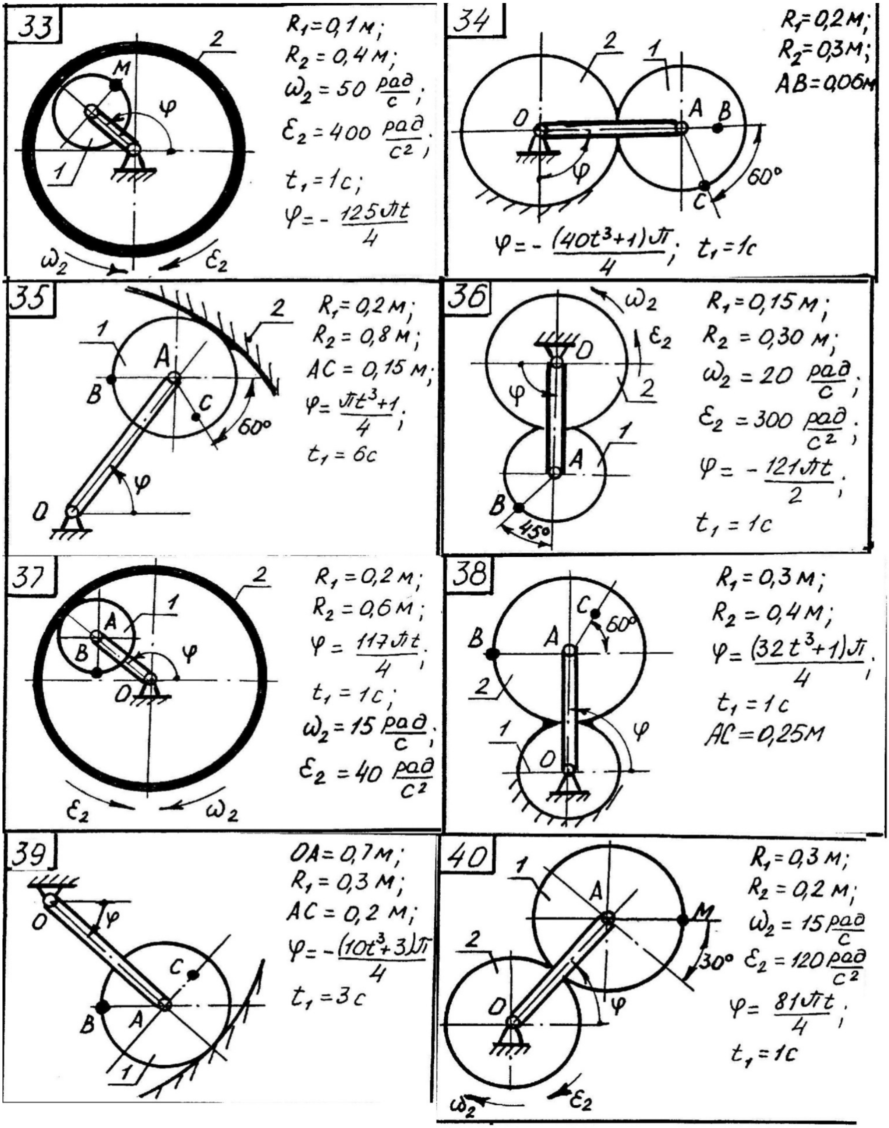

33
R1=0,1 м;
R2 = 0,4 м;
ω2 = 50 рад/с;
ε2 = 400 рад/с²;
t1=1с;
φ= - 125πt/4
M
φ
1
2
ω2
ε2
34
R1=0,2м;
R2=0,3м;
AB=0,06м
O
A
B
C
1
2
φ
60°
φ = - (40t³+1)π/4; t1=1с
35
R1= 0,2 м;
R2 = 0,8 м;
AC = 0,15 м;
φ= (πt³+1)/4;
t1 = 6с
A
B
C
O
1
2
60°
φ
36
ω2
ε2
R1 = 0,15 м;
R2 = 0,30 м;
ω2 = 20 рад/с;
ε2 = 300 рад/с²;
φ= - 121πt/2;
t1 = 1с
O
A
B
1
2
φ
45°
37
R1 = 0,2 м;
R2 = 0,6 м;
φ = 117πt/4;
t1 = 1с;
ω2 = 15 рад/с;
ε2 = 40 рад/с²
A
B
O
1
2
φ
ε2
ω2
38
R1 = 0,3 м;
R2 = 0,4м;
φ= (32t³+1)π/4;
t1 = 1с
AC=0,25м
A
B
C
O
1
2
60°
φ
39
OA= 0,7м;
R1 = 0,3 м;
AC = 0,2 м;
φ= -(10t³+3)π/4
t1 =3с
O
A
B
C
1
φ
40
R1 = 0,3 м;
R2 = 0,2 м;
ω2 = 15 рад/с
ε2 = 120 рад/с²
φ= 81πt/4;
t1 =1с
A
M
O
1
2
30°
φ
ω2
ε2

Рис. К3.6

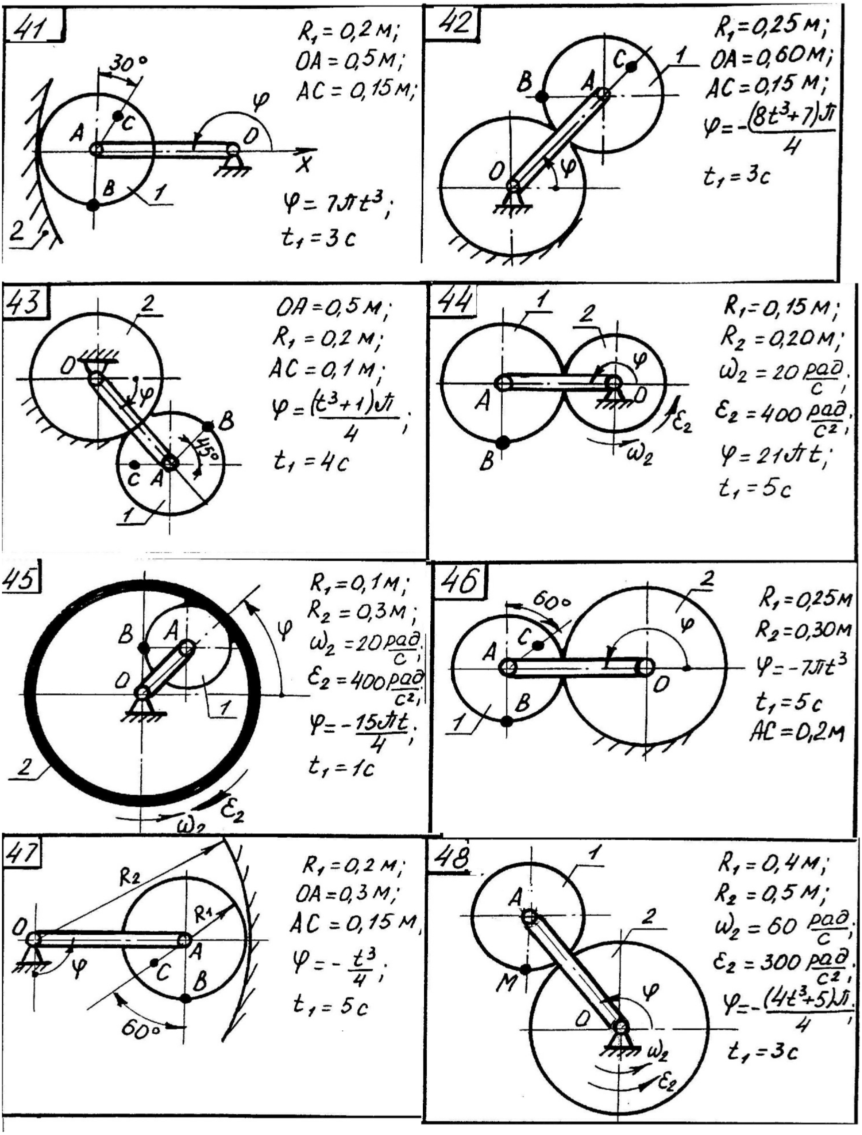

41
R1 = 0,2 м;
OA = 0,5 м;
AC = 0,15 м;
φ = 7πt³;
t1 = 3 c
30°
A
C
B
1
2
O
φ
X
42
R1=0,25 м;
OA=0,60 м;
AC=0,15 м;
φ=-(8t³+7)π/4
t1 = 3c
B
A
C
1
O
φ
43
OA=0,5 м;
R1 = 0,2 м;
AC=0,1 м;
φ=(t³+1)π/4;
t1 =4c
2
O
φ
B
45°
C
A
1
44
R1=0,15 м;
R2 =0,20 м;
ω2 = 20 рад/c;
ε2 = 400 рад/c²;
φ=21πt;
t1 =5c
1
2
φ
A
O
B
ε2
ω2
45
R1=0,1 м;
R2 =0,3 м;
ω2 =20 рад/c;
ε2=400 рад/c²;
φ=-15πt/4;
t1 =1c
B
A
O
φ
1
2
ε2
ω2
46
R1=0,25 м
R2=0,30 м
φ=-7πt³
t1=5c
AC=0,2 м
60°
2
C
A
φ
O
B
1
47
R1 = 0,2 м;
OA=0,3 м;
AC = 0,15 м;
φ = -t³/4;
t1 = 5c
R2
R1
O
A
φ
C
B
60°
48
R1 = 0,4 м;
R2 = 0,5 м;
ω2 = 60 рад/c;
ε2 = 300 рад/c²;
φ=-(4t³+5)π/4;
t1 =3c
1
A
2
M
φ
O
ω2
ε2

Рис. К3.7

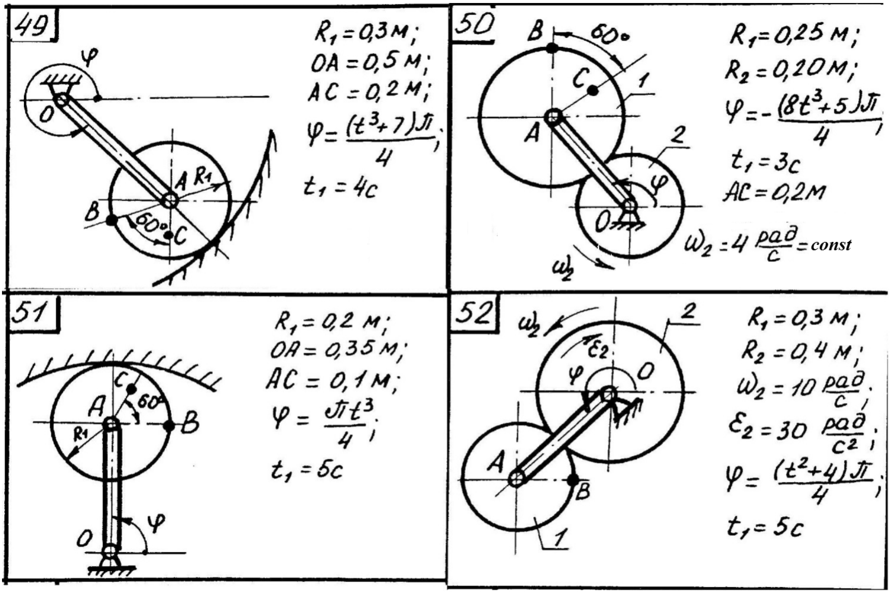


Рис. К3.8

ЗАДАНИЕ К4

Кинематический анализ плоского рычажного механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения всех точек, обозначенных на рис. К4.1, а также угловую скорость и угловое ускорение звеньев, которым эти точки принадлежат. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные представлены на рис. К4.3–К4.9.

Пример выполнения задания

Задача

На рис. К4.1 показана кинематическая схема механизма, состоящего из кривошипа *AB*, вращающегося с заданной угловой скоростью $\omega_{AB} = 20\ c^{-1} = \text{const}$, шатуна *BC* и коромысла *CD*. Все звенья соединены между собой при помощи цилиндрических шарниров. Требуется определить скорость и ускорение шарнира C в указанном на рисунке положении механизма. Длины звеньев указаны на рисунке в метрах.

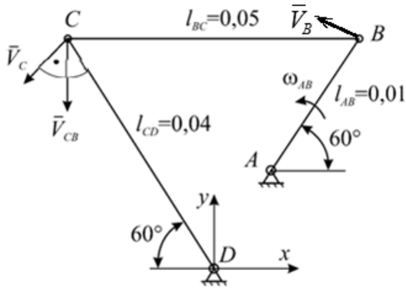


Рис. К4.1

Решение

Точка C принадлежит коромыслу CD, совершающему вращательное движение. Следовательно, вектор $\bar{V}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CD и равен по модулю

$$V_C = \omega_{CD} \cdot l_{CD}.$$

Так как угловая скорость ω_{CD} неизвестна, то из этой формулы невозможно определить модуль вектора $\bar{V}_C$.

Вместе с тем точка C принадлежит и телу CB, совершающему плоское движение, поэтому, приняв точку B за полюс, можно записать следующее векторное уравнение:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}. \quad \text{(К4.1)}$$

Вектор $\bar{V}_{CB}$ направлен перпендикулярно прямой BC (рис. К4.1), а скорость $\bar{V}_B$ точки B, принадлежащей одновременно вращающемуся телу AB, направлена перпендикулярно отрезку AB и равна по модулю:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot l_{AB} = 20 \cdot 0,01 = 0,2 \text{ м/с}.$$

Таким образом, вектор $\bar{V}_B$ известен полностью, а остальные два вектора – только по направлению. Спроектировав уравнение (К4.1) на оси Dx и Dy, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -V_C \cos 30° &= -V_B \cos 30° + 0, \\ -V_C \cos 60° &= V_B \cos 60° - V_{CB}. \end{aligned} \quad \text{(К4.2)}$$

Из первого уравнения системы (К4.2) находим, что модуль искомой скорости $V_C = V_B = 0,05$ м/с. Направление вектора $\bar{V}_C$ указано на рисунке верно, так как в результате решения оказалось, что $V_C > 0$.

Для определения угловых скоростей звеньев CD и BC воспользуемся формулой

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{l_{CD}} = \frac{0,2}{0,04} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость ω_{CD} направлена против часовой стрелки (направление вращения вектора $\bar{V}_C$ вокруг оси D).

Так как при плоском движении $V_{CB} = \omega_{BC} l_{BC}$, то из второго уравнения системы (К4.2) находим V_{CB}:

$$V_{CB} = (V_B + V_C)\cos 60° = (0,2 + 0,2)\cos 60° = 0,2 \text{ м/с}$$

и

$$\omega_{BC} = \frac{V_{CB}}{l_{BC}} = \frac{0,2}{0,05} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость ω_{BC} направлена против часовой стрелки (направление вращения вектора $\bar{V}_{CB}$ вокруг полюса B).

Для проверки полученных результатов определим скорость точки C, используя понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Для нахождения МЦС для шатуна CB необходимо знать направление скоростей двух точек этого тела. Вектор скорости $\vec{V}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CD. Вектор скорости $\vec{V}_B$ направлен перпендикулярно кривошипу AB и по модулю известен:

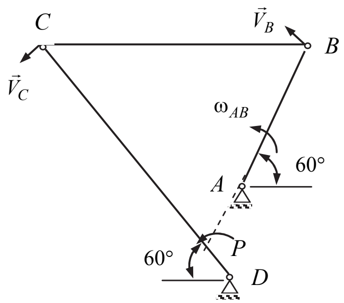
$$V_B = \omega_{AB} \cdot l_{AB} = 0,2 \text{ м/с.}$$

Проводим перпендикуляры к векторам $\bar{V}_C$ и $\bar{V}_B$ до их пересечения. Обозначим точку пересечения перпендикуляров P. Точка P является МЦС для отрезка CB в данный момент времени. Запишем угловую скорость отрезка СВ через скорости $\bar{V}_C$ и $\bar{V}_B$:

$$\omega_{CB} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Направление угловой скорости ω_{CB} определяется направлением вектора скорости $\bar{V}_B$. В данном случае угловая скорость ω_{CB} направлена против хода часовой стрелки со стороны точки P (МЦС).

Треугольник СВР является равносторонним. Значит, $CP = BP = 0{,}05$ и $V_C = V_B = 0{,}2$ м/с. Угловая скорость $\omega_{CB} = \dfrac{V_C}{CP} = \dfrac{0{,}2}{0{,}05} = 4$ рад/с.



Видно, что результаты получились те же, что и при решении первым способом.

Определение ускорений

Точка C принадлежит звену CD, совершающему вращательное движение:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau, \qquad \text{(К4.3)}$$

где $a_C^n = \omega_{CD}^2 \cdot l_{CD} = 5^2 \cdot 0{,}04 = 1$ м/с^2, а вектор $\overline{a}_C^\tau$ известен только по направлению (рис. К4.2), так как $a_C^\tau = \varepsilon_{CD} \cdot l_{CD}$ и неизвестен модуль ε_{CD}.

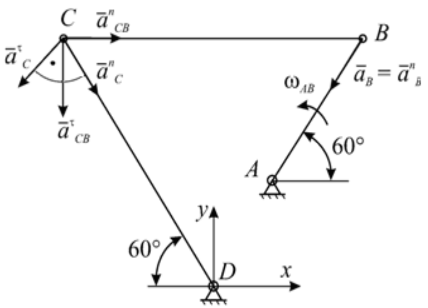


Рис. К4.2

Точка C принадлежит одновременно звену BC, совершающему плоское движение:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^n + \overline{a}_{CB}^\tau, \qquad \text{(К4.4)}$$

где $a_{CB}^n = \omega^2 l_{CB} = 4^2 \cdot 0{,}05 = 0{,}8$ м/с^2 и $a_{CB}^\tau = \varepsilon_{CB} \cdot l_{CB}$ ($\overline{a}_{CB}^\tau$ известен только по направлению, так как значение ε_{CB} неизвестно). Из системы уравнений (К4.3) и (К4.4) получаем

$$\overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^n + \overline{a}_{CB}^\tau. \qquad \text{(К4.5)}$$

Точка B принадлежит вращающемуся телу AB и $a_B^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB} = 0$, так как $\omega_{AB} = \mathrm{const}$, то $\varepsilon_{AB} = 0$.

В уравнении (К4.5) векторы $\overline{a}_C^n$, $\overline{a}_B$ и $\overline{a}_{CB}^n$ известны как по модулю, так и по направлению, а векторы $\overline{a}_C^\tau$ и $\overline{a}_{CB}^\tau$ – только по направлению. Спроектировав уравнение (К4.5) на оси координат, получим два уравнения для нахождения модулей векторов $\overline{a}_C^\tau$ и $\overline{a}_{CB}^\tau$. Для решения поставленной задачи достаточно найти только $\overline{a}_C^\tau$, поэтому, спроектировав уравнение (К4.5) на ось Dx, получим

$$a_C^n \cos 60° - a_C^\tau \cos 30° = -a_B \cos 60° + a_{CB}^n ,$$

откуда

$$a_C^\tau = \frac{\left(a_C^n + a_B\right)\cos 60° - a_{CB}^n}{\cos 30°} = \frac{(1+4)0,5-0,8}{\cos 30°} = 1,96 \text{ м/с}^2 .$$

Теперь в правой части уравнения (К4.3) оба вектора известны и по модулю, и по направлению. Спроектировав это уравнение на оси координат, найдем проекции искомого вектора на неподвижные оси Dy и Dx.

Спроектировав уравнение (К4.5) на ось Dy, можно определить модуль вектора $\overline{a}_{CB}^\tau$, что, в свою очередь, позволяет при необходимости найти угловое ускорение звена BC, так как

$$a_{CB}^\tau = \varepsilon_{CB} \cdot l_{CB} ;$$

$$-a_C^n \cos 30° - a_C^\tau \cos 60° = -a_B \cos 30° - a_{CB}^\tau .$$

Отсюда $a_{CB}^\tau = -1,62 \text{ м/с}^2$.

Знак «–» означает, что вектор $\overline{a}_{CB}^\tau$ имеет направление, противоположное тому, которое показано на рис. К4.2.

Угловое ускорение шатуна CB равно $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{l_{CB}} = \dfrac{1,62}{0,05} = 32,4 \text{ с}^{-2}$ и направлено по часовой стрелке.

В полном объеме теоретические основы кинематики изложены в учебниках (см. библиографический список).

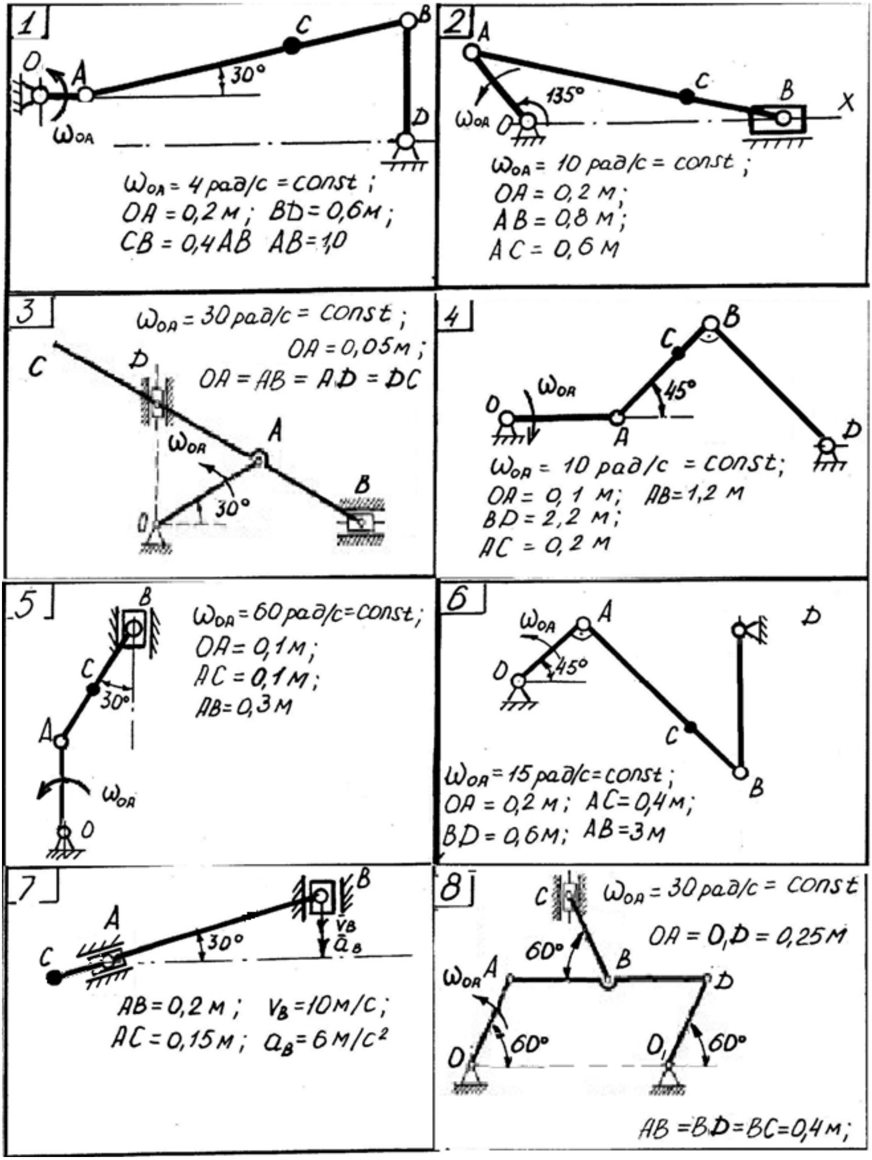

1
O
A
C
B
D
30°
ωOA
ωOA = 4 рад/с = const ;
OA = 0,2 м ; BD = 0,6м ;
CB = 0,4AB AB = 1,0
2
A
C
B
X
135°
ωOA O
ωOA = 10 рад/с = const ;
OA = 0,2 м ;
AB = 0,8 м ;
AC = 0,6 м
3
ωOA = 30 рад/с = const ;
OA = 0,05м ;
OA = AB = AD = DC
C
D
A
ωOA
B
30°
O
4
B
C
ωOA
45°
O
A
D
ωOA = 10 рад/с = const;
OA = 0,1 м; AB = 1,2 м
BD = 2,2 м ;
AC = 0,2 м
5
B
ωOA = 60 рад/с = const;
OA = 0,1м ;
AC = 0,1м ;
AB = 0,3 м
C
30°
A
ωOA
O
6
ωOA
A
D
O
45°
C
B
ωOA = 15 рад/с = const ;
OA = 0,2 м ; AC = 0,4 м ;
BD = 0,6м ; AB = 3 м
7
B
A
$\bar{V}_B$
$\bar{a}_B$
C
30°
AB = 0,2 м ; V_B = 10 м/с ;
AC = 0,15 м ; a_B = 6 м/с²
8
C
ωOA = 30 рад/с = const
OA = O₁D = 0,25 м
60°
B
ωOA A
D
O
60°
O₁
60°
AB = BD = BC = 0,4 м ;

Рис. К4.3

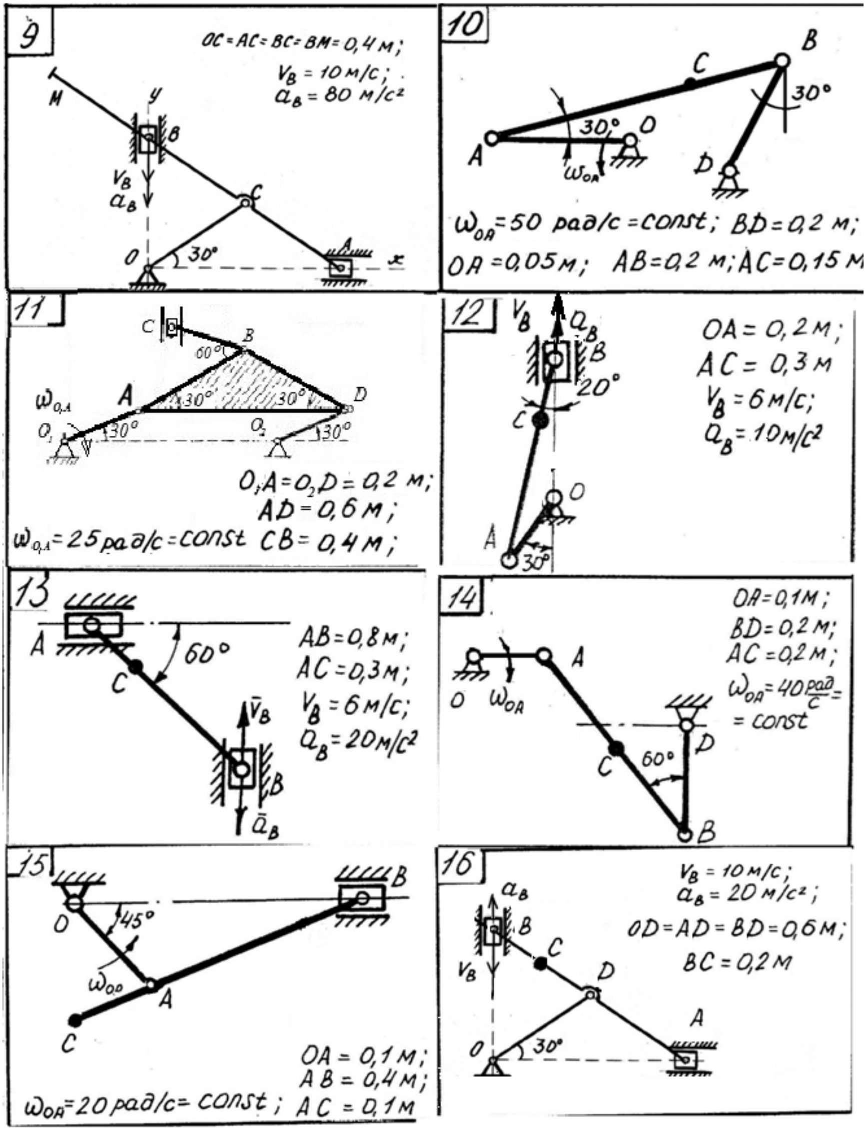

9
OC = AC = BC = BM = 0,4 м;
V_B = 10 м/с;
a_B = 80 м/с²
M
y
B
V_B
a_B
C
O
30°
A
x
10
B
C
30°
30°
O
A
ω_OA
D
ω_OA = 50 рад/с = const; BD = 0,2 м;
OA = 0,05 м; AB = 0,2 м; AC = 0,15 м
11
C
B
60°
ω_O1A
A
30°
30°
D
O1
30°
O2
30°
O1A = O2D = 0,2 м;
AD = 0,6 м;
ω_O1A = 25 рад/с = const CB = 0,4 м;
12
V_B
a_B
B
20°
C
O
A
30°
OA = 0,2 м;
AC = 0,3 м
V_B = 6 м/с;
a_B = 10 м/с²
13
A
60°
C
V_B
B
a_B
AB = 0,8 м;
AC = 0,3 м;
V_B = 6 м/с;
a_B = 20 м/с²
14
O
ω_OA
A
C
60°
D
B
OA = 0,1 м;
BD = 0,2 м;
AC = 0,2 м;
ω_OA = 40 рад/с = const
15
B
O
45°
ω_OA
A
C
OA = 0,1 м;
AB = 0,4 м;
ω_OA = 20 рад/с = const; AC = 0,1 м
16
V_B = 10 м/с;
a_B = 20 м/с²;
a_B
B
C
V_B
D
OD = AD = BD = 0,6 м;
BC = 0,2 м
A
O
30°

Рис. К4.4

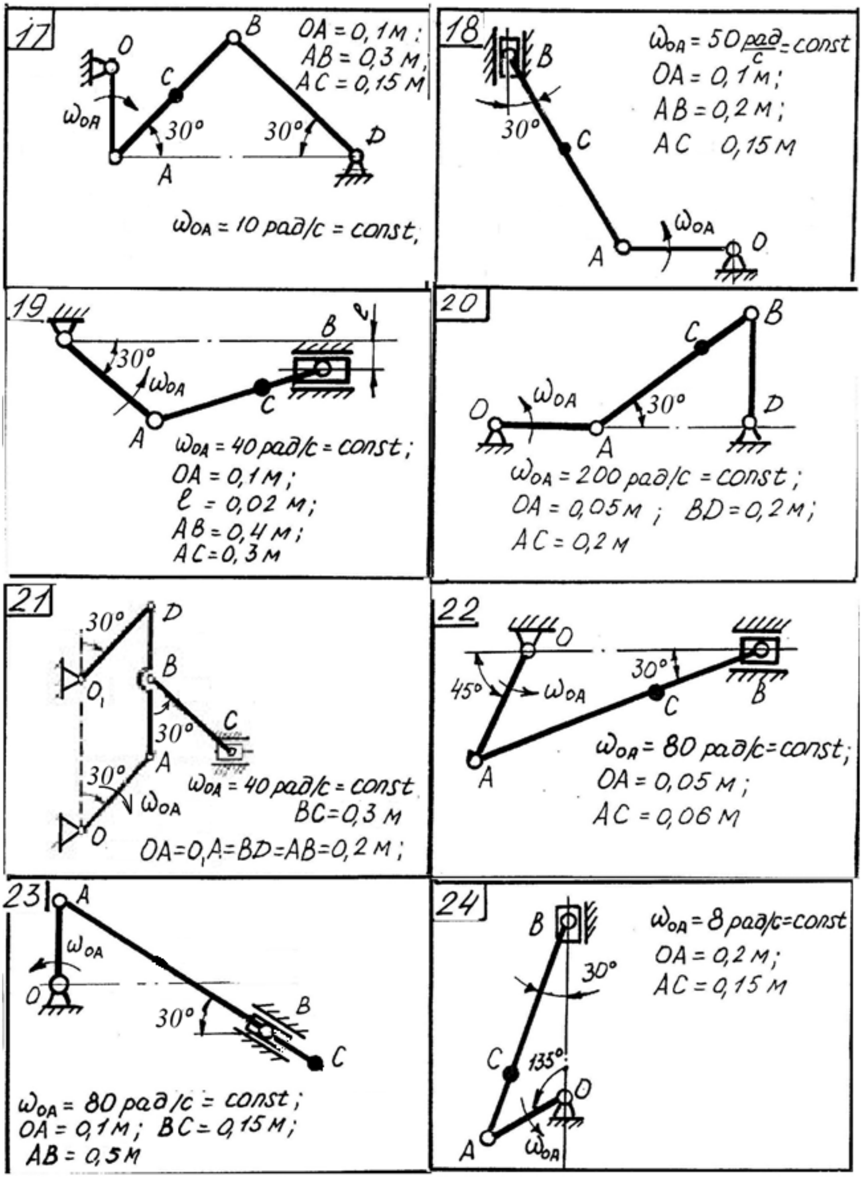

17
OA = 0,1 м;
AB = 0,3 м;
AC = 0,15 м
O
B
C
ωOA
30°
30°
D
A
ωOA = 10 рад/с = const,
18
ωOA = 50 рад/с = const
OA = 0,1 м;
AB = 0,2 м;
AC 0,15 м
B
30°
C
ωOA
A
O
19
B
ℓ
30°
ωOA
C
A
ωOA = 40 рад/с = const;
OA = 0,1 м;
ℓ = 0,02 м;
AB = 0,4 м;
AC = 0,3 м
20
B
C
ωOA
30°
D
O
A
ωOA = 200 рад/с = const;
OA = 0,05 м; BD = 0,2 м;
AC = 0,2 м
21
30°
D
B
O1
C
30°
A
30°
ωOA
ωOA = 40 рад/с = const
BC = 0,3 м
O
OA = O1A = BD = AB = 0,2 м;
22
O
45°
ωOA
30°
C
B
A
ωOA = 80 рад/с = const;
OA = 0,05 м;
AC = 0,06 м
23
A
ωOA
O
30°
B
C
ωOA = 80 рад/с = const;
OA = 0,1 м; BC = 0,15 м;
AB = 0,5 м
24
B
ωOA = 8 рад/с = const
OA = 0,2 м;
AC = 0,15 м
30°
C
135°
O
A
ωOA

Рис. К4.5

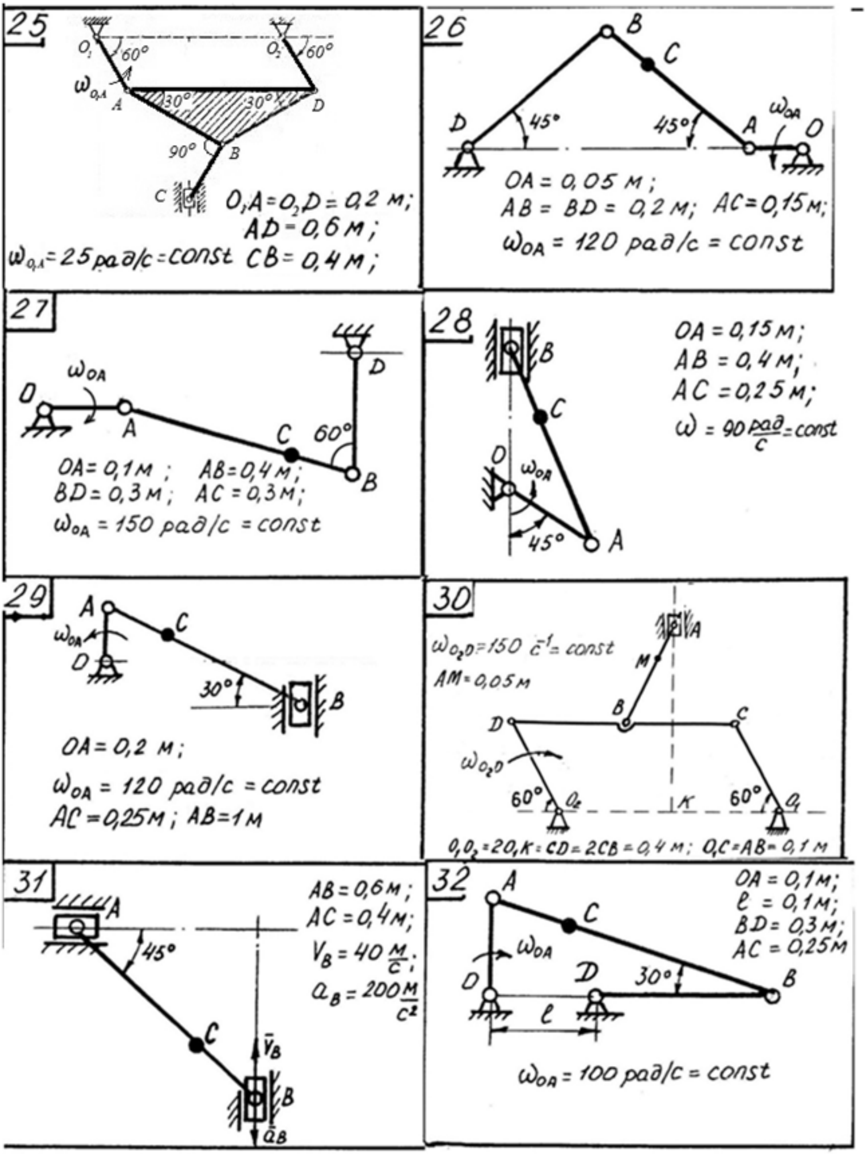

25
O₁A=O₂D=0,2 м;
AD=0,6 м;
ω₀₁A=25 рад/с=const CB=0,4 м;
26
OA = 0,05 м;
AB = BD = 0,2 м; AC=0,15 м;
ω_OA = 120 рад/с = const
27
OA=0,1 м; AB=0,4 м;
BD=0,3 м; AC=0,3 м;
ω_OA = 150 рад/с = const
28
OA = 0,15 м;
AB = 0,4 м;
AC = 0,25 м;
ω = 90 рад/с = const
29
OA=0,2 м;
ω_OA = 120 рад/с = const
AC=0,25 м; AB=1 м
30
ω_O₂D=150 с⁻¹= const
AM=0,05 м
O₁O₂=2O₁K=CD=2CB=0,4 м; O₁C=AB=0,1 м
31
AB=0,6 м;
AC=0,4 м;
V_B = 40 м/с;
a_B = 200 м/с²
32
OA = 0,1 м;
ℓ = 0,1 м;
BD= 0,3 м;
AC = 0,25 м
ω_OA = 100 рад/с = const

Рис. К4.6

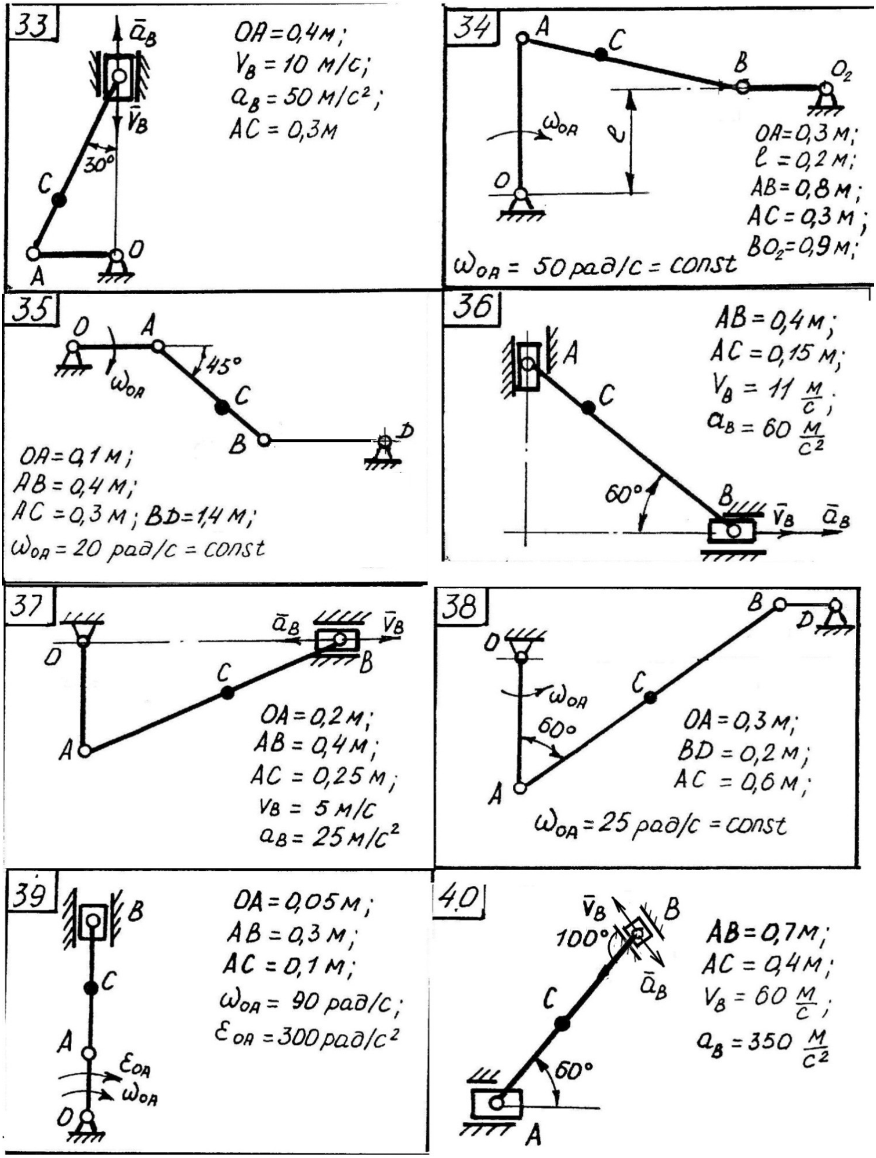

33
OA=0,4м;
V_B = 10 м/с;
a_B = 50 м/с²;
AC = 0,3м
30°
34
OA=0,3 м;
ℓ = 0,2 м;
AB=0,8 м;
AC=0,3 м;
BO₂=0,9 м;
ω_OA = 50 рад/с = const
35
OA=0,1 м;
AB=0,4 м;
AC=0,3 м; BD=1,4 м;
ω_OA = 20 рад/с = const
45°
36
AB=0,4 м;
AC=0,15 м;
V_B = 11 м/с;
a_B = 60 м/с²
60°
37
OA=0,2 м;
AB=0,4 м;
AC=0,25 м;
V_B = 5 м/с
a_B = 25 м/с²
38
OA=0,3 м;
BD=0,2 м;
AC=0,6 м;
ω_OA = 25 рад/с = const
60°
39
OA=0,05 м;
AB=0,3 м;
AC=0,1 м;
ω_OA = 90 рад/с;
ε_OA = 300 рад/с²
40
AB=0,7 м;
AC=0,4 м;
V_B = 60 м/с;
a_B = 350 м/с²
100°
60°

Рис. К4.7

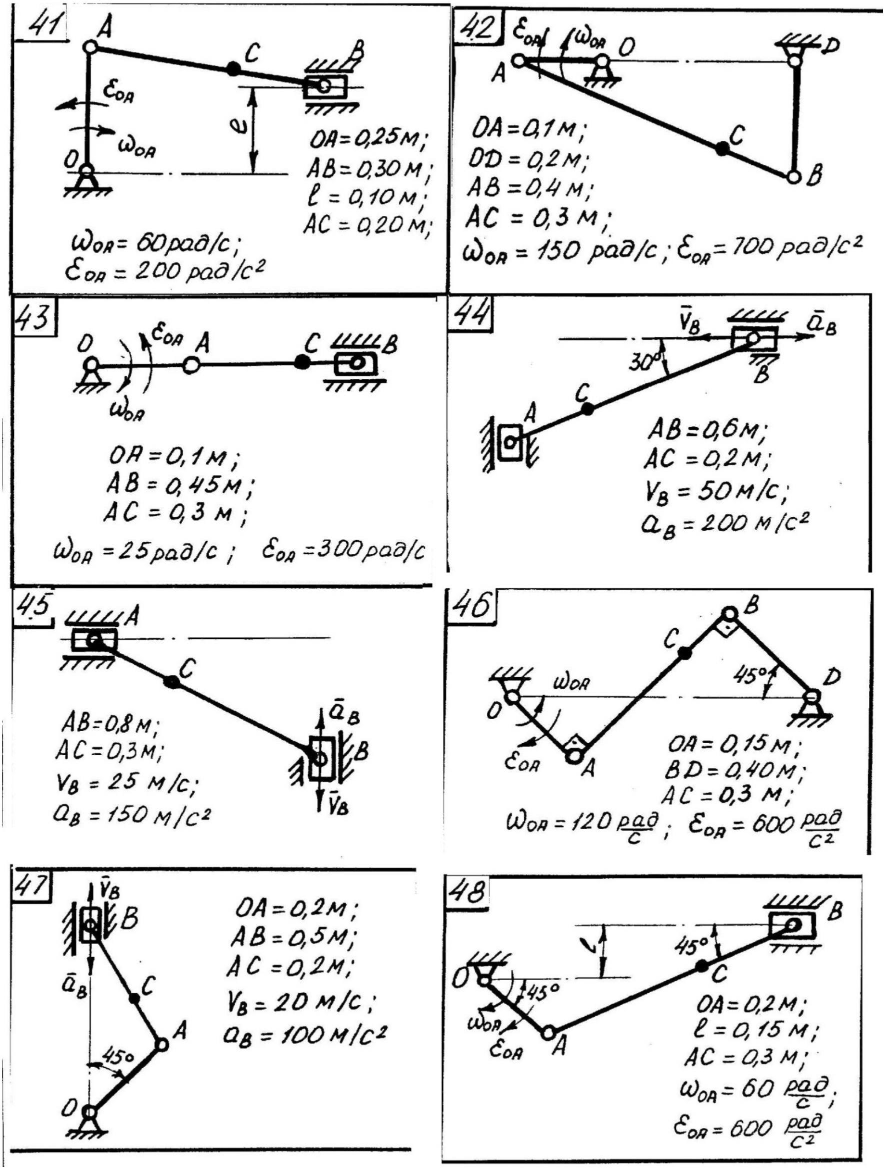

41
A
C
B
ε_OA
ω_OA
O
e
OA=0,25 м;
AB=0,30 м;
ℓ = 0,10 м;
AC = 0,20 м;
ω_OA= 60 рад/с;
ε_OA = 200 рад/с²
42
ε_OA
ω_OA
O
D
A
OA = 0,1 м;
OD = 0,2 м;
AB = 0,4 м;
AC = 0,3 м;
C
B
ω_OA = 150 рад/с; ε_OA = 700 рад/с²
43
O
ε_OA
A
C
B
ω_OA
OA = 0,1 м;
AB = 0,45 м;
AC = 0,3 м;
ω_OA = 25 рад/с; ε_OA = 300 рад/с
44
V̄_B
ā_B
30°
B
C
A
AB=0,6 м;
AC = 0,2 м;
V_B = 50 м/с;
a_B = 200 м/с²
45
A
C
ā_B
B
V̄_B
AB=0,8 м;
AC=0,3 м;
V_B = 25 м/с;
a_B = 150 м/с²
46
B
C
45°
D
ω_OA
O
ε_OA
A
OA = 0,15 м;
BD = 0,40 м;
AC = 0,3 м;
ω_OA = 120 рад/с; ε_OA = 600 рад/с²
47
V̄_B
B
ā_B
C
A
45°
O
OA = 0,2 м;
AB = 0,5 м;
AC = 0,2 м;
V_B = 20 м/с;
a_B = 100 м/с²
48
B
ℓ
45°
C
O
45°
ω_OA
ε_OA
A
OA = 0,2 м;
ℓ = 0,15 м;
AC = 0,3 м;
ω_OA = 60 рад/с;
ε_OA = 600 рад/с²

Рис. К4.8

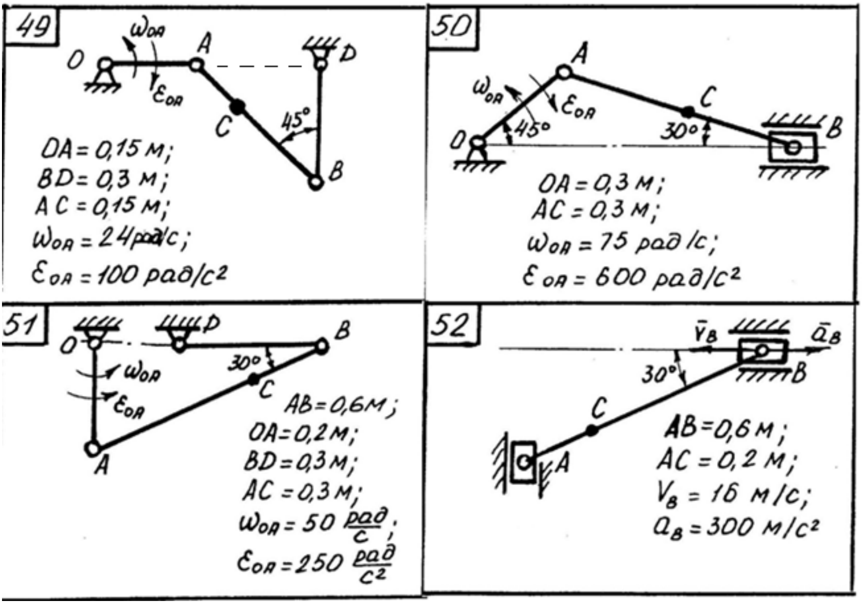


Рис. К4.9

ЗАДАНИЕ К5

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка M движется с постоянной относительной скоростью $V_{\text{отн}}$ по телу, которое совершает вращательное движение в плоскости, рис. К5.2–К5.8. В момент времени, соответствующий положению механизма, показанного на рисунках, заданы угловая скорость и угловое ускорение (или задан закон движения). Необходимо определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов показаны на рис. К5.2–К5.8

Пример выполнения задания

Задача

Точка M движется по закону $OM = 2t^2$ вдоль трубки OD, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к оси Oz. Трубка OD и ось Ox_1 вращаются вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ с$^{-1}$. Требуется определить скорость и ускорение точки M в неподвижной системе координат $Oxyz$ в момент времени $t = 1$ с. В этом случае движение точки удобно представить как сложное, состоящее из двух простых движений: прямолинейного относительного движения вдоль оси Ox_1 и переносного движения, т. е. вращательного движения вместе с трубкой OD.

Абсолютным движением будет движение точки относительно системы координат, принятой в качестве неподвижной (xyz).

Относительным движением считаем движение точки по отношению к подвижной системе координат: движение точки по трубке OD.

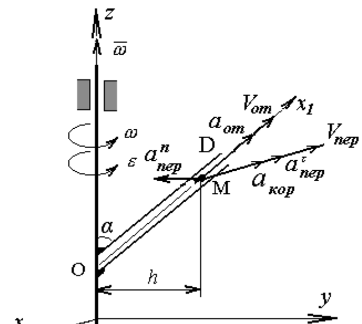


Рис. К5.1

Для определения относительной скорости и ускорения следует мысленно остановить переносное движение, а для определения переносной скорости и ускорения следует мысленно остановить относительное движение.

Относительное движение точки M является прямолинейным, поэтому относительная скорость $V_{\text{от}} = \dot{x}_1 = 4t$, при $t = 1$ с $V_{\text{от}} = 4$ м/с. Относительное ускорение $a_{\text{от}} = \ddot{x}_1 = 4$ м/с^2. Скорость и ускорение направлены вдоль оси Ox_1 (рис. К5.1).

Абсолютное ускорение равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c \,.$$

Переносное движение – движение подвижной системы координат относительно неподвижной: вращение трубки *OD* относительно оси *Oz*. Переносная скорость точки *M* – это скорость той точки трубки *OD*, которая совпадает в данный момент с движущейся точкой *M*. Так как трубка *OD* совершает вращательное движение, то переносная скорость и переносное ускорение определяют как скорость, так и ускорение точки *M* вращающегося тела. Таким образом, переносная скорость направлена параллельно оси *Ox* и перпендикулярно плоскости *yOz*, $V_{\text{пер}} = \omega h$, $h = OM\sin\alpha$, или $V_{\text{пер}} = \omega 2t^2 \sin 30°$. При $t = 1$ с $V_{\text{пер}} = 2$ м/с. Так как переносная и относительная скорости взаимно перпендикулярны, то $V_{\text{абс}} = \sqrt{\overline{V}_{\text{от}}^2 + \overline{V}_{\text{пер}}^2}$.

Переносное ускорение точки *M* как ускорение точки вращающегося тела раскладывается на два вектора: $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$, который направлен параллельно оси *Ox*, и $a_{\text{пер}}^{n}$, направленный от точки *M* к оси вращения *Oz*:

$a_{\text{пер}}^{\tau} = \varepsilon h = 0$, так как угловая скорость постоянная и $\varepsilon = 0$;

$a_{\text{пер}}^{n} = \omega^2 h$, при $t = 1$ с $a_{\text{пер}}^{n} = \omega^2 h = 4$ м/с^2.

Кориолисово ускорение $a_{\text{кор}} = 2\left|\omega_{\text{пер}}\right|\left|V_{\text{от}}\right|\sin\alpha = 8$ м/с^2. Модуль абсолютного ускорения находим путем проецирования вектора абсолютного ускорения на оси *x*, *y*, *z*:

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-a_{\text{кор}})^2 + \left(-a_{\text{пер}}^{n} + a_{\text{от}}\sin\alpha\right)^2 + (a_{\text{от}}\cos\alpha)^2} \approx 8,4.$$

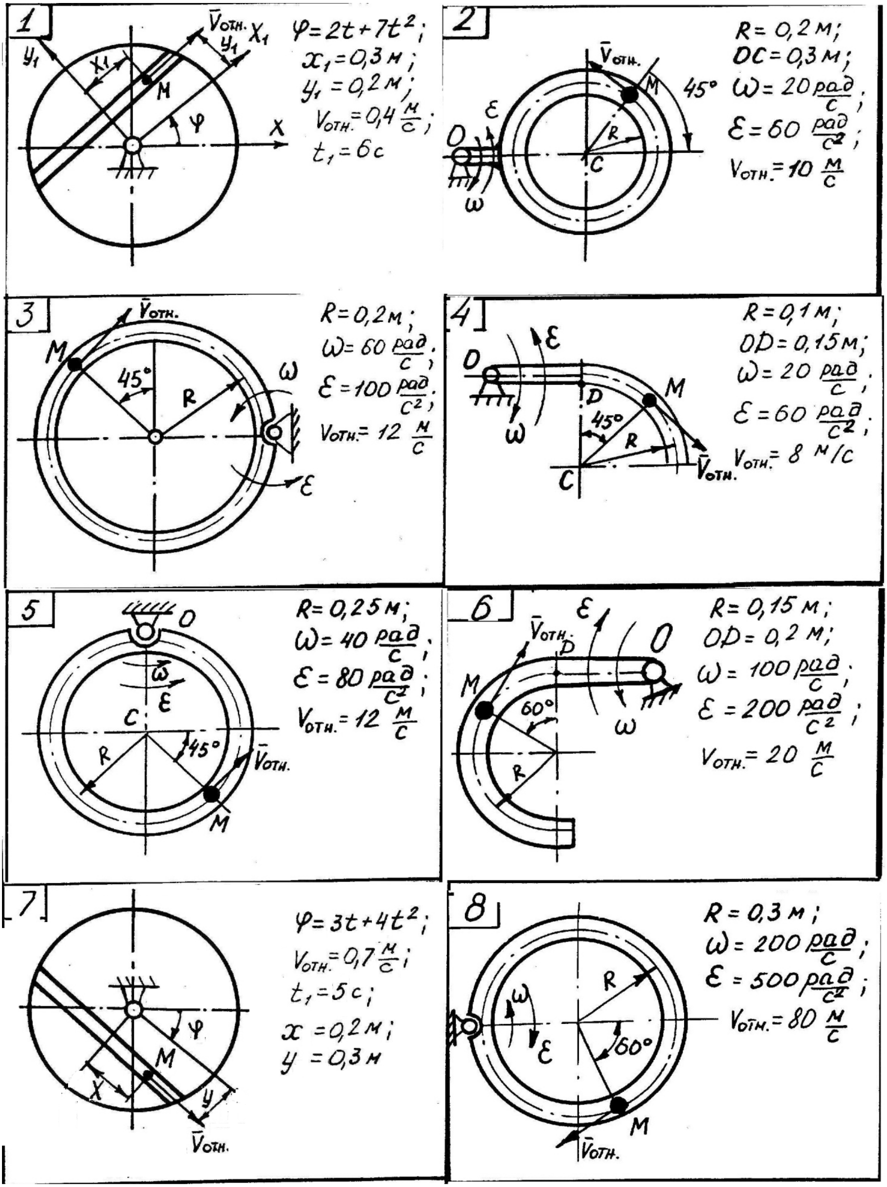

1
φ=2t+7t²;
x₁=0,3 м;
y₁=0,2 м;
Vотн.=0,4 м/с;
t₁=6с
V̄отн.
X₁
y₁
x₁
M
φ
X
2
R=0,2 м;
OC=0,3 м;
ω=20 рад/с;
ε=60 рад/с²;
Vотн.=10 м/с
V̄отн.
M
45°
O
ε
R
C
ω
3
R=0,2м;
ω=60 рад/с;
ε=100 рад/с²;
Vотн.=12 м/с
V̄отн.
M
45°
R
ω
ε
4
R=0,1 м;
OD=0,15 м;
ω=20 рад/с;
ε=60 рад/с²;
Vотн.=8 м/с
O
ε
ω
D
M
45°
R
C
V̄отн.
5
R=0,25 м;
ω=40 рад/с;
ε=80 рад/с²;
Vотн.=12 м/с
O
ω̄
ε
C
R
45°
V̄отн.
M
6
R=0,15 м;
OD=0,2 м;
ω=100 рад/с;
ε=200 рад/с²;
Vотн.=20 м/с
ε
V̄отн.
D
O
M
60°
ω
R
7
φ=3t+4t²;
Vотн.=0,7 м/с;
t₁=5с;
x=0,2 м;
y=0,3 м
φ
M
X
y
V̄отн.
8
R=0,3 м;
ω=200 рад/с;
ε=500 рад/с²;
Vотн.=80 м/с
R
ω
ε
60°
M
V̄отн.

Рис. К5.2

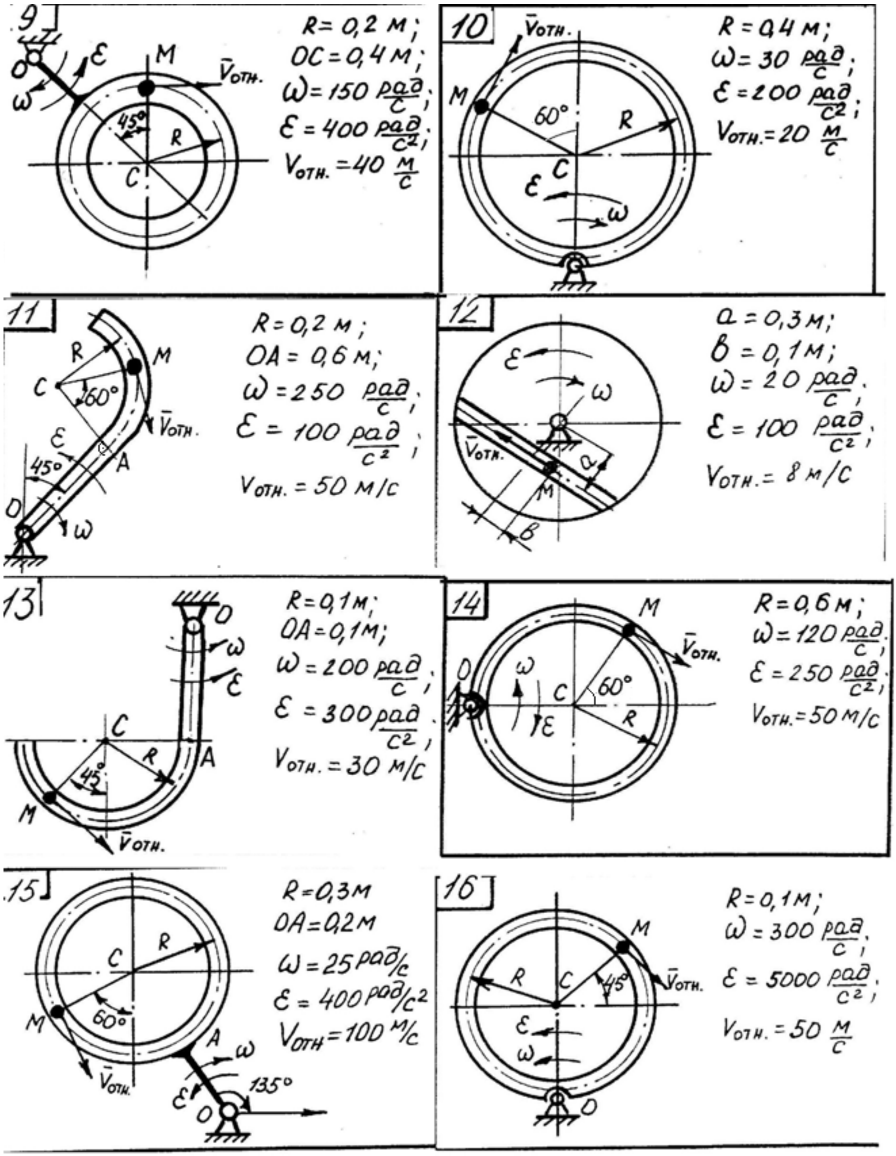

9
R = 0,2 м;
OC = 0,4 м;
ω = 150 рад/с;
ε = 400 рад/с²;
Vотн. = 40 м/с
10
R = 0,4 м;
ω = 30 рад/с;
ε = 200 рад/с²;
Vотн. = 20 м/с
11
R = 0,2 м;
OA = 0,6 м;
ω = 250 рад/с;
ε = 100 рад/с²;
Vотн. = 50 м/с
12
a = 0,3 м;
b = 0,1 м;
ω = 20 рад/с;
ε = 100 рад/с²;
Vотн. = 8 м/с
13
R = 0,1 м;
OA = 0,1 м;
ω = 200 рад/с;
ε = 300 рад/с²;
Vотн. = 30 м/с
14
R = 0,6 м;
ω = 120 рад/с;
ε = 250 рад/с²;
Vотн. = 50 м/с
15
R = 0,3 м
OA = 0,2 м
ω = 25 рад/с
ε = 400 рад/с²
Vотн = 100 м/с
16
R = 0,1 м;
ω = 300 рад/с;
ε = 5000 рад/с²;
Vотн. = 50 м/с

Рис. К5.3

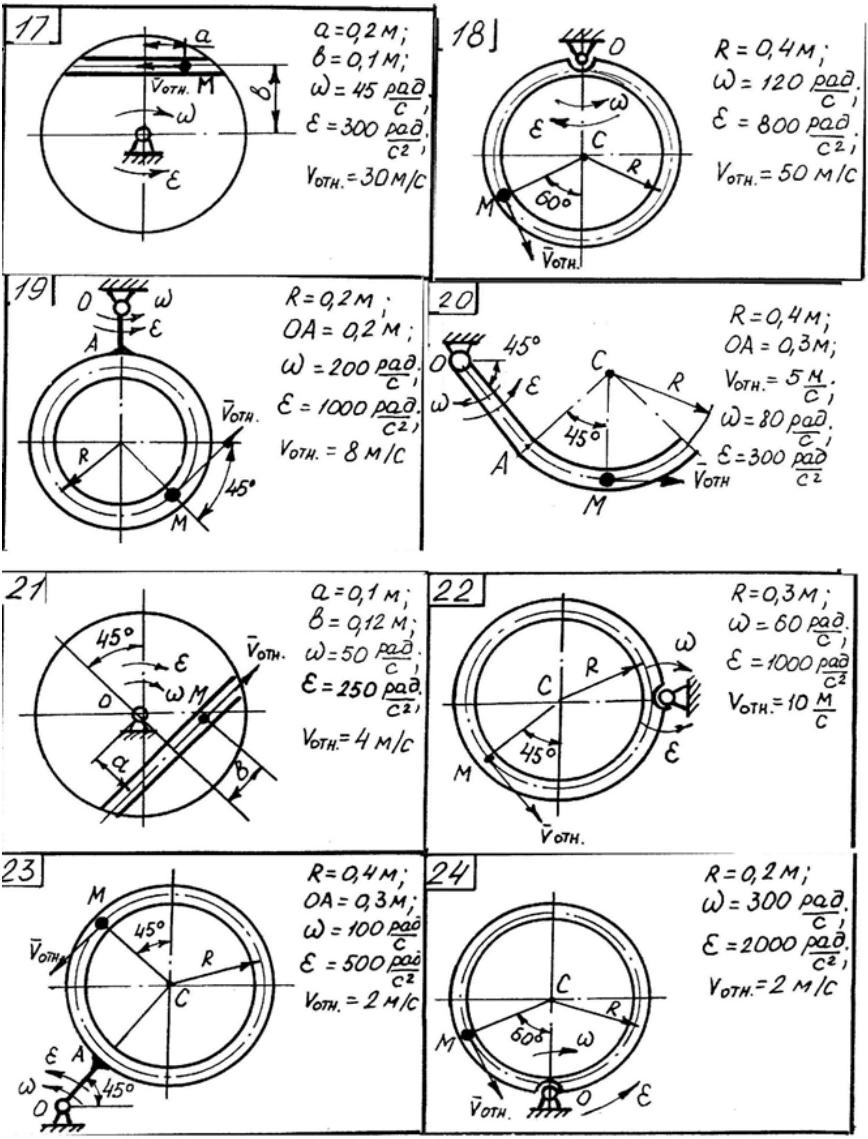

17
a
Vотн.
M
в
ω
ε
a = 0,2 м;
в = 0,1 м;
ω = 45 рад/с;
ε = 300 рад/с²;
Vотн. = 30 м/с
18
O
ω
ε
C
R
60°
M
Vотн.
R = 0,4 м;
ω = 120 рад/с;
ε = 800 рад/с²;
Vотн. = 50 м/с
19
O
ω
ε
A
R
Vотн.
45°
M
R = 0,2 м;
OA = 0,2 м;
ω = 200 рад/с;
ε = 1000 рад/с²;
Vотн. = 8 м/с
20
O
45°
ε
ω
C
R
45°
A
M
Vотн
R = 0,4 м;
OA = 0,3 м;
Vотн. = 5 м/с;
ω = 80 рад/с;
ε = 300 рад/с²
21
45°
ε
ω
O
M
Vотн.
a
в
a = 0,1 м;
в = 0,12 м;
ω = 50 рад/с;
ε = 250 рад/с²;
Vотн. = 4 м/с
22
C
R
ω
ε
45°
M
Vотн.
R = 0,3 м;
ω = 60 рад/с;
ε = 1000 рад/с²
Vотн. = 10 м/с
23
M
45°
Vотн.
R
C
ε
A
ω
O
45°
R = 0,4 м;
OA = 0,3 м;
ω = 100 рад/с
ε = 500 рад/с²
Vотн. = 2 м/с
24
C
R
M
60°
ω
Vотн.
O
ε
R = 0,2 м;
ω = 300 рад/с;
ε = 2000 рад/с²;
Vотн. = 2 м/с

Рис. К5.4

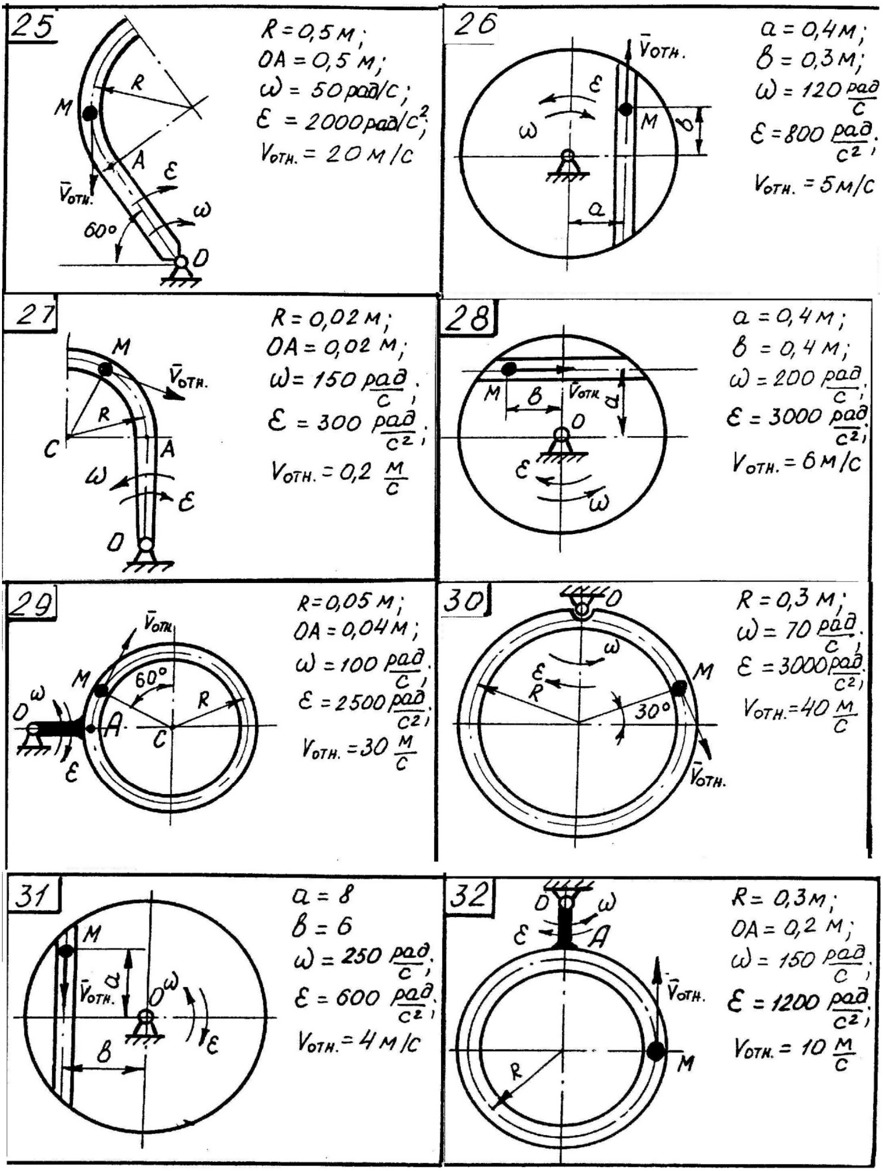

25
R = 0,5 м;
OA = 0,5 м;
ω = 50 рад/с;
ε = 2000 рад/с²;
Vотн. = 20 м/с
M
A
O
60°
26
a = 0,4 м;
b = 0,3 м;
ω = 120 рад/с;
ε = 800 рад/с²;
Vотн. = 5 м/с
M
27
R = 0,02 м;
OA = 0,02 м;
ω = 150 рад/с;
ε = 300 рад/с²;
Vотн. = 0,2 м/с
M
C
A
O
28
a = 0,4 м;
b = 0,4 м;
ω = 200 рад/с;
ε = 3000 рад/с²;
Vотн. = 6 м/с
M
O
29
R = 0,05 м;
OA = 0,04 м;
ω = 100 рад/с;
ε = 2500 рад/с²;
Vотн. = 30 м/с
M
O
A
C
60°
30
R = 0,3 м;
ω = 70 рад/с;
ε = 3000 рад/с²;
Vотн. = 40 м/с
O
M
30°
31
a = 8
b = 6
ω = 250 рад/с;
ε = 600 рад/с²;
Vотн. = 4 м/с
M
O
32
R = 0,3 м;
OA = 0,2 м;
ω = 150 рад/с;
ε = 1200 рад/с²;
Vотн. = 10 м/с
O
A
M

Рис. К5.5

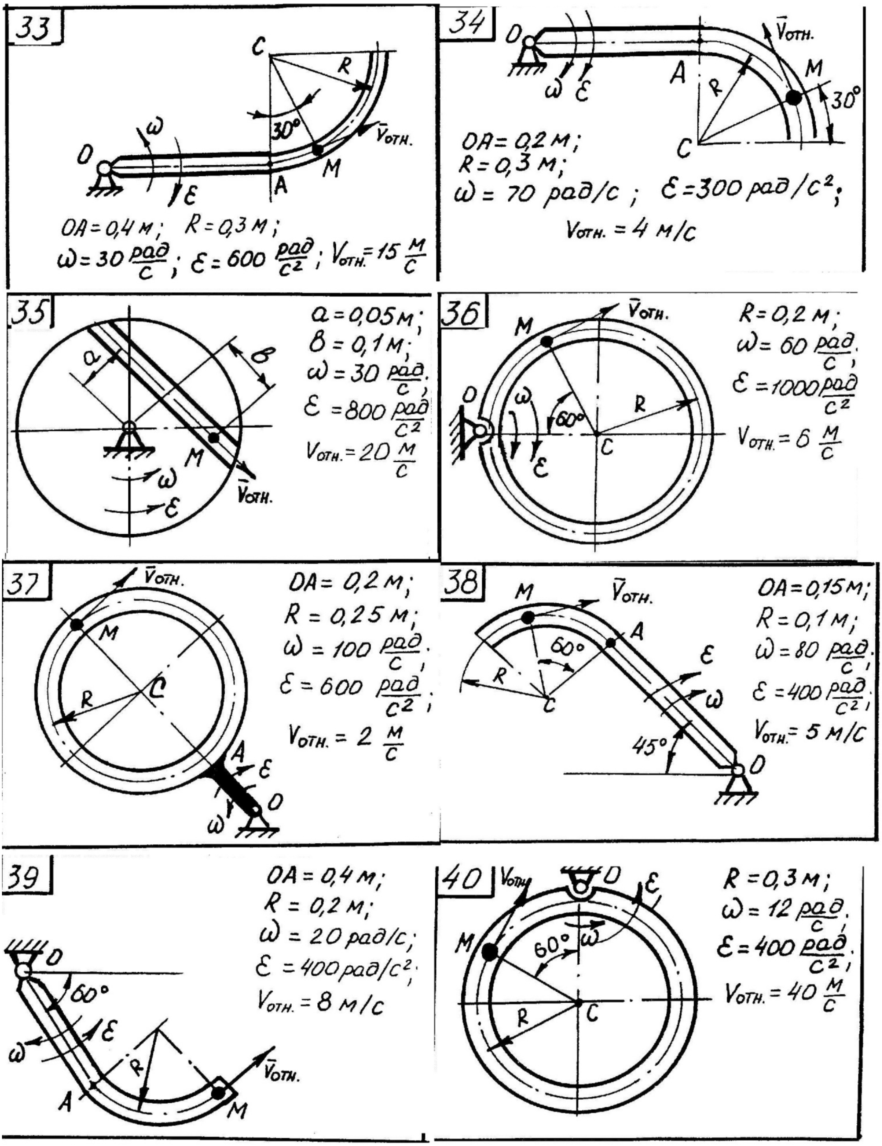

33
OA = 0,4 м; R = 0,3 м;
ω = 30 рад/с; ε = 600 рад/с²; Vотн. = 15 м/с
34
OA = 0,2 м;
R = 0,3 м;
ω = 70 рад/с; ε = 300 рад/с²;
Vотн. = 4 м/с
35
a = 0,05 м;
в = 0,1 м;
ω = 30 рад/с;
ε = 800 рад/с²
Vотн. = 20 м/с
36
R = 0,2 м;
ω = 60 рад/с;
ε = 1000 рад/с²
Vотн. = 6 м/с
37
OA = 0,2 м;
R = 0,25 м;
ω = 100 рад/с;
ε = 600 рад/с²;
Vотн. = 2 м/с
38
OA = 0,15 м;
R = 0,1 м;
ω = 80 рад/с;
ε = 400 рад/с²;
Vотн. = 5 м/с
39
OA = 0,4 м;
R = 0,2 м;
ω = 20 рад/с;
ε = 400 рад/с²;
Vотн. = 8 м/с
40
R = 0,3 м;
ω = 12 рад/с;
ε = 400 рад/с²;
Vотн. = 40 м/с

Рис. К5.6

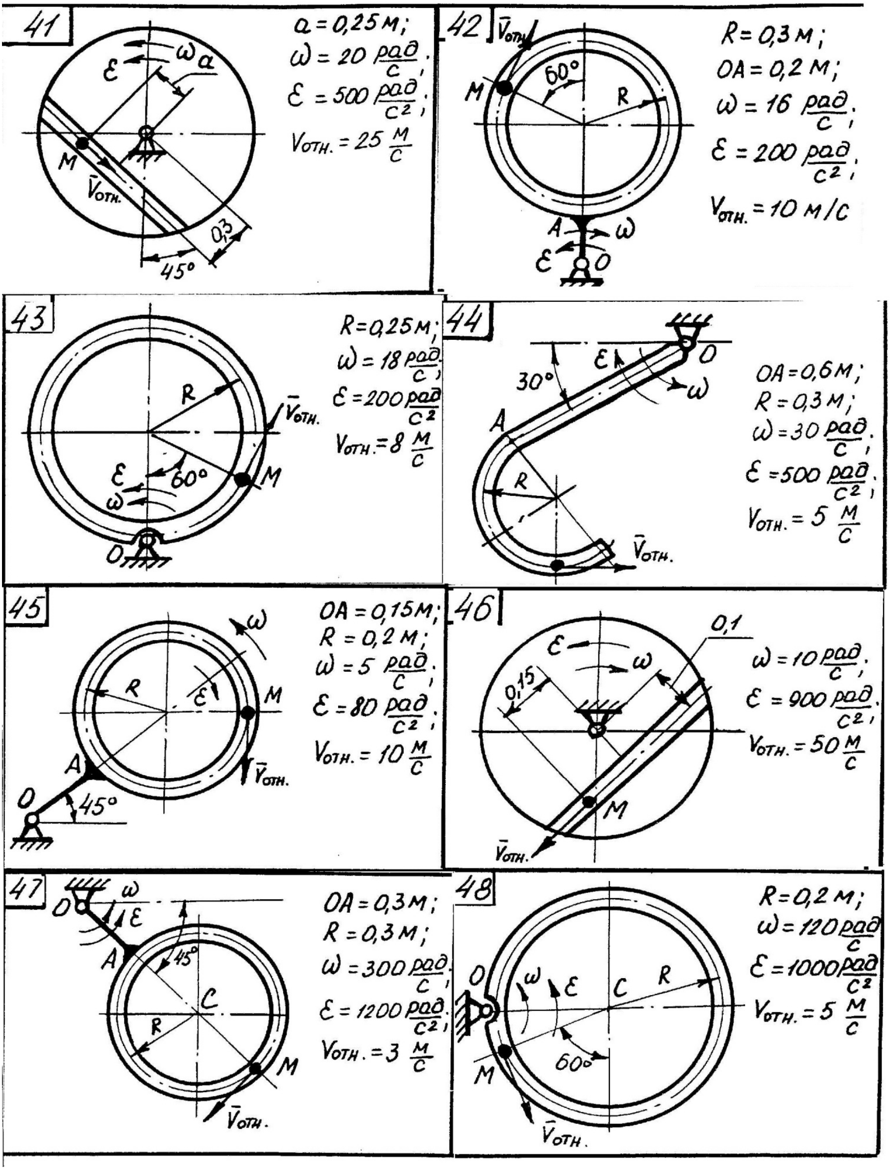

41
a = 0,25 м; ω = 20 рад/c; ε = 500 рад/c²; Vотн. = 25 м/c
0,3
45°
42
R = 0,3 м; OA = 0,2 м; ω = 16 рад/c; ε = 200 рад/c²; Vотн. = 10 м/с
60°
43
R = 0,25 м; ω = 18 рад/c; ε = 200 рад/c²; Vотн. = 8 м/c
60°
44
OA = 0,6 м; R = 0,3 м; ω = 30 рад/c; ε = 500 рад/c²; Vотн. = 5 м/c
30°
45
OA = 0,15 м; R = 0,2 м; ω = 5 рад/c; ε = 80 рад/c²; Vотн. = 10 м/c
45°
46
ω = 10 рад/c; ε = 900 рад/c²; Vотн. = 50 м/c
0,1
0,15
47
OA = 0,3 м; R = 0,3 м; ω = 300 рад/c; ε = 1200 рад/c²; Vотн. = 3 м/c
45°
48
R = 0,2 м; ω = 120 рад/c; ε = 1000 рад/c²; Vотн. = 5 м/c
60°

Рис. К5.7

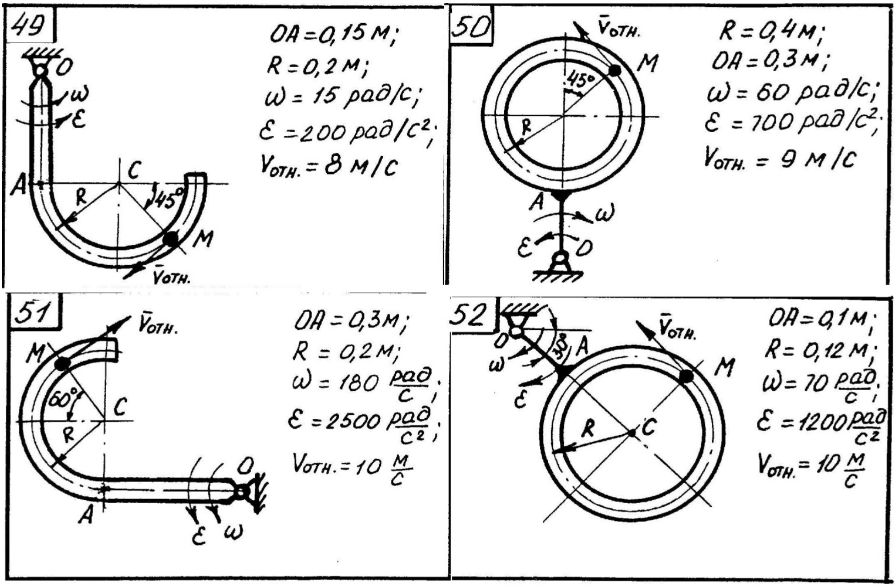

49
OA=0,15 м;
R=0,2 м;
ω = 15 рад/с;
ε =200 рад/с²;
Vотн. = 8 м/с
O
ω
ε
A
C
R
45°
M
V̄отн.
50
R = 0,4 м;
OA = 0,3 м;
ω = 60 рад/с;
ε = 700 рад/с²;
Vотн. = 9 м/с
V̄отн.
M
45°
R
A
ω
ε
O
51
OA = 0,3 м;
R = 0,2 м;
ω = 180 рад/с;
ε = 2500 рад/с²;
Vотн. = 10 м/с
V̄отн.
M
60°
C
R
A
O
ε
ω
52
OA = 0,1 м;
R = 0,12 м;
ω = 70 рад/с;
ε = 1200 рад/с²
Vотн. = 10 м/с
V̄отн.
O
A
ω
ε
M
R
C

Рис. К5.8

ДИНАМИКА

ЗАДАНИЕ Д1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Условие к вариантам: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53 (табл. Д1.1)

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол 20° с горизонтом, в течение τ секунд. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и через T секунд попадает со скоростью V_C в точку C. Сопротивление воздуха не учитывать. Искомые величины указаны на рис. Д1.1–Д1.7.

Таблица Д1.1

Номер варианта	f	V_A, м/с	h, м	τ, с	d, м	l, м
1	0,2	0	–	–	–	10
5	0,1	–	40	0,2	–	–
9	0,2	2	4	–	–	–
13	0,1	–	40	0,2	–	–
17	0,1	16	–	–	–	5
21		0	–	3	–	9,8
25	0,1	0	4,5	–	–	5
29	0,1	16	–	–	–	5
33	0,1	1	–	–	2,5	5
37	0,1	–	30	0,3	–	–
41	0,1	0	–	–	3	2
45	0,1	15	20	–	–	8
49	0,1	10	–	1	2	–
53	0,1	0	4	–	2	–

Условие к вариантам: 2, 6, 8, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54 (табл. Д1.2)

Тело массой $m = 2$ кг, получив в точке A начальную скорость V_A = 24 м/с, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный. На участке AB тело движется со скоростью τ (с), и на тело кроме силы тяжести действуют постоянная сила Q = 5 Н (ее направление показано на рис. Д1.1–Д1.7), а также сила сопротивления $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{V}$ тела (направлена против движения). В точке B тело, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила $\bar{F}$, проекция которой на ось x равна $F_x = 4\sin(4t)$ Н. Считая тело материальной точкой, найти закон движения тела на участке BC. Трением тела о трубу пренебречь.

Таблица Д1.2

Номер варианта	R, Н	AB, м	τ, с
2	$0{,}3V^2$	2,5	–
6	$0{,}3V$	–	3
10	$0{,}3V^2$	2,5	–
14	$0{,}3V^2$	2,5	–
18	$0{,}3V$	–	3
22	$0{,}3V^2$	2,5	–
26	$0{,}3V$	–	3
30	$0{,}3V^2$	2,5	–
34	$0{,}3V$	–	3
38	$0{,}3V^2$	2,5	–
42	$0{,}3V$	–	3
46	$0{,}3V^2$	2,5	–
50	$0{,}3V^2$	2,5	–
54	$0{,}3V$	–	3

Условие к вариантам: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56

Внутри изогнутой трубки, расположенной в горизонтальной плоскости, находится груз массой m = 0,5 кг. На одном из изогнутых участков трубки укреплена пружина, имеющая жесткость c = 105 Н/м. Свободный конец недеформированной пружины находится в точке D, где этот изогнутый участок заканчивается и начинается сопряженный с ним криволинейный участок трубки, выполненный по дуге окружности радиусом R = 0,4 м. Прямолинейные участки плавно сопрягаются с криволинейными в точках B и D (т. е. $OB \perp BA$, $OD \perp DE$).

Груз может двигаться либо от точки A к точке E, либо в обратном направлении. Точка начала движения показана более крупным шрифтом. В первом случае движение груза начинается со скоростью V_A = 6 м/с и заканчивается остановкой в точке E. Во втором случае оно начинается без начальной скорости в точке E, и в точку A груз приходит со скоростью V_A. В обоих случаях движение груза на участке AB сопровождается действием некоторой постоянной силы $\vec{F}$, которая может выполнять роль как движущей силы, так и силы сопротивления движению. При движении по криволинейному участку на груз действует сила трения $F_{\text{тр}}$ = 2 Н. Длина участка AB = 0,4 м, а значение углов, определяющих положения точек D и B, указаны на рисунках схем. Угол γ = 30°.

Принимая груз за материальную точку, определить длину участка DE, величину и направление силы $\bar{F}$, а также силу давления $\bar{N}$ груза на стенки трубки в точке C.

Условия к следующим вариантам

Вариант 3. Материальная точка *1* движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения $\vec{F} = km\vec{r}$ (k = 16 с$^{-2}$). Определить уравнения движения точки, если x_0 = 0,5 м, $\dot{x}_0$ = 1,2 м/с, y_0 = 0, $\dot{y}_0$ = 2 м/с, m – масса точки.

Вариант 7. Материальная точка *1* движется по криволинейной траектории в горизонтальной плоскости под действием сил притяжения: $\vec{F}_1 = k_1 m\vec{r}_1$; $\vec{F}_2 = k_2 m\vec{r}_2$ (k_1 = 9 с$^{-2}$, k_2 = 4 с$^{-2}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки, если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0$ = 1,2 м/с, $\dot{y}_0$ = 2 м/с, $OA = b$ = 3 м.

Вариант 11. Материальная точка *1* скользит по гладкой внутренней цилиндрической поверхности радиусом r = 0,6 м в вертикальной плоскости. На точку действует сила сопротивления $R = 1/2mV^2$, которая направлена в обратную сторону от скорости V. Определить скорость точки и реакцию нормального давления для $\varphi_1 = 60°$, если масса точки m = 2 кг и начальная скорость V_0 = 2 м/с.

Вариант 15. Материальная точка *1* брошена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью V_0 = 19,6 м/с. Точка перемещается по своей траектории и попадает в мишень A, расположенную на высоте h =1,7 м. Определить дальность полета l точки без учета сил сопротивления.

Вариант 19. Материальная точка *1* массой m = 4 кг движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Радиус окружности $R = 0{,}5$ м. Определить, какую начальную скорость V_0 нужно сообщить точке, чтобы реакция нормального давления в точке A была равна нулю. Найти величину реакции нормального давления в точке O.

Вариант 23. Материальная точка *1* массой m = 4 кг движется по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы $\vec{F}$ = = $km\varphi^2$ ($k = 1{,}2$ м/с^2). Определить модуль скорости точки и реакцию нормального давления для угла $\varphi = \pi/3$, если V_0 = 2 м/с, $\varphi_0 = 0$, R = 1 м.

Вариант 27. Материальная точка *1* движется в горизонтальной плоскости под действием силы притяжения $\vec{F}$ = $km\vec{r}$ ($k = 25$ с$^{-2}$), m – масса точки. Определить уравнения движения точки, если x_0 = 0,4 м, $\dot{x}_0$ = 1,4 м с, y_0 = 0, $\dot{y}_0$ = 1,4 м/с, OA = 0,5 м.

Вариант 31. Колечку *1* сообщили начальную скорость V_0 = 8 м/с и оно начало скользить по горизонтальной окружности с трением, при этом коэффициент трения скольжения $f = 0{,}3$. Радиус окружности R = 1,2 м. Определить угол φ_1, при котором колечко остановится.

Вариант 35. Колечку *1* сообщили начальную скорость V_0 = 12 м/с, и оно начало скользить по горизонтальной окружности с трением, при этом коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$. Радиус окружности R = 1 м. Определить скорость колечка $V = V(\varphi)$.

Вариант 39. Материальную точку *1* бросили под углом $\alpha = 60°$ к горизонту (Ox) с начальной скоростью V_0 = 12 м/с. В свободном полете точка испытывает сопротивление $\bar{R} = -\mu m\bar{V}$ ($\mu = 0,2$ с$^{-1}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Вариант 43. Материальной точке *1* сообщили начальную скорость V_0 = 1 м/с, и она начала скользить по шероховатой цилиндрической поверхности в вертикальной плоскости радиусом R = 1,5 м. Коэффициент трения скольжения f = 0,2. Зная массу точки m = 2 кг, определить скорость точки $V = V(\varphi)$.

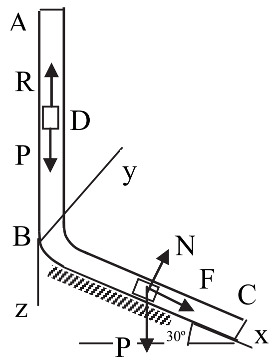
Вариант 47. Материальную точку *1* бросили под углом $\alpha = 60°$ к вертикали с начальной скоростью V_0 = 8 м/с. Определить дальность полета l точки, если h = 4 м, сопротивлением воздуха пренебречь.

Вариант 51. Материальная точка *1*, перемещаясь по своей траектории в вертикальной плоскости, притягивается к центру A с силой $\vec{F} = km\vec{r}$ ($k = 16$ с$^{-2}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, если $OA = b$ = 0,6 м, $x_0 = y_0 = 0$, $\dot{x}_0$ = 2 м/с, $\dot{y}_0$ = 1 м/с.

Вариант 55. Материальная точка *1* движется по гладкой горизонтальной поверхности xOy под действием силы $\vec{F} = kmt^2$ (m – масса точки, k = 0,5 м/с^4). Определить уравнение траектории точки, если $V_0 = 2$ м/с, $\alpha = 60^{\circ}$.

Пример выполнения задания

На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1.1) на груз D массой $m = 2$ кг действуют сила тяжести и сила сопротивления $\bar{R} = \mu V^2$, где $\mu = 0,4$ кг/м; расстояние от точки A, где $V = V_0 = 5$ м/с, до точки B равно $l = 2,5$ м. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F_x = 16\sin(4t)$, Н. Определить $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.



Решение

1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой.

На груз действуют сила тяжести $\overline{P}$ и сила сопротивления $\overline{R}$. Составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Az*:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ , \quad \text{или} \quad mV_z\frac{dV_z}{dz} = mg - \mu V_z^2\ . \qquad (\text{Д}1.1)$$

Учитывая, что $V_z = V$, и вводя обозначения $k = \mu / m = 0{,}2$ м$^{-1}$, $n = mg / \mu = 50$ м^2/с^2, уравнение (Д1.1) можно представить в виде

$$2V\frac{dV}{dz} = -2k(V^2 - n)\ . \qquad (\text{Д}1.2)$$

Разделив в уравнении (Д1.2) переменные, а затем взяв от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2kdz \quad \text{и} \quad \ln(V^2 - n) = -2kz + C_1. \qquad (\text{Д}1.3)$$

По начальным условиям при $z = 0$ $V = V_0$, что дает $C_1 = \ln\left(V_0^2 - n\right)$.

Тогда

$$V^2 = n + \left(V_0^2 - n\right)e^{-2kz}\ . \qquad (\text{Д}1.4)$$

Полагая в равенстве (Д1.4) $z = l = 2{,}5$ м, определим скорость V_B груза в точке *B*:

$$(e = 2{,}7):\ V_B = 6{,}4 \text{ м/с}.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке *BC*, найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). На груз в произвольном положении действуют три силы: $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{F}$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Bx*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_x, \quad \text{или} \quad m\frac{dV_x}{dt} = 0{,}5mg + 16\sin(4t)\ . \qquad (\text{Д}1.5)$$

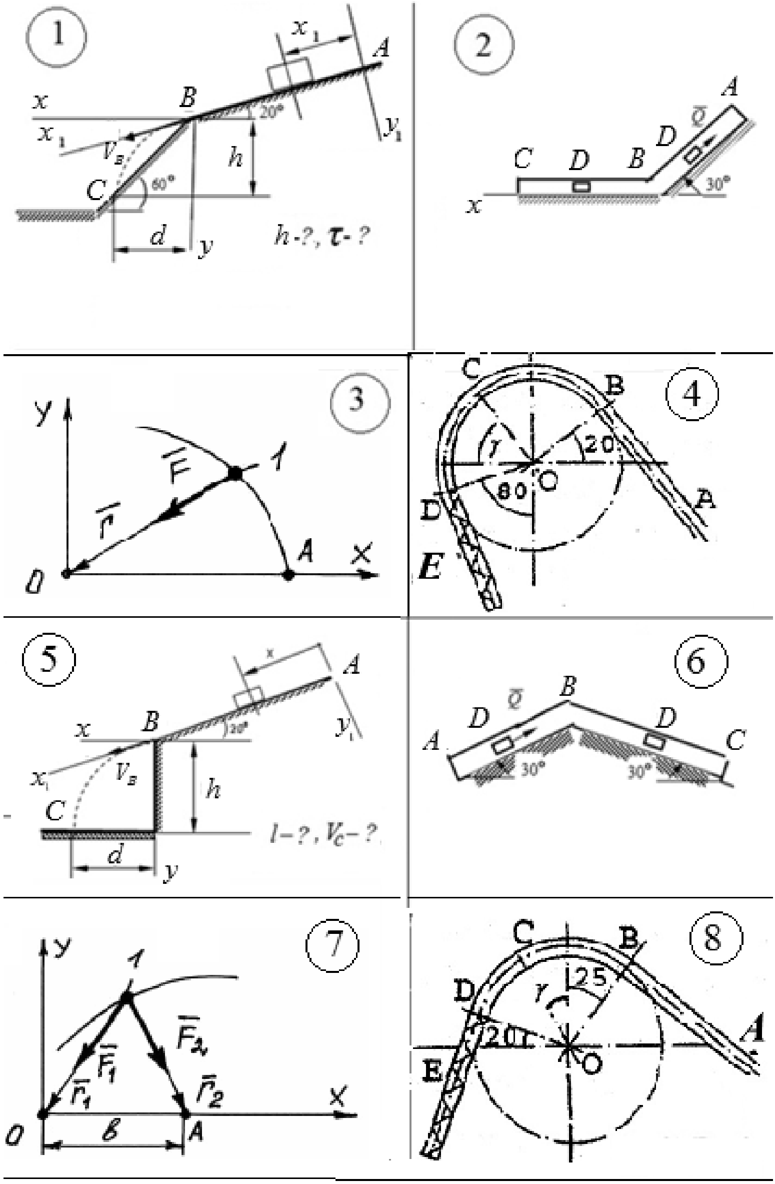


Рис. Д1.1

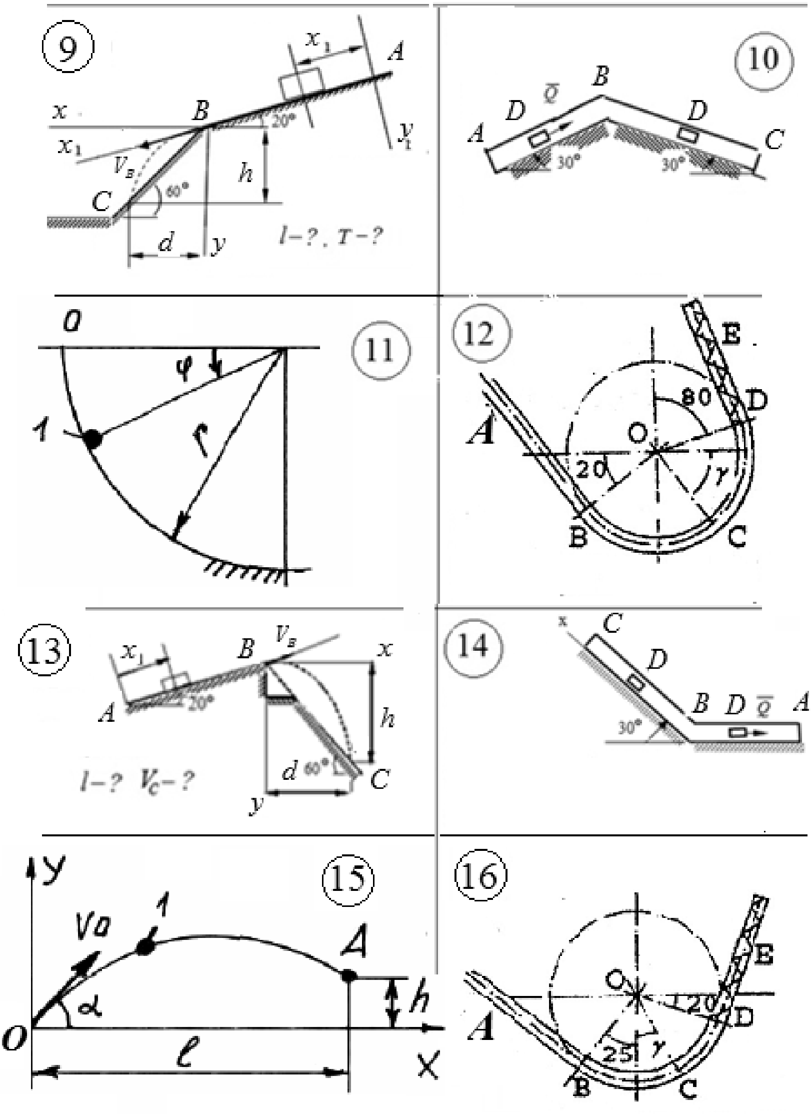

9
x
B
A
x_1
y_1
V_B
20°
h
C
60°
d
y
l–?, τ–?
10
A
D
$\overline{Q}$
B
D
C
30°
30°
11
O
φ
1
r
12
E
80
D
A
O
20
γ
B
C
13
x_1
B
V_B
x
A
20°
h
d
60°
C
y
l–? V_C–?
14
x
C
D
B
D
$\overline{Q}$
A
30°
15
Y
Va
1
Д
α
h
O
ℓ
X
16
O
E
120
D
A
25
γ
B
C

Рис. Д1.2

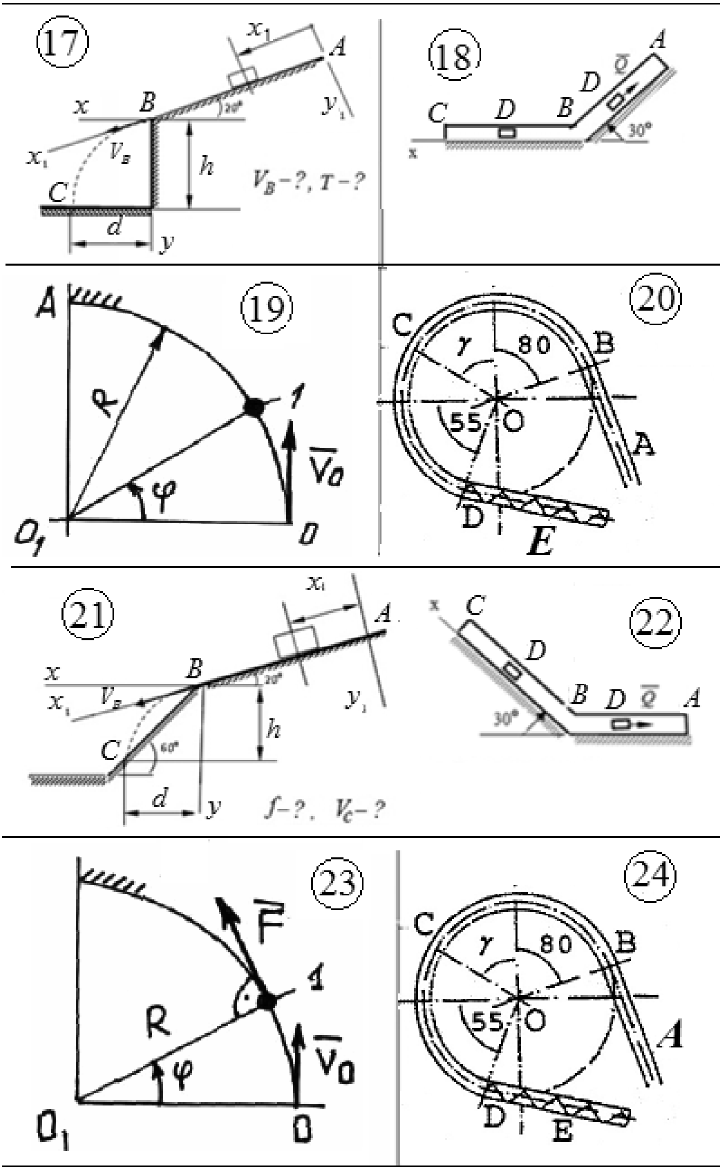

17
x_1
A
x
B
20°
y_1
x_1
V_B
h
V_B–?, T–?
C
d
y
18
A
$\overline{Q}$
D
C
D
B
30°
x
19
A
R
1
$\overline{V_0}$
φ
O_1
O
20
C
γ
80
B
55
O
A
D
E
21
x_1
A
x
B
20°
x_1
V_B
y_1
h
C
60°
d
y
f–?, V_C–?
22
x
C
D
B
D
$\overline{Q}$
A
30°
23
$\overline{F}$
1
R
$\overline{V_0}$
φ
O_1
O
24
C
γ
80
B
55
O
A
D
E

Рис. Д1.3

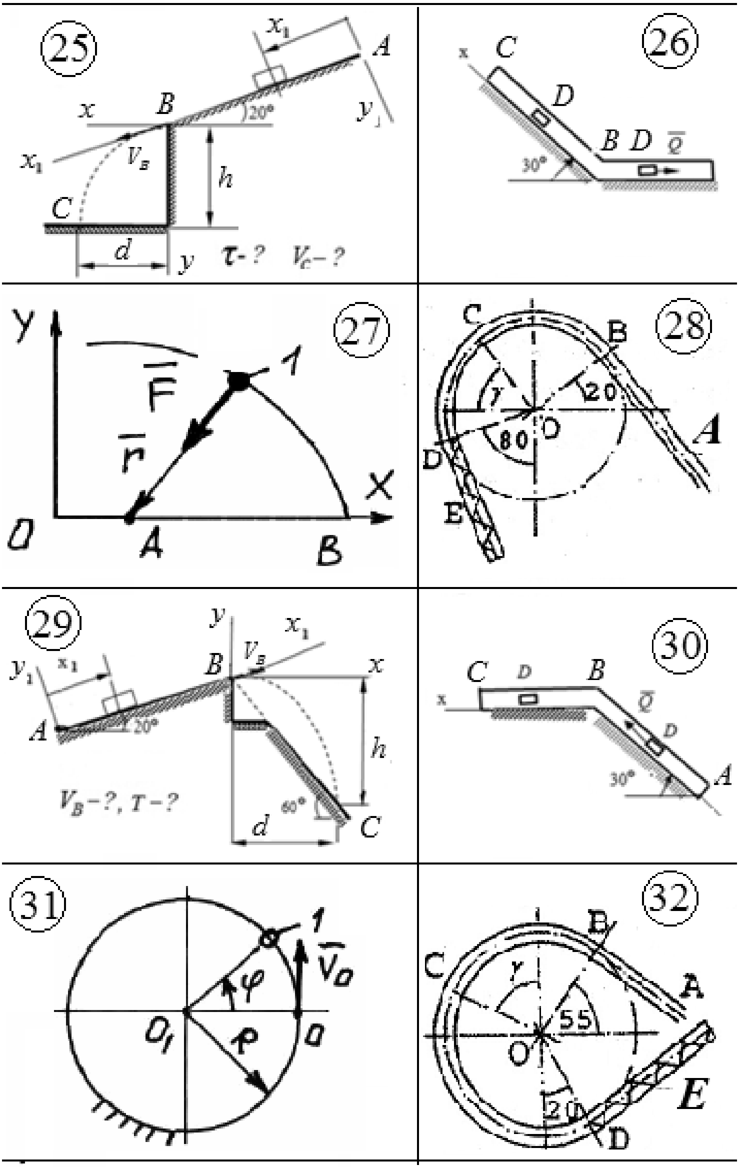

25
x_1
A
x
B
20°
y_1
x_1
V_B
h
C
d
y
τ-? V_C-?
26
x
C
D
B D $\bar{Q}$
30°
27
Y
$\bar{F}$
1
$\bar{r}$
X
O
A
B
28
C
B
γ
20
O
80
A
D
E
29
y
x_1
y_1
x_1
B
V_B
x
A
20°
h
V_B-?, T-?
60°
d
C
30
C
D
B
x
$\bar{Q}$
D
30°
A
31
1
$\bar{V}_a$
φ
O_1
R
a
32
B
C
A
γ
55
O
E
20
D

Рис. Д1.4

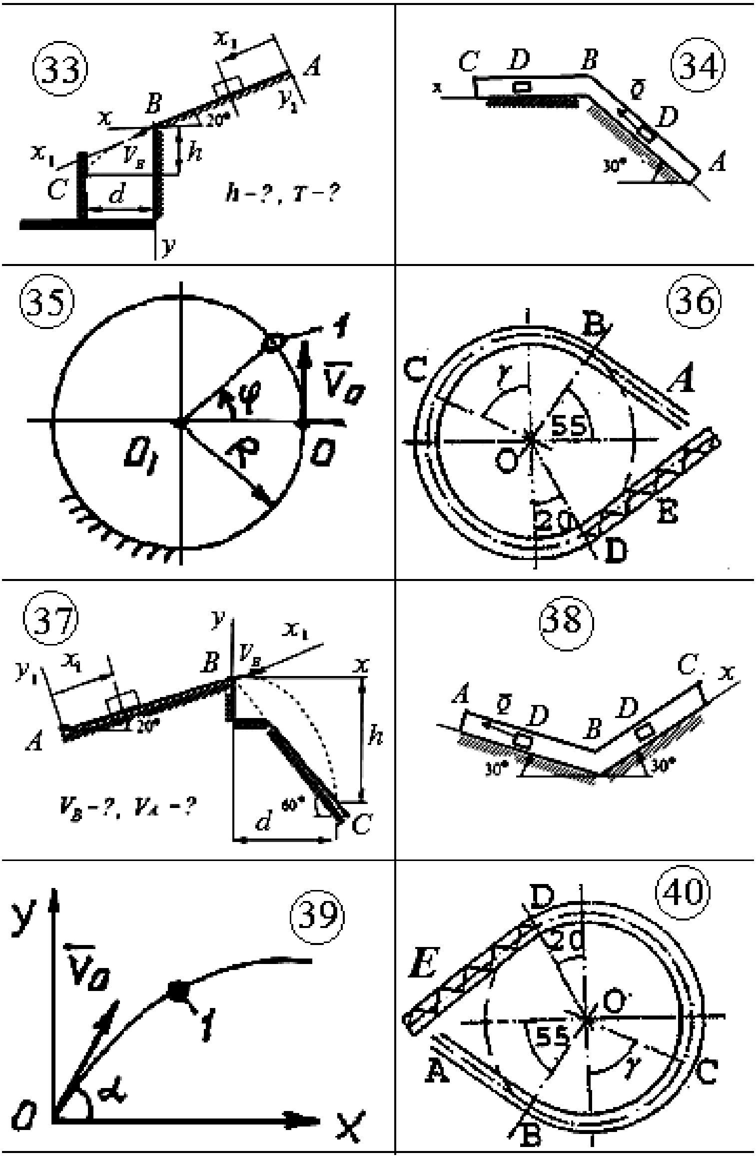

33
x_1
A
y_1
x
B
20°
x_1
V_B
h
C
d
y
h – ?, τ – ?
34
C D B
x
$\bar{Q}$
D
30°
A
35
1
$\overline{V_0}$
φ
O_1
R
O
36
B
C
γ
A
55
O
20
E
D
37
y
x_1
y_1
x_1
B
V_B
x
A
20°
h
V_B – ?, V_A – ?
60°
d
C
38
A
C
x
$\bar{Q}$
D
D
B
30°
30°
39
y
$\overline{V_0}$
1
α
O
X
40
D
20
E
O
55
A
γ
C
B

Рис. Д1.5

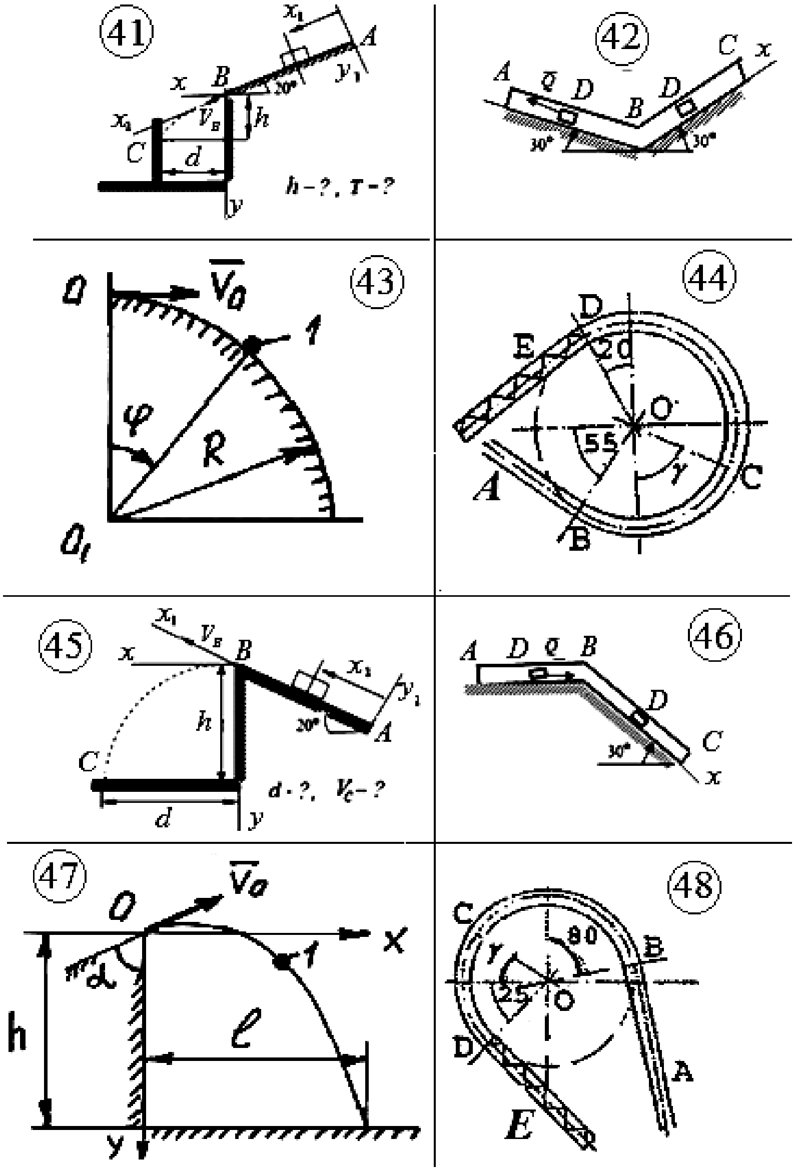

41
A
x
B
20°
h
C
d
y
h-?, τ-?
42
A
D
B
D
C
x
30°
30°
43
$\overline{V_0}$
1
φ
R
44
D
E
20
O
55
γ
C
A
B
45
B
x
h
20°
A
C
d
d-?, V_c-?
y
46
A
D
B
D
C
30°
x
47
$\overline{V_0}$
X
1
α
h
ℓ
y
48
C
80
B
γ
25
O
D
A
E

Рис. Д1.6

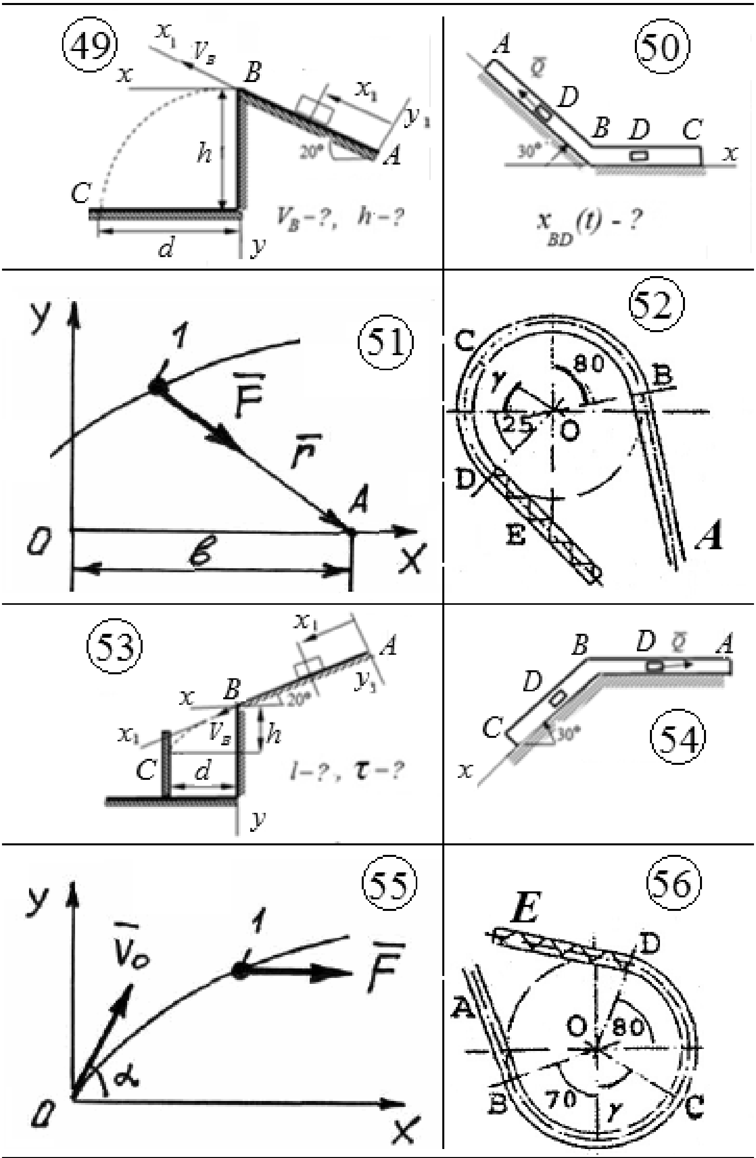

49
x_1
V_B
B
x
x_1
y_1
h
20°
A
C
V_B –?, h –?
d
y
50
A
$\bar{Q}$
D
B
D
C
x
30°
$x_{BD}(t)$ - ?
51
y
1
$\bar{F}$
$\bar{r}$
A
O
в
X
52
C
80
B
γ
25
O
D
E
A
53
x_1
A
y_1
x
B
20°
x_1
V_B
h
C
d
l –? , τ –?
y
54
B
D
$\bar{Q}$
A
D
C
30°
x
55
y
$\bar{V}_0$
1
$\bar{F}$
α
O
X
56
E
D
A
O
80
B
70
γ
C

Рис. Д1.7

Разделив переменные в (Д1.5) и проинтегрировав их, получим

$$V_x = 5t - 2\cos(4t) + C_2 . \qquad (Д1.6)$$

Учитывая, что при $t = 0$ $V_x = V_0 = V_B$, находим $C_2 = V_B + 2\cos 0 = 8{,}4$.

Так как $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, то (Д1.6) представляет дифференциальное уравнение с разделяющими переменными. После его интегрирования получим

$$x = 2{,}5t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3 . \qquad (Д1.7)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$, и окончательный искомый закон движения груза будет

$$x = 2{,}5t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t), \text{ м.}$$

ЗАДАНИЕ Д2

Исследование поступательного и вращательного движения твердого тела

Механическая система (схемы механизмов показаны на рис. Д2.1–Д2.7) из состояния покоя под действием веса груза приводится в движение. Начальное положение системы показано на рис. Д2.1–Д2.7. Массы тел системы $(m_1,\ m_2,\ m_3)$ приведены в табл. Д2.1. Геометрические размеры тел $(R_1,\ r_1,\ R_2,\ r_2)$ указаны на рис. Д2.1–Д2.7. Все колеса считать сплошными однородными дисками большего радиуса. Коэффициент трения груза о наклонную плоскость $f = 0{,}2$. В вариантах, где не указан угол наклона плоскости, принять его равным 60°. На механическую систему действует пара сил сопротивления с моментом $M_C = 2$ Н·м.

Считая, что нити невесомые и нерастяжимые, найти ускорение груза, силу сцепления между колесами и натяжения нитей на всех участках с помощью дифференциальных уравнений движения всех тел системы. В вариантах № 3, 4, 11, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 28, 29, 31, 37, 41, 45, 48, 49, 51, 52 принять, что соотношение сил натяжения в нитях равно двум.

Таблица Д2.1

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	Номер варианта	m_1	m_2	m_3
	кг				кг		
1	2	8	4	27	10	30	100
2	4	8	12	28	2	8	14
3	4	2	8	29	4	8	12
4	8	2	4	30	4	2	8
5	2	20	15	31	2	8	4
6	15	40	100	32	0,8	4	40
7	15	10	30	33	10	30	100
8	0,5	6	20	34	10	30	100
9	6	5	40	35	2	20	15
10	6	5	50	36	15	40	100
11	3	4	10	37	15	10	30
12	3	5	50	38	0,5	6	20
13	0,8	4	40	39	16	5	50
14	10	30	100	40	3	14	10
15	6	5	40	41	3	15	50
16	6	5	50	42	0,8	4	40
17	3	4	10	43	0,8	4	40
18	3	5	50	44	10	30	100
19	1	3	40	45	6	5	40
20	5	4	25	46	6	5	50
21	3	7	11	47	3	4	10
22	7	3	11	48	3	5	50
23	4	4	30	49	1	3	40
24	3	2	10	50	5	4	25
25	2	1	40	51	8	4	24
26	4	12	30	52	0,8	4	14

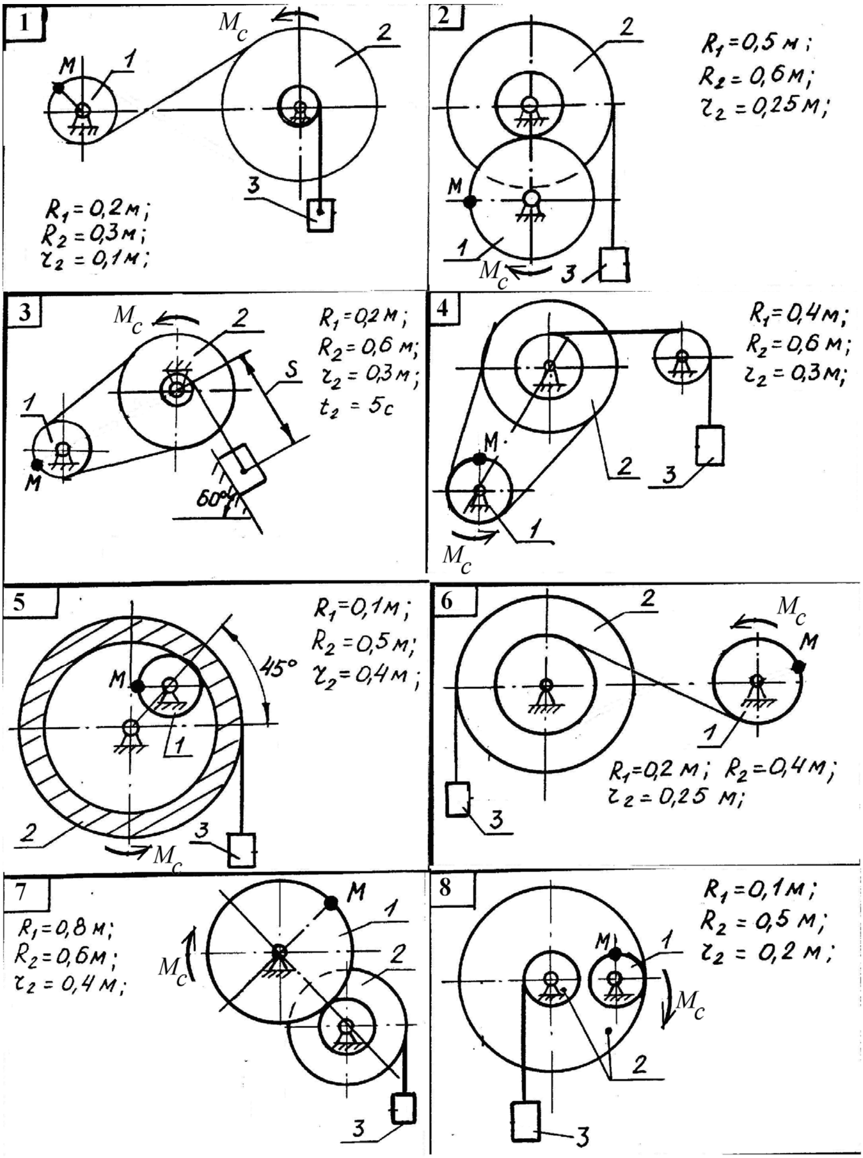

1
M_C
2
M
1
3
$R_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,1$ м;
2
2
$R_1 = 0,5$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,25$ м;
M
1
M_C
3
3
M_C
2
$R_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,3$ м;
$t_2 = 5$ с
S
1
M
60°
4
$R_1 = 0,4$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,3$ м;
M
2
3
1
M_C
5
$R_1 = 0,1$ м;
$R_2 = 0,5$ м;
$r_2 = 0,4$ м;
45°
M
1
2
3
M_C
6
2
M_C
M
1
$R_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,4$ м;
$r_2 = 0,25$ м;
3
7
M
1
$R_1 = 0,8$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,4$ м;
M_C
2
3
8
$R_1 = 0,1$ м;
$R_2 = 0,5$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
M
1
M_C
2
3

Рис. Д2.1

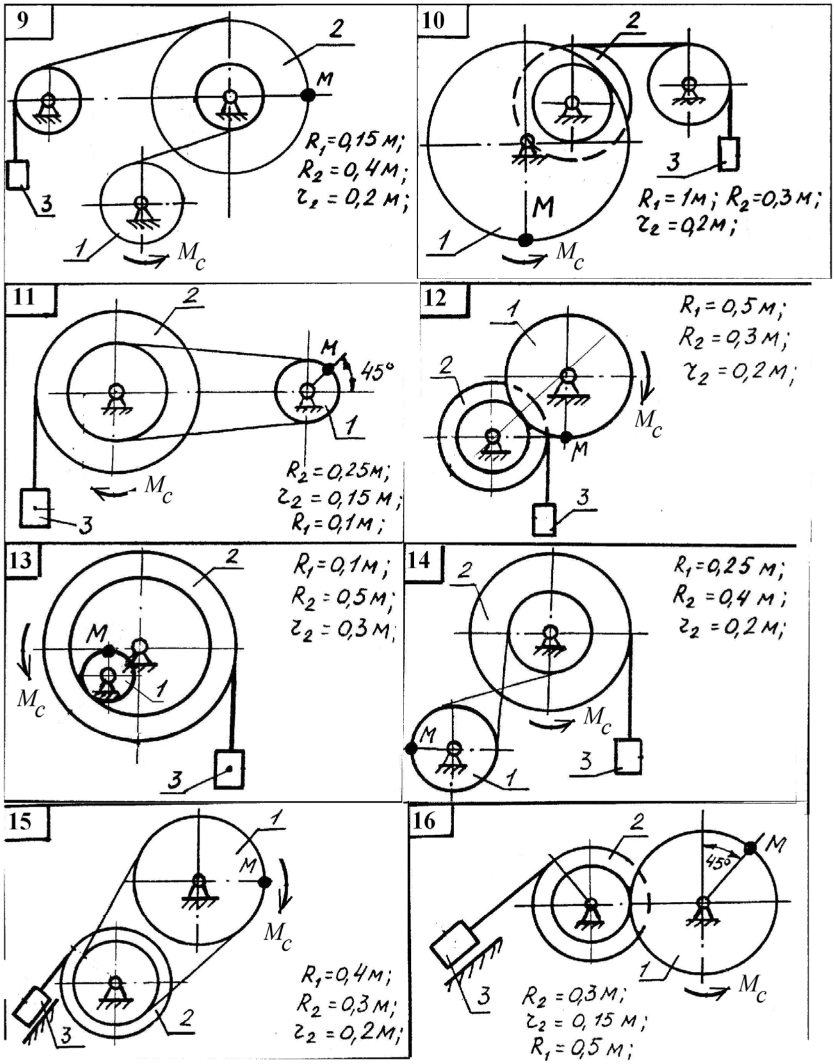

9
2
M
$R_1 = 0{,}15$ м;
$R_2 = 0{,}4$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
3
1
M_c
10
2
3
M
$R_1 = 1$ м; $R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
1
M_c
11
2
M
45°
1
M_c
3
$R_2 = 0{,}25$ м;
$r_2 = 0{,}15$ м;
$R_1 = 0{,}1$ м;
12
$R_1 = 0{,}5$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
1
2
M_c
M
3
13
2
$R_1 = 0{,}1$ м;
$R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}3$ м;
M
1
M_c
3
14
2
$R_1 = 0{,}25$ м;
$R_2 = 0{,}4$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
M_c
M
3
1
15
1
M
M_c
$R_1 = 0{,}4$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
2
3
16
2
M
45°
1
M_c
3
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}15$ м;
$R_1 = 0{,}5$ м;

Рис. Д2.2

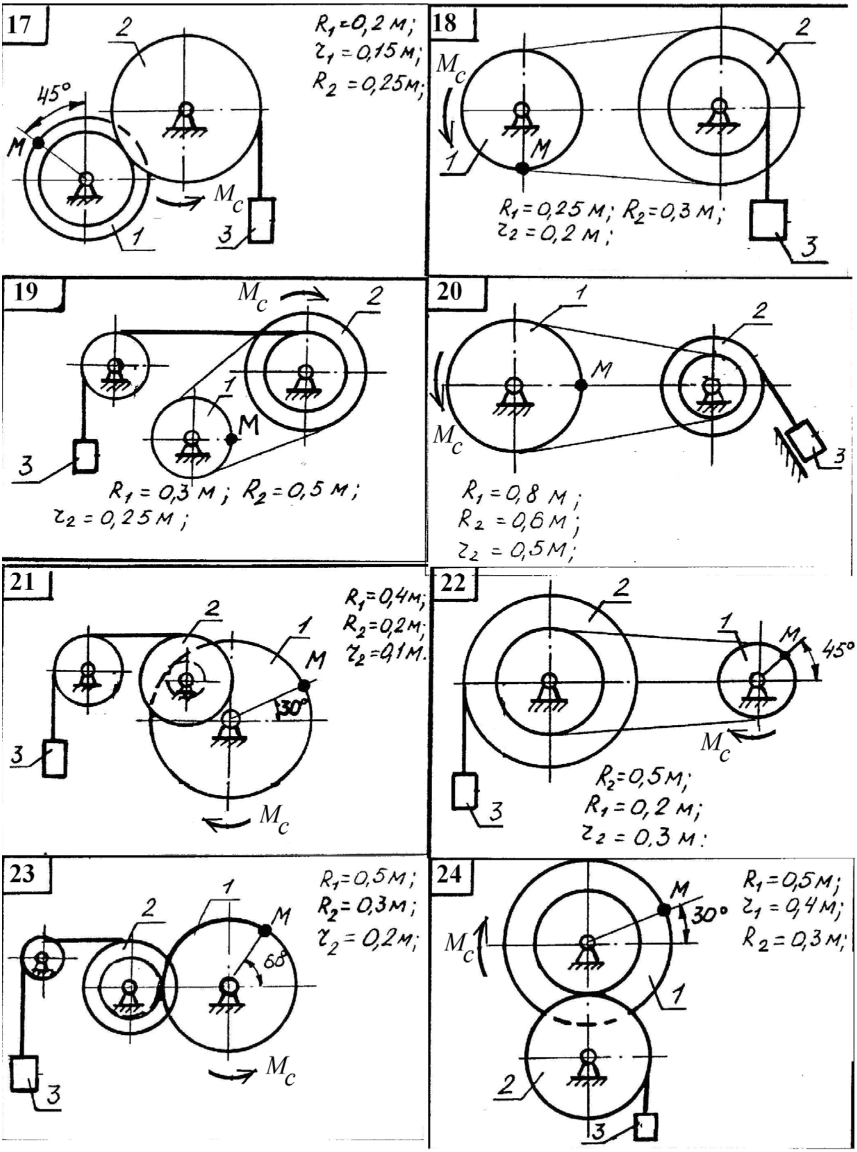

17
R1=0,2 м; r1 = 0,15 м; R2 = 0,25м;
45°
M
Mc
1
2
3
18
Mc
M
1
2
3
R1 = 0,25 м; R2 = 0,3 м; r2 = 0,2 м;
19
Mc
1
2
3
M
R1 = 0,3 м; R2 = 0,5 м; r2 = 0,25 м;
20
1
2
3
M
Mc
R1 = 0,8 м; R2 = 0,6 м; r2 = 0,5м;
21
R1=0,4м; R2=0,2м; r2=0,1м.
1
2
3
M
30°
Mc
22
1
2
3
M
45°
Mc
R2=0,5м; R1 = 0,2 м; r2 = 0,3 м:
23
R1=0,5м; R2=0,3м; r2=0,2м;
1
2
3
M
60°
Mc
24
R1=0,5м; r1 = 0,4м; R2 = 0,3м;
M
30°
Mc
1
2
3

Рис. Д2.3

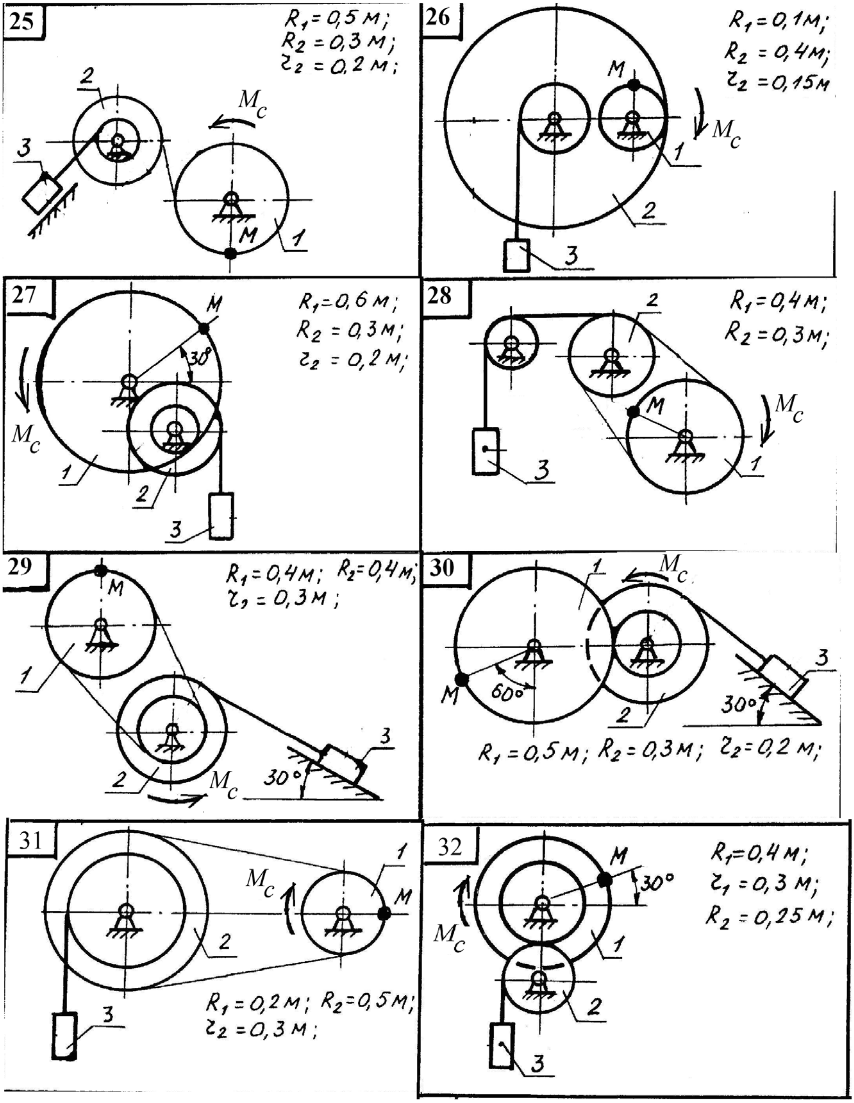

25
R₁ = 0,5 м;
R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,2 м;
M
Mc
1
2
3
26
R₁ = 0,1м;
R₂ = 0,4м;
r₂ = 0,15м
M
Mc
1
2
3
27
R₁ = 0,6 м;
R₂ = 0,3м;
r₂ = 0,2 м;
M
30°
Mc
1
2
3
28
R₁ = 0,4м;
R₂ = 0,3м;
M
Mc
1
2
3
29
R₁ = 0,4м; R₂ = 0,4м;
r₁ = 0,3м;
M
Mc
30°
1
2
3
30
R₁ = 0,5 м; R₂ = 0,3 м; r₂ = 0,2 м;
M
Mc
60°
30°
1
2
3
31
R₁ = 0,2 м; R₂ = 0,5 м;
r₂ = 0,3 м;
M
Mc
1
2
3
32
R₁ = 0,4 м;
r₁ = 0,3 м;
R₂ = 0,25 м;
M
30°
Mc
1
2
3

Рис. Д2.4

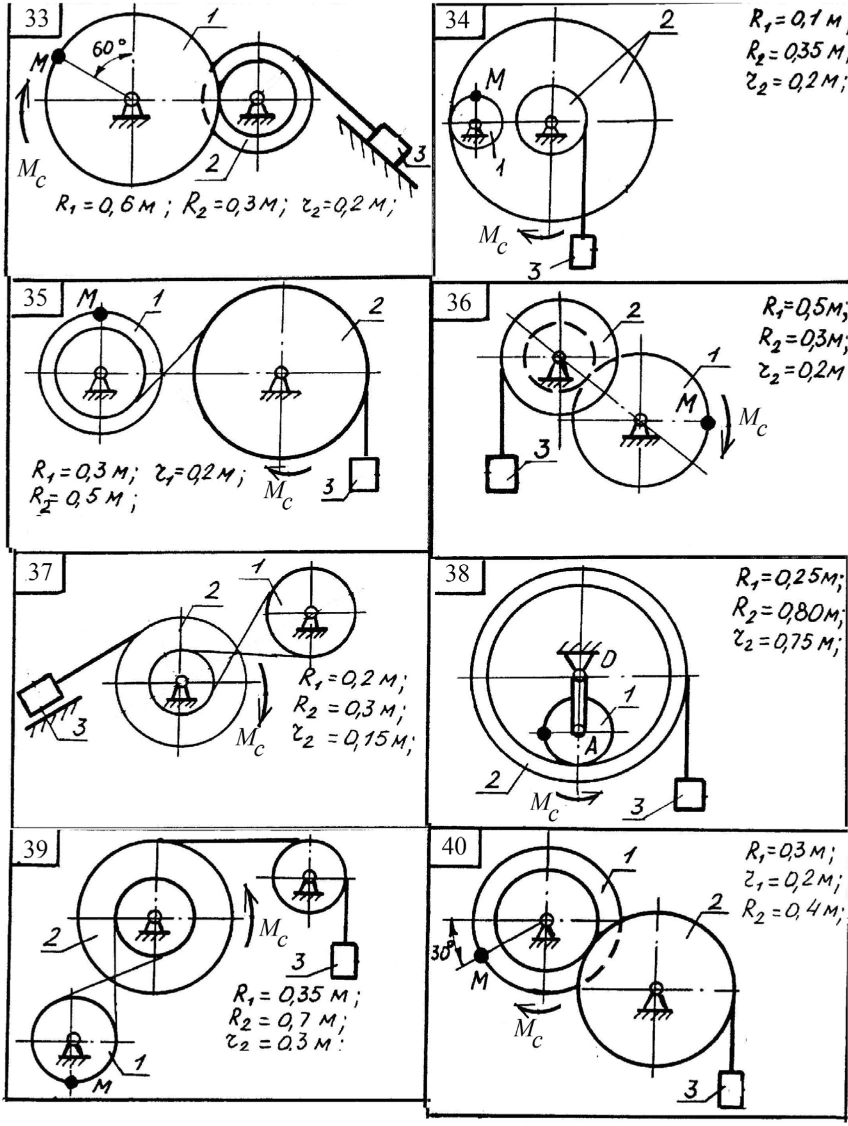
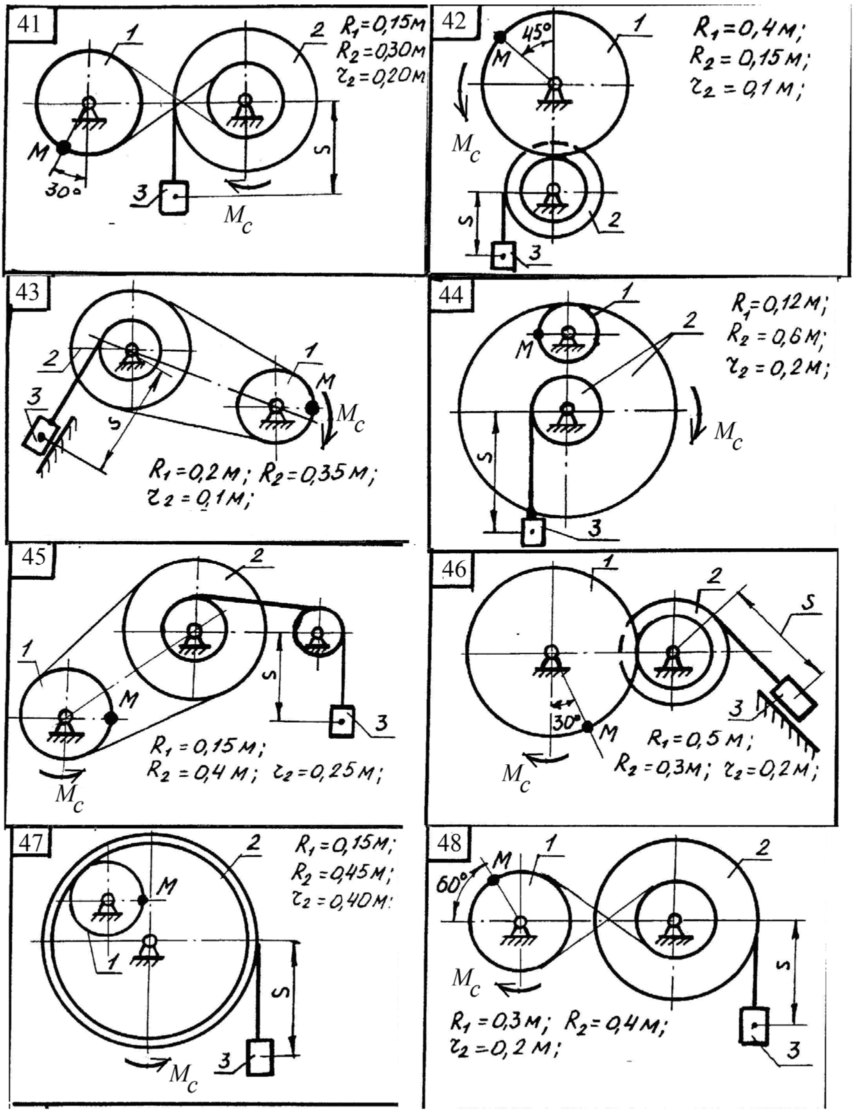

33
$R_1 = 0{,}6$ м ; $R_2 = 0{,}3$ м; $r_2 = 0{,}2$ м;
34
$R_1 = 0{,}1$ м ;
$R_2 = 0{,}35$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
35
$R_1 = 0{,}3$ м; $r_1 = 0{,}2$ м ;
$R_2 = 0{,}5$ м ;
36
$R_1 = 0{,}5$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м
37
$R_1 = 0{,}2$ м ;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}15$ м;
38
$R_1 = 0{,}25$ м;
$R_2 = 0{,}80$ м;
$r_2 = 0{,}75$ м;
39
$R_1 = 0{,}35$ м ;
$R_2 = 0{,}7$ м ;
$r_2 = 0{,}3$ м :
40
$R_1 = 0{,}3$ м ;
$r_1 = 0{,}2$ м;
$R_2 = 0{,}4$ м;

Рис. Д2.5



41
$R_1=0,15$м
$R_2=0,30$м
$r_2=0,20$м
M
30°
M_c
42
$R_1=0,4$м;
$R_2=0,15$м;
$r_2=0,1$м;
45°
M
M_c
43
M
M_c
$R_1=0,2$м; $R_2=0,35$м;
$r_2=0,1$м;
44
$R_1=0,12$м;
$R_2=0,6$м;
$r_2=0,2$м;
M
M_c
45
M
$R_1=0,15$м;
$R_2=0,4$м; $r_2=0,25$м;
M_c
46
30°
M
$R_1=0,5$м;
$R_2=0,3$м; $r_2=0,2$м;
M_c
47
$R_1=0,15$м;
$R_2=0,45$м;
$r_2=0,40$м:
M
M_c
48
M
60°
M_c
$R_1=0,3$м; $R_2=0,4$м;
$r_2=0,2$м;

Рис. Д2.6

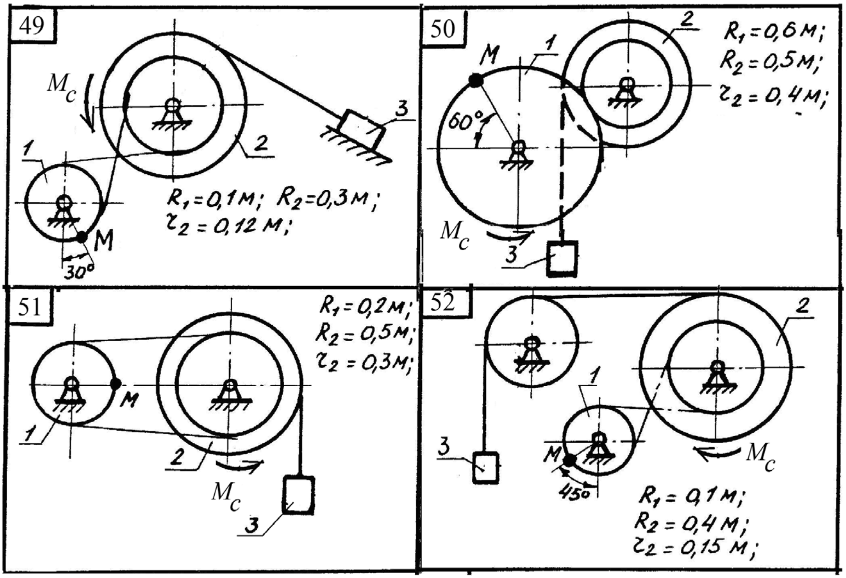


Рис. Д2.7

Пример выполнения задания

Механическая система (рис. Д2.8) состоит из колес *1*, *2* и груза *3*. К колесу *1* приложена пара сил с моментом $M = M(t)$ (движущий момент). К колесу *2* приложен момент сил сопротивления M_C. Масса колеса *2* распределена по внешнему ободу, а радиус инерции колеса *1* равен i_1.

Определить ускорение груза *3* и натяжения нитей на всех участках (табл. Д2.2).

Таблица Д2.2

m_1	m_2	m_3	R_1	r_1	R_2	r_2	i_1	M, Н · м	M_C, Н · м
кг			см						
250	100	400	40	20	30	–	30	2575	1200

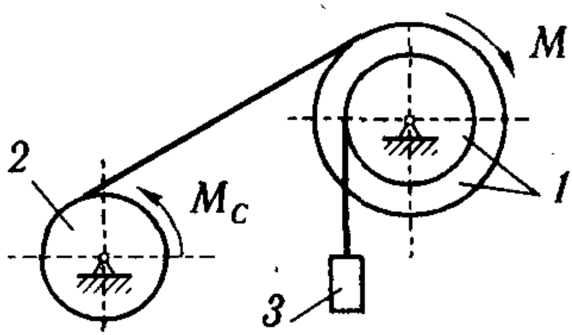


Рис. Д2.8

Покажем все внешние силы (силы тяжести и реакции опор). Затем расчленим систему на отдельные звенья. В местах разрыва нитей внутренние силы натяжения перейдут в разряд внешних с условием, что сумма этих сил будет равна нулю, так как система внутренних сил для любого тела всегда уравновешена. Затем запишем дифференциальные уравнения движения для каждого тела (рис. Д2.9):

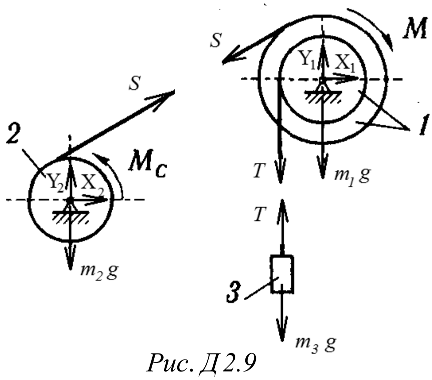


Рис. Д 2.9

$$I_1\varepsilon_1 = M - SR_1 - Tr_1\,,$$

$$I_2\varepsilon_2 = SR_2 - M_c\,,$$

$$m_3 a_3 = T - m_3 g\,.$$

Запишем связь между кинематическими параметрами системы тел соотношениями:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{R_1}{R_2}, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r_1}\frac{R_1}{r_2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_3}{r_1}, \quad \omega_1 = \frac{V_3}{r_1}.$$

Запишем выражения моментов инерций дисков:

$$I_1 = m_1 i_1^2\,, \quad I_2 = m_2 R_2^2\,.$$

Перепишем систему дифференциальных уравнений с учетом полученных соотношений:

$$m_1 i_1^2 \frac{a_3}{r_1} = M - SR_1 - Tr_1 ;$$

$$m_2 R_2^2 \frac{a_3}{r_1} \frac{R_1}{R_2} = SR_2 - M_C ;$$

$$m_3 a_3 = T - m_3 g .$$

Решая систему относительно ускорения груза *3*, получим

$$a_3 = \frac{MR_2 - m_3 g r_1 R_2 - M_C R_1}{m_1 i_1^2 \dfrac{R_2}{r_1} + m_3 R_2 r_1 + \dfrac{m_2 R_2^2 R_1^2}{r_1 R_2}} .$$

Подставив числовые значения, получим

$$a_3 = 82,2 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 0,82 \text{ м/с}^2 .$$

Найдем силы натяжения нитей:

$$T = m_3 a_3 + m_3 g = 400 \cdot 0,82 + 400 \cdot 10 = 4328 \text{ Н};$$

$$S = \frac{M - Tr_1 - m_1 i_1^2 \dfrac{a_3}{r_1}}{R_1} = 4405 \text{ Н.}$$

ЗАДАНИЕ Д3

Исследование поступательного, вращательного и плоского движения твердого тела

Механическая система (рис. Д3.1) из состояния покоя под действием заданных сил приводится в движение так, что колесо B катится без скольжения. Массы тел системы, действующая сила и момент сил приведены в таблице исходных данных. Коэффициент трения качения колеса *B* равен $f_к = 0{,}05R_B$. При движении тела *A* по наклонной плоскости коэффициент трения скольжения равен $f = 0{,}01$. Углы: $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$. Радиусы колес: $R_B = 0{,}6$ м; $r_B = 0{,}4$ м; $r_E = 0{,}3$ м; $R_D = 0{,}5$ м; $r_D = 0{,}2$ м. Полагая, что колеса представляют собой сплошные однородные диски, а нити невесомые и нерастяжимые, найти ускорение груза *A* и натяжения нитей на всех участках с помощью дифференциальных уравнений движения всех тел системы.

Рекомендации при подготовке к выполнению заданий

1. Проработать теоретический материал: дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения механической системы.
2. В соответствии с полученным заданием начертить схему механической системы и записать условия задачи (все параметры перевести в систему СИ).
3. Расчленить систему на отдельные элементы и начертить их со всеми действующими силами и моментами сил. Записать дифференциальные уравнения движения всех элементов системы.
4. Связав между собой ускорения всех элементов системы, выразить их через ускорение одного элемента, например, груза *A*. Составить систему уравнений, где неизвестными будут натяжения нитей, ускорение одного из элементов и сила трения колеса *B* о наклонную плоскость.

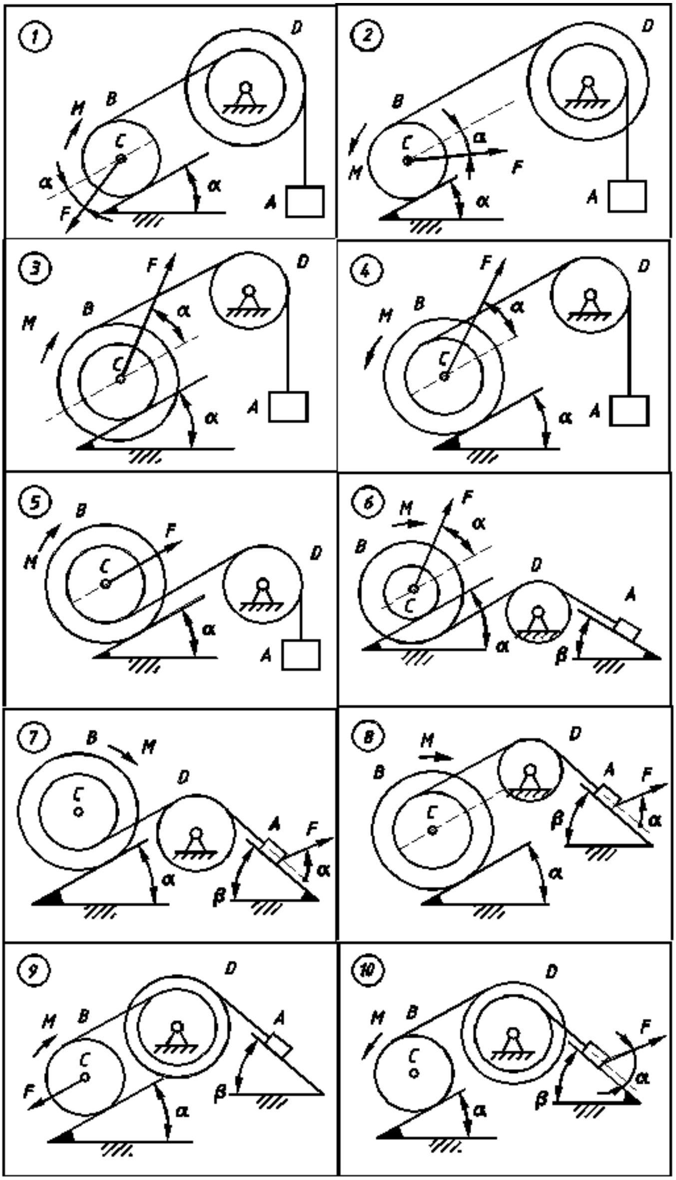


Рис. Д3.1 (см. также с. 97–100)

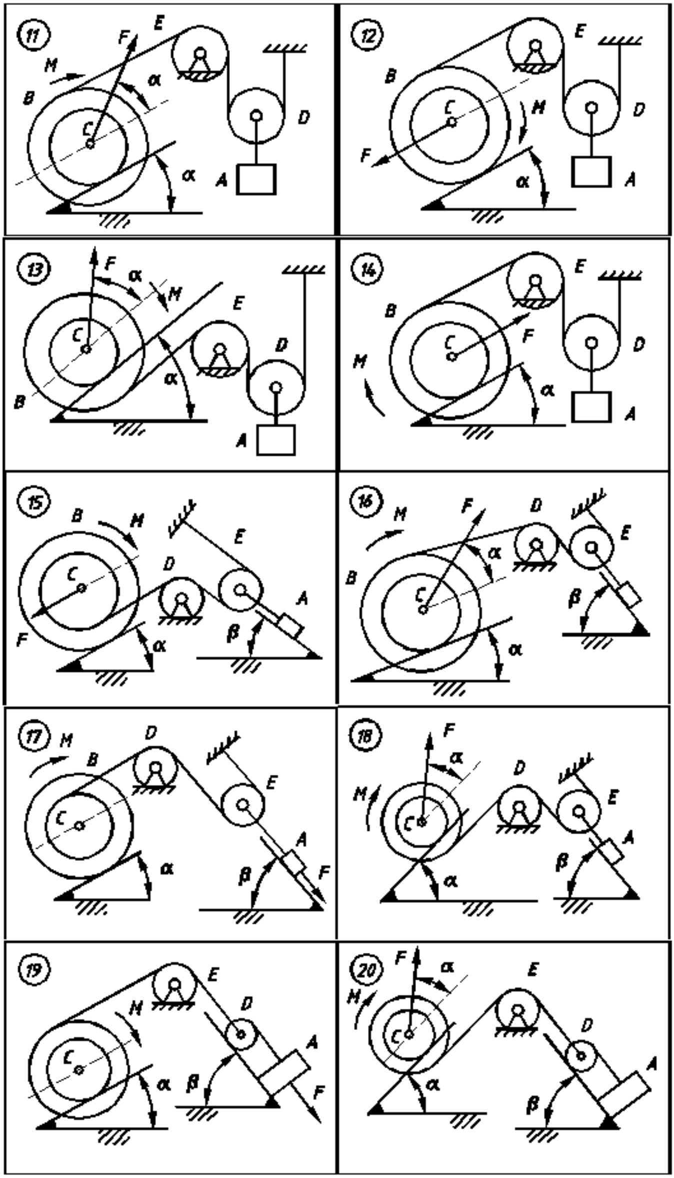


Рис. Д3.1 (продолжение)

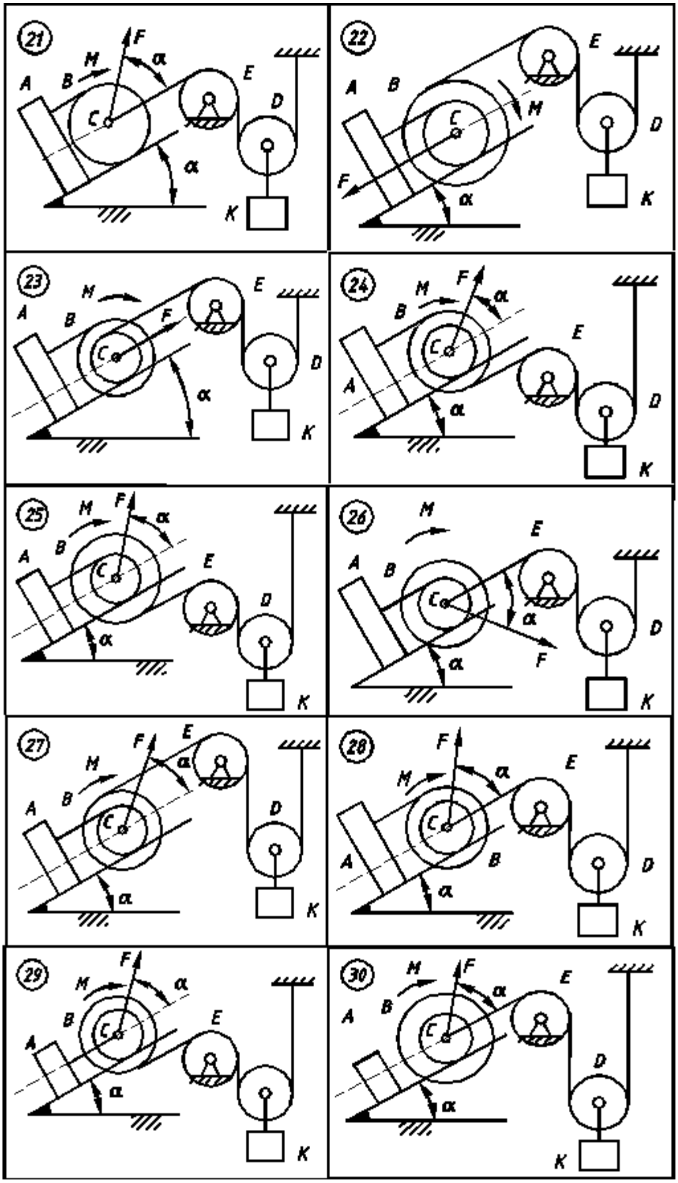


Рис. Д3.1 (продолжение)

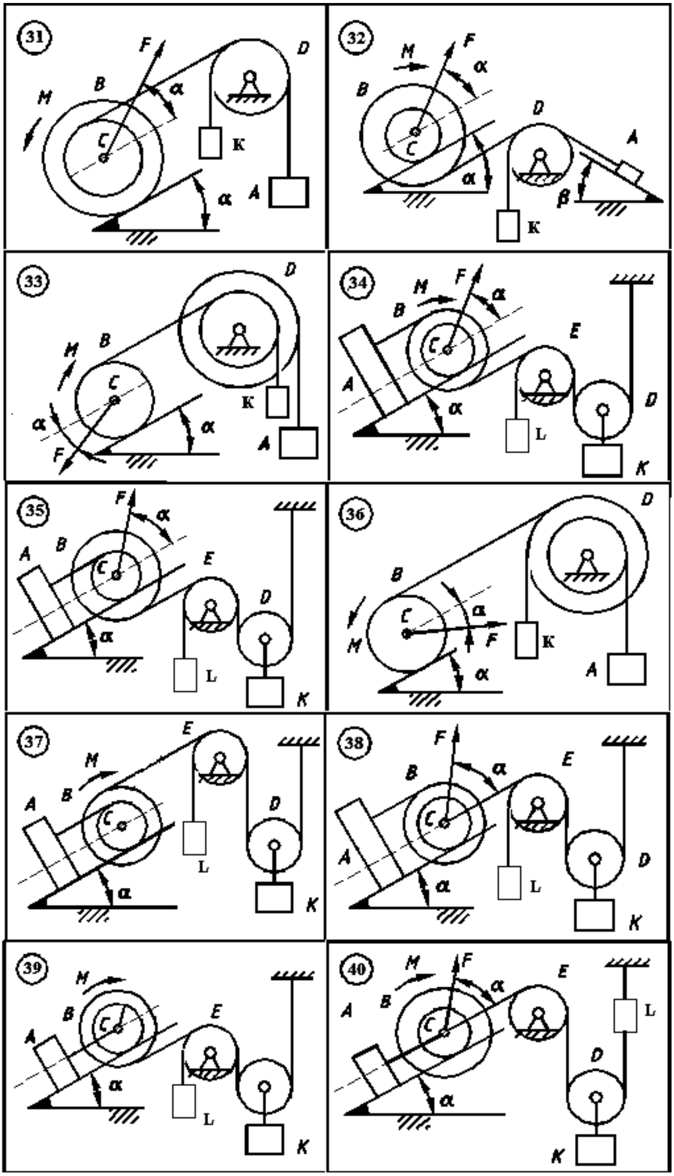


Рис. Д3.1 (продолжение)

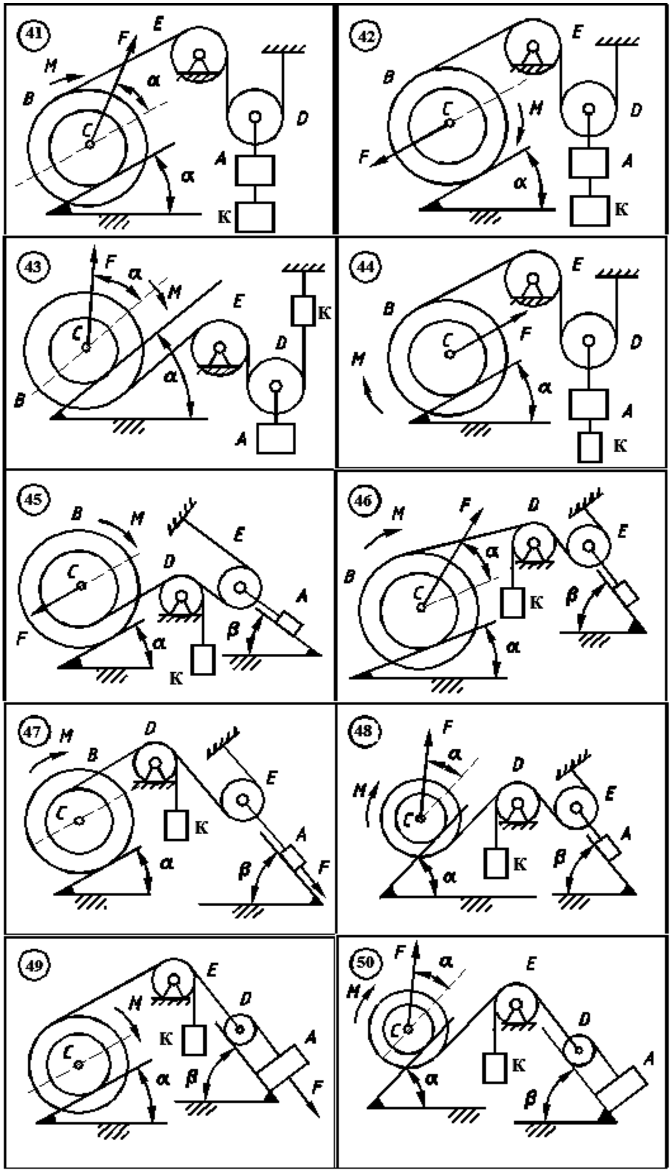


Рис. Д3.1 (окончание)

Исходные данные

Номер варианта	m_A	m_B	m_D	m_K	m_L	M, Н · м	F, Н
	кг						
1	4	3	1	–	–	10	40
2	5	4	1	–	–	15	10
3	6	5	2	–	–	8	3
4	7	6	2	–	–	30	10
5	8	7	2	–	–	10	5
6	4	2	3	–	–	25	90
7	10	7	2	–	–	10	5
8	12	10	2	–	–	8	15
9	14	12	2	–	–	5	20
10	15	14	1	–	–	6	25
11	20	18	1	–	–	8	5
12	25	10	2	–	–	10	58
13	2	5	2	–	–	28	90
14	15	20	2	–	–	5	3
15	25	15	2	–	–	3	10
16	30	20	2	–	–	8	5
17	25	18	2	–	–	10	20
18	3	2	2	–	–	50	90
19	25	26	2	–	–	7	15
20	4	3	1	–	–	50	90
21	10	20	1	15	–	9	8
22	15	30	1	20	–	10	15
23	25	38	2	30	–	12	5
24	3	2	2	3	–	70	10
25	5	2	1	4	–	80	8
26	40	30	2	45	–	10	15
27	35	20	1	40	–	8	10
28	30	15	1	35	–	6	12
29	3	2	2	4	–	100	10
30	30	25	2	50	–	6	12

Окончание таблицы

Номер варианта	m_A	m_B	m_D	m_K	m_L	M, Н · м	F, Н
	кг						
31	4	3	1	2	–	10	40
32	5	4	1	20	–	75	10
33	6	5	2	2	–	8	3
34	3	6	2	2	1	110	10
35	1	3	2	2	10	–	20
36	9	8	3	2	–	5	3
37	10	7	2	2	1	10	
38	12	10	2	1	3		15
39	8	6	2	3	10	100	–
40	15	14	1	4	5	6	25
41	20	18	1	5	–	8	5
42	25	20	2	6	–	10	18
43	5	5	2	7	–	58	10
44	15	20	2	8	–	5	3
45	25	15	2	7	–	3	10
46	30	20	2	4	–	8	5
47	25	18	2	5	–	10	20
48	3	5	2	10	–	70	10
49	25	26	2	7	–	7	15
50	4	3	1	108	–	80	10

5. Решая систему уравнений, найти неизвестные значения сил и ускорения всех элементов системы. После этого перейти к выполнению второго пункта задания.

Примечание. Коэффициент трения скольжения, заданный в условиях задачи, относится только к грузу *A*, скользящему по наклонной плоскости.

Пример выполнения задания

Механическая система (рис. Д3.2) из неподвижного состояния под действием приложенных сил и пары сил с моментом *M* приводится в движение. Массы входящих в систему тел равны $m_A = 2$ кг, $m_D = 1$ кг,

$m_B = 5$ кг. На колесо B, катящееся без скольжения, действуют сила $F = 15$ Н под углом 30° к горизонту и момент $M = 30$ Н·м. Коэффициент трения качения $f_к = 0{,}05R_B$. Считаем, что колесо представляет собой сплошные однородные диски. Определить ускорение груза A, натяжение нитей, силу трения, обеспечивающую качение колеса B без скольжения. При этом следует воспользоваться дифференциальными уравнениями движения элементов системы.

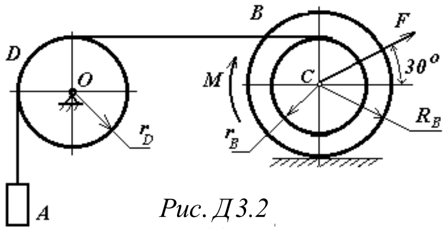


Рис. Д3.2

Решение

Предположим, что груз A движется вверх, шкив D вращается по часовой стрелке, а колесо B катится вправо.

Рассматривая движения каждого из элементов системы в отдельности, напишем дифференциальные уравнения движения для каждого из этих элементов. Для груза A, движущегося поступательно (рис. Д3.3), дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m_A \ddot{x}_A = T_1 - m_A g. \tag{Д3.1}$$

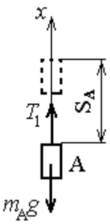


Рис. Д3.3

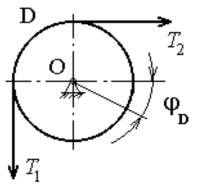


Рис. Д3.4

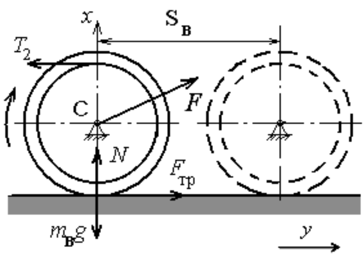


Рис. Д3.5

Для шкива D, вращающегося вокруг центра O (рис. Д3.4), дифференциальное уравнение вращения представим в форме

$$J_D \ddot{\varphi}_D = T_2 R_D - T_1 R_D. \tag{Д3.2}$$

Для колеса B (рис. Д3.5), движущегося плоскопараллельно без скольжения (что обусловлено наличием силы трения), дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$m_B \ddot{x}_C = N - m_B g + F \sin\alpha; \qquad (Д3.3)$$

$$m_B \ddot{y}_C = F \cos\alpha - T_2 + F_{\text{тр}}; \qquad (Д3.4)$$

$$J_C \ddot{\varphi}_B = M - M_{\text{тр.к}} - T_2 r_B - F_{\text{тр}} R_B. \qquad (Д3.5)$$

Запишем связь между кинематическими параметрами системы тел соотношениями:

$$\ddot{\varphi}_D = \frac{\ddot{x}_A}{R_D}; \quad \ddot{\varphi}_B = \frac{\ddot{x}_A}{R_B + r_B}; \quad \ddot{y}_c = \frac{\ddot{x}_A R_B}{R_B + r_B}. \qquad (Д3.6)$$

Так как движение колеса B в направлении оси x отсутствует, то следует принять $\ddot{x}_C = 0$, и из соотношения (Д3.3) получим значение силы нормального давления

$$N = m_B g - F \sin\alpha. \qquad (Д3.7)$$

Тогда момент сил трения качения, действующий на колесо B, будет равным

$$M_{\text{тр.к}} = f_{\text{к}} N = f_{\text{к}} (m_B g - F \sin\alpha). \qquad (Д3.8)$$

С учетом соотношений (Д3.6) и (Д3.8) дифференциальные уравнения движения всех элементов системы (Д3.1), (Д3.2), (Д3.4) и (Д3.5) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
& m_A \ddot{x}_A = T_1 - m_A g, \\
& \frac{J_0 \ddot{x}_A}{R_D} = (T_2 - T_1) R_D, \\
& \frac{m_B \ddot{x}_A R_B}{R_B + r_B} = F \cos\alpha - T_2 + F_{\text{тр}}, \\
& \frac{J_C \ddot{x}_A}{R_B + r_B} = M = f_{\text{к}} (m_B g - F \sin\alpha) - T_2 r_B - F_{\text{тр}} R_B.
\end{aligned}\right\} \qquad (Д3.9)$$

Систему уравнений (Д3.9) можно решить относительно неизвестных параметров $\ddot{x}_A$, T_1, T_2 и $F_{\text{тр}}$. Из первого уравнения получим

$$T_1 = m_A \ddot{x}_A + m_A g. \tag{Д3.10}$$

Из второго уравнения системы (Д3.9) с учетом равенства (Д3.10) находим

$$T_2 = \frac{J_0 \ddot{x}_A}{R_D{}^2} + m_A \ddot{x}_A + m_A g. \tag{Д3.11}$$

Из третьего уравнения системы (Д3.9) с учетом соотношения (Д3.11) определим значение силы трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_B \ddot{x}_A R_B}{R_B + r_B} - F\cos\alpha + \frac{J_0 \ddot{x}_A}{R_D{}^2} + m_A \ddot{x}_A + m_A g\ . \tag{Д3.12}$$

Подставив значение силы трения из уравнения (Д3.12) и натяжение нити из соотношения (Д3.11) в четвертое уравнение системы (Д3.9), получим уравнение с одним неизвестным относительно $\ddot{x}_A$:

$$\ddot{x}_A = \frac{M - f_{\text{к}}(m_B g - F\sin\alpha) - m_A g(R_B + r_B) + F\cos\alpha R_B}{\dfrac{J_C}{R_B + r_B} + \dfrac{J_0}{R_D{}^2}(R_B + r_B) + m_A(R_B + r_B) + \dfrac{m_B R_B{}^2}{R_B + r_B}} =$$

$$= \frac{30 - 0{,}05\cdot 0{,}9(5\cdot 9{,}81 - 15\cdot 0{,}5) - 2\cdot 9{,}8(0{,}9 + 0{,}6) + 15\cdot 0{,}866\cdot 0{,}9}{\dfrac{5\cdot 0{,}9^2}{2(0{,}9+0{,}6)} + \dfrac{1\cdot 0{,}3^2(0{,}9+0{,}6)}{2\cdot 0{,}3^2} + 2(0{,}9+0{,}6) + \dfrac{5\cdot 0{,}9^2}{0{,}9+0{,}6}} =$$

$$= 1{,}3\ \text{м/с}^2. \tag{Д3.13}$$

С учетом полученного результата из соотношений (Д3.10), (Д3.11) и (Д3.12) определим значения усилий натяжения нитей и силы трения:

$$T_1 = m_A \ddot{x}_A + m_A g = 2\cdot 1{,}3 + 2\cdot 9{,}8 = 22{,}3\ \text{Н}; \tag{Д3.14}$$

$$T_2 = \frac{J_0 \ddot{x}_A}{R_D{}^2} + m_A \ddot{x}_A + m_A g = \frac{1\cdot 0{,}3^2}{2\cdot 0{,}3^2}1{,}3 + 2\cdot 1{,}3 + 2\cdot 9{,}8 = 22{,}94\ \text{Н}; \tag{Д3.15}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_B \ddot{x}_A R_B}{R_B + r_B} - F\cos\alpha + \frac{J_0 \ddot{x}_A}{r_D^{\;2}} + m_A \ddot{x}_A + m_A g = \frac{5 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}9 \cdot 0{,}6} -$$

$$-15 \cdot 0{,}866 + \frac{1 \cdot 0{,}3^2 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 0{,}3^2} + 2 \cdot 1{,}3 + 2 \cdot 9{,}8 = 13{,}9 \text{ Н}. \qquad (Д3.16)$$

Чтобы колесо B катилось без скольжения, коэффициент трения скольжения должен быть не менее величины

$$f \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{13{,}9}{5 \cdot 9{,}8 - 15{,}1} = 0{,}3. \qquad (Д3.17)$$

Таким образом, в результате расчетов получено:

$$\ddot{x}_A = 1{,}3 \text{ м/с}^2; \;\; T_1 = 22{,}3 \text{ Н}; \;\; T_2 = 22{,}9 \text{ Н}; \;\; F_{\text{тр}} = 13{,}9 \text{ Н}.$$

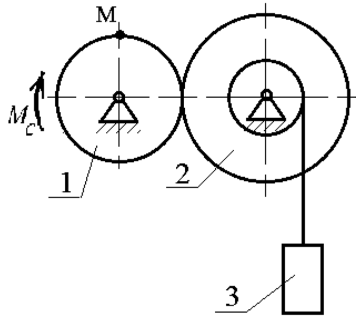
ЗАДАНИЕ Д4

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы, совершающей поступательное и вращательное движение

Механическая система (схемы механизмов показаны на рис. Д4.1–Д4.7) из состояния покоя под действием веса груза приводится в движение. Начальное положение системы показано на рис. Д4.1–Д4.7. Массы тел системы $(m_1,\, m_2,\, m_3)$ приведены в таблице. Геометрические размеры тел $(R_1,\, r_1,\, R_2,\, r_2)$ указаны на рисунках. Все колеса считать сплошными однородными дисками. Коэффициент трения груза о наклонную плоскость f = 0,2. На колесо *1* действует пара сил сопротивления с моментом M_C = 2 Н · м.

Используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы и пренебрегая массой нитей, определить скорость груза *3* и скорость точки *M* при перемещении груза на расстояние S = 2 м.

Пример выполнения задания

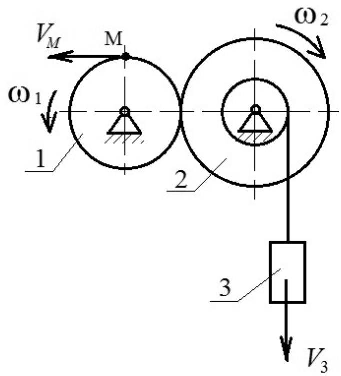


Дано: R_1 = 0,4 м; R_2 = 0,6 м; r_2 = = 0,2 м; m_1 = 4 кг; m_2 = 8 кг; m_3 = 10 кг; $S = 2$ м.

Найти: V_3 и V_M .

Решение

Так как система состоит из абсолютно твердых тел, а нити нерастяжимые, то это неизменяемая система с идеальными связями. Запишем для этой механической системы теорему об изменении кинетической энергии: $T - T_0 = \sum A_k^A$.



Так как в начальном положении система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Для определения T изобразим систему в конечном положении и покажем угловые скорости тел и векторы скоростей точек.

$T = T_1 + T_2 + T_3$. Опишем кинематические связи:

$$\omega_2 = \frac{V_3}{r_2}; \ \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = \frac{V_3}{r_2}\frac{R_2}{R_1};$$

$$V_M = \omega_1 R_1 = \frac{V_3}{r_2}\frac{R_2}{R_1} R_1 = \frac{V_3}{r_2}\frac{R_2}{} .$$

Колеса *1* и *2* совершают вращательное движение, а груз *3* – поступательное. Следовательно,

$$T_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{\dfrac{m_1 R_1^2}{2}\left(\dfrac{V_3 R_2}{r_2 R_1}\right)^2}{2} = \frac{m_1 R_2^2}{4 r_2^2} V_3^2 ;$$

$$T_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} = \frac{\dfrac{m_2 R_2^2}{2}\left(\dfrac{V_3}{r_2}\right)^2}{2} = \frac{m_2 R_2^2}{4r_2^2} V_3^2; \quad T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

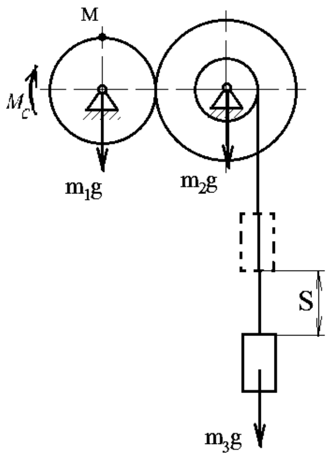
Тогда

$$T = \left(\frac{m_1 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_3}{2}\right) V_3^2.$$

Найдем работу всех активных сил, приложенных к системе:

$$\sum A_k^A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Покажем все активные силы, в данной задаче это силы тяжести и момент сил сопротивления.



$A_1 = A_{mg} + A_{M_C}$. Работа веса $A_{mg} = 0$, так как центр масс колеса неподвижен. $A_{M_C} = -M_C\,\varphi_1 = -M_C \dfrac{S}{r_2}\dfrac{R_2}{R_1}$. Работа силы тяжести второго тела равна нулю, так как его центр масс также неподвижен. Работа груза *3* равна $A_3 = m_3 g S$.

Приравниваем работу сил и кинетическую энергию:

$$\left(\frac{m_1 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_3}{2}\right) V_3^2 = m_3 g S - M_C \frac{S}{r_2}\frac{R_2}{R_1}.$$

Находим скорость груза *3*:

$$V_3 = \sqrt{\frac{m_3 g S - M_C \dfrac{S}{r_2}\dfrac{R_2}{R_1}}{\left(\dfrac{m_1 R_2^2}{4r_2^2} + \dfrac{m_2 R_2^2}{4r_2^2} + \dfrac{m_3}{2}\right)}} = 2{,}3 \text{ м/с};$$

$$V_M = \frac{V_3}{r_2}\frac{R_2}{} = 2{,}3\,\frac{0{,}6}{0{,}2} = 6{,}9 \text{ м/с}.$$

Исходные данные

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	Номер варианта	m_1	m_2	m_3
	кг				кг		
1	2	8	4	27	10	30	100
2	4	8	12	28	2	8	14
3	4	2	8	29	4	8	12
4	8	2	4	30	4	2	8
5	2	20	15	31	2	8	4
6	15	40	100	32	0,8	4	40
7	15	10	30	33	10	30	100
8	0,5	6	20	34	10	30	100
9	6	5	40	35	2	20	15
10	6	5	50	36	15	40	100
11	3	4	10	37	15	10	30
12	3	5	50	38	0,5	6	20
13	0,8	4	40	39	16	5	50
14	10	30	100	40	3	14	10
15	6	5	40	41	3	15	50
16	6	5	50	42	0,8	4	40
17	3	4	10	43	0,8	4	40
18	3	5	50	44	10	30	100
19	1	3	40	45	6	5	40
20	5	4	25	46	6	5	50
21	3	7	11	47	3	4	10
22	7	3	11	48	3	5	50
23	4	4	30	49	1	3	40
24	3	2	10	50	5	4	25
25	2	1	40	51	8	4	24
26	4	12	30	52	0,8	4	14

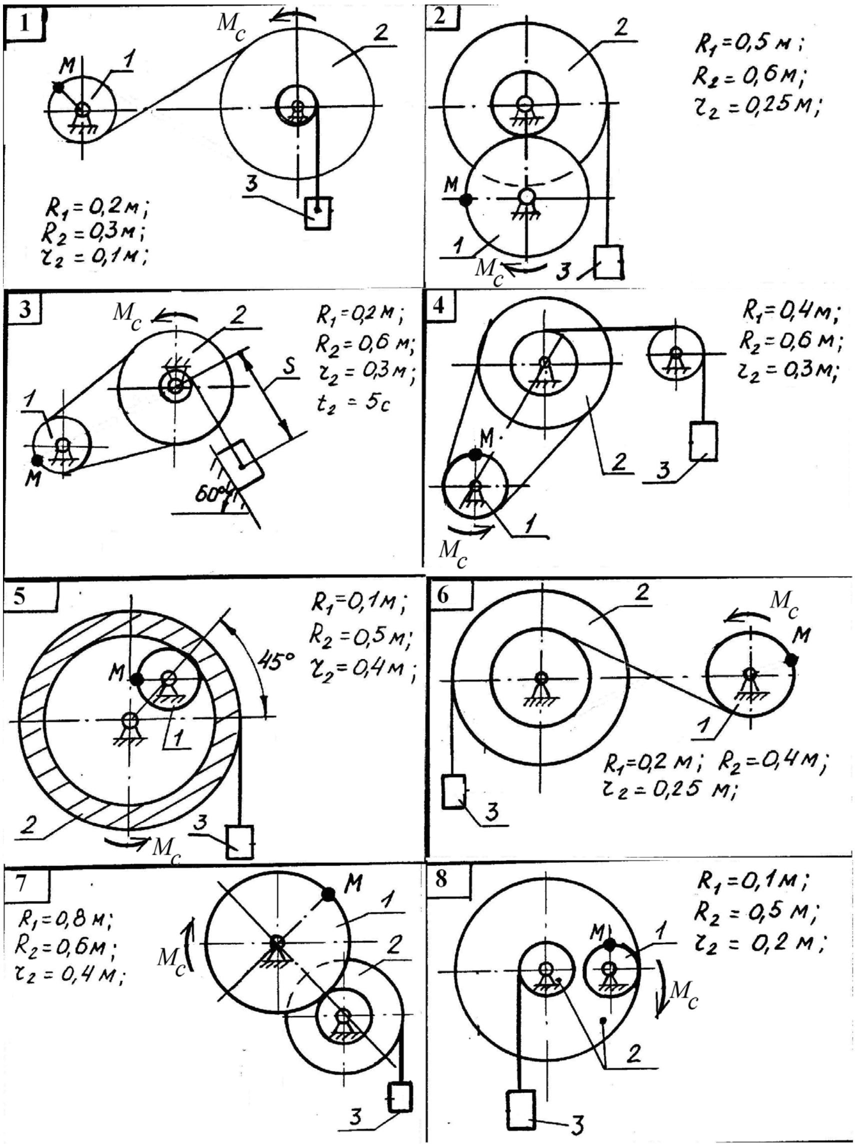
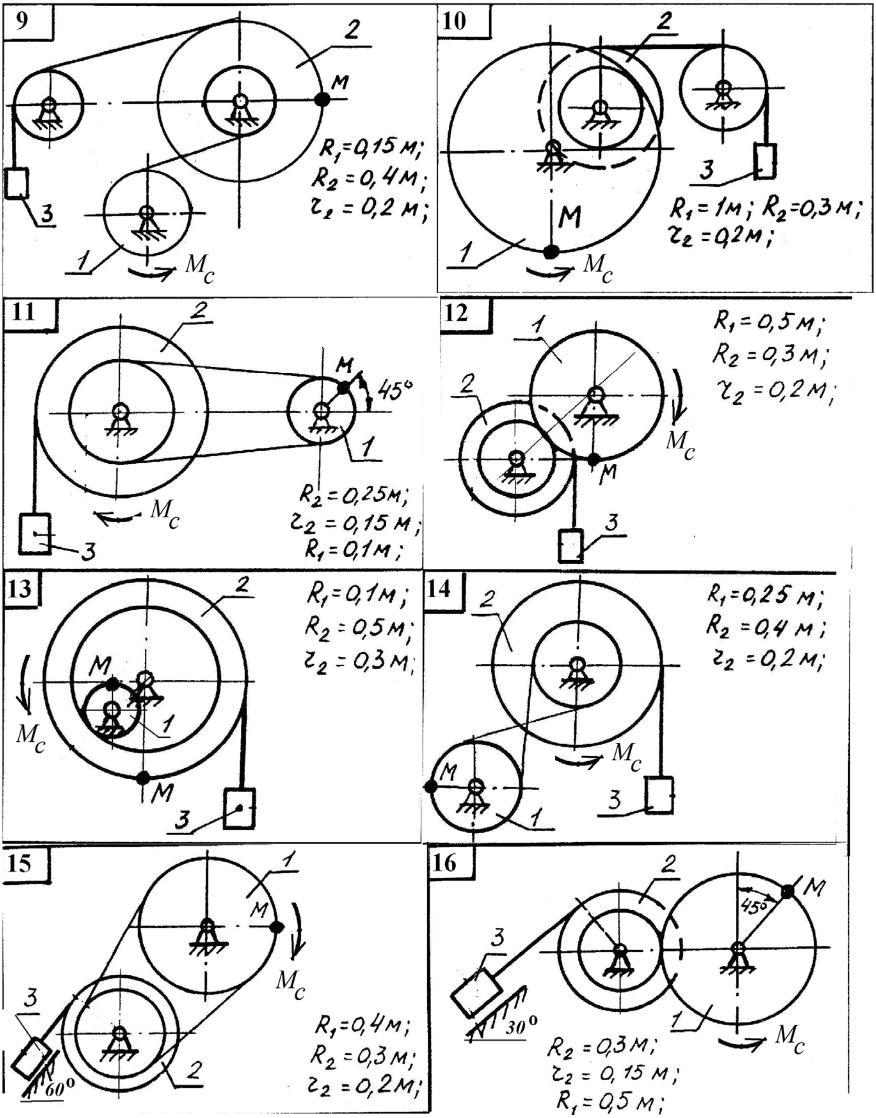

1
M
1
M_C
2
3
$R_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,1$ м;
2
2
$R_1 = 0,5$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,25$ м;
M
1
M_C
3
3
M_C
2
$R_1 = 0,2$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,3$ м;
$t_2 = 5$ с
S
1
M
60°
4
$R_1 = 0,4$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,3$ м;
M
2
3
1
M_C
5
$R_1 = 0,1$ м;
$R_2 = 0,5$ м;
$r_2 = 0,4$ м;
45°
M
1
2
3
M_C
6
2
M_C
M
1
$R_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,4$ м;
$r_2 = 0,25$ м;
3
7
M
1
$R_1 = 0,8$ м;
$R_2 = 0,6$ м;
$r_2 = 0,4$ м;
M_C
2
3
8
$R_1 = 0,1$ м;
$R_2 = 0,5$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
M
1
M_C
2
3

Рис. Д4.1



9
2
M
$R_1 = 0{,}15$ м;
$R_2 = 0{,}4$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
3
1
M_c
10
2
3
M
$R_1 = 1$ м; $R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
1
M_c
11
2
M
45°
1
M_c
3
$R_2 = 0{,}25$ м;
$r_2 = 0{,}15$ м;
$R_1 = 0{,}1$ м;
12
$R_1 = 0{,}5$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
1
2
M_c
M
3
13
2
$R_1 = 0{,}1$ м;
$R_2 = 0{,}5$ м;
$r_2 = 0{,}3$ м;
M
1
M_c
M
3
14
2
$R_1 = 0{,}25$ м;
$R_2 = 0{,}4$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
M_c
M
3
1
15
1
M
M_c
3
$R_1 = 0{,}4$ м;
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}2$ м;
2
60°
16
2
M
45°
3
30°
1
M_c
$R_2 = 0{,}3$ м;
$r_2 = 0{,}15$ м;
$R_1 = 0{,}5$ м;

Рис. Д4.2

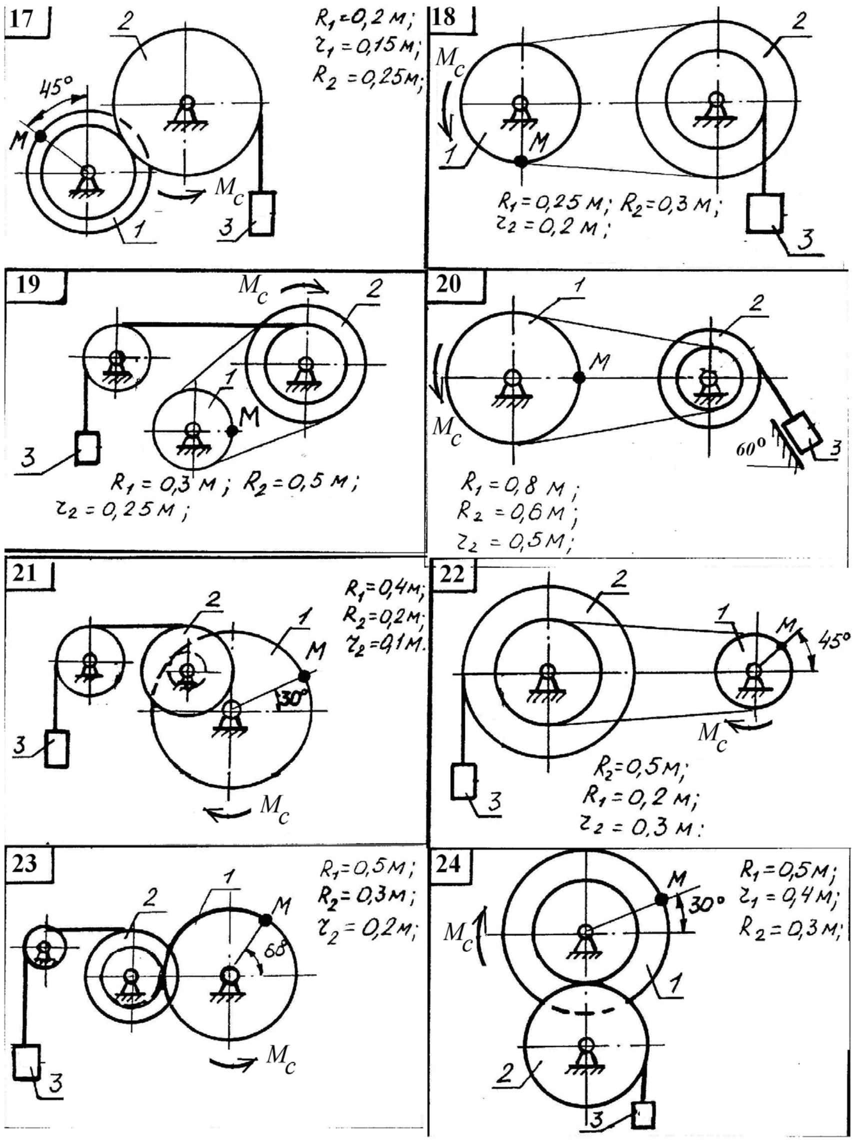

17
$R_1 = 0,2$ м; $r_1 = 0,15$ м; $R_2 = 0,25$ м;
45°
M
M_c
1
2
3
18
M_c
M
1
2
3
$R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м;
19
M_c
1
2
3
M
$R_1 = 0,3$ м; $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,25$ м;
20
1
2
M
M_c
60°
3
$R_1 = 0,8$ м; $R_2 = 0,6$ м; $r_2 = 0,5$ м;
21
$R_1 = 0,4$ м; $R_2 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м.
1
2
M
30°
3
M_c
22
2
1
M
45°
M_c
3
$R_2 = 0,5$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,3$ м:
23
$R_1 = 0,5$ м; $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м;
1
2
M
60°
3
M_c
24
M
30°
$R_1 = 0,5$ м; $r_1 = 0,4$ м; $R_2 = 0,3$ м;
M_c
1
2
3

Рис. Д4.3

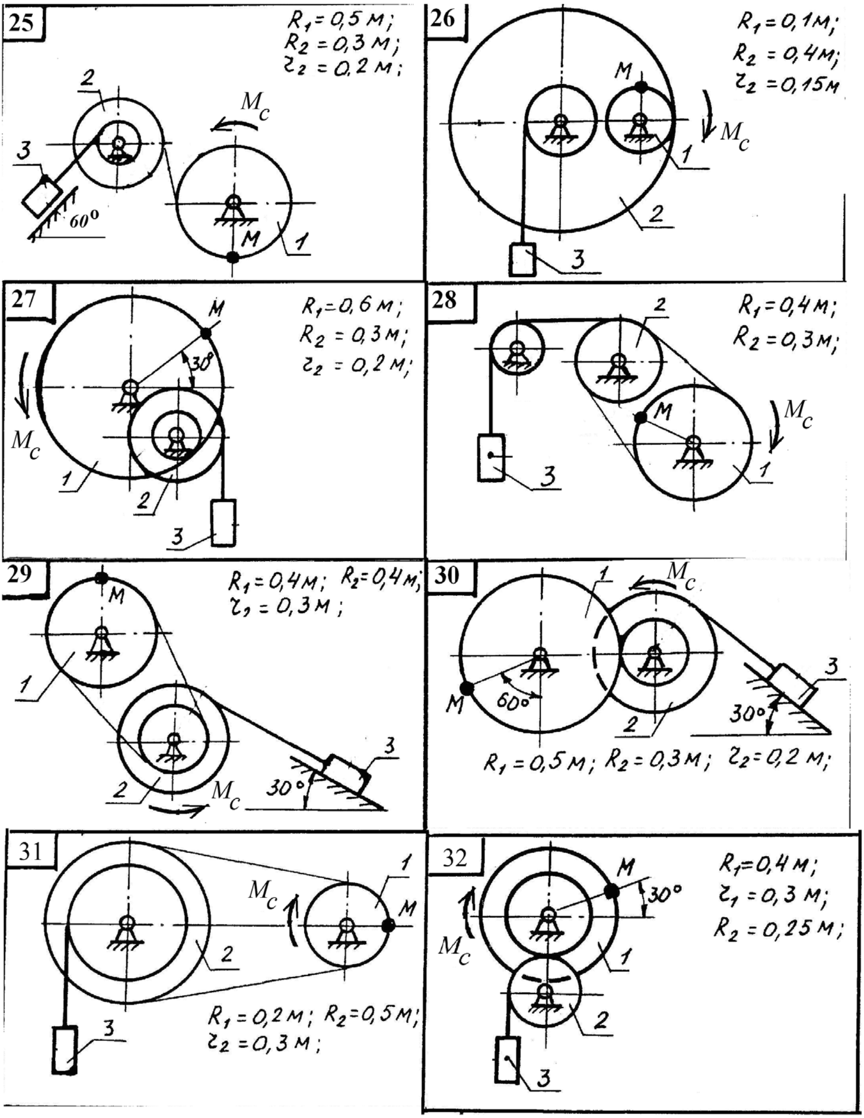

25
R₁ = 0,5 м;
R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,2 м;
2
3
60°
M_c
M
1
26
R₁ = 0,1м;
R₂ = 0,4м;
r₂ = 0,15м
M
M_c
1
2
3
27
R₁ = 0,6 м;
R₂ = 0,3м;
r₂ = 0,2 м;
M
30°
M_c
1
2
3
28
R₁ = 0,4м;
R₂ = 0,3м;
2
M
M_c
3
1
29
R₁ = 0,4м; R₂ = 0,4м;
r₁ = 0,3м;
M
1
2
M_c
30°
3
30
M_c
1
3
30°
M
60°
2
R₁ = 0,5 м; R₂ = 0,3 м; r₂ = 0,2 м;
31
M_c
1
M
2
3
R₁ = 0,2 м; R₂ = 0,5 м;
r₂ = 0,3 м;
32
M
30°
R₁ = 0,4 м;
r₁ = 0,3 м;
R₂ = 0,25 м;
M_c
1
2
3

Рис. Д4.4

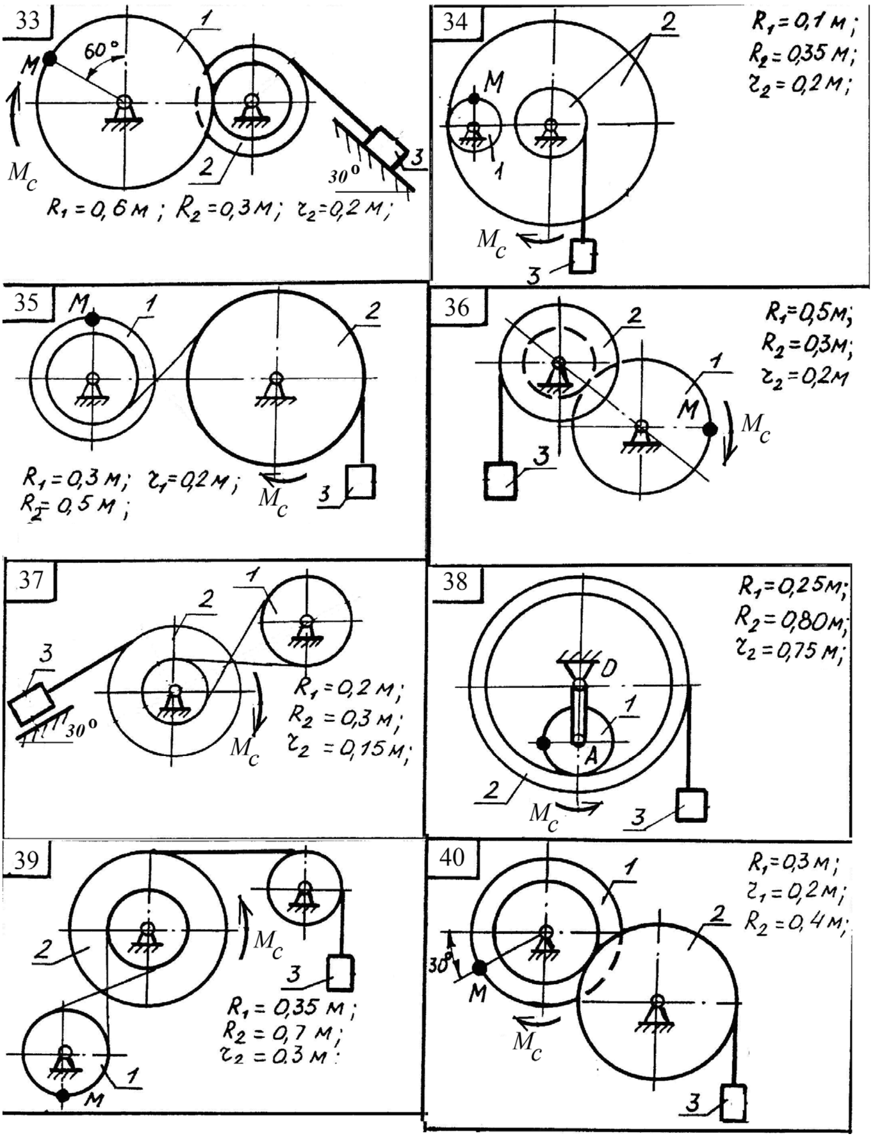

33
1
60°
M
M_c
2
3
30°
$R_1 = 0,6$ м ; $R_2 = 0,3$ м ; $r_2 = 0,2$ м ;
34
2
M
1
M_c
3
$R_1 = 0,1$ м ;
$R_2 = 0,35$ м ;
$r_2 = 0,2$ м ;
35
M
1
2
$R_1 = 0,3$ м ; $r_1 = 0,2$ м ;
$R_2 = 0,5$ м ;
M_c
3
36
2
$R_1 = 0,5$м;
$R_2 = 0,3$м;
$r_2 = 0,2$м
1
M
M_c
3
37
1
2
3
30°
M_c
$R_1 = 0,2$ м ;
$R_2 = 0,3$ м ;
$r_2 = 0,15$ м ;
38
$R_1 = 0,25$м;
$R_2 = 0,80$м;
$r_2 = 0,75$ м;
D
1
A
2
M_c
3
39
2
M_c
3
$R_1 = 0,35$ м ;
$R_2 = 0,7$ м ;
$r_2 = 0,3$ м ;
1
M
40
1
$R_1 = 0,3$ м ;
$r_1 = 0,2$ м ;
$R_2 = 0,4$ м ;
2
30°
M
M_c
3

Рис. Д4.5

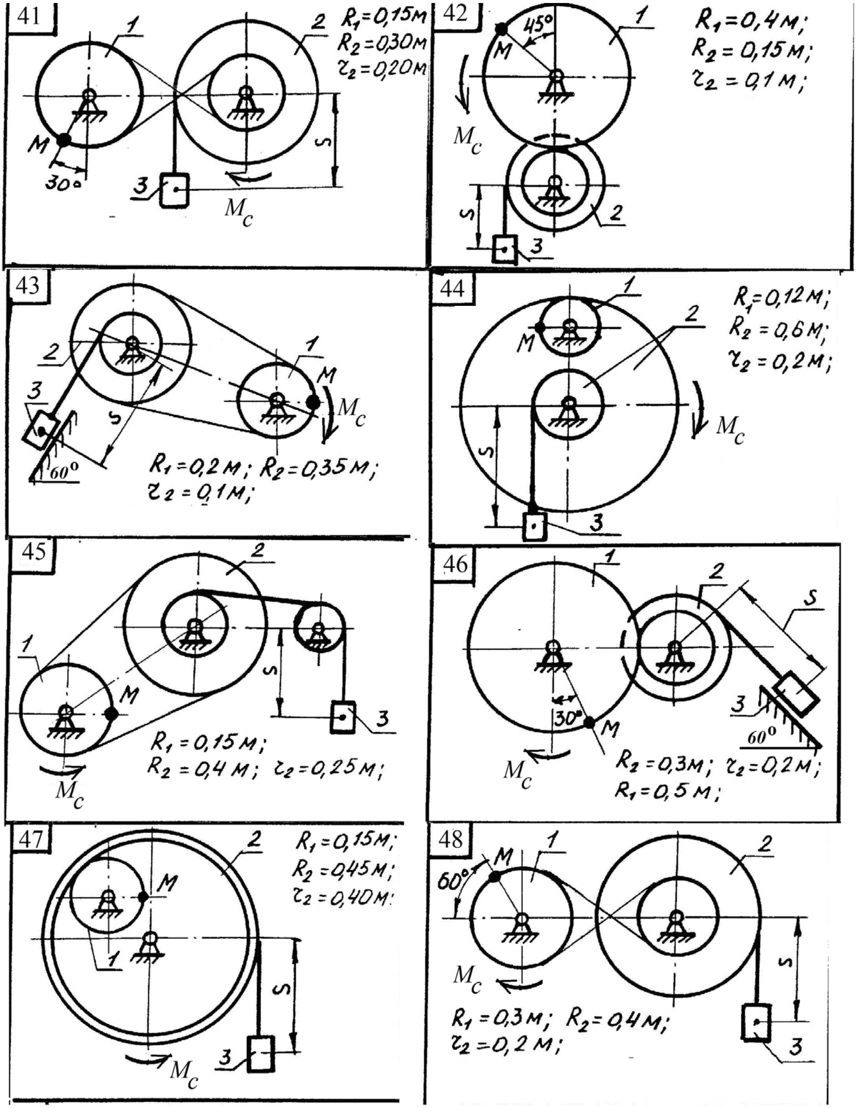

41
1
2
$R_1=0{,}15м$
$R_2=0{,}30м$
$r_2=0{,}20м$
M
30°
3
s
M_c
42
1
45°
M
$R_1=0{,}4\,м;$
$R_2=0{,}15\,м;$
$r_2=0{,}1\,м;$
M_c
2
s
3
43
2
3
1
M
M_c
s
60°
$R_1=0{,}2\,м;\ R_2=0{,}35\,м;$
$r_2=0{,}1\,м;$
44
1
2
M
$R_1=0{,}12\,м;$
$R_2=0{,}6\,м;$
$r_2=0{,}2\,м;$
M_c
s
3
45
2
1
M
s
3
$R_1=0{,}15\,м;$
$R_2=0{,}4\,м;\ r_2=0{,}25\,м;$
M_c
46
1
2
S
3
60°
30°
M
M_c
$R_2=0{,}3м;\ r_2=0{,}2\,м;$
$R_1=0{,}5\,м;$
47
2
M
1
$R_1=0{,}15м;$
$R_2=0{,}45м;$
$r_2=0{,}40м;$
s
3
M_c
48
M
1
2
60°
M_c
s
$R_1=0{,}3м;\ R_2=0{,}4м;$
$r_2=0{,}2\,м;$
3

Рис. Д4.6

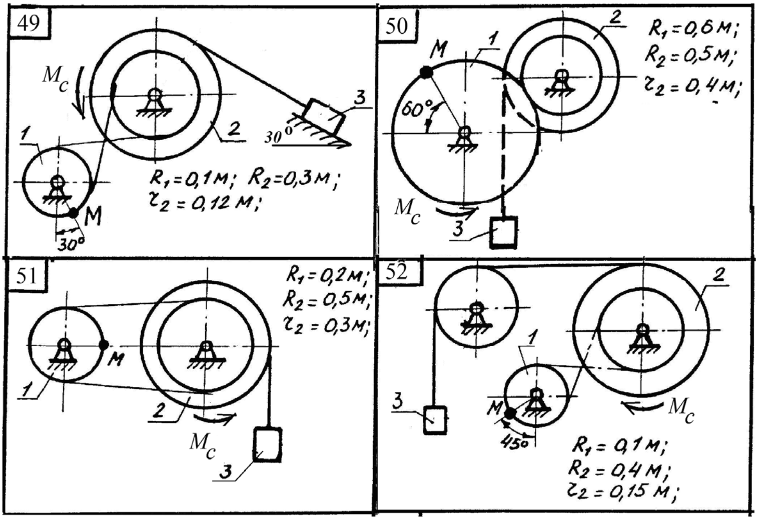


Рис. Д4.7

ЗАДАНИЕ Д5

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы, совершающей поступательное, вращательное и плоское движения

Механическая система (рис. Д5.1) из состояния покоя под действием заданных сил приводится в движение так, что колесо B катится без скольжения. Массы элементов системы, действующая сила и момент сил приведены в таблице исходных данных, масса тела E равно нулю. Коэффициент трения качения колеса B равен $f_к = 0{,}05R_B$. При движении тела A по наклонной плоскости коэффициент трения скольжения равен $f = 0{,}01$. Углы: $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$. Радиусы колес: $R_B = 0{,}6$ м; $r_B = 0{,}4$ м; $r_E = 0{,}3$ м; $R_D = 0{,}5$ м; $r_D = 0{,}2$ м.

Полагая, что радиус инерции ступенчатых колес равен большему радиусу колеса, а нити невесомые и нерастяжимые, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы найти скорость груза A после того, как он пройдет расстояние $S_A = 3{,}0$ м.

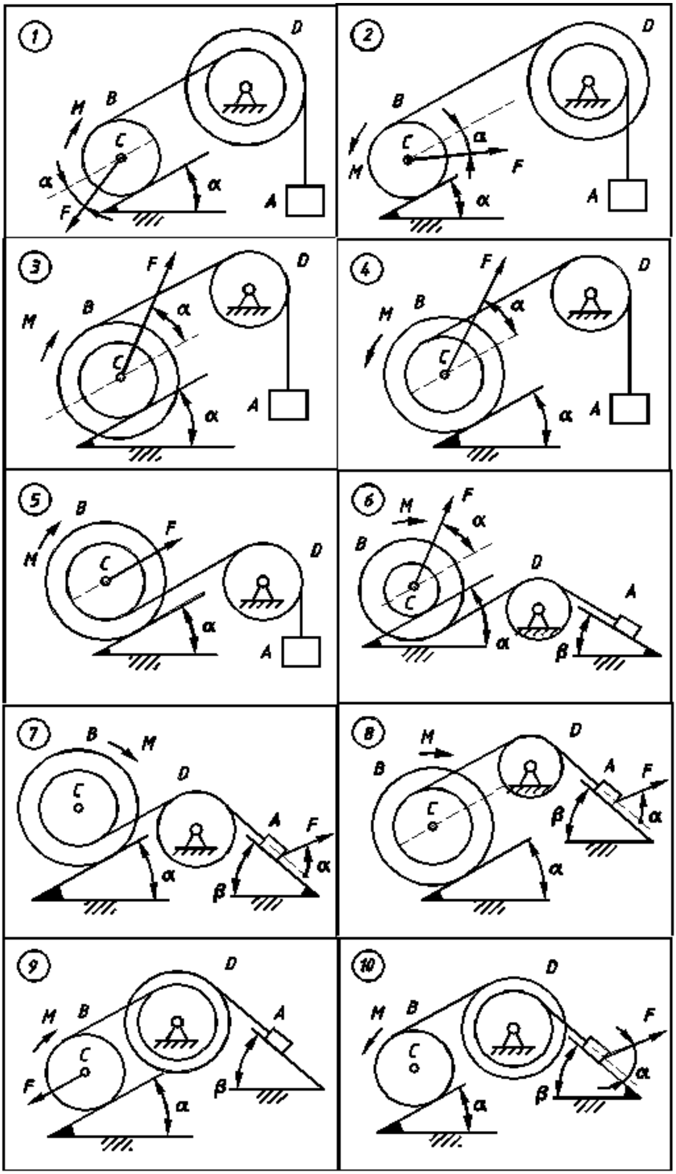


Рис. Д5.1 (см. также с. 118–121)

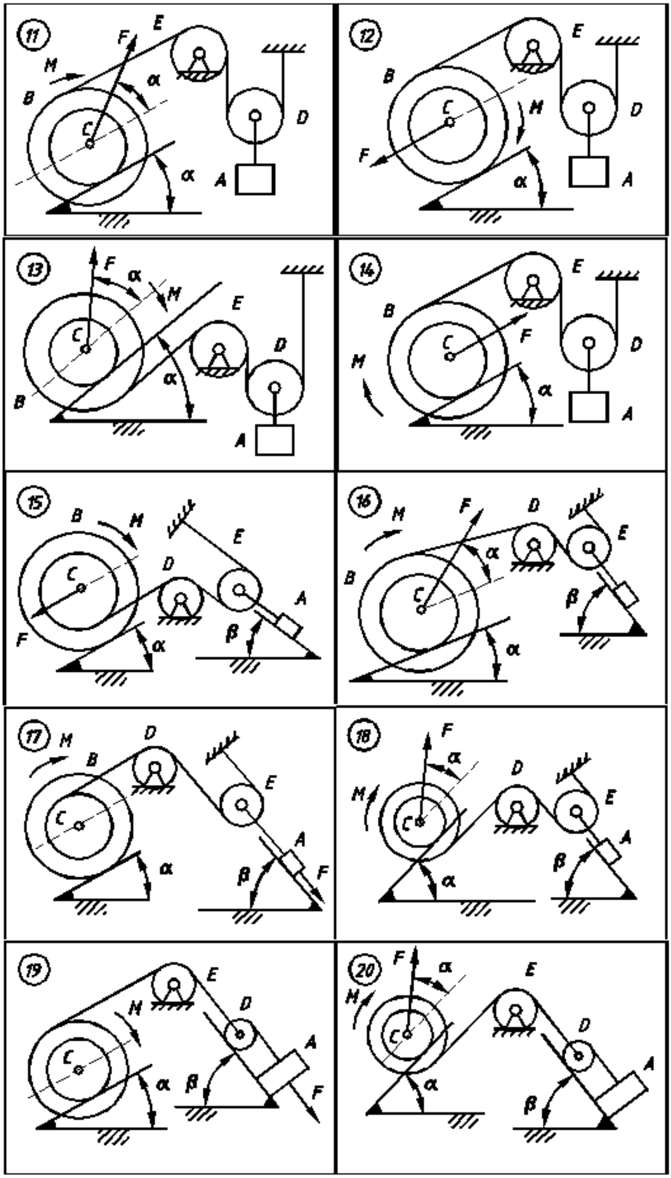


Рис. Д5.1 (продолжение)

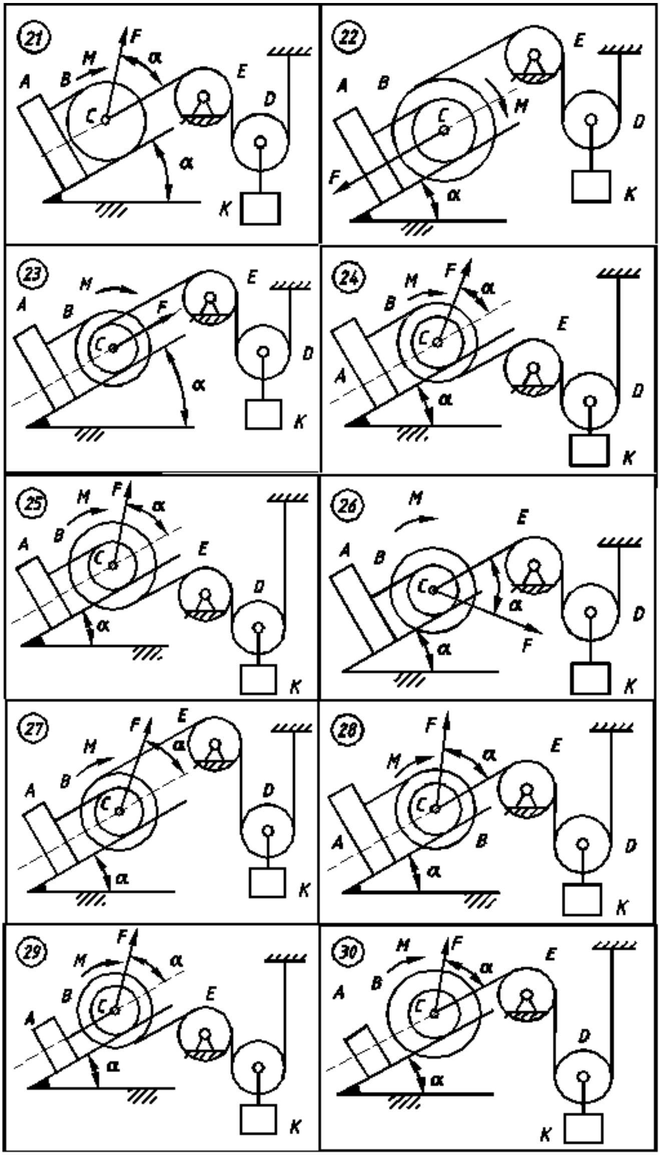


Рис. Д5.1 (продолжение)

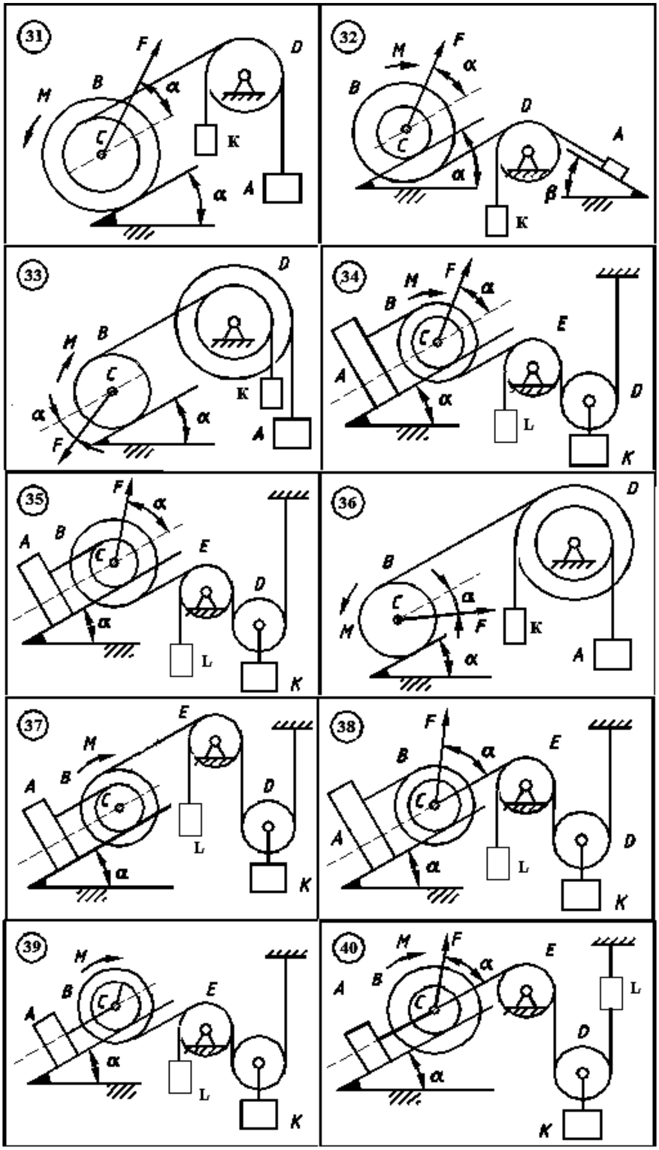


Рис. Д5.1 (продолжение)

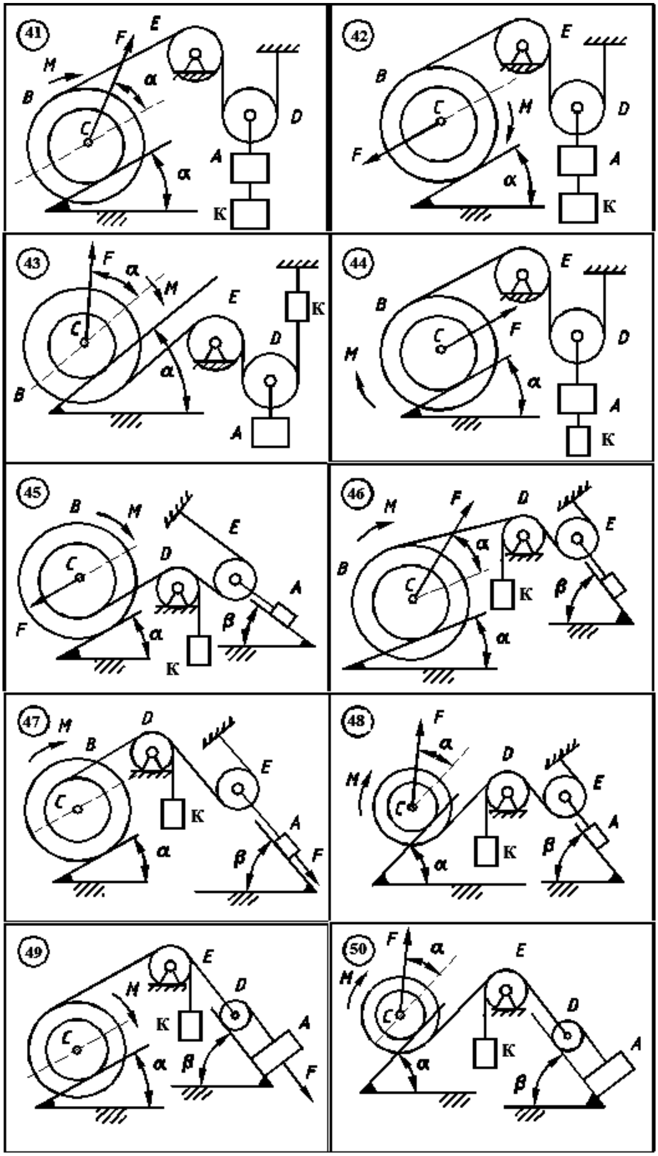


Рис. Д5.1 (окончание)

Рекомендации при подготовке к выполнению заданий

1. Проработать теоретический материал – теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

2. В соответствии с полученным заданием начертить схему механической системы и записать условия задачи (все параметры перевести в систему СИ).

6. Записать значения кинетической энергии механической системы для начального и конечного положения.

7. Определить сумму работ всех внешних сил и моментов сил, действующих на элементы системы.

8. Выразить значения кинетической энергии через скорость груза A, а сумму работ – через расстояние, пройденное тем же грузом.

9. Приравняв изменение кинетической энергии сумме работ внешних сил и моментов сил, найти скорость груза A.

Примечание. Коэффициент трения скольжения, заданный в условиях задачи, относится только к грузу A, скользящему по наклонной плоскости.

Исходные данные

Номер варианта	m_A	m_B	m_D	m_K	m_L	M, н · м	F, Н
	кг						
1	4	3	1	–	–	10	40
2	5	4	1	–	–	15	10
3	6	5	2	–	–	8	3
4	7	6	2	–	–	30	10
5	8	7	2	–	–	10	5
6	4	2	3	–	–	25	90
7	10	7	2	–	–	10	5
8	12	10	2	–	–	8	15
9	14	12	2	–	–	5	20
10	15	14	1	–	–	6	25
11	20	18	1	–	–	8	5
12	25	10	2	–	–	10	58
13	2	5	2	–	–	28	90
14	15	20	2	–	–	5	3
15	25	15	2	–	–	3	10
16	30	20	2	–	–	8	5
17	25	18	2	–	–	10	20

Окончание таблицы

Номер варианта	m_A	m_B	m_D	m_K	m_L	M, н · м	F, Н
	кг						
18	3	2	2	–	–	50	90
19	25	26	2	–	–	7	15
20	4	3	1	–	–	50	90
21	10	20	1	15	–	9	8
22	15	30	1	20	–	10	15
23	25	38	2	30	–	12	5
24	3	2	2	3	–	70	10
25	5	2	1	4	–	80	8
26	40	30	2	45	–	10	15
27	35	20	1	40	–	8	10
28	30	15	1	35	–	6	12
29	3	2	2	4	–	100	10
30	30	25	2	50	–	6	12
31	4	3	1	2	–	10	40
32	5	4	1	20	–	75	10
33	6	5	2	2	–	8	3
34	3	6	2	2	1	110	10
35	1	3	2	2	10	–	20
36	9	8	3	2	–	5	3
37	10	7	2	2	1	10	
38	12	10	2	1	3		15
39	8	6	2	3	10	100	–
40	15	14	1	4	5	6	25
41	20	18	1	5	–	8	5
42	25	20	2	6	–	10	18
43	5	5	2	7	–	58	10
44	15	20	2	8	–	5	3
45	25	15	2	7	–	3	10
46	30	20	2	4	–	8	5
47	25	18	2	5	–	10	20
48	3	5	2	10	–	70	10
49	25	26	2	7	–	7	15
50	4	3	1	108	–	80	10

Пример выполнения задания

Механическая система (рис. Д5.2) из неподвижного состояния под действием приложенных сил и пары сил с моментом M приводится в движение. Массы входящих в систему тел равны: $m_A = 2$ кг ; $m_D = 1$ кг ; $m_B = 5$ кг . На колесо B, катящееся без скольжения, действуют сила $F = 15$ Н под углом 30° к горизонту и пара сил с моментом $M = 30$ Н · м. Коэффициент трения качения $f_к = 0,05 R_B$. Полагая, что колесо представляет собой сплошные однородные диски, определить скорость груза A, после того как он пройдет расстояние $S_A = 1,5$ м. При этом следует воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии механической системы: $R_B = 0,9$ м; $r_B = 0,6$ м; $R_D = 0,3$ м .

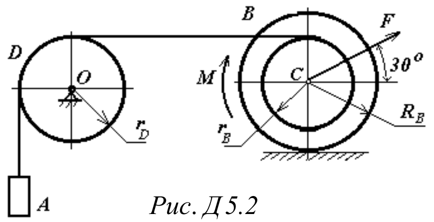


Рис. Д5.2

Решение

Предположим, что груз A движется вверх, шкив D вращается по часовой стрелке, а колесо B катится вправо.

Для выполнения задания необходимо воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = A^{(e)}, \qquad (Д5.1)$$

где T_0 – кинетическая энергия в начальный момент времени, когда система находилась в покое и, следовательно, $T_0 = 0$; $T = T_A + T_B + T_D$ – значение кинетической энергии системы в конечный момент времени, когда груз A пройдет расстояние $S_A = 1,5$ м; $A^{(e)} = A_A + A_D + A_B$ – работа внешних сил и моментов, действующих на механическую систему.

Кинетическая энергия элементов системы равна:

– для груза A, движущегося поступательно:

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2}; \qquad (Д5.2)$$

– для шкива D, движущегося вращательно:

$$T_D = \frac{J_0 \omega_D^2}{2}; \tag{Д5.3}$$

– для колеса B, движущегося плоскопараллельно:

$$T_B = \frac{m_B V_c^2}{2} + \frac{J_c \omega_B^2}{2}; \tag{Д5.4}$$

Кинематическая связь скоростей и частот вращения элементов системы между собой выражается соотношениями

$$\omega_D = \frac{V_A}{r_D}; \;\; \omega_B = \frac{V_A}{R_B + r_B}; \;\; V_c = \omega_R R_B = \frac{V_A R_B}{R_B + r_B}. \tag{Д5.5}$$

Тогда с учетом соотношений (Д5.2)–(Д5.5) полная кинетическая энергия системы будет равна:

$$T = \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{J_0 \omega_D^2}{2} + \frac{m_B V_c^2}{2} +$$

$$= \frac{J_c \omega_B^2}{2} = \frac{V_A^2}{2}\left(m_A + \frac{m_D r_D^2}{2 r_D^2} + \frac{m_B R_B^2}{(R_B + r_B)^2} + \frac{m_B R_B^2}{2(R_B + r_B)^2} \right) =$$

$$= \frac{V_A^2}{2}\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{5 \cdot 0,9^2}{(0,9 + 0,6)^2} + \frac{5 \cdot 0,9^2}{2(0,9 + 0,6)^2} \right)^2 = 2,6 V_A^2. \tag{Д5.6}$$

Полагая, что груз A движется вверх, а колесо B – вправо, вычислим работу внешних сил и моментов.

Работа силы тяжести груза A равна

$$A_A = -m_A g S_A. \tag{Д5.7}$$

Работа силы тяжести шкива D равна нулю:

$$A_D = 0. \tag{Д5.8}$$

Работа сил, приложенных к колесу B, равна

$$A_B = M\varphi_B - M_{\text{тр.к}}\varphi_B + S_c F\cos\alpha\ . \qquad \text{(Д5.9)}$$

Кинематическую связь между перемещениями элементов системы можно выразить соотношениями:

$$S_c = \frac{S_A R_B}{R_B + r_B};\quad \varphi_B = \frac{S_A}{R_B + r_B}\,. \qquad \text{(Д5.10)}$$

Работа внешних сил и моментов, действующих на систему, с учетом равенств (Д5.7)–(Д5.10) равна:

$$A^e = -m_A g\cdot S_A + (M\varphi_B - M_{\text{тр.к}}\varphi_B)\varphi_B + S_c F\cos\alpha =$$

$$= S_A\left(-m_A g + \frac{M - f_{\text{к}} R_B(m_B g - F\sin\alpha)}{R_B + r_B} + F\cos\alpha\frac{R_B}{R_B + r_B}\right) =$$

$$1{,}5\left(-2\cdot 9{,}81 + + \frac{30 - 0{,}05\cdot 0{,}9(5\cdot 9{,}8 - 15\cdot 0{,}5)}{0{,}9 + 0{,}6} +\right.$$

$$\left. + \left(15\cdot 0{,}866\frac{0{,}9}{0{,}9 + 0{,}6}\right)\right) = 10{,}4\ \text{Н}\cdot\text{м}. \qquad \text{(Д5.11)}$$

Приравняв изменение кинетической энергии сумме работ внешних сил и моментов, получим значение скорости груза A в момент времени, когда он пройдет путь $S_A = 1{,}5$ м .

$$2{,}6 V_A^2 = 10{,}4;\quad V_A = \sqrt{\frac{10{,}39}{2{,}6}} = 2{,}0\ \text{м/с}. \qquad \text{(Д5.12)}$$

Таким образом, в результате расчетов получено $V_A = 2{,}0$ м/с.

Так как скорость имеет положительный знак, следовательно, направление движения груза A выбрано правильно. В случае, если подкоренное выражение (Д5.12) будет отрицательно, это означает, что реальное направление движения груза будет противоположным. Тогда следует изменить направление движения тел механической системы и пересчитать сумму работ активных сил с учетом изменившихся знаков.

ЗАДАНИЕ Д6

Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

На механическую систему действует пара сил с движущим моментом M (или движущая сила P) и момент сил сопротивления M_c. Передача вращения осуществляется за счет сил трения. Колеса движутся без проскальзывания. Известны массы всех звеньев системы, а также большие R и малые r радиусы окружностей всех колес. Колеса считать сплошными однородными дисками. Необходимо определить реакции в шарнирах механизма в момент времени t_1. В условии задано: либо величина движущего момента (движущей силы), либо закон движения ведущего звена. В вариантах № 2, 8, 16, 23, 28, 31, 39, 49 механизм расположен в горизонтальной плоскости, в остальных вариантах – в вертикальной плоскости (рис. Д6.1–Д6.10).

В вариантах 3, 13, 22, 26, 36, 37, 42 угол между линией, проходящей через центры колес, и горизонтальной линией составляет 30°.

В вариантах 2, 25, 28, 31, 47, 49 угол между водилом *OA* и горизонтальной линией составляет 45° в момент времени, указанный в задании.

В варианте 41 угол между нитью и вертикальной линией принять равным 30°.

При решении задания следует учесть рекомендации, приведенные в книге: *Милосердин Ю.В., Семенов Б.Д., Кречко Ю.А.* Расчет и конструирование приборов и установок. – М.: Машиностроение, 1983. – 486 с., что для передачи движения без пробуксовки должно выполняться условие $N \geq cF_{\text{тр}} / f$. Здесь N – нормальное давление; c – коэффициент запаса сцепления, $1{,}25 < c < 3$. Примем $c = 2$.

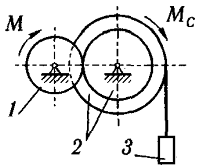
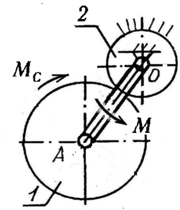
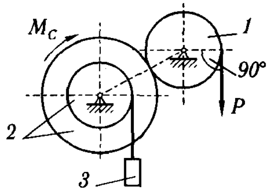
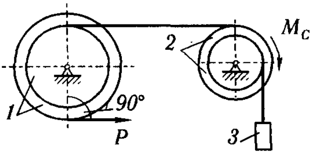
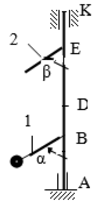
1 	m_1 =100 кг m_2 = 300 кг m_3 =500 кг M_c=1000 Нм t_1 =2 с R_1 =0,2 м R_2=0,6м r_2 = 0,4 м M =2000 Нм
2 	m_1= 10 кг m_{OA}= 2 кг M_c = 1 Нм M = 10 Нм t_1 =1,5 с R_1 = 0,4 м R_2 =0,2 м
3 	m_1 =15 кг m_2 =30 кг m_3 =60 кг M_c = 150 Нм t_1 = 1 с 0,3 м R_2 = 0,3 м r_2 =0,2 м P = 600 Н
4 	m_1=200 кг m_2 =200 кг m_3 =400 кг M_c =500 Нм t_1 =2 с R_1 =0,6м r_1 = 0,4 м R_2 = 0,3 м r_2 =0,2 м P =3000 Н.
5 	m_1= 10 кг m_2= 2 кг l_1= 0,4 l_2= 0,6 AB = 0,4 м BE = 0,8 м EK = 0,4 м

Рис. Д6.1

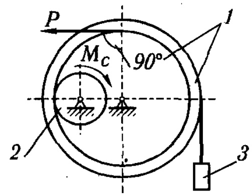
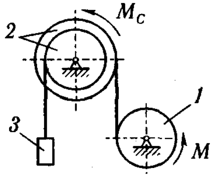
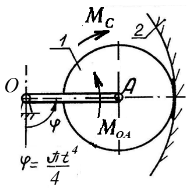
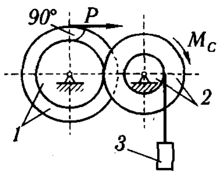
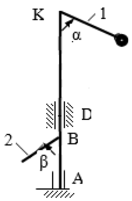
6 	$m_1 = 100$ кг $m_2 = 100$ кг $m_3 = 300$ кг $M_c = 80$ Нм $t_1 = 1$ с $R_1 = 0{,}8$ м $r_1 = 0{,}6$м $R_2 = 0{,}2$ м $P = 6000$ Нм
7 	$m_1 = 200$ кг $m_2 = 200$ кг $m_3 = 40$ кг $M_c = 500$ Нм $t_1 = 0{,}5$ с $R_1 = 0{,}3$ м $R_2 = 0{,}3$ м $r_2 = 0{,}2$ м $M = 1000$ Нм
8 	$m_1 = 100$ кг $m_{OA} = 50$ кг $M_c = 400$ Нм $t_1 = 2$ с $R_1 = 0{,}2$ м $R_2 = 0{,}8$ м
9 	$m_1 = 100$ кг $m_2 = 200$ кг $m_3 = 400$ кг $M_c = 400$ Нм $t_1 = 0{,}5$ с $R_1 = 0{,}6$м $r_1 = 0{,}4$ м $R_2 = 0{,}3$ м $r_2 = 0{,}2$ м $P = 3000$ Н.
10 	$m_1 = 4$ кг $m_2 = 10$ кг $l_1 = 0{,}4$ $l_2 = 0{,}6$ AB = 0,4 м BD = 0,4 м DK = 1,0 м

Рис. Д6.2

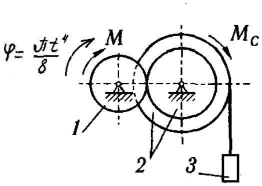
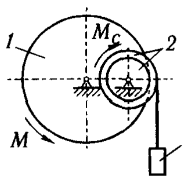
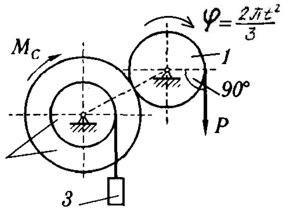
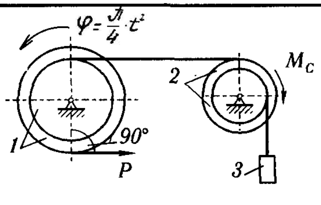
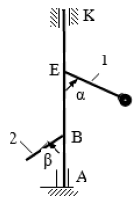
<table>
<tr><td>11
</td><td>$m_1 = 100$ кг
$m_2 = 300$ кг
$m_3 = 500$ кг
$M_c = 1000$ Нм
$t_1 = 2$ с</td><td>$R_1 = 0,2$ м
$R_2 = 0,6$м
$r_2 = 0,4$ м</td></tr>
<tr><td>12
</td><td>$m_1 = 100$ кг
$m_2 = 100$ кг
$m_3 = 300$ кг
$M_c = 800$ кг
$t_1 = 1$ с</td><td>$R_1 = 0,6$м
$R_2 = 0,3$ м
$r_2 = 0,2$ м
$M = 2000$ Нм</td></tr>
<tr><td>13
</td><td>$m_1 = 15$ кг
$m_2 = 30$ кг
$m_3 = 60$ кг
$M_c = 150$ Нм
$t_1 = 1$ с</td><td>$R_1 = 0,3$ м
$R_2 = 0,3$ м
$r_2 = 0,2$ м</td></tr>
<tr><td>14
</td><td>$m_1 = 200$ кг
$m_2 = 200$ кг
$m_3 = 400$ кг
$M_c = 500$ Нм
$t_1 = 2$ с</td><td>$R_1 = 0,6$м
$r_1 = 0,4$ м
$R_2 = 0,3$ м
$r_2 = 0,2$ м</td></tr>
<tr><td>15
</td><td>$m_1 = 4$ кг
$m_2 = 10$ кг
$l_1 = 0,4$
$l_2 = 0,6$</td><td>AB = 0,4 м
BE = 0,8 м
EK = 0,4 м</td></tr>
</table>

Рис. Д6.3

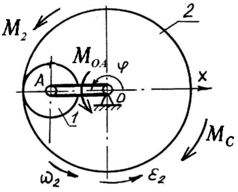
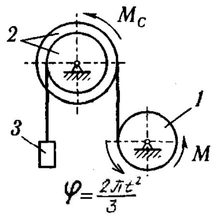
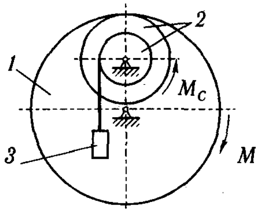
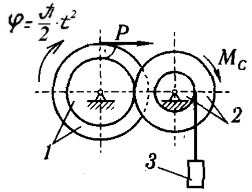
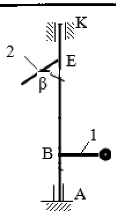
16 	$\omega_2=20\ c^{-1}$ $\varepsilon_2=4\ c^{-2}$ $\varphi=\pi(t^2+3)$ $m_1=100$ кг $m_2=100$ кг $m_{OA}=0$ кг $t_1=1$ с $R_1=0{,}05$ м $R_2=0{,}2$ м $M_c=10$ Нм
17 	$m_1=80$ кг $m_2=200$ кг $m_3=40$ кг $M_c=500$ Нм $t_1=0{,}5$ с $R_1=0{,}3$ м $R_2=0{,}3$ м $r_2=0{,}2$ м
18 	$m_1=100$ кг $m_2=200$ кг $m_3=200$ кг $M_c=800$ кг $t_1=1$ с $R_1=0{,}6$м $R_2=0{,}3$ м $r_2=0{,}2$ м $M=2000$ Нм
19 	$m_1=100$ кг $m_2=200$ кг $m_3=200$ кг $M_c=100$ Нм $t_1=0{,}5$ с $R_1=0{,}6$м $r_1=0{,}4$ м $R_2=0{,}3$ м $r_2=0{,}2$ м
20 	$m_1=8$ кг $m_2=4$ кг $l_1=0{,}4$ $l_2=0{,}6$ AB = 0,4 м BE = 1,2 м EK = 0,4 м

Рис. Д6.4

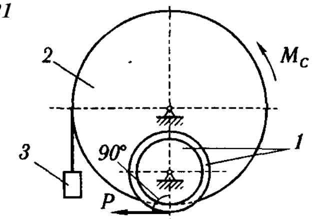
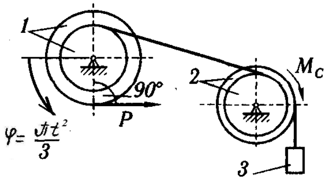
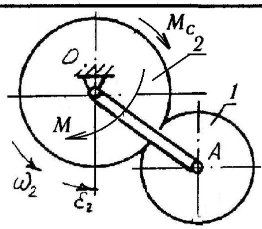
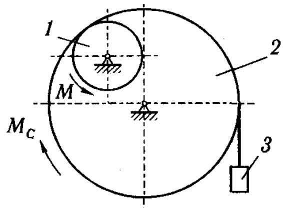
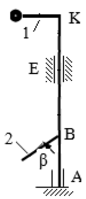
21 	$m_1 = 100$ кг $m_2 = 100$ кг $m_3 = 300$ кг $M_c = 180$ Нм $t_1 = 1$ с $R_1 = 0{,}6$ м $r_1 = 0{,}2$ м $R_2 = 0{,}8$ м $P = 6000$ Нм
22 	$m_1 = 20$ кг $m_2 = 30$ кг $m_3 = 60$ кг $M_c = 25$ Нм $t_1 = 2$ с $R_1 = 0{,}6$м $r_1 = 0{,}2$ м $R_2 = 0{,}4$ м $r_2 = 0{,}2$ м
23 	$m_1 = 20$ кг $m_2 = 20$ кг $m_{OA} = 0$ кг $M_c = 50$ Нм $t_1 = 2$ с $R_1 = 0{,}6$м $R_2 = 0{,}8$ м $M = 200$ Нм
24 	$m_1 = 60$ кг $m_2 = 60$ кг $m_3 = 100$ кг $M_c = 500$ Нм $t_1 = 1$ с $R_1 = 0{,}4$ м $R_2 = 0{,}8$ м $M = 6000$ Нм
25 	$m_1 = 8$ кг $m_2 = 4$ кг $l_1 = 0{,}4$ $l_2 = 0{,}6$ AB = 0,6 м BE = 1,0 м EK = 0,8 м

Рис. Д6.5

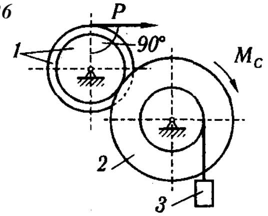
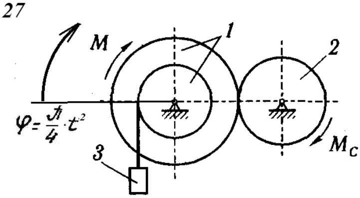
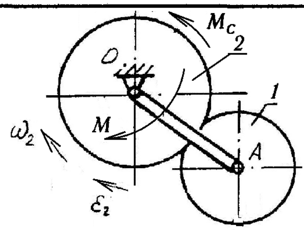
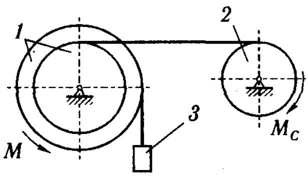
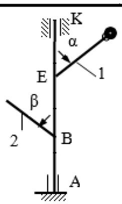
26 	$m_1=20$ кг $m_2=20$ кг $m_3=40$ кг $M_c=50$ Нм $t_1=2$ с $R_1=0{,}6$м $r_1=0{,}4$ м $R_2=0{,}8$ м $r_2=0{,}2$ м $P=300$ Н
27 	$m_1=100$ кг $m_2=100$ кг $m_3=200$ кг $M_c=80$ Нм $t_1=1$ с $R_1=0{,}8$ м $r_1=0{,}6$м $R_2=0{,}2$ м
28 	$m_1=20$ кг $m_2=0$ кг $m_{OA}=20$ кг $M_c=50$ Нм $t_1=2$ с $R_1=0{,}6$м $R_2=0{,}8$ м $M=200$ Нм
29 	$m_1=60$ кг $m_2=60$ кг $m_3=100$ кг $M_c=500$ Нм $t_1=1$ с $R_1=0{,}8$ м $r_1=0{,}6$м $R_2=0{,}4$ м $M=6000$ Нм
30 	$m_1=8$ кг $m_2=4$ кг $l_1=0{,}4$ $l_2=0{,}6$ AB = 0,8 м BE = 1,6 м EK = 0,8 м

Рис. Д6.6

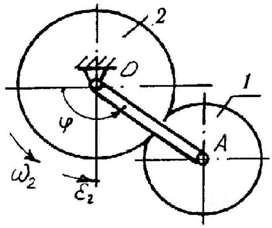
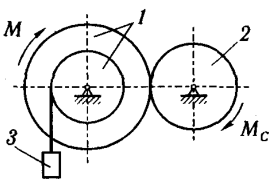
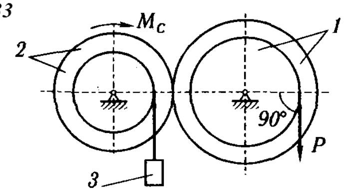
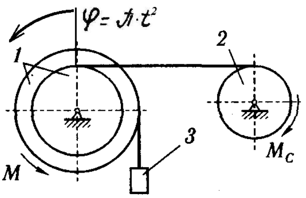
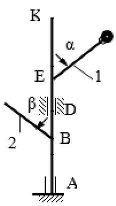
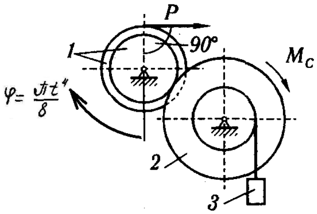
31 	$m_1=20$ кг $m_2=0$ кг $m_{OA}=20$ кг $M_c=50$ Нм $t_1=2$ с $R_1=0,6$м $R_2=0,8$ м $\varphi=\pi(t^2-4)$
32 	$m_1=100$ кг $m_2=100$ кг $m_3=200$ кг $M_c=80$ Нм $t_1=1$ с $R_1=0,8$ м $r_1=0,6$м $R_2=0,2$ м $M=500$ Нм
33 	$m_1=200$ кг $m_2=200$ кг $m_3=400$ кг $M_c=500$ Нм $t_1=2$ с $R_1=0,6$м $r_1=0,4$ м $R_2=0,3$ м $r_2=0,2$ м $P=3000$ Н.
34 	$m_1=60$ кг $m_2=60$ кг $m_3=100$ кг $M_c=500$ Нм $t_1=1$ с $R_1=0,8$ м $r_1=0,6$м $R_2=0,4$ м
35 	$m_1=20$ кг $m_2=80$ кг $l_1=0,4$ $l_2=0,6$ AB = 1,6 м BD = 0,4 м DE = 0,6 м

Рис. Д6.7

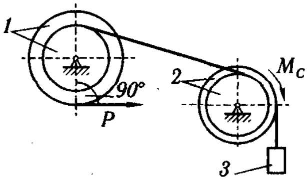
36



$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 40$ кг; $M_c = 50$ Нм; $t_1 = 2$ с

$R_1 = 0{,}6$м; $r_1 = 0{,}4$ м; $R_2 = 0{,}8$ м; $r_2 = 0{,}2$ м

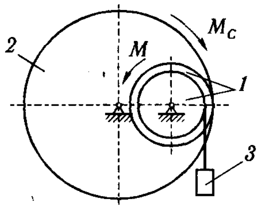
37



$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 30$ кг; $m_3 = 60$ кг; $M_c = 25$ Нм; $t_1 = 2$ с

$R_1 = 0{,}6$м; $r_1 = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}4$ м; $r_2 = 0{,}2$ м; $P = 400$ Н.

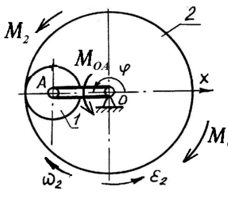
38



$m_1 = 60$ кг; $m_2 = 60$ кг; $m_3 = 100$ кг; $M_c = 500$ Нм; $t_1 = 1$ с

$R_1 = 0{,}4$ м; $r_1 = 0{,}2$м; $R_2 = 0{,}8$ м; $M = 6000$ Нм

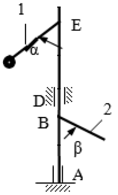
39



$\omega_2 = 20$ c^{-1}; $\varepsilon_2 = 4$ c^{-2}; $\varphi = \pi t^2$; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 100$ кг; $m_{OA} = 0$ кг; $t_1 = 1$ с

$R_1 = 0{,}05$ м; $R_2 = 0{,}2$ м; $M_c = 10$ Нм

40



$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 8$ кг; $l_1 = 0{,}8$ м; $l_2 = 0{,}2$ м

AB = 1,0 м; BD = 0,2м; DE = 1,6.м

Рис. Д6.8

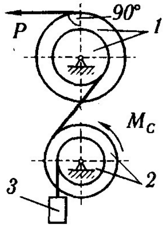
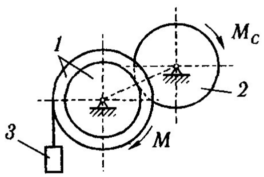
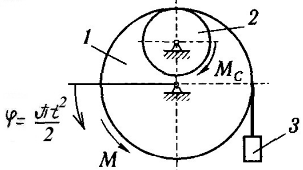
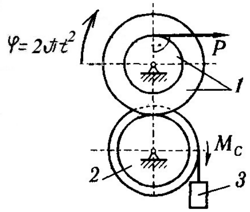
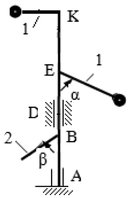
41 	$m_1 = 200$ кг $m_2 = 150$ кг $m_3 = 300$ кг $M_c = 800$ Нм $t_1 = 0{,}5$ с $R_1 = 0{,}5$ м $r_1 = 0{,}4$ м $R_2 = 0{,}3$ м $r_2 = 0{,}2$ м $P = 3800$ Н.
42 	$m_1 = 250$ кг $m_2 = 100$ кг $m_3 = 800$ кг $M_c = 700$ Нм $t_1 = 1$ с $R_1 = 0{,}6$ м $r_1 = 0{,}2$ м $R_2 = 0{,}1$ м $M = 9700$ Нм
43 	$m_1 = 40$ кг $m_2 = 20$ кг $m_3 = 100$ кг $M_c = 400$ Нм $t_1 = 0{,}5$ с $R_1 = 0{,}5$ м $R_2 = 0{,}3$ м
44 	$m_1 = 10$ кг $m_2 = 20$ кг $m_3 = 200$ кг $M_c = 300$ Нм $t_1 = 0{,}5$ с $R_1 = 0{,}6$ м $r_1 = 0{,}4$ м $R_2 = 0{,}3$ м $r_2 = 0{,}2$ м
45 	$m_1 = 2$ кг $m_2 = 50$ кг $l_1 = 0{,}2$ м $l_2 = 0{,}8$ м EK = 1,0 м AB = 1,2 м BD = 0,6 м DE = 0,6 м

Рис. Д6.9

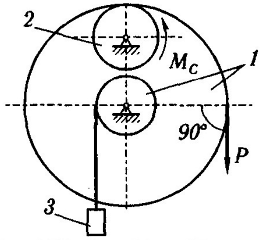
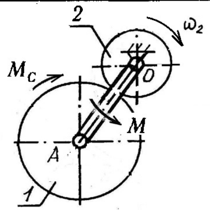
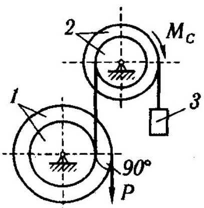
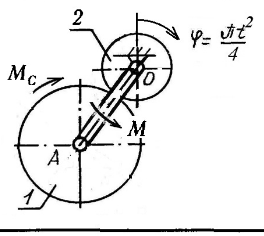
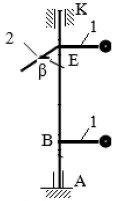
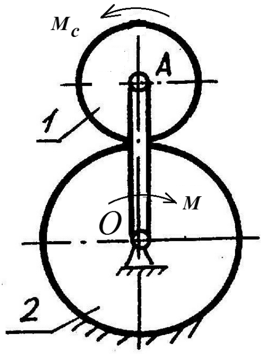
<table>
<tr>
<td>46

</td>
<td>$m_1 = 100$ кг
$m_2 = 200$ кг
$m_3 = 400$ кг
$M_c = 400$ Нм
$t_1 = 0,5$ с
$R_1 = 0,6$м
$r_1 = 0,4$ м
$R_2 = 0,3$ м
$P = 3000$ Н.</td>
</tr>
<tr>
<td>47

</td>
<td>$m_1 = 10$ кг
$m_2 = 2$ кг
$m_{OA} = 2$ кг
$M_c = 1$ Нм
$M = 10$ Нм
$t_1 = 1,5$ с
$R_1 = 0,4$ м
$R_2 = 0,2$ м
$\omega_2 = 20\ с^{-1} = const$</td>
</tr>
<tr>
<td>48

</td>
<td>$m_1 = 100$ кг
$m_2 = 200$ кг
$m_3 = 400$ кг
$M_c = 400$ Нм
$t_1 = 0,5$ с
$R_1 = 0,6$м
$r_1 = 0,4$ м
$R_2 = 0,3$ м
$r_2 = 0,2$ м
$P = 3000$ Н.</td>
</tr>
<tr>
<td>49

</td>
<td>$m_1 = 10$ кг
$m_2 = 2$ кг
$m_{OA} = 2$ кг
$M_c = 1$ Нм
$M = 10$ Нм
$t_1 = 1,5$ с
$R_1 = 0,4$ м
$R_2 = 0,2$ м</td>
</tr>
<tr>
<td>50

</td>
<td>$m_1 = 8$ кг
$m_2 = 4$ кг
$l_1 = 0,6$м
$l_2 = 1,0$ м
AB = 0,4 м
BE = 1,2 м
EK = 0,4 м</td>
</tr>
</table>

Рис. Д6.10

Пример 1

Дано: $R_1 = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}3$ м; $AC = 0{,}15$ м; $M_c = 2$ Н·м; $M = 10$ Н·м; $m_1 = m_{OA} = 10$ кг; $t_1 = 2$ с.

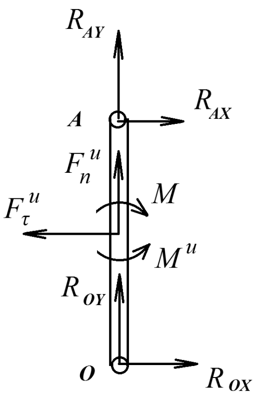


Дифференциальный механизм движется в горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом M, приложенным к водилу OA, и технологической пары сил с моментом сопротивления M_c, приложенного к колесу *1*.

Определить реакции в шарнирах O и A в момент времени t_1 после начала движения из состояния покоя. Сопротивлением трения качения пренебречь.

Решение

Воспользуемся принципом Даламбера. Рассмотрим по отдельности звенья OA и *1*. Присоединим ко всем активным силам и реакциям опор силы инерции.



Составим уравнения равновесия.

$$\Sigma F_X = 0:\ R_{AX} - F_\tau^и + R_{OX} = 0\,; \qquad (Д6.1)$$

$$\Sigma F_Y = 0:\ R_{AY} - F_n^и + R_{OY} = 0\,; \qquad (Д6.2)$$

$$\Sigma M_O = 0:\ M^и - M - R_{AX}(R_1 + R_2) + $$

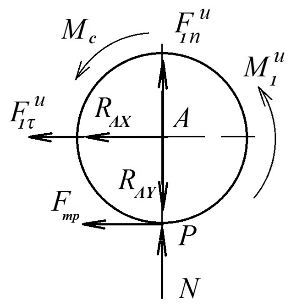
$$+ F_\tau^и \frac{(R_1 + R_2)}{2} = 0\,; \qquad (Д6.3)$$

$$\Sigma F_X = 0:\ -R_{AX} - F_{1\tau}^и - F_{тр} = 0\,; \qquad (Д6.4)$$

$$\Sigma F_Y = 0:\ N - R_{AY} + F_{1n}^и = 0\,; \qquad (Д6.5)$$

$$\Sigma M_A = 0:\ M_1^и + M_c - F_{тр} R_1 = 0\,. \qquad (Д6.6)$$

В соответствии с рекомендациями работы [9] для передачи движения без пробуксовки должно выполняться условие $N \geq cF_{\text{тр}} / f$. Здесь c – коэффициент запаса сцепления $1,25 < c < 3$. Примем $c = 2$.



Умножим уравнение (Д6.4) на R_1 и сложим с уравнением (Д6.6):

$$M_1^{и} + M_c + R_{AX} R_1 + F_{1\tau}^{и} R_1 = 0 .$$

Затем полученное уравнение умножим на $(R_1 + R_2)$, а уравнение (Д6.3) – на R_1 и сложим эти уравнения:

$$M_1^{и}(R_1 + R_2) + M_c(R_1 + R_2) + F_{1\tau}^{и} R_1 (R_1 + R_2) +$$

$$M^{и} R_1 - M R_1 + F_{\tau}^{и} \frac{(R_1 + R_2)}{2} R_1 = 0,$$

или

$$M_1^{и} + F_{1\tau}^{и} R_1 + \frac{M^{и} R_1}{R_1 + R_2} + \frac{F_{\tau}^{и}}{2} R_1 = -M_c - \frac{M R_1}{R_1 + R_2} . \qquad (Д6.7)$$

Учитывая, что колесо *1* совершает плоское движение, и то, что в точке соприкосновения колес находится мгновенный центр скоростей, определим скорость шарнира *A*: $V_A = \omega_1 R_1$. Тогда угловая скорость водила *OA* $\omega = \dfrac{V_A}{(R_1 + R_2)}$, угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{\varepsilon_1 R_1}{(R_1 + R_2)}$.

Учтем, что $M_1^{и} = J_1 \varepsilon_1 = \dfrac{m R_1^2}{2} \varepsilon_1$, $M^{и} = J_{OA} \varepsilon = \dfrac{m(R_1 + R_2)^2}{12} \varepsilon$, $F_{\tau}^{и} = m a_{\tau} = m \varepsilon \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ и $F_{1\tau}^{и} = m a_{1\tau} = m \varepsilon_1 (R_1 + R_2)$.

Подставляем полученные соотношения в уравнение (Д6.7) и находим угловое ускорение:

$$J_1 \varepsilon_1 + m_1 \varepsilon_1 (R_1 + R_2) R_1 + J_{OA} \frac{\varepsilon_1 R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} + m \frac{\varepsilon_1 R_1^2}{4} =$$

$$= -M_c(R_1 + R_2) + MR_1 / (R_1 + R_2)\,;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-M_c + MR_1 / (R_1 + R_2)}{J_1 + m_1(R_1 + R_2)R_1 + J_{OA}\dfrac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} + \dfrac{mR_1^2}{4}}\,;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-M_c + MR_1 / (R_1 + R_2)}{\dfrac{mR_1^2}{2} + m_1(R_1 + R_2)R_1 + \dfrac{m(R_1 + R_2)^2}{12}\dfrac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} + \dfrac{mR_1^2}{4}}\,;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-2 + 10 \cdot 0{,}2 / 0{,}5}{\dfrac{10 \cdot 0{,}04}{2} + 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + \dfrac{10 \cdot 0{,}25}{12}\dfrac{0{,}04}{0{,}25} + \dfrac{10 \cdot 0{,}04}{4}} = \frac{2}{1{,}33} = 1{,}5 \text{ с}^{-2}.$$

Определим угловую скорость колеса в момент времени 2 с: $\omega_1 = \varepsilon_1 t = 1{,}5 \cdot 2 = 3 \text{ с}^{-1}$.

Определим скорость шарнира *A*: $V_A = \omega_1 R_1 = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ м/с .

Тогда угловая скорость водила *OA* $\omega = \dfrac{V_A}{(R_1 + R_2)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}5} = 1{,}2 \text{ с}^{-1}$,

угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{\varepsilon_1 R_1}{(R_1 + R_2)} = \dfrac{1{,}5 \cdot 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6 \text{ с}^{-2}$.

Определим все силы инерции и подставим их в уравнения равновесия:

$$F_\tau^{\text{и}} = ma_\tau = m\varepsilon\frac{R_1 + R_2}{2} = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5 \text{ Н}\,;$$

$$F_{1\tau}^{\text{и}} = ma_{1\tau} = m\varepsilon_1(R_1 + R_2) = 10 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 7{,}5 \text{ Н}\,;$$

$$F_n^{\text{и}} = m\omega^2\frac{R_1 + R_2}{2} = 10 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}25 = 3{,}6 \text{ Н}\,;$$

$$F_{1n}^{\text{и}} = m\omega_1^2(R_1 + R_2) = 10 \cdot 9 \cdot 0{,}5 = 45 \text{ Н}\,;$$

$$M_1^{и} = J_1 \varepsilon_1 = \frac{mR_1^2}{2} \varepsilon_1 = \frac{10 \cdot 0,04}{2} 1,5 = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M^{и} = J_{OA} \varepsilon = \frac{m(R_1 + R_2)^2}{12} \varepsilon = \frac{10 \cdot 0,25}{12} 0,36 = 0,75 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Решая систему уравнений равновесия, получим:

$$F_{тр} = \frac{M_1^{и} + M_c}{R_1} = \frac{0,3 + 2}{0,2} = 11,5 \text{ Н}; \quad N = cF_{тр} = 2 \cdot 11,5 = 23 \text{ Н};$$

$$R_{AX} = -F_{тр} - F_{1\tau}^{и} = -45 - 11,5 = -56,5 \text{ Н};$$

$$R_{AY} = F_{1n}^{и} + N = 7,5 + 23 = 30,5 \text{ Н};$$

$$R_{OX} = -R_{AX} - F_{\tau}^{и} = 56,5 + 1,5 = 57 \text{ Н};$$

$$R_{OY} = -R_{AY} + F_n^{и} = -30,5 + 3,6 = -26,9 \text{ Н}.$$

Пример 2

Вертикальный вал, закрепленный подпятником *A* и подшипником *E*, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из частей *1*, *2* и *3*, прикреплен к валу шарниром B и невесомым стержнем *4*.

Дано: $m = 10$ кг; $\omega = 8$ с$^{-1}$; $b = 0,2$ м.

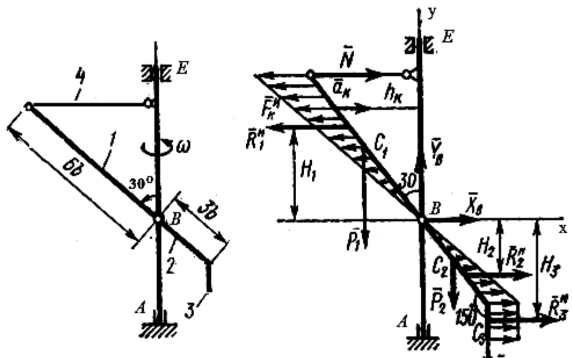
Определить: реакции шарнира B и стержня 4.

Решение

Изображаем вал и прикрепленный к нему ломаный стержень в соответствии с заданными углами. Массы и веса частей *1*, *2* и *3* этого стержня, так как они пропорциональны длинам частей, а длина всего стержня равна $10b$ (см. рисунок, *а*), соответственно равны:

$$m_1 = 0,6m, \quad m_2 = 0,3m, \quad m_3 = 0,1m;$$
$$P_1 = 0,6mg, \quad P_2 = 0,3mg, \quad P_3 = 0,1mg. \qquad (Д6.8)$$

Для определения искомых реакций рассмотрим движение ломаного стержня и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Bxy так, чтобы стержень лежал в плоскости xy, и изобразим действующие на него внешние силы: силы тяжести P_1, P_2, P_3, составляющие X_B, Y_B реакции шарнира B и реакцию N стержня *4*.



а *б*

Присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения α_{nk}, направленные к оси вращения, а численно $\alpha_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояния элементов от оси вращения; численно $F_k^{и} = \Delta m \omega^2 h_k$, где Δm – масса элемента. Поскольку все $F_k^{и}$ оказались пропорциональными h_k, то эпюры этих параллельных сил образуют для частей *1* и *2* треугольники, а для части *3* – прямоугольник (см. рисунок, *б*).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^{и} = m\alpha_C$, где m – масса тела, α_C – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^{и} = m_1\alpha_{C1}, \quad R_2^{и} = m_2\alpha_{C2}, \quad R_3^{и} = m_3\alpha_{C3}. \qquad (Д6.9)$$

Но центры масс частей стержня, как и его элементы, имеют только нормальные ускорения, равные: $\alpha_{C1} = \omega^2 h_{C1}$, $\alpha_{C2} = \omega^2 h_{C2}$, $\alpha_{C3} = \omega^2 h_{C3}$, где $h_{C1} = 3b\sin 30°$, $h_{C2} = 1{,}5b\sin 30°$, $h_{C3} = 3b\sin 30°$ – расстояния центров масс частей от оси вращения. В результате из равенств (Д6.8) и (Д6.9), учитывая, что $b = 0{,}2$ м, получим:

$$R_1^и = 0{,}6 m\omega^2 3b \sin 30° = 115{,}2\ Н;$$

$$R_2^и = 0{,}3 m\omega^2 1{,}5b \sin 30° = 28{,}8\ Н; \qquad (Д6.10)$$

$$R_3^и = 0{,}1 m\omega^2 3b \sin 30° = 19{,}2\ Н.$$

При этом линии действия равнодействующих $R_1^и$ и $R_2^и$ пройдут через центры тяжести соответствующих треугольников, т. е. на расстояниях H_1 и H_2 от оси x, а равнодействующая $R_3^и$ приложена в середине части *3* и проходит на расстоянии H_3 от оси x, где

$$H_1 = 2/3\ 6b \cos 30° = 0{,}69\ м;$$

$$H_2 = 2/3\ 3b \cos 30° = 0{,}35\ м; \qquad (Д6.11)$$

$$H_3 = 3b \cos 30° + b/2 = 0{,}62\ м.$$

Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составив для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим

$$\sum F_{kx} = 0,\ \ X_B - R_1^и + R_2^и + R_3^и + N = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0,\quad Y_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$

$$\sum m_B(F_k) = 0,\quad P_1 3b \sin 30° + R_1^и H_1 - P_2 1{,}5b \sin 30° +$$

$$+ R_2^и H_2 - P_3 3b \sin 30° + R_3^и H_3 - N 6b \cos 30° = 0.$$

Подставив сюда значения соответствующих величин из равенств (Д6.8), (Д6.9) и (Д6.11) и решив затем эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_B = -40{,}4$ Н; $Y_B = 98{,}1$ Н; $N = 107{,}6$ Н.

ЗАДАНИЕ Д7

Применение уравнения Лагранжа II рода к изучению движения механической системы с одной степенью свободы

Механическая система из состояния покоя под действием веса груза приводится в движение. Начальное положение системы и геометрические размеры тел $(R_1,\ r_1,\ R_2,\ r_2)$ показаны на рис. Д7.1–Д7.7.

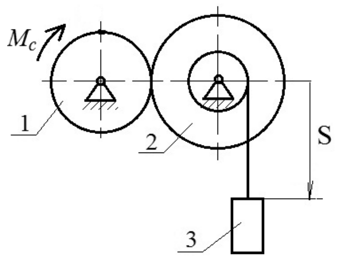
Массы элементов системы $(m_1,\ m_2,\ m_3)$ приведены в таблице исходных данных. Все колеса считать сплошными однородными дисками. Коэффициент трения груза о наклонную плоскость $f = 0{,}2$. На механическую систему действует пара сил сопротивления с моментом $M_c = 2\ \text{Н}\cdot\text{м}$.

Используя уравнения Лагранжа II рода и пренебрегая массой нитей, определить ускорение груза *3*.

Пример выполнения задания

Дано: $R_1 = 0{,}4$ м; $R_2 = 0{,}6$ м; $r_2 = 0{,}2$ м; $m_1 = 4$ кг; $m_2 = 8$ кг; $m_3 = 10$ кг; $S = 2$ м.

Найти ускорение груза a_3.



Решение

Механическая система имеет одну степень свободы. Запишем для этой механической системы уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

В качестве обобщенной координаты примем координату груза *S*. Тогда обобщенная скорость будет $\dot{S}$. Выразим угловые скорости тел, входящих в систему, через обобщенную скорость $V_3 = \dot{S}$:

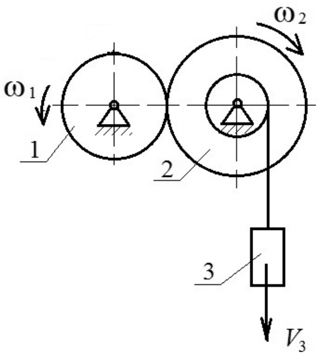
$$\omega_2 = \frac{V_3}{r_2}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = \frac{V_3}{r_2}\frac{R_2}{R_1},$$

или

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{S}}{r_2}; \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{S}}{r_2}\frac{R_2}{R_1}.$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3$.

Колеса *1* и *2* совершают вращательное движение, а груз *3* – поступательное. Следовательно,



$$T_1 = \frac{J_1\dot{\varphi}_1^2}{2} = \frac{\frac{m_1R_1^2}{2}\left(\frac{\dot{S}R_2}{r_2R_1}\right)^2}{2} = \frac{m_1R_2^2}{4r_2^2}\dot{S}^2;$$

$$T_2 = \frac{J_2\dot{\varphi}_2^2}{2} = \frac{\frac{m_2R_2^2}{2}\left(\frac{\dot{S}}{r_2}\right)^2}{2} = \frac{m_2R_2^2}{4r_2^2}\dot{S}^2;$$

$$T_3 = \frac{m_3\dot{S}^2}{2}.$$

Тогда $\quad T = \left(\frac{m_1R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_2R_2^2}{4r_2^2} + \frac{m_3}{2}\right)\dot{S}^2.$

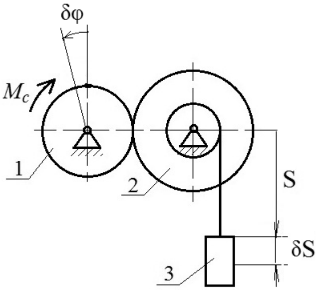
Обобщенные силы можно определить из элементарной работы сил на возможном перемещении системы.

Найдем элементарную работу всех активных сил, приложенных к системе:

$$\sum \delta A_k^A = \sum Q_i \delta S = \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3.$$

Покажем все активные силы: в данной задаче – это силы тяжести и момент сил сопротивления.

$\delta A_1 = \delta A_{mg} + \delta A_{M_c}$. Работа веса $\delta A_{mg} = 0$, так как центр масс колеса неподвижен. $\delta A_{M_c} = -M_c\,\delta\varphi_1 = -M_c\frac{\delta S}{r_2}\frac{R_2}{R_1}$, следовательно, $Q_1 = -M_c\frac{R_2}{r_2R_1}$.



Работа силы тяжести второго тела равна нулю, так как его центр масс также неподвижен. Элементарная работа груза *3* равна: $\delta A_3 = m_3 g \delta S$. Следовательно, $Q_3 = m_3 g$. Тогда $Q = m_3 g - M_c \dfrac{R_2}{r_2 R_1}$.

Дифференцируем кинетическую энергию:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = \left(\frac{m_1 R_2^2}{4 r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{4 r_2^2} + \frac{m_3}{2} \right) 2\dot{S} = \left(\frac{m_1 R_2^2}{2 r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} + m_3 \right) \dot{S},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) = \left(\frac{m_1 R_2^2}{2 r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} + m_3 \right) \ddot{S}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right) = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение Лагранжа II рода:

$$\left(\frac{m_1 R_2^2}{2 r_2^2} + \frac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} + m_3 \right) \ddot{S} = m_3 g - M_c \frac{R_2}{r_2 R_1}.$$

Откуда

$$\ddot{S} = \frac{m_3 g - M_c \dfrac{R_2}{r_2 R_1}}{\dfrac{m_1 R_2^2}{2 r_2^2} + \dfrac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} + m_3} = \frac{100 - 2\dfrac{0,6}{0,2 \cdot 0,4}}{\dfrac{4 \cdot 0,36}{2 \cdot 0,04} + \dfrac{8 \cdot 0,36}{2 \cdot 0,04} + 10} = \frac{85}{64} = 1,3 \text{ м/с}^2.$$

Исходные данные

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	Номер варианта	m_1	m_2	m_3
	кг				кг		
1	2	8	4	27	10	30	100
2	4	8	12	28	2	8	14
3	4	2	8	29	4	8	12
4	8	2	4	30	4	2	8
5	2	20	15	31	2	8	4
6	15	40	100	32	0,8	4	40
7	15	10	30	33	10	30	100
8	0,5	6	20	34	10	30	100
9	6	5	40	35	2	20	15
10	6	5	50	36	15	40	100
11	3	4	10	37	15	10	30
12	3	5	50	38	0,5	6	20
13	0,8	4	40	39	16	5	50
14	10	30	100	40	3	14	10
15	6	5	40	41	3	15	50
16	6	5	50	42	0,8	4	40
17	3	4	10	43	0,8	4	40
18	3	5	50	44	10	30	100
19	1	3	40	45	6	5	40
20	5	4	25	46	6	5	50
21	3	7	11	47	3	4	10
22	7	3	11	48	3	5	50
23	4	4	30	49	1	3	40
24	3	2	10	50	5	4	25
25	2	1	40	51	8	4	24
26	4	12	30	52	0,8	4	14

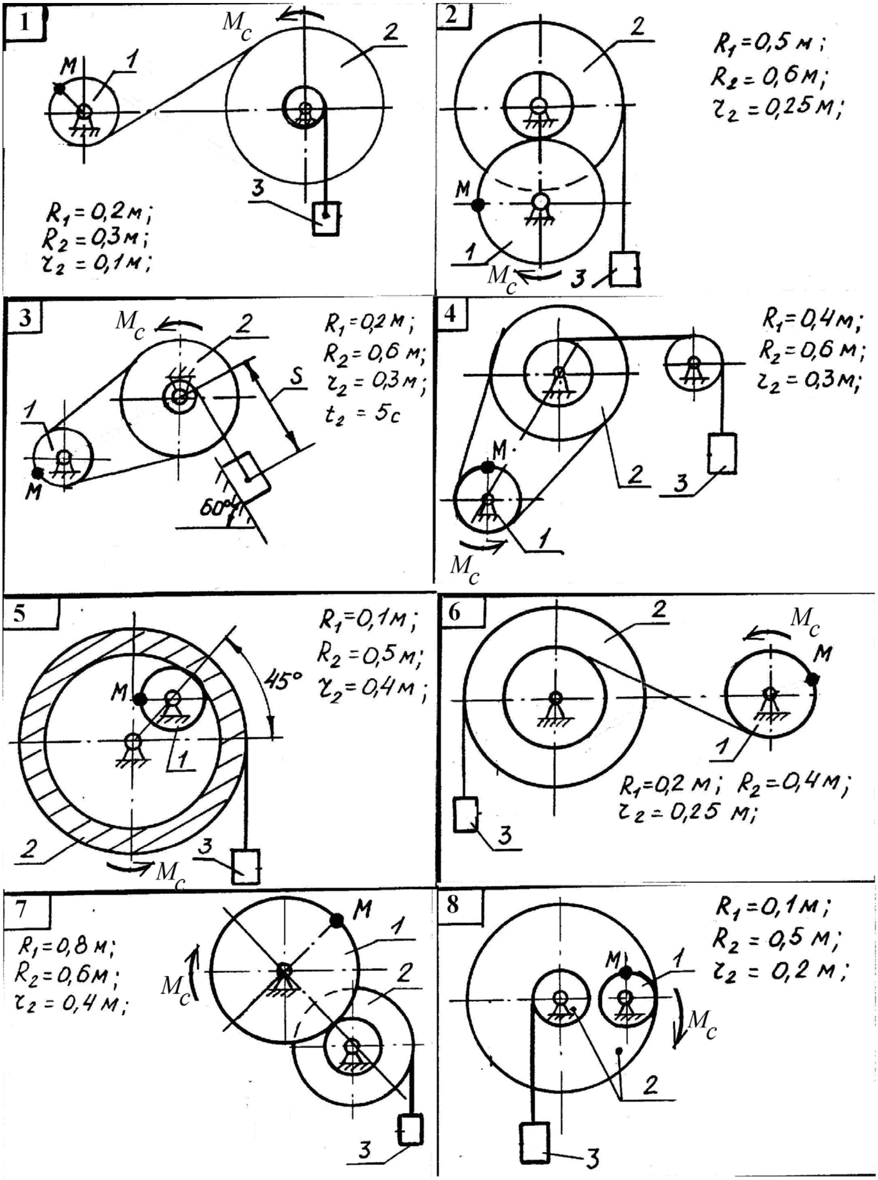

1
R₁ = 0,2 м;
R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,1 м;
2
R₁ = 0,5 м;
R₂ = 0,6 м;
r₂ = 0,25 м;
3
R₁ = 0,2 м;
R₂ = 0,6 м;
r₂ = 0,3 м;
t₂ = 5 с
60°
S
4
R₁ = 0,4 м;
R₂ = 0,6 м;
r₂ = 0,3 м;
5
R₁ = 0,1 м;
R₂ = 0,5 м;
r₂ = 0,4 м;
45°
6
R₁ = 0,2 м; R₂ = 0,4 м;
r₂ = 0,25 м;
7
R₁ = 0,8 м;
R₂ = 0,6 м;
r₂ = 0,4 м;
8
R₁ = 0,1 м;
R₂ = 0,5 м;
r₂ = 0,2 м;
M
Mc

Рис. Д7.1

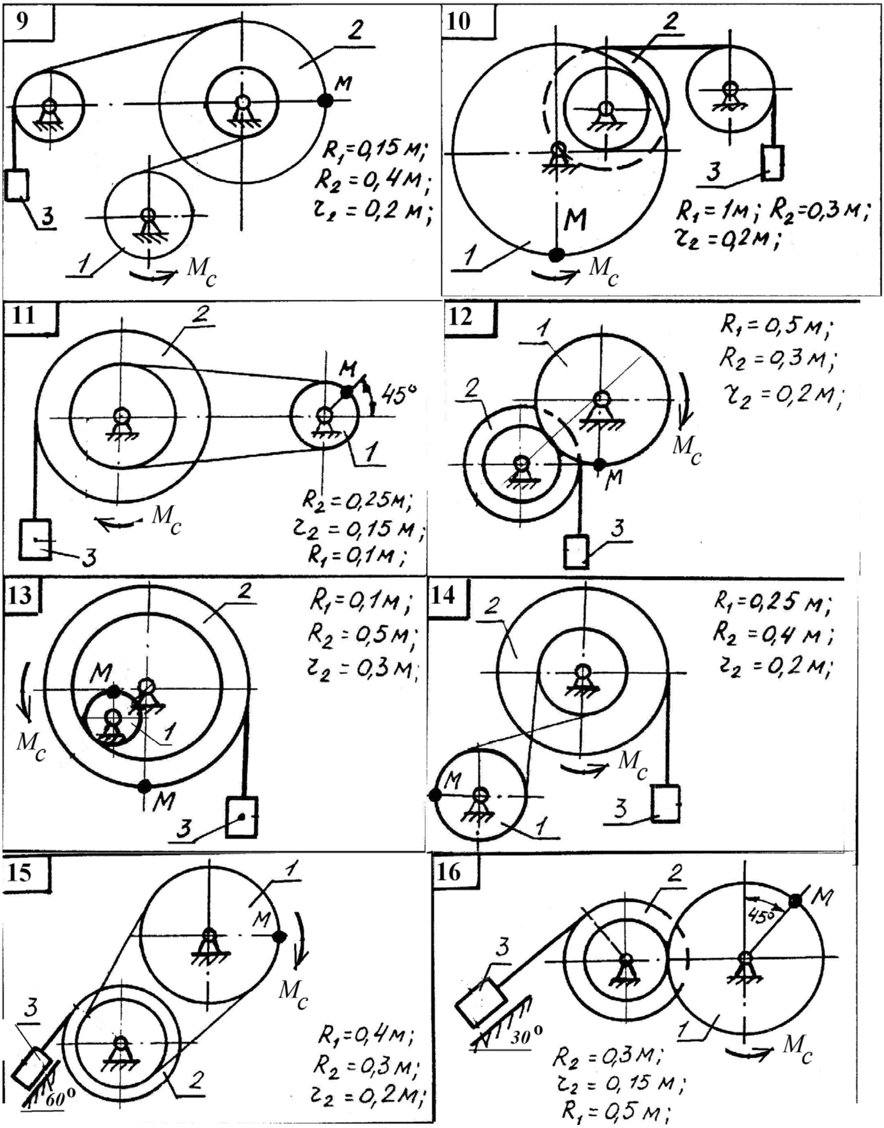

9
2
M
$R_1 = 0,15$ м;
$R_2 = 0,4$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
3
1
M_C
10
2
M
3
$R_1 = 1$ м; $R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
1
M_C
11
2
M
45°
1
M_C
3
$R_2 = 0,25$ м;
$r_2 = 0,15$ м;
$R_1 = 0,1$ м;
12
$R_1 = 0,5$ м;
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
1
2
M_C
M
3
13
2
$R_1 = 0,1$ м;
$R_2 = 0,5$ м;
$r_2 = 0,3$ м;
M
M_C
1
M
3
14
2
$R_1 = 0,25$ м;
$R_2 = 0,4$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
M_C
M
1
3
15
1
M
M_C
3
$R_1 = 0,4$ м;
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,2$ м;
2
60°
16
2
M
45°
3
30°
1
M_C
$R_2 = 0,3$ м;
$r_2 = 0,15$ м;
$R_1 = 0,5$ м;

Рис. Д7.2

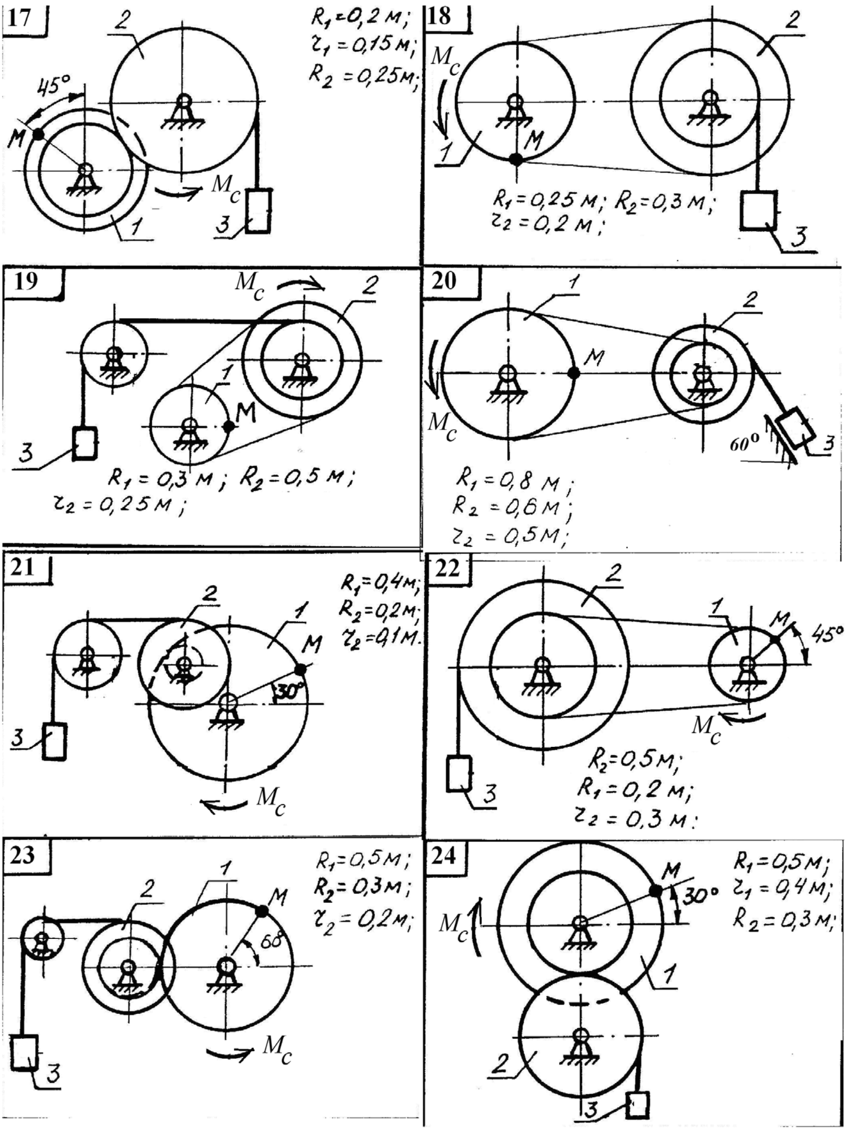

17
R₁=0,2 м;
r₁ = 0,15 м;
R₂ = 0,25м;
45°
M
Mc
1
2
3
18
Mc
M
1
2
3
R₁ = 0,25 м; R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,2 м;
19
Mc
1
2
3
M
R₁ = 0,3 м; R₂ = 0,5 м;
r₂ = 0,25 м;
20
1
2
M
Mc
60°
3
R₁ = 0,8 м;
R₂ = 0,6 м;
r₂ = 0,5 м;
21
R₁=0,4м;
R₂=0,2м;
r₂=0,1м.
2
1
M
30°
3
Mc
22
2
1
M
45°
Mc
3
R₂=0,5м;
R₁ = 0,2 м;
r₂ = 0,3 м:
23
R₁=0,5м;
R₂= 0,3м;
r₂ = 0,2м;
1
2
M
60
3
Mc
24
M
30°
R₁ = 0,5м;
r₁ = 0,4м;
R₂ = 0,3м;
Mc
1
2
3

Рис. Д7.3

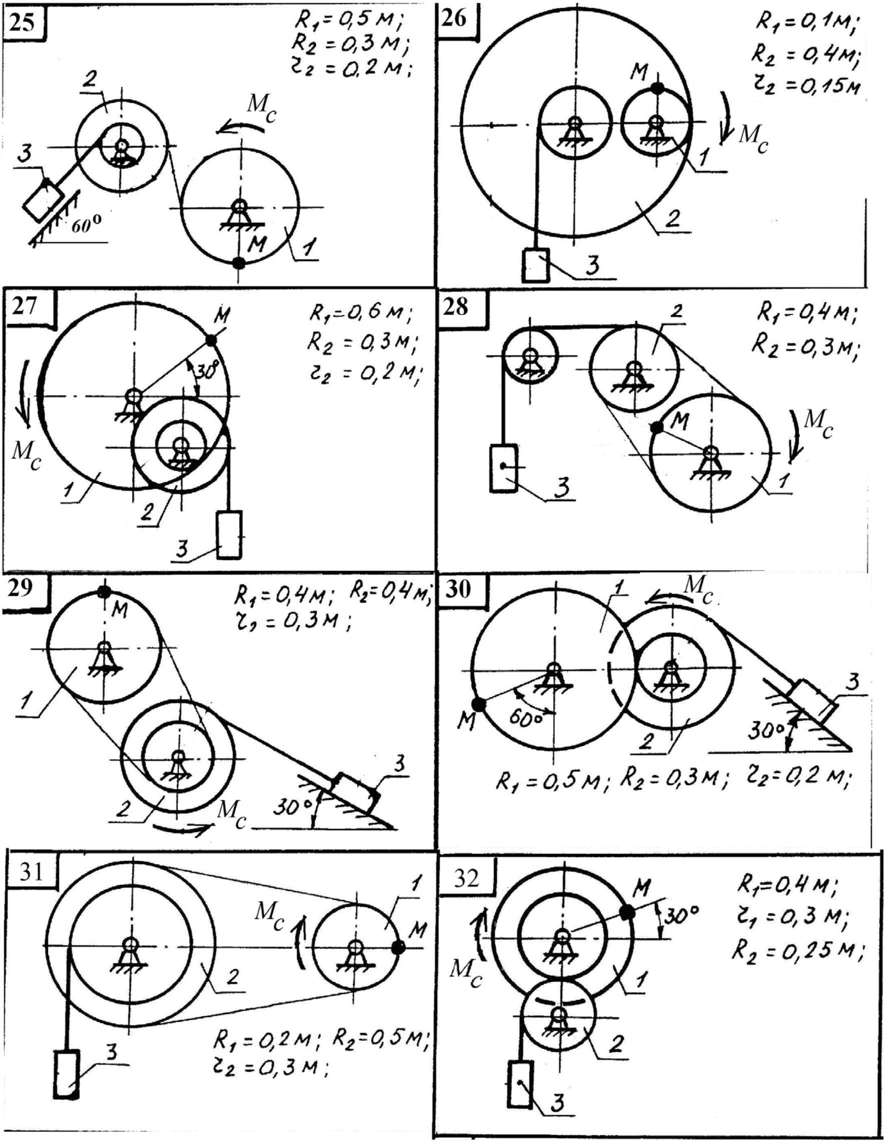

25
R₁ = 0,5 м;
R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,2 м;
M_C
60°
M
1
2
3
26
R₁ = 0,1м;
R₂ = 0,4м;
r₂ = 0,15м
M
M_C
1
2
3
27
R₁ = 0,6 м;
R₂ = 0,3 м;
r₂ = 0,2 м;
M
30°
M_C
1
2
3
28
R₁ = 0,4 м;
R₂ = 0,3 м;
M
M_C
1
2
3
29
R₁ = 0,4м; R₂ = 0,4м;
r₁ = 0,3 м;
M
M_C
30°
1
2
3
30
M_C
60°
30°
M
R₁ = 0,5 м; R₂ = 0,3 м; r₂ = 0,2 м;
1
2
3
31
M_C
M
R₁ = 0,2 м; R₂ = 0,5м;
r₂ = 0,3 м;
1
2
3
32
R₁ = 0,4 м;
r₁ = 0,3 м;
R₂ = 0,25 м;
M
30°
M_C
1
2
3

Рис. Д7.4

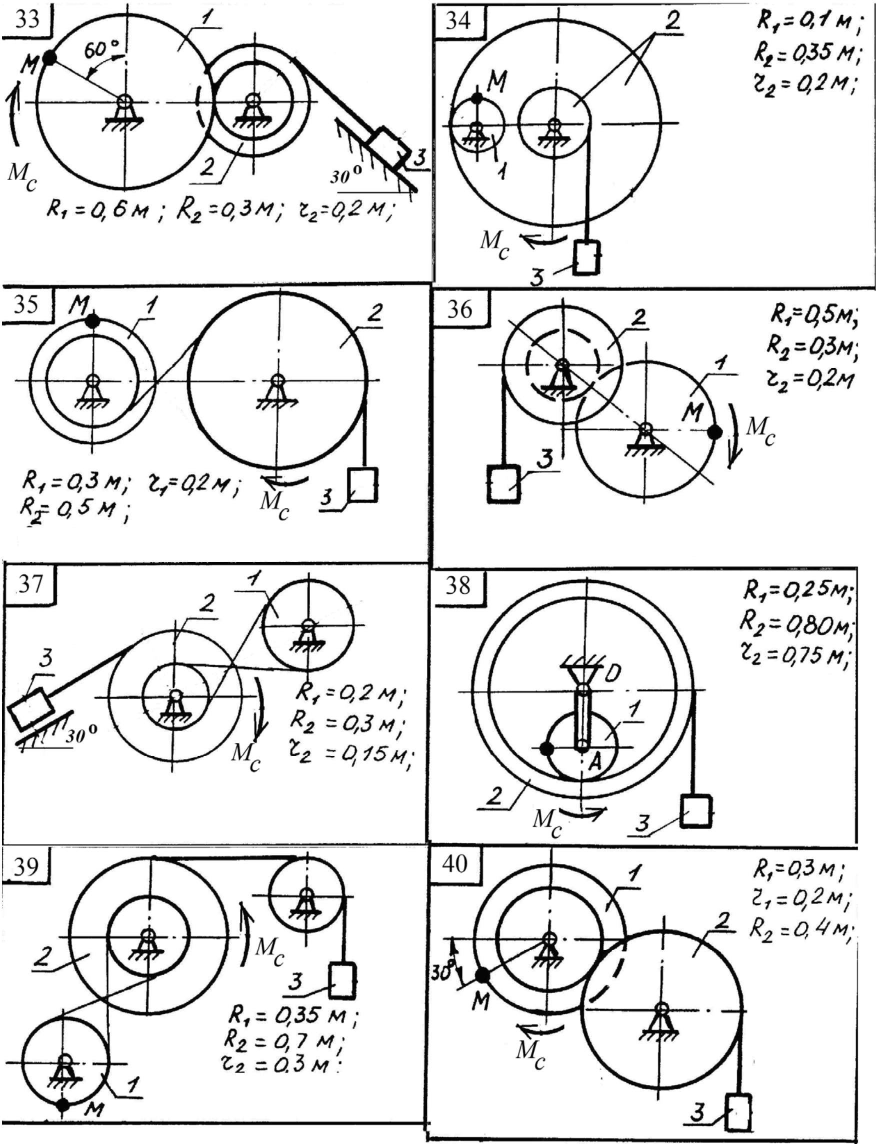

33
M
60°
1
2
3
30°
Mc
R1 = 0,6 м ; R2 = 0,3 м ; r2 = 0,2 м ;
34
2
M
1
Mc
3
R1 = 0,1 м ;
R2 = 0,35 м ;
r2 = 0,2 м ;
35
M
1
2
R1 = 0,3 м ; r1 = 0,2 м ;
R2 = 0,5 м ;
Mc
3
36
2
R1 = 0,5м;
R2 = 0,3м;
r2 = 0,2м
1
M
Mc
3
37
1
2
3
30°
Mc
R1 = 0,2 м ;
R2 = 0,3 м ;
r2 = 0,15 м ;
38
R1 = 0,25м;
R2 = 0,80м;
r2 = 0,75 м ;
D
1
A
2
Mc
3
39
2
Mc
3
R1 = 0,35 м ;
R2 = 0,7 м ;
r2 = 0,3 м ;
1
M
40
R1 = 0,3 м ;
r1 = 0,2 м ;
R2 = 0,4 м ;
1
2
30°
M
Mc
3

Рис. Д7.5

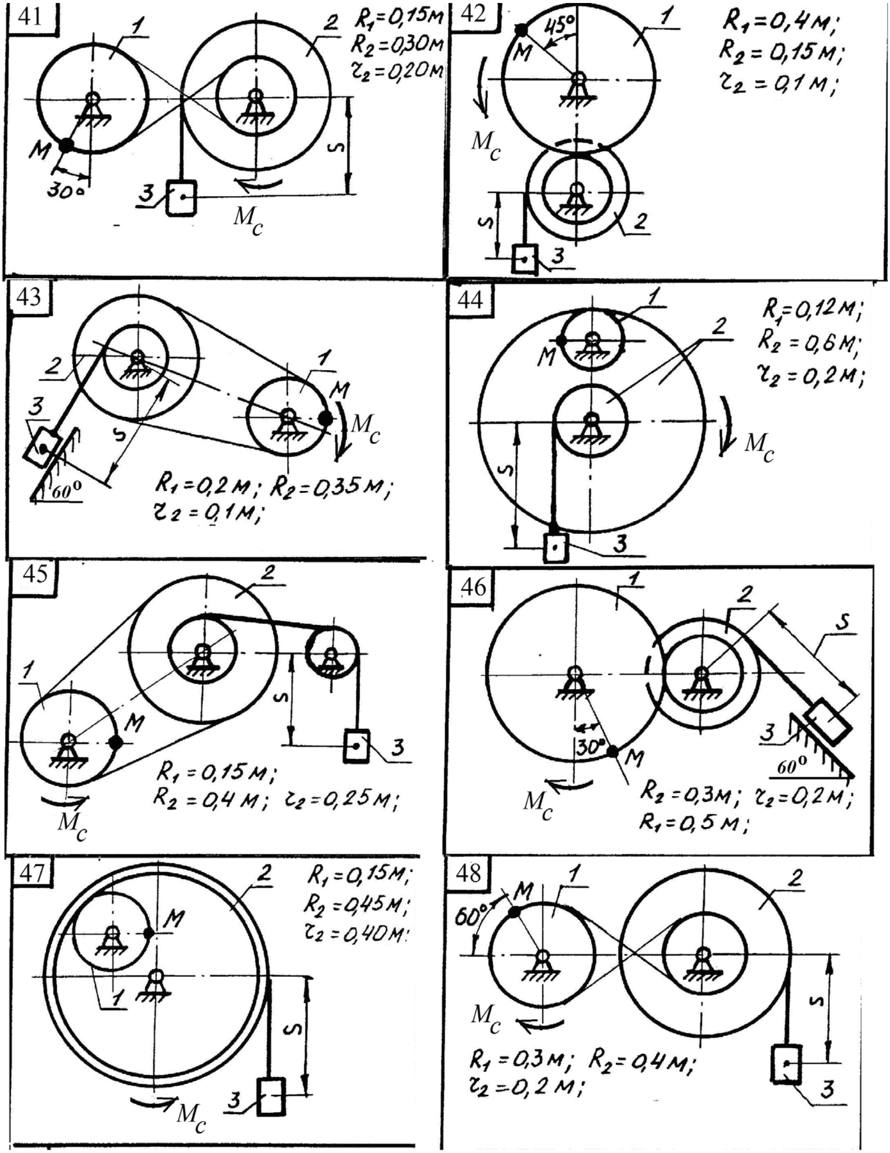

41
R₁=0,15м
R₂=0,30м
r₂=0,20м
1
2
M
30°
3
S
M_c
42
R₁=0,4м;
R₂=0,15м;
r₂=0,1м;
45°
M
1
M_c
S
2
3
43
2
3
S
1
M
M_c
60°
R₁=0,2м; R₂=0,35м;
r₂=0,1м;
44
R₁=0,12м;
R₂=0,6м;
r₂=0,2м;
1
M
2
M_c
S
3
45
2
1
M
S
3
R₁=0,15м;
R₂=0,4м; r₂=0,25м;
M_c
46
1
2
S
3
30°
M
60°
M_c
R₂=0,3м; r₂=0,2м;
R₁=0,5м;
47
R₁=0,15м;
R₂=0,45м;
r₂=0,40м;
2
M
1
S
3
M_c
48
M
1
2
60°
M_c
S
R₁=0,3м; R₂=0,4м;
r₂=0,2м;
3

Рис. Д7.6

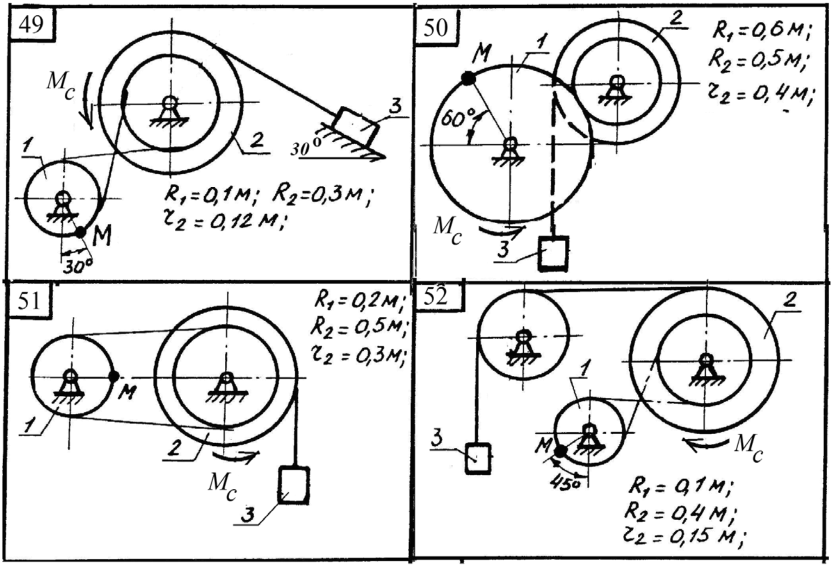


Рис. Д7.7

ЗАДАНИЕ Д8

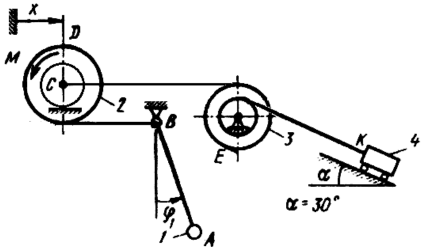
Применение уравнения Лагранжа II рода к изучению движения механической системы с двумя степенями свободы

Варианты механических систем представлены на рис. Д8.1–Д8.9. Шкивы и катки считать абсолютно жесткими, нити – нерастяжимыми. Проскальзывание катков в точках опоры отсутствует. Нить в точке *B* пропущена через кольцо пренебрежимо малых размеров. Трение в кольце и в осях шкивов не учитывать. Груз *A* массой m_1 точечный, груз *K* массой m_4 и груз *G* двигаются поступательно. Активными силами являются заданные вес и пара сил с моментом *M*, определяемым из условия равновесия системы. Катки, шкивы, блоки, для которых радиус инерции не указан, считать однородными дисками. Исходные данные к заданию Д8 указаны в таблице.

1. Найти из условия равновесия системы момент *M*.
2. Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Пример выполнения задания

В механической системе точечный груз A массой m_1 прикреплен к нити, пропущенной через кольцо B. Каток D массой m_2 движется без скольжения. Нити – нерастяжимые, невесомые. Трение в кольце, в оси шкива E массой m_3 и между наклонной плоскостью и грузом K массой m_4 не учитывается.



В качестве обобщенных координат выбираем угол φ_1 отклонения нити AB от вертикали и координату x центра C катка D, отсчитываемую от его начального положения.

Дано: $m_1 = 103$ кг; $m_2 = 63$ кг; $m_3 = 27$ кг; $m_4 = 107$ кг; $l_0 = 1{,}31$ м; $R_2 = 0{,}27$ м; $r_2 = 0{,}114$ м; $R_3 = 0{,}15$ м; $r_3 = 0{,}1$ м; $\rho_2 = 0{,}1$ м; $\rho_3 = 0{,}1$ м.

Требуется:

1) составить дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа II рода;

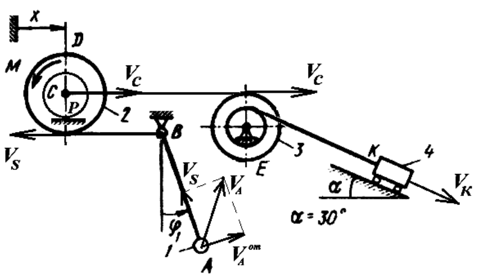
2) найти из условия равновесия системы в обобщенных координатах момент M.

Составим дифференциальные уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}\ ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\ .$$

Найдем выражение кинетической энергии системы как функции обобщенных координат и скоростей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4\ .$$



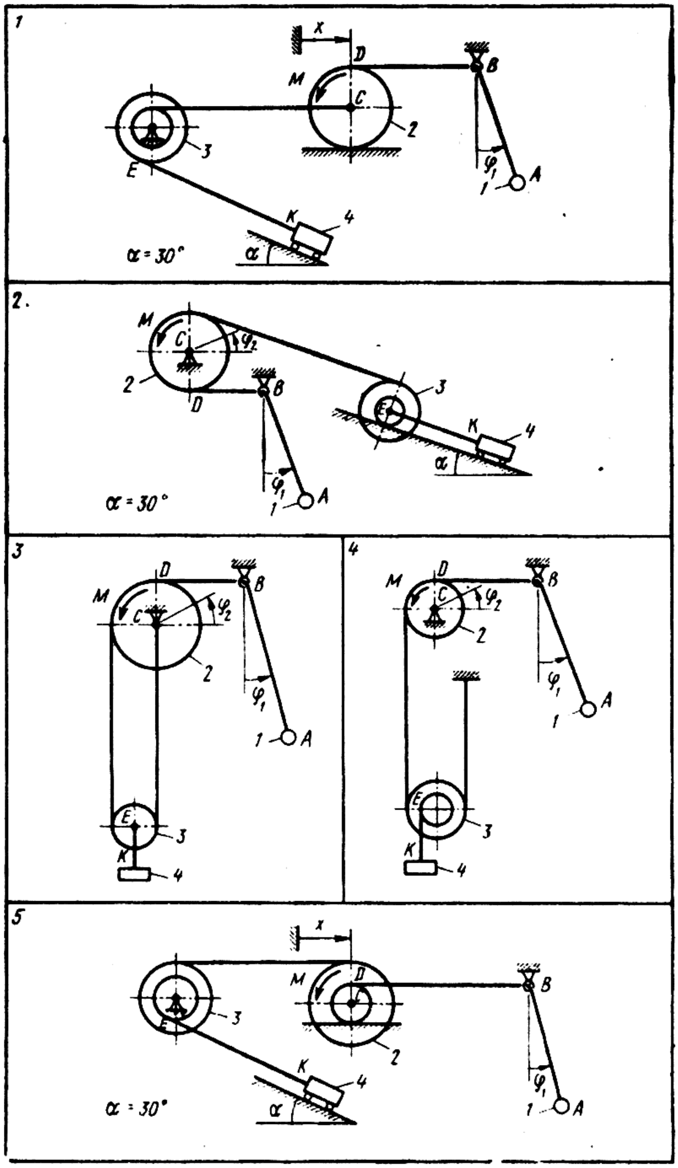

1
x
D
B
M
C
2
3
E
φ_1
A
1
K
4
$\alpha = 30°$
α
2.
M
C
φ_2
2
B
D
3
E
K
4
α
φ_1
A
1
$\alpha = 30°$
3
D
B
M
C
φ_2
2
φ_1
1
A
E
3
K
4
4
D
B
M
C
φ_2
2
φ_1
A
1
E
3
K
4
5
x
M
D
B
3
E
2
K
4
φ_1
$\alpha = 30°$
α
1
A

Рис. Д8.1

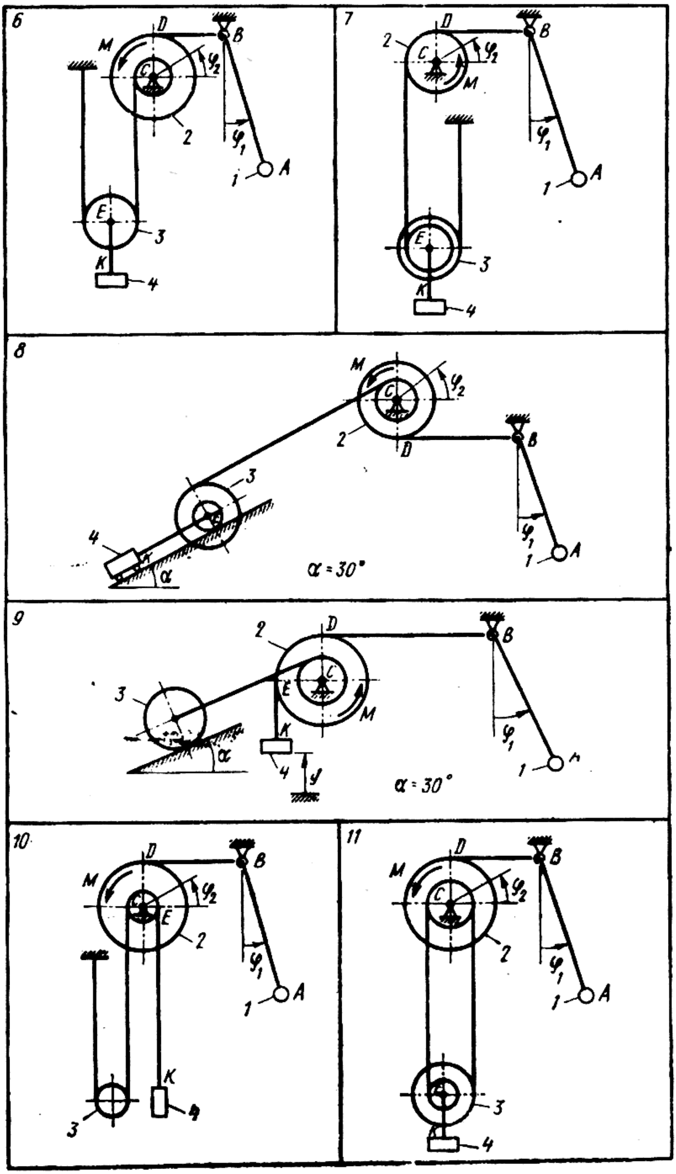


Рис. Д8.2

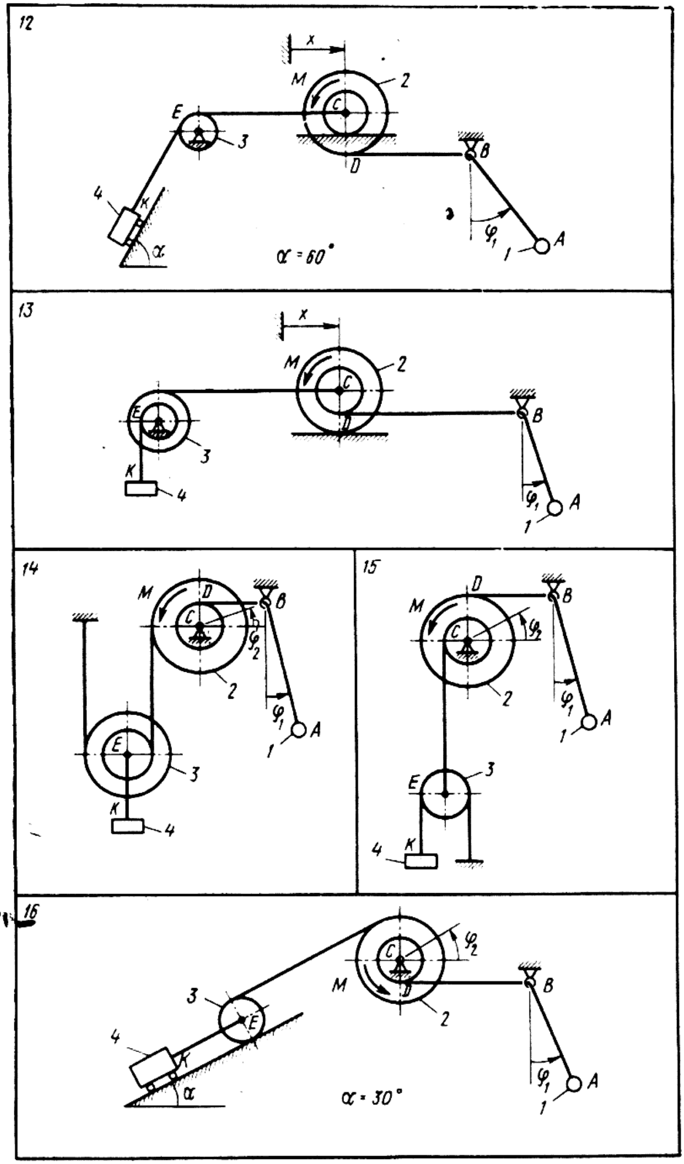

12
x
M
2
C
E
3
D
B
4
K
α
α = 60°
φ1
1
A
13
x
M
2
C
E
3
D
B
K
4
φ1
1
A
14
M
D
C
B
φ2
2
φ1
1
A
E
3
K
4
15
D
B
M
C
φ2
2
φ1
1
A
E
3
4
K
16
C
φ2
M
D
B
2
3
E
4
K
α
α = 30°
φ1
1
A

Рис. Д8.3

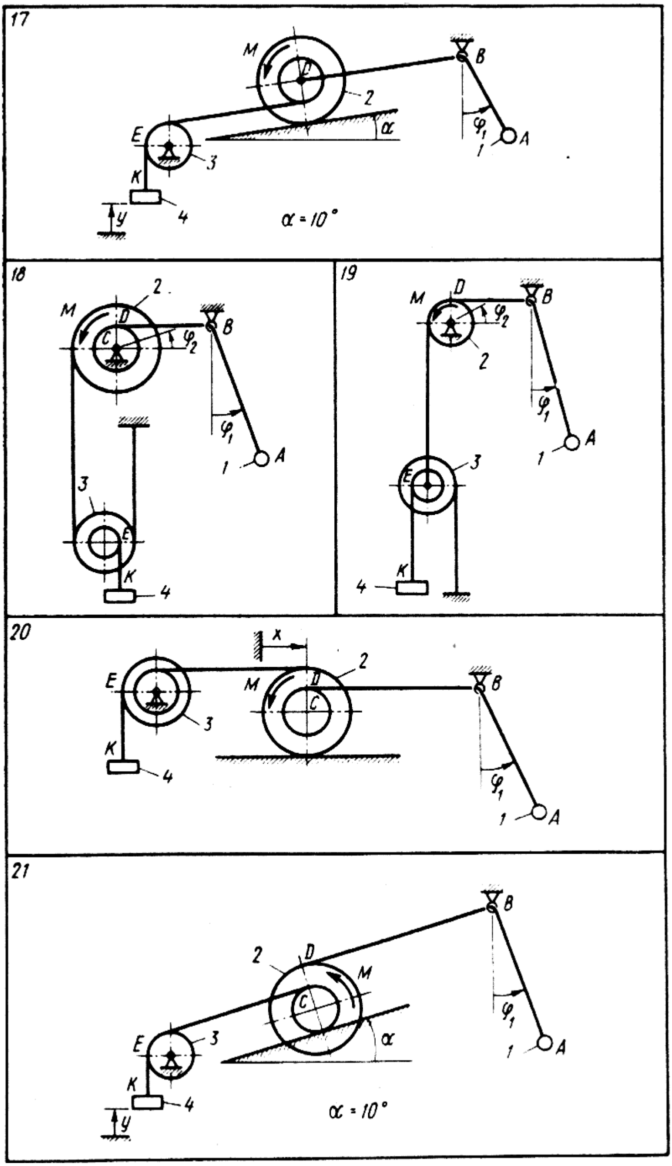

17
M
D
B
2
E
α
φ1
3
A
1
K
4
y
α = 10°
18
2
M
D
C
B
φ2
φ1
A
1
3
E
K
4
19
M
D
B
φ2
2
φ1
A
1
E
3
K
4
20
x
2
E
M
D
B
C
3
K
4
φ1
1
A
21
B
D
2
M
C
φ1
E
3
α
1
A
K
4
y
α = 10°

Рис. Д8.4

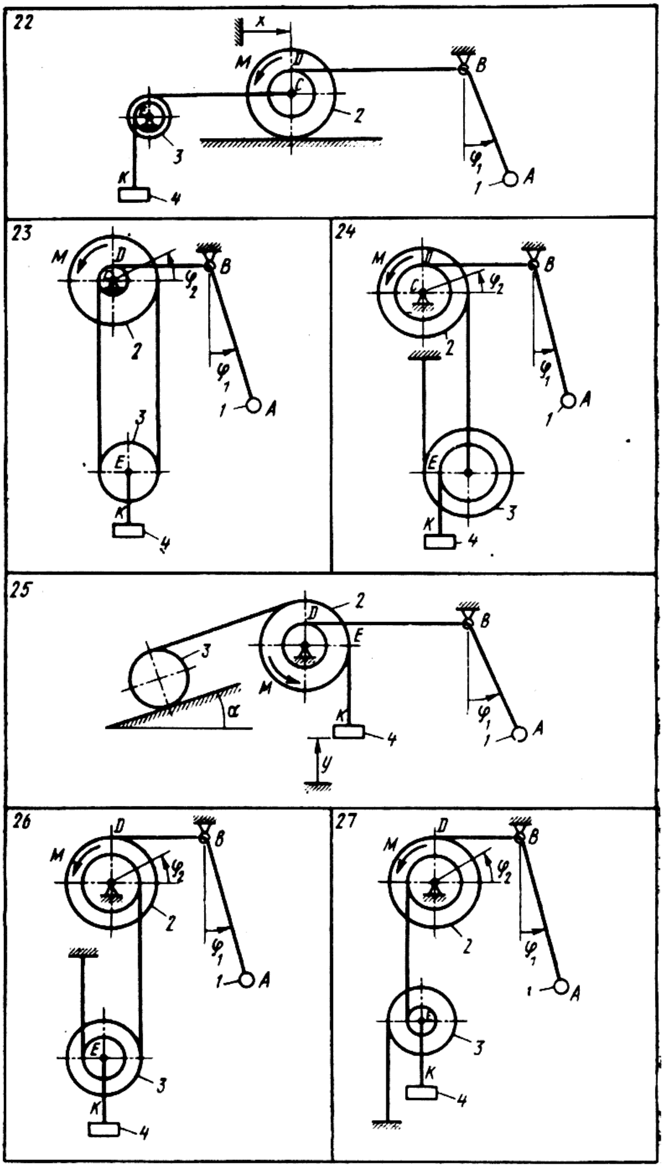


Рис. Д8.5

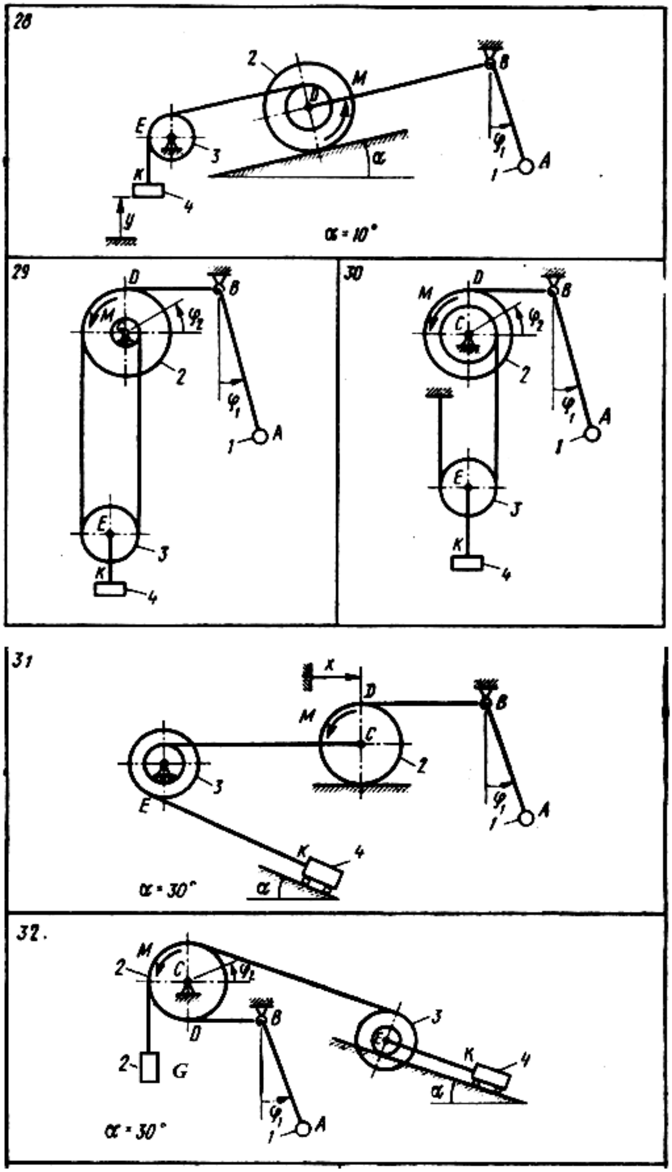


Рис. Д8.6

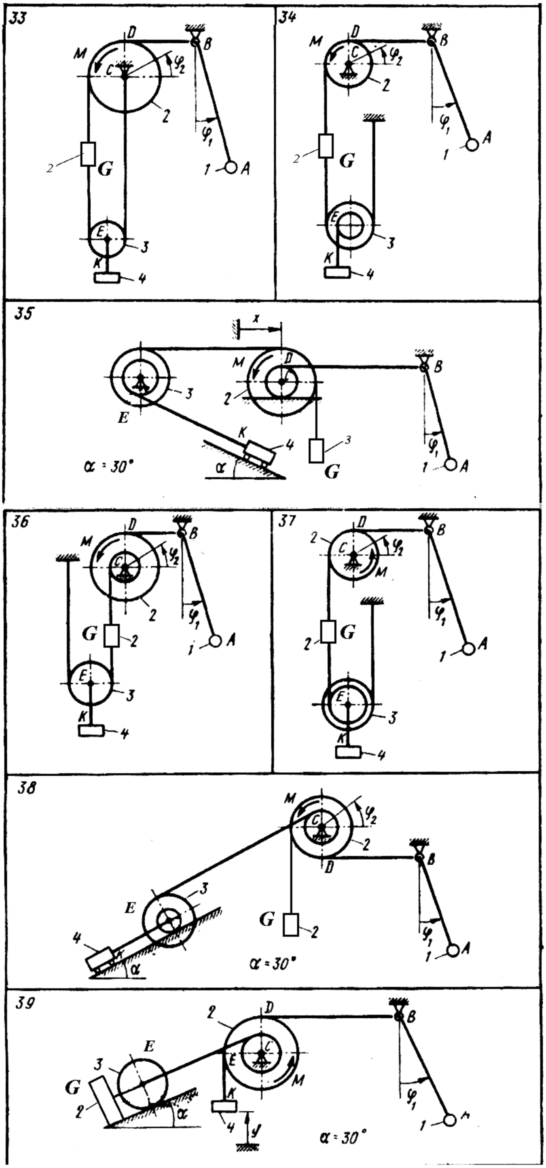


Рис. Д8.7

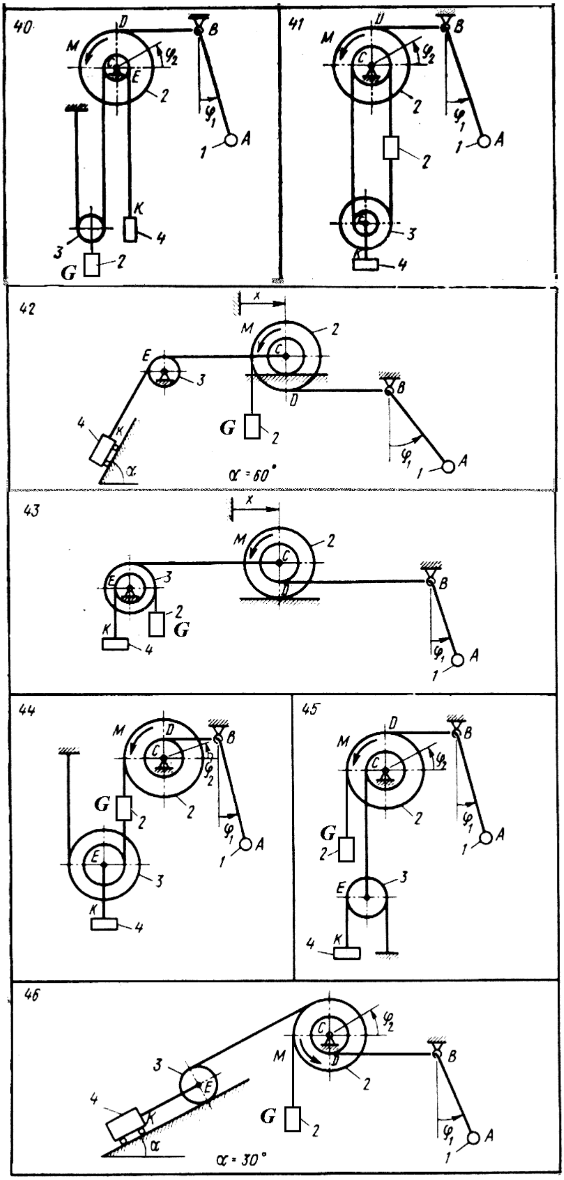

40
D
B
M
C
E
φ_2
2
φ_1
1
A
K
3
4
G
2
41
D
B
M
C
φ_2
2
φ_1
1
A
2
3
4
42
x
M
2
C
E
3
B
D
4
K
G
2
φ_1
1
A
α
α = 60°
43
x
M
2
C
E
3
B
D
2
G
K
4
φ_1
A
1
44
M
D
B
C
φ_2
G
2
2
φ_1
1
A
E
3
K
4
45
D
B
M
C
φ_2
2
φ_1
G
2
1
A
E
3
4
K
46
C
φ_2
M
D
B
3
E
2
4
K
G
2
φ_1
A
1
α
α = 30°

Рис. Д8.8

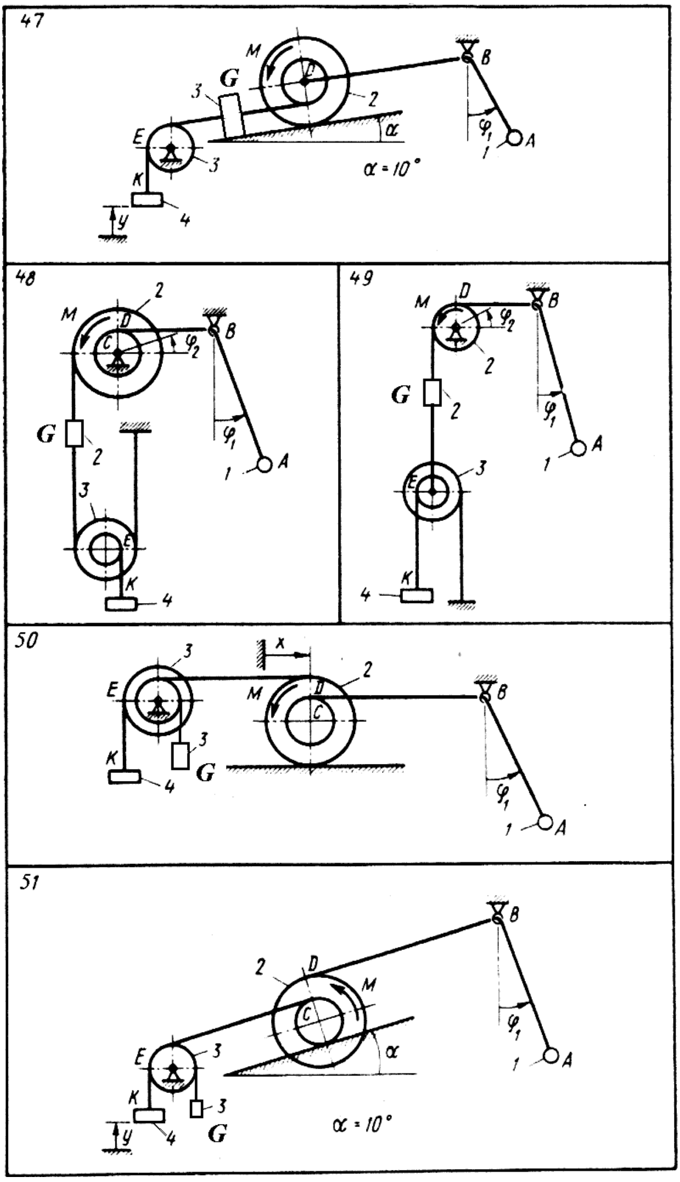

47
M
G
D
B
2
3
E
3
K
4
y
α
φ1
1
A
α = 10°
48
M
2
D
C
B
φ2
G
2
φ1
1
A
3
E
K
4
49
M
D
B
φ2
2
G
2
φ1
1
A
E
3
K
4
50
x
3
2
E
M
D
C
B
K
3
G
4
φ1
1
A
51
B
2
D
M
C
α
E
3
K
3
y
4
G
φ1
1
A
α = 10°

Рис. Д8.9

Исходные данные

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	r_2	ρ_2	R_3	r_3	ρ_3	l_0
	кг										
1	4	3	1	10	0,3			0,24	0,12	0,1	1,01
2	5	4	1	12	0,2			0,27	0,09	0,12	1,02
3	6	5	2	14	0,2						1,03
4	7	6	2	18	0,1			0,15	0,05	0,10	1,04
5	8	7	2	20	0,2	0,12	0,12	0,2	0,10	0,11	1,05
6	9	8	3	5	0,3	0,15	0,16	0,14			1,06
7	10	7	2	20	0,1			0,12	0,10	0,09	1,07
8	12	10	2	15	0,2	0,12	0,11	0,22	0,12	0,13	1,08
9	14	12	2	20	0,3	0,15	0,14	0,14			1,09
10	15	14	1	22	0,3	0,12	0,13	0,10			1,10
11	20	18	1	23	0,2	0,11	0,12		0,04	0,09	1,11
12	25	20	2	24	0,3	0,14	0,16	0,14			1,12
13	20	5	2	25	0,2	0,12	0,11	0,12	0,08	0,08	1,13
14	15	20	2	26	0,3	0,10	0,12	0,18	0,10	0,11	1,14
15	25	15	2	27	0,2	0,12	0,14	0,12			1,15
16	30	20	2	28	0,2	0,10	0,12	0,14			1,16
17	25	18	2	8	0,3	0,15	0,18	0,14			1,17
18	30	15	2	9	0,2	0,16	0,21	0,16	0,08	0,09	1,18
19	25	26	2	10	0,1			0,18	0,08	0,10	1,19
20	24	30	1	12	0,3	0,16	0,20	0,15	0,12	0,10	1,20
21	10	20	1	15	0,2	0,16	0,21	0,15			1,21
22	15	30	1	20	0,2	0,18	0,22	0,12	0,08	0,09	1,22
23	25	38	2	30	0,1	0,12	0,20				1,23
24	30	22	2	35	0,2	0,20	0,22	0,22	0,18	0,12	1,24
25	35	28	1	40	0,3	0,15	0,14	0,14			1,25
26	40	30	2	45	0,2	0,14	0,13	0,18	0,06	0,06	1,26
27	35	20	1	40	0,3	0,14	0,14	0,16	0,12	0,10	1,27
28	30	15	1	35	0,3	0,10	0,16	0,14			1,28
29	35	20	2	40	0,2	0,12	0,18				1,29
30	30	25	2	50	0,3	0,16	0,12	0,18			1,30

Окончание табл. Д8.1

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	r_2	ρ_2	R_3	r_3	ρ_3	l_0
	кг										
31	4	3	1	10	0,2			0,14	0,08	0,09	1,11
32	5	4	1	12	0,3		0,16	0,12	0,08	0,08	1,12
33	6	5	2	14	0,2						1,13
34	7	6	2	18	0,3	0,10	0,12	0,18			1,14
35	8	7	2	20	0,2	0,12	0,14	0,18	0,12	0,12	1,15
36	9	8	3	5	0,2	0,10	0,12	0,22			1,16
37	10	7	2	20	0,3			0,14	0,08	0,09	1,17
38	12	10	2	15	0,2	0,12	0,16	0,16	0,08	0,09	1,18
39	14	12	2	20	0,1	0,14	0,16	0,18			1,19
40	15	14	1	22	0,3	0,16	0,20	0,15			1,20
41	20	18	1	23	0,2	0,16	0,21		0,04	0,10	1,21
42	25	20	2	24	0,2	0,18	0,22	0,12			1,22
43	20	100	2	25	0,12	0,10	0,12	0,08	0,06	0,07	1,23
44	15	20	2	26	0,2	0,20	0,22	0,22	0,18	0,12	1,24
45	25	15	2	27	0,3	0,15	0,14				1,25
46	30	20	2	28	0,2	0,14	0,13	0,18			1,26
47	25	18	2	8	0,3	0,14	0,14	0,15		0,10	1,27
48	30	15	2	9	0,3	0,10	0,16				1,28
49	25	26	2	10	0,2		0,18				1,29
50	24	30	1	12	0,3	0,16	0,12	0,12	0,08	0,09	1,30
51	10	20	1	15	0,3			0,24	0,12	0,1	1,01

Кинетическая энергия груза *A* равна $T_1 = \dfrac{m_1 V_A^2}{2}$. Груз *A* совершает сложное движение. Относительная скорость $V_A^{\text{от}} = \dot{\varphi}_1 AB$, переносная скорость V_s находится из условия плоскопараллельного движения катка *2* (точка *P* – мгновенный центр скоростей), $\dfrac{V_c}{r_2} = \dfrac{V_s}{R_2 - r_2}$. Полагая, что $V_c = \dot{x}$, получим $V_s = \dfrac{\dot{x}(R_2 - r_2)}{r_2}$. Тогда абсолютная скорость груза $V_A^2 = (V_s)^2 + \left(V_A^{\text{от}}\right)^2 = \dfrac{\dot{x}^2 (R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + \dot{\varphi}_1^2 AB^2$, а кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{m_1\left[\dfrac{\dot{x}^2 (R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + \dot{\varphi}_1^2 AB^2\right]}{2}.$$

Длина нити AB непрерывно изменяется. Определим текущее значение нити как $AB = l_0 - l$. Так как система голономная, то соотношение перемещений будет такое же, как и соотношение скоростей: $\dfrac{x}{r_2} = \dfrac{l}{R_2 - r_2}$, откуда $l = \dfrac{x(R_2 - r_2)}{r_2}$.

Тогда окончательный вид записи кинетической энергии:

$$T_1 = \frac{m_1\left[\dfrac{\dot{x}^2 (R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + \dot{\varphi}_1^2\left(l_0 - \dfrac{x(R_2 - r_2)}{r_2}\right)^2\right]}{2}.$$

Кинетическая энергия катка *2*, совершающего плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{m_2 V_c^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \rho_2^2 \dfrac{\dot{x}}{r_2^2}}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2}\left(1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2}\right).$$

Кинетическая энергия шкива *3*, совершающего вращательное движение:

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \rho_3^2 \left(\dfrac{V_c}{R_3}\right)^2}{2} = \frac{m_3 \rho_3^2 \dot{x}^2}{2R_3^2}.$$

Кинетическая энергия груза K, совершающего поступательное движение:

$$T_4 = \frac{m_4 V_K^2}{2}. \text{ Так как } V_K = \frac{V_c}{R_3} r_3, \text{ то } T_4 = \frac{m_4 \dot{x}^2 r_3^2}{2R_3^2}.$$

Тогда

$$T = \frac{m_1 \left[\dfrac{\dot{x}^2 (R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + \dot{\varphi}_1^2 \left(l_0 - \dfrac{x(R_2 - r_2)}{r_2} \right)^2 \right]}{2} +$$

$$+ \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} \left(1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \right) + \frac{m_3 \rho_3^2 \dot{x}^2}{2R_3^2} + \frac{m_4 \dot{x}^2 r_3^2}{2R_3^2}.$$

Проведем дифференцирование полученного выражения:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{m_1 \dot{\varphi}_1^2 (R_2 - r_2)}{r_2} \left[\frac{x(R_2 - r_2)}{r_2^2} - \frac{l_0}{r_2} \right] = 140{,}9\dot{\varphi}_1 (12x - 11{,}5);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1 \frac{\dot{x}(R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + m_2 \dot{x} \left(1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \right) + \frac{m_3 \rho_3^2 \dot{x}}{R_3^2} + \frac{m_4 \dot{x} r_3^2}{R_3^2},$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \left[m_1 \frac{(R_2 - r_2)^2}{r_2^{\,2}} + m_2 \left(1 + \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \right) + \frac{m_3 \rho_3^2}{R_3^2} + \frac{m_4 r_3^2}{R_3^2} \right] = 363{,}8\dot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1 \dot{\varphi}_1 \left(l_0 - \frac{x(R_2 - r_2)}{r_2} \right)^2 = 175{,}1\dot{\varphi}_1 - 282{,}22\dot{\varphi}_1 x + 192{,}6\dot{\varphi}_1 x^2;$$

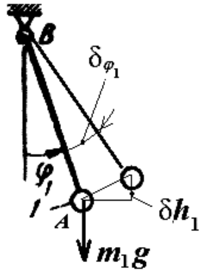
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 363{,}8\ddot{x};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 175{,}1\ddot{\varphi}_1 - 282{,}22\ddot{\varphi}_1 x - 282{,}22\dot{\varphi}_1 \dot{x} + 192{,}6\ddot{\varphi}_1 x^2 + 385{,}22\dot{\varphi}_1 \dot{x},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=175{,}1\ddot{\varphi}_1-282{,}22\ddot{\varphi}_1 x+192{,}6\ddot{\varphi}_1 x^2+103\dot{\varphi}_1\dot{x}\,.$$

Для определения обобщенной силы Q_φ зафиксируем обобщенную координату *x*, а обобщенной координате φ_1 дадим возможное перемещение $\delta\varphi$. Все тела, кроме точечного груза *1*, будут неподвижны. На груз *A* действует только одна активная сила – сила тяжести. Определим работу силы тяжести $m_1 g$:



$$\delta A_1=-m_1 g\delta h_1;\ \delta h_1=AB\delta\varphi_1\sin\varphi_1=(l_0-l)\sin\varphi_1\delta\varphi_1,$$

или

$$\delta A_1=-\left(l_0-\frac{x(R_2-r_2)}{r_2}\right)\sin\varphi_1\delta\varphi_1\,.$$

Тогда обобщенная сила

$$Q_{\varphi_1}=-\left(l_0-\frac{x(R_2-r_2)}{r_2}\right)\sin\varphi_1\,.$$

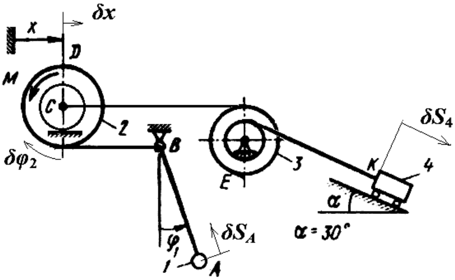
Для определения обобщенной силы Q_x зафиксируем обобщенную координату φ_1, а обобщенной координате *x* дадим возможное перемещение δx. Система переместится в соответствии с рисунком (см. ниже). Определим работу активных сил системы. Сила тяжести катка *2* работу совершать не будет, так как каток движется по горизонтальной линии. Не будет совершать работу и вес блока *3*, так как его центр тяжести неподвижен. Работу будут совершать силы тяжести тела *1* и тела *4*, а также момент *M*.

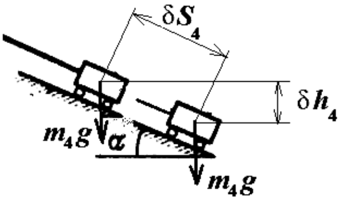
Определим возможную работу системы $\delta A=\delta A_1+\delta A_M+\delta A_4$, где

$$\delta A_1=-m_1 g\delta S_A\cos\varphi_1=-m_1 g\cos\varphi\frac{(R_2-r_2)}{r_2}\delta x;\ \delta A_M=-M\delta\varphi_2=-M\frac{\delta x}{r_2};$$

$$\delta A_4=m_4 g\delta h_4=m_4 g\delta S_4\sin 30°=m_4 g\sin 30^0\frac{r_3}{R_3}\delta x;$$

$$\delta A=\left[-m_1 g\cos\varphi_1\frac{(R_2-r_2)}{r_2}-M\frac{1}{r_2}+m_4 g\sin 30^\circ\frac{r_3}{R_3}\right]\delta x\ .$$





Тогда обобщенная сила Q_x:

$$Q_x=-m_1 g\cos\varphi_1\frac{(R_2-r_2)}{r_2}-$$

$$-M\frac{1}{r_2}+m_4 g\sin 30^\circ\frac{r_3}{R_3}.$$

Запишем условие равновесия системы в обобщенных координатах: $Q_{\varphi_1}=0$; $Q_x=0$. Из первого равенства следует, что $\varphi_1=0$; из второго: $M=\left[m_4 g\sin 30^\circ\frac{r_3}{R_3}-m_1 g\cos\varphi_1\frac{(R_2-r_2)}{r_2}\right]r_2$. Подставив числовые значения, получим M = –120 Н. Знак минус говорит о том, что для равновесия системы момент должен быть направлен в противоположную сторону.

Запишем уравнения Лагранжа II рода:

$$363{,}8\ddot{x}-140{,}9\dot{\varphi}_1(12x-11{,}5)=-160{,}7\cos\varphi_1+1049{,}3\ ;$$

$$175{,}1\ddot{\varphi}_1-282{,}22\ddot{\varphi}_1 x+192{,}6\ddot{\varphi}_1 x^2+103\dot{\varphi}_1\dot{x}=(1{,}37x-1{,}31)\sin\varphi_1\ .$$

Если зададим начальные условия, то полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно решить с помощью стандартных программ, например, методом Рунге–Кутта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для техн. вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; под ред. А.А. Яблонского. – 4 изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1985. – 367 с.

2. Динамика механической системы: методические указания к решению задач и курсовые задания по теоретической механике / сост.: С.Т. Ковган, Р.Г. Мамаев; Уфимский гос. авиац.-техн. ун-т. – Уфа, 1996. – 18 с.

3. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников строительных, транспортных, машиностроительных и приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг, В.Л. Цывильский, И.М. Шмарова; под ред. С.М. Тарга. – 3-е изд. – Москва: Высшая школа, 1982. – 110 с.

4. Теоретическая механика. Динамика. Сборник заданий для расчетно-графических работ: учебное пособие / С.В. Белокобыльский, Н.М. Захаров, В.А. Коронатов, В.А. Поскребышев. – Братск: ГОУ ВПО «БрГУ», 2009. – 186 с.

5. *Новожилов И.В.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: учебное пособие для втузов / И.В. Новожилов, М.Ф. Зацепин. – Москва: Высшая школа, 1986. – 136 с.

6. Теоретическая механика: теория, задания и примеры решения задач: учебное пособие для техн. вузов / Б.Е. Ермаков, А.А. Асриянц, В.Б. Борисевич, В.И. Кольцов; под ред. Б.Е. Ермакова. – 2-е изд. исправ. и доп. – Москва, 2007. – 344 с.

7. *Красюк А.М.* Сборник заданий для расчетно-графических работ по теоретической механике: учебное пособие / А.М. Красюк, А.А. Рыков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 164 с.

8. *Милосердин Ю.В.* Расчет и конструирование приборов и установок / Ю.В. Милосердин, Б.Д. Семенов, Ю.А. Кречко. – Москва: Машиностроение, 1983. – 486 с.

Красюк Александр Михайлович
Рыков Анатолий Аркадьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 23.07.2018. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 9,99. Печ. л. 10,75. Изд. № 87. Заказ № 1062. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20