

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Г. Ф. Горбачева»

В. А. Хямяляйнен

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Кемерово 2020

УДК 531(075.8)

Рецензенты:

Заслуженный работник высшей школы РФ, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, химии и теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета Т. А. Ковалевская

Кафедра технической механики Института горного дела, геологии и геотехнологии Сибирского федерального университета

Хямяляйнен, В. А. **Теоретическая механика** : учебное пособие. – Издание третье, переработанное / В. А. Хямяляйнен ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2020. – 227 с. – ISBN 978-5-00137-137-3. – Текст : непосредственный.

Учебное пособие представляет собой сокращенный (по объему) вариант курса теоретической механики для студентов технических специальностей и направлений бакалавриата. В нем излагаются вопросы геометрической статистики и геометрии движения твердых тел, динамики Ньютона и основы механики Лагранжа. Особое внимание уделено приложениям динамического моделирования физических процессов горнотехнических, строительных и машиностроительных технологий. Приведены примеры решения профилированных задач.

Пособие может быть использовано студентами технических вузов и колледжей.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева.

УДК 531(075.8)

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2020

© Хямяляйнен В. А., 2020

ISBN 978-5-00137-137-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
С Т А Т И К А		
Глава 1.	Основы статики.....	10
	1.1. Основные понятия и определения.....	10
	1.2. Аксиомы статики.....	11
	1.3. Связи и их реакции. Аксиома связей.....	12
Глава 2.	Система сходящихся сил.....	14
	2.1. Геометрический способ сложения и разложения сил....	14
	2.2. Теорема о трех силах.....	16
	2.3. Проекция силы на ось и на плоскость.....	16
	2.4. Аналитический способ сложения сил.....	17
	2.5. Равновесие системы сходящихся сил.....	18
	2.6. Примеры решения задач.....	19
Глава 3.	Момент силы. Пара сил.....	20
	3.1. Момент силы относительно точки.....	20
	3.2. Момент силы относительно оси.....	21
	3.3. Пара сил. Момент пары сил.....	22
	3.4. Эквивалентность пар сил.....	23
	3.5. Сложение пар сил. Условие равновесия пар.....	25
	3.6. Примеры решения задач.....	26
Глава 4.	Приведение системы сил к центру. Уравнения равновесия сил.....	28
	4.1. Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо).....	28
	4.2. Приведение системы сил к заданному центру.....	29
	4.3. Возможные случаи приведения произвольной системы сил.....	30
	4.4. Условия равновесия сил.....	31
	4.5. Приведение системы сил к равнодействующей. Теорема Вариньона.....	33

4.6.	Приведение системы сил к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме).....	34
4.7.	Инварианты приведения системы сил.....	35
4.8.	Уравнения центральной оси системы сил и линии действия равнодействующей.....	36
4.9.	Примеры решения задач.....	37
Глава 5.	Элементы графической статики.....	41
5.1.	Силовой и веревочный многоугольники.....	41
5.2.	Графическое определение равнодействующей плоской системы сил и опорных реакций.....	42
Глава 6.	Ферма и ее расчет.....	44
6.1.	Понятие о ферме.....	44
6.2.	Аналитический расчет плоской фермы методами вырезания узлов и сечений Риттера.....	44
6.3.	Графический расчет фермы. Диаграмма Максвелла – Кремоны.....	45
6.4.	Пример расчета плоской фермы.....	46
Глава 7.	Понятие о трении.....	49
7.1.	Трение скольжения.....	49
7.2.	Трение качения.....	50
Глава 8.	Центр тяжести.....	51
8.1.	Общие понятия и случай системы материальных точек.....	51
8.2.	Центр тяжести твердого тела.....	52
8.3.	Методы, облегчающие определение положения центра тяжести.....	53
8.4.	Теоремы Гюльдена.....	54
8.5.	Примеры определения положения центра тяжести.....	54
К И Н Е М А Т И К А		
Глава 1.	Кинематика точки.....	58
1.1.	Введение.....	58

1.2.	Способы задания движения точки.....	59
1.3.	Скорость точки.....	61
1.4.	Ускорение точки.....	65
1.5.	Частные случаи движения точки.....	70
1.6.	Примеры решения задач.....	71
Глава 2.	Простейшие движения твердого тела.....	73
2.1.	Поступательное движение тела.....	73
2.2.	Вращательное движение. Линейные и угловые скорости и ускорения.....	74
2.3.	Примеры решения задач.....	77
Глава 3.	Плоскопараллельное движение твердого тела.....	79
3.1.	Свойства плоскопараллельного движения твердого тела. Движение плоской фигуры в ее плоскости.....	79
3.2.	Скорости точек плоской фигуры.....	81
3.3.	Мгновенный центр скоростей и определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры.....	82
3.4.	План скоростей.....	85
3.5.	Ускорения точек плоской фигуры.....	86
3.6.	Мгновенный центр ускорений.....	87
3.7.	Примеры решения задач.....	90
Глава 4.	Сферическое движение твердого тела.....	94
4.1.	Уравнения сферического движения твердого тела.....	94
4.2.	Скорости точек. Мгновенная угловая скорость сферического движения.....	94
4.3.	Угловое ускорение. Ускорения точек при сферическом движении.....	96
4.4.	Общий случай движения твердого тела.....	97
Глава 5.	Кинематика сложного движения.....	98
5.1.	Относительное, переносное и абсолютное движения.....	98

5.2.	Теорема сложения скоростей при сложном движении точки.....	99
5.3.	Теорема сложения ускорений при сложном движении точки.....	100
5.4.	Сложение поступательных и вращательных движений твердого тела.....	101
5.5.	Примеры решения задач.....	105

ДИНАМИКА

Глава 1.	Динамика материальной точки.....	110
1.1.	Основные законы динамики.....	110
1.2.	Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.....	111
1.3.	Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки.....	112
1.4.	Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.....	114
1.5.	Принцип относительности Галилея.....	115
1.6.	Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения.....	116
Глава 2.	Введение в динамику механической системы.....	122
2.1.	Понятие о механической системе. Силы, действующие на механическую систему.....	122
2.2.	Центр масс механической системы.....	123
2.3.	Моменты инерции твердого тела. Радиус инерции.....	124
2.4.	Теорема Штейнера о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей.....	126
2.5.	Моменты инерции простейших однородных тел.....	127
2.6.	Момент инерции твердого тела относительно любой оси. Эллипсоид инерции	129
Глава 3.	Общие теоремы динамики точки и механической системы.....	132
3.1.	Дифференциальные уравнения движения механической системы.....	132

3.2.	Теорема о движении центра масс.....	133
3.3.	Первая мера действия силы и механического движения.....	134
3.4.	Теорема об изменении количества движения. Примеры решения задач.....	136
3.5.	Кинетический момент точки и механической системы.....	138
3.6.	Теорема об изменении кинетического момента.....	139
3.7.	Вторая мера действия силы и механического движения.....	141
3.8.	Теорема об изменении кинетической энергии.....	147
3.9.	Потенциальное силовое поле.....	148
3.10.	Примеры решения задач.....	153
Глава 4.	Динамика твердого тела.....	155
4.1.	Простейшие движения твердого тела.....	155
4.2.	Плоскопараллельное движение твердого тела.....	157
4.3.	Сферическое движение твердого тела.....	157
4.4.	Понятие о гироскопе.....	160
Глава 5.	Элементы теории удара.....	162
5.1.	Общие понятия.....	162
5.2.	Удар шара о неподвижную поверхность.....	165
5.3.	Соударение двух тел.....	167
5.4.	Центр удара вращающегося тела.....	169
Глава 6.	Принцип Даламбера.....	172
6.1.	Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.....	172
6.2.	Приведение сил инерции твердого тела к простейшему виду.....	174
Глава 7.	Аналитическая механика.....	175
7.1.	Связи и их классификация.....	176
7.2.	Возможные (виртуальные) перемещения механической системы. Идеальные связи.....	177
7.3.	Принцип возможных (виртуальных) перемещений.....	179

7.4.	Общее уравнение динамики.....	181
7.5.	Обобщенные координаты.....	183
7.6.	Обобщенные силы.....	184
7.7.	Общее уравнение динамики в обобщенных силах.....	185
7.8.	Условия равновесия механической системы и понятие об его устойчивости.....	186
7.9.	Дифференциальные уравнения движения в декартовых координатах (уравнения Лагранжа первого рода).....	189
7.10.	Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).....	190
7.11.	Примеры решения задач.....	192
Глава 8.	Малые колебания механической системы.....	204
8.1.	Общие понятия.....	204
8.2.	Собственные (гармонические) колебания.....	210
8.3.	Затухающие колебания и апериодическое движение....	213
8.4.	Вынужденные колебания.....	215
8.5.	Примеры решения задач.....	217
	Список рекомендуемой литературы.....	226

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука об общих законах движения материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между ними.

Материальные тела в окружающем нас мире находятся в непрерывном движении. Одной из наиболее распространенных форм движения материи является механическое движение, т. е. перемещение тел в пространстве с течением времени. Механическое движение взаимосвязано с другими формами движения материи: химической, биологической, тепловой, внутриатомной и т. д.

Весьма сложными объектами с точки зрения механики являются горные предприятия. Горное производство насыщено мощными механизмами, оптимальные конструктивные параметры которых необходимо рассчитывать. Сложные механические процессы протекают в основном объекте воздействия – массиве горных пород.

В теоретической механике исследуется движение идеализированных объектов: материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела. В природе таких идеализированных объектов, конечно же, не существует. Однако такое абстрагирование реальных физических объектов позволяет выявить наиболее общие законы механического движения тел независимо от их физических свойств. Поэтому теоретическую механику можно рассматривать как основу общей механики, включающую в себя все остальные механические дисциплины: механику твердого деформируемого тела, гидродинамику, строительную механику, теорию машин и механизмов и так далее.

Механика является одной из древнейших наук, возникшей из потребностей практики. Развитие механики проходило в тесной связи с развитием математики. Законы классической механики Ньютона не абсолютны. Для материальных тел, скорости которых близки к скорости света, следует применять механику специальной теории относительности. Движение элементарных частиц на уровне строения атома изучается в квантовой механике.

Теоретическая механика делится на три части: **статику**, **кинематику** и **динамику**. В статике устанавливаются условия равновесия тел, в кинематике рассматривается только геометрия движения, в динамике наиболее полно изучается движение тел с учетом побуждающих его причин – сил.

СТАТИКА

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ СТАТИКИ

1.1. Основные понятия и определения

Статика – раздел теоретической механики, занимающийся изучением условий равновесия материальных тел.

Материальное тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать, называется **материальной точкой**.

В теоретической механике рассматривают, как правило, абсолютно твердые тела.

Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояния, между любыми точками которого остаются неизменными.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или определенного движения. Каждое из этих состояний условимся называть **кинематическим состоянием**. Вид кинематического состояния тела зависит от характера его взаимодействия с другими телами.

Мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия, называется **силой**.

Согласно определению сила является векторной величиной и характеризуется тремя элементами: численным значением (модулем), направлением и точкой приложения. Размерность силы $[\bar{F}] = H$.

Системой сил называется совокупность нескольких сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, действующих на тело.

Системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются **эквивалентными**.

Сила \bar{R} , эквивалентная некоторой системе сил, называется **равнодействующей** этой системы сил.

Сила \bar{F}_y , равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется **уравновешивающей силой**.

Система сил, которая будучи приложенной к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется **системой уравновешивающихся сил**.

Силы, действующие на твердое тело или на систему тел со стороны других тел, называются **внешними**. Силы взаимодействия между частицами твердого тела или между телами данной системы называются **внутренними**.

1.2. Аксиомы статики

1. Аксиома равновесия двух сил. Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.1).

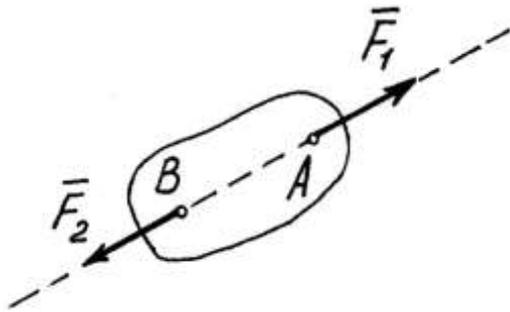


Рис. 1.1

2. Аксиома присоединения и исключения уравнивающихся сил.

Не изменяя действия системы сил на абсолютно твердое тело, можно присоединить к этой системе или исключить из нее любую уравнивленную систему сил.

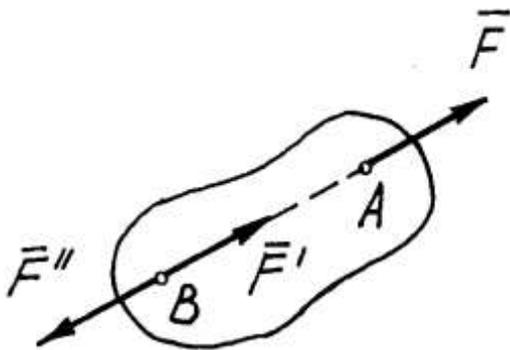


Рис. 1.2

Следствие. Силу \bar{F} , приложенную к какой-либо точке твердого тела A , можно, не изменяя ее действия, переносить в любую другую точку B , лежащую на линии действия этой силы (рис. 1.2).

Доказательство следует из аксиом 1 и 2:

$$(\bar{F}' = -\bar{F}'', \quad \bar{F}' = \bar{F}).$$

3. Аксиома параллелограмма сил. равнодействующая двух сил, пересекающихся в точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 1.3):

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

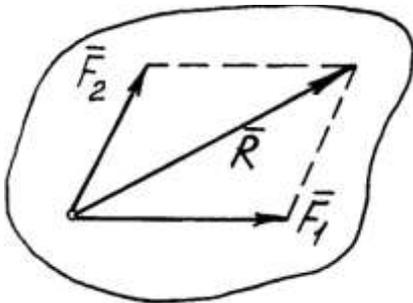


Рис. 1.3

Модуль равнодействующей $|\bar{R}|$ с использованием теоремы косинусов вычисляют по формуле

$$|\bar{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\left(\bar{F}_1 \wedge \bar{F}_2\right)},$$

а направление равнодействующей с использованием теоремы синусов определяют синусами углов, которые образует равнодействующая \bar{R} с составляющими ее силами \bar{F}_1 и \bar{F}_2 :

$$\sin\left(\bar{R} \wedge \bar{F}_1\right) = \frac{F_2 \sin\left(\bar{F}_1 \wedge \bar{F}_2\right)}{|\bar{R}|}; \quad \sin\left(\bar{R} \wedge \bar{F}_2\right) = \frac{F_1 \sin\left(\bar{F}_1 \wedge \bar{F}_2\right)}{|\bar{R}|}.$$

4. Аксиома равенства действия и противодействия. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

5. Аксиома отвердевания. Если нетвердое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушается и в том случае, если тело станет абсолютно твердым.

Из аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформирующемуся телу. Однако в случае деформируемого тела эти условия необходимы, но недостаточны.

1.3. Связи и их реакции. Аксиома связей

Твердое тело называется **свободным**, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются наложенными на него **связями**.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена связями, называется **несвободным**.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется **реакцией связи**.

Аксиома связей (принцип освобожденности от связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что совокупность внешних и внутренних сил можно разделить по другому принципу: на активные силы и реакции связей.

Одна из основных задач статики – определение реакций связей.

Основные типы геометрических связей и их реакции приведены на рис. 1.4–1.13.

Нить

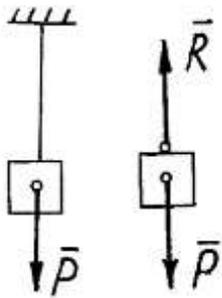


Рис. 1.4

Невесомый стержень

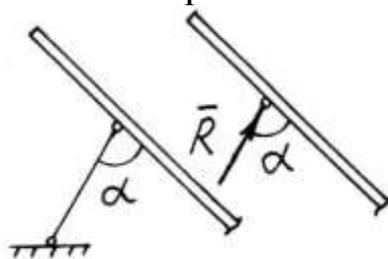


Рис. 1.5

Гладкая поверхность

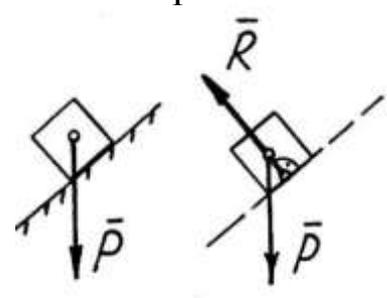


Рис. 1.6

Гладкое ребро

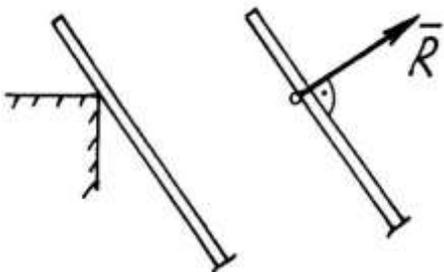


Рис. 1.7

Шероховатая поверхность

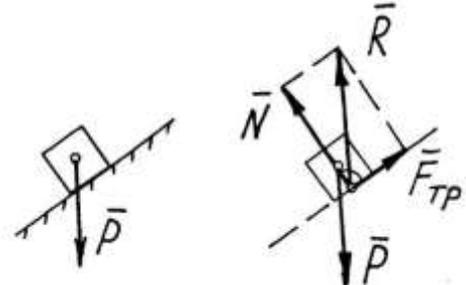


Рис. 1.8

Шарнирно-подвижная опора

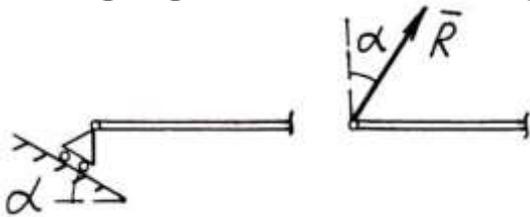


Рис. 1.9

Шарнирно-неподвижная опора

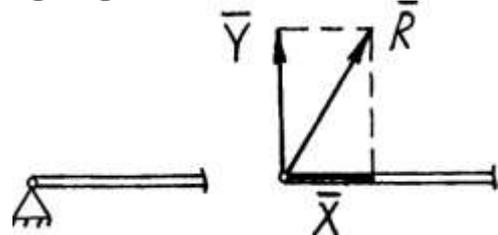


Рис. 1.10

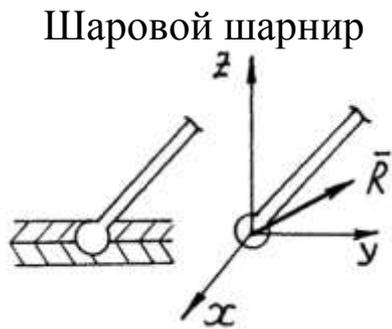


Рис 1.11



Рис. 1.12

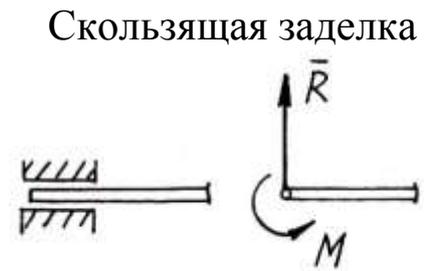


Рис. 1.13

На чертежах приняты следующие обозначения: \bar{P} – сила тяжести тела; \bar{R} – реакция связи; \bar{N} – нормальная составляющая реакции шероховатой поверхности; $\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения (составляющая реакции шероховатой поверхности); \bar{X} , \bar{Y} – составляющие реакции связи; M – величина момента в заделке.

ГЛАВА 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

2.1. Геометрический способ сложения и разложения сил

Так как точки приложения сходящихся сил согласно следствию из аксиомы 2 можно перенести по линиям их действия в точку пересечения этих линий, то систему сходящихся сил всегда можно заменить системой сил, приложенных в одной точке (рис. 2.1, а).

Задача о сложении двух сил решается на основе аксиомы 3 путем построения параллелограмма сил. Последовательно применяя аксиому 3 (правило построения параллелограмма сил), можно сложить любое количество сил. Таким образом, сложение сходящихся сил означает замену этих сил одной силой, им эквивалентной, то есть нахождение их равнодействующей \bar{R} .

При нахождении равнодействующей двух сил нет необходимости полного построения параллелограмма сил. Достаточно построить силовой треугольник (рис. 2.1, б). При нахождении равнодействующей большего количества сил последовательное построение силовых треугольников приводит к построению силового многоугольника (рис. 2.1, в).

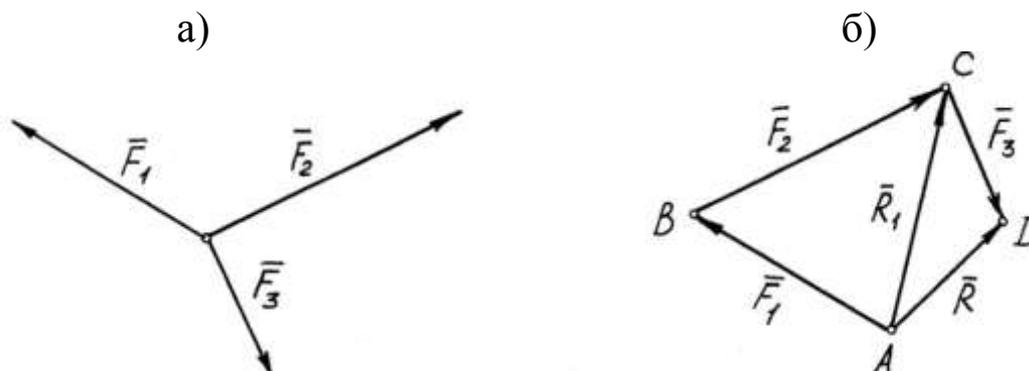


Рис. 2.1

В соответствии с рис. 2.1

$$\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \quad \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Таким образом, в результате многократного применения аксиомы 3 или, что то же, многократного построения силовых треугольников приходим к правилу силового многоугольника.

Правило силового многоугольника. Равнодействующая нескольких сходящихся сил равна вектору, соединяющему начальную и конечную точки ломаной линии, стороны которой представляют собой данные силы.

Ломаная линия ($ABCD$) называется **силовым многоугольником**.

Сложение сил по правилу силового многоугольника называется **геометрическим способом сложения сил**.

Равнодействующая системы сходящихся сил равна по модулю и направлению их геометрической сумме:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (n - \text{количество сил}).$$

Разложение силы на составляющие – задача, обратная задаче на сложение сил. Для решения этой задачи кроме задания вектора силы необходимо задание дополнительных условий.

Наиболее простыми и типичными задачами на разложение сил являются следующие:

- разложение силы \bar{F} на две составляющие по двум заданным направлениям, лежащим с ней в одной плоскости;
- разложение силы \bar{F} на три сходящиеся силы по трем направлениям, не лежащим в одной плоскости.

В соответствии с аксиомой 3 задачи решаются путем построения соответственно параллелограмма и параллелепипеда сил (рис. 2.2 и рис. 2.3).

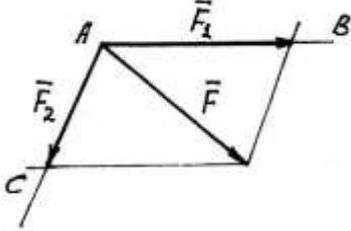


Рис. 2.2

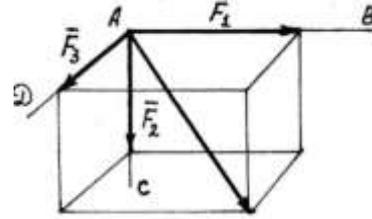


Рис. 2.3

2.2. Теорема о трех силах

Теорема. Если под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, твердое тело находится в равновесии, то линии действия всех этих сил пересекаются в одной точке.

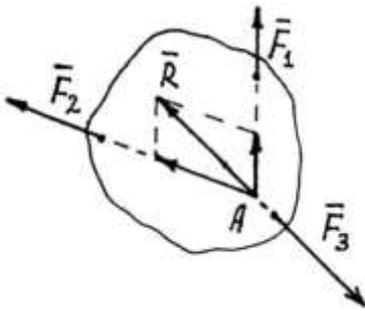


Рис. 2.4

По правилу параллелограмма находим равнодействующую \bar{R} сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 . По аксиоме 1 сила \bar{F}_3 должна быть равна по модулю \bar{R} , направлена с ней по одной прямой, но в противоположную сторону. Отсюда следует, что линия действия силы \bar{F}_3 также проходит через точку пересечения сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 .

2.3. Проекция силы на ось и на плоскость

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка оси проекций, заключенного между проекциями на нее начала и конца силы.

Если сила и ось лежат в одной плоскости, проекцию определяют в соответствии с рис. 2.5 и 2.6.

$$F_x = ab = F \cos \alpha$$

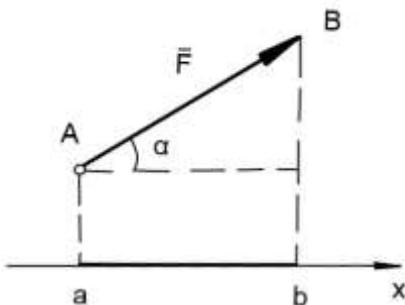


Рис. 2.5

$$F_x = ab = F \cos \alpha = -F \cos \beta$$

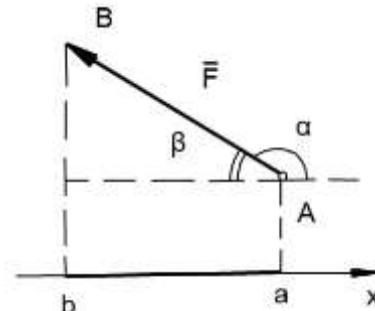


Рис. 2.6

Для нахождения проекции силы на ось, не лежащую с ней в одной плоскости, надо сначала найти проекцию вектора на плоскость, в которой лежит ось, а затем полученную проекцию спроектировать на эту ось (рис. 2.7).

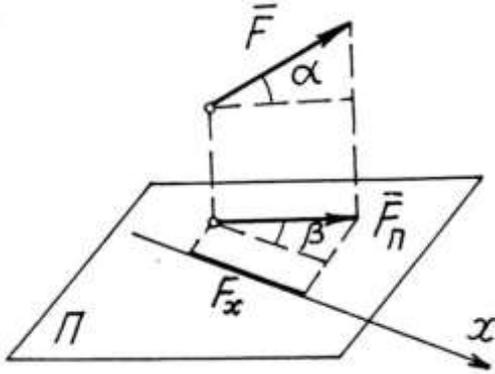


Рис. 2.7

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями на эту плоскость начала и конца силы.

$$F_{\Pi} = F \cos \alpha;$$

$$F_x = F_{\Pi} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

В проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z силу \vec{F} в соответствии с рис. 2.3 можно представить в виде

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}, \quad (2.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы; $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ – составляющие силы \vec{F} .

2.4. Аналитический способ сложения сил

Аналитический способ сложения сил основан на методе проекций и базируется на следующей теореме векторной алгебры.

Теорема. Проекция вектора на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

Пусть имеем систему сходящихся сил, заданных своими проекциями на оси декартовой системы координат $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $\vec{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$. Определим модуль и направление равнодействующей \vec{R} .

Согласно теореме проекции равнодействующей равны:

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_i X_i; \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_i Y_i; \\ R_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_i Z_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Модуль равнодействующей равен

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_i X_i\right)^2 + \left(\sum_i Y_i\right)^2 + \left(\sum_i Z_i\right)^2}. \quad (2.3)$$

Направление равнодействующей \bar{R} определяется углами α , β и γ между положительными направлениями осей x , y , z и вектором \bar{R} :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{|\bar{R}|}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{|\bar{R}|}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{|\bar{R}|}. \quad (2.4)$$

Из (2.1) следует, что \bar{R} можно представить в виде

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \left(\sum_i X_i \right) \bar{i} + \left(\sum_i Y_i \right) \bar{j} + \left(\sum_i Z_i \right) \bar{k}. \quad (2.5)$$

2.5. Равновесие системы сходящихся сил

Геометрическое условие равновесия. Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, был замкнутым, то есть чтобы равнодействующая этой системы равнялась нулю.

Пусть твердое тело находится в равновесии под действием n сил. Построим силовой многоугольник на $n - 1$ силе, найдем равнодействующую $n - 1$ силы. В соответствии с аксиомой 1 для равновесия твердого тела необходимо и достаточно, чтобы полученная равнодействующая была направлена по одной прямой, но в разные стороны, с последней n -й силой и равнялась ей по модулю. Тогда, найдя равнодействующую оставшихся двух сил, получим, что она равна нулю, то есть силовой многоугольник замкнутый:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0. \quad (2.6)$$

Аналитические условия равновесия. Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

Из (2.6) с учетом (2.5) следуют уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (2.7)$$

Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются **статически определенными**. В противном случае задачи являются **статически неопределимыми**.

2.6. Примеры решения задач

Рекомендации по решению задач статики. При решении задач по определению реакций связей независимо от вида системы сил рекомендуется придерживаться общей схемы. Все задачи на равновесие сил, приложенных к твердому телу (точке), решают по следующему плану.

1. Выделяют тело, равновесие которого должно быть рассмотрено.

2. Устанавливают связи, наложенные на тело. Применяя аксиому связей, заменяют их реакциями.

3. Изображают расчетную схему, включающую рассматриваемое тело с приложенными к нему активными силами и реакциями связей.

4. Составляют уравнения равновесия при аналитическом решении задачи или строят силовой многоугольник при геометрическом решении для системы сходящихся сил.

5. Определяют искомые величины и проводят анализ полученных результатов.

При выборе системы координат и, в дальнейшем, центра моментов с целью упрощения решения задачи рекомендуется каждое из уравнений равновесия составлять так, чтобы в него входило меньше неизвестных.

Решение задач на равновесие системы сходящихся сил возможно аналитически (путем составления уравнений равновесия) или геометрически (путем построения силовых многоугольников). В случае равновесия твердого тела, находящегося под действием трех непараллельных сил, рекомендуется использовать теорему о трех силах. Решение задач осуществляется по вышеприведенной типовой схеме.

Пример 1. Груз весом P удерживается в равновесии с помощью нити AC и стержня BC (рис. 2.8, а). Определить реакции нити и стержня.

Решение. При аналитическом способе решения в соответствии с расчетной схемой (рис. 2.8, б) составляем уравнения равновесия:

$$\sum_i X_i = 0: \quad -R_1 \cos 30^\circ + R_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0: \quad R_1 \sin 30^\circ + R_2 \sin 60^\circ - P = 0.$$

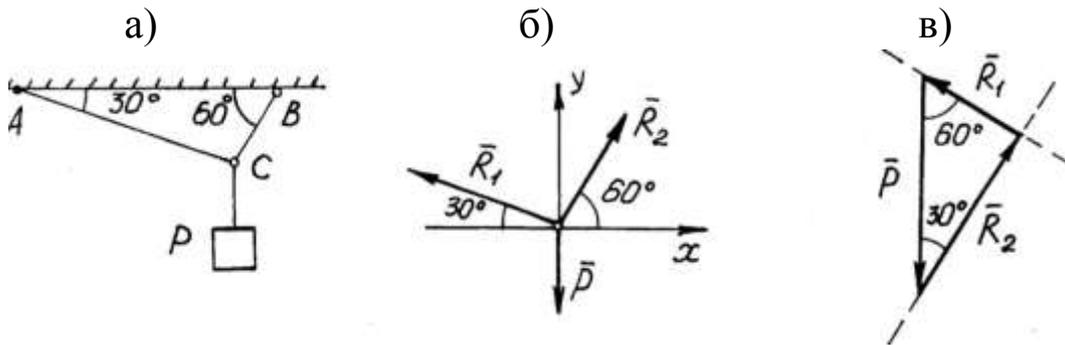


Рис. 2.8

Откуда находим величины искоемых реакций связей:

$$R_1 = P \sin 30^\circ = 0,5P; \quad R_2 = P \sin 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)P.$$

При решении геометрическим способом из замкнутого силового треугольника (рис. 2.8, в) получаем те же значения искоемых величин.

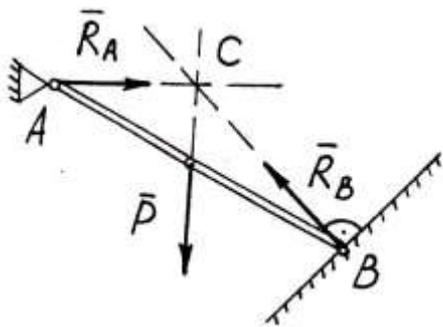


Рис. 2.9

Пример 2. Определить направления реакций связей однородной балки AB весом \bar{P} .

Решение. Находим точку пересечения C известных линий действия сил \bar{R}_B и \bar{P} . По теореме о трех силах неизвестная линия действия \bar{R}_A также проходит через точку C .

ГЛАВА 3. МОМЕНТ СИЛЫ. ПАРА СИЛ

3.1. Момент силы относительно точки

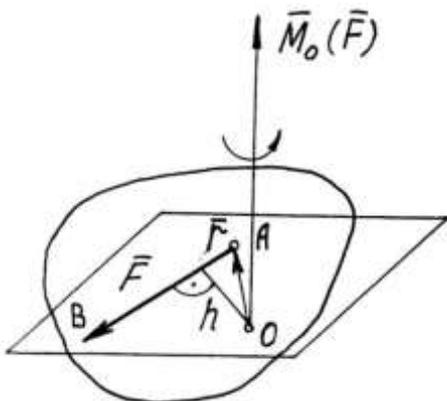


Рис. 3.1

Пусть к свободному твердому телу приложена сила \bar{F} (рис. 3.1). Закрепим одну точку тела O . Тогда сила \bar{F} будет стремиться привести тело во вращательное движение. Вращательное действие силы \bar{F} характеризуется моментом силы относительно точки O .

Моментом силы \bar{F} относительно точки O называется вектор $\bar{M}_0(\bar{F})$, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоско-

сти, содержащей силу и точку, в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силу \vec{F} , стремящейся вращать эту плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки. Модуль этого вектора $\overline{M}_0(\vec{F})$ равен произведению модуля силы \vec{F} на ее плечо h (кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы \vec{F}):

$$|\overline{M}_0(\vec{F})| = |\vec{F}| h. \quad (3.1)$$

Из рис. 3.1 следует, что $|\overline{M}_0(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB}$. Исходя из определения векторного произведения двух векторов, в соответствии с определением момента силы относительно точки, очевидно, можно записать

$$\overline{M}_0(\vec{F}) = \overline{OA} \cdot \vec{F} = \vec{r} \cdot \vec{F}. \quad (3.2)$$

$\overline{M}_0(\vec{F}) = 0$, если $h = 0$ (линия действия силы проходит через точку).

3.2. Момент силы относительно оси

Пусть к свободному твердому телу приложена сила \vec{F} . Закрепим точки твердого тела, лежащие на одной прямой. Тогда сила \vec{F} будет стремиться привести тело во вращательное движение вокруг оси, направленной вдоль этой прямой. Вращательное действие силы характеризуется моментом силы относительно оси.

Моментом силы \vec{F} относительно оси z называется скалярная величина, равная взятому со знаком «+» или «-» произведению модуля проекции \vec{F}_n силы \vec{F} на плоскость, перпендикулярную к оси, на ее плечо h_n относительно точки O пересечения оси с плоскостью:

$$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_n| h_n. \quad (3.3)$$

Из рис. 3.2 следует, что $M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta OA_1B_1}$. Знак «+» – если, смотря навстречу положительному направлению оси, проекция \vec{F}_n видна стремящейся вращать твердое тело против хода часовой стрелки; знак «-» – в противоположном случае.

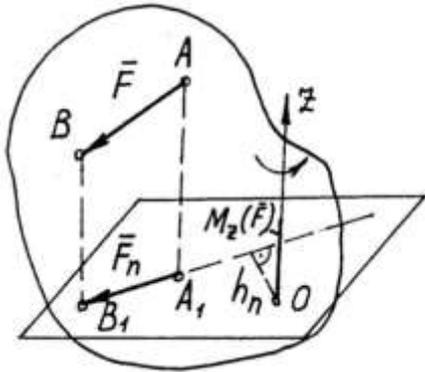


Рис. 3.2

Момент силы относительно оси равен нулю в следующих случаях:

1. $F_n = 0$, то есть линия действия силы \vec{F} параллельна оси z .
2. $h_n = 0$, то есть линия действия силы \vec{F} пересекает ось z .

Указанные два признака можно объединить одним: сила и ось лежат в одной плоскости.

Установим связь между моментами силы относительно оси $M_z(\vec{F})$ и точки $M_0(\vec{F})$ (рис. 3.3).

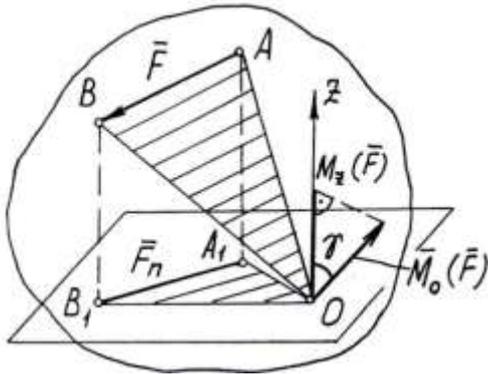


Рис. 3.3

$$S_{\Delta O A_1 B_1} = S_{\Delta O A B} \cos \gamma$$

или

$$2S_{\Delta O A_1 B_1} = 2S_{\Delta O A B} \cos \gamma,$$

то есть

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma. \quad (3.4)$$

Таким образом, момент силы \vec{F} относительно оси z равен проекции вектора $M_0(\vec{F})$ на эту ось.

3.3. Пара сил. Момент пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил \vec{F} и \vec{F}' .

Пара сил не имеет равнодействующей. Однако силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой. Пара сил стремится произвести вращение твердого тела, к которому она приложена. Вращательное действие пары сил характеризуется моментом.

Моментом пары сил \vec{F} и \vec{F}' в пространстве называется вектор \vec{M} , направленный перпендикулярно к плоскости действия пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил, стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки. Модуль этого вектора

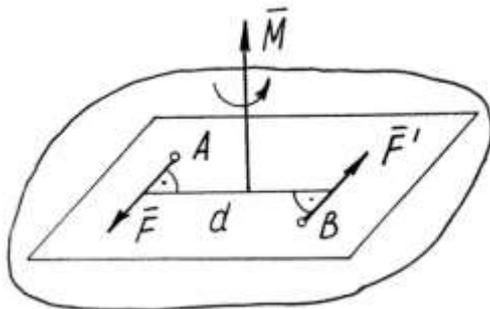


Рис. 3.4

$|\vec{M}|$ равен произведению модуля одной из сил на плечо пары d (кратчайшее расстояние между линиями

действия сил пары) (рис. 3.4):

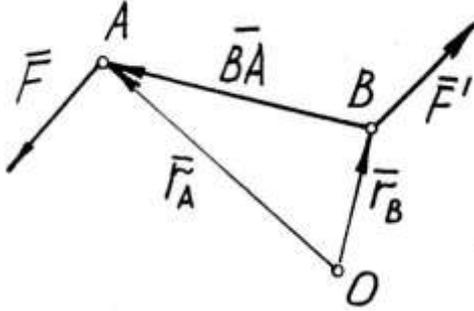


Рис. 3.5

$$|\bar{M}| = |\bar{F}| \cdot d. \quad (3.5)$$

Исходя из определения векторного произведения двух векторов, в соответствии с определением момента пары сил, очевидно, можно записать (рис. 3.5):

$$\bar{M} = \overline{AB} \times \bar{F}' = \overline{BA} \times \bar{F}. \quad (3.6)$$

Установим связь между моментом пары сил $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$ и моментом силы $\bar{M}_0(\bar{F})$ относительно произвольной точки O (рис. 3.5):

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F}; \quad \bar{M}_0(\bar{F}') = \bar{r}_B \times \bar{F}'.$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}') = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times \bar{F}' = (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F} = \overline{BA} \times \bar{F} = \bar{M}(\bar{F}, \bar{F}').$$

Таким образом, сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от выбора точки и равна моменту этой пары сил, то есть

$$\bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}') = \bar{M}(\bar{F}, \bar{F}'). \quad (3.7)$$

Взяв за точку O последовательно точки A и B , из (3.7) получим, что момент пары сил равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары, то есть

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_A(\bar{F}') = \bar{M}_B(\bar{F}). \quad (3.8)$$

3.4. Эквивалентность пар сил

Теорема 1. Пары сил, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

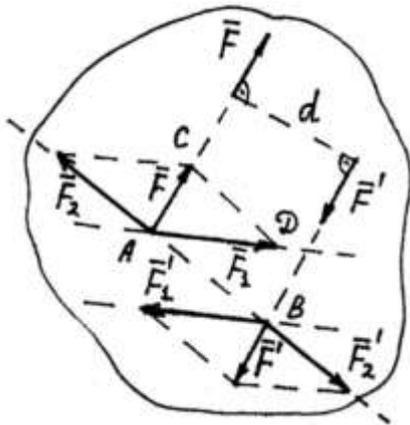


Рис. 3.6

Пусть на твердое тело действует пара сил (\bar{F}, \bar{F}') с моментом \bar{M} (рис. 3.6). Перенесем силы пары вдоль их линий действия в точки A и B . Проведем через эти точки две параллельные прямые, лежащие в плоскости действия пары и пересекающие линии действия сил пары. Проведем прямую AB и разложим силы \bar{F} и \bar{F}' в точках A и B по правилу параллелограмма, как указано на рис. 3.6. Тогда $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$; $\bar{F}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2$. Так

как разложение производится на параллельные составляющие, а $\bar{F} = -\bar{F}'$, то $\bar{F}_1' = -\bar{F}_1$, $\bar{F}_2' = -\bar{F}_2$. Система сил (\bar{F}_2, \bar{F}_2') эквивалентна нулю, поэтому может быть отброшена. Следовательно, заданная пара сил заменена парой сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1') . Покажем, что моменты этих пар одинаковы. Направление вращения одно и то же.

$M(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = 2S_{\Delta BAD}$. Но $S_{\Delta BAD} = S_{\Delta BCD}$, так как эти треугольники имеют общее основание BA и равные высоты (их вершины расположены на общей прямой, параллельной основанию).

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = M(\bar{F}, \bar{F}').$$

Таким образом, теорема доказана и можно сделать следующие выводы:

- пару сил можно как угодно поворачивать и переносить в плоскости ее действия;
- можно изменять плечо и силы пары, сохраняя алгебраическую величину момента и плоскость ее действия.

Теорема 2. Не изменяя действия пары сил на твердое тело, ее можно переносить в плоскость, параллельную плоскости ее действия.

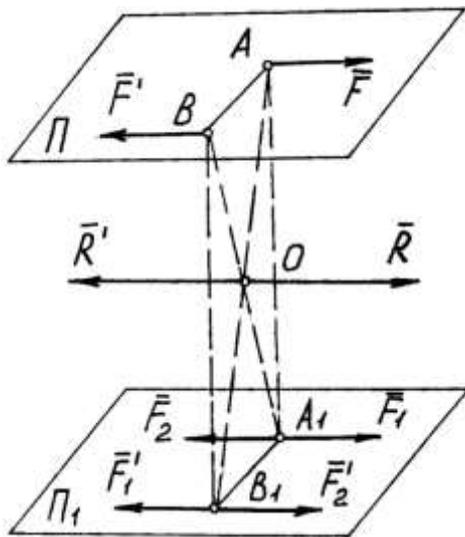


Рис. 3.7

Пусть имеем пару сил (\bar{F}, \bar{F}') , приложенных к точкам A и B , и плоскость Π (рис. 3.7). Опустим из точек A и B перпендикуляры на плоскость Π_1 , параллельную плоскости Π . Приложим в точках пересечения перпендикуляров с плоскостью A_1 и B_1 две системы сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) и (\bar{F}_1', \bar{F}_2') , каждая из которых эквивалентна нулю, то есть $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, $\bar{F}_1' = -\bar{F}_2'$. Выберем силы \bar{F}_1 и \bar{F}_1' так, чтобы $\bar{F}_1 = \bar{F}$, $\bar{F}_1' = \bar{F}'$. Сложим две равные и параллельные силы \bar{F} и \bar{F}_2' .

Их равнодействующая \bar{R} приложена в середине отрезка AB_1 , то есть в точке O . Аналогично сложим две силы \bar{F}' и \bar{F}_2 . Их равнодействующая $\bar{R}' = -\bar{R}$ и приложена также в точке O . Система сил (\bar{R}, \bar{R}') эквивалентна нулю и ее можно отбросить. Остается пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1') , которая является исходной парой (\bar{F}, \bar{F}') , перенесенной в плоскость Π_1 . Что и требовалось доказать.

Из доказанных двух теорем следует, что момент пары является свободным вектором, то есть характеризуется только модулем и направлением, а точкой его приложения может быть любая точка тела. Отсюда же следует и геометрическое условие эквивалентности: пары сил, действующие на одно и то же тело, эквивалентны, если их моменты геометрически равны.

3.5. Сложение пар сил. Условие равновесия пар

Теорема. Действие на тело нескольких пар сил, лежащих в произвольных плоскостях, эквивалентно действию одной пары, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар сил.

Пусть две пары сил расположены в пересекающихся плоскостях I и II (рис. 3.8). Возьмем на линии их пересечения произвольный отрезок $AB = d$ и приведем данные пары сил к одному плечу d

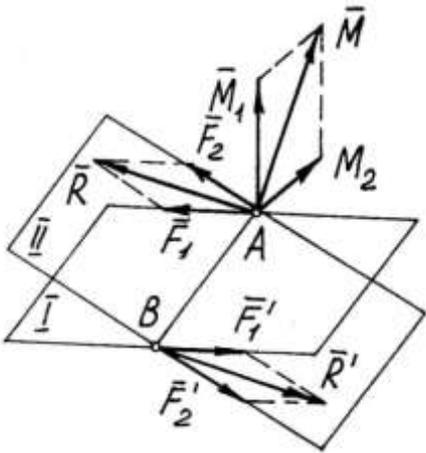


Рис. 3.8

(на основе теорем об эквивалентных парах). Получим пары сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) и (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , как показано на рис. 3.8. Найдем равнодействующую \bar{R} сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 , а также равнодействующую \bar{R}' сил \bar{F}'_1 и \bar{F}'_2 : $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$; $\bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2$, $\bar{R} = -\bar{R}'$, так как $\bar{F}_1 = -\bar{F}'_1$ и $\bar{F}_2 = -\bar{F}'_2$.

Таким образом, две пары сил мы привели к одной эквивалентной им паре сил (\bar{R}, \bar{R}') . Покажем теперь, что момент этой пары сил \bar{M} равен геометри-

ческой сумме моментов составляющих пар сил \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{R} = \overline{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 + \overline{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Последовательно применяя правило параллелограмма ко всем векторам моментов пар сил, можно любое количество пар сил заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов заданных пар сил:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i. \quad (3.9)$$

Таким образом, теорема доказана. Если сложение выполнить графически, то момент \bar{M} эквивалентной пары сил изобразится

замыкающим вектором многоугольника, построенного на векторах моментов заданных пар сил \bar{M}_i .

Пары сил в пространстве взаимно уравниваются, если момент пары, эквивалентной системе пар сил, равен нулю, то есть $\bar{M} = 0$. Отсюда следует условие равновесия.

Условие равновесия пар сил. Пары сил, произвольно расположенные в пространстве, взаимно уравниваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю, то есть многоугольник, построенный на моментах данных пар сил, замкнут:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0. \quad (3.10)$$

Проектируя (3.10) на оси декартовой системы координат, получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0, \quad (3.11)$$

где M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} – проекции момента i -й пары сил на координатные оси.

3.6. Примеры решения задач

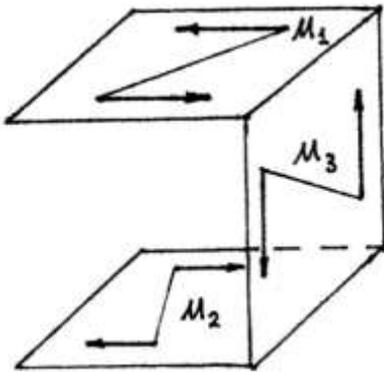


Рис. 3.9

Пример 1. Пары сил с величинами моментов $M_1 = 10$ Н·м и $M_2 = 6$ Н·м противоположного направления вращения находятся в параллельных плоскостях. Пара, имеющая величину момента $M_3 = 3$ Н·м, расположена в перпендикулярной плоскости (рис. 3.9). Определить величину момента эквивалентной пары сил.

Решение. Сложим алгебраически моменты пар сил, расположенные в параллельных плоскостях. Получим пару сил с величиной момента $M_{12} = M_1 - M_2 = 10 - 4 = 6$ Н·м. Пару сил с моментом \bar{M}_{12} сложим с оставшейся третьей парой сил, имеющей момент \bar{M}_3 . Так как угол между векторами \bar{M}_{12} и \bar{M}_3 прямой, то величина момента эквивалентной пары $M = \sqrt{M_{12}^2 + M_3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ Н·м.

Пример 2. Балка длиной $AB = 10$ м нагружена тремя парами сил, лежащими в одной плоскости, величины моментов которых равны $M_1 = 8$ кН·м, $M_2 = 10$ кН·м, $M_3 = 7$ кН·м (рис. 3.10, а). Направления вращений указаны на чертеже. Балка имеет шарнирно-неподвижную опору в точке A и шарнирно-подвижную опору в точке B с наклонной опорной плоскостью, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Определить реакции опор.

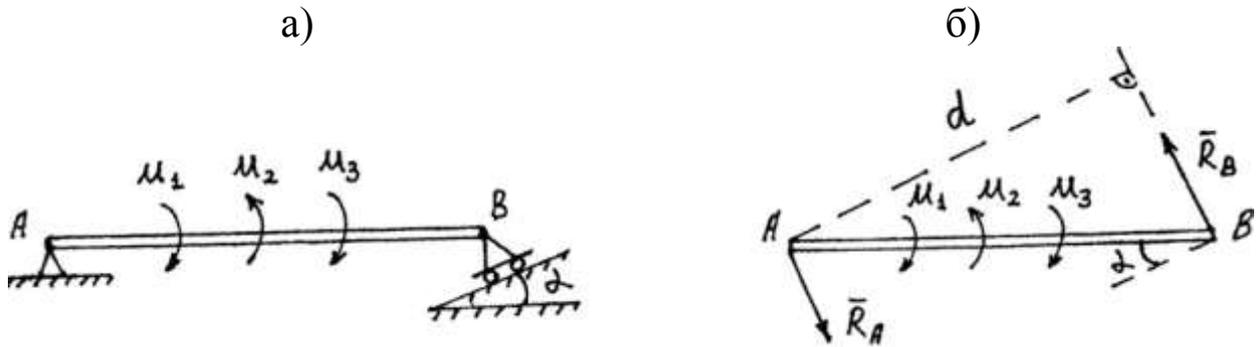


Рис. 3.10

Решение. Так как нагрузка состоит из пар сил, лежащих в одной плоскости, то реакции опор \bar{R}_A и \bar{R}_B должны составить пару сил, лежащую в той же плоскости и уравнивающую задаваемые пары сил. Реакция \bar{R}_B перпендикулярна плоскости опирания. Направим реакцию \bar{R}_A так, чтобы силы \bar{R}_A и \bar{R}_B составили пару сил. Тогда в соответствии с полученной расчетной системой (рис. 3.10, б) условие равновесия четырех пар сил, приложенных к балке, запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0: -M_1 + M_2 - M_3 + R_B \cdot d = 0.$$

Откуда

$$R_B = \frac{M_1 - M_2 + M_3}{d} = \frac{M_1 - M_2 + M_3}{AB \cos 30^\circ} = \frac{8 - 10 + 7}{10\sqrt{3}2}.$$

$$R_A = R_B = 0,58 \text{ кН.}$$

Пример 3. Куб, изображенный на рис. 3.11, подвешен к двум вертикальным стержням AA_1 и BB_1 так, что его диагональ горизонтальна. К кубу приложены пары сил (\bar{F}, \bar{F}') и (\bar{Q}, \bar{Q}') . Пренебрегая весом куба, определить реакции стержней.

Решение. Система пар (\bar{F}, \bar{F}') и (\bar{Q}, \bar{Q}') эквивалентна одной паре и может быть уравновешена только парой сил. Отсюда следует, что искомые реакции \bar{R} и \bar{R}' образуют пару с моментом \bar{M} .

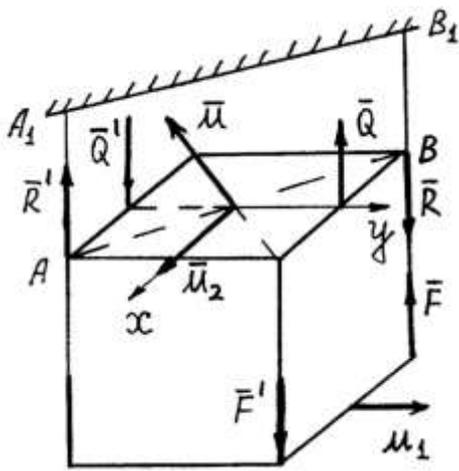


Рис. 3.11

Величина момента $M = R \cdot a\sqrt{2}$, где a – длина ребра куба. Величины моментов заданных пар сил $M_1 = F \cdot a$, $M_2 = Q \cdot a$.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_{ix} = 0: M_2 - M \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_{iy} = 0: M_1 - M \sin 45^\circ = 0.$$

Третье уравнение равновесия обращается в тождество. Из уравнений равновесия следует, что $M_1 = M_2$, то есть $Q = F$ и

$$M = \frac{M_1}{\sin 45^\circ} = F \cdot a\sqrt{2}.$$

Но так как $M = R \cdot a\sqrt{2}$, то, следовательно, $R = F$.

Таким образом, $R = R' = F$.

Равновесие возможно при $Q = F$.

ГЛАВА 4. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИЛ

4.1. Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо)

Теорема. Силу, не изменяя ее действия на твердое тело, можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Пусть даны сила \bar{F} , приложенная к твердому телу в точке A , и произвольная точка O , которую назовем **центром приведения** (рис. 4.1, а).

В соответствии со второй аксиомой статики приложим к телу в точке O систему двух равных по модулю, но противоположно направленных сил \bar{F}' и \bar{F}'' , параллельных заданной силе \bar{F} (рис. 4.1, б). Пусть по модулю $|\bar{F}'| = |\bar{F}''| = |\bar{F}|$. Тогда $(\bar{F}) \sim (\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'') \sim \{\bar{F}', (\bar{F}, \bar{F}')\}$. Пару сил (\bar{F}, \bar{F}') называют **присоединенной парой**

сил.

Таким образом, сила \bar{F} , приложенная в точке A , заменена равной ей по модулю и направлению силой \bar{F}' приложенной в точке O , и присоединенной парой сил (\bar{F}, \bar{F}') , момент которой $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_0(\bar{F})$ (рис. 4.1, в).

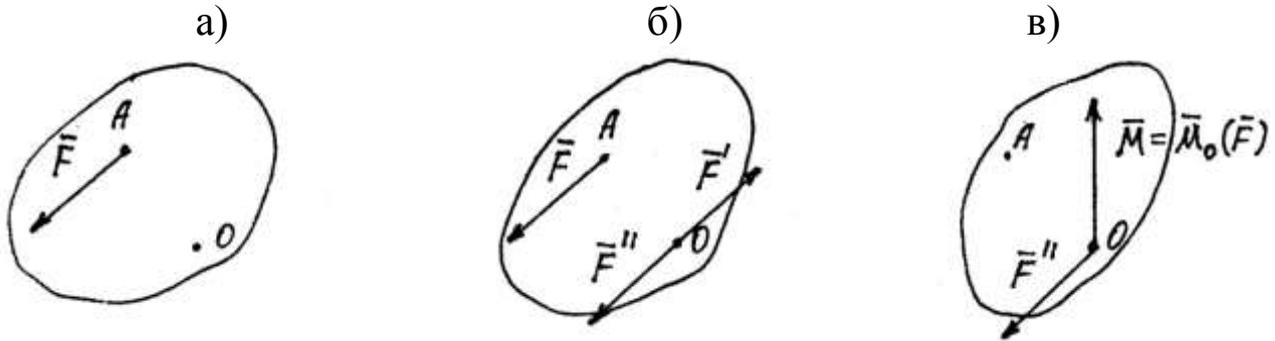


Рис. 4.1

Процесс замены силы \bar{F} силой \bar{F}'' и парой сил (\bar{F}, \bar{F}') называют **приведением силы \bar{F} к заданному центру O** .

4.2. Приведение системы сил к заданному центру

Пусть имеем n сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, приложенных к точкам A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 4.2, а).

Приведем эту систему сил к заданному центру O . Применяя метод Пуансо к каждой силе, то есть, приводя каждую силу к центру O , получим n сил $\bar{F}_1'', \bar{F}_2'', \dots, \bar{F}_n''$ и n моментов $\bar{M}_1 = \bar{M}_{10}, \bar{M}_2 = \bar{M}_{20}, \dots, \bar{M}_n = \bar{M}_{n0}$ соответствующих пар сил (см. рис. 5.8, б). Находим геометрическую сумму всех полученных сил:

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1'' + \bar{F}_2'' + \dots + \bar{F}_n'' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Геометрическая сумма всех сил $\bar{R}^* = \sum_i \bar{F}_i$ называется **глав-**

ным вектором системы сил.

Используя теорему о сложении пар сил, заменим присоединенные пары сил одной парой, момент которой $\bar{M} = \sum_i \bar{M}_i = \sum_i \bar{M}_{i0} = \bar{M}_0$.

Геометрическая сумма моментов всех сил относительно задан-

ного центра O $\bar{M}_0 = \sum_i \bar{M}_{i0}(\bar{F}_i)$ называется **главным моментом системы сил**.

Таким образом, произвольную систему сил можно привести к одной силе, равной их главному вектору \bar{R}^* и приложенной в центре приведения, и к паре сил с моментом \bar{M} , равным главному моменту системы сил \bar{M}_0 относительно центра приведения (рис. 4.2, в).

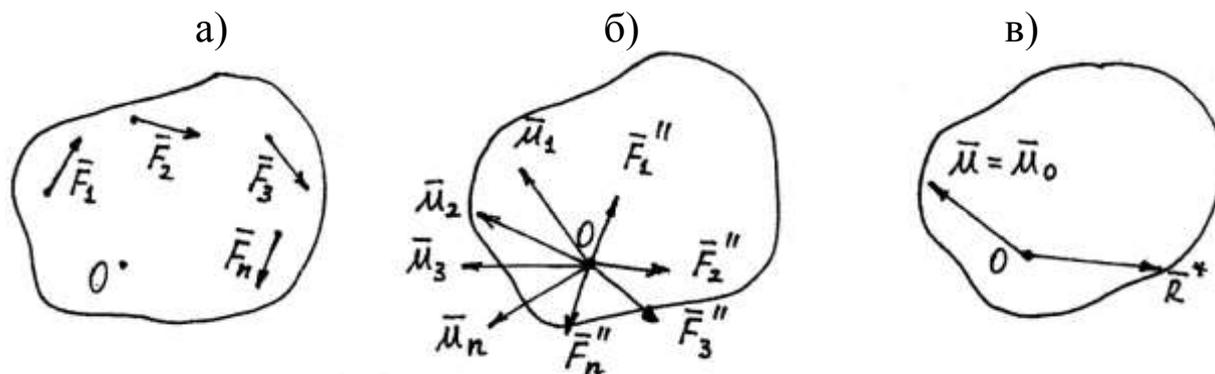


Рис. 4.2

4.3. Возможные случаи приведения произвольной системы сил

Случай 1. $\bar{R}^* = 0$, $\bar{M}_0 = 0$.

Силы взаимно уравновешиваются.

Случай 2. $\bar{R}^* = 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$.

Силы приводятся к паре сил с моментом, равным одинаковому главному моменту системы сил относительно любого центра приведения.

Случай 3. $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_0 = 0$.

Силы приводятся к равнодействующей $\bar{R} = \bar{R}^*$, линия действия которой проходит через центр приведения.

Случай 4. $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, $\bar{R}^* \perp \bar{M}_0$.

Дальше будет показано, что силы приводятся к равнодействующей $\bar{R} = \bar{R}^*$, линия действия которой не проходит через центр приведения.

Случай 5. $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, \bar{R}^* не $\perp \bar{M}_0$.

Силы приводятся к двум скрещивающимся силам или к **силовому винту (динаме)** – совокупности силы и пары сил в плоскости,

перпендикулярной силе.

4.4. Условия равновесия сил

В соответствии с первым случаем приведения произвольной системы сил необходимым и достаточным условием равновесия является равенство нулю главного вектора \bar{R}^* и главного момента \bar{M}_0 системы сил относительно любого центра приведения. Отсюда следует и равенство нулю их проекций на оси декартовой системы координат. Таким образом, уравнения равновесия пространственной системы сил запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0; & \sum_{i=1}^n M_{ix} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0; & \sum_{i=1}^n M_{iy} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0; & \sum_{i=1}^n M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Как частный случай, из (4.1) следуют уравнения (2.7) для пространственной системы сходящихся сил.

В случае пространственной системы сил, параллельных одной из координатных осей, например z , два уравнения проекций сил на перпендикулярные оси x и y и уравнения моментов относительно оси z обращаются в тождества. Отсюда, из уравнений (4.1), как частный случай, следуют уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0. \quad (4.2)$$

Аналогично из (4.1) получим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.3) называют основной формой записи уравнений равновесия произвольной плоской системы сил. Существуют еще две другие формы записи этих уравнений равновесия в виде одного уравнения проекции сил и двух уравнений моментов относительно произвольных точек A и B при условии, что прямая AB не перпендикулярна оси x :

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad (4.4)$$

а также в виде трех уравнений моментов относительно трех произвольных точек A , B и C при условии, что эти точки не лежат на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.5)$$

Необходимость условий равновесия (4.4) следует из (4.3). Доказательство достаточности основано на следующих соображениях. Так как главные моменты относительно точек A и B равны нулю, то

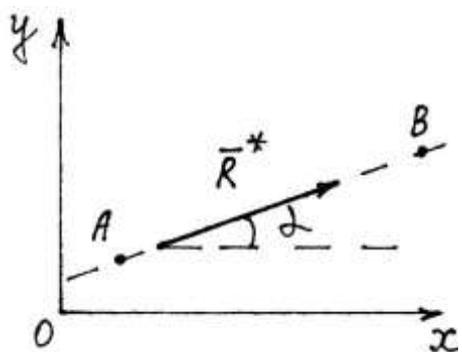


Рис. 4.3

для этих центров системы сил приводится к равнодействующей. Покажем, что эта равнодействующая при отмеченном условии $AB \neq \perp x$ всегда равна нулю. Из последних двух уравнений (4.4) следует, что \bar{R}^* должна проходить через точки A и B . Тогда из рис. 4.3 в соответствии с первым уравнением (4.4)

$$\sum_{i=1}^n X_i = R_x^* = R^* \cos \alpha = 0.$$

Так как $\cos \alpha \neq 0$, то $\bar{R}^* = 0$.

Необходимость условий равновесия (4.5) также следует из (4.3). Доказательство достаточности аналогично предыдущему. В соответствии с (4.5) равнодействующая должна одновременно проходить через точки A , B и C . Но так как эти точки не лежат на одной прямой, то это невозможно, то есть $\bar{R}^* = 0$.

Для плоской системы параллельных сил из (4.3) следуют уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.6)$$

В случае произвольной пространственной системы сил задачи статики статически определимы, если число неизвестных не превышает шести; произвольной плоской системы сил – трех и так далее.

4.5. Приведение системы сил к равнодействующей.

Теорема Вариньона

Система сил приводится к равнодействующей в третьем и четвертом случаях приведения. Третий случай очевиден. Покажем справедливость данного утверждения для четвертого случая:

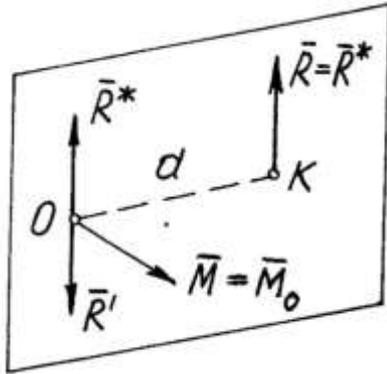


Рис. 4.4

$$\bar{R}^* \neq 0, \bar{M}_0 \neq 0, \bar{R}^* \perp \bar{M}_0.$$

Проведем плоскость через центр приведения O и \bar{R}^* перпендикулярно \bar{M}_0 (рис. 4.4). $\bar{M} = \bar{M}_0$ представим парой сил (\bar{R}, \bar{R}') таким образом, что $|\bar{R}| = |\bar{R}'| = |\bar{R}^*|$, $\bar{R}' = -\bar{R}^*$. Плечо пары $d = |\bar{M}| / |\bar{R}^*|$. Силы \bar{R}^* и \bar{R}' уравниваются. Отсюда следует эквивалентность: $(\bar{R}^*, \bar{R}', \bar{R}) \sim \bar{R}$.

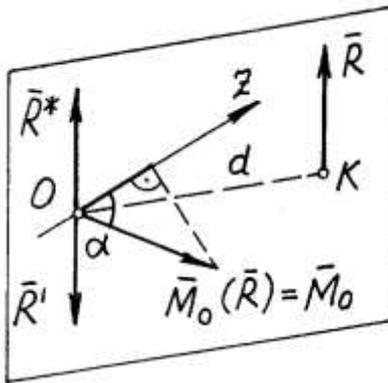


Рис. 4.5

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки, а момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

В соответствии с рис. 4.5

$$|M_0(\bar{R})| = |\bar{R}|OK = |\bar{R}| \frac{|\bar{M}|}{|\bar{R}^*|} = |\bar{M}| = |\bar{M}_0|,$$

направления $\bar{M}_0(\bar{R})$ и \bar{M}_0 совпадают. Из равенства модулей и направлений следует доказательство первой части теоремы, то есть

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{i0}.$$

Докажем вторую часть теоремы. Пусть z – произвольная ось, проходящая через точку O (рис. 4.5), тогда

$$M_z(\bar{R}) = M_0(\bar{R}) \cos \alpha = M_0 \cos \alpha = M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}.$$

4.6. Приведение системы сил к двум скрещивающимся силам

или к силовому винту (динаме)

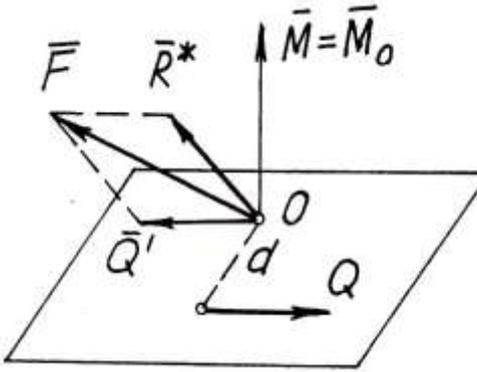


Рис. 4.6

Рассмотрим пятый случай приведения: $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, \bar{R}^* не $\perp \bar{M}_0$.

Проведем плоскость, перпендикулярную к моменту пары сил $\bar{M} = \bar{M}_0$ (рис. 4.6). Момент представим в виде пары сил (\bar{Q}, \bar{Q}') , одну из которых \bar{Q}' приложим в точке O .

Из рис. 4.6 следует эквивалентность $(\bar{R}^*, \bar{Q}, \bar{Q}') \sim (F, \bar{Q})$. F и \bar{Q} — скрещивающиеся силы.

Покажем, что в рассматриваемом случае систему сил можно привести к силовому винту.

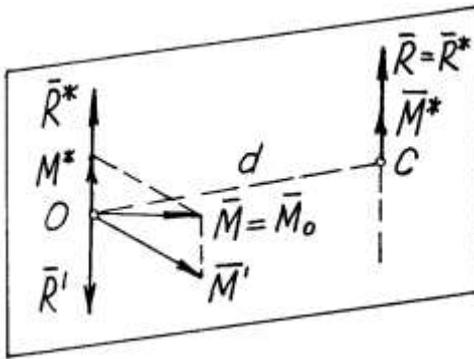


Рис. 4.7

Разложим момент пары сил \bar{M} на два составляющих момента $\bar{M}^* \parallel \bar{R}^*$ и $\bar{M}' \perp \bar{R}^*$ (рис. 4.7):

$$\bar{M} = \bar{M}^* + \bar{M}'.$$

Проведем плоскость через \bar{R}^* перпендикулярно \bar{M}' . Момент \bar{M}' представим в виде пары сил (\bar{R}, \bar{R}') так, чтобы $\bar{R} = \bar{R}' = \bar{R}^*$ и $\bar{R}' = -\bar{R}^*$.

Плечо пары $d = M' / R^*$. Равнодействующая сил \bar{R}^* и \bar{R}' равна нулю. Момент \bar{M}^* является свободным вектором и может быть перенесен в точку C . Таким образом, действие заданной системы сил эквивалентно действию силы $\bar{R} = \bar{R}^*$ и пары сил с моментом \bar{M}^* , направленным вдоль линии действия этой силы.

Прямая, вдоль которой направлены векторы $\bar{R} = \bar{R}^*$ и \bar{M}^* , называется **центральной осью системы сил**.

Полученную совокупность силы $\bar{R} = \bar{R}^*$ и пары сил с моментом \bar{M}^* можно рассматривать как результат приведения заданной системы сил к центру C , лежащему на центральной оси. Так как векторы $\bar{R} = \bar{R}^*$ и \bar{M}^* можно переносить вдоль их линии действия, то можно сделать вывод о том, что результаты приведения системы

сил к любой точке, лежащей на центральной оси, одинаковы. Нетрудно убедиться, что величина главного момента относительно точек центральной оси минимальна.

4.7. Инварианты приведения системы сил

Приведем систему сил к двум различным точкам O_1 и O_2 . Главные векторы $\bar{R}_1^* = \sum_i \bar{F}_i$ и $\bar{R}_2^* = \sum_i \bar{F}_i$, то есть $\bar{R}_1^* = \bar{R}_2^* = \bar{R}^*$ или $\bar{R}^* = \overline{\text{const}}$. Таким образом, главный вектор системы сил инвариантен по отношению к центру приведения.

Установим зависимость между главным моментом системы сил относительно центров приведения O_1 и O_2 (рис. 4.8).

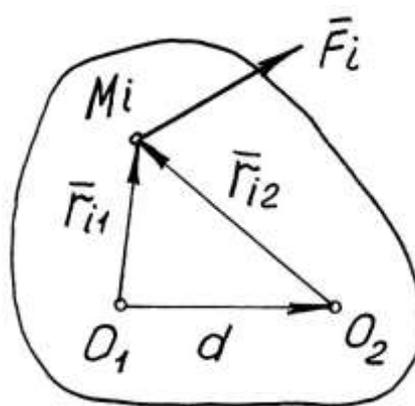


Рис. 4.8

$$\bar{M}_{O_1} = \sum_i \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i;$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_2} &= \sum_i \bar{r}_{i2} \times \bar{F}_i = \sum_i (\bar{r}_{i1} - \bar{d}) \times \bar{F}_i = \\ &= \sum_i \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i - \sum_i \bar{d} \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i - \bar{d} \times \sum_i \bar{F}_i. \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{O_2} = \bar{M}_{O_1} - \bar{d} \times \bar{R}^*. \quad (4.7)$$

Умножив скалярно обе части равенства (4.7) на главный вектор $\bar{R}^* = \bar{R}_1^* = \bar{R}_2^*$, получим

$$\bar{R}_2^* \cdot \bar{M}_{O_2} = \bar{R}_1^* \cdot \bar{M}_{O_1} - \bar{R}^* \cdot (\bar{d} \times \bar{R}^*).$$

Откуда $\bar{R}_2^* \cdot \bar{M}_{O_2} = \bar{R}_1^* \cdot \bar{M}_{O_1}$ или $\bar{R}^* \cdot \bar{M}_0 = \text{const}$, то есть скалярное произведение главного вектора и главного момента системы сил инвариантно по отношению к центру приведения.

Таким образом, инварианты приведения системы сил:

$$\bar{R}^* = \overline{\text{const}}; \quad \bar{R}^* \cdot \bar{M}_0 = \text{const}. \quad (4.8)$$

4.8. Уравнения центральной оси системы сил и линии действия равнодействующей

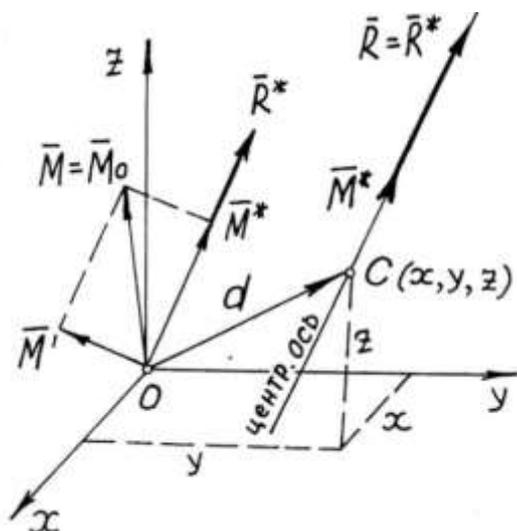


Рис. 4.9

Приведем систему сил к произвольному центру O (рис. 4.9). Проведем оси координат x, y, z . Возьмем произвольную точку $C(x, y, z)$ на центральной оси. Рассматривая точку C как второй центр приведения, согласно (4.7), имеем

$$\bar{M}_C = \bar{M}^* = \bar{M}_0 - \bar{d} \times \bar{R}^*.$$

(*)

$$\bar{d} \times \bar{R}^* = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\bar{i} + \\ + (zX - xZ)\bar{j} + (xY - yX)\bar{k}.$$

Проектируя (*) на оси координат, получим

$$M_x^* = M_x - (yZ - zY);$$

$$M_y^* = M_y - (zX - xZ);$$

$$M_z^* = M_z - (xY - yX).$$

Так как \bar{M}^* и $\bar{R} = \bar{R}^*$ направлены вдоль одной прямой, то одноименные их проекции пропорциональны:

$$\frac{M_x^*}{X} = \frac{M_y^*}{Y} = \frac{M_z^*}{Z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Рассмотрев любые два соотношения из четырех, получим уравнения центральной оси, например:

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M^*}{R^*}; \\ \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M^*}{R^*}. \quad (4.9)$$

Если силы приводятся к равнодействующей, то $\bar{M}^* = 0$. Тогда,

учитывая (4.9), уравнения линии действия равнодействующей запишутся в виде

$$\begin{aligned} M_x - (yZ - zY) &= 0; \\ M_y - (zX - xZ) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.9. Примеры решения задач

Пример 1. Невесомая балка удерживается в равновесии неподвижным шарниром в точке A и подвижно-шарнирной опорой в точке B (рис. 4.10, а). Определить реакции опор, если известно, что $P = 2$ кН, $q = 10$ кН/м, $M = 20$ кН·м, $BD = 3$ м, $AC = 5$ м, $AB = 12$ м, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

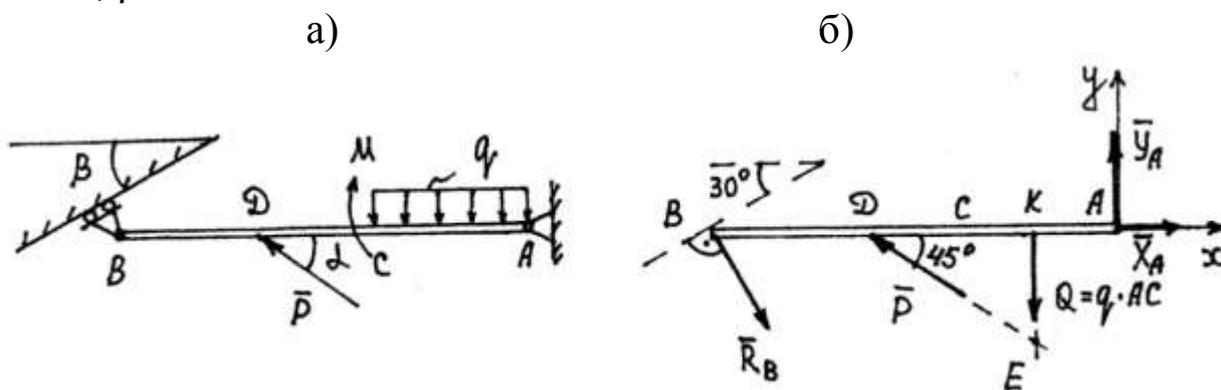


Рис. 4.10

Решение. Расчетная схема представлена на рис. 4.10, б, на которой равномерно распределенная нагрузка заменена сосредоточенной силой величиной $Q = q \cdot AC$, линия действия которой проходит через середину отрезка AC . При неравномерно распределенной нагрузке $Q = \int_A^C q(x) dx$ и приложена к центру тяжести плоской фигуры, ограниченной графиком функции $q = q(x)$. В соответствии с расчетной схемой уравнения для произвольной плоской системы сил можно записать в виде

$$\sum_i X_i = 0: R_B \cos 60^\circ - P \cos 45^\circ + X_A = 0.$$

$$\sum_i Y_i = 0: -R_B \sin 60^\circ + P \sin 45^\circ - q \cdot AC + Y_A = 0.$$

$$\sum_i M_{iB} = 0: P \sin 45^\circ \cdot BD - q \cdot AC \cdot \left(BC + \frac{AC}{2} \right) + Y_A \cdot AB - M = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, получим $Y_A = 36,8$ кН; $R_B = 5,2$ кН; $X_A = 15,1$ кН.

Для проверки правильности составления и решения уравнений равновесия составим дополнительное уравнение:

$$\sum_i M_{iE} = 0: R_B \cos 60^\circ \cdot KE + R_B \sin 60^\circ \cdot BK - X_A \cdot KE + Y_A \cdot KA - M = 0,$$

которое после подстановки в него численных значений обращается в тождество $0 \equiv 0$.

Пример 2. Система, состоящая из двух тел, находится в равновесии под действием плоской системы сил (рис. 4.11). Определить реакции опор A и B , а также давление в промежуточном шарнире C , если известно, что $P = 10$ кН, $M = 15$ кН, $q = 4$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$, $BC = 4$ м, $BK = 2$ м, $AD = 2$ м.

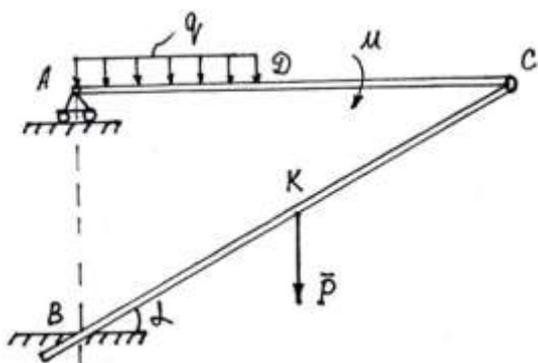


Рис. 4.11

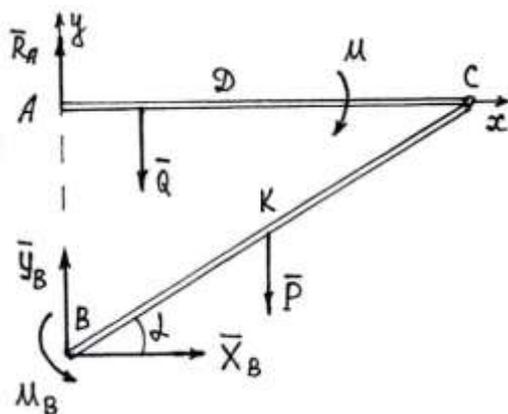


Рис. 4.12

равновесии под действием плоской системы сил (рис. 4.11). Определить реакции опор A и B , а также давление в промежуточном шарнире C , если известно, что $P = 10$ кН, $M = 15$ кН, $q = 4$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$, $BC = 4$ м, $BK = 2$ м, $AD = 2$ м.

Решение. Поскольку система состоит из двух тел, то можно составить шесть независимых уравне-

ний равновесия. Для этого следует рассмотреть равновесие всей системы в целом и равновесие одного из тел либо рассмотреть равновесие каждого тела в отдельности. При рассмотрении равновесия системы тел в целом силы взаимодействия между телами являются внутренними и не входят в уравнения равновесия. Для каждого же тела в отдельности эти силы являются внешними.

Учитывая аксиому о равенстве действия и противодействия, при переходе от рассмотрения равновесия одного тела к другому направления этих сил следует изменять на противоположные.

Расчетная схема для составной конструкции в целом представлена на рис. 4.12.

Уравнения равновесия:

$$\sum_i X_i = 0: X_B = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0: R_A + Y_B - q \cdot AD - P = 0;$$

$$\sum_i M_{iB} = 0: M_B - P \cdot BK \cos \alpha - q \cdot AD \cdot \frac{AD}{2} - M = 0.$$

Расчетная схема для балки AC представлена на рис. 4.13. Уравнения равновесия:

$$\sum_i X_i = 0: X_C = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0: R_A - q \cdot AD + Y_C = 0;$$

$$\sum_i M_{iC} = 0: -R_A \cdot AC + q \cdot AD \left(AC - \frac{AD}{2} \right) - M = 0.$$

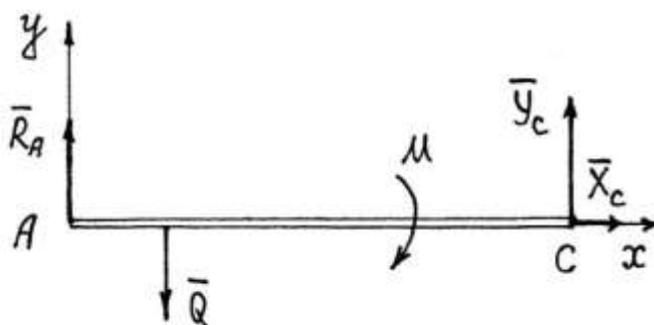


Рис. 4.13

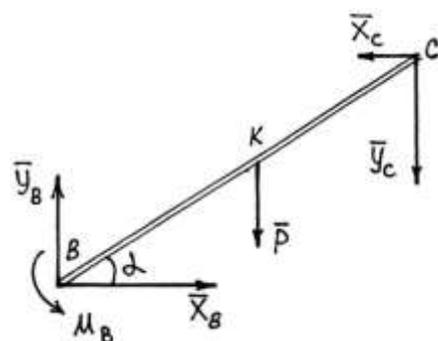


Рис. 4.14

Решая записанную систему шести уравнений равновесия, определим искомые неизвестные: $R_A = 1,4$ кН; $X_B = 0$; $Y_B = 16,6$ кН; $M_B = 40,3$ кН·м; $X_C = 0$; $Y_C = 6,6$ кН.

Для частичной проверки правильности решения рассмотрим равновесие балки BC (рис. 4.14). Составим уравнение равновесия:

$$\sum_i M_{iK} = 0:$$

$$M_B + X_B \cdot \frac{BC}{2} \sin \alpha - Y_B \cdot \frac{BC}{2} \cos \alpha + X_C \cdot \frac{BC}{2} \sin \alpha - Y_C \cdot \frac{BC}{2} \cos \alpha = 0,$$

которое после подстановки в него численных значений обращается в тождество $0 \equiv 0$.

Пример 3. Определить величину момента силы \vec{F} относительно координатных осей, если положение силы в пространстве определяется углами α и β и координатами точки ее приложения: $x_A = a$; $y_A = 0$; $z_A = c$ (рис. 4.15).

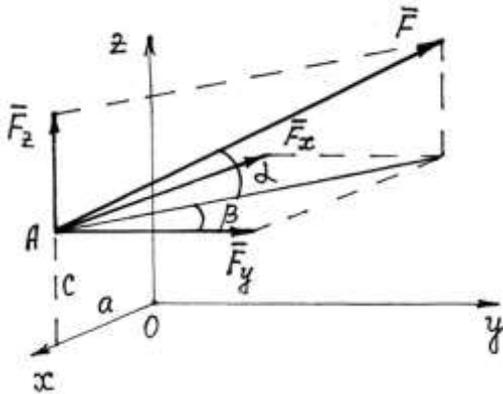


Рис. 4.15

Решение. Раскладывая силу \vec{F} на три составляющие \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z , параллельные осям координат x , y , z , и применяя теорему Вариньона, получим

$$F_x = -F \cos \alpha \sin \beta;$$

$$F_y = F \cos \alpha \cos \beta;$$

$$F_z = F \sin \alpha.$$

$$M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z) = -F \cos \alpha \cos \beta \cdot c;$$

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_y) + M_y(\vec{F}_z) = -F \cos \alpha \sin \beta \cdot c - F \sin \alpha \cdot a;$$

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z) = F \cos \alpha \cos \beta \cdot a.$$

Пример 4. Однородная прямоугольная рама весом $P = 200$ Н укреплена с помощью сферического шарнира A и петли B . В горизонтальном положении рама удерживается веревкой CK , составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтальной плоскостью и привязанной в точке K на плоскости yAz (рис. 4,16, а). Определить натяжение веревки, реакции сферического шарнира A и петли B , если величина дополнительно приложенной силы равна $F = 50$ Н.

Решение. В соответствии с расчетной схемой (рис. 4,16, б) составим уравнения равновесия:

$$\sum_i X_i = 0: X_A + X_B - T \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0: Y_A + T \cos 30^\circ \cos 60^\circ - F = 0;$$

$$\sum_i Z_i = 0: Z_A + Z_B - P + T \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_i M_{ix} = 0: Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} = 0;$$

$$\sum_i M_{iy} = 0: P \cdot \frac{AC}{2} - T \sin 30^\circ \cdot AC = 0;$$

$$\sum_i M_{iz} = 0: T \cos 30^\circ \cos 60^\circ \cdot AB \operatorname{tg} 60^\circ - F \cdot AB \operatorname{tg} 60^\circ - X_B \cdot AB = 0.$$

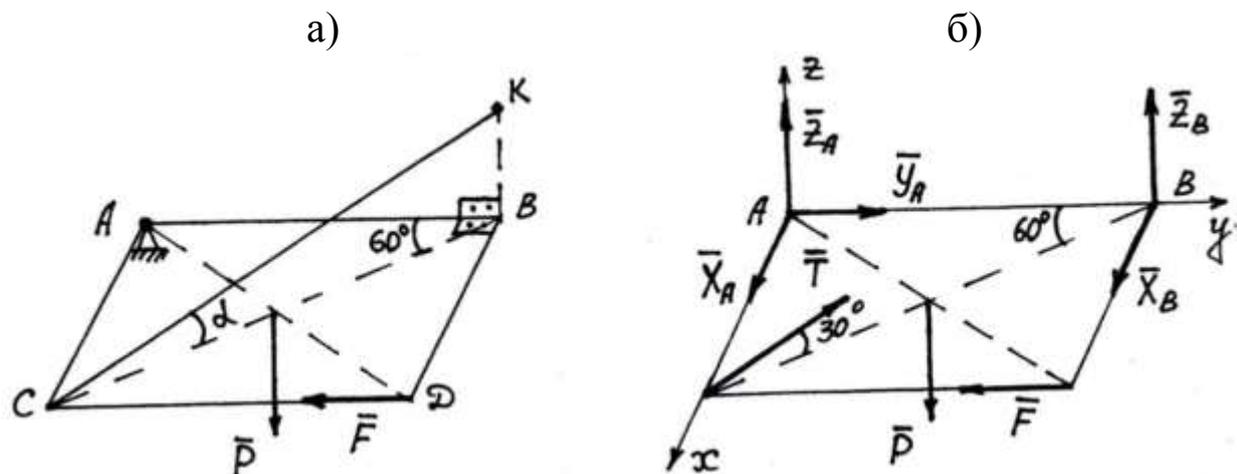


Рис. 4.16

Подставляя исходные данные и решая полученную систему уравнений, находим: $X_A = 86,6$ Н; $Y_A = 36,6$ Н; $Z_A = 0$; $X_B = 63,4$ Н; $Z_B = 100$ Н; $T = 200$ Н.

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИКИ

5.1. Силовой и веревочный многоугольники

При инженерных расчетах иногда используют графические методы решения задач статики для плоской системы сил. Графические методы основаны на построении силового и веревочного многоугольников.

Пусть на твердое тело действует система трех сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 (рис. 5.1, а). Фигура $abcd$, построенная на векторах этой системы сил согласно п. 2.1, называется силовым многоугольником (рис. 5.1, б).

Возьмем в плоскости силового многоугольника произвольную точку O и назовем ее **полюсом**. Проведем лучи Oa , Ob , Oc и Od , которые пронумеруем соответственно 01, 12, 23, 30. Начиная с произвольной точки A на основном чертеже (рис. 5.1, а), проведем прямые, параллельные указанным лучам, до пересечения их с линиями действия соответствующих сил.

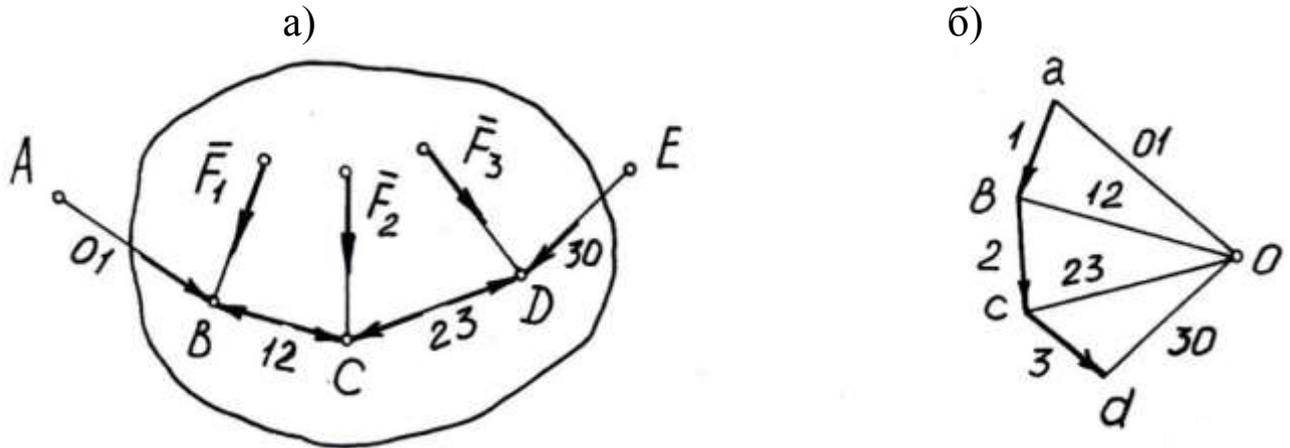


Рис. 5.1

Ломаная линия $ABCDE$ называется **веревочным многоугольником**. Название это объясняется тем, что если веревку закрепить в точках A и E и приложить к ней в точках B , C и D силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , то веревка при равновесии примет форму ломаной $ABCDE$.

При равновесии силовой и веревочный многоугольники замкнутые.

Согласно построенному силовому многоугольнику $\vec{F}_1 = \vec{aO} + \vec{Ob}$, $\vec{F}_2 = \vec{bO} + \vec{Oc}$, $\vec{F}_3 = \vec{cO} + \vec{Od}$. Приложим теперь эти разложенные силы к точкам B , C и D . Так как векторы \vec{Ob} и \vec{bO} , \vec{Oc} и \vec{cO} равны по величине и противоположно направлены, то можно заключить, что систему трех заданных сил можно заменить системой сил \vec{aO} и \vec{Od} , направленных по крайним сторонам веревочного многоугольника AB и DE . Аналогичный результат будет получен при любом числе сил.

5.2. Графическое определение равнодействующей плоской системы сил и опорных реакций

Пусть на твердое тело действует система трех сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 (рис. 5.2, а). Построим силовой многоугольник (рис. 5.2, б).

Для нахождения линии действия равнодействующей строим веревочный многоугольник. Согласно предыдущему параграфу, систему сил можно заменить двумя силами, направленными вдоль крайних сторон AB и DE веревочного многоугольника. Равнодействующая \vec{R} пройдет через точку пересечения их продолжений K . Проводим через точку K прямую параллельно ad , которая и будет

линией действия равнодействующей.

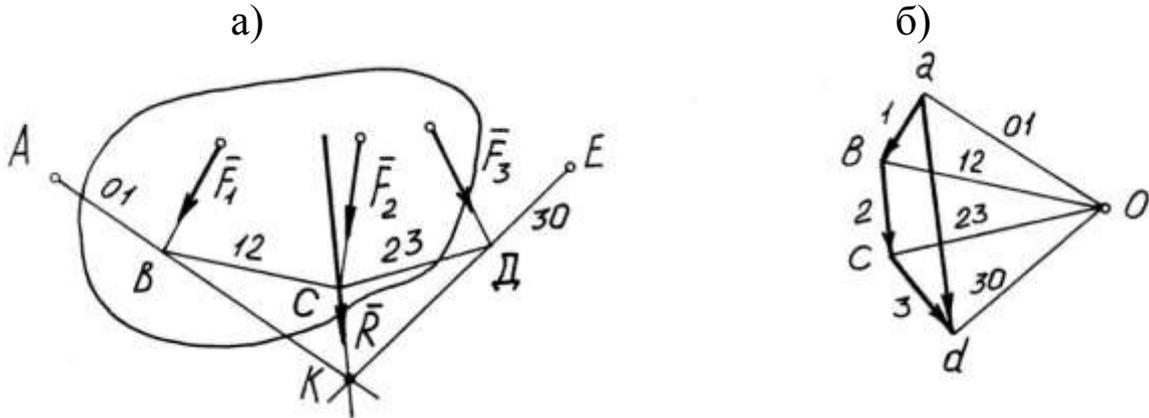


Рис. 5.2

Определим графически реакцию опор A и H твердого тела, находящегося под действием сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 и \bar{F}_3 (рис. 5.3, а).

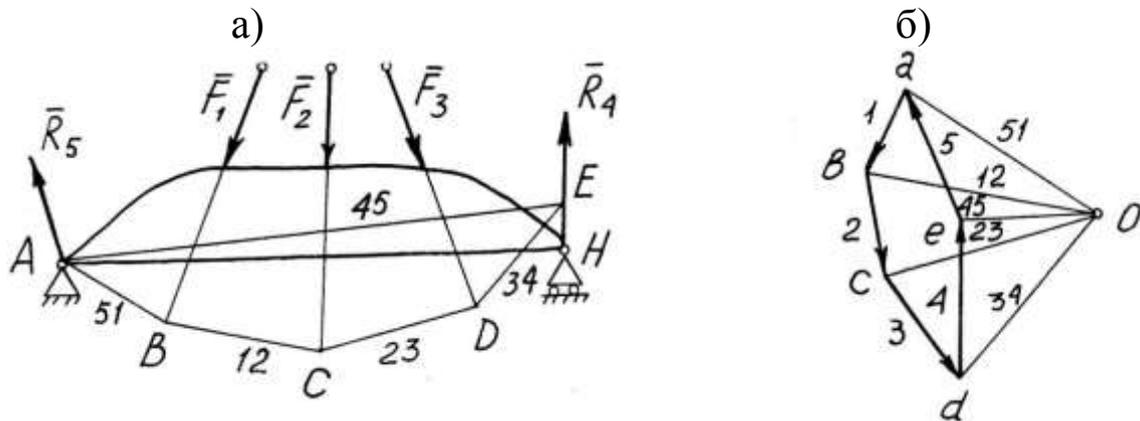


Рис. 5.3

Обозначим реакцию опоры H , линия действия которой известна, через \bar{R}_4 , а реакцию шарнирно-неподвижной опоры A – через \bar{R}_5 . Строим силовой многоугольник (рис. 5.3, б). Построение обрываем проведением линии действия \bar{R}_4 . Далее строим веревочный многоугольник, начиная с точки A , то есть с опоры, направление реакции которой неизвестно. Вевочный многоугольник $ABCDE$ должен быть замкнутым. Соединяем точку A с точкой E . Это и будет направление луча 45. Из точки O (рис. 5.3, б) проводим прямую, параллельную EA . Точка пересечения с линией действия \bar{R}_4 дает точку e . Тогда в выбранном масштабе сил \bar{de} есть вектор \bar{R}_4 , а \bar{ea} есть вектор \bar{R}_5 .

ГЛАВА 6. ФЕРМА И ЕЕ РАСЧЕТ

6.1. Понятие о ферме

Ферма – геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция.

Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, то ферму называют **плоской**.

Точки, в которых сходятся оси стержней, называются **узлами фермы**, а те узлы, которыми ферма опирается на основание, – **опорными узлами** (рис. 6.1).

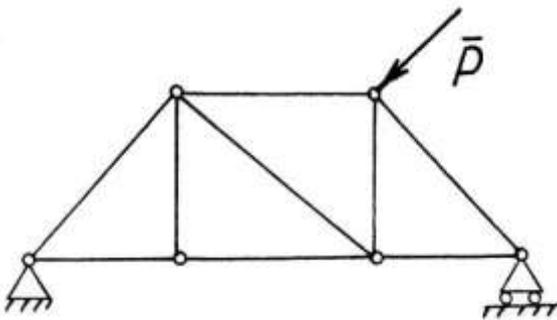


Рис. 6.1

Количество стержней статически определимой фермы:

$$k = 2n - 3,$$

где k – число стержней; n – число узлов.

При расчете фермы сначала определяют опорные реакции, а затем усилия в стержнях. Все внешние силы прикладывают к узлам. Силами тяжести стержней либо пренебрегают, либо распределяют их по узлам. В соответствии с аксиомой 1, каждый стержень при этом работает либо на растяжение, либо на сжатие.

6.2. Аналитический расчет плоской фермы методами вырезания узлов и сечений Риттера

Метод вырезания узлов заключается в том, что мысленно вырезают узлы фермы и рассматривают их равновесие. Так как в начале расчета неизвестно, какие стержни фермы растянуты, а какие сжаты, то условно полагают, что все стержни растянуты, то есть реакции стержней направлены от узлов. Если в результате вычислений получают ответ со знаком «–», то соответствующий стержень сжат. Искомые внутренние усилия в стержнях равны по модулю соответствующим реакциям и противоположны по направлению. В дальнейшем при расчете фермы реакции стержней будем отождествлять с усилиями и обозначать через \bar{S} . Последовательность

вырезания узлов определяется условием, что число неизвестных усилий, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия: двух – для плоской фермы и трех – для пространственной. Стержни фермы, в которых усилия равны нулю, называются **нулевыми стержнями**.

Рассмотрим леммы, пользуясь которыми можно определять нулевые стержни плоской фермы, не производя ее расчета.

Лемма 1. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.

Лемма 2. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, а величины усилий в первых двух стержнях равны между собой.

Лемма 3. Если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

Доказательство лемм следует из уравнений равновесия сил, приложенных к узлам.

Метод сечений Риттера заключается в сечении плоской фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из частей. Сечение должно проходить не более чем через три неизвестных стержня. Уравнения равновесия удобно записывать в виде трех уравнений моментов относительно трех **точек Риттера** – точек схождения осей неизвестных стержней.

6.3. Графический расчет фермы. Диаграмма Максвелла – Кремоны

Графическое определение опорных реакций фермы осуществляется в соответствии с п. 5.2 предыдущей главы. Графическое определение усилий в стержнях фермы осуществляется методом вырезания узлов путем построения силовых многоугольников для каждого из узлов, либо построения диаграммы Максвелла – Кремоны.

Единый чертеж, включающий в себя силовой многоугольник внешних сил и силовые многоугольники для каждого из вырезанных узлов, называется **диаграммой Максвелла – Кремоны**.

В отличие от обычного построения силовых многоугольников, построение силовых многоугольников на диаграмме отличается рядом существенных особенностей:

- внешние силы, приложенные к узлам фермы (в том числе и реакции опор), изображают вне контура фермы;
- части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, а также внутренние области фермы обозначают заглавными буквами латинского алфавита;
- строят замкнутый многоугольник внешних сил и силовые многоугольники для каждого узла, откладывая силы в порядке, соответствующем выбранному направлению обхода фермы, и обозначая силы малыми латинскими буквами, соответствующими обозначениям смежных участков плоскости.

6.4. Пример расчета плоской фермы

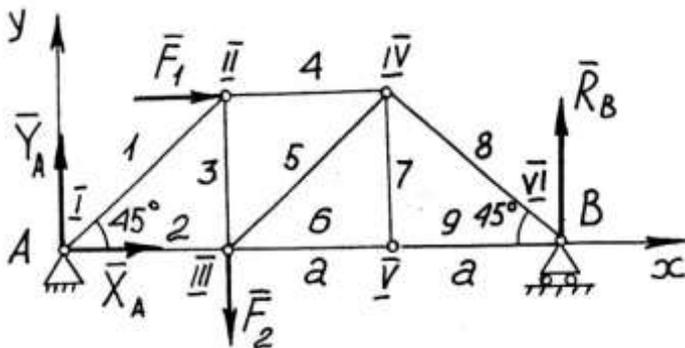


Рис. 6.2

Определим опорные реакции и усилия в стержнях плоской фермы (рис. 6.2), если $F_1 = 1$ кН, $F_2 = 2$ кН.

Решение. Определим аналитически опорные реакции, изобразив расчетную схему на основном чертеже (рис. 6.2). Уравнения равновесия:

$$\sum_i X_i = 0: X_A + F_1 = 0;$$

$$\sum_i M_{iA} = 0: R_B \cdot 3a - F_1 \cdot a - F_2 \cdot a = 0;$$

$$\sum_i M_{iB} = 0: F_2 \cdot 2a - F_1 \cdot a - Y_A \cdot 3a = 0.$$

Из уравнений равновесия следует, что $X_A = -1$ кН, $Y_A = 1$ кН, $R_B = 1$ кН.

Определим графически опорные реакции. На рис. 6.3 представлены веревочный $AKCDA$ и силовой $akcda$ многоугольники.

Реакция \bar{R}_B пронумерована номером 3, а \bar{R}_A – номером 4. Из

построения следует, что $\overline{cd} = \overline{R}_B$ и $\overline{da} = \overline{R}_4 = \overline{R}_A$. Нетрудно убедиться, результаты геометрического решения совпадают с результатами аналитического.

Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов сведено в табл. 6.1.

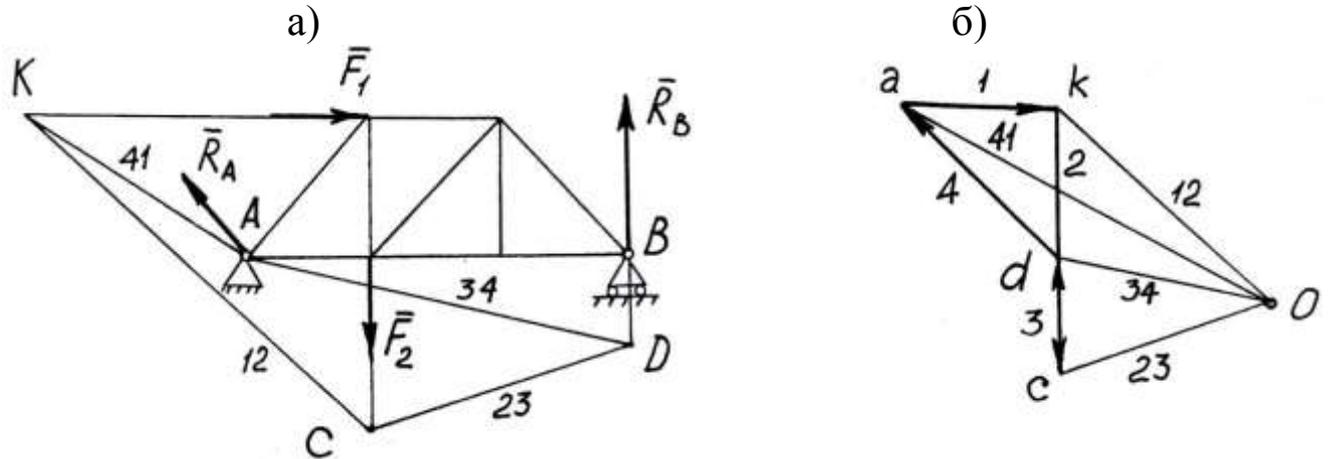


Рис. 6.3

Усилие $S_7 = 0$ по второй лемме о нулевых стержнях.

Определим усилия в стержнях 4, 5, 6 методом сечения Риттера. Для этого проведем сечение фермы через указанные стержни и рассмотрим равновесие одной из ее частей (рис. 6.4). Уравнения равновесия составим в виде уравнений моментов относительно двух точек Риттера K_1 и K_2 и проекций сил на вертикальную ось (так как третья точка Риттера уходит в бесконечность):

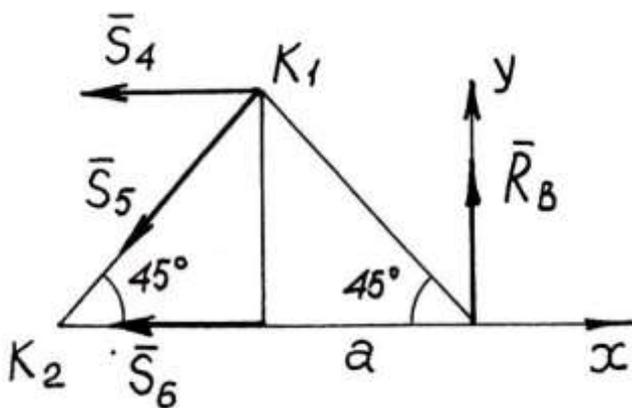


Рис. 6.4

$$\sum_i M_{ik_1} = 0 : R_B \cdot a - S_6 \cdot a = 0;$$

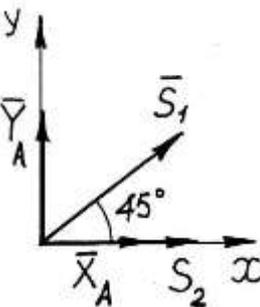
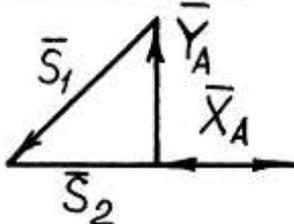
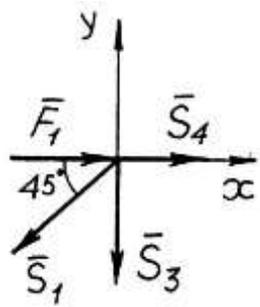
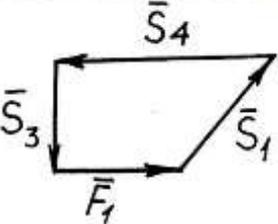
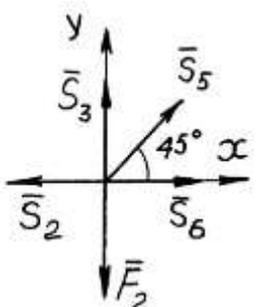
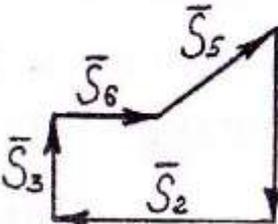
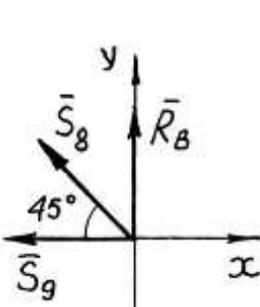
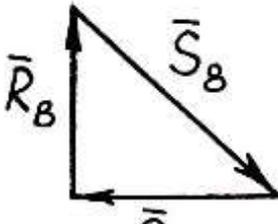
$$\sum_i M_{ik_2} = 0 : R_B \cdot 2a + S_4 \cdot a = 0;$$

$$\sum_i Y_i = 0 : R_B - S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

Откуда $S_4 = -2$ кН;
 $S_5 = 1,4$ кН; $S_6 = 1$ кН.

Графическое определение усилий в стержнях фермы путем построения диаграммы Максвелла – Кремоны поясняет рис. 6.5, на котором представлены схемы разбивки областей плоскости фермы на внешние и внутренние (рис. 6.5, а) и непосредственно диаграмма $M - K$ (рис. 6.5, б).

Таблица 6.1

№ узла	Аналитический способ	Геометрический способ
I	 <p> $X_A + S_2 + S_1 \cos 45^\circ = 0;$ $Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0.$ $S_1 = -1,4 \text{ кН},$ $S_2 = 2 \text{ кН}.$ </p>	 <p> $S_1 = -1,4 \text{ кН},$ $S_2 = 2 \text{ кН}.$ </p>
II	 <p> $F_1 + S_4 - S_1 \cos 45^\circ = 0;$ $-S_3 - S_1 \sin 45^\circ = 0.$ $S_3 = 1 \text{ кН},$ $S_4 = -2 \text{ кН}.$ </p>	 <p> $S_3 = 1 \text{ кН},$ $S_4 = -2 \text{ кН}.$ </p>
III	 <p> $S_6 - S_2 + S_5 \cos 45^\circ = 0;$ $S_3 - F_2 + S_5 \sin 45^\circ = 0.$ $S_5 = 1,4 \text{ кН}; \quad S_6 = 1 \text{ кН}.$ </p>	 <p> $S_5 = 1,4 \text{ кН};$ $S_6 = 1 \text{ кН}.$ </p>
VI	 <p> $-S_9 - S_8 \cos 45^\circ = 0;$ $R_B + S_8 \sin 45^\circ = 0.$ $S_8 = -1,4 \text{ кН}; \quad S_9 = 1 \text{ кН}.$ </p>	 <p> $S_8 = -1,4 \text{ кН};$ $S_9 = 1 \text{ кН}.$ </p>

Результаты расчета усилий в стержнях сведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие S , кН	-1,4	2	1	-2	1,4	1	0	-1,4	1

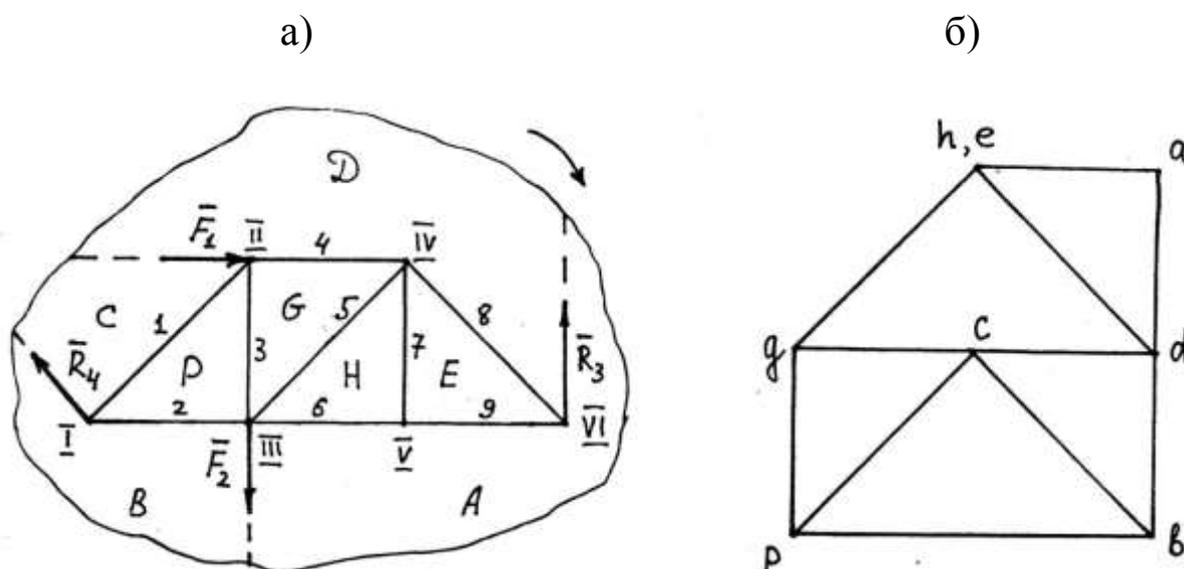


Рис. 6.5

Таким образом, результаты расчета усилий в стержнях фермы методами вырезания узлов и сечений Риттера, графическими способами построения отдельных силовых многоугольников и диаграммы Максвелла – Кремоны совпадают. Это позволяет сделать вывод о достоверности численных значений величин, приведенных в табл. 6.2.

ГЛАВА 7. ПОНЯТИЕ О ТРЕНИИ

7.1. Трение скольжения

В теоретической механике обычно рассматривают только «сухое» трение между шероховатыми поверхностями тел. Различают трение скольжения при покое (трение сцепления) и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого.

Сила сопротивления относительно скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого называется **силой трения скольжения**.

Экспериментально установлено, что максимальное значение силы трения равно

$$F_{\text{тр}} = f N, \quad (7.1)$$

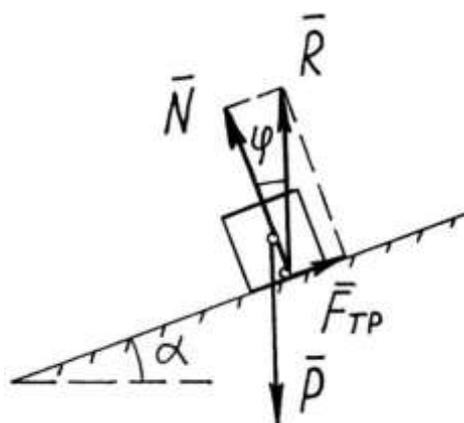


Рис. 7.1

где $F_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения; f – коэффициент трения скольжения; N – нормальное к поверхности давление или нормальная к поверхности составляющая реакции (рис. 7.1). Сила трения $F_{\text{тр}}$ находится в касательной плоскости и направлена в сторону, противоположную возможному перемещению. Величина силы трения не зависит от площади соприкосновения тел. Величина коэффициента трения f зависит от соприкасающихся материалов и состояния трущихся поверхностей.

Из рис. 7.1 следует, что

$$\text{tg } \varphi = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = f. \quad (7.2)$$

Угол φ называется **углом трения**. Характеризует отклонение реакции шероховатой поверхности от нормали к ней.

7.2. Трение качения

При качении одного тела по поверхности другого за счет деформаций возникает **пара сил сопротивления качению**. На рис. 7.2 приведены примеры качения круглого цилиндра без деформаций (а) и при наличии деформаций (б).

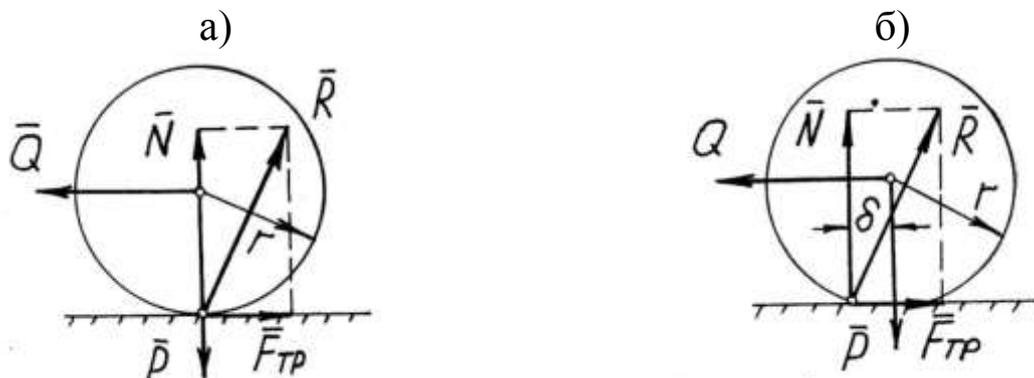


Рис. 7.2

Из условия равновесия следует $Qr = N\delta$. Момент пары сил сопротивления

$$M_c = N\delta. \quad (7.3)$$

Для величины активной силы Q получим

$$Q = \frac{\delta}{r} N. \quad (7.4)$$

Расстояние δ называется **коэффициентом трения качения**.

Для основных материалов $\frac{\delta}{r} \ll f$, то есть для приведения твердого тела в состояние качения требуется гораздо меньшая активная сила Q , чем для скольжения. Поэтому трение скольжения стараются заменить трением качения.

ГЛАВА 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

8.1. Общие понятия и случай системы материальных точек

Сила, с которой Земля притягивает к себе тело, называется **силой тяжести тела или его весом**. Эта сила направлена по линии отвеса к Земле, то есть параллельно нити, на которой подвешен какой-либо груз.

Пусть имеем систему материальных точек $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$, находящуюся под действием сил тяжести. Допустим, что общие размеры системы не слишком велики. Тогда будем иметь систему параллельных сил тяжести $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Точка приложения S равнодействующей системы \bar{R} параллельных сил тяжести называется **центром тяжести системы**.

Определим положение центра тяжести (рис. 8.1).

Согласно теореме Вариньона:

$$\bar{r}_c \times \bar{R} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{P}_i. \quad (*)$$

Введем в рассмотрение единичный вектор \bar{U} , параллельный силам тяжести. Тогда $\bar{P}_i = P_i \bar{U}$; $\bar{R} = \sum_i \bar{P}_i = \sum_i P_i \bar{U}$, а уравнение (*) примет вид $\bar{r}_c \times \sum_i P_i \bar{U} = \sum_i \bar{r}_i \times P_i \bar{U}$ или $(\bar{r}_c \sum_i P_i - \sum_i \bar{r}_i P_i) \times \bar{U} = 0$.

Откуда получим выражение для определения радиуса-вектора центра тяжести системы материальных точек:

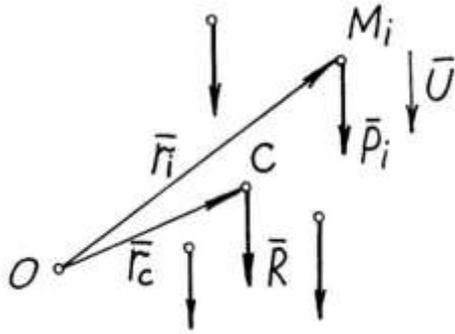


Рис. 8.1

$$\bar{r}_c = \frac{\sum P_i \bar{r}_i}{\sum P_i}. \quad (8.1)$$

Проектируя (8.1) на оси декартовой системы координат с началом в точке O , получим выражения для координат центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i};$$

$$z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}. \quad (8.2)$$

8.2. Центр тяжести твердого тела

Разобьем тело весом P на сколь угодно малые частицы весом ΔP_i , радиусы-векторы которых \bar{r}_i . Тогда согласно (8.1):

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \Delta P_i \bar{r}_i}{P}, \quad \text{где } P = \sum \Delta P_i,$$

или $\bar{r}_c = \frac{\sum \gamma_i \Delta \tau_i \bar{r}_i}{P}$, где $\Delta \tau_i$ – объем частицы тела, а γ_i – удельный вес.

Переходя к пределу при числе частиц, стремящемся к бесконечности, получим в интегральной форме общую формулу для определения радиуса-вектора центра тяжести тела:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{P} \int \gamma \bar{r} d\tau, \quad (8.3)$$

а для координат центра тяжести тела получим

$$x_c = \frac{1}{P} \int \gamma x d\tau; \quad y_c = \frac{1}{P} \int \gamma y d\tau; \quad z_c = \frac{1}{P} \int \gamma z d\tau. \quad (8.4)$$

В случае однородного тела ($\gamma = \text{const}$) формулы (8.4) примут вид

$$x_c = \frac{1}{\tau} \int x d\tau; \quad y_c = \frac{1}{\tau} \int y d\tau; \quad z_c = \frac{1}{\tau} \int z d\tau. \quad (8.5)$$

Если однородное тело выполнено в виде поверхности площадью S или линии длиной L , то формулы (8.5) примут вид

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_S y dS; \quad z_c = \frac{1}{S} \int_S z dS; \quad (8.6)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dL; \quad y_c = \frac{1}{L} \int_L y dL; \quad z_c = \frac{1}{L} \int_L z dL. \quad (8.7)$$

Интегралы, входящие в формулы (8.5)–(8.7), называются **статическими моментами** соответственно объема тела, площади поверхности и длины линии.

8.3. Методы, облегчающие определение положения центра тяжести

Различают три метода, облегчающих определение положения центра тяжести: метод разбиения на части; метод отрицательных масс (объемов, площадей, длин); метод симметрии.

Метод разбиения основан на разделении твердого тела на части, центры тяжести которых либо известны, либо легко определяются. Затем твердое тело представляется как система материальных точек в виде центров тяжести отдельных частей и по формулам (8.2) определяются искомые координаты центра тяжести тела.

Метод отрицательных масс (объемов, площадей, длин) используется при наличии в телах отдельных пустот достаточно правильной формы и фактически сводится к методу разбиения на части. Пустоты тел мысленно заполняются массой той же плотности, что и твердое тело. Тело разбивается на сплошное тело с заполненной пустотой и тело в виде заполненной пустоты с отрицательной массой.

Метод симметрии основан на использовании двух следующих теорем.

Теорема 1. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела находится в этой плоскости.

Доказательство теорем основано на разбиении твердого тела на отдельные части, попарно симметрично расположенные относительно оси и плоскости симметрии и имеющие одинаковые массы. Использование формул типа (8.2) приводит к искомому результату.

8.4. Теоремы Гюльдена

Теорема 1. Площадь поверхности вращения, полученной вращением плоской кривой во-

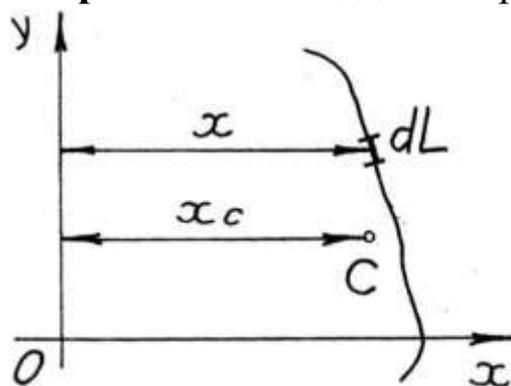


Рис. 8.2

кружении плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой, но не пересекающей ее, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной ее центром тяжести (рис. 8.2).

$$dS = 2\pi x dL;$$

$$S = 2\pi \int_L x dL;$$

$$\int_L x dL = x_c L;$$

$$S = 2\pi x_c L. \quad (8.8)$$

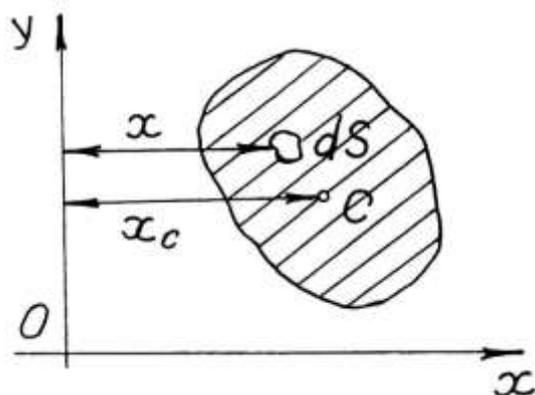


Рис. 8.3

Теорема 2. Объем тела вращения, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести (рис. 8.3).

$$d\tau = 2\pi x dS;$$

$$\tau = 2\pi \int_S x dS;$$

$$\int_S x dS = x_c S;$$

$$\tau = 2\pi x_c S. \quad (8.9)$$

8.5. Примеры определения положения центра тяжести

Пример 1. Определить координаты центра тяжести плоской однородной изогнутой линии (рис. 8.4), если известно, что $L_1 = 10$ м, $L_2 = 4$ м, $L_3 = 6$ м.

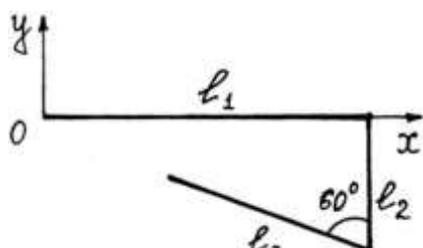


Рис. 8.4

Решение. Разбиваем линию на три части. Тогда координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3}{L_1 + L_2 + L_3};$$

$$y_c = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3}{L_1 + L_2 + L_3},$$

где $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ – координаты центра тяжести отдельных частей линии.

$$x_c = \frac{L_1 \frac{L_1}{2} + L_2 L_1 + L_3 \left(L_1 - \frac{L_3}{2} \sin 60^\circ \right)}{L_1 + L_2 + L_3} = 6,72 \text{ м};$$

$$y_c = \frac{L_1 \cdot 0 + L_2 \left(-\frac{L_2}{2} \right) + L_3 \left(-L_2 + \frac{L_3}{2} \cos 60^\circ \right)}{L_1 + L_2 + L_3} = -1,15 \text{ м}.$$

Пример 2. Определить координаты центра тяжести однородной тонкой пластины (рис. 8.5).

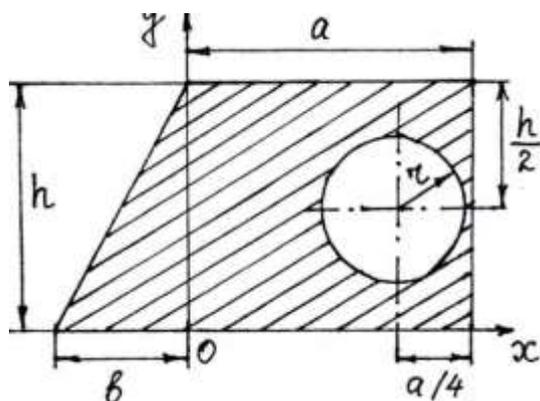


Рис. 8.5

Решение. Разбиваем пластину на три части: треугольник – 1; сплошной прямоугольник – 2; круг с отрицательной площадью – 3. Тогда координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3};$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

где S_1, S_2, S_3 – площади выделенных частей, а $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ – координаты их центров тяжести.

$$x_c = \frac{\frac{bh}{2} \left(-\frac{b}{3}\right) + ah \frac{a}{2} + (-\pi r^2) \frac{3}{4} a}{\frac{bh}{2} + ah + (-\pi r^2)}; \quad y_c = \frac{\frac{bh}{2} \frac{h}{3} + ah \frac{h}{2} + (-\pi r^2) \frac{h}{2}}{\frac{bh}{2} + ah + (-\pi r^2)}.$$

Пример 3. Определить координаты центра тяжести однородного усеченного конуса (рис. 8.6).

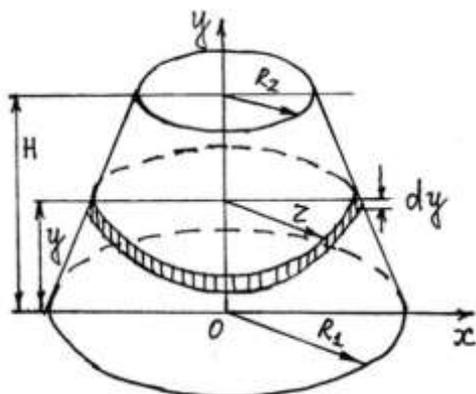


Рис. 8.6

Решение. Разбиваем усеченный конус на отдельные тонкие пластины, параллельные основанию. Центры тяжести всех пластин лежат, очевидно, на оси y . Тогда $x_c = 0$. Объем выделенной на чертеже пластины можно записать в виде $dV = \pi \cdot r^2 dy$. Тогда

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{1}{V} \int y dV = \frac{\pi}{V} \int y r^2 dy.$$

Объем усеченного конуса

$$V = \int dV = \pi \int_0^H r^2 dy.$$

Величину r найдем из соотношения

$$\frac{r - R_2}{H - y} = \frac{R_1 - R_2}{H};$$

$$r = R_2 + (R_1 - R_2) \frac{H - y}{H}.$$

Представляем полученное выражение в вышеприведенные интегралы, после элементарных алгебраических преобразований задачу сведем к вычислению простых интегралов от степенной функции.

Покажем еще один способ определения координаты центра тяжести y_c .

Представим усеченный конус как разность двух тел: сплошного полного конуса – 1 и присоединенного конуса с радиусом основания R_2 и отрицательным объемом – 2. Воспользуемся известным положением, что центр тяжести полного конуса отстоит от его основания на расстоянии, равном одной четверти его высоты (при же-

лании, по аналогии с первым способом решения, этот результат можно получить самостоятельно).

$$y_c = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V},$$

где
$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R_1^2 (h - H), \quad V_2 = -\frac{1}{3} \pi R_2^2 h;$$

$$y_1 = \frac{1}{4} (h + H), \quad y_2 = H + \frac{1}{4} h.$$

Высоту h второго присоединенного конуса найдем из соотношения

$$\frac{h}{H + h} = \frac{R_2}{R_1}.$$

По аналогии с конусом можно рассмотреть пирамиду с любым основанием.

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Введение

Кинематика – раздел теоретической механики, занимающийся изучением движения материальных тел в пространстве и времени с геометрической точки зрения без учета их масс и вне связи с силами, вызывающими это движение.

Пространство и время в теоретической механике считаются абсолютными: пространство считается трехмерным евклидовым, время рассматривается как непрерывно возрастающая независимая величина.

Под механическим движением материальных тел понимают происходящее с течением времени изменение их относительного положения в пространстве или взаимного положения частей данного тела. Для определения изменения положения тела по отношению к другому с последним связывают систему осей координат, называемую **системой отсчета**. В зависимости от тела, с которым связана система отсчета, последняя может быть как подвижной, так и неподвижной. При изучении движения на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему осей координат, неизменно связанных с Землей.

Наиболее простым материальным объектом, изучаемым в теоретической механике, является материальная точка. Любое материальное тело можно рассматривать как бесконечную совокупность материальных точек. Поэтому установление закономерностей движения материальной точки служит основой для изучения движения материальных тел.

Кинематическое изучение движения точки по отношению к выбранной системе отсчета заключается в определении ее траектории, скорости и ускорения в любой момент времени.

Линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется **траекторией точки**.

1.2. Способы задания движения точки

Естественный способ задания движения

Пусть дана некоторая траектория точки M (рис. 1.1). Выберем на траектории неподвижную точку O , которую назовем началом отсчета дуговой координаты $OM = S$. Выберем положительное и отрицательное направления отсчета переменной координаты S . Очевидно, что положение точки M на траектории однозначно определяется заданием дуговой координаты S , являющейся функцией времени:

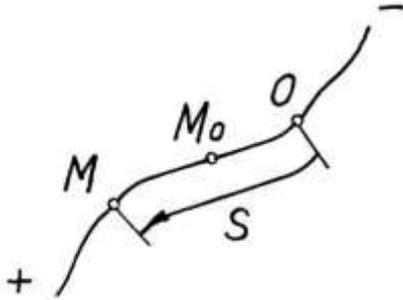


Рис. 1.1

$$S = S(t). \quad (1.1)$$

Задание движения точки по траектории в виде **закона движения** (1.1) называется **естественным способом задания движения точки**.

Путь $\sigma = |M_0M| = |S - S_0|$, пройденный точкой M по траектории, равен модулю дуговой координаты только в том случае, когда начало отсчета (точка O) совпадает с начальным положением точки M на траектории (точка M_0). В общем случае для определения приращения пути $d\sigma$, очевидно, имеем $d\sigma = |dS| = |\dot{S}|dt$, откуда получаем выражение для определения конечного пути:

$$\sigma = \int_0^t |\dot{S}| dt. \quad (1.2)$$

Векторный способ задания движения

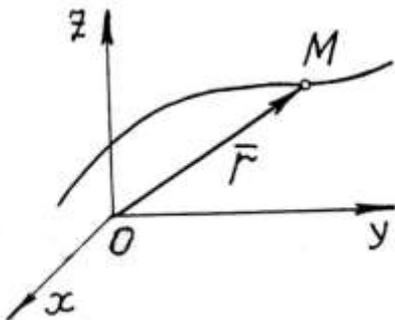


Рис. 1.2

Положение точки на траектории в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис. 1.2). Очевидно, что \vec{r} есть функция времени, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.3)$$

Задание движения точки в виде радиу-

са-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется **векторным способом задания движения точки**.

Траектория точки является геометрическим местом концов радиуса-вектора движущейся точки.

Координатный способ задания движения

Если в точку O (рис. 1.2) поместить начало декартовой системы координат и спроецировать уравнение (1.3) на оси этой системы, то получим декартовы координаты движущейся точки M как функции времени, которые называются **уравнениями движения точки**:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.4)$$

Соответствующим образом можно записать уравнения движения точки M в проекциях на оси криволинейной системы координат. Так, например, в системе цилиндрических координат (рис. 1.3, а) уравнения движения запишутся в виде

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad z = z(t), \quad (1.5)$$

а в системе сферических координат (рис. 1.3, б) – следующим образом:

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \theta = \theta(t). \quad (1.6)$$

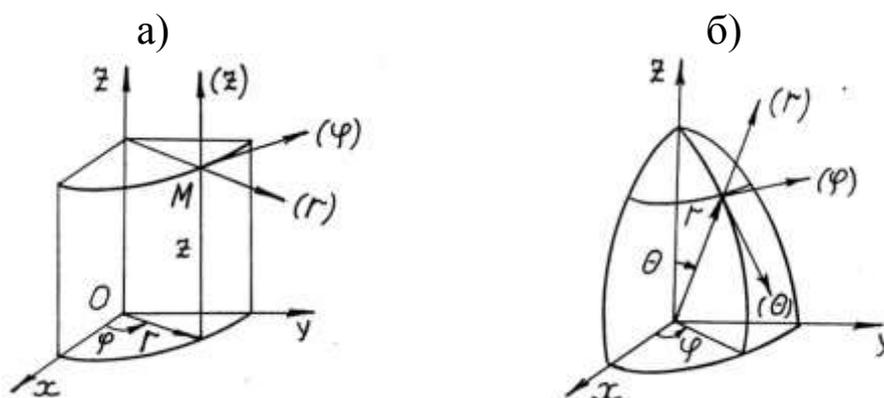


Рис. 1.3

Задание движения точки в виде уравнений (1.4), (1.5) или (1.6) называется **координатным способом задания движения точки**.

Уравнения (1.4)–(1.6) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки, где роль параметра играет время

t . Исключая из уравнений движения время t , можно получить уравнение траектории в координатной форме. Так, например, выражая t из первого уравнения системы (1.4) $t = \varphi(x)$, получим уравнение траектории в декартовых координатах в виде

$$y = y[\varphi(x)]; \quad z = z[\varphi(x)]. \quad (1.7)$$

Связь между способами задания движения точки

Очевидно, что от одного способа задания движения точки можно перейти к другому. Если начало отсчета при векторном и координатном способе совместить (рис. 1.2), то связь между ними выражается формулой

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad (1.8)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы декартовой системы координат.

Для установления связи между естественным и координатным способами представим элемент дуги траектории точки через приращения декартовых координат в виде

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2 + (\dot{z}dt)^2}.$$

Откуда получим искомую связывающую формулу:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.9)$$

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами осуществляется по формулам

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z, \quad (1.10)$$

а между декартовыми и сферическими координатами – следующим образом:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (1.11)$$

1.3. Скорость точки

Скорость – векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Векторный способ задания движения

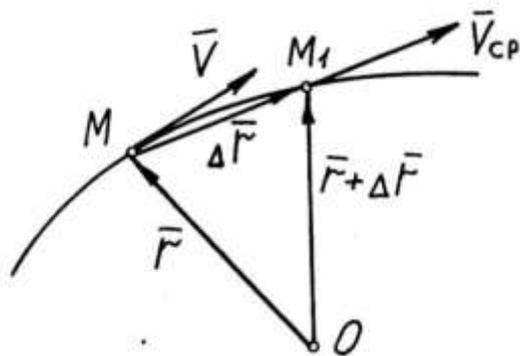
В соответствии с определением, средняя скорость точки на ко-

нежном отрезке перемещения MM_1 (рис. 1.4) запишется в виде

$$\bar{V}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Тогда скорость в произвольной точке

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$



Таким образом, при задании радиуса-вектора точки $\bar{r} = \bar{r}(t)$ скорость точки определяется по формуле

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \quad (1.12)$$

Скорость направлена по касательной к траектории движения точки.

Рис. 1.4

Координатный способ задания движения

Перейдем от координатного способа задания движения к векторному. Тогда, согласно (1.12), получим

$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \quad (1.13)$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции скорости на оси декартовой системы координат.

Модуль вектора скорости

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.14)$$

Направление вектора скорости определяется косинусами углов между \bar{V} и осями координат:

$$\cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{|\bar{V}|}; \quad \cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{|\bar{V}|}; \quad \cos(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{|\bar{V}|}. \quad (1.15)$$

В частном случае плоского движения (рис. 1.5) имеем

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j}, \quad |\bar{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{|\bar{V}|}.$$

В случае криволинейной ортогональной системы координат q_1, q_2, q_3 , например, рассмотренных выше цилиндрической или сферической, радиус-вектор точки можно представить в виде функции $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$. Тогда

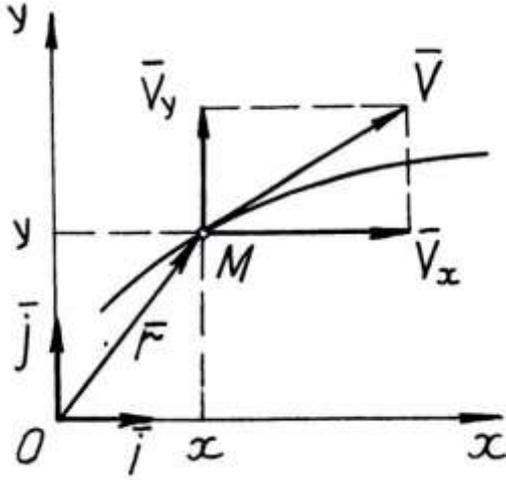


Рис. 1.5

$$\bar{V} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (*)$$

Частные производные можно представить в виде

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} \right| \bar{q}_v^0 \quad (v = 1, 2, 3),$$

где \bar{q}_v^0 – единичный вектор, направленный вдоль координаты q_v ($v = 1, 2, 3$).

Учитывая, что декартовы координаты x, y, z связаны с криволинейными q_1, q_2, q_3 :

$$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

введем в рассмотрение коэффициенты Лямэ H_v :

$$H_v = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_v} \right)^2}. \quad (1.16)$$

Тогда выражение для скорости (*) можно представить в виде

$$\bar{V} = H_1 \dot{q}_1 \bar{q}_1^0 + H_2 \dot{q}_2 \bar{q}_2^0 + H_3 \dot{q}_3 \bar{q}_3^0,$$

откуда для проекций скорости на криволинейные ортогональные оси координат имеем следующие выражения:

$$V_1 = H_1 \dot{q}_1; \quad V_2 = H_2 \dot{q}_2; \quad V_3 = H_3 \dot{q}_3, \quad (1.17)$$

а для модуля вектора скорости – следующую формулу:

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2}. \quad (1.18)$$

В случае цилиндрической системы координат, учитывая (1.10), коэффициенты Лямэ определяются следующим образом: $H_r = 1$; $H_\varphi = r$; $H_z = 1$. Тогда проекции скорости в соответствии с (1.17) запишутся в виде

$$V_r = \dot{r}; \quad V_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad V_z = \dot{z}, \quad (1.19)$$

а для модуля вектора скорости в соответствии с (1.18) находим

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.20)$$

В случае сферической системы координат, учитывая (1.11), коэффициенты Ляме определяются следующим образом: $H_r = 1$; $H_\phi = r \sin \theta$; $H_\theta = r$. Тогда проекции скорости в соответствии с (1.17) запишутся в виде

$$V_r = \dot{r}; \quad V_\phi = r \sin \theta \cdot \dot{\phi}; \quad V_\theta = r\dot{\theta}, \quad (1.21)$$

а для модуля вектора скорости в соответствии с (1.18) находим

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}. \quad (1.22)$$

Естественный способ задания движения

При движении точки по траектории радиус-вектор точки можно представить в виде функции дуговой координаты $\bar{r} = \bar{r}(S)$. Тогда, рассматривая ее как сложную функцию времени t , в соответствии с формулой (1.12) получим

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \frac{dS}{dt}. \quad (**)$$

Вектор

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S}$$

направлен по касательной к траектории, а его модуль

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S} \right| = 1.$$

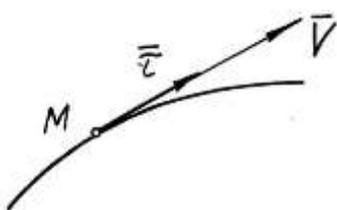


Рис.1.6

Таким образом, вектор $d\bar{r}/dS = \bar{\tau}$ является единичным вектором, направленным по касательной к траектории. Отсюда в соответствии с (**) следует (рис. 1.6), что

$$\bar{V} = \frac{dS}{dt} \bar{\tau}. \quad (1.23)$$

Модуль вектора скорости

$$|\bar{V}| = \left| \frac{dS}{dt} \right|, \quad (1.24)$$

а алгебраическая величина скорости

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.25)$$

Годограф вектора скорости точки

Пусть точка движется по траектории. Отметим ряд положений движущейся точки M_1, M_2, \dots, M_n и покажем скорости точки в этих

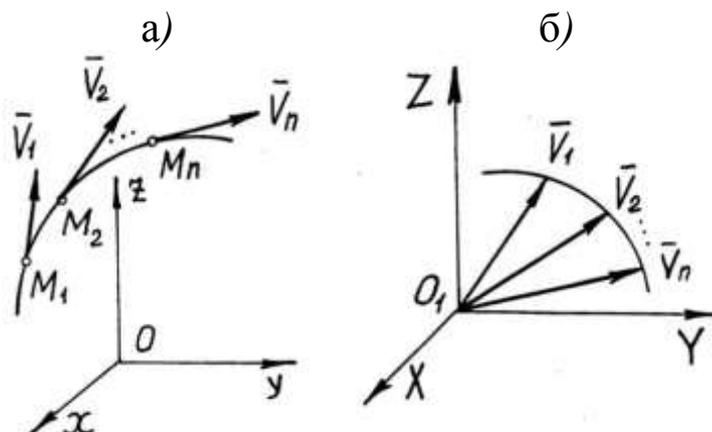


Рис. 1.7

положениях $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ (рис. 1.7, а). Выбрав в пространстве некоторую неподвижную точку O_1 , отложим от этой точки векторы, геометрически равные скоростям $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$, и соединим концы этих векторов (рис. 1.7, б).

Годографом скорости называется геометрическое место последовательных положений концов векторов скорости движущейся точки, отложенных от одной и той же произвольной точки пространства.

Проведем через точку O_1 (рис. 1.7, б) оси координат X, Y, Z , параллельные основным осям x, y, z . Тогда координаты точек годографа X, Y, Z будут равны проекциям скорости на оси координат:

$$X = V_x = \dot{x}; \quad Y = V_y = \dot{y}; \quad Z = V_z = \dot{z}. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.26) называются **параметрическими уравнениями годографа скорости**. Скорость точки, описывающей годограф скорости в соответствии с (1.12), равна

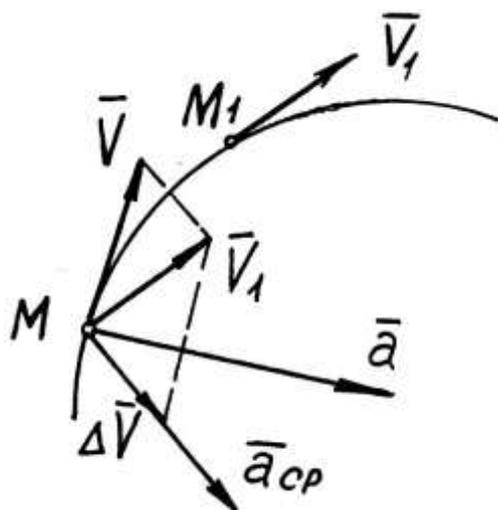
$$\vec{u} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

1.4. Ускорение точки

Ускорение – векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления скорости точки.

Векторный способ задания движения

В соответствии с определением среднее ускорение точки на конечном отрезке перемещения MM_1 (рис. 1.8) запишется в виде



$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}.$$

Тогда ускорение в произвольной точке

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

Таким образом, при задании радиуса-вектора точки $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ускорение точки определяется по формуле

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (1.27)$$

Рис. 1.8

Из (1.27) следует, что ускорение точки равно скорости точки, описывающей годограф скорости, то есть $\bar{a} = \bar{U}$.

Ускорение \bar{a} лежит в соприкасающейся в точке M плоскости и направлено в сторону вогнутости траектории (см. рис. 1.10).

Координатный способ задания движения

Перейдем от координатного способа задания движения к векторному. Тогда, согласно (1.27), получим

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad (1.28)$$

где $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ — проекции ускорения на оси декартовой системы координат.

Модуль вектора ускорения

$$|\bar{a}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.29)$$

Направление вектора ускорения определяется косинусами углов между \bar{a} и осями координат:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \quad (1.30)$$

В частном случае плоского движения (рис. 1.9) имеем

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} = \bar{a}_x + \bar{a}_y; \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{|\bar{a}|}.$$

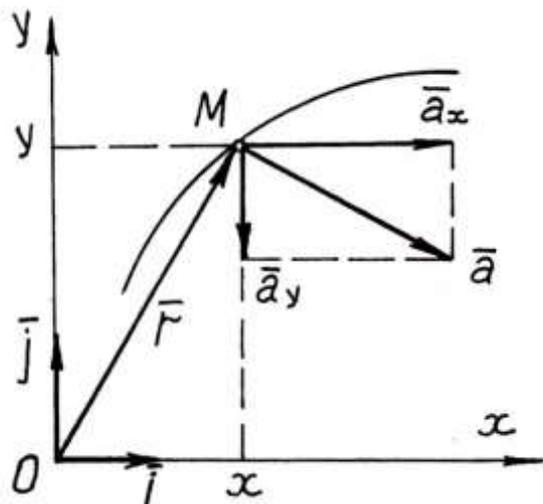


Рис. 1.9

В случае криволинейной ортогональной системы координат q_1, q_2, q_3 , например, цилиндрической или сферической, в соответствии с п. 1.3 можно записать

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} \right| \bar{q}_v^0 = H_v \bar{q}_v^0.$$

Поэтому единичный вектор оси (\bar{q}_v^0) криволинейных координат можно записать в виде

$$\bar{q}_v^0 = \frac{1}{H_v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v}.$$

Отсюда для проекции ускорения точки на данную ось получаем

$$a_v = \bar{a} \cdot \bar{q}_v^0 = \frac{1}{H_v} \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v}$$

или

$$a_v = \frac{1}{H_v} \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} \right) - \bar{V} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_v} \right]. \quad (1.31)$$

В соответствии с (1.31) проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат запишутся в виде

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2; \quad a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}; \quad a_z = \ddot{z}, \quad (1.32)$$

а на оси сферической системы координат – следующим образом:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2; \quad a_\phi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \cos^2 \theta); \quad (1.33)$$

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Соответственно модуль ускорения в цилиндрической системе координат запишется в виде

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2}, \quad (1.34)$$

а в сферической

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}. \quad (1.35)$$

Как частный случай, из формул для определения скорости и ускорения в проекциях на оси сферической системы координат не трудно получить формулы для определения скорости и ускорения в проекциях на оси полярной системы координат (r, φ) , положив $\theta = 0$.

Естественный способ задания движения

Пусть точка M движется по траектории. Построим в точке M **естественный трехгранник** (рис. 1.10):

I – **соприкасающаяся** плоскость;

II – **нормальная** плоскость, перпендикулярная к касательной;

III – **спрямляющая**, перпендикулярная к плоскостям I и II.

Плоскости I, II, III образуют **естественный трехгранник**, а оси их пересечения – **касательная, главная нормаль и бинормаль** – образуют **естественные оси координат** с единичными векторами $\bar{\tau}$, \bar{n} и \bar{b} .

В отличие от обычной декартовой системы координат естественные оси координат движутся вместе с точкой.

В процессе движения точки по траектории вектор $\bar{\tau}$, оставаясь постоянным по модулю, непрерывно меняет свое направление, то есть является функцией дуговой координаты $\bar{\tau} = \bar{\tau}(S)$.

Вектором кривизны кривой в точке M называется вектор

$$\bar{\kappa} = \frac{d\bar{\tau}}{dS}, \quad (1.36)$$

характеризующий поворот касательной к кривой.

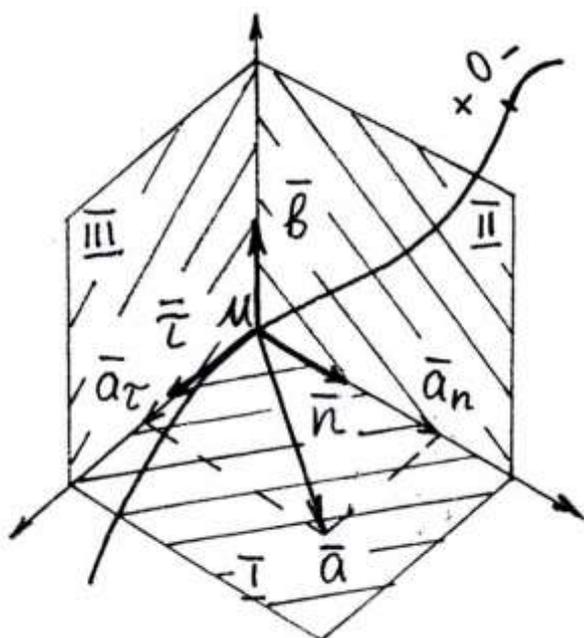


Рис. 1.10

Можно показать, что вектор \bar{k} направлен вдоль главной нормали, и формулу (1.36) преобразовать к виду

$$\bar{k} = \frac{1}{\rho} \bar{n}, \quad (1.37)$$

где ρ – **радиус кривизны кривой в точке M** (радиус соприкасающейся в точке M окружности).

Введенные понятия естественных координатных осей и вектора кривизны кривой позволяют определить ускорение точки в проекциях на эти оси координат. С учетом (1.23) и (1.27) имеем

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \bar{\tau} + \frac{dS}{dt} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \bar{\tau} + \frac{dS}{dt} \frac{d\bar{\tau}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \bar{\tau} + \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \bar{k}.$$

С учетом (1.37)

$$\bar{a} = \frac{d^2S}{dt^2} \bar{\tau} + \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \frac{1}{\rho} \bar{n} = \frac{dV}{dt} \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad (1.38)$$

где \bar{a}_τ – **касательное** ускорение; \bar{a}_n – **нормальное** ускорение.

Модуль касательного ускорения

$$|\bar{a}_\tau| = \left| \frac{d^2S}{dt^2} \right| = \left| \frac{dV}{dt} \right|, \quad (1.39)$$

а алгебраическая величина касательного ускорения

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dV}{dt}. \quad (1.40)$$

Величина нормального ускорения всегда положительна:

$$a_n = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.41)$$

Модуль полного ускорения точки

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.42)$$

Касательное ускорение \bar{a}_τ характеризует быстроту изменения величины скорости; нормальное ускорение \bar{a}_n характеризует величину скорости и кривизну траектории. При движении по прямой $\rho \rightarrow \infty$ и $a_n = 0$.

Величины проекций ускорения на оси естественных координат

a_τ и a_n можно выразить через проекции скорости и ускорения на оси декартовой системы координат.

Рассмотрим скалярное произведение векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{V} = \bar{a}_\tau \cdot \bar{V} + \bar{a}_n \cdot \bar{V} \quad \text{или} \quad \bar{a} \cdot \bar{V} = a_\tau |\bar{V}|.$$

Откуда
$$a_\tau = \frac{\bar{a} \cdot \bar{V}}{|\bar{V}|} = \frac{a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z}{|\bar{V}|}. \quad (1.43)$$

Рассмотрим векторное произведение векторов:

$$\bar{a} \times \bar{V} = \bar{a}_\tau \times \bar{V} + \bar{a}_n \times \bar{V} \quad \text{или} \quad |\bar{a} \times \bar{V}| = |\bar{a}_n \times \bar{V}| = a_n |\bar{V}|.$$

Откуда
$$a_n = \frac{|\bar{a} \times \bar{V}|}{|\bar{V}|}. \quad (1.44)$$

При движении точки в плоскости из (1.44) следует

$$a_n = \frac{|a_x V_y - a_y V_x|}{|\bar{V}|}. \quad (1.45)$$

1.5. Частные случаи движения точки

Рассмотрим ускорение точки в проекциях на оси естественных координат. Тогда на основе вышеприведенных формул можно сделать следующие выводы.

Случай 1. $\bar{a}_\tau = 0$, $\bar{a}_n = 0$.

Равномерное прямолинейное движение.

Случай 2. $\bar{a}_\tau = 0$, $\bar{a}_n \neq 0$.

Равномерное криволинейное движение.

Случай 3. $\bar{a}_\tau \neq 0$, $\bar{a}_n = 0$.

Неравномерное прямолинейное движение.

Случай 4. $\bar{a}_\tau \neq 0$, $\bar{a}_n \neq 0$.

Неравномерное криволинейное движение.

Движение точки при $\bar{a}_\tau = \text{const}$ называется **равнопеременным**. Получим уравнение равнопеременного движения:

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau; \quad dV = a_\tau dt; \quad \int_{V_0}^V dV = a_\tau \int_0^t dt.$$

Получим формулу для определения скорости при равнопеременном движении точки:

$$V = V_0 + a_\tau t. \quad (1.46)$$

Аналогично получим закон равнопеременного движения точки по траектории:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2, \quad (1.47)$$

где S_0 – начальная дуговая координата; V_0 – величина начальной скорости.

1.6. Примеры решения задач

Пример 1. Точка движется по закруглению радиуса $R = 1$ м по закону $S = 2 + \sin^2 3t$ м. Определить ее скорость и ускорение в момент времени $t_1 = \pi/12$ с.

Решение. Движение точки задано естественным способом, поэтому величина скорости точки

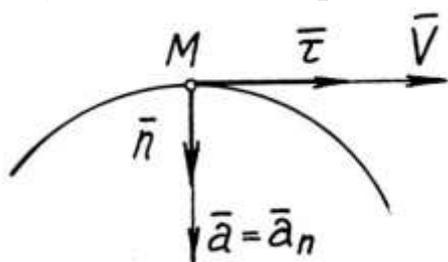


Рис. 1.11

$$V = \dot{S} = 6 \sin 3t \cdot \cos 3t = 3 \sin 6t.$$

В момент времени $t = \pi/12$ с.

$$V = 3 \sin 6(\pi/12) = 3 \text{ м/с.}$$

Величина касательного ускорения точки

$$a_\tau = \dot{V} = 18 \cos 6t.$$

В момент времени $t = \pi/12$ с

$$a_\tau = 18 \cos 6(\pi/12) = 0.$$

Величина нормального ускорения точки в момент времени $t = \pi/12$ с

$$a_n = V^2 / \rho = V^2 / R = 3^2 / 1 = 9 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9 \text{ м/с}^2.$$

Направления векторов скорости и ускорения представлены на рис. 1.11.

Пример 2. Уравнения движения точки $x = 1 + t^2$, м, $y = 2t$, м. Определить уравнение траектории точки в координатной форме, скорость и ускорение точки, радиус кривизны траектории в момент времени $t = 1$ с.

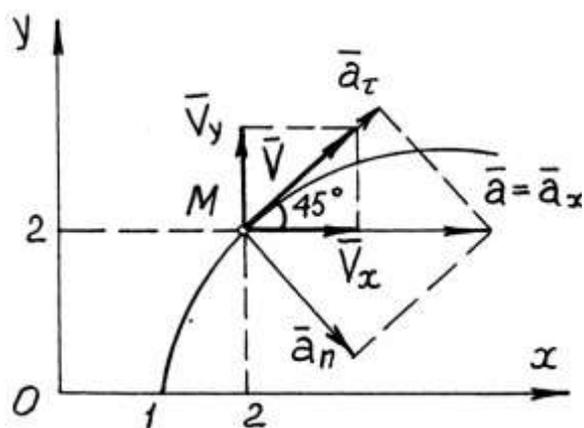


Рис. 1.12

Решение. Движение точки задано координатным способом. Исключая время t из уравнений движения, получим уравнение траектории в координатной форме:

$$t = y/2; \quad x = 1 + y^2/4,$$

откуда следует, что траекторией является верхняя ветвь параболы (рис. 1.12).

Координаты точки в момент времени $t = 1$ с:

$$x = 1 + 1^2 = 2 \text{ м}, \quad y = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м}.$$

Проекции скорости

$$V = \dot{x} = 2t; \quad \text{при } t = 1 \text{ с} \quad V_x = 2 \text{ м/с}; \quad V_y = \dot{y} = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль вектора скорости

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{8} \text{ м/с}.$$

Направление скорости

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Проекция ускорения

$$a_x = \dot{V}_x = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_y = \dot{V}_y = 0.$$

Модуль вектора ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{2} = 1.$$

Величина касательного ускорения

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{|\vec{V}|} = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

Величина нормального ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ м.}$$

ГЛАВА 2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Поступательное движение тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Теорема. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют равные скорости и ускорения.

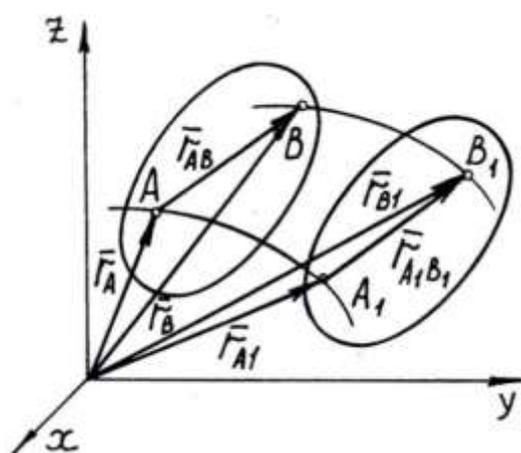


Рис. 2.1

Пусть твердое тело движется поступательно относительно некоторой системы координат $Oxyz$ (рис. 2.1). Выберем две произвольные точки A и B с радиусами-векторами \vec{r}_A и \vec{r}_B . Так как тело движется поступательно, то отрезок AB в процессе движения остается параллельным своему начальному положению. Отсюда следует, что в любой момент времени $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{A_1B_1} = \overline{\text{const}}$.

Очевидно, что $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$. Поэтому если траекторию точки A переместить по направлению \vec{r}_{AB} на расстояние AB , то она совпадет с траекторией точки B .

Скорость точки B

$$\vec{V}_B = \dot{\vec{r}}_B = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{r}_{AB}) = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{AB} = \dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A,$$

то есть скорости точек A и B геометрически равны.

Ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{V}}_B = \dot{\vec{V}}_A = \vec{a}_A,$$

то есть ускорения точек A и B также геометрически равны.

Так как точки A и B выбраны произвольно, то полученные со-

отношения справедливы для всех точек тела.

Установленные свойства позволяют свести изучение поступательного движения тела к изучению движения отдельной точки этого тела, то есть к кинематике точки. Уравнениями поступательного движения твердого тела являются уравнения движения любой точки этого тела, в качестве которой обычно принимают центр тяжести (центр масс):

$$x_c = x_c(t); \quad y_c = y_c(t); \quad z_c = z_c(t). \quad (2.1)$$

Так как положение твердого тела при поступательном движении определяется тремя независимыми параметрами, то говорят, что оно имеет три степени свободы.

2.2. Вращательное движение. Линейные и угловые скорости и ускорения

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой **осью вращения**.

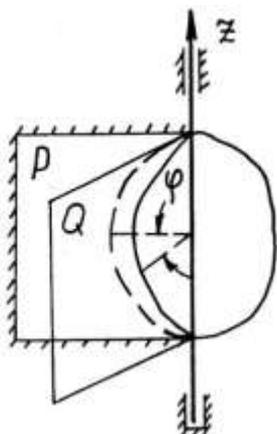


Рис. 2.2

Все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых находятся на оси вращения.

Проведем через ось вращения (рис. 2.2) две плоскости: неподвижную P и подвижную Q , неизменно связанную с телом. Положение твердого тела, очевидно, определяется величиной двугранного угла φ между этими плоскостями и направлением вращения. В механике принято за положительное направление принимать такое, чтобы, смотря навстречу оси вращения, видеть вращение происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, уравнением вращательного движения тела является величина угла поворота φ как функция времени t , то есть

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.2)$$

Твердое тело имеет одну степень свободы.

Определим скорость и ускорение точки тела M (рис. 2.3). Введем в рассмотрение неподвижную точку O на оси вращения и зада-

дим положение точки M радиус-вектором \vec{r} . Направим вдоль оси вращения единичный вектор \vec{k} .

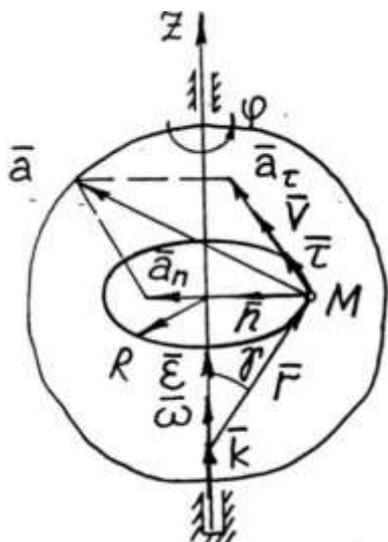


Рис. 2.3

Согласно кинематике точки скорость

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{dS}{dt} \vec{\tau} = \frac{R d\varphi}{dt} \vec{\tau} = \dot{\varphi} R \vec{\tau} = \\ &= \dot{\varphi} R \vec{k} \times \vec{r} \frac{1}{r \sin \gamma} = \dot{\varphi} \vec{k} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

Таким образом, скорость точки

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.3)$$

Вектор $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$, характеризующий быстроту изменения угла поворота и направление вращения твердого тела, называется **угловой скоростью**.

Модуль вектора скорости и его алгебраическая величина запишутся соответственно в виде

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| R; \quad V = \omega R. \quad (2.4)$$

Вектор скорости \vec{V} направлен по касательной к окружности вращения или перпендикулярно радиусу этой окружности R . Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения z .

Согласно кинематике точки, учитывая (2.3), получим выражение для ускорения:

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega, \quad (2.5)$$

где \vec{a}_ε – **вращательное ускорение**; \vec{a}_ω – **центростремительное ускорение**.

Вектор $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\varphi} \vec{k}$, характеризующий быстроту изменения модуля и направления угловой скорости тела, называется **угловым ускорением**.

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения z .

Если по аналогии с годографом линейной скорости точки ввести понятие годографа угловой скорости тела, то можно сделать вывод, что годографом угловой скорости является прямая, совпадающая с осью вращения, а скорость точки, описывающей годограф, равна угловому ускорению $\vec{U} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$.

В соответствии с (2.5) величины вращательного и центростремительного ускорений точки, а также модуль полного ускорения

точки M можно представить в виде

$$a_\varepsilon = \varepsilon R; \quad a_\omega = \omega^2 R; \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (2.6)$$

Нетрудно убедиться, что вращательное \bar{a}_ε и центростремительное \bar{a}_ω ускорения представляют собой не что иное, как касательное и нормальное ускорения точки, движущейся по окружности. Действительно, их направления совпадают, а величины ускорений:

$$a_\varepsilon = \varepsilon R = \frac{d\omega}{dt} R = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{dV}{dt} = a_\tau; \quad a_\omega = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} = a_n. \quad (2.7)$$

Целесообразность введения новой терминологии (вращательное и центростремительное) обусловлена тем, что в случае движения твердого тела составляющие ускорения могут быть определены через его угловые характеристики $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$.

Рассмотрим частные случаи вращения.

Вращение тела, при котором угловое ускорение $\bar{\varepsilon} = \overline{\text{const}}$, называется **равнопеременным**. При этом если абсолютная величина угловой скорости увеличивается, то вращение – **равноускоренное**, а если уменьшается – **равнозамедленное**.

Используя формулы для определения величин $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$, путем интегрирования получим уравнение равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2, \quad (2.8)$$

где φ_0 – начальный угол поворота; ω_0 – величина начальной угловой скорости.

Вращение тела, при котором $\bar{\omega} = \overline{\text{const}}$, называют **равномерным**.

Из (2.8) при $\varepsilon = 0$, $\omega_0 = \omega = \text{const}$ следует уравнение равномерного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.9)$$

В технике часто используют другую характеристику вращательного движения тела – число оборотов в единицу времени n . Установим связь между n и ω .

Из (2.9) следует

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} = \frac{2\pi N}{t} = 2\pi n, \quad (2.10)$$

где N – число оборотов тела за время t ; n – число оборотов в секунду.

Часто вводят в рассмотрение число оборотов в минуту. Тогда, чтобы получить размерность угловой скорости в $[\text{с}^{-1}]$, будем иметь следующую формулу:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}, \quad (2.11)$$

где n – число оборотов в минуту.

2.3. Примеры решения задач

Пример 1. Копровая баба при забивке сваи падает с высоты $H = 2,5$ м, а для ее поднятия на эту же высоту требуется втрое больше времени, чем на движение вниз. Свободное падение копровой бабы совершается с ускорением $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Ударив сваю, копровая баба движется вместе с ней в течение времени $t_2 = 0,02$ с до остановки, причем свая углубляется в грунт на глубину $h = 0,06$ м. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным, а также количество ударов копровой бабы в одну минуту.

Решение. Рассмотрим поступательное движение копровой бабы при падении до соприкосновения со сваей. Тогда уравнение ее движения запишется в виде $S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Откуда, полагая $S - S_0 = H$, $V_0 = 0$, находим время падения копровой бабы до удара: $t_1 = \sqrt{2H/g} = \sqrt{2 \cdot 2,5/9,8} = 0,7$ (с). Полное время движения копровой бабы вниз $t = t_1 + t_2 = 0,7 + 0,02 = 0,72$ (с). Время, затрачиваемое на весь цикл удара (опускание + подъем), $T = t_1 + t_2 + 3(t_1 + t_2) = 0,72 + 3 \cdot 0,72 \approx 2,9$ (с). Тогда количество ударов копровой бабы в минуту равно $N = 60/T = 60/2,9 \approx 20$.

Рассмотрим поступательное движение копровой бабы вместе со сваей после удара. Тогда уравнение ее движения и скорость запишутся в виде

$$S = S_0 + V_0 t - \frac{1}{2} a t^2; \quad V = V_0 - a t.$$

Рассмотрим эти выражения в момент остановки сваи $t = t_2$ и, учитывая, что $S - S_0 = h$, $V = 0$, можем записать

$$h = V_0 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2; \quad 0 = V_0 - a t_2.$$

Выражая из второго уравнения величину ускорения $a = V_0 / t_2$ и подставляя в первое, получим формулу для определения величины начальной скорости сваи:

$$h = V_0 t_2 - \frac{1}{2} \frac{V_0 t_2^2}{t_2}; \quad V_0 = 2h / t_2 = 2 \cdot 0,06 / 0,02 = 6 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Вращение маховика в период пуска машины определяется уравнением $\varphi = \frac{1}{3} t^3$, где t измеряется в секундах, φ – в радианах. Определить ускорение точки маховика, отстоящей от оси вращения на 0,5 м, в тот момент, когда величина ее скорости равна 8 м/с.

Решение. Величины угловых характеристик вращения

$$\omega = \dot{\varphi} = t^2; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2t.$$

Величина скорости точки $V = \omega R$. В момент времени, когда $V = 8$ м/с, получим

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда время, соответствующее достижению угловой скорости, определим из вышеописанного выражения $t = \sqrt{\omega} = 4$ с.

Величина углового ускорения $\varepsilon = 2t = 8 \text{ с}^{-2}$.

Величины вращательного и центростремительного ускорений

$$a_\varepsilon = \varepsilon R = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\omega = \omega^2 R = 16^2 \cdot 0,5 = 128 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2} = \sqrt{4^2 + 128^2} \text{ м/с}^2.$$

Направление полного ускорения точки определяется углом α :

$$\operatorname{tg} \alpha = a_\varepsilon / a_\omega = \varepsilon / \omega^2 = 8 / 16^2 = 1 / 32.$$

ГЛАВА 3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Свойства плоскопараллельного движения твердого тела. Движение плоской фигуры в ее плоскости

Плоскопараллельным или **плоским** называется такое движение твердого тела, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Установим свойства плоского движения твердого тела (рис. 3.1). Пусть Q – неподвижная плоскость. Рассмотрим движение точек твердого тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости Q . Пусть произвольные точки M и M_1 твердого тела лежат на этом перпендикуляре.

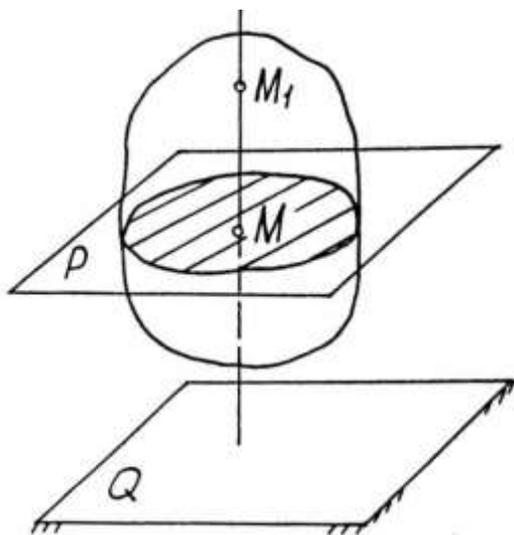


Рис. 3.1

В соответствии с определением отрезок MM_1 движется поступательно. Отсюда следует, что точки M и M_1 описывают одинаковые траектории, имеют равные скорости и ускорения, то есть $\vec{V}_M = \vec{V}_{M_1}$, $\vec{a}_M = \vec{a}_{M_1}$.

Основываясь на этом свойстве плоского движения твердого тела, можно установить, что движение каждой точки плоской фигуры в неподвижной плоскости P определяет собой движение всех

точек твердого тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости Q в точке M (рис. 3.1). Это позволяет изучение плоского движения твердого тела свести к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Так как положение плоской фигуры на ее плоскости вполне определяется положением двух ее точек или положением отрезка, соединяющего эти точки, то движение плоской фигуры можно изучать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости.

Покажем, что движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на два простейших движения: поступательное и вращательное.

Рассмотрим движение плоской фигуры, образованной сечением тела неподвижной плоскостью (рис. 3.2).

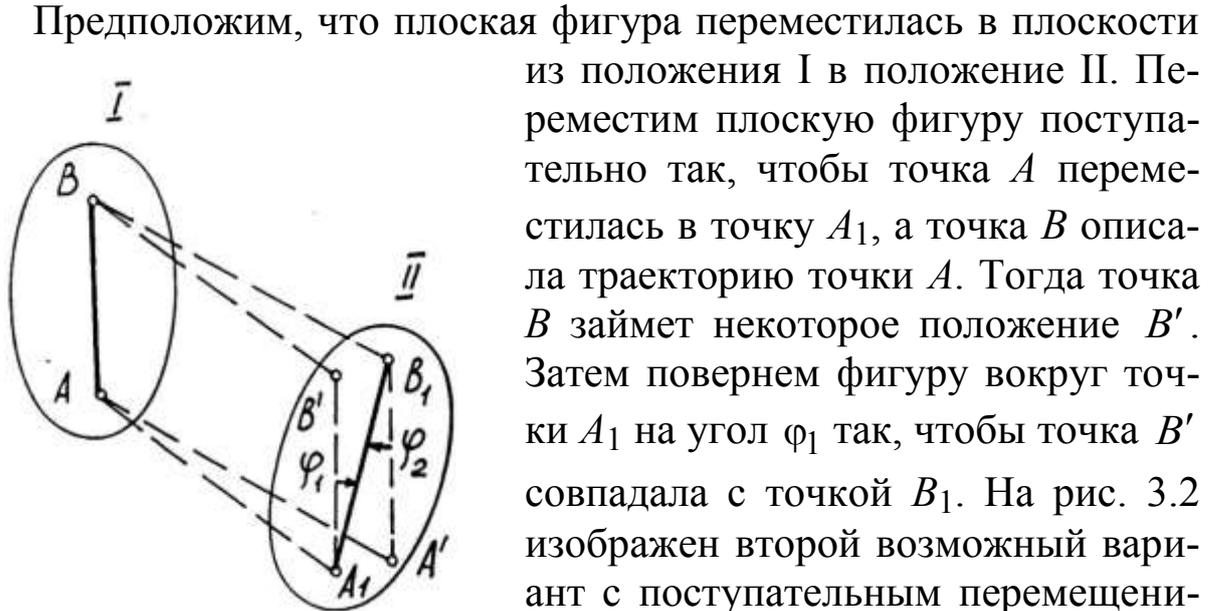


Рис. 3.2

Предположим, что плоская фигура переместилась в плоскости из положения I в положение II. Переместим плоскую фигуру поступательно так, чтобы точка A переместилась в точку A_1 , а точка B описала траекторию точки A . Тогда точка B займет некоторое положение B' . Затем повернем фигуру вокруг точки A_1 на угол φ_1 так, чтобы точка B' совпала с точкой B_1 . На рис. 3.2 изображен второй возможный вариант с поступательным перемещением точки B . Как видно из чертежа, поступательное перемещение различно в приведенных вариантах, а вращательное движение одинаково, величина угла поворота $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Так как точки A и B выбраны произвольно, то возможно бесчисленное множество рассматриваемых вариантов перемещения.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой **полюсом**, и вращательного перемещения вокруг этого полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а вращательное не зависит.

Таким образом, можно сделать следующий вывод.

Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой **полюсом**, и вращательного перемещения вокруг этого полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а вращательное не зависит.

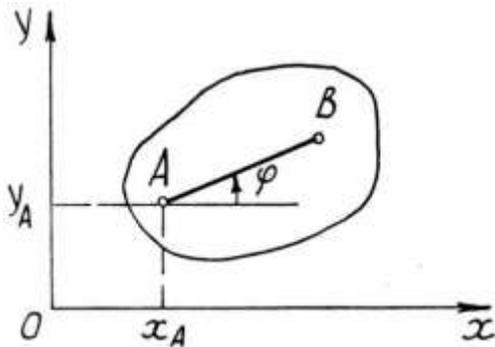


Рис. 3.3

В соответствии с полученным выводом о разложении движения плоской фигуры уравнения движения можно представить как совокупность уравнений поступательного и вращательного перемещений (рис. 3.3):

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3.1)$$

Векторы угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\epsilon}$, согласно п. 2.2,

направлены вдоль оси, проходящей через полюс, перпендикулярно плоскости фигуры (рис. 3.4, а).

Иногда направления $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ условно обозначают так, как изображено на рис. 3.4, б. Если направления $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают, то вращение ускоренное, если нет – то замедленное.

Так как вращательное перемещение не зависит от выбора полюса, то векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ свободные.

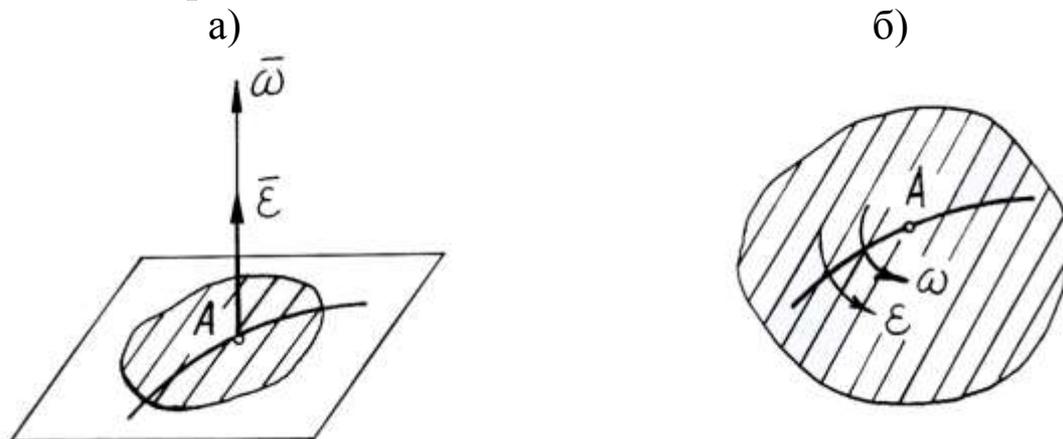


Рис. 3.4

3.2. Скорости точек плоской фигуры

Теорема 1. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса (скорости при поступательном движении) и скорости точки при вращательном движении фигуры вокруг полюса.

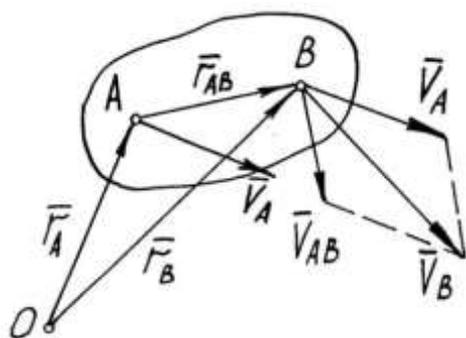


Рис. 3.5

Определим положение полюса и произвольной точки плоской фигуры векторно. Из рис. 3.5 следует, что

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}.$$

Тогда скорость точки B

$$\bar{V}_B = \dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{AB} = \bar{V}_A + \bar{V}_{AB}, \quad (3.2)$$

где \bar{V}_A – скорость полюса; \bar{V}_{AB} – скорость точки B при вращательном движении фигуры вокруг полюса A .

Согласно теории вращательного движения вращательная скорость \bar{V}_{AB} равна

$$\bar{V}_{AB} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} \quad (3.3)$$

и направлена перпендикулярно радиусу вращения точки B вокруг полюса A в сторону вращения.

Следствие (теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры). Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

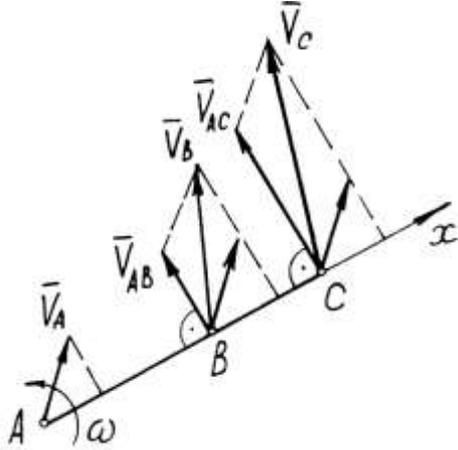


Рис. 3.6

Пусть ось x проходит через точки плоской фигуры A , B и C (рис. 3.6). Согласно (3.2) имеем

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}; \quad \vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{AC},$$
 так как \vec{V}_{AB} и \vec{V}_{AC} перпендикулярны оси x , то получим равенство проекций скоростей:

$$V_{Bx} = V_{Cx} = V_{Ax}. \quad (3.4)$$

3.3. Мгновенный центр скоростей и определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

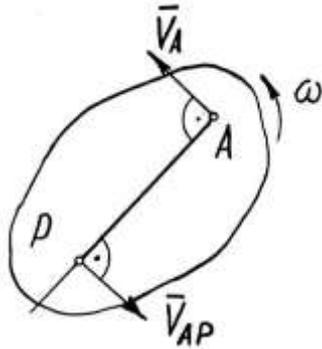


Рис. 3.7

Покажем существование такой точки. Пусть известна скорость некоторой точки \vec{V}_A плоской фигуры и угловая скорость $\bar{\omega}$ в некоторый момент времени (рис. 3.7). Примем точку A за полюс. Проведем к \vec{V}_A в точке A перпендикуляр так, чтобы направление поворота скорости \vec{V}_A к этому перпендикуляру совпадало с направлением вращения фигуры. Возьмем на перпендикуляре такую точку P , чтобы ее вращательная

скорость \vec{V}_{AP} по модулю равнялась скорости полюса \vec{V}_A , то есть $\vec{V}_{AP} = \vec{V}_A$. Согласно (3.2) $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{AP} = 0$. Таким образом, точка P в рассматриваемый момент времени является мгновенным центром скоростей. Положение точки P определяется из соотношения $V_{AP} = \omega \cdot AP = V_A$. Откуда $AP = V_A / \omega$.

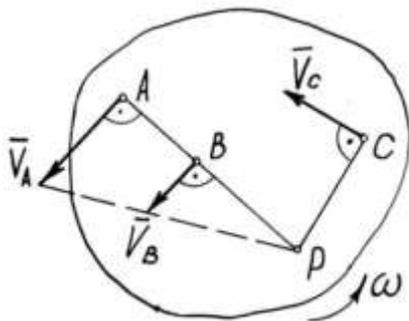


Рис. 3.8

Определим скорости точек A , B и C плоской фигуры, приняв за полюс мгновен-

ный центр скоростей P (рис. 3.8). На основании (3.2) имеем

$$\begin{aligned}\bar{V}_A &= \bar{V}_P + \bar{V}_{PA} = \bar{V}_{PA}; \\ V_A &= \omega \cdot PA; \quad \bar{V}_A \perp PA; \\ \bar{V}_B &= \bar{V}_P + \bar{V}_{PB} = \bar{V}_{PB}; \\ V_B &= \omega \cdot PB; \quad \bar{V}_B \perp PB; \\ \bar{V}_C &= \bar{V}_P + \bar{V}_{PC} = \bar{V}_{PC}; \\ V_C &= \omega \cdot PC; \quad \bar{V}_C \perp PC.\end{aligned}$$

Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, равный произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры.

Из вышеприведенных выражений для определения величин скоростей произвольных точек A , B и C следует, что

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA}, \quad \frac{V_C}{V_A} = \frac{PC}{PA}, \quad (3.5)$$

то есть модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей. Величина скорости точки плоской фигуры может быть также определена по формуле

$$V_B = \omega \cdot PB. \quad (3.6)$$

Таким образом, для определения скоростей точек плоской фигуры необходимо знать положение мгновенного центра скоростей и угловую скорость плоской фигуры.

Исходя из полученного распределения скоростей, можно сделать вывод, что в данный момент времени плоская фигура имеет только вращательное движение вокруг точки P , поэтому мгновенный центр скоростей P называют еще мгновенным центром вращения.

В процессе движения положение точки P непрерывно меняется как в неподвижной плоскости, так и в подвижной, движущейся вместе с плоской фигурой. Геометрическое место последовательных положений мгновенных центров скоростей называют соответственно **неподвижной и подвижной центроидой** или **полодией**.

Движение плоской фигуры в ее плоскости можно представить в виде качения без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Рассмотрим различные случаи определения положения мгно-

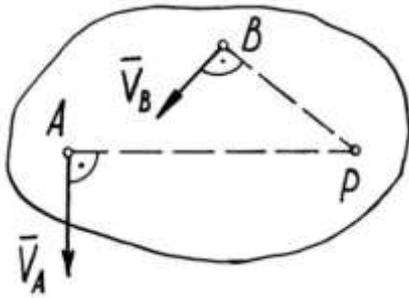


Рис. 3.9

венного центра скоростей.

Случай 1. $\vec{V}_A \nparallel \vec{V}_B$. Известны линии действия векторов скоростей двух точек A и B плоской фигуры, не параллельные друг другу (рис. 3.9). Тогда в соответствии с выше установленным направлением скоростей (см. рис. 3.8) можно утверждать, что мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к линиям действия скоростей в точках A и B .

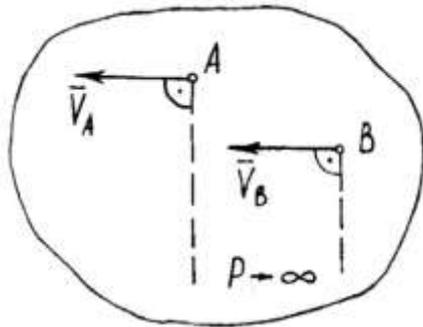


Рис. 3.10

Случай 2. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$. Скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны, и эти точки не лежат на общем перпендикуляре к скорости (рис. 3.10).

В этом случае точка пересечения перпендикуляров уходит в бесконечность, $PA = PB \rightarrow \infty$. Откуда следует, что $\omega = V_A / PA = V_B / PB = 0$, то есть движение плоской фигуры мгновенно поступательное.

Случай 3. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$. Скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны, эти точки лежат на общем перпендикуляре к скоростям (рис. 3.11). Известны величины скоростей.

В первых двух изображенных подслучаях (рис. 3.11, а, б) точка P находится как точка пересечения общего перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей. В третьем подслучае (рис. 3.11, в) $P \rightarrow \infty$, имеем мгновенно поступательное движение.

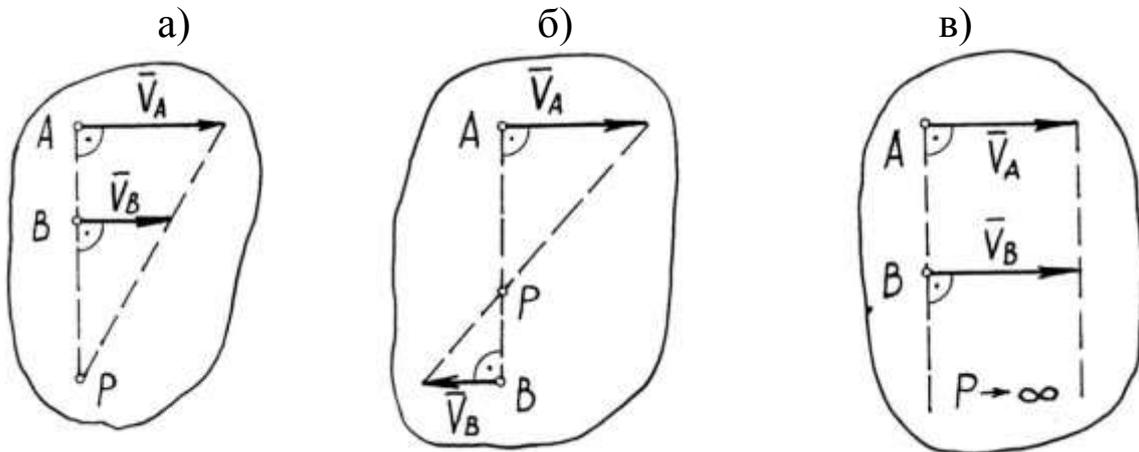


Рис. 3.11

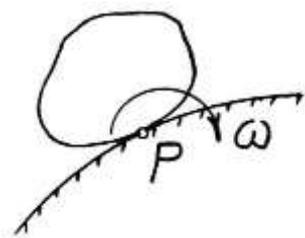


Рис. 3.12

Случай 4. Качение без скольжения твердого тела по неподвижной поверхности другого (рис. 3.12).

Мгновенный центр скоростей P , очевидно, находится в точке касания твердого тела с неподвижной поверхностью.

3.4. План скоростей

Допустим, что известны скорости точек A , B , C и D плоской фигуры (рис. 3.13, а). Отложим из произвольной точки O в выбранном масштабе вектора \overline{oa} , \overline{ob} , \overline{oc} , \overline{od} , равные скоростям этих точек, и соединим точки a , b , c , d отрезками прямых (рис. 3.13, б).

Построенная при точке O фигура называется **планом скоростей**.

Из плана скоростей следует

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}$$

или

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{ab}. \quad (*)$$

Принимаем точку A за полюс, можем записать

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB}. \quad (**)$$

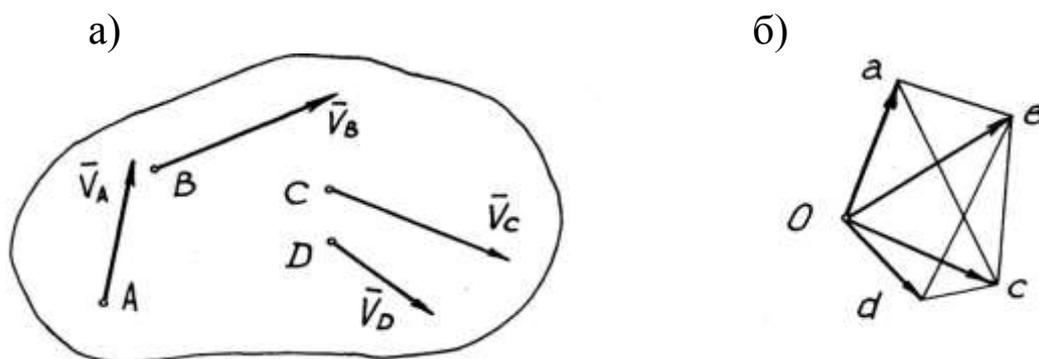


Рис. 3.13

Сопоставляя выражения (*) и (**), можно сделать вывод, что $\overline{ab} = \overline{V}_{AB}$. Аналогично $\overline{bc} = \overline{V}_{BC}$; $\overline{cd} = \overline{V}_{CD}$ и так далее.

Таким образом, каждый из отрезков плана скоростей, соединяющих концы скоростей точек плоской фигуры, равен вращательной скорости соответствующей точки. Поэтому

$$ab = AB \cdot \omega; \quad ab \perp AB;$$

$$bc = BC \cdot \omega; \quad bc \perp BC;$$

$$cd = CD \cdot \omega; \quad cd \perp CD.$$

По плану скоростей можно геометрически определить скорость любой точки плоской фигуры.

Для построения плана скоростей необходимо знать скорость одной точки плоской фигуры и прямую, по которой направлена скорость другой точки. Если скорость и прямая параллельны, то дополнительно необходимо знать модуль скорости и другой точки.

3.5. Ускорения точек плоской фигуры

Теорема. Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса (ускорения при поступательном движении) и ускорения точки при вращательном движении фигуры вокруг полюса.

Согласно теореме о скоростях точек плоской фигуры имеем

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$$

Тогда ускорение точки

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{V}}_B = \dot{\vec{V}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{AB}$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{AB} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\varepsilon} + \vec{a}_{AB}^{\omega} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}, \quad (3.7)$$

где \vec{a}_A – ускорение полюса A ; $\vec{a}_{AB}^{\varepsilon}$ – вращательное ускорение точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A ; \vec{a}_{AB}^{ω} – центростремительное ускорение точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A ; \vec{a}_{AB} – полное ускорение точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A .

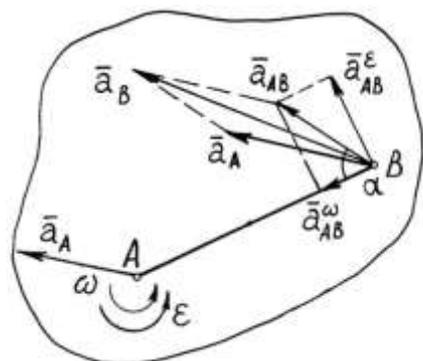


Рис. 3.14

Абсолютная величина ускорения \vec{a}_{AB} равна

$$|\vec{a}_{AB}| = \sqrt{(a_{AB}^{\varepsilon})^2 + (a_{AB}^{\omega})^2} = AB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.8)$$

Направления всех векторов ускорений изображены на рис. 3.14. Ускорение

\bar{a}_{AB} направлено под углом α к прямой AB , соединяющей полюс A с искомой рассматриваемой точкой B . Причем величина угла α определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{AB}^{\varepsilon}}{a_{AB}^{\omega}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.9)$$

3.6. Мгновенный центр ускорений

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

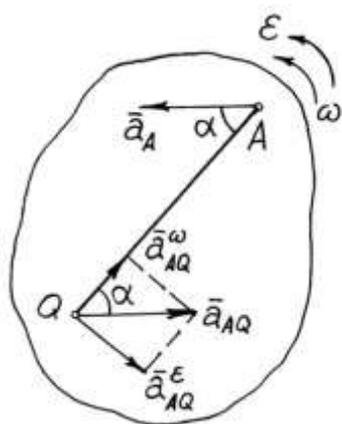


Рис. 3.15

Покажем существование такой точки. Пусть известно ускорение некоторой точки A плоской фигуры, угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ в некоторый момент времени (рис. 3.15).

Примем точку A за полюс. Проведем через точку A полупрямую в направлении $\bar{\varepsilon}$ под углом α , величина которого определяется по формуле (3.9). На проведенной полупрямой отложим отрезок

$$AQ = |\bar{a}_A| / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Тогда

$$|\bar{a}_{AQ}| = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{|\bar{a}_A| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = |\bar{a}_A|.$$

Из полученного, а также из геометрического построения следует, что $\bar{a}_{AQ} = -\bar{a}_A$. Тогда, в соответствии с (3.7), получим

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{AQ} = 0.$$

Таким образом, точка Q – мгновенный центр ускорений. Определим ускорения точек A , B и C плоской фигуры, приняв за полюс мгновенный центр ускорений (рис. 3.16).

Согласно (3.7) $\bar{a}_A = \bar{a}_{QA}$; $\bar{a}_B = \bar{a}_{QB}$; $\bar{a}_C = \bar{a}_{QC}$.

$$|\bar{a}_A| = |\bar{a}_{QA}| = QA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$|\bar{a}_B| = |\bar{a}_{QB}| = QB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$|\bar{a}_C| = |\bar{a}_{QC}| = QC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Из выше записанного следует пропорциональность величин ускорений точек расстояниям от них до мгновенного центра ускорений:

$$\frac{|\bar{a}_B|}{|\bar{a}_A|} = \frac{QB}{QA}, \quad \frac{|\bar{a}_C|}{|\bar{a}_A|} = \frac{QC}{QA}. \quad (3.10)$$

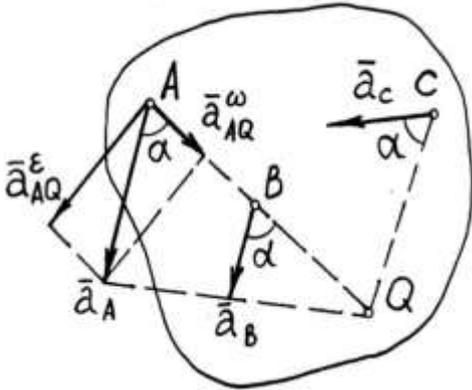


Рис. 3.16

Векторы ускорений точек составляют с отрезками, соединяющими центр ускорений, один и тот же угол α , причем такой, что $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \omega^2$.

В общем случае мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q являются различными точками. Эти точки совпадают, если плоское движение вырождается во вращательное вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим различные случаи определения положения мгновенного центра ускорений.

Случай 1. Известны ускорение какой-либо точки плоской фигуры

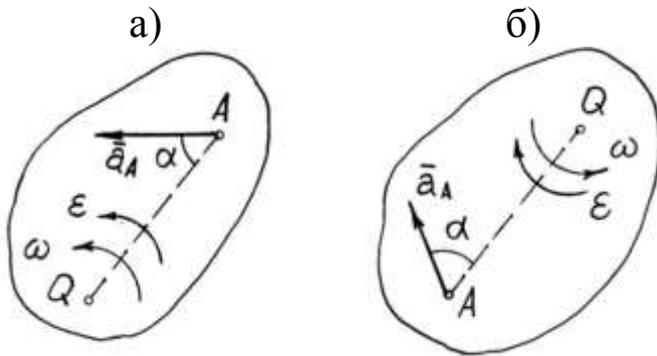


Рис. 3.17

углу \bar{a}_A , угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ (рис. 3.17).

Точка Q находится на отрезке, составляющем с направлением ускорения \bar{a}_A угол $\alpha = \operatorname{arctg}(\varepsilon / \omega^2)$, который отложен от ускорения в сторону $\bar{\varepsilon}$ на расстоянии

$$QA = |\bar{a}_A| / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

На рис. 3.17 приведены варианты ускоренного и замедленного вращений.

Случай 2. Известны ускорения двух точек плоской фигуры \bar{a}_A и \bar{a}_B .

а) $\bar{a}_A \parallel \bar{a}_B$ (рис. 3.18).

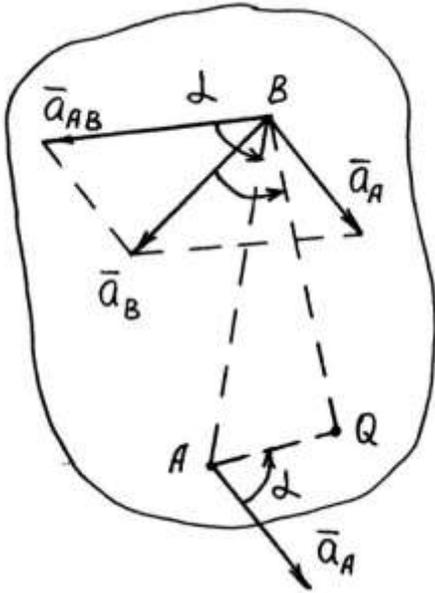


Рис. 3.18

Примем одну из точек за полюс, например точку A . Тогда

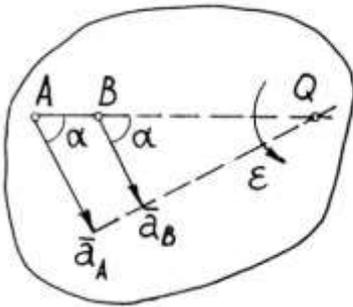
$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}.$$

Изобразим \bar{a}_B графически диагональю параллелограмма, из чертежа находим направление ускорения \bar{a}_{AB} . По чертежу находим угол α между \bar{a}_{AB} и отрезком AB , а также направление $\bar{\epsilon}$, отсчитывая угол α от \bar{a}_{AB} к AB . Отложим угол α в направлении $\bar{\epsilon}$ от ускорений \bar{a}_A и \bar{a}_B , проведем из точек A и B полупрямые до их пересечения. Точка пересечения и будет мгновенным центром ускорений Q .

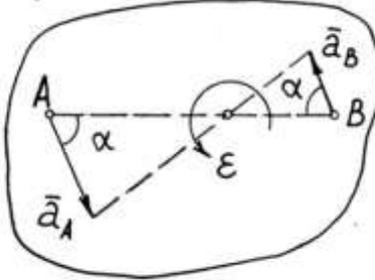
б) $\bar{a}_A \parallel \bar{a}_B$ (рис. 3.19).

Возможные варианты приведены на рис. 3.19.

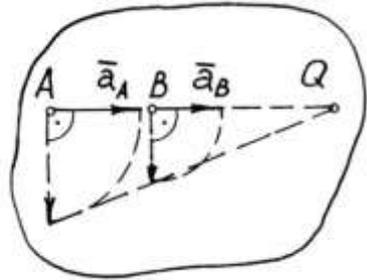
а) $\omega \neq 0, \epsilon \neq 0$



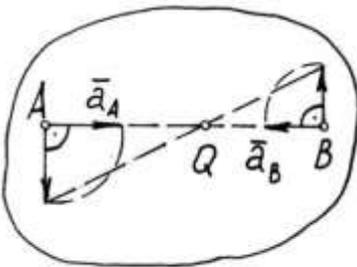
б) $\omega \neq 0, \epsilon \neq 0$



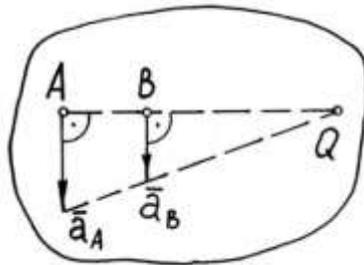
в) $\omega \neq 0, \epsilon = 0, \alpha = 0$



г) $\omega \neq 0, \epsilon = 0, \alpha = 0$



д) $\omega = 0, \epsilon \neq 0, \alpha = \pi/2$



е) $\bar{a}_A = \bar{a}_B = \dots$

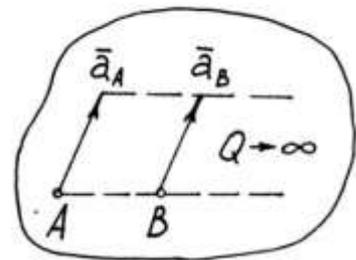


Рис. 3.19

3.7. Примеры решения задач

Пример 1. Определить скорость и ускорение поршня B и средней части шатуна (точка C) кривошипно-шатунного механизма

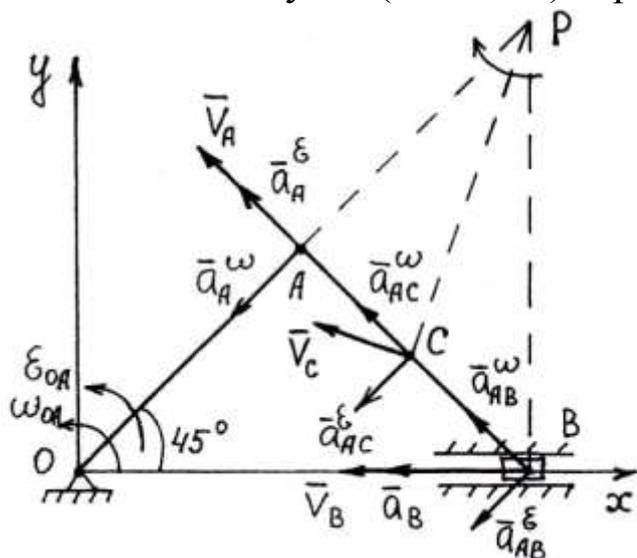


Рис. 3.20

поршневого строительного насоса в положении, указанном на кинематической схеме рис. 3.20. Известно, что $OA = AB = r = 0,3$; $\omega_{OA} = 1 \text{ c}^{-1}$; $\epsilon_{OA} = 2 \text{ c}^{-2}$.

Решение. Определим скорость точки A , как точки, совершающей вращательные движения вместе с кривошипом OA , $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 0,3 \text{ м/с}$.

Рассматривая плоское движение шатуна AB , определим по направлениям скоростей двух точек A и B его мгновенный центр скоростей P .

Тогда величина угловой скорости шатуна равна

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{0,3}{0,3} = 1 \text{ c}^{-1}.$$

Скорости точек B и C равны соответственно:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB = \omega_{AB} \sqrt{2}r = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,3 = 0,3\sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$\begin{aligned} V_C &= \omega_{AB} \cdot PC = \omega_{AB} \sqrt{(PB)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2PB \cdot \frac{r}{2} \cos \frac{\pi}{4}} = \\ &= 1 \cdot \sqrt{(\sqrt{2} \cdot 0,3)^2 + \left(\frac{0,3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,3 \cdot \frac{0,3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Примем точку A за плюс. Тогда ускорение точки B

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB} = \bar{a}_A^\epsilon + \bar{a}_A^\omega + \bar{a}_{AB}^\epsilon + \bar{a}_{AB}^\omega; \quad (*)$$

$$a_A^\epsilon = \epsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\omega = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1 \cdot 0,3 = 0,3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AB}^\omega = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1 \cdot 0,3 = 0,3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AB}^\epsilon = \epsilon_{AB} \cdot AB = ?$$

Выражение (*) содержит две неизвестные: величину ускорения \bar{a}_{AB}^ε и величину ускорения \bar{a}_B . Проектируя (*) на оси координат с учетом направлений, входящих в него ускорений, получим

$$x: -a_B = -a_A^\varepsilon \cos 45^\circ - a_A^\omega \cos 45^\circ - a_{AB}^\varepsilon \cos 45^\circ - a_{AB}^\omega \cos 45^\circ;$$

$$y: 0 = a_A^\varepsilon \sin 45^\circ - a_A^\omega \sin 45^\circ - a_{AB}^\varepsilon \sin 45^\circ - a_{AB}^\omega \sin 45^\circ.$$

Откуда

$$a_{AB}^\varepsilon = a_A^\varepsilon - a_A^\omega + a_{AB}^\omega = 0,6 - 0,3 + 0,3 = 0,6 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\varepsilon}{AB} = 2 \text{ с}^{-2};$$

$$a_B = (a_A^\varepsilon + a_A^\omega + a_{AB}^\varepsilon + a_{AB}^\omega) \cos 45^\circ = 0,9\sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

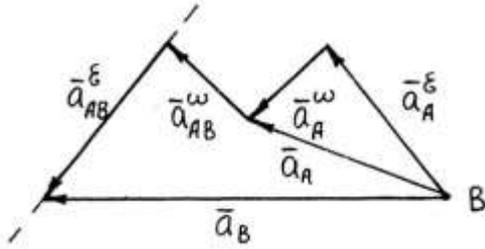


Рис. 3.21

Аналогичный результат можно получить, построив многоугольник скоростей в соответствии с уравнением (*) (рис. 3.21).

Ускорение точки C также можно найти методом проекций или геометрически:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^\varepsilon + \bar{a}_A^\omega + \bar{a}_{AC}^\varepsilon + \bar{a}_{AC}^\omega \quad (**)$$

$$a_{AC}^\varepsilon = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 2 \cdot 0,15 = 0,3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AC}^\omega = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 1^2 \cdot 0,15 = 0,15 \text{ м/с}^2.$$

Проектируя уравнение (**) на оси координат, получим

$$a_{cx} = -a_A^\varepsilon \cos 45^\circ - a_A^\omega \cos 45^\circ - a_{AC}^\varepsilon \cos 45^\circ - a_{AC}^\omega \cos 45^\circ;$$

$$a_{cy} = -a_A^\varepsilon \sin 45^\circ - a_A^\omega \sin 45^\circ - a_{AC}^\varepsilon \sin 45^\circ - a_{AC}^\omega \sin 45^\circ;$$

или

$$a_{cx} = -(0,6 + 0,3 + 0,3 + 0,15) \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,35 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ м/с}^2;$$

$$a_{cy} = (0,6 - 0,3 - 0,3 + 0,15) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,15 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ м/с}^2;$$

$$|\bar{a}_c| = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1,35^2 + 0,15^2} \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Используя исходные данные и отдельные результаты расчета примера 1, определить ускорение точки B в положении,

указанном на кинематической схеме рис. 3.22, если длина кривошипа $O_1B = 0,1$ м.

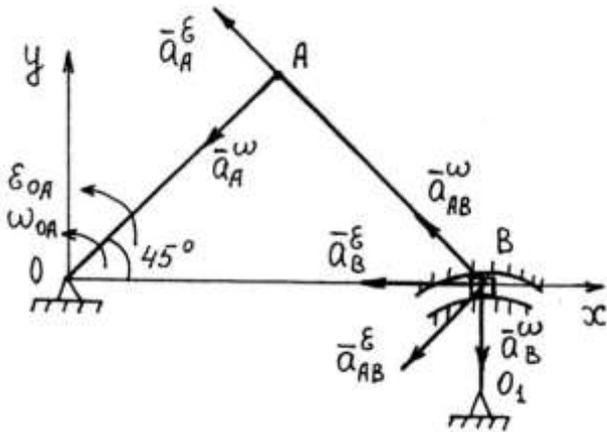


Рис. 3.22

Решение. Отличие предложенного примера от предыдущего заключается в том, что направление ускорения точки B неизвестно.

Рассматривая точку B принадлежащей шатуну AB и кривошипу O_1B , для определения ее ускорения можем записать следующие выражения:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\varepsilon + \bar{a}_A^\omega + \bar{a}_{AB}^\varepsilon + \bar{a}_{AB}^\omega; \quad (*)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^\varepsilon + \bar{a}_B^\omega. \quad (**)$$

Приравнявая (*) и (**), получим следующее векторное уравнение:

$$\bar{a}_B^\varepsilon + \bar{a}_B^\omega = \bar{a}_A^\varepsilon + \bar{a}_A^\omega + \bar{a}_{AB}^\varepsilon + \bar{a}_{AB}^\omega, \quad (***)$$

содержащее две неизвестные величины a_B^ε и a_{AB}^ε . Величины остальных ускорений и их направления известны:

$$a_B^\omega = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B = \left(\frac{V_B}{O_1B} \right)^2 \cdot O_1B = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{(0,3\sqrt{2})^2}{0,1} = 1,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\varepsilon = 0,6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\omega = 0,3 \text{ м/с}^2; \quad a_{AB}^\omega = 0,3 \text{ м/с}^2.$$

Проектируя уравнение (***) на оси координат, получим

$$x: -a_B^\varepsilon = -a_A^\varepsilon \cos 45^\circ - a_A^\omega \cos 45^\circ - a_{AB}^\varepsilon \cos 45^\circ - a_{AB}^\omega \cos 45^\circ;$$

$$y: -a_B^\omega = a_A^\varepsilon \sin 45^\circ - a_A^\omega \sin 45^\circ - a_{AB}^\varepsilon \sin 45^\circ - a_{AB}^\omega \sin 45^\circ.$$

Откуда

$$a_{AB}^\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{2}} a_B^\omega + a_A^\varepsilon - a_A^\omega + a_{AB}^\omega = \frac{2}{\sqrt{2}} 1,8 + 0,6 - 0,3 + 0,3 \approx 3,2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B^\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_A^\varepsilon + a_A^\omega + a_{AB}^\varepsilon + a_{AB}^\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,6 + 0,3 + 3,2 + 0,3) \approx 3,08 \text{ м/с}^2.$$

Модуль вектора ускорения точки B

$$|\bar{a}_B| = \sqrt{(a_B^\varepsilon)^2 + (a_B^\omega)^2} = \sqrt{(3,08)^2 + (1,8)^2} \text{ м/с}^2.$$

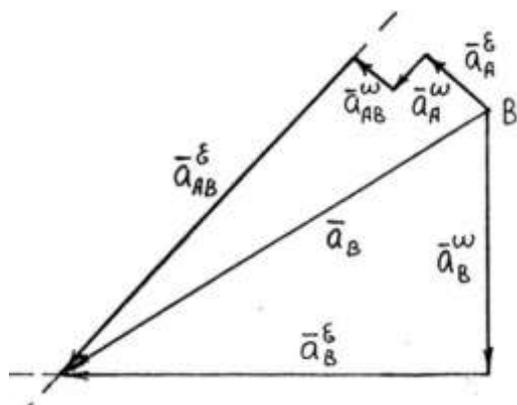


Рис. 3.23

Аналогичный результат можно получить, построив два многоугольника ускорений в соответствии с уравнениями (*) и (**), замкнув их одним и тем же вектором \bar{a}_B (рис. 3.23).

Пример 3. Определить скорость и ускорение точки B колеса радиуса $R = 0,5$ м, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности (рис. 3.24). Величина

скорости центра колеса в рассматриваемом положении равна $V_O = 2$ м/с², величина ускорения – $a_O = 1$ м/с².

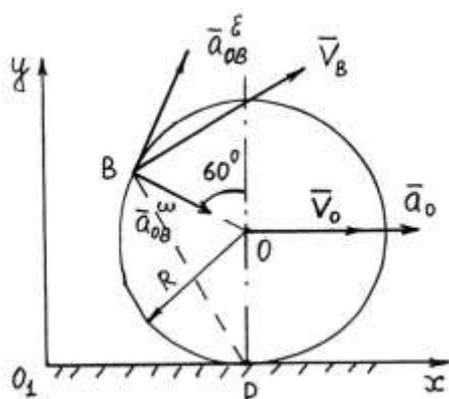


Рис. 3.24

Решение. Точка P – мгновенный центр скоростей. Величина угловой скорости колеса

$$\omega = \frac{V_O}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Величина скорости точки B

$$V_B = \omega \cdot PB = \omega \cdot 2R \cos 30^\circ = \omega \cdot R\sqrt{3} = 4 \cdot 0,5 \cdot 1,7 = 3,4 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки B

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{OB}^\epsilon + \bar{a}_{OB}^\omega. \quad (*)$$

Величина углового ускорения колеса

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_O}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{dV_O}{dt} = \frac{1}{R} a_O^\tau = \frac{a_O}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}^{-2}.$$

Определим величины неизвестных составляющих ускорения точки B :

$$a_{OB}^\epsilon = \varepsilon \cdot OB = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}^2; \quad a_{OB}^\omega = \omega^2 \cdot OB = 2^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Проектируя выражение (*) на оси координат, получим проекции и определим модуль искомого ускорения:

$$a_{Bx} = a_O + a_{OB}^\epsilon \cos 60^\circ + a_{OB}^\omega \cos 30^\circ = 1 + 1 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,85 \approx 8,3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{By} = a_{OB}^\epsilon \sin 60^\circ - a_{OB}^\omega \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,85 - 8 \cdot 0,5 \approx -3,15 \text{ м/с}^2;$$

$$|\bar{a}_B| = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{8,3^2 + 3,15^2} \approx 8,9 \text{ м/с}^2.$$

ГЛАВА 4. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Уравнения сферического движения твердого тела

Сферическим движением твердого тела называется такое движение, при котором одна точка остается неподвижной.

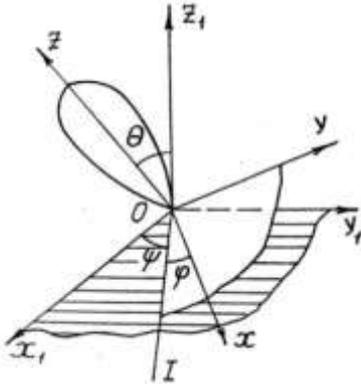


Рис. 4.1

Рассмотрим сферическое движение тела и введем в рассмотрение две системы отсчета: подвижную $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом, и неподвижную $Ox_1y_1z_1$ с началом в неподвижной точке O .

Линия OI пересечения неподвижной плоскости x_1Oy_1 с подвижной xOy называется **линией узлов**.

Положение тела, очевидно, однозначно определяется заданием трех независимых углов Эйлера: φ – **собственного вращения**; ψ – **прецессии**; θ – **нутации**.

Уравнения сферического движения можно представить в виде углов Эйлера как функции времени:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t). \quad (4.1)$$

4.2. Скорости точек. Мгновенная угловая скорость сферического движения

Определим положение произвольной точки тела M относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ радиусом-вектором (рис. 4.2):

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

В процессе движения твердого тела координаты x, y, z остаются постоянными, а единичные векторы, оставаясь постоянными по модулю, будут изменять свое направление. Тогда для скорости точки получим следующее выражение:

$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}.$$

Проекцию скорости на ось x можно записать в виде

$$V_x = \bar{V} \cdot \bar{i} = x\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} + y\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} + z\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}. \quad (*)$$

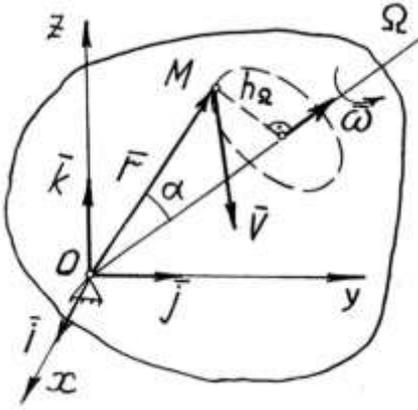


Рис. 4.2

Из равенства $\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$ следует $\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} = 0$, а из равенства $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$ следует $\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = 0$, откуда $\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} = -\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}$.

Подставляя в выражение (*), получим

$$V_x = z \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} - y \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}.$$

Путем циклической перестановки находим остальные проекции:

$$V_y = x \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} - z \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k}; \quad V_z = y \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} - x \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}.$$

Введем формально вектор $\bar{\omega}$ с проекциями:

$$\omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k}; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}; \quad \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}. \quad (4.2)$$

Тогда проекции скорости на оси координат подвижной системы отсчета можно представить в виде

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y; \quad V_y = \omega_z x - \omega_x z; \quad V_z = \omega_x y - \omega_y x, \quad (4.3)$$

а сам вектор скорости точки записать следующим образом:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (4.4)$$

Таким образом, скорость точки определяется такой же формулой, что и в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 2.3). При этом введенный нами вектор $\bar{\omega}$ играет роль угловой скорости тела. Формулы (4.2) показывают, что проекции вектора $\bar{\omega}$ являются функциями времени, и поэтому вектор $\bar{\omega}$, вообще говоря, будет менять со временем не только свою величину, но и ориентацию относительно тела. Поэтому $\bar{\omega}$ называется **мгновенной угловой скоростью тела**, а ось, вдоль которой он направлен в данный момент, — **мгновенной осью вращения тела**.

Уравнение мгновенной оси вращения можно найти как уравнение геометрического места точек, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Полагая в формулах (4.3) $V_x = V_y = V_z = 0$, получим

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что мгновенная ось вращения есть прямая, проходящая через начало координат, то есть через неподвижную точку тела (рис. 4.2).

Вектор скорости \bar{V} направлен по касательной к окружности

радиуса h_{Ω} , по которой в данный момент точка вращается вместе с телом вокруг мгновенной оси вращения Ω (рис. 4.2). Величина скорости в соответствии с (2.4) определяется по формуле

$$V = \omega r \sin \alpha = \omega h_{\Omega}. \quad (4.6)$$

В процессе движения твердого тела положение мгновенной оси вращения непрерывно меняется, и она описывает коническую поверхность с вершиной в точке O .

Геометрическое место последовательных положений мгновенной оси вращения называется **аксоидом** (соответственно, подвижным и неподвижным, относительно подвижной и неподвижной систем отсчета).

Точки тела, лежащие на мгновенной оси вращения, не имеют скорости. Вращение же тела вокруг этой оси вызывает и вращение подвижного аксоида. Поэтому сферическое движение тела можно представить как качение без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

4.3. Угловое ускорение. Ускорения точек при сферическом движении

По аналогии с вращательным движением угловое ускорение при сферическом движении определяется по формуле

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (4.7)$$

При сферическом движении меняется не только модуль, но и направление угловой скорости, поэтому из (4.7) следует, что прямые, вдоль которых направлены векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, различны (рис. 4.3). Прямая OE , по которой направлен вектор $\bar{\varepsilon}$, называется осью углового ускорения. Откладывая от неподвижной точки O векторы $\bar{\omega}$, соответствующие ряду последовательных моментов времени, и соединяя концы этих векторов, получим годограф вектора угловой скорости (рис. 4.3). Скорость точки, описывающей годограф, равна

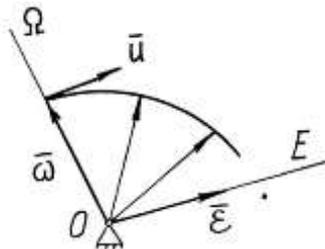


Рис. 4.3

мы, вдоль которых направлены векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, различны (рис. 4.3). Прямая OE , по которой направлен вектор $\bar{\varepsilon}$, называется осью углового ускорения. Откладывая от неподвижной точки O векторы $\bar{\omega}$, соответствующие ряду последовательных моментов времени, и соединяя концы этих векторов, получим годограф вектора угловой скорости (рис. 4.3). Скорость точки, описывающей годограф, равна

$$\bar{u} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}.$$

Теорема Ривальса. Ускорение любой точки твердого тела при сферическом движении равно геометрической сумме вращательного и осестремительного ускорений.

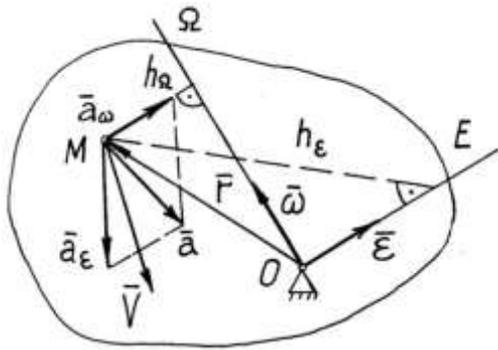


Рис. 4.4

а ускорение

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{a}_\varepsilon + \bar{a}_\omega, \quad (4.8)$$

где \bar{a}_ε – вращательное ускорение; \bar{a}_ω – осестремительное ускорение.

Величины ускорений \bar{a}_ε и \bar{a}_ω определяются по формулам

$$a_\varepsilon = \varepsilon r \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon h_\varepsilon;$$

$$a_\omega = \omega V \sin(\bar{\omega}, \bar{V}) = \omega V = \omega^2 h_\omega. \quad (4.9)$$

Векторы \bar{a}_ε и \bar{a}_ω не перпендикулярны друг к другу, поэтому модуль полного ускорения точки определим как длину диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах, по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2|\bar{a}_\varepsilon||\bar{a}_\omega| \cos(\bar{a}_\varepsilon, \bar{a}_\omega)}. \quad (4.10)$$

Из (4.10), как частный случай, следует формула для определения модуля полного ускорения точки при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Действительно, положив

$$h_\Omega = h_\varepsilon = R, \cos(\bar{a}_\varepsilon, \bar{a}_\omega) = 0,$$

получим $|\bar{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

4.4. Общий случай движения твердого тела

Рассмотрим общий случай движения свободного твердого тела, то есть тела, имеющего шесть степеней свободы. По аналогии с плоскопараллельным движением можно показать, что в общем случае движение можно разложить на два: поступательное вместе с полюсом и сферическое вокруг полюса.

Тогда уравнения движения представим в виде совокупности уравнений поступательного движения (уравнения движения полюса A) и сферического движения (углы Эйлера φ, ψ и θ как функции времени):

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); & y_A &= y_A(t); & z_A &= z_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t); & \psi &= \psi(t); & \theta &= \theta(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

а скорость \bar{V} и ускорение \bar{a} любой точки тела запишем, соответственно, в следующем виде:

$$\bar{V} = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad (4.12)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{a}_A + \bar{a}_\varepsilon + \bar{a}_\omega, \quad (4.13)$$

где \bar{V}_A, \bar{a}_A – соответственно скорость и ускорение полюса A ; $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ – соответственно, угловая скорость и угловое ускорение при сферическом движении относительно полюса; $\bar{a}_\varepsilon, \bar{a}_\omega$ – соответственно вращательное и осестремительное ускорения; \bar{r} – радиус-вектор точки относительно полюса A .

Можно также показать, что угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ свободного твердого тела являются свободными векторами, то есть сферическое движение не зависит от выбора полюса.

ГЛАВА 5. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

5.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

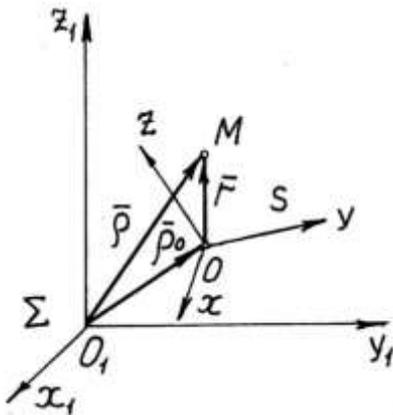


Рис. 5.1

Сложным движением материальной точки называется такое движение, при котором точка участвует в **двух или нескольких** одновременно совершаемых **движениях**.

Пусть точка M движется относительно некоторой неизменяемой среды S , которая в свою очередь движется относительно другой тоже неизменяемой среды Σ (рис. 5.1).

Будем рассматривать среду Σ как неподвижную. Тогда связанная с ней система координат $O_1x_1y_1z_1$ может быть названа неподвижной системой отсчета. Со средой S свяжем систему координат $Oxyz$, которую будем называть подвижной системой отсчета.

Движение точки M относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется **относительным движением**, а относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ – **абсолютным движением**. Движение среды S в среде Σ или движение точки M вместе с подвижной системой отсчета называется **переносным движением**.

Положение точки M в неподвижной системе отсчета определим радиус-вектором $\bar{\rho}$, в подвижной – радиус-вектором \bar{r} ; положение начала подвижной системы отсчета определим радиус-вектором $\bar{\rho}_0$. Как видно из рис. 5.1, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}$.

Скорости и ускорения точки в абсолютном, относительном и переносном движениях называют соответственно **абсолютными, относительными и переносными скоростями и ускорениями точки** и обозначают соответственно \bar{V} , \bar{a} , \bar{V}_r , \bar{a}_r ; \bar{V}_e , \bar{a}_e .

5.2. Теорема сложения скоростей при сложном движении точки

Теорема. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей.

Скорость точки

$$\bar{V} = \dot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \dot{\bar{r}} = \bar{V}_0 + \dot{\bar{r}}.$$

Радиус-вектор точки M в подвижной системе отсчета можно представить в виде

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} – единичные, переменные по направлению, векторы подвижной системы координат $Oxyz$.

Тогда

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}.$$

Так как векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} только вращаются, то производные от них равны вращательным скоростям их концов, то есть

$$\dot{\bar{j}} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}; \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}; \quad \dot{\bar{i}} = \bar{\omega}_e \times \bar{k},$$

где $\bar{\omega}_e$ – угловая скорость вращения подвижной среды S , то есть переносная скорость.

Таким образом,

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \tilde{\dot{\bar{r}}} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}$$

или

$$\dot{\bar{r}} = \tilde{\dot{\bar{r}}} + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{V}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}, \quad (5.1)$$

где $\tilde{\dot{\bar{r}}}$ – локальная производная.

Тогда окончательно для скорости точки получим выражение

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{V}_r = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что абсолютная скорость точки \bar{V} определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной \bar{V}_e и относительной \bar{V}_r скоростей, и ее модуль определяется по формуле

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_e||\bar{V}_r| \cos(\bar{V}_e^A, \bar{V}_r)}. \quad (5.3)$$

5.3. Теорема сложения ускорений при сложном движении точки

Теорема. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

С учетом (5.2) ускорение точки M можно записать в виде

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \dot{\bar{V}}_0 + \dot{\bar{\omega}}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{V}}_r = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{V}}_r. \quad (*)$$

Относительная скорость точки

$$\bar{V}_r = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}.$$

По аналогии с (5.1)

$$\dot{\bar{V}}_r = \tilde{\dot{\bar{V}}_r} + \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r = \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r.$$

Тогда выражение (*) примет вид

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{V}_r) + \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$$

или окончательно

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{a}_r + 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k, \quad (5.4)$$

где $\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$ – ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса \bar{a}_k характеризует совместный эффект вращательного движения подвижной среды и относительного движения точки.

Ускорение Кориолиса находится в соответствии с определением векторного произведения двух векторов (рис. 5.2).

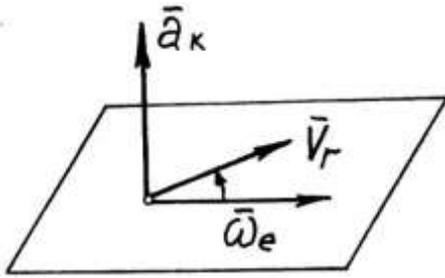


Рис. 5.2

Модуль ускорения Кориолиса

$$|\bar{a}_k| = 2|\bar{\omega}_e||\bar{V}_r|\sin(\bar{\omega}_e \wedge \bar{V}_r). \quad (5.5)$$

Ускорение $\bar{a}_k = 0$ в следующих случаях:

- а) $\bar{\omega}_e = 0$ (переносное движение – поступательное);
- б) $\bar{\omega}_e \parallel \bar{V}_r$.

5.4. Сложение поступательных и вращательных движений твердого тела

Рассмотрим сложение поступательных движений твердого тела.

Пусть тело движется поступательно в относительном движении со скоростью \bar{V}_r и переносном – со скоростью \bar{V}_e . Тогда по теореме сложения скоростей в соответствии с формулой (5.2) скорость любой точки твердого тела

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Так как все точки тела имеют одинаковую скорость, определяемую по вышеприведенной формуле, то результирующим движением будет также поступательное.

Рассмотрим сложение вращений твердого тела вокруг двух параллельных осей.

Случай 1. Вращения направлены в одну сторону.

Пусть твердое тело в переносном движении вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ и относительном движении с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ (рис. 5.3, а). Проведем через тело плоскость перпендикулярно осям вращения и обозначим через A и B точки пересечения осей с плоскостью. Рассмотрим движение отрезка AB (рис. 5.3, б) и в целом плоской фигуры, полученной в результате сечения твердого тела плоскостью (рис. 5.3, в).

В соответствии с теорией плоскопараллельного движения определим положение мгновенного центра скоростей P (рис. 5.3, в). Откуда следует, что результирующим движением будет вращатель-

ное движение вокруг параллельной мгновенной оси вращения, проходящей через точку P , с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

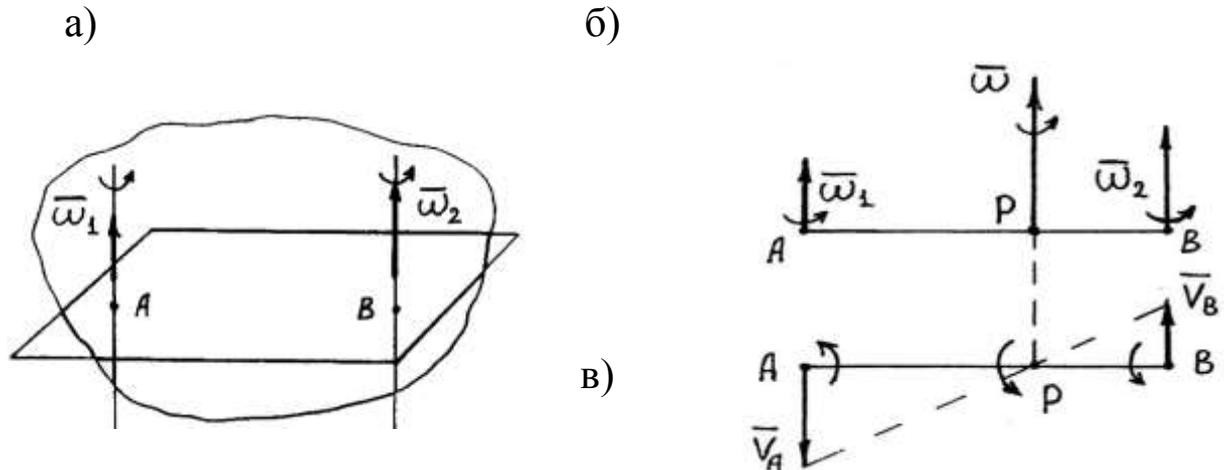


Рис. 5.3

Определим величину угловой скорости абсолютного вращения $\bar{\omega}$ и положение мгновенной оси этого вращения.

$$V_A = \omega_2 AB; \quad V_B = \omega_1 AB; \quad \omega = V_A / AP = V_B / BP.$$

Откуда

$$\omega = \frac{V_A + V_B}{AP + BP} = \frac{(\omega_2 + \omega_1)AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2. \quad (5.6)$$

$$\omega = \frac{\omega_2 AB}{AP} = \frac{\omega_1 AB}{BP}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_2}{AP} = \frac{\omega_1}{BP}. \quad (5.7)$$

Случай 2. Вращения направлены в разные стороны и $\omega_2 > \omega_1$ (рис. 5.4, а и б).

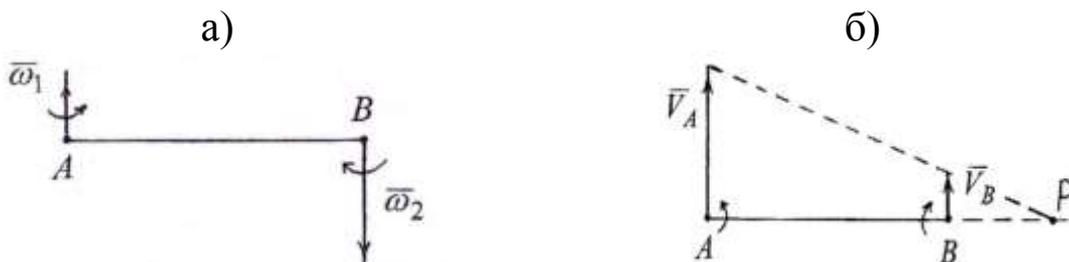


Рис. 5.4

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим

$$\omega = \frac{V_A - V_B}{AP - BP} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)AB}{AB}. \quad (5.8)$$

$$\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_2}{AP} = \frac{\omega_1}{BP}. \quad (5.9)$$

То есть результирующим движением будет также вращательное движение вокруг параллельной оси, проходящей через точку P с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

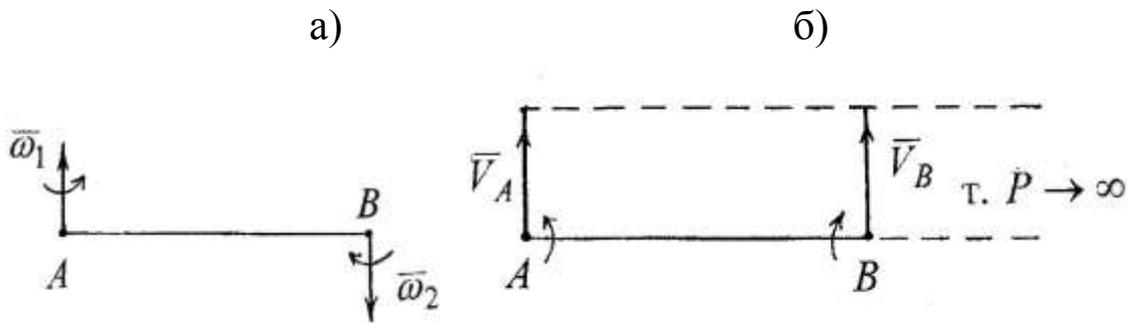


Рис. 5.5

Случай 3. Пара вращений: $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$ (рис. 5.5, а и б).

В соответствии с предыдущим случаем получим $\bar{V}_A = \bar{V}_B$, и мгновенный центр скоростей P находится в бесконечности.

Таким образом, результирующим движением будет поступательное движение.

Нетрудно показать справедливость обратного: всякое поступательное движение можно представить в виде пары вращений.

Несложно доказать, что скорость любой точки твердого тела равна моменту пары угловых скоростей, то есть

$$\bar{V} = \overline{AB} \times \bar{\omega}_2 = \overline{BA} \times \bar{\omega}_1. \quad (5.10)$$

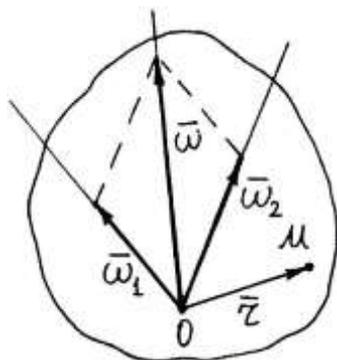


Рис. 5.6

Рассмотрим сложение вращений твердого тела вокруг двух пересекающихся осей (рис. 5.6).

Точка пересечения двух осей O неподвижная. Отсюда следует, что движение тела можно рассматривать как сферическое. Тогда скорость произвольной точки M

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}; & \vec{V}_2 &= \vec{\omega}_2 \times \vec{r}; \\ \vec{V} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (5.11)$$

Таким образом, результирующим будет вращательное движение вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Если тело одновременно участвует в поступательном движении со скоростью \vec{V} и вращательном с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то в зависимости от взаимного расположения возможны следующие случаи.

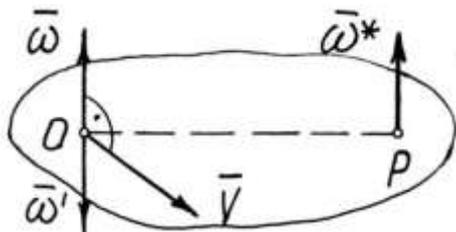


Рис. 5.7

Случай 1. $\vec{V} \perp \vec{\omega}$ (рис. 5.7).

Поступательное движение представим в виде пары вращений $(\vec{\omega}', \vec{\omega}^*)$, причем $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$. Тогда, очевидно, абсолютным движением будет вращательное с угловой скоростью $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$ вокруг

мгновенной оси вращения, отстоящей от заданной оси на расстоянии $OP = V/\omega$.

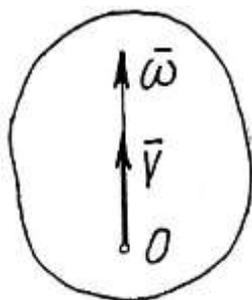


Рис. 5.8

Случай 2. $\vec{V} \parallel \vec{\omega}$. **Винтовое движение** (рис. 5.8).

При винтовом движении тело движется поступательно параллельно оси винтового движения и вращается вокруг этой оси. Винтовое движение не приводится к какому-либо одному простому эквивалентному движению.

Случай 3. \bar{V} не $\perp \bar{\omega}$ (рис. 5.9).

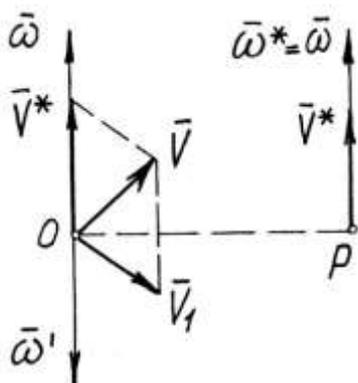


Рис. 5.9

Разложим вектор \bar{V} на два составляющих вектора \bar{V}_1 и \bar{V}^* , взаимно перпендикулярных друг к другу, причем вектор \bar{V}^* направим вдоль вектора $\bar{\omega}$.

Аналогично первому рассмотренному случаю вектор \bar{V}_1 представим в виде пары векторов $(\bar{\omega}', \bar{\omega}^*)$. Тогда, согласно рис. 5.9, получим мгновенное винтовое движение с поступательной скоростью \bar{V}^* и вращательной $\bar{\omega}^* = \bar{\omega}$

вокруг мгновенной оси вращения, отстоящей от заданной оси вращения на расстоянии $OP = V_1 / \omega$.

В заключение следует подчеркнуть, что случаи сложного движения твердого тела рассмотрены без достаточно подробных пояснений, учитывая статические аналогии в кинематике: угловой скорости $\bar{\omega}$ соответствует сила \bar{F} , а скорости поступательного движения \bar{V} , как характеристике пары вращений, соответствует момент \bar{M} пары сил.

5.5. Примеры решения задач

Пример 1. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при ее сложном движении (рис. 5.10) в момент времени $t = 1$ с, если известно, что тело D движется поступательно

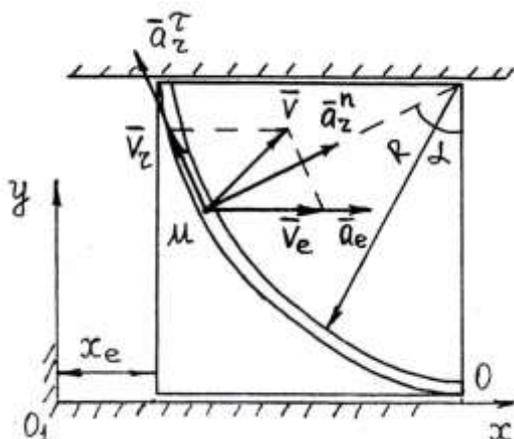


Рис. 5.10

по закону $x_e = 0,6t^2$ (м) и точка M движется в теле D по дуге окружности радиуса $R = 0,12$ (м) по закону $OM = S_r = 0,04\pi t^3$ (м).

Решение. Определим положение точки M в заданный момент времени.

$$OM|_{t=1\text{с}} = 0,04\pi \cdot 1^3 = 0,04\pi \text{ (м)};$$

$$\alpha = \frac{OM}{R} = \frac{0,04\pi}{0,12} = \frac{\pi}{3}.$$

Величина переносной скорости

$$V_e = \dot{x}_e = 1,2t;$$

при $t = 1$ с $V_e = 1,2$; м/с.

Величина относительной скорости

$$V_r = \dot{S}_r = 0,12\pi t^2;$$

при $t = 1$ с $V_r = 0,12\pi$; м/с.

Абсолютная скорость (рис 5.10)

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Модуль абсолютной скорости M

$$\begin{aligned} |\bar{V}| &= \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_e||\bar{V}_r|\cos(\bar{V}_e, \bar{V}_r)} = \\ &= \sqrt{1,2^2 + (0,12\pi)^2 + 2 \cdot 1,2 \cdot 0,12\pi \cos(\pi - \alpha)} \approx 1,06 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Абсолютное ускорение точки M

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k. \quad (*)$$

Величина переносного ускорения

$$a_e = \ddot{x}_e = \dot{V}_e = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Величина относительного касательного ускорения

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 0,24\pi t;$$

при $t = 1$ с $a_r^\tau = 0,24$ м/с².

Величина относительного нормального ускорения

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{(0,12\pi t^2)^2}{0,12};$$

при $t = 1$ с $a_r^n = 0,12\pi^2$ м/с².

Ускорение Кориолиса $a_k = 0$, так как переносное движение поступательное ($\bar{\omega}_e = 0$).

Проектируя уравнение (*) на оси координат с учетом направлений составляющих ускорений (рис. 5.10), определим проекции и модуль абсолютного ускорения точки:

$$a_x = a_e - a_r^\tau \cos \alpha + a_r^n \sin \alpha = 1,2 + 0,24\pi \cdot 0,5 + 0,12\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = a_r^\tau \sin \alpha + a_r^n \cos \alpha = 0,24\pi \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,12\pi^2 \cdot 0,5 \approx 0,9 \text{ м/с}^2.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1,8^2 + 0,9^2} \approx 2 \text{ м/с}^2.$$

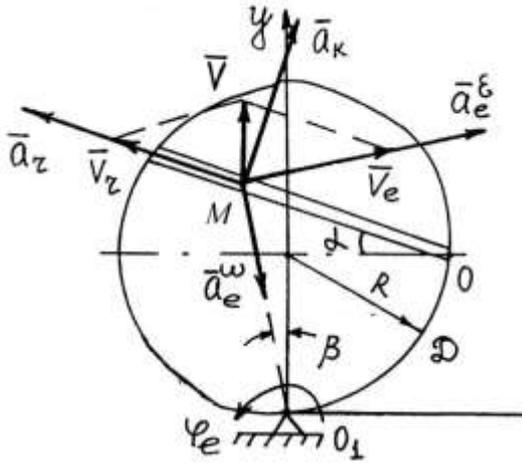


Рис. 5.11

Пример 2. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при ее сложном движении (рис. 5.11) в момент времени $t = 1$ с, если известно, что тело D движется вращательно по закону $\varphi_e = 3t - 2t^2$ (рад) и точка M движется в теле D прямолинейно по закону $OM = S_r = 5t^3$ (м). Радиус тела вращения $R = 1$ м, угол $\alpha = \pi/6$ (рад).

Решение. Определим положение точки M в заданный момент времени:

$$OM|_{t=1\text{с}} = 5 \cdot 1^3 / 3 = 5/3 \text{ м.}$$

Из треугольника O_1OM следует

$$\begin{aligned} O_1M &= \sqrt{OM^2 + O_1O - 2OM \cdot O_1O \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \sqrt{2} \cos \frac{5}{12} \pi} \approx 1,9 \text{ м.} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)}{OM} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{O_1M}.$$

Откуда

$$\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{OM}{O_1M} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{3 \cdot 1,9} \sin \frac{5}{12} \pi \approx 0,85, \quad \beta = 0,07\pi.$$

Абсолютная скорость точки

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Величина переносной скорости

$$V_e = \dot{\varphi}_e \cdot O_1M = (3 - 4t) \cdot O_1M;$$

при $t = 1$ с $V_e = (3 - 4) \cdot 1,9 = -1,9$ м/с.

Величина относительной скорости

$$V_r = \dot{S}_r = 5t^2;$$

при $t = 1$ с $V_r = 5$ м/с.

Модуль абсолютной скорости точки M , учитывая направления ее составляющих (рис. 5.11),

$$\begin{aligned} |\bar{V}| &= \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_e||\bar{V}_r|\cos(\pi - \alpha - \beta)} = \\ &= \sqrt{1,9^2 + 5^2 + 2 \cdot 1,9 \cdot 5 \cos(\pi - \frac{\pi}{4} - 0,07\pi)} \approx 4,3 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Абсолютное ускорение точки M

$$\bar{a} = \bar{a}_e^\varepsilon + \bar{a}_e^\omega + \bar{a}_k. \quad (*)$$

Величина вращательного переносного ускорения

$$a_e^\varepsilon = \varepsilon_e \cdot O_1M = \ddot{\phi}_e \cdot O_1M = -4 \cdot O_1M;$$

при $t = 1$ с $a_e^\varepsilon = -4 \cdot 1,9 = 7,6$ м/с².

Величина центростремительного переносного ускорения

$$a_e^\omega = \omega_e^2 \cdot O_1M = (3 - 4t^2) \cdot O_1M;$$

при $t = 1$ с $a_e^\omega = (3 - 4)^2 \cdot 1,9 = 1,9$ м/с².

Величина относительного ускорения

$$a_r = \ddot{S}_r = \dot{V}_r = 10t;$$

при $t = 1$ с $a_r = 10$ м/с².

Величина ускорения Кориолиса

$$a_k = 2|\bar{\omega}_e||\bar{V}_r|\sin(\bar{\omega}_e, \wedge V_r);$$

при $t = 1$ с $a_k = 2 \cdot 1 \cdot 5 \sin \frac{\pi}{2} = 10$ м/с².

Проектируя уравнение (*) на оси координат с учетом направлений составляющих ускорений (рис. 5.11), определим проекции и модуль абсолютного ускорения точки M :

$$\begin{aligned} a_x &= a_e^\varepsilon \cos \beta + a_e^\omega \sin \beta - a_r \cos \alpha + a_k \sin \alpha = \\ &= 7,6 \cos 0,07\pi + 1,9 \sin 0,07\pi - 10 \cos \frac{\pi}{6} + 10 \sin \frac{\pi}{6} \approx 4,29 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= a_e^\varepsilon \sin \beta - a_e^\omega \cos \beta + a_r \sin \alpha + a_k \cos \alpha = \\ &= 7,6 \sin 0,07\pi - 1,9 \cos 0,07\pi + 10 \sin \frac{\pi}{6} + 10 \cos \frac{\pi}{6} \approx 13,3 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4,29^2 + 13,3^2} \approx 14,0 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3. Шаровая дробилка состоит из полого шара II (в котором находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси CD , с заклиненным на нем коническим зубчатым

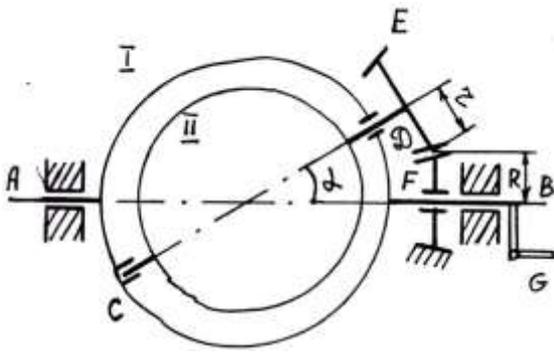


Рис. 5.12

колесом E радиуса r . Ось CD сидит в подшипниках в раме I , составляющей одно целое с осью AB и приводящейся во вращение при помощи либо рукоятки G , либо электродвигателя. Колесо E сцепляется с неподвижным колесом F радиуса R (рис. 5.12). Определить угловые характеристики шаровой дробилки, если ось AB вращается с постоянной

угловой скоростью $\bar{\omega}_I$, а угол между осями AB и CD равен α .

Решение. Шаровая дробилка находится в двух вращениях вокруг пересекающихся осей AB и CD с угловыми скоростями $\bar{\omega}_I$ и $\bar{\omega}_{II}$. Причем ось AB имеет постоянное направление, а направление оси CD непрерывно меняется. Отсюда следует, что вектор $\bar{\omega}_{II}$ – переменный вектор: $\bar{\omega}_{II} = \omega_{II} \cdot \bar{k}$, где \bar{k} – единичный вектор, направленный вдоль оси вращения CD . Величина вектора $\bar{\omega}_{II}$, очевидно, равна

$$\omega_{II} = \frac{\omega_I R}{r}.$$

Абсолютная угловая скорость результирующего вращения

$$\bar{\omega} = \omega_I + \omega_{II}.$$

Модуль абсолютной угловой скорости шаровой дробилки

$$|\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_I^2 + \omega_{II}^2 + 2\omega_I \omega_{II} \cos \alpha} = \frac{\omega_I}{r} \sqrt{r^2 + R^2 + Rr \cos \alpha}.$$

Абсолютное угловое ускорение шаровой дробилки

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_I + \dot{\bar{\omega}}_{II} = \dot{\bar{\omega}}_{II} = \frac{\omega_I R}{r} \dot{\bar{k}} = \frac{\omega_I R}{r} \bar{\omega}_I \times \bar{k}.$$

Модуль абсолютного углового ускорения

$$|\bar{\varepsilon}| = \frac{\omega_I R}{r} |\bar{\omega}_I| |\bar{k}| \sin \alpha = \frac{\omega_I^2 R}{r} \sin \alpha.$$

ДИНАМИКА

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные законы динамики

1. Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1.1)$$

где \bar{F} – сила, действующая на точку, Н; \bar{a} – ускорение, м/с²; m – коэффициент пропорциональности (масса точки), кг.

При поступательном движении твердого тела, которое можно рассматривать как движение точки, масса является мерой инертности тела и в классической механике одинакова для движущегося и покоящегося тела.

Уравнение (1.1) называется **основным уравнением динамики**.

Применяя уравнение (1.1) к точке весом \bar{P} и учитывая, что ускорение \bar{a} равно ускорению силы тяжести \bar{g} , получим $\bar{P} = m\bar{g}$.

3. Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное по величине, противоположно направленное противодействие.

Этот закон говорит о том, что если какое-либо тело действует на другое с какой-то силой, то и второе тело действует на первое с такой же по величине силой, но противоположно направленной и лежащей с ней на одной прямой.

4. Закон независимости действия сил. Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме:

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n. \quad (1.2)$$

Учитывая (1.1), выражение (1.2) можно записать в виде

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \dots + m\bar{a}_n \quad \text{или} \quad \bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n. \quad (1.3)$$

Таким образом, закон независимости действия сил равносильен

утверждению, что ускорение \bar{a} , получаемое материальной точкой от одновременно действующих на нее n сил, равно геометрической сумме ускорений $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, сообщаемых этой точке каждой из сил в отдельности.

1.2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки

Проектируя основное уравнение динамики (1.1) или уравнение (1.2) на оси декартовой системы координат, получим три скалярных уравнения:

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y; \quad m\ddot{z} = Z, \quad (1.4)$$

где x, y, z – координаты точки (уравнения движения); X, Y, Z – проекции равнодействующей \bar{F} на оси координат.

Уравнения (1.4) называются **дифференциальными уравнениями движения свободной материальной точки**.

Спроектировав уравнение (1.1) на оси естественной системы координат, получим дифференциальные уравнения движения точки в естественных координатах:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_\tau; \quad m \frac{1}{\rho} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = F_n; \quad O = F_b, \quad (1.5)$$

где S – дуговая координата; F_τ, F_n, F_b – проекции силы или равнодействующей на касательную к траектории, главную нормаль и бинормаль.

Используя уравнения (1.4) или (1.5), можно решать две задачи динамики точки.

Первая задача динамики. Зная массу точки m и уравнения ее движения $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, определить модуль и направление равнодействующей \bar{F} сил, приложенных к точке.

Задача решается дифференцированием следующим образом:

$$X = m\ddot{x}; \quad Y = m\ddot{y}; \quad Z = m\ddot{z}; \quad |\bar{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\bar{F}, \bar{i}) = X/|\bar{F}|; \quad \cos(\bar{F}, \bar{j}) = Y/|\bar{F}|; \quad \cos(\bar{F}, \bar{k}) = Z/|\bar{F}|.$$

Вторая задача динамики (основная). Зная равнодействующую \bar{F} сил, действующих на точку, ее массу m , а также начальное положение точки и ее начальную скорость, определить уравнения

движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Задача решается интегрированием дифференциальных уравнений движения. В результате первого интегрирования уравнений (1.4) получаем первый интеграл в виде проекций скоростей как функций времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

После интегрирования уравнений (1.6) общий интеграл системы уравнений (1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 определяются из начальных условий:

$$\begin{aligned}\text{при } t = t_0 = 0 \quad x &= x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0,\end{aligned}\tag{1.8}$$

где x_0, y_0, z_0 – начальные координаты точки; $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – проекции начальной скорости.

Подставляя начальные условия (1.8) в выражения (1.6) и (1.7), получим в общем случае систему шести алгебраических уравнений для определения шести постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 .

Аналогично рассматривается решение указанных задач в других системах координат и при других способах задания движения точки.

1.3. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки

Рассмотрим движение точки по шероховатой неподвижной поверхности, которая задана уравнением $f(x, y, z) = 0$ (рис. 1.1).

Основное уравнение динамики точки

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}},$$

где \bar{N} – нормальная реакция поверхности; $\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения.

Проектируя записанное векторное уравнение на оси координат, получим

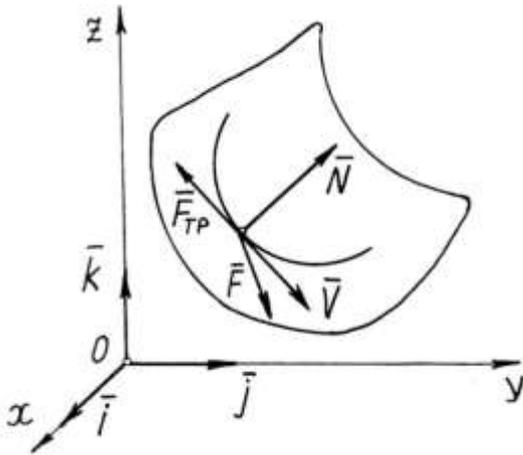


Рис. 1.1

$$m\ddot{x} = X + N_x + F_{\text{тр}x};$$

$$m\ddot{y} = Y + N_y + F_{\text{тр}y};$$

$$m\ddot{z} = Z + N_z + F_{\text{тр}z}.$$

Проекция нормальной реакции

$$N_x = N \cos(\bar{N}, \bar{i});$$

$$N_y = N \cos(\bar{N}, \bar{j});$$

$$N_z = N \cos(\bar{N}, \bar{k}).$$

Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\cos(\bar{N}, \bar{i}) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$\cos(\bar{N}, \bar{j}) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\cos(\bar{N}, \bar{k}) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\text{где } \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Тогда проекции нормальной реакции можно представить в виде

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где $\lambda = N/\Delta f$ называется **множителем Лагранжа**.

Проекцию силы трения на ось x можно записать в виде

$$F_{\text{тр}x} = -F_{\text{тр}} \cos(\bar{V}, \bar{i}) = -F_{\text{тр}} \frac{V_x}{V} = -F_{\text{тр}} \frac{\dot{x}}{V}.$$

Аналогично запишем две другие проекции:

$$F_{\text{тр}y} = -F_{\text{тр}} \frac{\dot{y}}{V}; \quad F_{\text{тр}z} = -F_{\text{тр}} \frac{\dot{z}}{V}.$$

Тогда в окончательной форме дифференциальные уравнения

движения точки по шероховатой поверхности примут следующий вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F_{\text{тр}}}{V} \dot{x}; \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F_{\text{тр}}}{V} \dot{y}; \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F_{\text{тр}}}{V} \dot{z}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) называют **дифференциальными уравнениями Лагранжа первого рода** для движения несвободной материальной точки.

Если за оси координат взять естественные оси, то дифференциальные уравнения движения примут вид

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_{\tau} - F_{\text{тр}}; \quad m \frac{1}{\rho} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = F_n + N; \quad 0 = F_b.$$

1.4. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

По аналогии с кинематикой сложного движения точки рассматриваем относительное движение точки в среде S , движущейся в свою очередь относительно другой среды Σ , принимаемой за неподвижную. Тогда основное уравнение динамики для абсолютного движения точки относительно неподвижной среды Σ с учетом теоремы Кориолиса запишется в виде

$$m(\bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k) = \bar{F}$$

или

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (1.10)$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ и $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$ называют **переносной и кориолисовой силами инерции**, а переносное \bar{a}_e и кориолисово ускорение \bar{a}_k определяют по формулам кинематики.

Уравнение (1.10) называют **основным уравнением динамики относительного движения точки**.

Проектируя (1.10) на оси декартовой системы координат $Oxyz$, неизменно связанные с подвижной средой S , получим дифференци-

альные уравнения относительного движения материальной точки:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m\ddot{y} &= Y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m\ddot{z} &= Z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, в отличие от абсолютного относительное движение точки будет дополнительно определяться еще переносной и кориолисовой силами инерции.

С точки зрения человека, находящегося в неподвижной среде Σ и наблюдающего относительное движение в среде S как бы со стороны, силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ фиктивны и их появление в уравнениях относительного движения объясняется только нашим желанием придать этим уравнениям тот же вид, как и уравнениям абсолютного движения. Однако наблюдателю, находящемуся внутри среды S , эти силы представляются как вполне реальные силы, влияющие как на движение самого наблюдателя, так и на движение всех окружающих его предметов.

Из уравнения (1.10) как частный случай можно получить векторное уравнение относительного равновесия точки. Если точка находится в покое относительно подвижной системы отсчета, то относительная скорость $\bar{V}_r = 0$ и относительное ускорение $\bar{a}_r = 0$. Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0.$$

1.5. Принцип относительности Галилея

Представляет интерес рассмотреть частный случай относительного движения в так называемой **инерциальной системе отсчета**, под которой понимают систему отсчета $Oxyz$, неизменно связанную с подвижной средой S , каждая точка которой движется прямолинейно и равномерно. В случае такого движения, очевидно, $\bar{a}_e = 0$ и $\bar{a}_k = 0$. Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F}, \quad (1.12)$$

то есть такой же вид, как и уравнение абсолютного движения точки. Этот результат получил название **принципа относительности классической механики** или **принципа относительности Галилея**.

Принцип относительности Галилея. Во всех инерциальных системах отсчета движение материальной точки происходит по одному и тому же закону и при том по такому же, как и в абсолютно неподвижной системе.

Справедливость этого принципа хорошо известна из нашей повседневной практики. Так, находясь в каюте теплохода, мы не можем установить, не взглянув в окно, стоит ли теплоход на месте или же движется инерциально.

Принцип относительности Галилея имеет весьма важное значение, ибо он показывает беспочвенность всяких попыток установления абсолютной системы отсчета в полном смысле этого слова. Он послужил исходной точкой при создании специальной теории относительности.

1.6. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения

Общие рекомендации к интегрированию. Рассмотрим основные приемы решения (интегрирования) дифференциальных уравнений движения (1.4), ограничиваясь случаем получения их решения (1.7) в виде

$$x = x(t, C_1, C_2); \quad y = y(t, C_3, C_4); \quad z = z(t, C_5, C_6).$$

Основной прием – применение метода разделения переменных и других, приводимых к нему. Суть данного приема заключается в понижении порядка каждого из дифференциальных уравнений (1.4), приведении уравнения к двум переменным, разделении переменных на левую и правую части уравнения и интегрировании этих частей по соответствующим переменным. В результате первого интегрирования получают проекции скоростей точки на оси координат в виде функций времени или координат, то есть первые интегралы. Затем проекции скоростей представляют в виде производных по времени, то есть записывают в виде дифференциальных уравнений первого порядка. Разделяют переменные и интегрируют. Получают координаты точки в виде функций времени, то есть вторые интегралы.

Сложность интегрирования дифференциальных уравнений (1.4) определяется сложностью их правых частей. На примере интегрирования одного уравнения рассмотрим наиболее простейшие типовые случаи.

1. $m\ddot{x} = X = \text{const}$.

$$m \frac{dV_x}{dt} = X; \quad m dV_x = X dt; \quad m \int dV_x = \int X dt + C_1;$$

$$mV_x = Xt + C_1; \quad m \frac{dx}{dt} = Xt + C_1;$$

$$mdx = (Xt + C_1)dt; \quad mx = X \frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

2. $m\ddot{x} = X(V_x)$.

$$m \frac{dV_x}{dt} = X(V_x); \quad m \frac{dV_x}{X(V_x)} = dt; \quad m \int \frac{dV_x}{X(V_x)} = t + C_1.$$

После интегрирования получаем выражение для V_x в виде некоторой функции времени $V_x = f(t, C_1)$.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, C_1); \quad dx = f(t, C_1)dt; \quad x = \int f(t, C_1)dt + C_2.$$

3. $m\ddot{x} = X(t)$.

$$m \frac{dV_x}{dt} = X(t); \quad m dV_x = X(t)dt; \quad mV_x = \int X(t)dt + C_1;$$

$$m \frac{dx}{dt} = \int X(t)dt + C_1; \quad mx = \int [\int X(t)dt + C_1]dt + C_2.$$

4. $m\ddot{x} = X(x)$.

$$m \frac{dV_x}{dt} = X(x); \quad m \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = X(x); \quad mV_x dV_x = X(x)dx;$$

$$m \int V_x dV_x = \int X(x)dx + C_1; \quad m \frac{V_x^2}{2} = \int X(x)dx + C_1;$$

$$V_x = \sqrt{\frac{2}{m} [\int X(x)dx + C_1]}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [\int X(x)dx + C_1]}} = t + C_2.$$

5. $m\ddot{x} = X(t, V_x) = f(t) \varphi(V_x)$

$$m \frac{dV_x}{dt} = f(t) \varphi(V_x); \quad \frac{m dV_x}{\varphi(V_x)} = f(t) dt;$$

$$m \int \frac{dV_x}{\varphi(V_x)} = \int f(t) dt + C_1.$$

После интегрирования получаем $V_x = F(t, C_1)$.

$$\frac{dx}{dt} = F(t, C_1); \quad dx = F(t, C_1)dt; \quad x = \int F(t, C_1)dt + C_2.$$

Во всех рассмотренных случаях постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Следует отметить, что в вышеприведенных общих решениях предполагалось существование интегралов в виде аналитических функций. В противном случае точное решение невозможно и необходимо использовать приближенные численные методы. С точки зрения теории дифференциальных уравнений решение уравнения движения с учетом записанных начальных условий можно рассматривать как известное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Одним из эффективных численных методов решения этой задачи является метод Рунге – Кутты.

Пример 1. Моделирование нанесения набрызг-раствора на поверхность здания.

На вертикальную стену наносится набрызг-бетон для создания декоративно-изоляционного слоя типа «шуба». Нагнетание раствора осуществляется растворомасосом типа «СО» с производительностью Q , м³/ч. Скорость частицы раствора на выходе из нагнетательной насадки – V_0 , м/с. Высота нанесения набрызг-бетона – h , м. Расстояние от здания до насоса – L , м. Угол наклона нагнетательной насадки к горизонтальной поверхности – α , рад. Внутренний диаметр насадки – d , м. Оптимальный угол между вектором скорости и поверхностью здания для обеспечения качественной адгезии (прилипания) раствора к стенке – β , рад. Время движения частицы раствора от нагнетательной насадки до стены – T , с. Скорость частицы раствора в момент касания стены здания – V_k , м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Необходимо определить: соотношение между величинами T , α , β , V_0 , V_k , L и h ; внутренний диаметр насадки d и производительность насоса Q , исходя из величины V_0 ; максимальную высоту подъема частицы раствора (рис. 1.2).

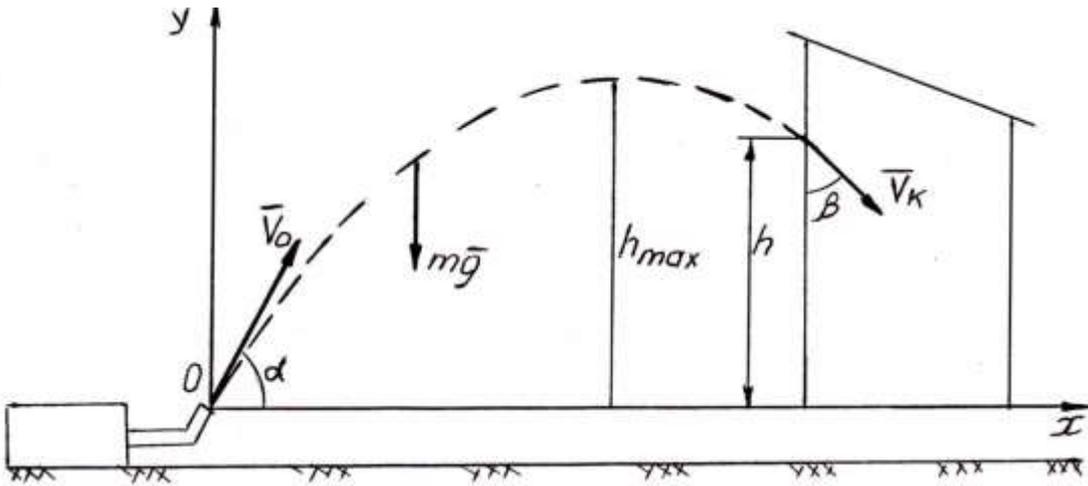


Рис. 1.2

Решение. Дифференциальные уравнения движения частицы раствора:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

$$\text{Первый интеграл: } \dot{x} = C_1; \quad \dot{y} = -gt + C_3.$$

$$\text{Второй интеграл: } x = C_1t + C_2; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + C_3t + C_4.$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \quad x = 0; \quad \dot{x} = V_0 \cos \alpha; \\ y = 0; \quad \dot{y} = V_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Подставляя начальные условия в выражения для проекций скоростей и координат, получим

$$V_0 \cos \alpha = C_1; \quad V_0 \sin \alpha = C_3; \quad 0 = C_2; \quad 0 = C_4.$$

Тогда окончательно выражения для проекций скоростей и координат получим в виде

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha; \quad V_y = \dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha;$$

$$x = V_0 \cos \alpha \cdot t; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin \alpha \cdot t.$$

Рассматривая полученные функции в конечном положении движения частицы (в момент соприкосновения с поверхностью здания), получим четыре конечных выражения для определения соот-

ношения между величинами T , α , β , V_0 , V_k , L и h .

$$V_k \sin \beta = V_0 \cos \alpha; \quad -V_k \cos \beta = -gT + V_0 \sin \alpha;$$

$$L = V_0 \cos \alpha \cdot T; \quad h = -g \frac{T^2}{2} + V_0 \sin \alpha \cdot T.$$

Задавая три величины из семи перечисленных, четыре оставшиеся можно определить из полученных выражений.

Внутренний диаметр насадки α и производительность насоса Q подбирают исходя из заданной или полученной величины V_0 с учетом выпускаемого насосного оборудования и конструкции насадки из соотношения

$$V_0 = \frac{Q}{\pi d^2 / 4}.$$

Для определения h_{\max} получают уравнение траектории частицы в координатной форме:

$$y = -g \frac{1}{2} \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 + V_0 \sin \alpha \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

и исследуют функцию $y = y(x)$ на экстремум.

Пример 2. Моделирование транспортирования строительных материалов.

С кирпичного завода на строительную площадку с помощью пневмотрубопроводного транспорта производится транспортировка кирпича в контейнерах под действием силы давления сжатого воздуха. Длина трубопровода – L , м. Начальная скорость контейнера $\bar{V}_0 = 0$. Масса контейнера с кирпичами – m , кг. Время движения контейнера по трубопроводу – T , с. Производительность транспортной линии – Q , шт./ч. Скорость контейнера на выходе из трубопровода – \bar{V}_k , м/с. Сила давления сжатого воздуха с учетом потерь на

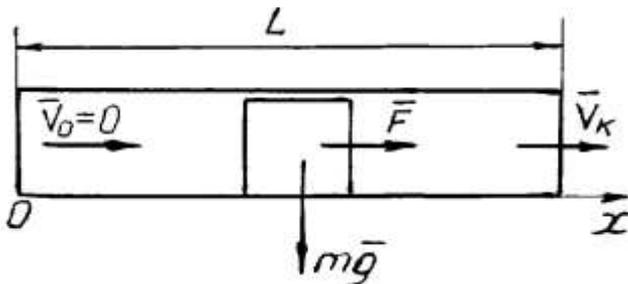


Рис. 1.3

сопротивление движению – $F = a(L - x)$, где a – константа, Н. Контейнеры транспортируются по одному. Определить скорость контейнера на выходе \bar{V}_k и производительность транспортной линии Q (рис. 1.3).

Решение. Дифференциальное уравнение движения контейнера

$$m\ddot{x} = a(L - x).$$

$$mV \frac{dV}{dx} = a(L - x).$$

$$m \frac{V^2}{2} = -\frac{a}{2}(L - x)^2 + C_1'$$

или
$$V^2 = -\frac{a}{m}(L - x)^2 + C_1; \quad V = \sqrt{C_1 - \frac{a}{m}(L - x)^2};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - \frac{a}{m}(L - x)^2}} = dt; \quad \sqrt{\frac{m}{a}} \arccos \sqrt{\frac{m}{C_1 a}}(L - x) = t + C_2;$$

$$x = L - \sqrt{\frac{C_1 m}{a}} \cos \left[\sqrt{\frac{a}{m}}(t + C_2) \right].$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий:

$$0 = \sqrt{C_1 - \frac{a}{m} L^2};$$

$$0 = L - \sqrt{\frac{C_1 m}{a}} \cos \sqrt{\frac{a}{m}} C_2.$$

Пример 3. Моделирование забивания сваи.

При строительстве фундаментов зданий и других сооружений, например подпорных стенок, береговых и промежуточных опор, фундаментов водоспускных труб в сложных условиях, опор путепроводов и мостов, широко используют сваи, забиваемые в грунт ударным молотом. Получив некоторую начальную скорость V_0 м/с, свая массой m кг погружается поступательно в грунт. При движении свая, помимо действия силы тяжести, испытывает сопротивление среды, пропорциональное первой степени скорости $R = \alpha V$

($\alpha = \text{const}$ – коэффициент пропорциональности). Определить закон движения сваи в грунте (рис. 1.4).

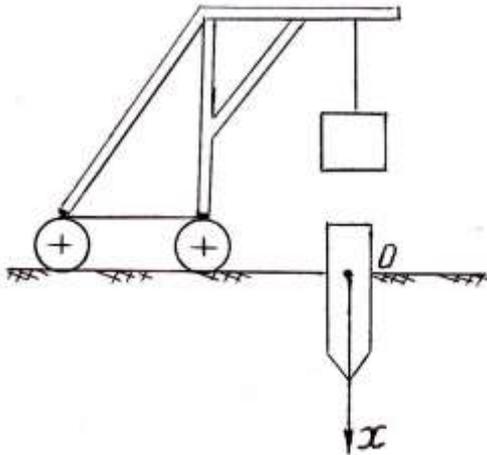


Рис. 1.4

Решение. Дифференциальное уравнение движения сваи

$$m\ddot{x} = mg - \alpha V.$$

$$\frac{dV}{g - \frac{\alpha}{m}V} = dt.$$

$$-\frac{m}{\alpha} \ln \left(g - \frac{\alpha}{m}V \right) = t + C_1.$$

$$V = \frac{m}{\alpha} \left[g - e^{-\frac{\alpha}{m}(t+C_1)} \right];$$

$$x = \frac{m}{\alpha} \left[gt + \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}(t+C_1)} \right] + C_2.$$

Постоянные интегрирования определим из начальных условий:

$$V_0 = \frac{m}{\alpha} \left[g - e^{-\frac{\alpha}{m}C_1} \right]; \quad 0 = \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 e^{-\frac{\alpha}{m}C_1} + C_2.$$

ГЛАВА 2. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Понятие о механической системе.

Силы, действующие на механическую систему

Системой материальных точек или **механической системой** называют такую совокупность точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных. Твердое тело является частным случаем механической системы.

Свободной механической системой называют совокупность материальных точек, движение которых не ограничено никакими

связями. В противном случае механическая система **несвободная**.

В соответствии со статикой, силы, приложенные к несвободной механической системе, можно разделить на активные (задаваемые) и реакции связей, либо внешние и внутренние. Равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке M_i несвободной механической системы, условимся обозначать \bar{F}_i , а равнодействующую реакций связей – \bar{R}_i . Внешние силы условимся обозначать \bar{F}_i^e , а внутренние – \bar{F}_i^I .

Одна и та же сила в зависимости от того, какая механическая система рассматривается, может быть как внешней, так и внутренней.

Таким образом, любая сила, действующая на точку механической системы, в соответствии с двумя вышеупомянутыми классификациями является внешней или внутренней, и в то же время она является активной силой или реакцией связи.

Движение механической системы зависит как от внешних, так и от внутренних сил.

На основе закона равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению. Из этого следуют свойства внутренних сил – равенство нулю главного вектора \bar{R}^I и главного момента \bar{M}_0^I относительно любого центра:

$$\bar{R}^I = \sum_i \bar{F}_i^I = 0; \quad \bar{M}_0^I = \sum_i \bar{M}_{i0}^I = 0. \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) имеют вид векторных уравнений равновесия сил, однако внутренние силы не уравниваются, так как они приложены к различным точкам системы и могут вызывать перемещения этих точек относительно друг друга.

2.2. Центр масс механической системы

При рассмотрении движения твердых тел и других механических систем важное значение имеет распределение их масс. Для оценки движения механической системы введено понятие **центра масс**, под которым понимают геометрическую точку C , положение которой определяется радиусом-вектором \bar{r}_c (рис. 2.1).

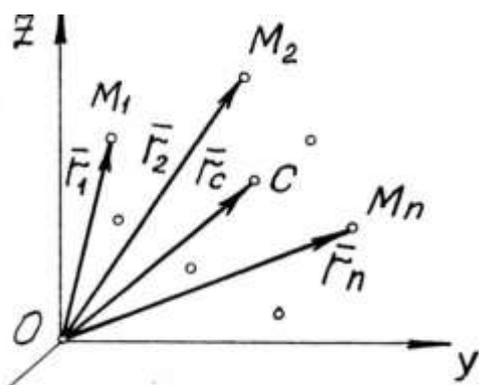


Рис. 2.1

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}, \quad (2.2)$$

где \bar{r}_i – радиус-вектор i -й точки системы; m_i – масса i -й точки системы; m – масса всей механической системы.

Центр масс является не материальной точкой, а **геометрической**.

Проектируя выражение (2.2) на оси декартовой системы координат, получим формулы для определения координат центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (2.3)$$

Учитывая, что масса может быть связана с силой тяжести выражением $\bar{P} = m\bar{g}$, нетрудно убедиться в совпадении центра тяжести тела (системы тел) с центром масс. Однако понятие «центр масс системы» более общее, так как применимо для любой системы материальных точек независимо от того, находится ли она под действием каких-либо сил или нет. Понятие «центр тяжести» применяется лишь для твердого тела или системы тел, находящихся в однородном поле сил тяжести.

2.3. Моменты инерции твердого тела. Радиус инерции

Для характеристики распределения масс в телах при их вращательных движениях требуется введение нового понятия – **момента инерции**. При вращательных движениях момент инерции является мерой инертности твердого тела.

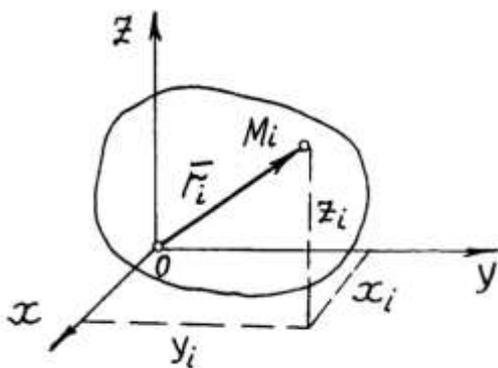


Рис. 2.2

Определим моменты инерции твердого тела относительно плоскости, оси и точки. С этой целью проведем через произвольную точку O три взаимно перпендикулярные координатные оси x, y, z и изобразим координатные плоскости xOy, yOz, zOx (рис. 2.2), твердое тело рассмотрим как совокупность материальных

точек M_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Моментом инерции твердого тела относительно плоскости, оси и точки называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки соответственно до плоскости, оси и точки.

Обозначим моменты инерции относительно координатных плоскостей $I_{xOy}, I_{yOz}, I_{zOx}$; моменты инерции относительно координатных осей – I_x, I_y, I_z и момент инерции относительно начала координат – I_0 . Тогда в соответствии с определением

$$\begin{aligned} I_{xOy} &= \sum_i m_i z_i^2; & I_{yOz} &= \sum_i m_i x_i^2; & I_{zOx} &= \sum_i m_i y_i^2; \\ I_x &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2); & I_y &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2); & I_z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2); \\ I_0 &= \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при стремлении числа разбиений твердого тела к бесконечности ($n \rightarrow \infty$), запишем вышеприведенные выражения в более удобной интегральной форме:

$$I_{xOy} = \int_m z^2 dm; \quad I_{yOz} = \int_m x^2 dm; \quad I_{zOx} = \int_m y^2 dm; \quad (2.4)$$

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_m (z^2 + x^2) dm; \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm; \quad (2.5)$$

$$I_0 = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (2.6)$$

Между моментами инерции твердого тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат существуют определенные зависимости:

$$\begin{aligned} 2I_0 &= I_x + I_y + I_z; \\ I_x &= I_{zOx} + I_{xOy}; \quad I_y = I_{xOy} + I_{yOz}; \quad I_z = I_{yOz} + I_{zOx}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Момент инерции относительно заданной оси, например оси z , можно определить как момент инерции точки в виде произведения массы тела m на квадрат линейной величины i_z , называемой **радиусом инерции тела** относительно этой оси:

$$I_z = m i_z^2. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) показывает, что радиус инерции i_z определяет расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить всю

массу m тела, чтобы момент инерции точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела.

Вышеприведенные моменты инерции всегда положительны. Единицей измерения момента инерции в СИ является $1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

2.4. Теорема Штейнера о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей

Теорема. Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пусть требуется определить момент инерции относительно оси OL . Проведем через центр масс тела C три взаимно перпендикулярные оси, из которых ось Cz параллельна оси OL , а ось Cy лежит в плоскости параллельных осей Cz и OL . Обозначим через d расстояние между осями Cz и OL (рис. 2.3, а). Твердое тело рассмотрим как совокупность материальных точек. Из произвольной точки M твердого тела опустим перпендикуляры h и r на оси OL и Cz (рис. 2.3, а, б). Тогда для определения искомого момента инерции получим следующее выражение:

$$I_L = \int_m h^2 dm = \int_m [x^2 + (y-d)^2] dm = \int_m r^2 dm + d^2 \int_m dm - 2d \int_m y dm.$$

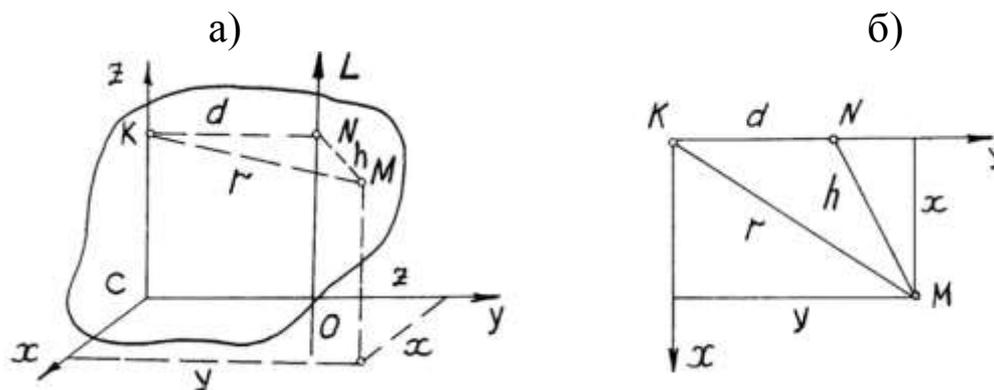


Рис. 2.3

Из формул (2.3) для определения координат центра масс механической системы следует, что в случае твердого тела $\int_m y dm = y_c m = 0$, так как $y_c = 0$. Учитывая, что $\int_m r^2 dm = I_{Cz}$, а

$\int dm = m$, окончательно получим формулу, характеризующую теорему:

$$I_L = I_{cz} + md^2. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) показывает, что из совокупности параллельных осей ось, проходящая через центр масс тела, характеризуется наименьшим моментом инерции.

Полярный момент инерции тела (момент относительно точки) относительно центра масс согласно (2.7)

$$2I_c = I_{cx} + I_{cy} + I_{cz}.$$

Следовательно, центр масс тела является полюсом, относительно которого полярный момент инерции тела имеет наименьшее возможное значение.

Пользуясь формулой (2.9) теоремы, можно установить связь между радиусами инерции тела относительно рассматриваемых осей:

$$i_L^2 = i_{cz}^2 + d^2.$$

2.5. Моменты инерции простейших однородных тел

Определим моменты инерции однородных тел относительно осей, проходящих через центр масс и являющихся осями симметрии. При этом ось, проходящая через центр масс, называется **центральной осью**.

Момент инерции однородного тонкого стержня (рис. 2.4). Масса стержня $m = \rho S L$, где ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения стержня. Разобьем стержень по длине на малые элементы. Масса элемента длиной dx равна $dm = \rho S dx$, а его момент инерции $dI_{cy} = x^2 dm = \rho S x^2 dx$, откуда момент инерции всего стержня

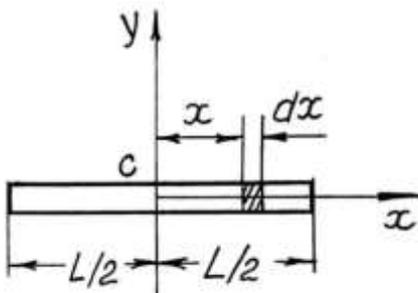


Рис. 2.4

$$I_{cy} = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{\rho S L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}. \quad (2.10)$$

Момент инерции однородной круглой пластинки малой толщины (рис. 2.5). Определим момент инерции пластинки относительно оси z , перпендикулярной пластинке и проходящей через ее

центр. Для этого разобьем пластинку на элементарные кольца радиусом r и шириной dr . Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим

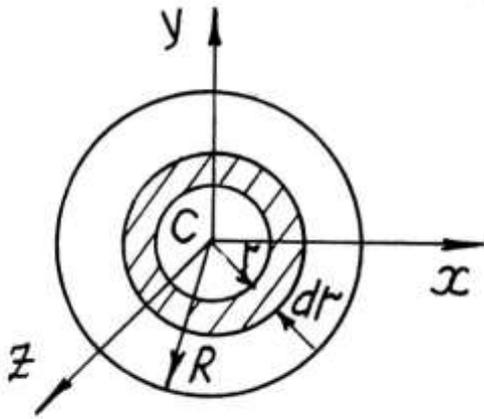


Рис. 2.5

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2}. \quad (2.11)$$

Определим момент инерции пластинки относительно осей x и y . Для этого воспользуемся формулами (2.5), учитывая при этом малость толщины пластинки:

$$I_{cx} = \int (y^2 + z^2) dm = \int y^2 dm;$$

$$I_{cy} = \int (z^2 + x^2) dm = \int x^2 dm,$$

откуда $I_{cx} + I_{cy} = \int (y^2 + x^2) dm = I_{cz}$.

В силу симметрии пластины $I_{cx} = I_{cy}$. Тогда из полученного соотношения следует, что

$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{1}{2} I_{cz} = \frac{mR^2}{4}. \quad (2.12)$$

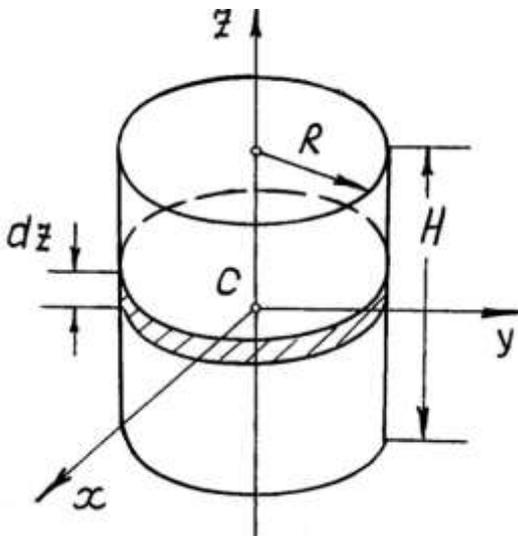


Рис. 2.6

Момент инерции однородного круглого цилиндра (рис. 2.6). Разбивая цилиндр на элементарные тонкие пластинки, параллельные основанию, и используя формулу (2.11), получим

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2}; \quad (2.13)$$

$$I_{cx} = I_{cy} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \quad (2.14)$$

Момент инерции полого цилиндра (рис. 2.7). Момент инерции полого цилиндра с внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 относительно его центральной продольной оси Cz можно определить как разность моментов инерции сплошных цилиндров радиусами R_1 и R_2 :

$$I_{cz} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2). \quad (2.15)$$

Момент инерции однородного кругового конуса (рис. 2.8).

Разбивая конус на элементарные круглые пластинки малой толщины, параллельные основанию, получим

$$I_{cz} = 0,3mR^2. \quad (2.16)$$

Момент инерции однородного шара (рис. 2.9). Разбивая шар на элементарные круглые пластинки малой толщины, а также учитывая его симметричность относительно осей координат, получим

$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{5}mR^2. \quad (2.17)$$

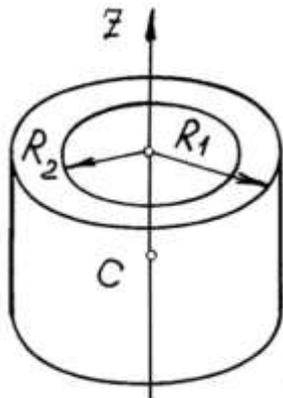


Рис. 2.7

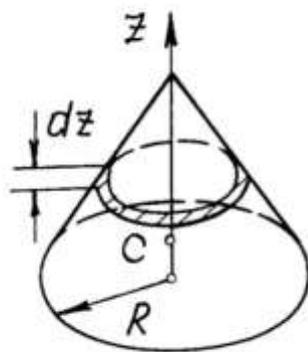


Рис. 2.8

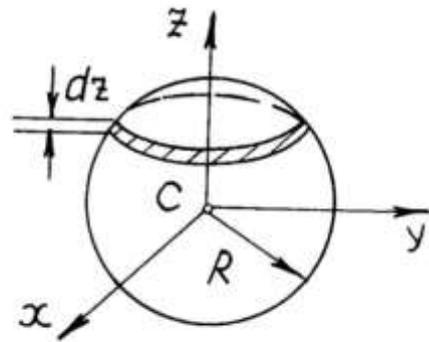


Рис. 2.9

2.6. Момент инерции твердого тела относительно любой оси. Эллипсоид инерции

Проведем через некоторую точку O тела три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и произвольно направленную ось v , составляющую с осями углы α, β, γ (рис. 2.10).

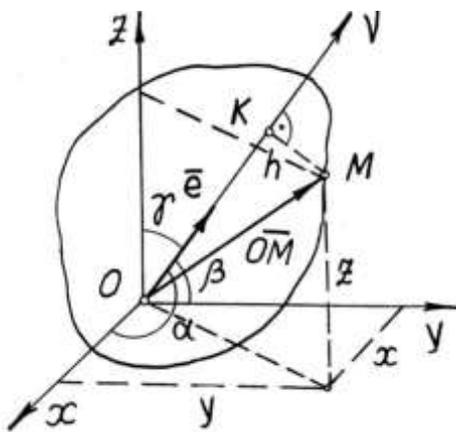


Рис. 2.10

Рассмотрим твердое тело как совокупность материальных точек, количество которых стремится к бесконечности. Возьмем произвольную точку M с координатами x, y, z . Опустим из точки M перпендикуляр на ось v , длина которого h .

Момент инерции тела относительно оси ν :

$$I_\nu = \int_m h^2 dm.$$

Вводя в рассмотрение единичный вектор $\bar{e}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, направленный вдоль оси ν , величину h^2 можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} h^2 &= OM^2 - OK^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (\overline{OM} \cdot \bar{e})^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2. \end{aligned}$$

Тогда после некоторых преобразований момент инерции можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_\nu &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} — центробежные моменты инерции тела, определяемые по формулам

$$I_{xy} = \int_m x y dm; \quad I_{yz} = \int_m y z dm; \quad I_{zx} = \int_m z x dm. \quad (2.19)$$

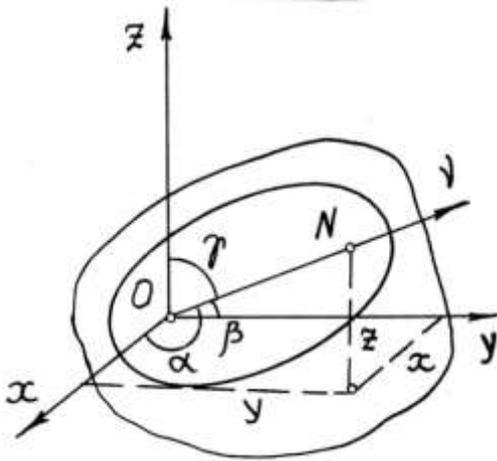


Рис. 2.11

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Они характеризуют асимметричность тела (распределение масс) относительно координатных осей.

Рассмотрим изменение момента инерции I_ν , происходящее при изменении направления оси ν . Для наглядного изображения этого изменения отложим по оси ν от

точки O отрезок ON (рис. 2.11), длина которого

$$ON = 1/\sqrt{I_\nu}. \quad (2.20)$$

Направляющие косинусы оси ν можно представить в виде

$$\cos \alpha = x / ON = x \sqrt{I_\nu};$$

$$\cos \beta = y / ON = y \sqrt{I_\nu};$$

$$\cos \gamma = z / ON = z \sqrt{I_\nu}.$$

Подставив выражения для $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ в формулу (2.18) и разделив на I_ν , получим уравнение поверхности, описываемой точкой N при повороте оси ν

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2 I_{xy} xy - 2 I_{yz} yz - 2 I_{zx} zx = 1. \quad (2.21)$$

Очевидно, что уравнение (2.21) является уравнением эллипсоида, который в механике получил название **эллипсоида инерции**.

Три оси симметрии эллипсоида инерции называются **главными осями инерции тела в точке O** , а моменты инерции относительно этих осей называются **главными моментами инерции**.

Если за оси координат принять главные оси инерции, то уравнение эллипсоида инерции (2.21) упростится:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (2.22)$$

Каждой точке тела соответствует определенный эллипсоид инерции, который характеризует моменты инерции тела относительно всех осей, проходящих через данную точку.

Эллипсоид инерции, соответствующий центру тяжести тела, называется **центральный эллипсоидом инерции**, а его оси симметрии – **главными центральными осями инерции**.

Нетрудно убедиться в следующем.

Если какая-либо из осей координат, проведенных через заданную точку, является главной осью инерции в этой точке, то центробежные моменты инерции, в которые входит соответствующая этой оси координата, равны нулю.

Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является его главной центральной осью инерции.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то во всех точках этой плоскости одна из главных осей инерции направлена по перпендикуляру к этой плоскости.

ГЛАВА 3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Пусть имеем систему n материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n . Приложенные к точкам силы разделим на внешние и внутренние. Тогда основное уравнение динамики для i -й точки запишется в виде

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^I \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \bar{F}_i^e, \bar{F}_i^I – равнодействующие, соответственно, внешних и внутренних сил, приложенных к i -й точке.

Проектируя записанное векторное уравнение на оси декартовой системы координат, получим $3n$ дифференциальных уравнений движения:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^e + X_i^I; \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i^e + Y_i^I; \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i^e + Z_i^I. \quad (3.1)$$

Для нахождения уравнений движения механической системы по заданным силам и начальным условиям необходимо дважды проинтегрировать систему (3.1). Эту задачу не удастся точно решить в общем случае даже для одной точки. Задача интегрирования дифференциальных уравнений движения еще сложнее, если на механическую систему наложены связи.

В некоторых случаях из дифференциальных уравнений движения системы можно без интегрирования получить первые интегралы, то есть соотношения, в которые не входят производные второго порядка от координат по времени (проекции скоростей).

Если известны первые интегралы, то задача интегрирования системы дифференциальных уравнений облегчается. Хотя отдельные первые интегралы и не могут полностью описать движения всех точек системы, однако они иногда характеризуют важные стороны движения системы в целом.

Первые интегралы системы дифференциальных уравнений движения удобно получать из так называемых общих теорем динамики, когда выполняются некоторые дополнительные условия для действующих сил. Кроме того, общие теоремы динамики, даже когда по ним нельзя определить первые интегралы, дают ценную ин-

формацию о движении точки или системы. В некоторых задачах, где не требуется полного знания движения системы, эти сведения могут оказаться достаточными.

Общие теоремы динамики являются следствиями системы дифференциальных уравнений движения точки или, соответственно, механической системы.

3.2. Теорема о движении центра масс

Теорема. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, и находящейся под действием силы, равной главному вектору внешних сил системы.

Запишем основное уравнение динамики для i -й точки системы:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^I.$$

Суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_i \bar{F}_i^e + \sum_i \bar{F}_i^I.$$

Из формулы (2.2), продифференцированной дважды, следует, что $\sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = m \ddot{\bar{r}}_c = m \bar{a}_c$. Учитывая также, что главный вектор внутренних сил $\bar{R}^I = \sum_i \bar{F}_i^I = 0$, окончательно будем иметь

$$m \bar{a}_c = \bar{R}^e. \quad (3.2)$$

Проектируя (3.2) на оси декартовой системы координат, получим дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$m \ddot{x}_c = X^e; \quad m \ddot{y}_c = Y^e; \quad m \ddot{z}_c = Z^e. \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) следует, что внутренние силы не влияют непосредственно на движение центра масс, однако они могут оказать косвенное влияние.

Из кинематики известно, что поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной из его точек. Следовательно, движение центра масс вполне определяет поступательное движение всего тела.

Следствия из теоремы (закон сохранения движения центра масс)

1. Если главный вектор внешних сил остается все время равным нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Действительно, если $\bar{R}^e = 0$, то из (3.2) следует $\bar{a}_c = 0$. Откуда $\bar{V}_c = \overline{\text{const}}$.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось остается все время равной нулю, то проекция центра масс механической системы на эту ось неподвижна или движется равномерно.

Действительно, если $X^e = 0$, то из (3.3) следует $\dot{x}_c = 0$. Откуда $\dot{x}_c = \text{const}$.

В качестве примеров, иллюстрирующих применение теоремы о движении центра масс и ее следствий, можно привести следующие.

Человек может перемещаться по горизонтальной плоскости только при наличии ее шероховатости, так как уравнение (3.2) в проекции на горизонталь может содержать только силу трения, обусловленную шероховатостью поверхности.

В качестве второго качественного примера можно привести невозможность поднятия человеком самого себя. Мышечные усилия рук человека, приложенные к своему телу, являются внутренними силами и, следовательно, не могут изменить его положения.

В качестве примера косвенного влияния внутренних сил на движение механической системы можно привести случай падения парашютиста в воздухе. Внутреннее усилие руки человека, действующее на кольцо парашютиста, приводит к его раскрытию и, как следствие, появлению новых внешних сил – сопротивления воздуха.

3.3. Первая мера действия силы и механического движения

Механическое движение происходит под действием сил. Поэтому естественно возникает вопрос о мере действия силы и непосредственно самого движения, причем эти две меры, безусловно, должны быть связаны между собой.

Первой мерой действия силы является ее импульс.

Импульсом постоянной силы \bar{F} за какой-нибудь промежуток времени $\tau = t - t_0$ называется вектор $\bar{S} = \bar{F}\tau$, равный произведению силы на этот промежуток.

Импульс силы характеризует передачу материальной точке механического движения со стороны действующих на нее сил за заданный промежуток времени. Единицей измерения импульса в системе СИ является $1 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

Для определения импульса переменной силы $\bar{F} = \bar{F}(t)$ за промежуток времени $\tau = t - t_0$ этот промежуток разбивают на элементарные промежутки dt и определяют элементарный импульс силы на каждом из таких промежутков, считая силу на нем постоянной, $d\bar{S} = \bar{F}(t)dt$. Суммируя элементарные импульсы, получим полный импульс переменной силы на конечном промежутке времени:

$$\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F}(t)dt. \quad (3.4)$$

Проекции импульса на оси координат:

$$S_x = \int_{t_0}^t X(t)dt; \quad S_y = \int_{t_0}^t Y(t)dt; \quad S_z = \int_{t_0}^t Z(t)dt. \quad (3.5)$$

Если к точке приложено несколько сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, то равнодействующая сил $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$. Умножив обе части этого выражения на dt и проинтегрировав, получим выражение для импульса равнодействующей:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_n. \quad (3.6)$$

Таким образом, импульс равнодействующей нескольких сил за некоторый промежуток времени равен векторной сумме импульсов составляющих сил за этот же промежуток времени.

Первой мерой механического движения является количество движения.

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\bar{V}$, равный произведению массы точки на вектор ее скорости.

Количеством движения механической системы называют вектор, равный геометрической сумме количеств движения всех материальных точек этой системы:

$$\bar{Q} = \sum_i m_i \bar{V}_i.$$

Продифференцировав выражение (2.2) по времени, получим $\sum_i m_i \bar{V}_i = m\bar{V}_c$. Тогда формулу для определения количества движения

механической системы можно представить в более удобной форме:

$$\bar{Q} = m\bar{V}_c. \quad (3.7)$$

Единицей измерения количества движения в СИ является $1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с} = 1 \text{ Н}\cdot\text{с}$.

3.4. Теорема об изменении количества движения. Примеры решения задач

Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме. Производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна равнодействующей сил, приложенных к точке.

Действительно, из основного уравнения динамики следует

$$m\bar{a} = \bar{F} \text{ или } m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Учитывая, что $m = \text{const}$, можем записать

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F}. \quad (3.8)$$

Теорема об изменении количества движения точки в конечной форме (теорема импульсов). Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу равнодействующей сил за этот же промежуток времени.

Действительно, умножая уравнение (3.8) на dt и интегрируя, получим

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}. \quad (3.9)$$

Проектируя (3.9) на оси декартовой системы координат, получим три скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} mV_x - mV_{0x} &= S_x; \\ mV_y - mV_{0y} &= S_y; \\ mV_z - mV_{0z} &= S_z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме. Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.

С учетом выражений (3.7) и (3.2) получим

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{V}_c)}{dt} = m \frac{d\bar{V}_c}{dt} = m\bar{a}_c = \bar{R}^e.$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e. \quad (3.11)$$

В проекциях на оси координат уравнение теоремы (3.11) записывается в виде

$$\frac{dQ_x}{dt} = X^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z^e. \quad (3.12)$$

Следствия из теоремы (закон сохранения количества движения).

1. Если главный вектор внешних сил за рассматриваемый промежуток времени равен нулю, то количество движения механической системы постоянно.

Действительно, из (3.11) при $\bar{R}^e = 0$ следует $d\bar{Q}/dt = 0$. Откуда $\bar{Q} = \text{const}$.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Действительно, из (3.12) при $X^e = 0$ следует $dQ_x/dt = 0$. Откуда $Q_x = \text{const}$.

Теорема об изменении количества движения механической системы в конечной форме (теорема импульсов). Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.

Умножая (3.11) на dt и интегрируя, получим

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e. \quad (3.13)$$

В проекциях на оси координат уравнение (3.13) запишется в виде

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e; \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e; \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \quad (3.14)$$

3.5. Кинетический момент точки и механической системы

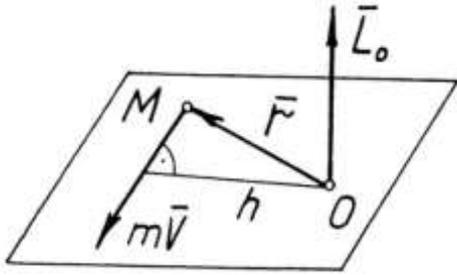


Рис. 3.1

Моментом количества движения $m\vec{V}$ или кинетическим моментом точки относительно центра O называется вектор \vec{L}_0 (рис. 3.1), определяемый по аналогии с моментом силы относительно точки по формуле

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (3.15)$$

Модуль кинетического момента

$$|\vec{L}_0| = |\vec{r}| |m\vec{V}| \sin(\angle \vec{r}, \vec{V}) = mVh.$$

Проектируя (3.15) на оси декартовой системы координат, получим проекции кинетического момента точки:

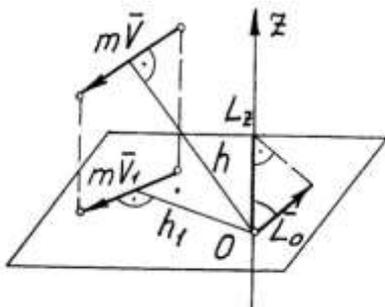


Рис. 3.2

$$L_x = m(yV_z - zV_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y});$$

$$L_y = m(zV_x - xV_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad (3.16)$$

$$L_z = m(xV_y - yV_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

По аналогии с моментом силы кинетический момент относительно оси можно представить в виде (рис. 3.2)

$$L_z = \pm mV_1 h_1, \quad (3.17)$$

где V_1 – величина проекции скорости на плоскость, перпендикулярную оси z ; h_1 – длина перпендикуляра, опущенного из точки пересечения оси с плоскостью на проекцию количества движения на эту плоскость.

Нетрудно установить связь между кинетическим моментом точки относительно центра и оси (рис. 3.2) в виде

$$L_z = L_0 \cos \gamma. \quad (3.18)$$

Кинетическим моментом или главным моментом количества движения механической системы относительно центра называют вектор, равный геометрической сумме кинетических моментов всех точек системы относительно этого центра.

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{L}_{i0} = \sum_i \vec{r} \times m_i \vec{V}_i. \quad (3.19)$$

Кинетическим моментом механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма кинетических момен-

тов всех точек системы относительно этой оси:

$$L_z = \sum_i L_{iz}. \quad (3.20)$$

3.6. Теорема об изменении кинетического момента

Теорема об изменении кинетического момента точки. Производная по времени от кинетического момента относительно какого-либо центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра.

Используя основное уравнение динамики, получим

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}; \quad \bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}.$$

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) - \bar{V} \times m\bar{V} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}).$$

Подставляя в вышезаписанное выражение, получим

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \bar{r} \times \bar{F}$$

или

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0. \quad (3.21)$$

Проектируя (3.21) на оси декартовой системы координат, получим следующие скалярные уравнения:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3.22)$$

Следствия из теоремы.

1. Если линия действия равнодействующей приложенных к материальной точке сил за все время движения проходит через некоторый неподвижный центр, то кинетический момент точки относительно этого центра остается постоянным.

Из (3.21) следует, что при $\bar{M}_0 = 0$ $\bar{L}_0 = \overline{\text{const}}$ или $\bar{r} \times m\bar{V} = \overline{\text{const}}$, откуда следует

$$\bar{r} \times \bar{V} = \overline{\text{const}}. \quad (3.23)$$

Полученное уравнение (3.23) называют теоремой площадей, так как

$$\bar{r} \times \bar{V} = 2 \frac{d\bar{\sigma}}{dt},$$

где $d\bar{\sigma}/dt$ – секториальная скорость (изменение площади, описываемой радиус-вектором точки \bar{r}).

Уравнение (3.23) показывает, что во все время движения точка движется по некоторой плоской траектории.

2. Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно некоторой оси за все время движения равен нулю, то кинетический момент точки относительно этой оси остается постоянным.

Действительно, если $M_x = 0$, то из (3.22) следует $L_x = \text{const}$.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

Применим предыдущую теорему об изменении кинетического момента к каждой точке системы и просуммируем:

$$\frac{d\bar{L}_{i0}}{dt} = \bar{M}_{i0}^e + \bar{M}_{i0}^I; \quad \sum_i \frac{d\bar{L}_{i0}}{dt} = \sum_i \bar{M}_{i0}^e + \sum_i \bar{M}_{i0}^I.$$

Так как $\sum_i \frac{d\bar{L}_{i0}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \bar{L}_{i0} = \frac{d\bar{L}_0}{dt}$, а $\sum_i \bar{M}_{i0}^I = 0$, окончательно имеем

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e. \quad (3.24)$$

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение теоремы (3.24) запишется в виде

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \quad (3.25)$$

Следствия (закон сохранения кинетического момента).

1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра остается все время равным нулю, то кинетический момент относительно этого центра остается постоянным.

Действительно, если $\bar{M}_0^e = 0$, то из (3.24) следует $\bar{L}_0 = \text{const}$.

2. Если главный момент внешних сил относительно какой-либо оси равен нулю, то проекция кинетического момента на эту ось остается постоянной.

Действительно, если $M_x^e = 0$, то из (3.25) следует $L_x = \text{const}$.

3.7. Вторая мера действия силы и механического движения

В случае простого переноса механического движения с одной механической системы на другую, как отмечалось в п. 3.4, мерой действия силы является ее импульс, а мерой движения является количество движения.

При преобразовании механического движения в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества и так далее) мерой действия силы является ее работа, а мерой механического движения – кинетическая энергия. Рассмотрим подробно эти два важных понятия классической механики.

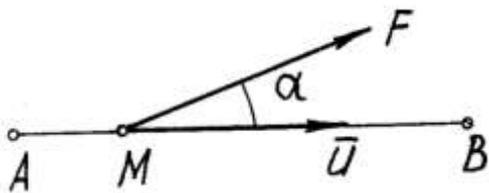


Рис. 3.3

Работа силы, приложенной к точке. Рассмотрим вычисление работы постоянной по модулю и направлению силы. Работа постоянной силы \vec{F} на прямолинейном перемещении \vec{u} определяется скалярным произведением (рис. 3.3):

$$A = \vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (3.26)$$

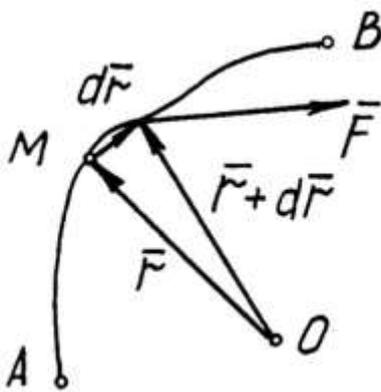


Рис. 3.4

Пусть теперь точка движется по криволинейной траектории под действием переменной силы \vec{F} (рис. 3.4). Разбиваем перемещение точки из положения A в положение B на элементарные перемещения $d\vec{r}$ и, используя формулу (3.26), определяем элементарную работу на этом перемещении:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.27)$$

Элементарная работа обозначена символом δ , а не d , так как она не всегда является полным дифференциалом какой-либо функции.

Если X, Y, Z – проекции силы на оси координат, а dx, dy, dz – проекции вектора элементарного перемещения $d\vec{r}$, то по свойству скалярного произведения формулу (3.27) можно записать в виде

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (3.28)$$

Суммируя элементарные работы и переходя к пределу при стремлении числа разбиений участка траекторий к бесконечности, получим выражение для определения полной работы на конечном перемещении:

$$A = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (3.29)$$

Таким образом, работа переменной силы \bar{F} на конечном перемещении AB определяется криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги AB траектории, описываемой точкой приложения силы.

Если сила \bar{F} по величине и направлению является функцией длины дуги S , отсчитываемой вдоль траектории точки, то работа определяется следующим образом:

$$A = \int_{S_A}^{S_B} F_\tau(S) dS, \quad (3.30)$$

где $F_\tau(S)$ – проекция силы на направление перемещения (направление касательной).

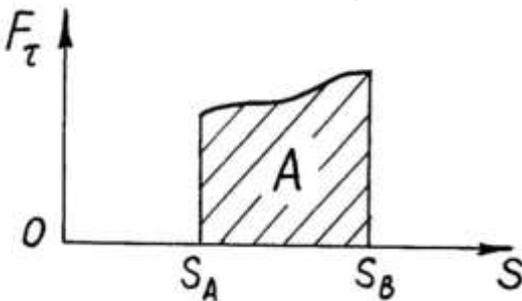


Рис. 3.5

Графически работу можно представить как площадь, ограниченную графиком функции $F_\tau(S)$ и координатной осью (рис. 3.5). Единицей измерения работы силы в СИ является $1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}$.

Работа силы, отнесенная к единице времени, называется **мощностью**. Мощность можно представить следующим образом:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{V} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}. \quad (3.31)$$

Единицей измерения мощности в СИ является $1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ Вт}$; $750 \text{ Вт} = 1 \text{ л. с.}$

Работа сил, приложенных к твердому телу. Рассмотрим общий случай движения твердого тела. Разложим движение тела на поступательное вместе с полюсом

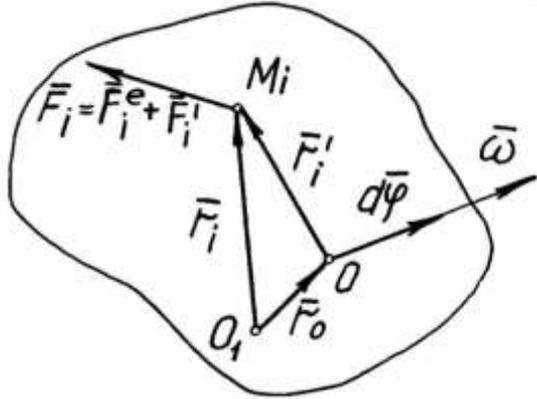


Рис. 3.6

и сферическое вокруг этого полюса (рис. 3.6). Пусть к произвольной точке твердого тела M_i приложена сила \vec{F}_i , равная сумме равнодействующих внешних \vec{F}_i^e и внутренних сил \vec{F}_i^I . Скорость рассматриваемой точки M_i можно представить как скорость полюса, сложенную с вращательной скоростью точки M_i

в сферическом движении относительно полюса:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'.$$

Умножим выражение для скорости на элементарное время dt , получим

$$\vec{V}_i dt = \vec{V}_0 dt + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' dt$$

или

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i'.$$

Элементарная работа равнодействующей сил \vec{F}_i :

$$\delta A_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_0 + \vec{F}_i \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i'$$

или

$$\delta A_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_0 + \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \cdot d\vec{\varphi}.$$

Элементарная работа всех сил, приложенных к телу:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_i \delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_0 + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \cdot d\vec{\varphi} = \\ &= \left(\sum_i \vec{F}_i^e + \sum_i \vec{F}_i^I \right) d\vec{r}_0 + \left(\sum_i \vec{r}_i^e \times \vec{F}_i^e + \sum_i \vec{r}_i^I \times \vec{F}_i^I \right) \cdot d\vec{\varphi} \end{aligned}$$

или

$$\delta A = (\vec{R}^e + \vec{R}^I) \cdot d\vec{r}_0 + (\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^I) \cdot d\vec{\varphi}.$$

Так как по свойству внутренних сил $\vec{R}^I = 0$, $\vec{M}_0^I = 0$, то окончательно выражение для полной элементарной работы сил, приложенных к телу, примет вид

$$\delta A = \vec{R}^e \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_0^e \cdot d\vec{\varphi}. \quad (3.32)$$

Таким образом, работу совершают только внешние силы. Работа внутренних сил, приложенных к твердому телу, равна нулю.

Из общей формулы (3.32) можно получить выражение для определения элементарной работы в более частных случаях движения.

При поступательном движении

$$\delta A = \bar{R}^e \cdot d\bar{r}_0. \quad (3.33)$$

При вращательном движении вокруг неподвижной оси z

$$\delta A = \bar{M}_0^e \cdot d\bar{\varphi} = M_0^e d\varphi \cos \gamma = M_z^e d\varphi. \quad (3.34)$$

Полная работа внешних сил на конечном вращении тела определяется по формуле

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^e d\varphi, \quad (3.35)$$

а в частном случае, когда проекция главного момента внешних сил на ось z вращения постоянна, то есть $M_z^e = \text{const}$:

$$A = M_z^e (\varphi - \varphi_0). \quad (3.36)$$

При плоском движении элементарная работа

$$\delta A = \bar{R}^e \cdot d\bar{r}_0 + M_{0z}^e d\varphi, \quad (3.37)$$

где M_{0z}^e – проекция главного момента на ось вращения z , проходящую через полюс.

При сферическом движении

$$\delta A = M_{0\Omega}^e d\varphi, \quad (3.38)$$

где $M_{0\Omega}^e$ – проекция главного момента внешних сил на мгновенную ось Ω вращения, проходящую через неподвижную точку O .

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия точки определяется как половина произведения массы на квадрат величины ее скорости, то есть $T = mV^2 / 2$. Кинетическая энергия механической системы равна сумме энергий отдельных ее точек, то есть $T = \sum_i m_i V_i^2 / 2$.

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении вокруг центра масс.

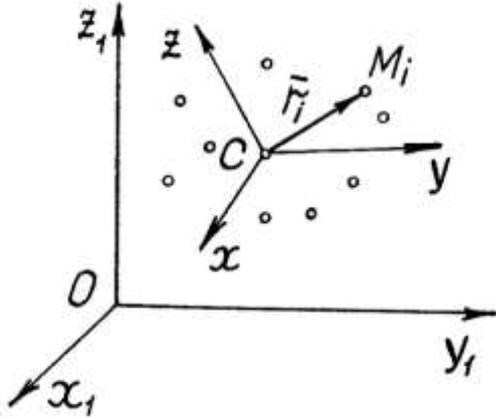


Рис. 3.7

Пусть механическая система движется относительно некоторой неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис. 3.7). Начало подвижной системы отсчета возьмем в центре масс системы. Тогда абсолютное движение механической системы можно представить как совокупность поступательного движения системы с центром масс и относительного вокруг этого центра.

По теореме сложения скоростей абсолютную скорость i -й точки \vec{V}_i можно представить в виде

$$\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{ir},$$

где \vec{V}_c – скорость центра масс; \vec{V}_{ir} – относительная скорость вокруг центра масс.

Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}_c + \vec{V}_{ir}) \cdot (\vec{V}_c + \vec{V}_{ir}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_c^2 + \vec{V}_c \sum_i m_i \vec{V}_{ir} + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2. \end{aligned}$$

Из формулы (2.2) следует, что $\sum_i m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_c = 0$. Откуда, дифференцируя данное выражение по времени, получим $\sum_i m_i \vec{V}_{ir} = 0$.

Окончательно для определения кинетической энергии получим следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_{ir}^2. \quad (3.39)$$

Кинетическая энергия твердого тела. Поскольку кинетическая энергия является мерой механического движения, то вид формул для ее определения, очевидно, будет зависеть от вида движения твердого тела.

При поступательном движении твердого тела

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 = \frac{V^2}{2} \sum_i m_i = \frac{m V^2}{2}. \quad (3.40)$$

Таким образом, при поступательном движении кинетическая

энергия определяется как половина произведения массы тела на квадрат величины его скорости.

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2,$$

где ω – величина угловой скорости тела; R_i – радиус окружности, описываемой i -й точкой тела.

Учитывая, что величина момента инерции тела относительно оси вращения равна $I_z = \sum_i m_i R_i^2$, окончательно получаем следующую формулу для определения кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (3.41)$$

При плоском движении тела, используя теорему Кёнига, получаем

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2 = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2.$$

Учитывая, что момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс, равен $I_{cz} = \sum_i m_i r_i^2$, получим

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2. \quad (3.42)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела равна энергии при поступательном движении вместе с центром масс, сложенной с энергией при вращательном движении вокруг центра масс.

Если плоское движение представить как вращательное вокруг мгновенного центра скоростей, то, используя теорему Штейнера, (3.42) можно преобразовать к виду

$$T = \frac{1}{2} I_{pz} \omega^2, \quad (3.43)$$

где I_{pz} – момент инерции относительно оси z , проходящей через мгновенный центр скоростей P .

При сферическом движении в каждый момент времени перемещение тела можно рассматривать как вращательное вокруг мгновенной оси вращения Ω , проходящей через неподвижную точку O .

Тогда по аналогии с (3.43) для определения кинетической энергии можем записать

$$T = \frac{1}{2} I_{0\Omega} \omega^2. \quad (3.44)$$

В общем случае движения твердого тела, принимая центр масс за полюс, по аналогии с (3.42) для определения кинетической энергии получим

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_{0\Omega} \omega^2. \quad (3.45)$$

3.8. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.

Используя основное уравнение динамики, получим

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}; \quad m \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}; \quad m \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{V} dt = \bar{F} \cdot d\bar{r};$$

$$m \bar{V} \cdot d\bar{V} = \bar{F} \cdot d\bar{r}; \quad md \frac{V^2}{2} = \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (3.46)$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Изменение кинетической энергии механической системы на некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении.

Запишем уравнение теоремы (3.46) для каждой точки системы:

$$\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{m_i V_{i0}^2}{2} = A_i^e + A_i^I \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Суммируя записанные выражения по всем точкам системы, получим

$$T - T_0 = \sum_i A_i^e + \sum_i A_i^I. \quad (3.47)$$

В частном случае твердого тела в соответствии с п. 3.7 $\sum_i A_i^I = 0$. Тогда уравнение (3.47) теоремы будет иметь вид

$$T - T_0 = \sum_i A_i^e. \quad (3.48)$$

3.9. Потенциальное силовое поле

Физическое пространство, удовлетворяющее условию, при котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от положения этих точек и времени, но не от их скоростей, называется **силовым полем**.

Силовое поле называется **потенциальным**, если существует такая однозначная, зависящая от координат или от координат и времени скалярная функция U , что вектор силы \bar{F} можно представить в виде

$$\bar{F} = \text{grad} U, \quad (3.49)$$

где $\text{grad} U$ – градиент функции U – вектор, равный

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Таким образом, в случае потенциальности силового поля проекции силы на координатные оси в каждой точке поля определяются по формулам

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.50)$$

Функция $U(x, y, z, t)$ называется **силовой функцией** или **потенциалом вектора \bar{F}** . Следует отметить, что в механике понятие потенциальности вводят не только для силового векторного поля, но и для других величин, например, скорости.

Рассмотрим основные свойства силовой функции стационарного силового поля.

Из (3.50) следует, что силовая функция определяется с точностью до постоянной, так как для определения проекций силы на координатные оси требуются только частные производные по координатам от этой функции и добавление константы к функции U не влияет на значения X, Y, Z . Определим элементарную работу сил поля:

$$\delta A = \bar{F} d\bar{r} = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \quad (3.51)$$

Таким образом, элементарная работа силы в потенциальном силовом поле равна полному дифференциалу от силовой функции.

Полная работа силы \bar{F} на участке от точки M_0 до точки M

$$A = \int_{M_0}^M dU = U(z, y, z) - U(z_0, y_0, z_0),$$

то есть

$$A = U - U_0. \quad (3.52)$$

Следовательно, полная работа потенциальной силы на каком-либо перемещении точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от формы траектории, по которой оно совершается.

Из (3.52) следует, что работа силы в потенциальном силовом поле по любому замкнутому контуру равна нулю, так как значение силовой функции в начальной и конечной точках перемещения одинаково, если силовая функция не принимает других значений после возвращения в первоначальную точку. Силовая функция может принимать другие значения после возвращения в первоначальную точку в зависимости от количества обходов, если область, ограниченная замкнутым контуром, содержит в себе специальные особые точки силовой функции.

Интеграл $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, взятый по замкнутой кривой C , называется

циркулирующей вектора силы вдоль этой кривой.

Тогда необходимостью (можно доказать и достаточность) потенциальности силового поля является равенство нулю циркуляции вектора силы вдоль любой замкнутой кривой в поле:

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0. \quad (3.53)$$

Из математики известно, что интеграл по контуру можно преобразовать в интеграл по поверхности S , стягивающей этот контур. Причем подынтегральная функция будет равна проекции на нормаль к этой поверхности вектора $\text{rot} \bar{F}$, имеющего проекции на оси координат:

$$\text{rot}_x \bar{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right); \quad \text{rot}_y \bar{F} = \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right); \quad \text{rot}_z \bar{F} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right).$$

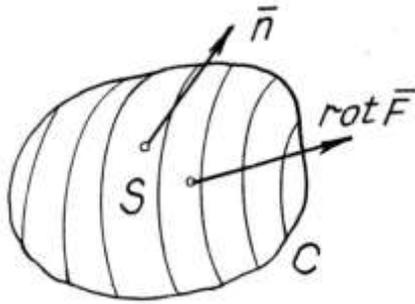


Рис. 3.8

Таким образом,

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_S \text{rot} \bar{F} \cdot \bar{n} dS \quad (\text{рис. 3.8}).$$

Вектор $\text{rot} \bar{F}$ называется **вихрем вектора силы**.

Следовательно, необходимое и достаточное условие потенциальности силового поля можно кратко записать в виде

$$\text{rot} \bar{F} = 0 \quad (3.54)$$

или в проекциях на оси координат:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \quad (3.55)$$

То есть для того чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Если рассматривать точки потенциального силового поля, в которых силовая функция имеет одно и то же значение, то все эти точки располагаются на поверхности, которую называют **поверхностью равного уровня**. Уравнение поверхности имеет вид

$$U(x, y, z) = C,$$

где C – некоторая константа.

Отметим некоторые свойства поверхности уровня.

1. Работа силы равна нулю, если начальная и конечная точки лежат на одной поверхности уровня.

2. Сила в потенциальном силовом поле всегда перпендикулярна касательной плоскости поверхности уровня.

В случае потенциального силового поля наряду с силовой функцией можно ввести другую функцию, характеризующую запас энергии в данной точке поля, – потенциальную энергию в этой точке, или потенциальную энергию материальной точки в рассматриваемой точке силового поля.

Потенциальной энергией Π материальной точки в рассматриваемой точке M силового поля называют работу, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из точки M в начальную точку M_0 , то есть

$$\Pi = A_{MM_0}$$

или

$$\Pi = U_0 - U. \quad (3.56)$$

Очевидно, что понятие потенциальной энергии можно ввести только для потенциального силового поля, в котором работа не зависит от формы траектории между точками M и M_0 .

На основании (3.50) и (3.56) имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Из выражений (3.51), (3.52) и (3.56) получаем

$$\delta A = dU = -d\Pi; \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Из приведенных формул следует, что Π определяется с точностью до произвольной постоянной C , которая зависит от выбора начальной точки:

$$\Pi = -U + C. \quad (3.57)$$

Определим силовые функции наиболее часто встречающихся однородного поля сил тяжести и силового поля линейной силы упругости тела.

Проекция силы тяжести \bar{P} на оси декартовой системы координат равны $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$.

Вычисляя элементарную работу силы \bar{P} , получаем

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = -mg dz = d(-mgz) = dU.$$

Откуда

$$U = -mgz + \text{const}. \quad (3.58)$$

Уравнение поверхности уровня $U = C$, то есть поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости, перпендикулярные оси z .

Для линейной силы упругости \bar{F} имеем

$$\bar{F} = -c\bar{r}; \quad X = -cx; \quad Y = -cy; \quad Z = -cz.$$

Вычисляя элементарную работу, получаем

$$\begin{aligned} \delta A = Xdx + Ydy + Zdz &= -c(xdx + ydy + zdz) = \\ &= -c r dr = d(-cr^2 / 2) = dU, \end{aligned}$$

так как $x dx + y dy + z dz = \bar{r} \cdot d\bar{r}$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Тогда для силовой функции линейной силы упругости получаем формулу

$$U = -\frac{cr^2}{2} + \text{const} = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const}, \quad (3.59)$$

где c – коэффициент жесткости.

В случае движения в потенциальном силовом поле не одной

точки, а механической системы, силовая функция U в общем случае зависит от координат всех точек системы $U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n)$. Проекции сил, действующих на каждую точку системы, аналогично предыдущему варианту, выражаются через силовую функцию в виде

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично определяется работа в виде суммы работ всех сил, приложенных к точкам и вводится понятие потенциальной энергии для механической системы.

Закон сохранения механической энергии точки. Для материальной точки, движущейся в стационарном потенциальном силовом поле, уравнение (3.46) теоремы об изменении кинетической энергии можно выразить следующим образом:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$$

или

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

где h – постоянная величина.

Обозначая через E полную механическую энергию точки, состоящую из ее кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$E = \frac{mV^2}{2} + \Pi = h. \quad (3.60)$$

Уравнение (3.60) есть первый интеграл дифференциальных уравнений движения точки и характеризует закон сохранения механической энергии для точки: при движении точки в стационарном потенциальном силовом поле ее полная механическая энергия остается величиной постоянной.

Закон сохранения механической энергии системы. Для механической системы, движущейся в стационарном силовом поле, уравнение (3.47) теоремы об изменении кинетической энергии можно выразить следующим образом:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{или} \quad T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h.$$

Обозначая через E полную механическую энергию системы, аналогично (3.60), имеем

$$E = T + \Pi = h. \quad (3.61)$$

Выражение (3.61) характеризует **закон сохранения механической энергии** для системы: полная механическая энергия при движении системы в стационарном потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил остается величиной постоянной.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называют **консервативными**.

В случае абсолютно твердого тела работа всех внутренних сил равна нулю и их потенциальную энергию можно принять равной нулю. Тогда в первом интеграле дифференциальных уравнений движения (3.61) за потенциальную энергию следует принять только потенциальную энергию внешних сил.

При движении точки или системы в непотенциальном поле сил, встречающемся в действительности, когда непотенциальность связана с действием сил сопротивления, механическая энергия изменяется, причем она всегда уменьшается на работу сил сопротивления. Потерянная системой часть механической энергии обычно переходит в тепловую энергию. Полная энергия всех видов (механическая, тепловая, химическая и так далее) не изменяется при движении точки или системы в любом силовом поле. При этом происходит только преобразование одного вида энергии в другой.

3.10. Примеры решения задач

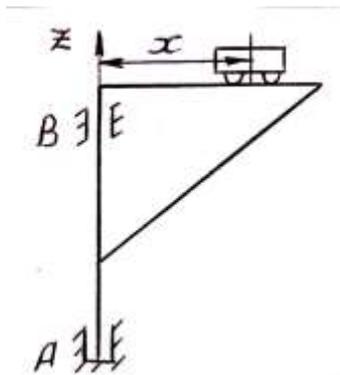


Рис. 3.9

Пример 1. Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью \bar{V} относительно стрелы (рис. 3.9). Motor, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный M . Определить угловую скорость вращения ω крана в зависимости от расстояния x тележки до оси вращения AB , если масса тележки с грузом равна m , I_z – момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка

находится на расстоянии x_0 от оси AB .

Решение. В соответствии с теоремой об изменении кинетического момента механической системы в проекции на ось вращения имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e,$$

где проекция кинетического момента

$$L_z = I_z \omega + m \omega \cdot x \cdot \dot{x}; \quad M_z^e = M.$$

Отсюда получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$I_z \dot{\omega} + m \dot{\omega} x^2 + 2m \omega x \cdot \dot{x} = M,$$

или

$$\dot{\omega} (I_z + m x^2) + \omega \cdot 2m x \cdot \dot{x} = M,$$

или

$$\frac{d}{dt} [\omega \cdot (I_z + m x^2)] = M.$$

Откуда, исключая время t и разделяя переменные, получим

$$V \frac{d}{dx} [\omega \cdot (I_z + m x^2)] = M; \quad \omega \cdot (I_z + m x^2) = \frac{M}{V} (x - x_0);$$

$$\omega = \frac{M(x - x_0)}{V(I_z + m x^2)}.$$

Пример 2. При работе строительного насоса сила сопротивления раствора движению поршня равна \bar{F} кН (рис. 3.10). Масса поршня – m_1 кг; масса шатуна AB – m_2 кг; масса кривошипа OA –

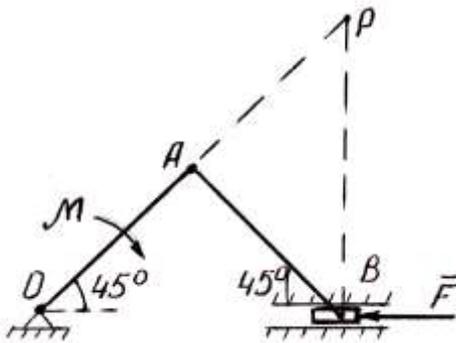


Рис. 3.10

m_3 кг. Длина кривошипа OA равна длине шатуна AB и равна r м. Кривошип приводится во вращение электродвигателем, вал которого общий с осью кривошипа. Вал электродвигателя вращается равномерно и делает n оборотов в минуту. Кривошип и шатун считать однородными тонкими стержнями. Определить кинетическую энергию

T насоса в указанном на рис. 3.10 положении, а также мощность электродвигателя N , при которой насос не сможет преодолеть сопротивление раствора в указанном положении.

Решение. Кинетическая энергия насоса

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B.$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_3 r^2}{3} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2;$$

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= \frac{1}{2} I_{pz} \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} I_{pz} \omega_{OA}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 r^2}{12} + \frac{5}{4} m_2 r^2 \right) \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2; \\
 T_B &= \frac{1}{2} m_1 V_B^2 = \frac{1}{2} m_1 (\omega_{AB} \cdot PB)^2;
 \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$T = \left(\frac{1}{6} m_3 + \frac{2}{3} m_2 + m_1 \right) r^2 \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2.$$

Мощность электродвигателя N , при которой насос не сможет преодолеть сопротивление раствора, определим, используя теорему об изменении кинетической энергии системы;

$$T - T_0 = \sum A^e.$$

В состоянии покоя уравнение теоремы примет вид $0 = \sum A^e$ или, в нашем случае,

$$Md\varphi - Fds = 0,$$

где $Md\varphi$ – работа момента, создаваемого электродвигателем; Fds – работа силы сопротивления.

Разделим уравнение на dt , получим выражение для определения мощности N электродвигателя, которой будет недостаточно для перемещения поршня насоса в указанном положении:

$$N - F \cdot V_B = 0.$$

$$N = F \cdot V_B = F \omega_{AB} \cdot PB = F \omega_{OA} \cdot PB = F \frac{\pi n}{30} \sqrt{2r} \text{ (кВт)}.$$

ГЛАВА 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, так же как и центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс (3.3) можно рассматривать в качестве дифференциальных уравнений поступательного движения твердого тела. Используя данные уравнения, можно решать два основных типа задач:

- по заданному движению твердого тела определять главный вектор приложенных к нему внешних сил;
- по заданным внешним силам и начальным условиям находить кинематические уравнения поступательного движения тела.

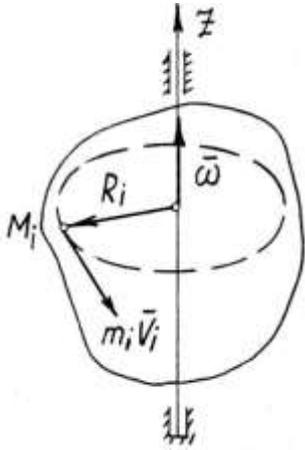


Рис. 4.1

Вращательное движение твердого тела.

Рассмотрим движение тела вокруг неподвижной оси z (рис. 4.1). Представим тело как совокупность материальных точек M_i с массой m_i и определим кинетический момент относительно оси z :

$$L_{iz} = m_i v_i R_i;$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i R_i^2.$$

Учитывая, что осевой момент инерции равен $I_z = \sum_i m_i R_i^2$, окончательно получаем

формулу для определения кинетического момента тела относительно оси вращения z в виде произведения величин осевого момента инерции I_z и угловой скорости тела ω :

$$L_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}. \quad (4.1)$$

Используя уравнение (3.25) теоремы об изменении кинетического момента, в проекциях на ось z получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e; \quad \frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z^e; \quad I_z \dot{\omega} = M_z^e$$

или, окончательно, дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e. \quad (4.2)$$

Если проекция главного момента внешних сил на ось z $M_z^e > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – вращение тела ускоренное; если $M_z^e < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – вращение тела замедленное. Если $M_z^e = 0$, $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ и $\omega = \text{const}$ – вращение тела равномерное.

Используя уравнение (4.2), можно решать следующие задачи:

- по заданному уравнению вращательного движения тела $\varphi = \varphi(t)$ и его моменту инерции I_z определять проекцию главного момента M_z^e внешних сил, действующих на тело;

- по заданным внешним силам, приложенным к телу, началь-

ным условиям вращения φ_0 , ω_0 и моменту инерции I_z находить уравнение вращения тела $\varphi = \varphi(t)$;

– зная величины M_z^e и $\ddot{\varphi}$, определять момент инерции тела I_z относительно оси вращения.

4.2. Плоскопараллельное движение твердого тела

Как известно из кинематики, плоское движение твердого тела определяется движением плоской фигуры в ее плоскости. Плоская фигура может быть взята в любом сечении тела плоскостью, параллельной заданной неподвижной. В динамике такое сечение удобно провести через центр масс тела C и за полюс взять не произвольную точку, а центр масс.

Если в плоскости этого сечения взять неподвижную систему отсчета Ox_1y_1 (рис. 4.2), то положение плоской фигуры относительно этой системы будет определять положение всего тела. Рассматривая движение плоской фигуры как

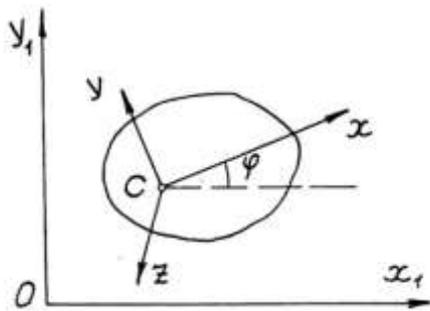


Рис. 4.2

как поступательное вместе с центром масс C и вращательное вокруг оси z , проходящей через центр масс, дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения можно представить как совокупность дифференциальных уравнений движения центра масс (3.3) и вращательного движения (4.2):

$$m\ddot{x}_{1c} = X_1^e; \quad m\ddot{y}_{1c} = Y_1^e; \quad I_z\ddot{\varphi} = M_z^e, \quad (4.3)$$

где x_{1c}, y_{1c} – координаты центра масс C в неподвижной системе отсчета; X_1^e, Y_1^e – проекции главного вектора внешних сил на оси неподвижной системы координат.

4.3. Сферическое движение твердого тела

При выводе дифференциальных уравнений сферического движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента.

Рассмотрим движение тела относительно некоторой системы

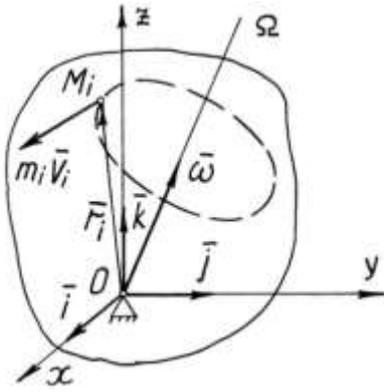


Рис. 4.3

отсчета с началом в неподвижной точке тела O (рис. 4.3) и определим кинетический момент тела относительно этой точки.

Сферическое движение в каждый момент времени можно рассматривать как вращательное вокруг мгновенной оси вращения Ω с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Для кинетического момента \bar{L}_0 , согласно его определению, имеем

$$\bar{L}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i.$$

$$\bar{V}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \bar{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \bar{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \bar{k}.$$

Откуда проекции скорости:

$$V_{ix} = \omega_y z_i - \omega_z y_i; \quad V_{iy} = \omega_z x_i - \omega_x z_i; \quad V_{iz} = \omega_x y_i - \omega_y x_i,$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i -й точки тела с массой m_i .

$$\begin{aligned} \bar{L}_0 &= \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i = \sum_i m_i \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ V_{ix} & V_{iy} & V_{iz} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_i m_i (y_i V_{iz} - z_i V_{iy}) \bar{i} + \sum_i m_i (z_i V_{ix} - x_i V_{iz}) \bar{j} + \sum_i m_i (x_i V_{iy} - y_i V_{ix}) \bar{k}. \end{aligned}$$

Проекция кинетического момента на ось x :

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i [y_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i)] = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i. \end{aligned}$$

Учитывая, что суммы в полученном выражении представляют собой соответственно осевой I_x и центробежные I_{xy}, I_{xz} моменты инерции, для L_x , а также по аналогии для L_y и L_z получаем

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z; \\ L_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z; \\ L_z &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Если за оси координат принять главные оси инерции, то центробежные моменты инерции равны нулю и формулы (4.4) принимают более простой вид:

$$L_x = I_x \omega_x; \quad L_y = I_y \omega_y; \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (4.5)$$

Дифференциальные уравнения движения получим как проекции уравнения теоремы об изменении кинетического момента. Согласно этой теореме

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e.$$

Если спроектировать данное уравнение на оси неподвижной системы координат, то в эти проекции, согласно (4.4) или (4.5), войдут изменяющиеся моменты инерции, для вычисления которых следует уже знать движение тела, как раз и подлежащее определению.

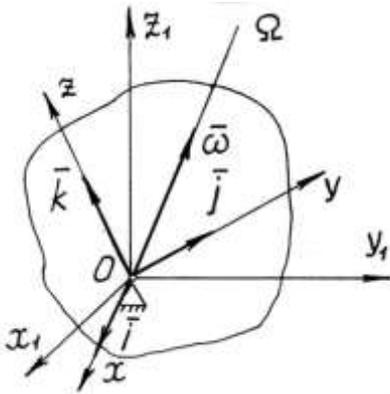


Рис. 4.4

Чтобы избежать этого, Эйлером предложено проектировать уравнение теоремы на оси подвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис. 4.4), жестко связанной с твердым телом.

По аналогии с кинематикой сложного движения точки выразим полную производную от кинетического момента по времени через локальную производную, учитывая, что векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} подвижные:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d\tilde{L}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{L}_0 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = (\omega_y L_z - \omega_z L_y) \bar{i} + \\ &+ (\omega_z L_x - \omega_x L_z) \bar{j} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) \bar{k}. \end{aligned}$$

Учитывая (4.6), теорема об изменении кинетического момента в проекциях на оси координат запишется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y &= M_x^e; \\
\frac{dL_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z &= M_y^e; \\
\frac{dL_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x &= M_z^e.
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

Если за оси неподвижной системы отсчета принять главные оси инерции, то, с учетом (4.5), уравнения (4.7) упростятся:

$$\begin{aligned}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x^e; \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y^e; \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z^e.
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

Дифференциальные уравнения сферического движения тела (4.8) называют еще динамическими уравнениями Эйлера. К динамическим уравнениям следует присоединить кинематические уравнения Эйлера, выражающие проекции вектора угловой скорости на подвижные оси через углы Эйлера φ , ψ , θ , и их производные по времени:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\
\omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\
\omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

4.4. Понятие о гироскопе

Важным приложением теории сферического движения является описание движения гироскопа.

Гироскопом называется твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

Ось симметрии z является главной осью инерции, поэтому кинетические моменты определяются по формуле (4.5). Рассмотрим некоторые возможные случаи (рис. 4.5).

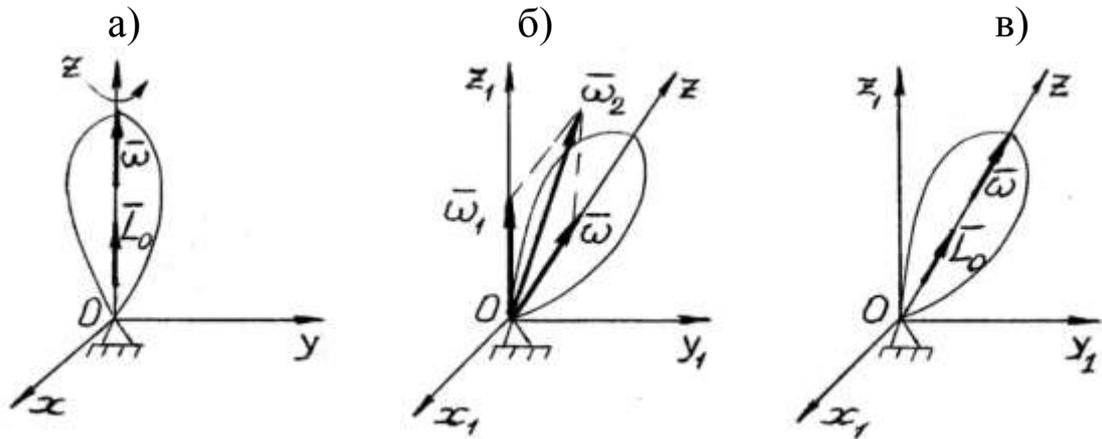


Рис. 4.5

Пусть ось z неподвижна (рис. 4.5, а). Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega = \omega_z$; $L_x = L_y = 0$, $L_z = I_z \omega_z = I_z \omega$; $L_0 = L_z = I_z \omega$. Вектор кинетического момента \bar{L}_0 направлен вдоль оси гироскопа.

Рассмотрим случай вращения оси z вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ (рис. 4.5, б). Тогда абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1$. Проекции \bar{L}_0 определяются по формулам (4.5); направление \bar{L}_0 не совпадает с осью гироскопа.

Пусть ось z вращается вокруг неподвижной оси z_1 с угловой скоростью ω_1 , величина которой $\omega_1 \ll \omega$. В этом случае величиной $\bar{\omega}_1$ можно пренебречь и вектор \bar{L}_0 направить вдоль оси z (рис. 4.5, в). $\bar{L}_0 = I_z \omega$. На этом допущении построена приближенная теория гироскопов.

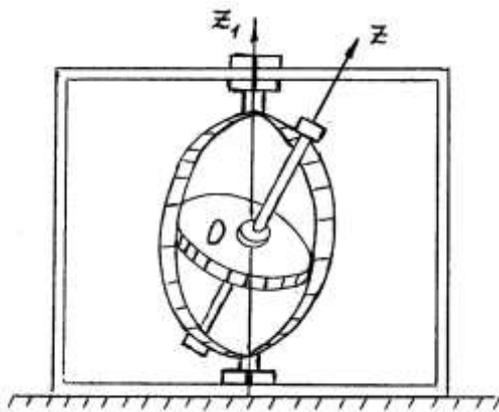


Рис. 4.6

Если неподвижная точка O совпадает с центром тяжести гироскопа, то можно установить, что быстрое вращение сообщает гироскопу способность противодействовать силам, стремящимся изменить направление его оси вращения. Причем смещение оси быстро вращающегося гироскопа происходит не по направлению силы, а по направлению ее момента, перпендикулярно к направлению силы.

Если неподвижная точка O не совпадает с центром тяжести

При изготовлении гироскопов крепление оси гироскопа в одной точке обычно осуществляют с помощью рамок той или иной формы (рис. 4.6).

гироскопа и движение происходит только при наличии силы тяжести, то будем иметь случай так называемой **регулярной прецессии** – вращение вокруг оси симметрии z с угловой скоростью $\bar{\omega}$, и вращение оси z вокруг неподвижной оси z_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$, называемой **угловой скоростью прецессии**. Угол θ между осями z и z_1 при этом остается постоянным. Угловая скорость прецессии $\bar{\omega}_1$ тем меньше, чем больше угловая скорость $\bar{\omega}$ вращения гироскопа вокруг его оси симметрии. Простейшим примером такого гироскопа является детский волчок.

Следует отметить, что гироскоп с двумя степенями свободы, в отличие от вышерассмотренного с тремя степенями свободы, не обладает способностью противодействовать изменению направления его оси вращения.

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УДАРА

5.1. Общие понятия

Ударом называется явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину.

Силы, которые развиваются при ударе, называются **мгновенными** или **ударными**.

Длительность удара составляет обычно десятые и меньшие части долей секунды. В простейших случаях удар проявляется как почти мгновенное наложение или снятие связей, например, столкновение движущегося тела с неподвижным.



Рис. 5.1

Изменение скоростей точек при ударе на конечные величины связано с большими ударными ускорениями этих точек, возникновение которых требует больших ударных сил. Если \bar{F} – ударная сила, τ – длительность или время удара, то характерный график изменения ударной силы за время удара от момента времени t_1 до момента времени t_2 имеет вид, показанный на рис. 5.1.

Ударная сила быстро возрастает от нуля в момент удара до максимального значения, затем также быст-

ро уменьшается обычно по другому закону до нуля в конце удара. Во многих случаях не требуется детального знания закона изменения ударной силы. Достаточно только знать суммарный импульс этой быстро меняющейся силы за время удара или ударный импульс.

Ударным импульсом называется вектор

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt. \quad (5.1)$$

Величина ударного импульса равна заштрихованной на рис. 5.1 площади. Иногда рассматривают среднюю ударную силу \bar{F}_{cp} . Тогда ударный импульс можно представить в виде

$$\bar{S} = \bar{F}_{\text{cp}} \tau. \quad (5.2)$$

Основные свойства действия ударной силы:

- действием немгновенных или неударных сил за время удара можно пренебречь;
- перемещения точек за время удара можно не учитывать.

Многие величины, характеризующие удар, с достаточной точностью могут быть получены из общих теорем динамики. Рассмотрим особенности применения этих теорем к явлению удара.

Теоремы об изменении количества движения точки и механической системы в конечной форме, соответственно, примут вид

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}; \quad (5.3)$$

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_i \bar{S}_i^e, \quad (5.4)$$

где \bar{S} – ударный импульс ударной силы, приложенной к точке; $\sum_i \bar{S}_i^e$ – сумма ударных импульсов внешних ударных сил, приложенных к механической системе.

Теорема о движении центра масс в конечной форме следует из формулы (5.4).

$$m(\bar{V}_C - \bar{V}_{C_0}) = \sum_i \bar{S}_i^e, \quad (5.5)$$

где \bar{V}_C, \bar{V}_{C_0} – скорости центра масс до и после удара.

Из (5.3) можно получить теорему Кельвина для работы ударной силы за время удара. Непосредственно вычислить работу ударной силы за время удара трудно, так как ударные силы очень большие, а перемещения точек системы за время удара очень малы и ими пренебрегают. Теорема Кельвина позволяет выразить работу силы через импульс силы и среднее значение скоростей точки, то есть через конечные величины. Умножив (5.3) последовательно на \bar{V} и \bar{V}_0 скалярно, получим

$$\begin{aligned} mV^2 - m\bar{V} \cdot \bar{V}_0 &= \bar{S} \cdot \bar{V}; \\ m\bar{V} \cdot \bar{V}_0 - mV_0^2 &= \bar{S} \cdot \bar{V}_0 \end{aligned}$$

После сложения этих равенств и деления на 2 имеем

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{V} + \bar{V}_0).$$

С учетом теоремы об изменении кинетической энергии точки

$$A = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{V} + \bar{V}_0). \quad (5.6)$$

Теорема Кельвина. Работа силы, приложенной к точке за какой-либо промежуток времени, равна скалярному произведению импульса силы за этот же промежуток времени на полусумму начальной и конечной скоростей точки.

Для механической системы теорема Кельвина следует из (5.6) путем суммирования по всем точкам системы.

Теорема Кельвина применима ко всем случаям движения точки и механической системы, в том числе и к явлению удара.

Теоремы об изменении кинетического момента точки и механической системы в конечной форме соответственно примут вид

$$\bar{r} \times m\bar{V} - \bar{r} \times m\bar{V}_0 = \bar{r} \times \bar{S}; \quad (5.7)$$

$$\bar{L}_0 - \bar{L}_0^{(0)} = \sum_i \bar{M}_0(\bar{S}_i^e), \quad (5.8)$$

где $\bar{L}_0^{(0)}$, \bar{L}_0 – кинетический момент механической системы до и после удара относительно некоторого центра 0; $\sum_i \bar{M}_0(\bar{S}_i^e)$ – сумма моментов внешних ударных импульсов относительно того же центра.

5.2. Удар шара о неподвижную поверхность

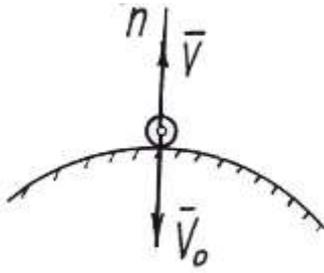


Рис. 5.2

Удар называют **прямым**, если скорость точки \bar{V}_0 перед ударом направлена по нормали к поверхности в точке удара (рис. 5.2). После удара материальная точка отделится от поверхности, имея в общем случае скорость \bar{V} , направленную тоже по нормали к поверхности.

Различают две фазы удара. В течение первой фазы шар деформируется до тех пор, пока скорость его не станет равной нулю. При этом вся кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию сил упругости деформированного тела и частично идет на его нагревание. В течение второй фазы под воздействием сил упругости шар частично восстанавливает свою форму. Кинетическая энергия при этом полностью не восстанавливается, то есть после удара скорость шара \bar{V} будет меньше начальной \bar{V}_0 . Отношение $k = |\bar{V} / \bar{V}_0|$ называется коэффициентом восстановления при ударе.

Если $k = 1$, то удар называют **абсолютно упругим**, если $k = 0$ – **абсолютно неупругим**. Удар заканчивается одной первой фазой. Если $0 < k < 1$, то удар называют **просто упругим** (или **частично упругим**).

На точку (шар) при прямом ударе о неподвижную поверхность действует ударная сила в виде нормальной реакции поверхности \bar{N} . Если пренебречь импульсом неударной силы тяжести шара и рассмотреть отдельно импульсы ударной силы \bar{N} во время первой (\bar{S}_1) и второй (\bar{S}_2) фаз удара, то, используя теорему об изменении количества движения (5.3), коэффициент восстановления k можно выразить через величины ударных импульсов:

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \quad (5.9)$$

Таким образом, коэффициент восстановления при прямом ударе точки о неподвижную поверхность равен отношению величин ударных импульсов за вторую S_2 и первую S_1 фазы удара.

Удар называется **непрямым** или **косым**, если скорость точки перед ударом направлена под некоторым углом α к нормали поверхности (рис. 5.3). Угол α называют **углом падения**. При $\alpha = 0$

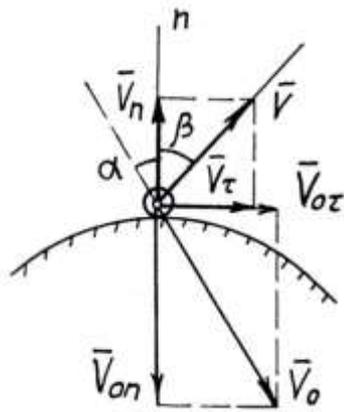


Рис. 5.3

имеем прямой удар. В общем случае скорость точки \bar{V} после удара составит с нормалью к поверхности угол β , который называют **углом отражения**.

Разложим скорости до и после удара на нормальные и касательные составляющие:

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_{0n} + \bar{V}_{0\tau}; \quad \bar{V} = \bar{V}_n + \bar{V}_\tau.$$

Коэффициентом восстановления при косом ударе называют величину $k = |V_n / V_{0n}|$.

Применение теоремы об изменении количества движения в проекциях на нормаль к поверхности приводит к выражению коэффициента восстановления через ударные импульсы:

$$k = \frac{S_{2n}}{S_{1n}}, \quad (5.10)$$

где S_{1n} , S_{2n} – проекции ударных импульсов на нормаль к поверхности за первую и вторую фазы удара.

В случае неидеально гладкой поверхности $V_\tau < V_{0\tau}$. В дальнейшем принимаем, что поверхность не обладает ударным трением, и поэтому $V_\tau = V_{0\tau}$. В этом случае

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_\tau}{V_n} = \frac{V_{0\tau}}{V_n}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{0\tau}}{V_{0n}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Последняя формула выражает зависимость между углом падения и углом отражения при различных коэффициентах восстановления и отсутствии ударного трения.

При абсолютно упругом ударе и отсутствии ударного трения кинетическая энергия точки и системы точек не изменяется за время удара. При упругом и абсолютно неупругом ударах кинетическая энергия изменяется.

Изменение кинетической энергии в случае абсолютно неупругого удара при мгновенном наложении связей для точки и системы, отсутствии ударного трения определяется теоремой Карно.

Теорема Карно. Потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе в случае мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянной скорости точки или потерянных скоростей точек системы.

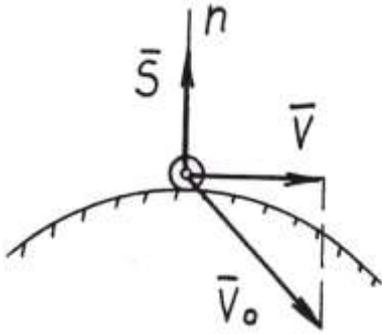


Рис. 5.4

Рассмотрим удар одной точки в рассматриваемых условиях (рис. 5.4). Умножая уравнение (5.3) скалярно на \bar{V} и учитывая, что $\bar{S} \cdot \bar{V} = 0$, получим

$$mV^2 - m\bar{V}_0 \cdot \bar{V} = 0.$$

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия точки уменьшится на величину $mV_0^2/2 - mV^2/2$. Добавляя в это выражение величину, равную нулю, в виде вышеприведенной формулы, получим

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}(\bar{V}_0 - \bar{V})^2. \quad (5.11)$$

Векторную величину $\bar{V}_0 - \bar{V}$ называют **потерянной скоростью**.

В случае механической системы, суммируя по всем точкам уравнения (5.11), уравнение теоремы Карно примет аналогичный (5.11) вид:

$$T_0 - T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{V}_{0i} - \bar{V}_i)^2. \quad (5.12)$$

При этом для каждой точки системы, испытывающей удар, должно выполняться условие $\bar{S}_i \cdot \bar{V}_i = 0$ или $\sum_i \bar{S}_i \cdot \bar{V}_i = 0$.

5.3. Соударение двух тел

Соударение тел рассмотрим на примере удара двух тел с массами m_1 и m_2 , движущихся поступательно со скоростями V_{01} и V_{02} . Будем предполагать, что у соударяющихся тел отсутствует ударное трение. Ударные импульсы в этом случае направлены по общей нормали в месте соприкосновения тел, то есть по так называемой **линии удара**.

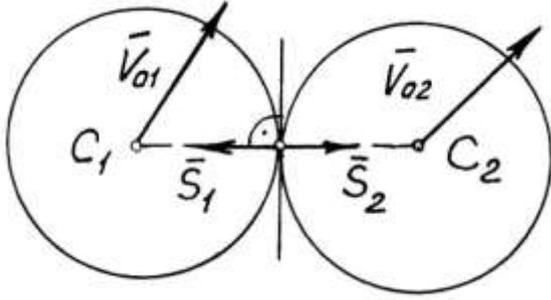


Рис. 5.5

В случае **центрального удара** линия удара проходит через центры масс тел (рис. 5.5).

Применим теорему об изменении количества движения при ударе к каждому телу в отдельности:

$$m_1 \bar{V}_1 - m_1 \bar{V}_{01} = \bar{S}_1;$$

$$m_2 \bar{V}_2 - m_2 \bar{V}_{02} = \bar{S}_2.$$

При ударе двух тел в соответствии с законом равенства действия и противодействия $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$. Поэтому из записанных выражений получаем

$$m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 = m_1 \bar{V}_{01} + m_2 \bar{V}_{02}, \quad (5.13)$$

то есть количество движения при ударе двух тел не изменяется.

Если удар абсолютно неупругий, то скорости тел после удара одинаковы и равны \bar{V} . Тогда из (5.13) имеем

$$V = \frac{m_1 \bar{V}_{01} + m_2 \bar{V}_{02}}{m_1 + m_2}. \quad (5.14)$$

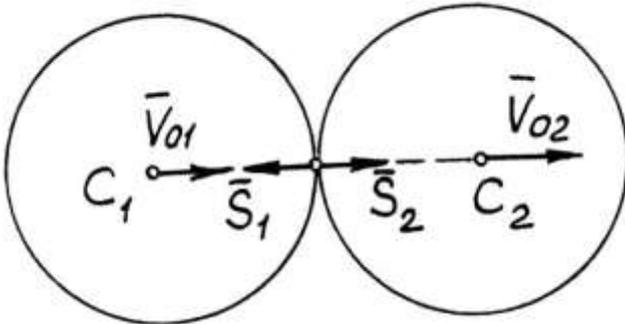


Рис. 5.6

Рассмотрим прямой удар (рис. 5.6). Тогда скорости тел до удара V_{01} и V_{02} направлены по линии удара. Проектируя (5.14) на линию удара, получаем

$$V = \frac{m_1 V_{01} + m_2 V_{02}}{m_1 + m_2}.$$

Используя для прямого центрального удара теорему об изменении количества движения в проекции на линию удара, а также выражение для коэффициента восстановления через ударные импульсы, можно получить формулу для определения коэффициента восстановления в виде

$$k = -\frac{(V_1 - V_2)}{V_{01} - V_{02}}, \quad (5.15)$$

а уравнение теоремы Карно для потери кинетической энергии в форме

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (V_{01} - V_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_{02} - V_2)^2 \right]. \quad (5.16)$$

При абсолютно упругом соударении ($k = 1$) потери кинетической энергии не происходит:

$$T_0 - T = 0,$$

а при неупругом соударении ($k = 0$) выражение (5.16) принимает вид

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (V_{01} - V_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_{02} - V_2)^2. \quad (5.17)$$

5.4. Центр удара вращающегося тела

Можно показать, что если по вращающемуся твердому телу произвести удар, приложив ударный импульс \bar{S} , то при выполнении некоторых условий не возникнет ударных реакций в подшипниках оси вращения. Получим эти условия.

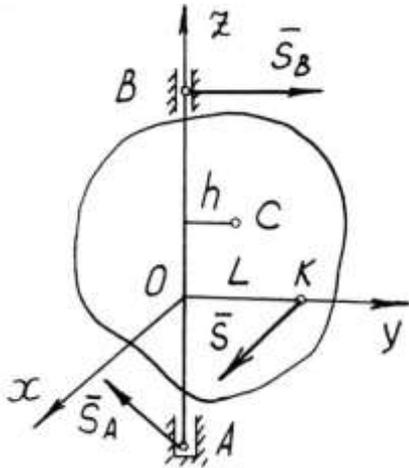


Рис. 5.7

Пусть твердое тело AB с неподвижной осью, по которой направлена координатная ось z , имеет до удара угловую скорость $\bar{\omega}_0$ (рис. 5.7). К телу приложен ударный импульс \bar{S} . После удара угловая скорость изменилась и стала равной $\bar{\omega}$. Освободим тело от связей и заменим их импульсами реакций \bar{S}_A и \bar{S}_B . Запишем теоремы об изменении количества движения и кинетического момента:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{S}_B; \quad (5.18)$$

$$\bar{L}_0 - \bar{L}_0^{(0)} = \bar{M}_0(\bar{S}) + \bar{M}_0(\bar{S}_A) + \bar{M}_0(\bar{S}_B).$$

Количество движения \bar{Q} можно определить по формуле

$$\bar{Q} = m\bar{V}_c = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_c).$$

Тогда, учитывая, что $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ направлены по одной оси, получим

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega - \omega_0 \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = m [-y_c(\omega - \omega_0)\bar{i} + x_c(\omega - \omega_0)\bar{j}]. \quad (5.19)$$

Проекции кинетического момента на оси координат определим

по формулам (4.4) для тела, имеющего одну закрепленную точку, при условии, что $\omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega$. Имеем

$$L_x = -I_{xz}\omega; \quad L_y = -I_{yz}\omega; \quad L_z = I_z\omega.$$

Используя эти формулы, получаем:

$$\begin{aligned} L_{0x} - L_{0x}^{(0)} &= -I_{xz}(\omega - \omega_0); \\ L_{0y} - L_{0y}^{(0)} &= -I_{yz}(\omega - \omega_0); \\ L_{0z} - L_{0z}^{(0)} &= I_z(\omega - \omega_0). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Проектируя (5.18) на оси координат и учитывая (5.19) и (5.20), получим

$$\begin{aligned} -m y_c (\omega - \omega_0) &= S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \\ m x_c (\omega - \omega_0) &= S_y + S_{Ay} + S_{By}; \\ 0 &= S_z + S_{Az}; \\ -I_{xz} (\omega - \omega_0) &= M_x(\bar{S}) + M_x(\bar{S}_A) + M_x(\bar{S}_B); \\ -I_{yz} (\omega - \omega_0) &= M_y(\bar{S}) + M_y(\bar{S}_A) + M_y(\bar{S}_B); \\ I_z (\omega - \omega_0) &= M_z(\bar{S}) + M_z(\bar{S}_A) + M_z(\bar{S}_B). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Из системы уравнений (5.21) можно определить составляющие импульсов реакций связей \bar{S}_A и \bar{S}_B , а также изменение величины угловой скорости $\omega - \omega_0$ при ударе для заданного тела и внешнего ударного импульса S .

Для определения условий, при которых удар по телу не вызывает ударных реакций в подшипниках, необходимо в уравнениях (5.21) положить $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$. Тогда система уравнений (5.21) примет вид

$$\begin{aligned} -m y_c (\omega - \omega_0) &= S_x; \\ m x_c (\omega - \omega_0) &= S_y; \\ 0 &= S_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -I_{xz}(\omega - \omega_0) &= M_x(\bar{S}); \\
 -I_{yz}(\omega - \omega_0) &= M_y(\bar{S}); \\
 I_z(\omega - \omega_0) &= M_z(\bar{S}).
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

Из соотношений (5.22) следует: так как $S_z = 0$, то ударный импульс \bar{S} должен находиться в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Выберем начало координат O на оси вращения так, чтобы импульс \bar{S} лежал в плоскости Oxy , а координатную ось x направим параллельно \bar{S} (рис. 5.7). Тогда ударный импульс \bar{S} пересечет ось y в точке K . При таком выборе осей координат $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(\bar{S}) = 0$, $M_y(\bar{S}) = 0$. Тогда из второго условия (5.22) получаем $x_c = 0$, из четвертого $-I_{xz} = 0$, из пятого $-I_{yz} = 0$, то есть центр масс находится в плоскости Oyz и ось вращения z является главной осью инерции для точки O . Ударный импульс \bar{S} должен быть перпендикулярен плоскости Oyz , проходящей через центр масс и ось вращения.

Если ввести в рассмотрение длину $L = OK$, $M_z(\bar{S}) = -LS$, тогда, исключая S из первого и шестого уравнений (5.22), получаем

$$L = OK = \frac{I_z}{my_c} = \frac{I_z}{mh}. \tag{5.23}$$

Формула (5.23) аналогична формуле для вычисления приведенной длины физического маятника.

Точка пересечения K линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс при отсутствии ударных реакций в подшипниках, называется **центром удара**.

Если центр масс находится на оси вращения, то $h = y_c = 0$ и расстояние L от оси вращения до центра удара согласно (5.23) равно бесконечности. В этом случае центра удара не существует и внешний ударный импульс, приложенный к телу, целиком передается на подшипники.

Полученные условия отсутствия ударных реакций на подшипники имеют большое практическое значение при конструировании

машин, подвергающихся при своей работе действию ударных нагрузок. Даже в быту неопытный человек, беря в руки молоток и ударяя им по какому-либо предмету, чувствует боль в ладони при ударе. Опытный же человек, работая молотком часами, не испытывает заметной боли. Объясняется это тем, что ударная реакция поверхности, по которой производится удар, стремится заставить молоток вращаться вокруг оси, проходящей через ладонь человека. Последний же, в результате приобретенной сноровки, держит молоток за такое место ручки, чтобы ударный импульс проходил через центр удара молотка, поэтому на оси вращения, то есть на ладони руки, реактивный импульс ощущаться не будет.

ГЛАВА 6. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

6.1. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы

Принципом Даламбера называют общий метод, при помощи которого уравнениям динамики по форме придают вид уравнений статики.

Запишем основное уравнение динамики в общем случае несвободной материальной точки:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (6.1)$$

где \bar{F} – равнодействующая активных сил; \bar{R} – равнодействующая реакций связей.

Вводя в рассмотрение силу инерции $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$, представим уравнение (6.1) в виде векторного уравнения, аналогичного векторному условию равновесия системы сходящихся сил, которое и характеризует принцип Даламбера для материальной точки:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (6.2)$$

Принцип Даламбера для материальной точки. При движении материальной точки в каждый момент времени геометрическая сумма всех приложенных к точке активных сил, реакций связей и силы инерции точки равна нулю.

Этот принцип говорит о том, что если к точке помимо активных сил и реакций связей условно приложить и силу инерции, то силовой многоугольник будет замкнутым. В действительности сила инерции

материальной точки приложена не к ней, а к телу, сообщающему точке ускорение (на основе основных законов динамики).

При изучении движения механической системы запишем уравнение принципа Даламбера (6.2) для каждой точки системы.

Тогда для i -й точки

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (*)$$

Сложим все n уравнений:

$$\sum_i \bar{F}_i + \sum_i \bar{R}_i + \sum_i \bar{\Phi}_i = 0$$

или

$$\bar{R}^F + \bar{R}^R + \bar{R}^\Phi = 0, \quad (6.3)$$

где \bar{R}^F – главный вектор активных сил; \bar{R}^R – главный вектор реакций связей; \bar{R}^Φ – главный вектор сил инерции.

Проведем из произвольного неподвижного центра O в каждую точку системы радиусы-векторы \bar{r}_i . Умножим уравнение (*) векторно слева на \bar{r}_i и сложим все n уравнений:

$$\sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{R}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{\Phi}_i = 0$$

или

$$\bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\Phi = 0, \quad (6.4)$$

где \bar{M}_0^F – главный момент активных сил относительно центра O ; \bar{M}_0^R – главный момент реакций связей относительно центра O ; \bar{M}_0^Φ – главный момент сил инерции точек относительно центра O .

Выражения (6.3) и (6.4) характеризуют принцип Даламбера для механической системы.

Принцип Даламбера для механической системы. При движении механической системы в каждый момент времени геометрические суммы главных векторов и главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции материальных точек равны нулю.

В проекциях на оси координат уравнения (6.3) и (6.4) аналогичны уравнениям равновесия статики:

$$\sum_i X_i = 0; \quad \sum_i M_{xi} = 0; \quad \sum_i Y_i = 0; \quad \sum_i M_{yi} = 0; \quad \sum_i Z_i = 0; \quad \sum_i M_{zi} = 0. \quad (6.5)$$

6.2. Приведение сил инерции твердого тела к простейшему виду

Активные силы и реакции связей, приложенные к телу, разделим на внешние и внутренние силы. Тогда уравнения принципа Даламбера (6.3) и (6.4) будут иметь вид

$$\bar{R}^e + \bar{R}^I + \bar{R}^\Phi = 0, \quad \bar{M}_0^e + \bar{M}_0^I + \bar{M}_0^\Phi = 0.$$

По свойству внутренних сил $\bar{R}^I = 0$, $\bar{M}_0^I = 0$.

Тогда уравнения принципа Даламбера для твердого тела запишутся в виде

$$\bar{R}^e + \bar{R}^\Phi = 0; \quad \bar{M}_0^e + \bar{M}_0^\Phi = 0.$$

Рассматривая эти два уравнения совместно с уравнениями теорем об изменении количества движения и кинетического момента механической системы:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e,$$

получим

$$\bar{R}^\Phi = -\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{V}_c)}{dt} = -m\bar{a}_c; \quad \bar{M}_0^\Phi = -\frac{d\bar{L}_0}{dt},$$

то есть

$$\bar{R}^\Phi = -m\bar{a}_c; \quad \bar{M}_0^\Phi = -\frac{d\bar{L}_0}{dt}. \quad (6.6)$$

Таким образом, силы инерции твердого тела приводятся к главному вектору сил инерции и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции, которые определяются по формулам (6.6).

Рассмотрим частные случаи движения твердого тела.

Поступательное движение. Главный вектор сил инерции

$$\bar{R}^\Phi = -m\bar{a}_c.$$

Для определения главного момента возьмем за центр приведения центр масс:

$$\bar{M}_c^\Phi = -\frac{d\bar{L}_c}{dt}; \quad \bar{L}_c = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_c = \sum_i m_i \bar{r}_i \times \bar{V}_c = m\bar{r}_c \times \bar{V}_c = 0,$$

так как $\bar{r}_c = 0$.

Отсюда следует, что $\bar{M}_c^\Phi = 0$.

Таким образом, силы инерции приводятся к равнодействующей

щей, равной главному вектору сил инерции $\bar{R}^\Phi = -m\bar{a}_c$.

Вращательное движение. Если за центр приведения принять точку O на оси вращения, то получим

$$\bar{R}^\Phi = -m\bar{a}_c; \quad \bar{M}_0^\Phi = -\frac{d\bar{L}_0}{dt}.$$

Если центр масс находится на оси вращения, то $\bar{a}_c = 0$. Откуда следует, что $\bar{R}^\Phi = 0$, и силы инерции приводятся к паре сил с моментом $\bar{M}_0^\Phi = -d\bar{L}_0/dt$, который в проекциях на оси координат записывается в виде

$$M_x^\Phi = -\frac{dL_x}{dt}; \quad M_y^\Phi = -\frac{dL_y}{dt}; \quad M_z^\Phi = -\frac{d(I_z\omega)}{dt} = -I_z\varepsilon.$$

Если ось z является главной центральной осью инерции, то, принимая за центр приведения центр масс, получим

$$\bar{M}_c^\Phi = -I_z\varepsilon.$$

Плоскопараллельное движение. Возьмем за центр приведения центр масс. Если ось z есть главная центральная ось инерции, то

$$\bar{R}^\Phi = -m\bar{a}_c; \quad \bar{M}_c^\Phi = -I_z\varepsilon.$$

ГЛАВА 7. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В первой части теоретической механики «Статика» мы изучили равновесие одного абсолютно твердого тела. Естественно, возникает вопрос, как же изучить равновесие системы тел и вообще любой механической системы. Для изучения равновесия и движения механической системы удобно применять аналитические методы, которые объединяются под общим названием «Аналитическая механика», а то, что изучено в первой части, можно назвать «Геометрическая статика». В основе аналитической механики лежат понятия возможного перемещения, принципа возможных перемещений, обобщенных координат и обобщенных сил. Впервые в систематизированном виде аналитическая механика была изложена Лагранжем.

7.1. Связи и их классификация

Для дальнейшего изложения аналитической механики необходимо более подробно рассмотреть и обобщить связи, налагаемые на точки механической системы.

В отличие от классической механики Ньютона под связями будем понимать не тела, а **условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы.**

Математически связи могут быть выражены уравнениями, в которые входят координаты точек механической системы, производные от них по времени и непосредственно время. В дальнейшем ограничимся рассмотрением связей, в уравнения которых могут входить производные от координат по времени не выше первого порядка. Тогда уравнение связи механической системы, состоящей из n точек, можно представить в виде уравнения

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0.$$

В зависимости от вида данной функции связи разделяются следующим образом:

- геометрические и кинематические;
- склерономные (стационарные) и реономные (нестационарные);
- голономные и неголономные;
- удерживающие и недерживающие.

Геометрическими называются связи, в уравнения которых входят только координаты системы и, может быть, время.

Кинематическими называют связи, в уравнения которых кроме координат точек механической системы входят и производные от них по времени, а также, может быть, время.

Склерономными (стационарными) называют связи, в уравнения которых время явно не входит.

Реономными (нестационарными) называют связи, в уравнения которых явно входит время.

Голономными называют все геометрические связи, а также те из кинематических, которые путем интегрирования могут быть сведены к геометрическим.

Неголономными называют кинематические связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы.

Удерживающими называют связи, от которых система не мо-

жет освободиться.

Неудерживающими называют связи, которые система может покинуть.

Кроме приведенной классификации все связи можно разделить на **реальные и идеальные**. К идеальным связям относятся все связи без трения. Некоторые связи с трением тоже относятся к идеальным. Обобщение понятия идеальности связи будет приведено в дальнейшем после введения понятия возможного перемещения механической системы.

7.2. Возможные (виртуальные) перемещения механической системы. Идеальные связи

Возможными или виртуальными перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Возможное перемещение точки можно рассматривать как некоторое изменение радиуса-вектора этой точки; будем обозначать его символом $\delta\vec{r}$.

Действительное элементарное перемещение $d\vec{r}$ точки тоже должно быть совместимо со связями. Однако возможное перемещение имеет два существенных различия от действительного.

1. Действительное перемещение $d\vec{r} = \vec{V}dt$ какой-либо точки всегда единственное, определяемое вектором скорости точки в данный момент времени. Перемещение же $\delta\vec{r}$ – есть любое воображаемое элементарное перемещение, которое можно придать точке при единственном условии сохранения действия связей. Поэтому оно не единственно, и обычно можно указать бесконечное множество таких перемещений. Например, при движении точки по поверхности возможными перемещениями являются все элементарные перемещения, лежащие в касательной плоскости, проведенной через положение точки в данный момент.

2. Действительные перемещения происходят во времени, так что $d\vec{r}$ есть перемещение точки за время dt . Возможное же перемещение, как воображаемое, можно совсем не связывать с изменением времени.

Очевидно, что если связь стационарна, то элементарное дей-

ствительное перемещение точки принадлежит к числу возможных.

Возможное перемещение точки $\delta\vec{r}$ считают **изохронной вариацией** радиуса-вектора, то есть его полным дифференциалом, но при фиксированном времени, когда изменяются (варьируются) только координаты точки. Соответственно $\delta x, \delta y, \delta z$ – изохронные вариации координат точки, допускаемые связями. Действительное перемещение $d\vec{r}$ является полным дифференциалом радиуса-вектора, который определяется по изменению координат точки в зависимости от изменения времени. Соответственно dx, dy, dz – полные дифференциалы координат точки при изменении независимого переменного t на величину dt .

Вследствие уравнений связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми. Число независимых возможных перемещений называют **числом степеней свободы системы**.

Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям точек.

Элементарную работу силы на возможном перемещении ее точки приложения вычисляют по обычным формулам для элементарной работы, например

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

и другим формулам для элементарной работы.

Идеальные связи. В классической механике Ньютона для одной материальной точки, а также для абсолютно твердого тела мы называли связь идеальной, если реакция связи нормальна к ее поверхности. Нетрудно видеть, что в случае механической системы такое определение годится не для всякой связи.

Возьмем, например, систему, состоящую из двух материальных точек M_1 и M_2 , соединенных между собой идеальным, то есть нерастяжимым и невесомым, стержнем. С помощью этой связи каждая из точек воздействует на другую, поэтому реакции стержня \vec{R}_1 и \vec{R}_2 являются в то же время силами взаимодействия точек; следовательно, по закону равенства действия и противодействия, они

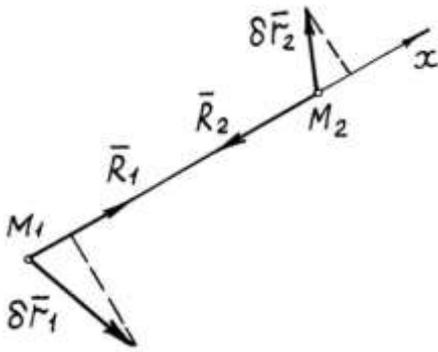


Рис. 7.1

направлены по стержню противоположно друг другу (рис. 7.1). Как видим, здесь нельзя указать никакой поверхности или линии, к которой эти реакции были бы нормальны. Поэтому в аналитической механике определение идеальной связи обобщается следующим образом.

Связи механической системы называются **идеальными**, если элементарная работа реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю для связей удерживающих и не меньше нуля для связей не удерживающих:

$$\sum_i \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i \geq 0. \quad (7.1)$$

Возвращаясь теперь к примеру со стержнем (рис. 7.1), оценим характер этой связи в свете обобщенного определения идеальной связи (7.1). С наложенной на точки M_1 и M_2 связью совместимы такие перемещения $\delta \bar{r}_1$ и $\delta \bar{r}_2$, которые дают одинаковые проекции δr_{1x} и δr_{2x} на направление x вдоль стержня, ибо иначе стержень изменил бы свою длину. Тогда, пользуясь равенствами $R_1 = R_2$; $\delta r_{1x} = \delta r_{2x}$, находим работы реакций:

$$\bar{R}_1 \cdot \delta \bar{r}_1 + \bar{R}_2 \cdot \delta \bar{r}_2 = R_1 \delta r_{1x} - R_2 \delta r_{2x} = 0.$$

Следовательно, удерживающая связь в виде нерастяжимого стержня, связывающего точки данной системы, является идеальной связью.

7.3. Принцип возможных (виртуальных) перемещений

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы, подчиненной идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы работа активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю для связей удерживающих и была бы не больше нуля для связей не удерживающих:

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i \leq 0. \quad (7.2)$$

Покажем необходимость сформулированного условия. Пусть система находится в равновесии. Тогда для каждой точки системы справедливо уравнение равновесия:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \bar{F}_i – равнодействующая активных сил, а \bar{R}_i – равнодействующая реакций связей.

Придадим системе какое-либо возможное перемещение, при котором каждая точка системы получит некоторое перемещение $\delta\bar{r}_i$. Умножим скалярно каждое из уравнений равновесия на $\delta\bar{r}_i$ и просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i + \sum_i \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0.$$

Так как связи идеальные, то согласно (7.1) $\sum_i \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i \geq 0$. Откуда $\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i \leq 0$.

Докажем достаточность сформулированного условия методом от противного. Пусть справедливо условие (7.2), а система не находится в равновесии. В случае склерономных связей действительные перемещения совпадают с одними из возможных, и силы \bar{F}_i и \bar{R}_i совершают на этих перемещениях положительную работу:

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i + \sum_i \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i > 0.$$

Так как в качестве возможных рассматриваются действительные перемещения, то в условиях (7.1) всегда будет иметь место знак равенства, ибо при неудерживающих связях при сходе точки со связи ее реакция будет равна нулю и, следовательно, работа тоже. Таким образом, в рассматриваемом случае всегда $\sum_i \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0$. Тогда из предыдущего неравенства следует $\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i > 0$, что противоречит принятому предположению.

В случае удерживающих связей, которые в дальнейшем будем рассматривать, уравнение принципа возможных перемещений (7.2) запишется в виде

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad (7.3)$$

или в проекциях на оси координат

$$\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \quad (7.4)$$

Следует отметить, что принцип возможных перемещений справедлив и для неидеальных связей. В этом случае к активным силам \bar{F}_i надо добавить те составляющие реакций связей, которые

делают связи неидеальными.

В принцип возможных перемещений не входят реакции связей. Но его можно применять также и для их определения. Для этого связь (или часть связи), реакцию которой необходимо определить, отбрасывают, заменяя ее реакцией.

При практическом решении задач механической системе придают возможное перемещение и определяют работы сил на этом перемещении, то есть составляют уравнение работ (7.3), в котором оставляют только независимые перемещения, число которых определяется числом степеней свободы системы, а остальные перемещения выражают через независимые. Приравнивают нулю коэффициенты при независимых перемещениях. При этом, если механическая система представляет собой твердое тело, свобода перемещения которого ограничена плоскостью, то, в соответствии с кинематикой, возможное плоское перемещение твердого тела удобно представлять в виде суммы двух перемещений: поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса.

Возможен другой вариант применения принципа возможных перемещений – так называемый метод координат. В выбранной системе координат определяют координаты точек приложения сил, затем их варьируют и составляют уравнение (7.4). В уравнении оставляют только независимые вариации координат, число которых определяется числом степеней свободы системы, а остальные вариации выражают через независимые. Приравнивают нулю коэффициенты при независимых вариациях.

7.4. Общее уравнение динамики

Рассмотренный в п. 7.3 принцип возможных перемещений, справедливый для равновесия системы и дающий общий метод решения задач статики, может также применяться и к решению задач динамики.

С этой целью рассмотрим уравнение принципа Даламбера для каждой точки системы:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Умножим каждое уравнение скалярно на возможное перемещение точки $\delta \bar{r}_i$ и просуммируем по всем точкам:

$$\sum_i (\bar{F}_i + \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{r}_i + \sum_i \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

В случае идеальных удерживающих связей $\sum_i \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$ и учитывая также, что $\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_i$, получим

$$\sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad (7.5)$$

или

$$\sum_i \delta A_i^F + \sum_i \delta A_i^\Phi = 0. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.5) или (7.6) характеризует принцип возможных перемещений для движущейся механической системы и называется **общим уравнением динамики**.

Суть общего уравнения динамики. При движении механической системы, подчиненной идеальным удерживающим связям, в каждый момент времени элементарная работа активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение (7.5) запишется в виде

$$\sum_i [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \quad (7.7)$$

Уравнение (7.5), а также (7.6) и (7.7) называются общим уравнением динамики по той причине, что из него можно получить все основные уравнения динамики. Так, например, если механическая система находится в равновесии, то и уравнение (7.5) переходит в уравнение принципа возможных перемещений (7.3) $\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$.

Если механическая система находится в движении и является свободной, то вариации координат, входящие в (7.7), являются независимыми, и (7.7) будет справедливо только при равенстве нулю всех коэффициентов, что дает дифференциальные уравнения движения точек свободной механической системы:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i; \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i; \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i.$$

Общее уравнение динамики справедливо и для неидеальных связей, если к активным силам добавить составляющие реакций связей, которые делают связи неидеальными.

Порядок решения задач с использованием общего уравнения динамики такой же, как и при решении задач с использованием принципа возможных перемещений, который рассмотрен в п. 7.3.

Общее уравнение динамики еще называют принципом Даламбера – Лагранжа.

7.5. Обобщенные координаты

Перемещения точек несвободной механической системы не могут быть совершенно произвольными, так как они ограничены действующими на систему связями. Это означает, что не все координаты точек независимы. При таком условии положение точек системы определяется заданием только независимых координат. Остальные координаты определяются из уравнений связей.

Независимые величины, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы, называются **обобщенными координатами**.

Механическая система, имеющая S независимых обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_S , характеризуется также S независимыми возможными перемещениями или вариациями $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$, если связи голономны. Число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы.

Для неголономных систем в уравнения связей могут входить производные от декартовых координат точек и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат дополнительные ограничения на вариации независимых координат δq_i и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не связывая функциональной зависимостью сами обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_S . Для неголономных систем в общем случае число независимых вариаций (возможных перемещений) меньше числа обобщенных координат, то есть число степеней свободы меньше числа обобщенных координат.

В дальнейшем будем рассматривать только голономные системы, то есть системы с голономными связями.

Декартовые координаты любой точки M_i механической системы являются функциями обобщенных координат:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t);$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t);$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t).$$

Соответственно, для радиуса-вектора точки M_i получим

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t).$$

При поступательном движении твердого тела за обобщенную координату можно взять линейное перемещение тела, а при вращательном – угол поворота.

7.6. Обобщенные силы

Пусть механическая система, состоящая из n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n , находится под действием системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Предположим, что система подчинена голономным связям и имеет S степеней свободы, то есть ее положение определяется S обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_S .

Сообщим обобщенной координате q_j бесконечно малое приращение δq_j , не изменяя остальных обобщенных координат. Тогда точки механической системы получают бесконечно малые перемещения $\delta \bar{r}_{1j}, \delta \bar{r}_{2j}, \dots, \delta \bar{r}_{nj}$. Работа сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ на этих возможных перемещениях $\delta A_{qj} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_{ij}$. Обозначим

$$Q_j = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j} = \frac{\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_{ij}}{\delta q_j}. \quad (7.8)$$

Обобщенной силой Q_j , соответствующей обобщенной координате q_j , называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы действующих сил на перемещении механической системы, вызванном элементарным приращением δq_j координаты q_j , к величине этого приращения.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так, если размерность обобщенной координаты $[q] = \text{м}$, то размерность обобщенной силы $[Q] = [A] / [q] = \text{Н} \cdot \text{м} / \text{м} = \text{Н}$. Если размерность обобщенной координаты $[q] = \text{рад}$, то размерность обобщенной силы $[Q] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$.

Как и все силы, обобщенные силы можно разделить на внешние и внутренние либо на активные и реакции связей.

Следует отметить, что обобщенные реакции идеальных удерживающих связей равны нулю, так как в этом случае в уравнении (7.8) $\sum_i \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_{ij} = 0$.

Выражению (7.8) можно придать другой вид, если учесть, что

$$\delta A_{qj} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_{ij} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = \delta q_j \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}.$$

Тогда

$$Q_j = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (7.9)$$

Если силы \bar{F}_i имеют потенциал U , то $X_i = \partial U / \partial x_i$; $Y_i = \partial U / \partial y_i$; $Z_i = \partial U / \partial z_i$.

Тогда

$$Q_j = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Таким образом, в случае потенциальных сил

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{-\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (7.10)$$

где $\Pi = U + C$ – потенциальная энергия.

7.7. Общее уравнение динамики в обобщенных силах

Запишем общее уравнение динамики

$$\sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

Вариацию радиуса-вектора $\delta \bar{r}_i$ выразим через обобщенные координаты, учитывая, что $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S)$,

$$\delta \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_S} \delta q_S = \sum_j \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Тогда общее уравнение динамики примет вид

$$\sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \sum_j \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_j \delta q_j \sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = 0,$$

откуда

$$\sum_j \delta q_j \sum_i \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0$$

или

$$\sum_j (Q_j + Q_j^\Phi) \delta q_j = 0,$$

где $Q_j^\Phi = -\sum_i m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$ – обобщенная сила инерции.

Так как все δq_j независимы, то окончательно получаем общее уравнение динамики в обобщенных силах в виде

$$Q_j + Q_j^\Phi = 0 \quad (j=1, 2, \dots, S). \quad (7.11)$$

7.8. Условия равновесия механической системы и понятие об его устойчивости

Если механическая система находится в покое, то $Q_j^\Phi = 0$, и из (7.11) следуют условия равновесия в виде равенства нулю обобщенных сил:

$$Q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, S). \quad (7.12)$$

В случае потенциальных сил уравнения равновесия (7.12) с учетом (7.10) записываются в виде

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0. \quad (7.13)$$

Состояние равновесия механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Состояние равновесия механической системы называется **устойчивым**, если эта система, выведенная из положения равновесия, совершает колебания около этого положения, **неустойчивым** – если при сколь угодно малом отклонении системы из положения равновесия она удаляется от этого положения и колебаний около этого положения не возникает, **безразличным** – если при отклонении ее из этого положения она и в новом положении может остаться в состоянии покоя. Из (7.13) следует, что в положении любого равновесия U и Π достигают своего экстремального значения.

Достаточные условия устойчивости положения равновесия механической системы определяются теоремой Лагранжа – Дирихле: для устойчивости положения равновесия механической системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным удерживающим связям и находящейся в стационарном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.

Потенциальную энергию с точностью до малых величин вто-

рого порядка представим в виде квадратичной функции обобщенных координат:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + c_{SS}q_S^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \dots + 2c_{S-1,S}q_{S-1}q_S) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S c_{ij}q_iq_j, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где c_{ij} – обобщенные коэффициенты жесткости.

Если квадратичная форма (7.14) положительна при всех значениях q_j ($j = 1, 2, \dots, S$), не равных нулю одновременно, то и Π при достаточно малых значениях q_j будет определено положительной. Это означает, что Π в положении равновесия будет минимальна.

Рассмотрим симметричную матрицу, состоящую из коэффициентов c_{ij} :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2S} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{S1} & c_{S2} \dots & c_{SS} \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

и ее главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = c_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_S = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1S} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{S1} & \dots & c_{SS} \end{vmatrix}. \quad (7.16)$$

Согласно высшей алгебре, квадратичная форма (7.16) определено положительна, если все ее главные диагональные миноры положительны. Тогда, согласно теореме Лагранжа – Дирихле, условие устойчивости положения равновесия консервативной системы запишется в виде

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_S > 0. \quad (7.17)$$

Для консервативной системы с одной степенью свободы условия равновесия и его устойчивости можно записать в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=q^*} > 0, \quad (7.18)$$

где q^* – решение уравнения равновесия.

Если $\left(\partial^2 \Pi / \partial q^2\right)\big|_{q=q^*} = 0$, то необходимо вычислить производные более высших порядков $\left(\partial^k \Pi / \partial q^k\right)\big|_{q=q^*}$. Если первая не равная нулю производная имеет четный порядок и при этом положительна, то при $q = q^*$ потенциальная энергия имеет минимум, и, следовательно, это положение равновесия системы устойчиво. Если же первая не равная нулю производная имеет нечетный порядок, то при $q = q^*$ нет ни максимума, ни минимума. При отсутствии минимума потенциальной энергии оценка устойчивости положения равновесия механической системы формулируется в специальных теоремах А. М. Ляпунова. Наиболее существенные результаты, весьма важные для приложений, получены Ляпуновым в виде следующих двух теорем.

1. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и отсутствие минимума определяется с помощью вторых производных от потенциальной энергии, то положение равновесия неустойчиво.

2. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и наличие этого максимума определяется с помощью производных низшего порядка, отличных от нуля, то положение равновесия неустойчиво.

Пример равновесия простейшей строительной конструкции – однородной тяжелой балки – приведен на рис. 7.2, где а – устойчивое положение равновесия; б – неустойчивое; в – безразличное.

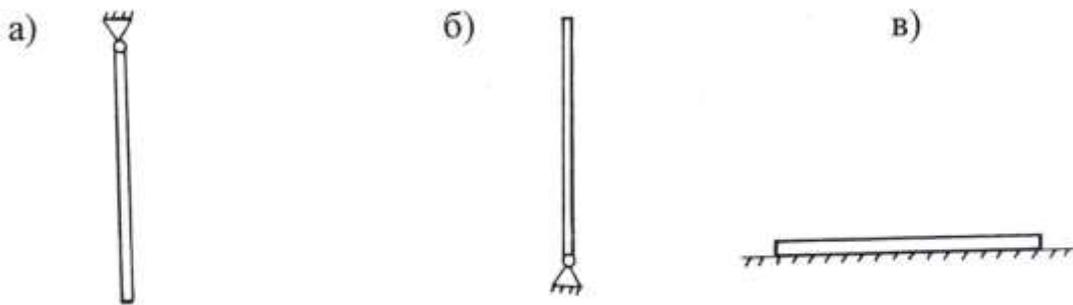


Рис. 7.2

7.9. Дифференциальные уравнения движения в декартовых координатах (уравнения Лагранжа первого рода)

Дифференциальные уравнения движения в декартовых координатах для одной несвободной точки (уравнения Лагранжа первого рода) через множители Лагранжа получены в п. 1.3.

Аналогично из общего уравнения динамики в проекциях на оси декартовой системы координат можно получить уравнения Лагранжа первого рода и для несвободной механической системы, которые в случае идеальных связей по аналогии с уравнениями (1.9) запишутся в виде

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}; \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}; \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где $\lambda_j = N_j / \Delta f_j$ – множители Лагранжа; $f_j(x_1, y_1, z_1; \dots, x_n, y_n, z_n, t)$ – уравнения связей ($j = 1, 2, \dots, k$).

Таким образом, для определения координат точек и реакций связей N_j ($j = 1, 2, \dots, k$) имеем $3n+k$ уравнений: $3n$ дифференциальных уравнений (7.19) и k уравнений связей.

При увеличении числа связей, то есть уменьшении числа степеней свободы, общее количество уравнений возрастает. Поэтому, когда не требуется определение реакций связей, использование уравнений Лагранжа первого рода (7.19) для определения уравнений движения (координат) не представляется целесообразным. По-видимому, представляет интерес рассмотреть движение механической системы в обобщенных координатах. С этой целью целесообразно воспользоваться ранее полученным общим уравнением динамики в обобщенных силах.

7.10. Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Из общего уравнения динамики в обобщенных силах (7.11) пока не представляется возможным получить кинематические уравнения движения, поэтому преобразуем выражение для определения обобщенной силы инерции. Выразим Q_j^Φ через меру движения механической системы – кинетическую энергию T . Для этого сначала установим общий характер зависимости кинетической энергии от обобщенных координат.

Рассматриваем движение голономной механической системы с S степенями свободы. Тогда радиус-вектор i -й точки

$$\bar{r}_I = \bar{r}_I(q_1, q_2, \dots, q_S, t).$$

Скорость i -й точки

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_S} \dot{q}_S + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}.$$

Производные от обобщенных координат \dot{q}_j называются **обобщенными скоростями**.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \cdot \bar{V}_i.$$

Из полученного выражения для кинетической энергии с учетом формулы для скорости следует

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_S; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S; t),$$

то есть кинетическая энергия есть функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

С учетом сделанного вывода определим обобщенную силу инерции Q_j^Φ через кинетическую энергию T :

$$\begin{aligned} Q_j^\Phi &= \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dr_i}{dt} \right) = \\
&= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}.
\end{aligned}$$

Тогда общее уравнение динамики в обобщенных силах (7.11) с учетом полученного выражения для Q_j^Φ примет вид уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (7.20)$$

Полученные уравнения (7.20) являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_S . Дважды интегрируя эти уравнения при соответствующих начальных условиях, получим уравнения движения механической системы в обобщенных координатах:

$$q_j = q_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, S).$$

В случае движения механической системы в потенциальном силовом поле уравнения (7.20) с учетом (7.10) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (7.21)$$

Учитывая, что потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_S)$, получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_j} = 0.$$

Окончательно получаем следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (7.22)$$

где $L = T - \Pi = T + U$ — функция Лагранжа или кинетический потенциал.

Следует отметить, что для неголономных систем после Лагранжа также получены дифференциальные уравнения движения механических систем в обобщенных координатах: уравнения Рауса, Чаплыгина, Аппеля.

При практическом решении уравнений Лагранжа второго рода, записанных в форме (7.22), удобно от S дифференциальных уравнений второго порядка перейти к $2S$ дифференциальным уравнениям первого порядка Гамильтона. Для этого необходимо дополнительно ввести еще S переменных в виде обобщенных импульсов

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (7.23)$$

и функцию Гамильтона

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L. \quad (7.24)$$

Тогда задача сводится к интегрированию следующих дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных q_j и p_j :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (7.25)$$

Записанные дифференциальные уравнения Гамильтона (7.25) называют **каноническими уравнениями**.

7.11. Примеры решения задач

Пример 1. Определить реакции опор составной конструкции (рис. 7.3, а).

1. Определение горизонтальной составляющей \bar{X}_A реакции жесткой заделки (рис. 7.3, б).

Освободимся в точке A от связи в горизонтальном направлении, заменив ее реакцией \bar{X}_A . При этом оставшаяся в точке A часть связи будет представлять собой скользящую заделку, допускающую возможное поступательное перемещение конструкции δS в горизонтальном направлении. Получим следующее уравнение возможных работ:

$$X_A \cdot \delta S - F \sin \alpha \cdot \delta S = 0, \text{ откуда } X_A = F \sin \alpha.$$

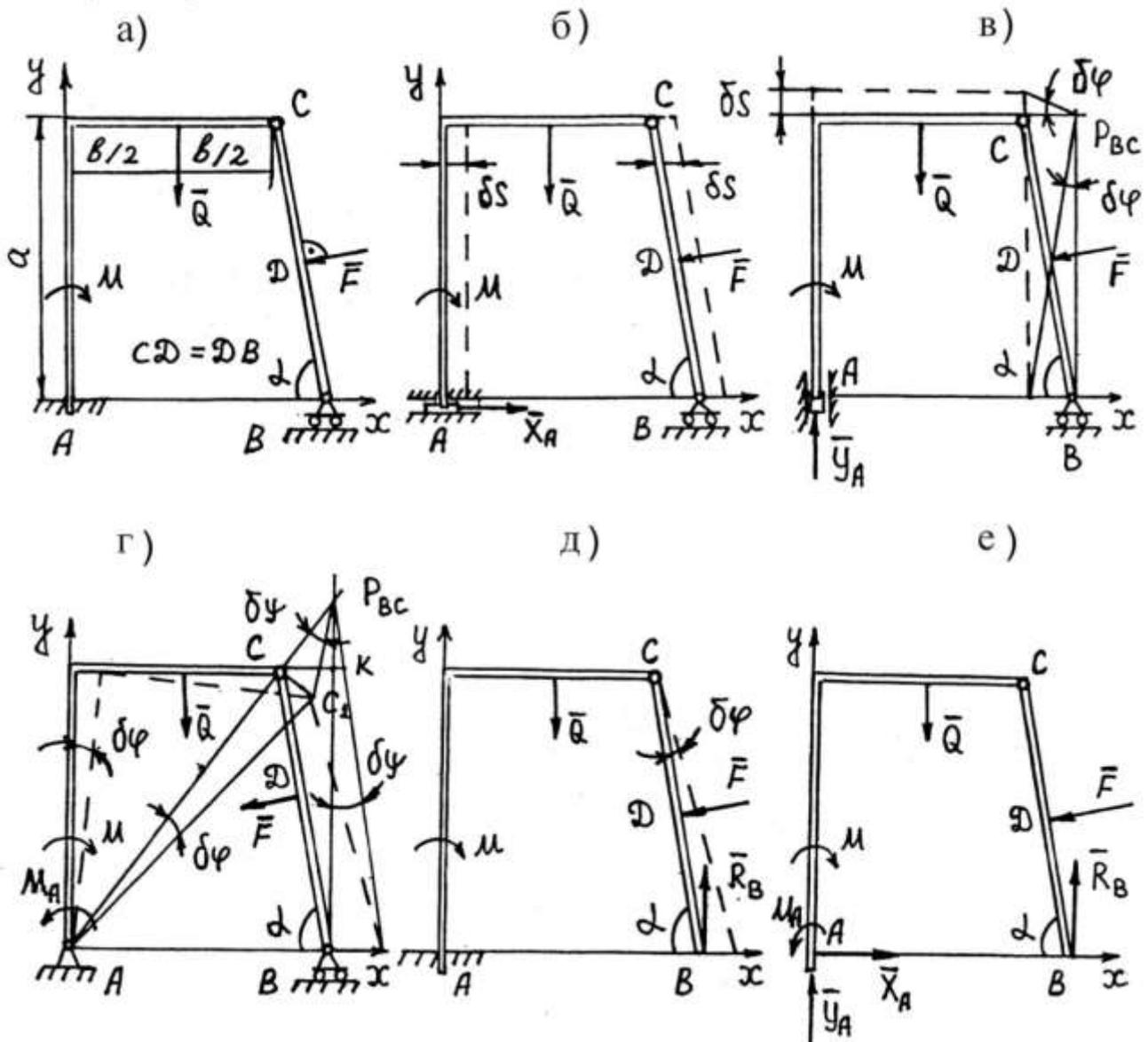


Рис. 7.3

2. Определение вертикальной составляющей \bar{Y}_A реакции жесткой заделки (рис. 7.3, в).

В этом случае возможное перемещение тела AC – вертикальное поступательное δS , а тела BC – вращательное $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр вращения P_{BC} положение которого находится на пересечении перпендикуляров к направлениям возможных скоростей точек B и C .

$$Y_A \cdot \delta S - Q \cdot \delta S + F_x \cdot 0,5 \cdot \alpha \cdot \delta\varphi - F_y \cdot 0,5 \cdot \alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \delta\varphi = 0,$$

где $F_x = F \sin \alpha$; $F_y = F \cos \alpha$.

Учитывая, что $\delta\varphi = \frac{\delta S}{P_{BC}C} = \frac{\delta S}{\alpha \operatorname{ctg}\alpha}$, получаем

$$Y_A - Q + 0,5 \cdot F \cdot \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} - 0,5 \cdot F \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$Y_A = Q + \frac{\cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} F.$$

3. Определение реактивного момента M_A жесткой заделки (рис. 7.3, г).

Оставшаяся часть связи в точке A представляет собой неподвижный шарнир. Тогда возможным перемещением тела AC будет поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра вращения P_{BC} .

$$M \cdot \delta\varphi - M_A \delta\varphi + Q \cdot 0,5 \cdot b \cdot \delta\varphi - F \sin(P_{BC}B - 0,5a) \delta\psi + F \cos \alpha \cdot 0,5a \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \delta\psi = 0.$$

Находим связь между перемещениями $\delta\varphi$ и $\delta\psi$:

$$CC_1 = AC \cdot \delta\varphi = P_{BC} \cdot \delta\psi;$$

$$\delta\psi = \frac{AC}{P_{BC}C} \cdot \delta\varphi = \frac{b}{CK} \cdot \delta\varphi = \frac{b}{a \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \delta\varphi.$$

Получаем уравнение

$$M - M_A + Q \cdot 0,5b - F \sin \alpha \cdot \left(a + \frac{b}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \right) + 0,5F \cdot b \cos \alpha = 0,$$

из которого

$$M_A = M + Q \cdot 0,5Q \cdot b - F \sin \alpha \cdot \left(a + \frac{b}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \right) + 0,5F \cdot b \cos \alpha = 0.$$

4. Определение реакций \bar{R}_B шарнира B (рис. 7.3, д).

Возможное перемещение конструкции – поворот тела BC на угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира C .

$$R_B \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \delta\varphi - F \cdot 0,5BC \cdot \delta\varphi = 0;$$

$$R_B \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - F \frac{a}{2 \sin \alpha} = 0;$$

$$R_B = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

5. Проверка полученного решения (рис. 7.3, е).

Составляем уравнения геометрической статики. Для левой части составной конструкции имеем

$$\sum_i \mu_{ic} = X_A \cdot a - Y_A \cdot b + \mu_A - \mu + Q \cdot 0,5b = F \sin \alpha \cdot a - \left(Q + \frac{\cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} \right) \cdot b +$$

$$+ \mu + 0,5Q \cdot b - F \sin \alpha \cdot \left(a + \frac{b}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \right) + 0,5F \cdot b \cdot \cos \alpha - \mu + 0,5 \cdot Q \cdot b \equiv 0.$$

Для всей составной конструкции имеем

$$\sum_i Y_i = Y_A - Q - F \cos \alpha + R_B = Q + 0,5(\cos 2\alpha / \cos \alpha)F -$$

$$-Q - F \cos \alpha + F / (2 \cos \alpha) = F \frac{\cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} - F \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \cos \alpha} \equiv 0.$$

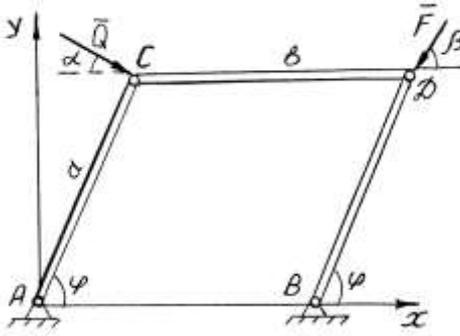


Рис. 7.4

Пример 2. Определить соотношение между величинами сил Q и F при равновесии шарнирно-стержневой конструкции (рис. 7.4).

Решение. Записываем уравнение возможных работ в координатной форме

$$Q_x \cdot \delta x_c + Q_y \cdot \delta y_c + F_x \cdot \delta x_D + F_y \cdot \delta y_D = 0,$$

где

$$F_x = -F \cos \beta; F_y = -F \sin \beta;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha; Q_y = -Q \sin \alpha;$$

$$x_c = a \cos \varphi; y_c = a \sin \varphi;$$

$$x_D = b + a \cos \varphi; y_D = a \sin \varphi.$$

Находим вариации координат точек C и D :

$$\delta x_c = -a \sin \varphi \cdot \delta \varphi;$$

$$\delta y_c = -a \cos \varphi \cdot \delta \varphi;$$

$$\delta x_D = -a \sin \varphi \cdot \delta \varphi;$$

$$\delta y_D = -a \cos \varphi \cdot \delta \varphi.$$

Подставляя найденные вариации координат в исходное уравнение, получаем

$$-Q \cos \alpha \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi - Q \sin \alpha \cdot a \cdot \cos \varphi \cdot \delta \varphi +$$

$$+ F \cos \beta \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi - F \sin \beta \cdot a \cdot \cos \varphi \cdot \delta \varphi = 0$$

Откуда

$$\frac{Q}{F} = \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

Рассмотрим второй вариант

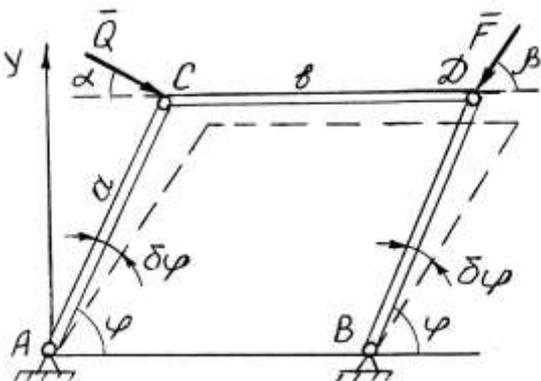


Рис. 7.5

решения – геометрический метод. Придадим конструкции возможное перемещение (рис. 7.5) и составим уравнение возможных работ:

$$\begin{aligned} & -Q \cos \alpha \cdot a \cdot \sin \varphi + Q \sin \alpha \cdot a \cdot \cos \varphi - \\ & -F \cos \alpha \cdot a \cdot \sin \varphi + F \sin \beta \cdot a \cdot \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{Q}{F} = \frac{\cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi}{\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi} = \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

Пример 3. Определить величину угла φ при равновесии однородной прямоугольной пластины веса P , опирающейся на криволинейную направляющую в виде полуокружности радиуса R (рис. 7.6). Оценить устойчивость положения равновесия. Длина пластины равна a , а ее ширина – b . Трением пренебруем.

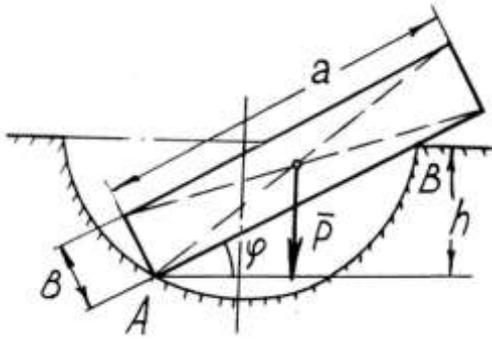


Рис. 7.6

Решение. Примем за нуль потенциальной энергии положение пластины при $\varphi = 0$. Тогда потенциальная энергия пластины определится как работа, которую необходимо совершить для перевода пластины из произвольного положения в это нулевое положение.

$$\begin{aligned} \Pi &= -P \left[\frac{b}{2} + h - \left(\frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} \cos \varphi \right) \right] = \\ &= -P \left[\frac{b}{2} + 2R \cos \varphi \sin \varphi - \left(\frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} \cos \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$\Pi = -P \left[\frac{b}{2} + R \sin 2\varphi - \left(\frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} \cos \varphi \right) \right].$$

Для определения положения равновесия приравняем к нулю производную от потенциальной энергии $\partial \Pi / \partial \varphi = 0$:

$$\begin{aligned} & -P \left(2R \cos 2\varphi - \frac{a}{2} \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi \right) = 0; \\ & -\cos 2\varphi + \frac{a}{4R} \cos \varphi - \frac{b}{4R} \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение решим графически, предварительно преобразовав его.

Положим

$$\frac{a}{4R} = A \sin \beta, \quad \frac{b}{4R} = A \cos \beta.$$

Тогда уравнение для определения φ запишется следующим образом:

$$\cos 2\varphi + A \sin(\varphi + \beta) = 0,$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{a}{4R}\right)^2 + \left(\frac{b}{4R}\right)^2} = \frac{1}{4R} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{a}{b}.$$

Для получения конкретного численного решения положим $b = (2/3)R$, $a = \sqrt{15}b$. Отсюда следует: $A = 2/3$, $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{15}$, $\beta = -0,42\pi$.

Решение уравнения находим как значение φ , соответствующее точке пересечения графиков функций $\cos 2\varphi$ и $A \sin(\varphi + \beta)$ (рис. 7.7). Очевидно, что искомое значение φ находится в промежутке $[0, \pi/2]$.

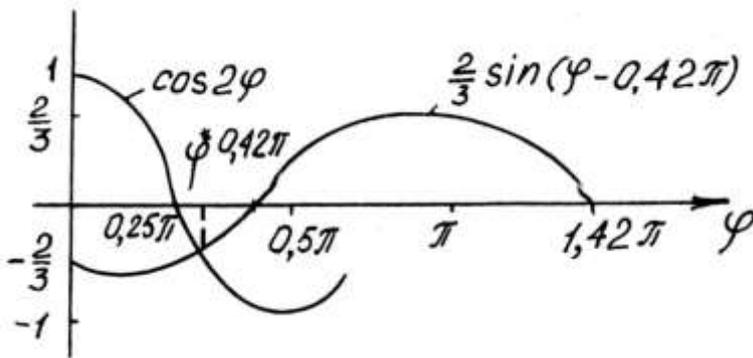


Рис. 7.7

Из графика рис. 7.7 следует, что в положении равновесия $\varphi = \varphi^* = 0,3\pi$. Для оценки устойчивости найденного положения равновесия вычислим вторую производную от потенциальной энергии в точке $\varphi = \varphi^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} &= -P \left(4R \sin 2\varphi + \frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} \cos \varphi \right) \Big|_{\varphi = \varphi^*} = \\ &= -P \left(-4R \sin 0,6\pi + \frac{\sqrt{15}}{3} R \sin 0,3\pi + \frac{1}{3} R \cos 0,3\pi \right) = \\ &= -PR \left(-4 \cdot 0,95 + \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot 0,81 + \frac{1}{3} \cdot 0,59 \right) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величина $\varphi = 0,3\pi$ соответствует устойчивому положению равновесия.

Точное аналитическое решение уравнения для определения φ можно получить в случае узкой пластины $a \gg b$. Тогда, положив $b = 0$, для определения величины $\cos \varphi$ получим следующее квадратное уравнение:

$$\cos^2 \varphi - \frac{a}{8R} \cos \varphi - \frac{1}{2} = 0.$$

Откуда

$$\cos \varphi = \frac{a}{16R} \pm \sqrt{\frac{a^2}{(16R)^2} + \frac{1}{2}}.$$

Учитывая, что $\varphi \in [0, \pi/2]$, окончательно получим

$$\cos \varphi = \frac{1}{16R} \left(a + \sqrt{a^2 + 128R^2} \right).$$

Определим вторую производную от потенциальной энергии:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -P \left(-4R \sin \varphi + \frac{a}{2} \sin \varphi \right) = P \left(8R \cos \varphi - \frac{a}{2} \right) \sin \varphi.$$

Очевидно, что $\sin \varphi > 0$. Тогда условие устойчивости положения равновесия запишется в виде $8R \cos \varphi - a/2 > 0$ или, подставляя выражение для $\cos \varphi$, получим $(1/2)\sqrt{a^2 + 128R^2} > 0$. То есть имеем положение устойчивого равновесия.

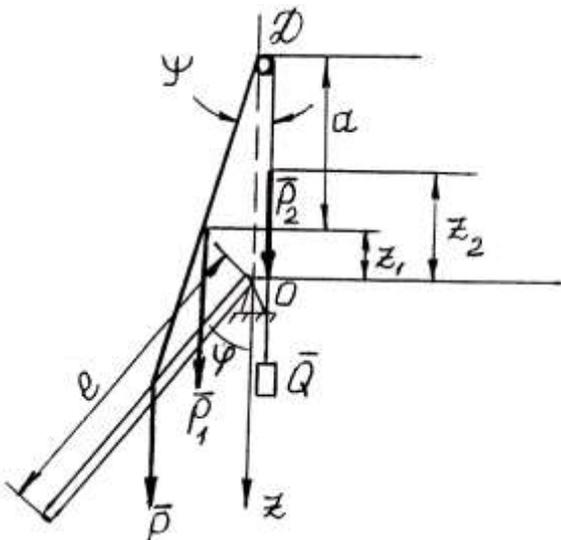


Рис. 7.8

Пример 4. Однородная тяжелая балка OB (рис. 7.8) веса P может шарнирно вращаться вокруг своего конца O . Для удержания балки в равновесии к его центру тяжести C прикреплен тяжелый однородный канат, перекинутый через ничтожно малый блок D и несущий на своем конце груз Q . Вес единицы длины каната равен q . Определить положение

ние и характер равновесия балки, если точка D находится над точкой O на одной вертикали, расстояние $OD = a$, длина балки равна ℓ , а длина каната — L . Прогибом каната пренебречь.

Решение. Определим потенциальную энергию, обусловленную действием силы тяжести балки P , силой тяжести отдельных частей каната P_1 и P_2 , а также весом груза Q . За нуль потенциальной энергии принимаем положение балки при $\varphi = 0$.

$$\Pi = \Pi_P + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_Q.$$

Потенциальные энергии Π_1 и Π_2 определяем как работу переменных сил.

$$\Pi_1 = \int_{(z_1)} q x dz_1.$$

Из $\triangle OCD$

$$x = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 - 2\frac{\ell}{2}a \cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + \ell a \cos(\pi - \varphi)};$$

$$z_1 = -\left(a - \frac{x}{2} \cos \psi\right); \quad \cos \psi = \frac{a + \frac{\ell}{2} \cos \varphi}{x}.$$

Тогда

$$z_1 = -\left(a - \frac{x}{2} \frac{a + \frac{\ell}{2} \cos \varphi}{x}\right) = -\left(\frac{a}{2} - \frac{\ell}{4} \cos \varphi\right); \quad dz_1 = -\frac{\ell}{4} \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

$$\Pi_1 = -\int_{\varphi}^0 q \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + \ell a \cos \varphi} \frac{\ell}{4} \sin \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{q\ell}{4} \frac{2}{3\ell a} \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + \ell a \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{\varphi = \varphi}^{\varphi = 0} =$$

$$= \frac{1}{6a} q \left\{ \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + \ell a \right]^{\frac{3}{2}} - \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + \ell a \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

$$\Pi_2 = \int_{(z_2)} q(L-x) dz_2; \quad z_2 = -\left(a - \frac{L-x}{2}\right); \quad dz_2 = -\frac{1}{2} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int_{(z_2)} qL dz_2 - \int_{(z_2)} qxdz_2 = -\frac{1}{2} qL \int_{(x)} dx + \frac{1}{2} q \int_{(x)} x dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} qLx(\varphi) + \frac{1}{4} qx^2(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} qL \left[-\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi} \right] + \frac{1}{4} qla(1 - \cos \varphi). \\ \Pi_Q &= -Q \left\{ (L-x) - \left[L - \left(a + \frac{\ell}{2} \right) \right] \right\} = -Q \left(a + \frac{\ell}{2} - x \right) = \\ &= -Q \left[a + \frac{\ell}{2} - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу для полной потенциальной энергии, получим потенциал энергии механической системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= P \frac{\ell}{2} (1 - \cos \varphi) + \frac{q}{6a} \left\{ \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \right]^{\frac{3}{2}} + \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} qL \left[-\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi} \right] + \frac{1}{4} qla(1 - \cos \varphi) - \\ &- Q \left[a + \frac{\ell}{2} - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi} \right]. \end{aligned}$$

Находим производную от Π по φ и приравниваем ее к нулю:

$$\begin{aligned}
& P \frac{\ell}{2} \sin \varphi + \frac{q}{4a} \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} la \sin \varphi - \\
& - \frac{1}{4} qL \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} la \sin \varphi + \frac{1}{4} qla \sin \varphi - \\
& - \frac{1}{2} Q \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} la \sin \varphi = 0.
\end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что одно из положений равновесия определится из уравнения $\sin \varphi = 0$. Откуда $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$. Другое положение равновесия определится из оставшегося уравнения

$$\begin{aligned}
P \frac{\ell}{2} \sin \varphi + \frac{q\ell}{4} \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} qLla \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} + \\
+ \frac{q\ell a}{4} - \frac{1}{2} Qla \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим $\left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} = y$. Тогда для определения

y получим следующее квадратное уравнение:

$$\frac{q\ell}{4} y^2 + \left(P + \frac{qa}{2} \right) \frac{\ell}{2} y - \left(\frac{qL}{2} + Q \right) \frac{\ell a}{2} = 0,$$

решение которого

$$y_{1,2} = - \left(-P + \frac{qa}{2} \right) \frac{\ell}{4} \pm \left[\left(P + \frac{qa}{2} \right)^2 \frac{\ell^2}{16} + \frac{q\ell^2 a}{8} \left(\frac{qL}{2} + Q \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное решение позволяет записать уравнение для определения φ :

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi = \left\{ -\left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{\ell}{4} \pm \left[\left(P + \frac{qa}{2}\right)^2 \frac{\ell^2}{16} + \frac{q\ell^2 a}{8} \left(\frac{qL}{2} + Q\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

Откуда получаем окончательное уравнение для определения φ :

$$\cos \varphi = \frac{1}{la} \left\{ -\left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{\ell}{4} \pm \left[\left(P + \frac{qa}{2}\right)^2 \frac{\ell^2}{16} + \frac{q\ell^2 a}{8} \left(\frac{qL}{2} + Q\right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \right] \right\}.$$

Для определения устойчивого положения равновесия находим вторую производную от потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= P \frac{\ell}{2} \cos \varphi - \frac{q}{8a} \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} \ell^2 a^2 \sin \varphi + \\ &+ \frac{q}{4a} \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{\frac{1}{2}} la \cos \varphi - \frac{1}{8} qL \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}} \times \\ &\times \ell^2 a^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} qL \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} la \cos \varphi + \frac{1}{4} qla \cos \varphi - \frac{1}{4} Q \times \\ &\times \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}} \ell^2 a^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} Q \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 + la \cos \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} la \cos \varphi. \end{aligned}$$

Положение равновесия при $\varphi = \varphi_1 = 0$ будет устойчивым, если $\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 (\varphi = \varphi_1) > 0$. Отсюда находим условие устойчивости положения равновесия при $\varphi = \varphi_1 = 0$.

$$P \frac{\ell}{2} + \frac{q}{4a} \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + \ell a \right]^{\frac{1}{2}} \ell a - \frac{1}{4} qL \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + \ell a \right]^{-\frac{1}{2}} \ell a +$$

$$+ \frac{1}{4} q\ell a - \frac{1}{2} Q \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + a^2 + \ell a \right]^{-\frac{1}{2}} \ell a > 0$$

или

$$P \frac{\ell}{2} + \frac{q}{4a} \left(a + \frac{\ell}{2} \right)^2 \ell a - \frac{1}{4} qL \left(a + \frac{\ell}{2} \right)^{-1} \ell a + \frac{1}{4} q\ell a - \frac{1}{2} Q \left(a + \frac{\ell}{2} \right)^{-1} \ell a > 0.$$

Аналогично находим условие устойчивости при $\varphi = \varphi_2 = \pi$:

$$-P \frac{\ell}{2} - \frac{q}{4a} \left(a - \frac{\ell}{2} \right)^2 \ell a + \frac{1}{4} qL \left(a - \frac{\ell}{2} \right)^{-1} \ell a - \frac{1}{4} q\ell a + \frac{1}{2} Q \left(a - \frac{\ell}{2} \right)^{-1} \ell a > 0.$$

Подставляя величины φ , найденные для других положений равновесия, в выражение для $\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2$, аналогично можно получить условие устойчивости для этих положений.

ГЛАВА 8. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

8.1. Общие понятия

Колебательные движения механических систем имеют место в различных технологических процессах горного производства. В технологии строительства и производства строительных материалов получили широкое распространение вибрационные машины и процессы. Вибрационные процессы укладки бетонных смесей, формирования железобетонных изделий и изделий из неармированного бетона используются повсеместно. Вибрационные грохоты эксплуатируются на множестве строек, карьеров и других предприятий. Значительное распространение получили вибрационные машины для уплотнения грунта, дорожных оснований и покрытий. Уплотнение и измельчение, смешение и сепарация, забивка свай и бурение скважин, разгрузка смерзшихся материалов из транспортных средств и разработка мерзлых грунтов, погрузка насыпных материалов и отмывка песка с гравием – это далеко не полный перечень

технологических процессов, в которых использование вибрации приносит большую пользу.

Рассмотрим колебательные движения механической системы около положения устойчивого равновесия, наличие которого предполагает стационарность связей. Для описания колебаний удобно использовать уравнения Лагранжа второго рода. Начало отсчета обобщенных координат принимаем в положении устойчивого равновесия. В большинстве случаев получаемые при этом дифференциальные уравнения нелинейны и их интегрирование сопряжено с большими трудностями. При малых колебаниях системы, когда приращения обобщенных координат и скоростей незначительны, полученные уравнения можно линеаризовать.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода в наиболее общем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^B \quad (j=1, 2, \dots, S), \quad (8.1)$$

где Q_j^{Π} – обобщенная сила от потенциальных сил; Q_j^{Φ} – обобщенная диссипативная сила от сил линейно-вязкого сопротивления; Q_j^B – обобщенная сила от внешних возмущающих воздействий.

Для составления уравнений (8.1) необходимо получить выражение для определения кинетической и потенциальной энергии через обобщенные координаты.

Если связи стационарны, радиусы-векторы точек \bar{r}_i не зависят явно от времени, то есть $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S)$. Тогда для кинетической энергии получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \cdot \bar{V}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (8.2)$$

где $a_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$.

Очевидно, что коэффициенты a_{jk} симметричны относительно индексов j и k , то есть $a_{jk} = a_{kj}$. Если рассмотреть частный случай неизменяемой механической системы, например, в виде поступательно или вращательно движущегося твердого тела, то в первом случае коэффициенты a_{ij} являются массой, а во втором – моментом инерции твердого тела. Таким образом, коэффициенты a_{ij} характеризуют меру инертности и называются **обобщенными коэффициентами инерции**.

В развернутом виде формулу (8.2) можно представить в виде квадратичной формы:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + a_{SS}\dot{q}_S^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + 2a_{S-1,S}\dot{q}_{S-1}\dot{q}_S).$$

Разложим коэффициенты a_{jk} в ряды Маклорена в окрестности положения устойчивого равновесия:

$$a_{jk} = (a_{jk})_0 + \sum_{\alpha=1}^S \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_{\alpha}} \right)_0 q_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma}^S \left(\frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial q_{\beta} \partial q_{\gamma}} \right)_0 q_{\beta} q_{\gamma} + \dots$$

Подставляя полученное выражение в (8.2) и учитывая малость колебаний, ограничимся оставлением в этом выражении только слагаемых наиболее низкого порядка малости, а именно – второго порядка. Тогда выражение для определения кинетической энергии можно приближенно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S (a_{jk})_0 \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (8.3)$$

В соответствии с (8.3) кинетическая энергия представляется положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами. Далее постоянные коэффициенты $(a_{jk})_0$ сокращенно будем обозначать через a_{jk} .

Потенциальная энергия Π есть функция обобщенных координат $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_S)$. Разложим эту функцию в ряд Маклорена в окрестности положения устойчивого равновесия по степеням обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{\alpha=1}^S \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\alpha}} \right)_0 q_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^S \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

Полагаем в положении устойчивого равновесия $\Pi_0 = 0$. На

основе условий равновесия исчезают члены, линейные относительно обобщенных координат. Учитывая малость колебаний, оставляем первые, отличные от нуля, слагаемые. Получим следующее выражение:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S c_{jk} q_j q_k, \quad (8.4)$$

где $c_{jk} = c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0$.

Если определить потенциальную энергию от действия силы упругости пружины, то коэффициент c_{jk} будет равен коэффициенту жесткости пружины, поэтому коэффициенты c_{jk} называют **обобщенными коэффициентами жесткости**.

Из (8.4) следует, что потенциальная энергия представляется положительно определенной квадратичной формой обобщенных координат с постоянными коэффициентами.

Обобщенная сила от потенциальных сил Q_j^n выражается через потенциальную энергию:

$$Q_j^n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (8.5)$$

Рассмотрим определение обобщенной диссипативной силы Q_j^Φ .

Пусть на точки механической системы действуют линейные силы сопротивления \bar{F}_i^C , пропорциональные скоростям точек \bar{V}_i , то есть

$$\bar{F}_i^C = -\alpha_i \bar{V}_i = -\alpha_i \dot{\bar{r}}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где α_i – постоянные коэффициенты сопротивления.

Тогда, в соответствии с определением обобщенной силы, обобщенную силу Q_j^Φ от сил сопротивления можно представить в виде

$$Q_j^\Phi = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^C \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad (8.6)$$

где $\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \dot{r}_i^2}{2}$ – диссипативная функция Рэлея.

По аналогии с кинетической энергией выражаем функцию Рэлея через обобщенные координаты:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S \alpha_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (8.7)$$

где $\alpha_{jk} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$.

Разложим полученную функцию Φ в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получим

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S (\alpha_{jk})_0 \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (8.8)$$

Далее постоянные коэффициенты $(\alpha_{jk})_0$ сокращенно будем обозначать через α_{jk} и называть **приведенными коэффициентами сопротивления**.

Диссипативная функция Рэлея может быть выражена через полную энергию системы $T + \Pi$ в виде

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2\Phi,$$

откуда следует, что Φ характеризует скорость убывания полной механической энергии вследствие действия линейных сил сопротивления.

Возмущающую силу Q_j^B считаем зависящей явно от времени. Рассматриваем только гармонические возмущения, то есть когда Q_j^B изменяется во времени по синусоидальному закону.

С учетом формул (8.3)–(8.6) и (8.8) уравнения Лагранжа второго рода (8.1) преобразуются к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые в матричной форме запишутся в виде

$$A\ddot{q} + L\dot{q} + Cq = D, \quad (8.9)$$

где $q (q_1, q_2, \dots, q_S)$ – вектор-столбец обобщенных координат;
 $\dot{q} (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S)$ – вектор-столбец обобщенных скоростей;
 $\ddot{q} (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_S)$ – вектор-столбец обобщенных ускорений;
 $A(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{SS})$ – квадратная матрица обобщенных коэффициентов инерции;
 $L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{SS})$ – квадратная матрица приведенных коэффициентов сопротивления;
 $C(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{SS})$ – квадратная матрица приведенных коэффициентов жесткости;
 $D(d_1, d_2, \dots, d_S)$ – вектор-столбец возмущающих сил.

В зависимости от действующих на механическую систему сил различают три вида колебательных движений:

1) собственные (простые, гармонические) – происходящие под действием потенциальных сил, которые называют еще восстанавливающими силами;

2) затухающие – происходящие под действием потенциальных сил и сил сопротивления среды;

3) вынужденные – происходящие под действием потенциальных сил периодического характера, возможно наличие сопротивления среды.

В дальнейшем, с целью упрощения математических выкладок, рассмотрим малые колебания механической системы с одной степенью свободы.

Тогда выражения для кинетической энергии (8.3), потенциальной энергии (8.4) и диссипативной функции Рэлея (8.8) запишутся в виде

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2; \quad \Phi = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2, \quad (8.10)$$

где a – обобщенный коэффициент инерции; c – обобщенный коэффициент жесткости; α – приведенный коэффициент сопротивления.

Для наглядного представления о развитии колебательного процесса в системе с одной степенью свободы удобно применить геометрическую интерпретацию. Будем рассматривать обобщенную координату q и обобщенную скорость \dot{q} как прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Эту плоскость называют **фазовой**. Величины q и \dot{q} , определяющие состояние механической системы, называют **координатами состояния системы**. Некоторому движению системы соответствует движение изображающей точки на фазовой плоскости. Геометрическое место последовательных по-

ложений изображающей точки на фазовой плоскости называется **фазовой траекторией**. Фазовая траектория в фазовой плоскости называется **фазовым портретом**.

8.2. Собственные (гармонические) колебания

Пусть механическая система с одной степенью свободы движется под действием только потенциальных сил. Тогда уравнения Лагранжа второго рода (8.1) или, что то же, (8.9) примут вид

$$\ddot{q} + n^2 q = 0, \quad (*)$$

где $n = \sqrt{c/a}$ – **угловая (круговая) частота** колебания.

Частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находится в виде экспоненты $q = e^{\lambda t}$. Тогда, подставляя в (*), получаем характеристическое уравнение для определения параметра λ .

Корни уравнения $\lambda_{1,2} = \pm ni$, где $i = \sqrt{-1}$.

Общее решение уравнения (*):

$$q = c_1' e^{\lambda_1 t} + c_2' e^{\lambda_2 t} = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt = A \sin(nt + \beta).$$

Таким образом, уравнение собственных колебаний имеет вид

$$q = A \sin(nt + \beta), \quad (8.11)$$

где A и β – постоянные интегрирования (A – **амплитуда** колебания; β – **начальная фаза** колебания).

Обобщенная скорость

$$\dot{q} = An \cos(nt + \beta). \quad (8.12)$$

Постоянные интегрирования A и β определяются из начальных условий: при $t = 0$ $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Промежуток времени T , по истечении которого механическая система вернется в исходное положение, имея ту же по величине и направлению скорость, **называется периодом колебания**.

В соответствии с определением периода колебания из (8.11) и (8.12) следует

$$A \sin[n(t + T) + \beta] = A \sin(nt + \beta);$$

$$An \cos[n(t + T) + \beta] = An \cos(nt + \beta).$$

Одновременное выполнение этих условий возможно, очевид-

но, только при $nT = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \text{ с.} \quad (8.13)$$

Величина, обратная периоду, называется **частотой колебания**:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{2\pi} \text{ Гц.} \quad (8.14)$$

Примерный график собственного колебания приведен на рис. 8.1. Исключая из (8.11) и (8.12) время t , получим уравнение фазовой траектории в виде эллипса (рис. 8.2):

$$\frac{q^2}{a^2} + \frac{\dot{q}^2}{(an)^2} = 1.$$

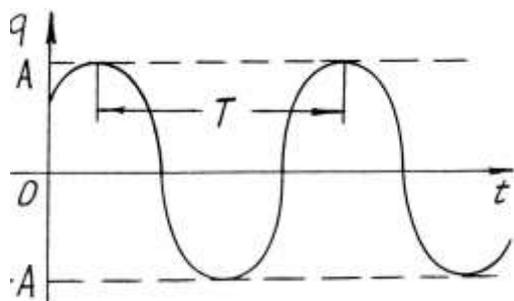


Рис. 8.1

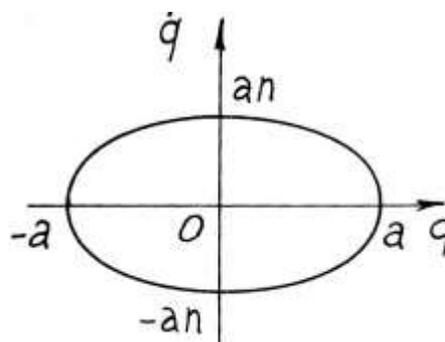


Рис. 8.2

Рассмотрим некоторые примеры собственных колебаний.

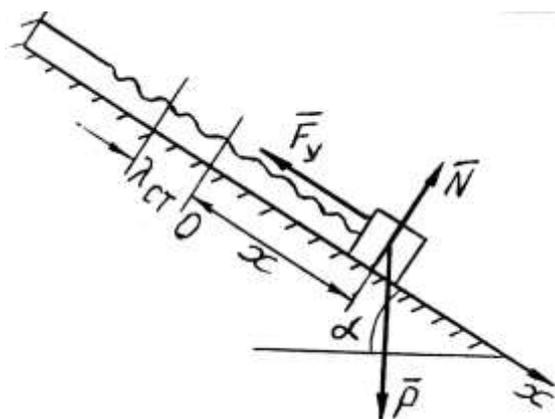


Рис. 8.3

Поступательное движение твердого тела (рис. 8.3). Пусть тело находится на идеально гладкой поверхности под действием силы тяжести \vec{P} и силы упругости пружины \vec{F}_y .

За обобщенную координату принимаем линейное перемещение тела $q \leftrightarrow x$.

$$F_y = -(x + \lambda_{ct}), \quad P = mg.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}.$$

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 = m \dot{x}^2.$$

$$\Pi_1 = -u_1 + c_1 = -\int -c(x + \lambda_{\text{CT}}) dx + c_1 = \frac{c(x + \lambda_{\text{CT}})^2}{2} \quad (c_1 = 0);$$

$$\Pi_2 = -u_2 + c_2 = -\int mg dz + c_2 = -mgz + c_2 = -mgx \sin \alpha \quad (c_2 = 0).$$

Тогда уравнение Лагранжа примет вид

$$m \ddot{x} = -c(x + \lambda_{\text{CT}}) + mg \sin \alpha.$$

В положении равновесия $x = 0$, $\ddot{x} = 0$.

$$0 = -c \lambda_{\text{CT}} + mg \sin \alpha; \quad \lambda_{\text{CT}} = \frac{mg \sin \alpha}{c}.$$

$$m \ddot{x} = -cx = c \frac{mg \sin \alpha}{c} + mg \sin \alpha.$$

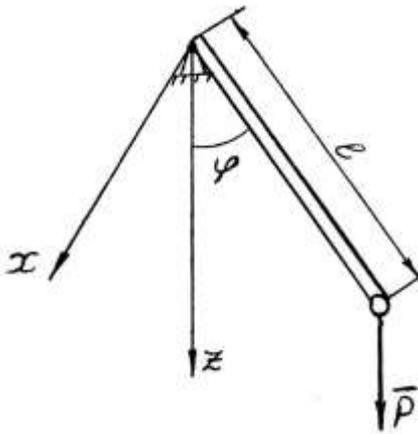


Рис. 8.4

И окончательно получаем дифференциальное уравнение собственного колебания: $\ddot{x} + n^2 x = 0$.

Математический маятник (рис. 8.4). Рассмотрим движение материальной точки массой m , закрепленной на конце невесомого вращающегося в вертикальной плоскости стержня.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 = \frac{1}{2} I_x \dot{\varphi}^2; \quad \Pi = -mg \ell \cos \varphi.$$

Тогда уравнение Лагранжа примет вид

$$I_x \ddot{\varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

или

$$I_x \ddot{\varphi} = -mg \ell \sin \varphi; \quad \sin \varphi \cong \varphi.$$

$$\ddot{\varphi} + n^2 \varphi = 0,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_x}} = \sqrt{\frac{mg\ell}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$T = \frac{2\pi}{n}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

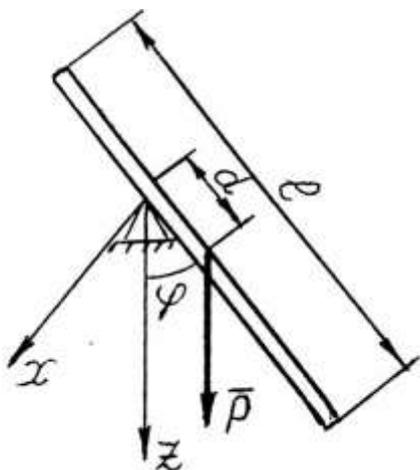


Рис. 8.5

Физический маятник (рис. 8.5).

Рассмотрим движение однородной балки весом P в вертикальной плоскости.

Уравнение Лагранжа запишется в виде

$$I_x \ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + n^2 \varphi = 0;$$

$$J_x = \frac{m\ell^2}{12} + md^2; \quad n = \sqrt{\frac{gd}{\ell^2/12 + d^2}}; \quad \nu = \frac{n}{2\pi}.$$

8.3. Затухающие колебания и апериодическое движение

Пусть механическая система с одной степенью свободы движется под воздействием потенциальных сил и сил сопротивления среды. Тогда уравнение Лагранжа второго рода (8.1) или, что то же, (8.9) примет вид

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + n^2q = 0, \quad (8.15)$$

где $b = \alpha/2a$.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (8.15), запишется в виде

$$\lambda^2 + 2b\lambda + n^2 = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - n^2}.$$

Возможны следующие случаи.

1. $b > n$ (достаточно большое сопротивление среды). Тогда $\lambda_{1,2}$ — различны и вещественны.

Общее решение уравнения (8.15):

$$q = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-bt} \left(c_1 e^{\sqrt{b^2 - n^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{b^2 - n^2} t} \right).$$

Введем новые постоянные B_1 и B_2 :

$$c_1 = \frac{B_1 + B_2}{2}; \quad c_2 = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

Тогда $q = e^{-bt} \left(B_1 \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - n^2} t + B_2 \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - n^2} t \right)$.

Переходя к новым постоянным A и β :

$$B_1 = A \operatorname{sh} \beta \quad B_2 = A \operatorname{ch} \beta,$$

окончательно получим уравнение аperiодического движения:

$$q = A e^{-bt} \operatorname{sh} \left(\sqrt{b^2 - n^2} t + \beta \right). \quad (8.16)$$

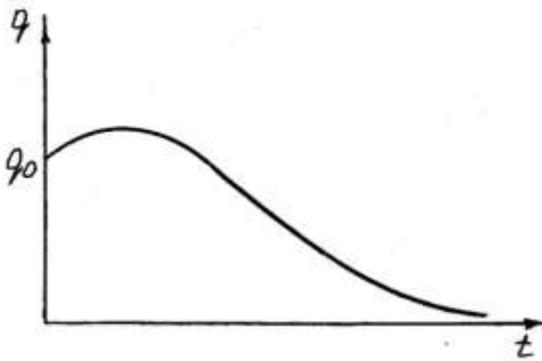


Рис. 8.6

Примерный график, характеризующий аperiодическое движение, представлен на рис. 8.6.

2. $b = n$. Корни характеристического уравнения одинаковы и вещественны: $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$.

Общее решение уравнения (8.15) также представляется в виде уравнения аperiодического движения:

$$q = e^{-bt} (c_1 + c_2 t). \quad (8.17)$$

3. $b < n$ (сопротивление среды достаточно незначительное). Тогда $\lambda_{1,2}$ – различные и мнимые:

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i \sqrt{n^2 - b^2}.$$

Общее решение уравнения (8.15):

$$q = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-bt} \left(c_1 \sin \sqrt{n^2 - b^2} t + c_2 \cos \sqrt{n^2 - b^2} t \right),$$

или, переходя к новым постоянным интегрирования A и β :

$$c_1 = A \cos \beta; \quad c_2 = A \sin \beta,$$

получим окончательно уравнение затухающего колебания:

$$q = A e^{-bt} \sin \left(\sqrt{n^2 - b^2} t + \beta \right). \quad (8.18)$$

Период и частота колебания определяются по аналогии с собственными колебаниями:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - b^2}}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{n^2 - b^2}}{2\pi}.$$

Для моментов времени $t = 0, T, 2T, 3T$ и так далее, амплитуда принимает значения $A, Ae^{-bt}, Ae^{-2bt}, Ae^{-3bt}$ и так далее, то есть образует геометрическую прогрессию со знаменателем e^{-bt} .

Величина e^{-bt} называется **декрементом затухания**, а величина $\ln e^{-bt} = -bt$ – **логарифмическим декрементом затухания**.

Примерные графики затухающего колебания и фазовой траектории представлены на рис. 8.7.

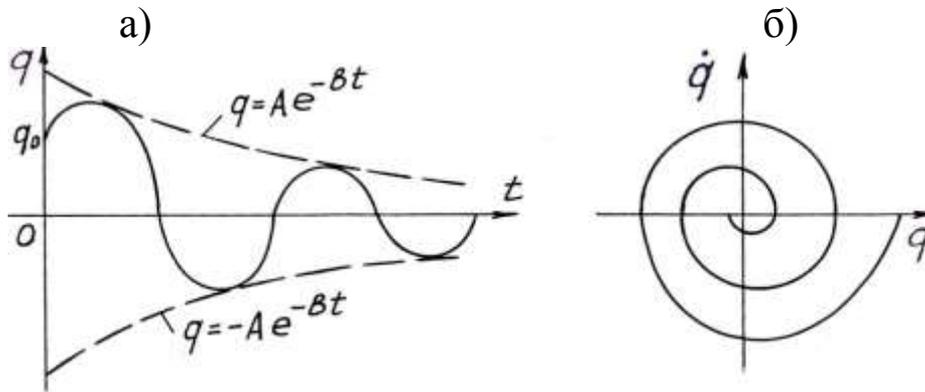


Рис. 8.7

8.4. Вынужденные колебания

Пусть кроме потенциальных сил и сил сопротивления среды на механическую систему действует обобщенная возмущающая сила периодического характера:

$$Q^B = H' \sin(pt + \delta).$$

Тогда уравнение Лагранжа запишется в виде

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + n^2q = H \sin(pt + \delta), \quad (8.19)$$

где $H = H' / a$.

Решение уравнения (8.19) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $q_1(t)$ и частного решения исходного неоднородного уравнения $q_2(t)$:

$$q = q_1(t) + q_2(t).$$

Ограничимся рассмотрением случая малого сопротивления среды ($b < n$). Тогда q_1 определяется уравнением (8.18). Частное

решение q_2 ищем, исходя из вида правой части уравнения (8.19)

$$q_2 = C \cos pt + B \sin pt.$$

Подставляя q_2 в (8.19), приравнявая друг другу коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ в обеих частях уравнения, получим следующие уравнения для определения коэффициентов C и B :

$$(n^2 - p^2)C + 2bpB = H \sin \delta;$$

$$-2bpC + (n^2 - p^2)B = H \cos \delta.$$

Исключая из этих уравнений сначала B , а затем C , имеем

$$\begin{aligned} \left[(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2 \right] C &= H \left[(n^2 - p^2) \sin \delta - 2bp \cos \delta \right]; \\ \left[(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2 \right] B &= H \left[(n^2 - p^2) \cos \delta + 2bp \sin \delta \right]. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение угол γ формулами:

$$\cos \gamma = \frac{n^2 - p^2}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}; \quad \sin \gamma = \frac{-2bp}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \quad (8.20)$$

Тогда

$$C = \frac{H \sin(\delta + \gamma)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}; \quad B = \frac{H \cos(\delta + \gamma)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}.$$

Подставляя C и B в q_2 , получим частное решение:

$$q_2 = \frac{H}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \sin(pt + \delta + \gamma).$$

С учетом найденного частного решения и формулы (8.18) окончательно получим уравнение колебаний при наличии периодического возмущения:

$$q = Ae^{-bt} \sin\left(\sqrt{n^2 - b^2}t + \beta\right) + \frac{H}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \sin(pt + \delta + \gamma). \quad (8.21)$$

Полное колебание системы складывается из затухающего (первое слагаемое) и вынужденного колебаний. С течением времени движение системы все больше будет определяться вынужденным колебанием.

При отсутствии сопротивления среды имеем $b = 0$, $\gamma = 0$. Уравнение (8.21) принимает вид

$$q = A \sin(nt + \beta) + \frac{H}{n^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (8.22)$$

При совпадении угловых частот собственных и вынужденных колебаний, то есть при $n = p$, амплитуда вынужденного колебания принимает максимальное значение, а при $b \rightarrow 0$, как следует из уравнения (8.22) даже стремится к бесконечности.

Возрастание амплитуды колебания при $n = p$ называется **резонансом**.

8.5. Примеры решения задач

Пример 1. Динамическое возбуждение вынужденных колебаний обобщенной механической системы.

Механизм (рис. 8.8), расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного колеса 1 массой $m_1 = 4$ кг и радиусом $r_1 = 0,15$ м, имеющего неподвижную ось вращения. К колесу шарнирно прикреплен невесомый стержень, связанный шарнирно с ползунком 4 массой $m_4 = 1$ кг. Стержень 2 массой $m_2 = 3$ кг и длиной $L = 0,6$ м одним концом закреплен на неподвижном шарнире, а другим концом шарнирно соединен посредством невесомого стержня также с колесом 1. Стержень 2 шарнирно посредством невесомого стержня соединен с колесом 3. Колесо 3 радиуса $r_3 = 0,2$ м, массой $m_3 = 2$ кг, распределенной по его ободу, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Ось колеса 3 соединена с невесомой пружиной, коэффициент жесткости которой равен $c = 1000$ Н/м, и демпфером, коэффициент сопротивления которого равен $\alpha_3 = 40$ Н·с/м. На колесо 1 действует пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$ ($M_0 = 4$ Н·м, $p = 15$ с⁻¹). В состоянии покоя системы стержень 2 занимает вертикальное положение. В начальный момент времени $t = 0$ колесу 1 в положении равновесия была сообщена начальная угловая скорость $\omega_{10} = \dot{\phi}_{10} = 0,2$ с⁻¹.

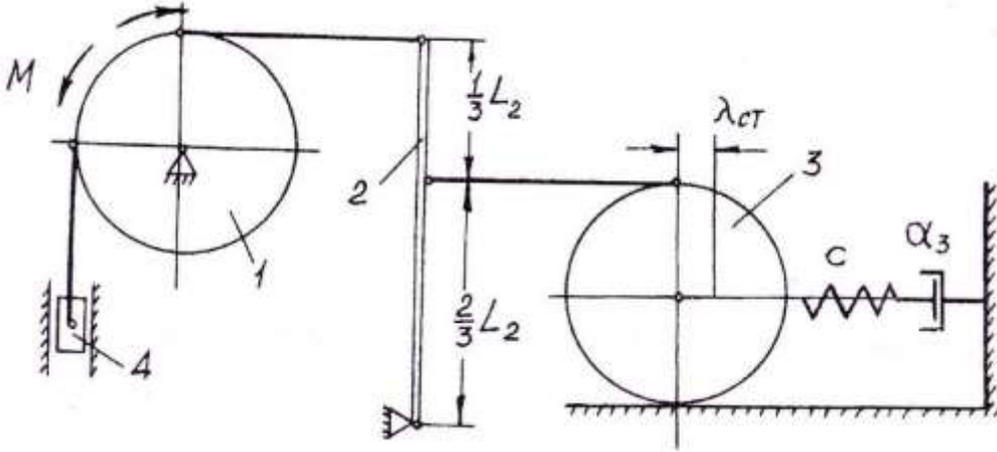


Рис. 8.8

Решение. Число степеней свободы заданной механической системы равно единице. В качестве обобщенной координаты примем угол поворота φ_1 колеса 1, считая φ_1 положительным в направлении против хода часовой стрелки. Обобщенная скорость $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ — угловая скорость колеса 1.

В силу наложенных на систему связей

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{L_2}; \quad \varphi_3 = \varphi_2 \frac{2}{3} L_2 / (2r_3) = \frac{1}{3} \varphi_1 \frac{r_1}{r_3};$$

$$S_3 = \varphi_3 r_3 = \frac{1}{3} \varphi_1 r_1; \quad S_4 = \varphi_1 \cdot r_1.$$

Уравнение Лагранжа второго рода запишется в виде уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q^B(t). \quad (8.23)$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, где

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{1z} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{6} m_2 L_2^2 \left(\frac{r_1}{L_2} \right)^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{6} m_2 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \dot{S}_3^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \frac{1}{9} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \frac{1}{9} \left(\frac{r_1}{r_3} \right)^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{9} m_3 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \dot{S}_4^2 = \frac{1}{2} m_4 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

$$T = \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{9} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

В соответствии с (8.10) $T = (1/2)a\dot{\varphi}_1^2$, где обобщенный коэффициент инерции

$$a = \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{9} m_3 + m_4 \right) r_1^2 = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Для определения обобщенной силы рассмотрим произвольное положение механической системы, определяемое углом поворота φ_1 (рис. 8.9).

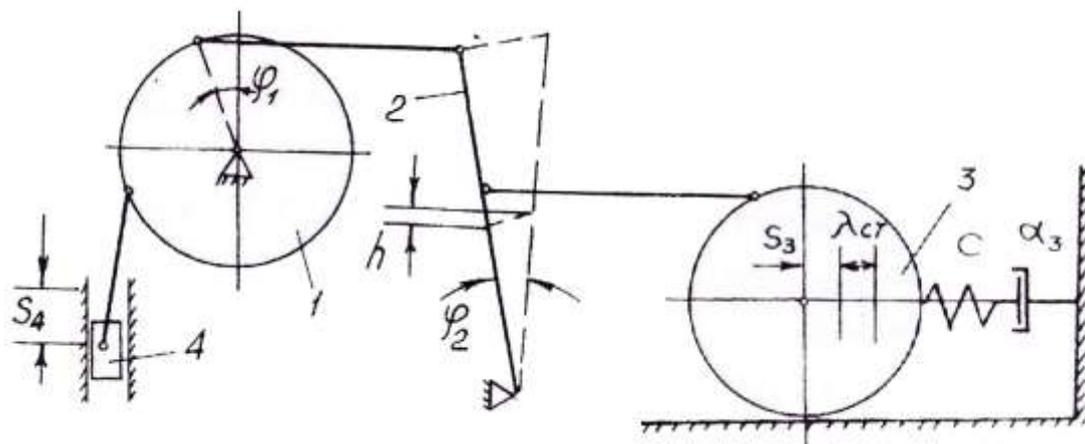


Рис. 8.9

Потенциальную энергию определим как работу потенциальных сил на перемещении системы из рассмотренного произвольного положения в положение равновесия, принимаемое за нуль потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_4 g S_4 - m_2 g h + \int_{\lambda_{CT}}^{S_3 + \lambda_{CT}} c S_3 dS_3 = \\ &= -m_4 g \varphi_1 r_1 - m_2 g h + \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{3} \varphi_1 r_1 + \lambda_{CT} \right)^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{CT}^2. \end{aligned}$$

Вертикальное смещение h центра тяжести стержня 2 вычисляем с точностью до величины второго порядка малости относительно обобщенной координаты φ_1 :

$$h = \frac{L_2}{2} - \frac{L_2}{2} \cos \varphi = \left(\frac{L_2}{2} \right) (1 - \cos \varphi_2);$$

$$\cos \varphi_2 = 1 - \varphi_2^2 / 2! + \varphi_2^4 / 4! - \dots$$

Ограничиваясь в формуле разложения двумя первыми членами и учитывая, что $\varphi_2 = (r_1 / L_2) \varphi_1$, получим

$$h = \left(\frac{L_2}{2} \right) \frac{\varphi_2^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{L_2} \varphi_1^2.$$

Статическое удлинение $\lambda_{\text{ст}}$ пружины определим из условия равновесия системы в положении покоя (вертикальное положение стержня 2):

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = m_4 g \delta S_4 - c \lambda_{\text{ст}} \delta S_3 = m_4 g r_1 \delta \varphi_1 - c \lambda_{\text{ст}} \frac{1}{3} r_1 \delta \varphi_1 = 0,$$

откуда $\lambda_{\text{ст}} = 3m_4 g / c$.

Для потенциальной энергии окончательно получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_4 g r_1 \varphi_1 - \frac{1}{4} m_2 g \frac{r_1^2}{L_2} \varphi_1^2 + \frac{1}{18} c r_1^2 \varphi_1^2 + m_4 g r_1 \varphi_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} c r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g \frac{r_1^2}{L_2} \right) \varphi_1^2. \end{aligned}$$

В соответствии с (8.10) $\Pi = (1/2)c\varphi_1^2$, где обобщенный коэффициент жесткости

$$c = (1/9)c r_1^2 - (1/2)m_2 g (r_1^2 / L_2) = 2 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Отсюда обобщенная сила, соответствующая потенциальным силам, запишется в виде

$$Q^n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c\varphi_1 = -2\varphi_1.$$

Диссипативная функция Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \alpha_3 \dot{S}_3^2 = \frac{1}{2} \alpha_3 \left(\frac{1}{3} r_1 \right)^2 \dot{\varphi}_1^2,$$

откуда приведенный коэффициент сопротивления

$$\alpha = \frac{1}{9} r_1^2 \alpha_3 = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Тогда обобщенная диссипативная сила запишется в виде

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\alpha \dot{\varphi}_1 = -0,1 \dot{\varphi}_1.$$

Обобщенную возмущающую силу определим по формуле

$$Q^B(t) = \frac{\delta A[M(t)]}{\delta q} = M_0 r_1 \sin pt = H \sin pt,$$

где $H = M_0 r_1 = 0,6$ Н·м.

Подставляя полученные величины в (8.23), запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$0,1 \ddot{\varphi}_1 + 0,1 \dot{\varphi}_1 + 2\varphi_1 = 0,6 \sin 15t$$

или в канонической форме

$$\ddot{\varphi}_1 + 2b\dot{\varphi}_1 + n^2\varphi_1 = h \sin 15t,$$

где $b = 0,5 c^{-1}$; $n = \sqrt{20} = 4,5 c^{-1}$; $h = 6 c^{-1}$.

Имеем случай малого сопротивления ($b < n$), поэтому общее решение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$\varphi_1 = Ae^{-0,5t} \sin(\sqrt{20 - 0,25}t + \beta) + \frac{6}{\sqrt{(20 - 225)^2 + 4 \cdot 0,5^2 \cdot 15^2}} \sin(15t + \gamma).$$

Сдвиг фазы вынужденного колебания γ , определим, используя формулы (8.20), из выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= -\frac{2bp}{n^2 - p^2} = -\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 15}{20 - 15^2} = \frac{15}{205} = 0,07; \\ \gamma &= \operatorname{arctg} 0,07 = 0,07 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_1 = Ae^{-0,5t} \sin(4,6t + \beta) + 0,03 \sin(15t + 0,07).$$

Обобщенная скорость

$$\begin{aligned} \omega_1 = \dot{\varphi}_1 &= -0,5Ae^{-0,5t} \sin(4,6t + \beta) + \\ &+ 4,6Ae^{-0,5t} \cos(4,6t + \beta) + 0,45 \cos(15t + 0,07). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования A и B определяем из начальных условий: при $t = 0$ $\varphi_1(0) = \varphi_{10} = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10} = \omega_{10} = 0,2 c^{-1}$.

$$\begin{cases} 0 = A \sin \beta + 0,03 \sin 0,07; \\ 0,2 = -0,5A \sin \beta + 4,6 \cos \beta + 0,45 \cos 0,07. \\ A \sin \beta = -0,03 \cdot 0,07; \\ 0,2 = 0,5 \cdot 0,03 \cdot 0,07 + 4,6A \cos \beta + 0,45. \end{cases}$$

$$A = \sqrt{0,021^2 + 0,056^2} = 0,05;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,021}{0,05^2} = 0,375; \quad \beta = 0,36 \text{ рад.}$$

Окончательно уравнение колебания имеет вид

$$\varphi_1 = 0,06e^{-0,5t} \sin(4,6t + 0,36) + 0,03 \sin(15t + 0,07).$$

Пример 2. Колебания вибростола под действием силового возбуждения.

Вибростол с формирующимся изделием (рис. 8.10) общей массой $m = 1000$ кг приводится в движение центробежным возбуждением посредством равномерно вращающихся дебалансов, расположенных под вибростолом. Дебалансы приводятся во вращение электродвигателем. Масса дебалансов $m_0 = 5$ кг, эксцентриситет их массы относительно оси вращения $r = 0,05$ м. Возмущающая сила F , возникающая от вращения дебалансов, пропорциональна массе дебалансов m_0 , их эксцентриситету r и квадрату частоты вынужденных колебаний $F = m_0 r p^2 \sin pt$ ($p = 10 \text{ с}^{-1}$). Коэффициент сопротивления демпфера, гасящего собственные колебания вибростола, равен $\alpha = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$.

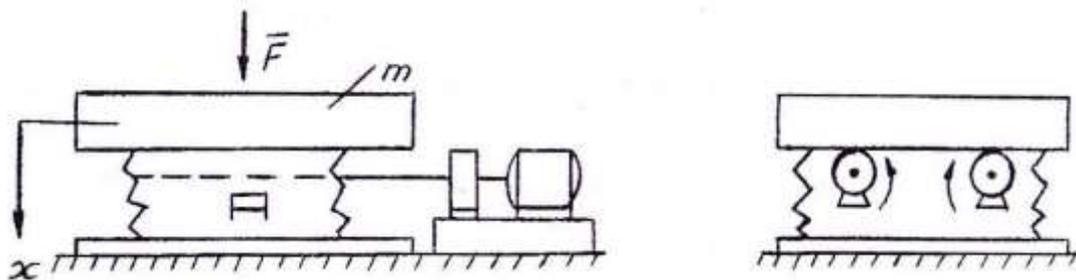


Рис. 8.10

Вибростол установлен на четырех параллельных пружинах, коэффициент жесткости каждой из которых равен $c^* = 10^5 \text{ Н}/\text{м}$. массой пружин можно пренебречь. В начальный момент времени $t = 0$ вибростол с формирующимся изделием находился в покое, то есть $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Решение. Уравнение Лагранжа второго рода запишется в виде (8.23), где в качестве обобщенной координаты возьмем линейное перемещение x .

Кинетическая энергия стола с изделием

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} 1000 \dot{x}^2.$$

Потенциальную энергию определим как работу силы тяжести вибростола с изделием и силы упругости пружин при перемещении системы из произвольного положения в положение равновесия:

$$\Pi = -mgx + \frac{1}{2} c(x + \lambda_{\text{ст}})^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{\text{ст}}^2.$$

В положении покоя, соответствующем статической деформации пружин, $(\partial\Pi/\partial x)_{x=0} = 0$. Отсюда находим величину статического удлинения пружин.

$$-mg + c\lambda_{\text{ст}}^2 = 0, \quad \lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} \cong 0,025 \text{ м.}$$

Тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2.$$

Отсюда обобщенная сила, соответствующая потенциальным силам, примет вид

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = -cx = -4c^* x.$$

Обобщенная диссипативная сила

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}} = -\alpha\dot{x} = -100\dot{x}.$$

Тогда уравнение Лагранжа второго рода примет вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2x = h \sin pt,$$

где
$$b = \frac{\alpha}{2m} = \frac{100}{2 \cdot 1000} = 0,05 \text{ с}^{-1}; \quad n = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5}{1000}} = 20 \text{ с}^{-1};$$

$$h = \frac{m_0 r p^2}{m} = \frac{5 \cdot 0,05 \cdot 10^2}{1000} = 0,025 \text{ м/с}^2.$$

Так как $b < n$, то общее решение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид (8.21), где постоянные интегрирования A и β определяются из заданных начальных условий.

Пример 3. Колебания вибростола под действием кинематического возбуждения.

Вибростол с формирующимся изделием (рис. 8.11) общей массой $m = 1000$ кг приводится в движение с помощью поводка, которому сообщаются извне колебания по закону $z = z_a \sin pt$

($z_a = 0,05$ м; $p = 10$ с⁻¹), где z – координата поводка, отсчитываемая от его среднего положения. Поводок движется в направляющих и соединен пружиной и демпфером с телом, которое также движется в направляющих. С другой стороны тело соединено пружиной и демпфером с неподвижной стойкой. Коэффициенты сопротивления демпферов равны $\alpha_1 = 50$ Н·с/м, $\alpha_2 = 100$ Н·с/м. Коэффициенты жесткости пружин равны $c_1 = 10^3$ Н/м, $c_2 = 10^5$ Н/м.

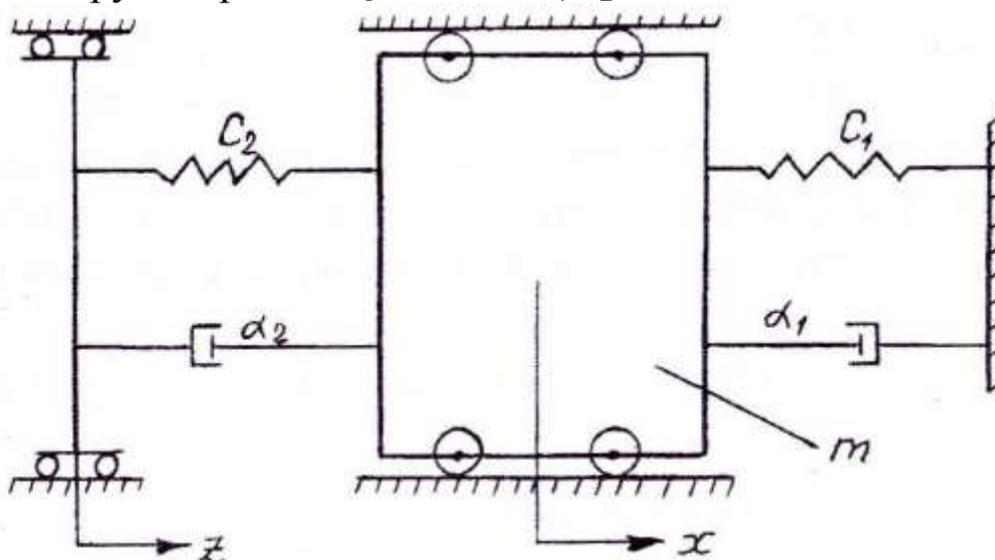


Рис. 8.11

Решение. Уравнение Лагранжа второго рода для описания колебательных движений относительно неподвижной стойки примет вид

$$m\ddot{x} + \alpha_1\dot{x} + \alpha_2(\dot{x} - \dot{z}) + c_1x + c_2(x - z) = 0,$$

где x – координата вибростола, отсчитываемая от его среднего положения.

С учетом заданного закона движения поводка записанное уравнение можно привести к дифференциальному уравнению типа (8.19):

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2x = h \sin(pt + \delta),$$

где

$$b = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2m} = \frac{50 + 100}{2 \cdot 100} = 0,15 \text{ с}^{-1};$$

$$n = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 10^5}{10^3}} = \sqrt{101} \cong 10 \text{ с}^{-1};$$

$$h = \frac{z_a}{m} = \sqrt{c_2^2 + \alpha_2^2 p^2} = \frac{0,05}{1000} \sqrt{10^{10} + 10^4 \cdot 10^2} \cong 5 \text{ м/с}^2;$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\alpha_2 p}{c_2} = \frac{100 \cdot 10}{10^5} = 10^{-2}, \quad \delta \cong 0.$$

Для описания колебательных движений вибростола относительно поводка введем координату $y = x - z$. Тогда дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода приведет к виду

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + n^2 y = L \sin(pt + \varphi),$$

где

$$L = \frac{z_a}{m} = \sqrt{(mp^2 - c_1)^2 + \alpha_1^2 p^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha_1 p}{c_1 - mp^2}.$$

Введем безразмерные переменные $\tau = nt$, $\xi = x/z_a$, $\eta = y/z_a$ и безразмерные параметры

$$b = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2mn}; \quad \chi = \frac{p}{n}; \quad u = \frac{c_2}{c_1 + c_2}; \quad v = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Тогда полученные дифференциальные уравнения для определения колебательных движений относительно неподвижной стойки и подвижного поводка можно записать в безразмерных величинах следующим образом:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \xi = a_1 \sin(\chi\tau + \delta); \quad \ddot{\eta} + 2\beta\dot{\eta} + \eta = a_2 \sin(\chi\tau + \varphi),$$

где

$$a_1 = \sqrt{u^2 + 4v^2\beta^2\chi^2}; \quad \delta = \operatorname{atctg} \frac{2v\beta\chi}{u};$$

$$a_2 = \sqrt{(1-u-\chi^2)^2 + 4(1-v)^2\beta^2\chi^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2(1-v)^2\beta\chi}{1-u-\chi^2}.$$

Полученные уравнения аналогичны уравнению (8.19).

Таким образом, при кинематическом возбуждении механической системы ее поведение зависит от четырех безразмерных параметров β , χ , u , v . При силовом возбуждении (см. пример 2) – только от двух параметров β и χ . Этим определяется гораздо большее разнообразие частотных характеристик системы при кинематическом возбуждении, чем при силовом.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики. – Москва : Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч. I / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Москва : Высшая школа, 1984. – 343 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. – Москва : Высшая школа, 1984. – 432 с.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – Москва : Наука, 1986. – 415 с.
5. Попов, М. В. Теоретическая механика. Краткий курс. – Москва : Наука, 1986. – 335 с.
6. Томилов, Е. Д. Теоретическая механика. Ч. I. – Томск : Издательство Томского университета, 1966. – 306 с.
7. Томилов, Е. Д. Теоретическая механика. Ч. 2. – Томск : Издательство Томского университета, 1970. – 317 с.
8. Мисюрёв, М. А. Методика решения задач по теоретической механике. – Свердловск : Издательство Свердловского горного института им. В. В. Вахрушева, 1958. – 243 с.
9. Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – Москва : Наука, 1971. – 304 с.

Учебное издание

Вениамин Анатольевич Хямяляйнен

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Авторская редакция

Компьютерный набор: З. В. Виноградов, В. М. Алешина

Оформление обложки: П. Ю. Шилов

Подписано в печать 30.06.2020.

Печать офсетная.

Тираж 400 экз. Заказ

Бумага офсетная

Уч.-изд. л. 14,0

Кузбасский государственный технический университет

имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а