

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составители  
В. А. Хямяляйнен  
М. А. Баёв

## **РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ**

**Методические указания к самостоятельной работе  
по дисциплине «Теоретическая механика»**

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности  
21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового  
производства в качестве электронного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2021

Рецензенты:

Богатырева А. С., доцент кафедры теоретической и геотехнической механики

**Хямяляйнен Вениамин Анатольевич**

**Баёв Михаил Алексеевич**

**Расчет плоской фермы** : методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «**Теоретическая механика**» для обучающихся технических специальностей и направлений бакалавриата / сост. В. А. Хямяляйнен, М. А. Баёв ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2021. – Текст : электронный.

В предлагаемых указаниях представлены основные теоретические положения темы «Расчет плоской фермы» и приведен подробный пример аналитического и графического расчета плоской фермы.

© Кузбасский государственный  
технический университет имени  
Т. Ф. Горбачева, 2021

© Хямяляйнен В. А., Баёв М. А.,  
составление, 2021

## ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Теоретическая механика – наука об общих законах механического движения и равновесия материальных тел. Раздел курса механики «Статика» является основополагающим при становлении студента как инженера-строителя. Многие технические расчеты, выполняемые при проектировании зданий, инженерных сооружений и машин, в определенной части, имеют в своем основании законы механики. Знание и умение применить основные положения раздела о равновесии тел под действием приложенных к ним сил во многом определяют успешное изучение других общетехнических и строительных дисциплин.

Настоящие методические указания предназначены для студентов строительных специальностей с целью более подробного изучения основных положений «Статики твердого тела» и приобретения различных методов решения задач, в том числе и графических.

### 1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГРАФОСТАТИКИ

При инженерных расчетах часто используют графические методы. Хотя эти методы и менее точны по сравнению с аналитическими, так как точность результата зависит от точности чертежа, однако они имеют то преимущество, что дают быстрое и наглядное решение задач.

Графический метод решения задач статики для плоской системы сил основан на построении силового и веревочного многоугольников.

Пусть на твердое тело действует система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (рис. 1, *a*). Фигура  $abcd$ , сторонами которой являются силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (рис. 1, *б*), называется **СИЛОВЫМ МНОГОУГОЛЬНИКОМ**.

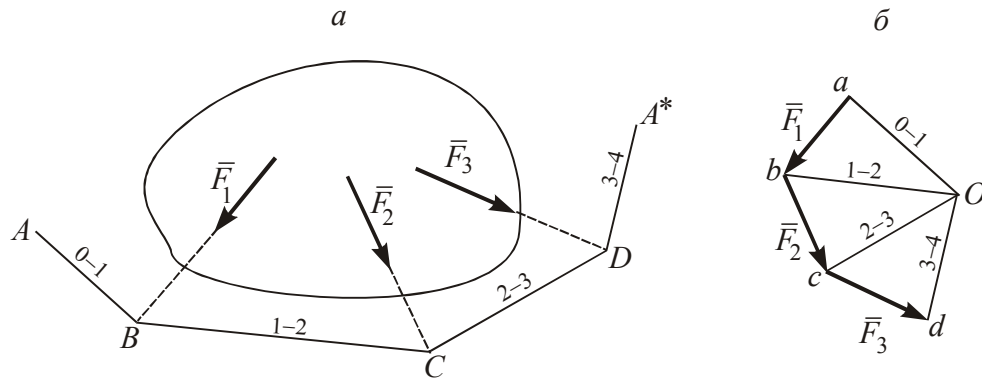


Рис. 1

На рис. 1, б выберем произвольную точку  $O$  (полус), не лежащую на сторонах силового многоугольника или на их продолжениях, и соединим ее с вершинами многоугольника лучами  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$ ,  $od$ , которые обозначим 0–1, 1–2, 2–3, 3–0. Эти цифры указывают номера сил, сходящихся в вершине многоугольника, куда проведен луч.

На рис.1, а также выбираем произвольную точку  $A$  и проводим прямую, параллельную лучу 0–1, до пересечения с линией действия силы  $\vec{F}_1$  в точке  $B$ . Из точки  $B$  проводим прямую, параллельную лучу 1–2, до пересечения ее с линией действия силы  $\vec{F}_2$  в точке  $C$  и т.д. Построенная таким образом фигура  $ABCD A^*$  называется **веревочным многоугольником**.

### 1.1. Графическое определение равнодействующей

Если силовой многоугольник, построенный для плоской системы сил, не замкнут, то такая система сил [1] приводится к одной равнодействующей. Определим ее с помощью построения силового и веревочного многоугольников.

Допустим, что три силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  приложены к твердому телу (рис. 2). Величину и направление равнодействующей  $\vec{R}$  определим построением силового многоугольника  $abcd$  (рис. 2, б) и веревочного многоугольника  $ABCD A^*$  (рис. 2, а).

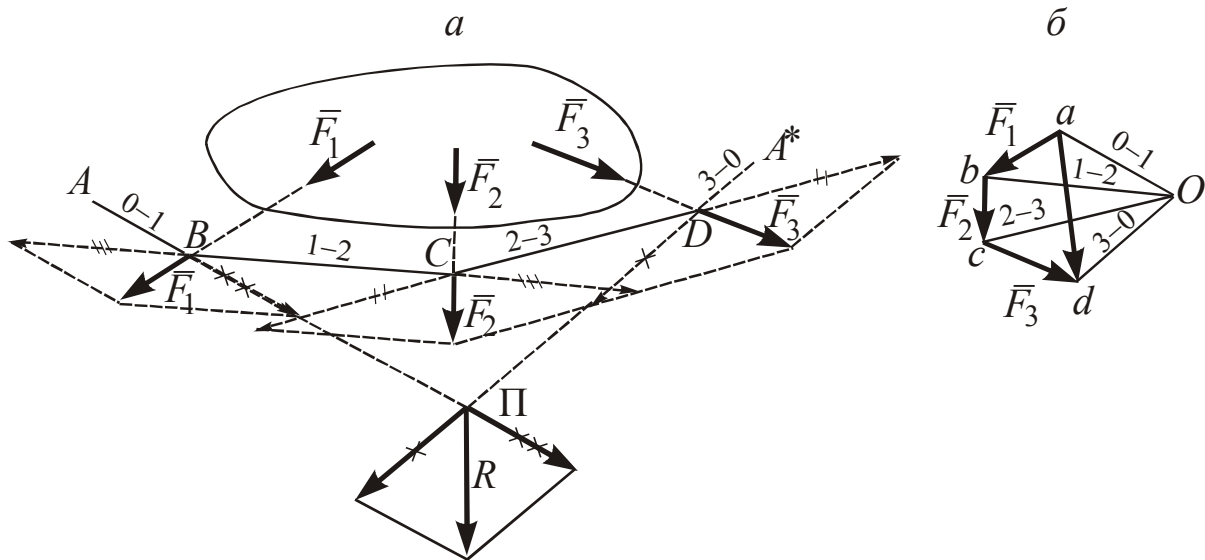


Рис. 2

Из построения веревочного многоугольника видно, что исходная система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  заменяется эквивалентной системой двух сил, действующих по направлениям 0–1 и 3–0, которая эквивалентна одной силе  $\bar{R}$ , линия действия которой проходит через точку П. Аналогичные построения можно провести для любого числа сил, для которых силовой многоугольник не замкнут.

При выборе в качестве полюса  $O$  других точек плоскости будут получаться различные по форме и положению веревочные многоугольники и соответственно другие точки пересечения крайних сторон этих многоугольников, но все эти точки будут лежать на одной прямой – на линии действия силы  $\bar{R}$ .

## 1.2. Графическое определение результирующей пары

В случае, когда силовой многоугольник  $abcde$ , построенный, например, на силах  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ , замкнут (рис. 3, а, б), то лучи 0–1 и 4–0 сливаются. Веревоочный же многоугольник для такой системы сил может быть незамкнутым. Его крайние стороны не пересекаются, а располагаются параллельно друг другу.

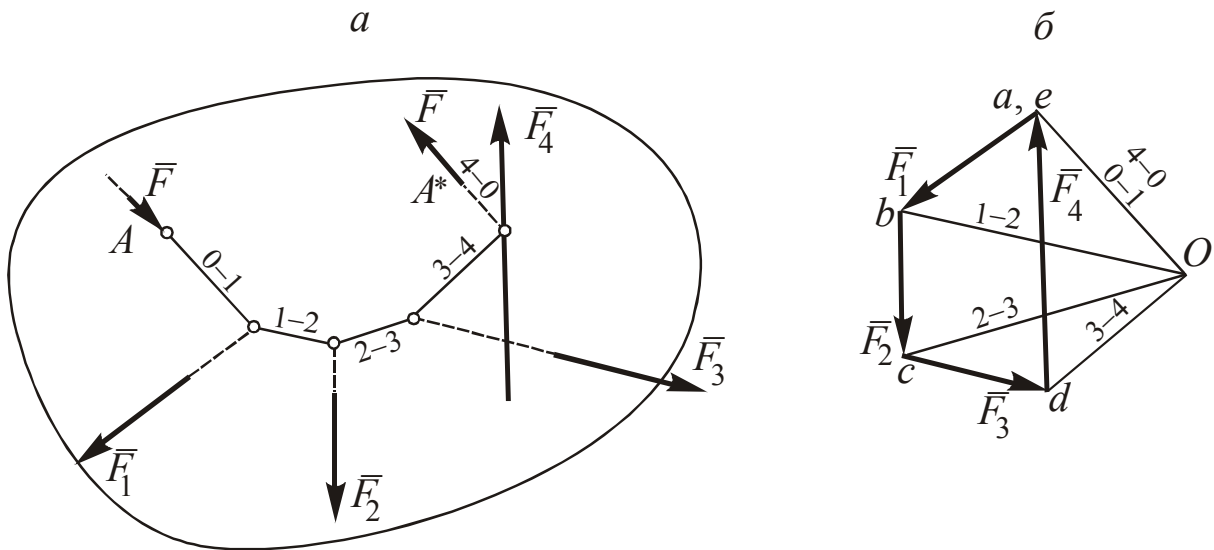


Рис. 3

Система сил в этом случае эквивалентна двум силам, равным по величине, параллельным и противоположно направленным, т.е. паре сил.

### 1.3. Геометрические условия равновесия плоской системы сил

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы **силовой и веревочный многоугольники**, построенные для этих сил, были **замкнутыми (геометрическое условие равновесия)**.

### 1.4. Определение опорных реакций

Балка  $AB$ , изображенная на рис. 4, находится под действием сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  ( $F_1 = F_2 = 5\text{ Н}$ ). Графически определить опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ .

Графическое решение начинают с построения силового многоугольника. Из точки «а» откладывают отрезки-векторы сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  в выбранном масштабе, затем выбирают полюс и проводят лучи, соединяя полюс с началом и концом каждого вектора-силы. Направление луча 3–4 – луча раздела реакций  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  – пока не известно. Для реакции  $\bar{R}_B$  (подвижной опоры  $B$ ) известна только линия действия (на рис.4, б вертикальный пунктир). Что

касается реакции неподвижного шарнира  $\bar{R}_A$ , то направление  $\bar{R}_A$  неизвестно, но шарнир  $A$  – это точка, через которую проходит линия действия силы  $\bar{R}_A$ . Поэтому построение веревочного многоугольника начинают именно из точки  $A$  (рис. 4, *a*). Так как при равновесии веревочный многоугольник замкнут, то соединяют крайние точки лучом 3–4.

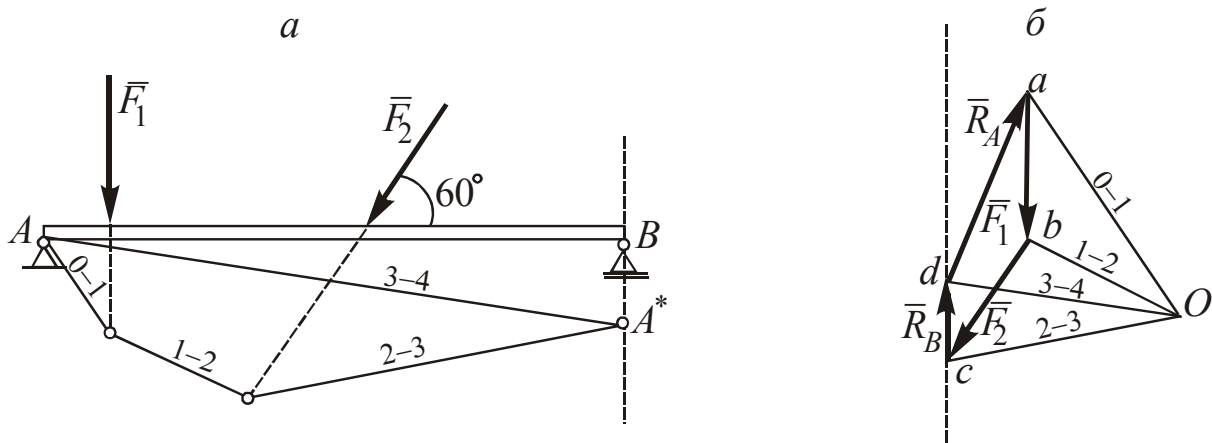


Рис. 4

Из полюса  $O$  проводим луч 3–4. Точка пересечения луча 3–4 с линией действия силы  $\bar{R}_B$  определяет точку раздела реакций – точку  $d$ . Отрезок  $da$ , замыкающий силовой многоугольник, определяет величину и направление реакции неподвижного шарнира  $A$  – сила  $\bar{R}_A$ .

## 2. РАСЧЕТ ФЕРМЫ

### 2.1. Определения, особенности расчета и способы расчета

Фермой называется жесткая конструкция, состоящая из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами.

Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, то такая ферма называется плоской. Шарнирные соединения стержней фермы называются узлами. Расстояние между опорами называется пролетом фермы.

Среди разнообразных типов ферм необходимо различать два основных вида:

1. Фермы без лишних стержней.

## 2. Фермы с лишними стержнями.

В дальнейшем будем рассматривать только фермы первого вида, предполагая при этом следующие условия:

- все стержни фермы – прямолинейные;
- трение в шарнирах отсутствует;
- заданные силы, действующие на ферму (нагрузки), лежат в плоскости фермы и приложены в ее узлах;
- собственный вес каждого стержня настолько мал по сравнению с силами, приложенными в узлах фермы, что им можно пренебречь.

Нетрудно заметить, что при выполнении этих условий каждый стержень фермы испытывает только **сжатие** или **растяжение** и не подвергается изгибу, в чем состоит основная особенность и преимущество фермы как строительной конструкции.

Ограничимся рассмотрением жестких ферм без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней « $k$ » и число узлов « $n$ » связаны соотношением  $k = 2n - 3$ .

## 2.2. Аналитический расчет фермы

Расчет фермы сводится к нахождению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

### 2.2.1. Определение опорных реакций

Так как на ферму в целом действует произвольная плоская система сил, то, рассматривая ферму в целом как твердое тело, опорные реакции находим в результате решения трех уравнений равновесия.

### 2.2.2. Метод вырезания узлов

Основная идея метода вырезания узлов состоит в том, что ферма под действием внешних сил находится в покое. Если вырезать (выделить) какой-либо узел, то он тоже будет в покое. Но тогда появляются внутренние силы, действующие в направлениях перерезанных стержней. Узел – точка, где сходятся линии действия внешних и внутренних сил. Поэтому каждый вырезанный



узел рассматривается как система сходящихся сил в данной плоскости. Для такой системы составляют два уравнения равновесия. Следовательно, расчет узлов начинают с того узла, где имеются две неизвестные внутренние силы, независимо от числа стержней, соединенных в данном узле (приложение, табл. 1).

Метод прост и универсален. К его недостаткам относятся: отсутствие самоконтроля в работе и накопление ошибки от узла к узлу. Однако эти недостатки можно компенсировать за счет увеличения степени точности промежуточных вычислений, а также построения замкнутых силовых многоугольников для каждого узла.

### **2.2.3. Метод сечений Риттера**

Исходное положение – ферма под действием сил находится в покое. Определяем опорные реакции. Если мысленно провести сечение по стержням фермы, то каждая отсеченная часть (или оставшаяся часть) фермы будет также в покое. Но теперь, кроме внешних сил (нагрузок на ферму в рассматриваемой ее части), будут действовать реакции перерезанных стержней.

Для определения этих реакций составляют три уравнения равновесия относительно точек Риттера. Точками Риттера являются точки пересечения линий действия реакций двух или более стержней. Если из трех стержней, по которым проведено сечение, два между собой параллельны, то составляют уравнения проекций всех сил на ось, перпендикулярную этим двум стержням. Метод прост и позволяет определять реакцию любого (или почти любого) интересующего нас стержня.

## **2.3. Графический расчет фермы**

### **2.3.1. Графическое определение опорных реакций**

Графический метод заключается в построении силового и веревочного многоугольников. Построение силового многоугольника производится в выбранном масштабе и в соответствии с требованиями, изложенными в п. 1.4. Веревочный многоугольник начинают строить из точки, в которой реакция неизвестна ни по величине, ни по направлению.

### 2.3.2. Определение усилий в стержнях

Применение этого метода расчета приведено в пп. 1.2 и 1.3. После графического определения опорных реакций, необходимо построить отдельно для каждого узла в масштабе замкнутый силовой многоугольник.

При этом по-прежнему построение начинается с того узла, где неизвестными являются две силы (реакции стержней). Последний узел является проверочным, силовой многоугольник при правильном построении для всех узлов замыкается автоматически.

### 2.3.3. Диаграмма Максвелла-Кремоны

Диаграммой Максвелла-Кремоны является единый чертеж, состоящий из силового многоугольника внешних сил и силовых многоугольников для каждого из вырезанных узлов.

Для построения диаграммы внешние силы изображают так, чтобы они были расположены вне фермы.

Части плоскости, ограниченные внешним контуром фермы и линиями действия сил, называются внешними областями. Части плоскости, расположенные внутри фермы и ограниченные стержнями, называются внутренними.

На диаграмме каждая сила обозначается двумя малыми буквами, соответствующими тем большим буквам, какими обозначены смежные области, разграниченные линией действия соответствующей силы. Расстановка букв строго определена: буквы на диаграмме ставятся в той же последовательности, в какой расположены две смежные области при выбранном направлении (единым для всего построения) обхода фермы и любого ее узла. Построение диаграммы начинают с многоугольника внешних сил. Затем на этом же чертеже производят построение силовых многоугольников для вырезанных узлов. Силовые многоугольники строят в соответствии с выбранным направлением обхода фермы.

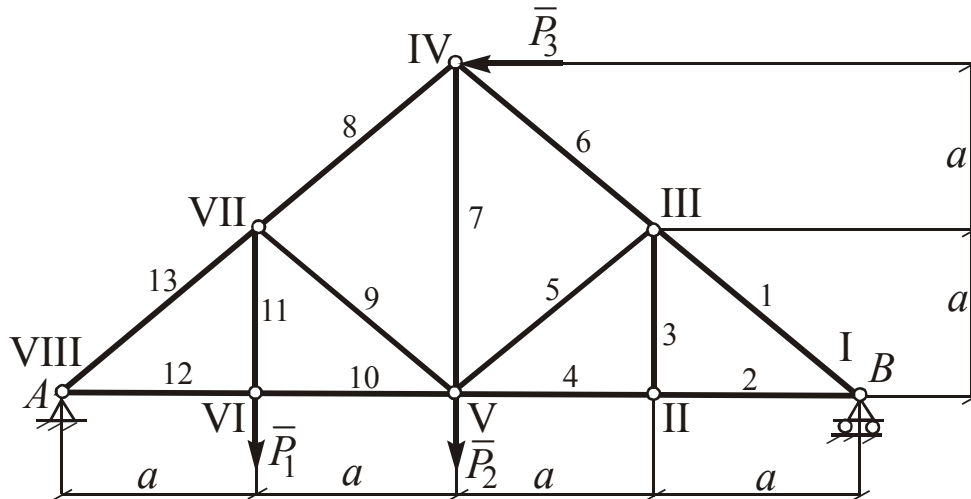
Пример расчета фермы приведен в приложении.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – Москва : Высшая школа, 1995. – 415 с.
2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Ч. 1. – Москва: Высш. шк., 1984. – 343 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1990. – 672 с.
4. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика : учебное пособие / В. А. Хямяляйнен, В. В. Иванов, С. М. Простов; Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1998. – 252 с.
5. Хямяляйнен, В. А. Сборник задач по теоретической механике : учебное пособие / В. А. Хямяляйнен, В. В. Иванов, С. М. Простов [и др.]; Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 98 с.

### ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Дано:  $P_1 = 2$  кН,  $P_2 = 3$  кН,  $P_3 = 2$  кН

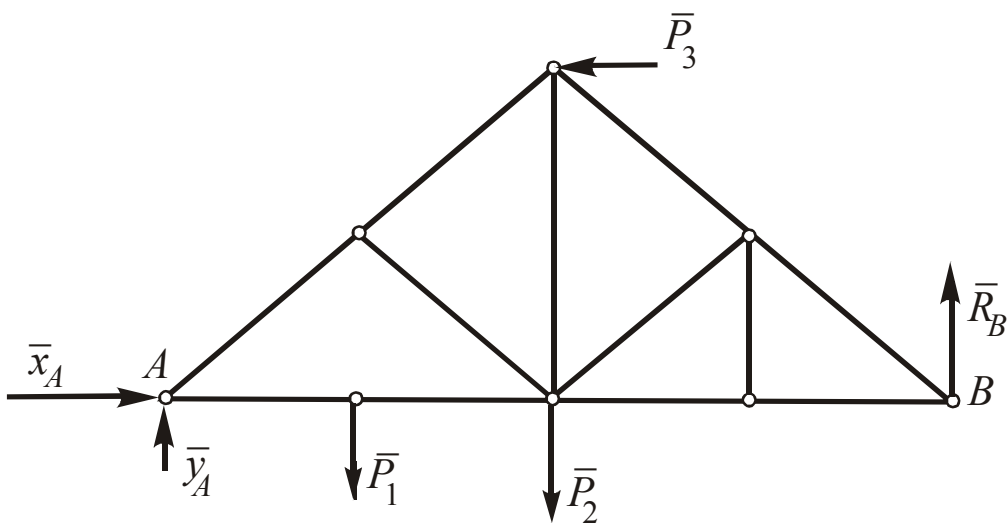


$k$  – число узлов,  $k = 8$ ;

$n$  – число стержней,  $n = 13$ ;  $n = 2k - 3$ ;  $13 = 2 \cdot 8 - 3$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

#### 1. Аналитический способ

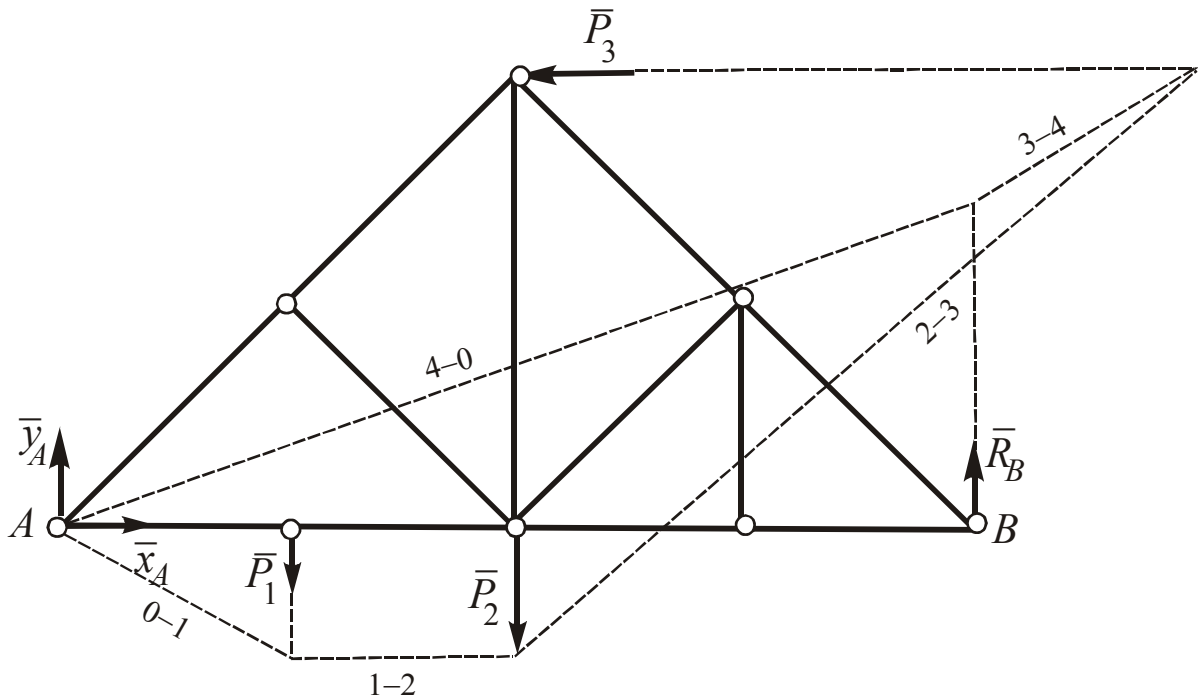


$$\begin{cases} \sum X_k = 0; & x_A - P_3 = 0 & \Rightarrow x_A = P_3 = 2 \text{ кН}; \\ \sum Y_k = 0; & y_A - P_1 - P_2 + R_B = 0 & \Rightarrow y_A = 4 \text{ кН}; \\ \sum m_A(\bar{F}_k); & -P_1 a - P_2 2a + P_3 2a + R_B 4a = 0 & \Rightarrow R_B = 1 \text{ кН}. \end{cases}$$

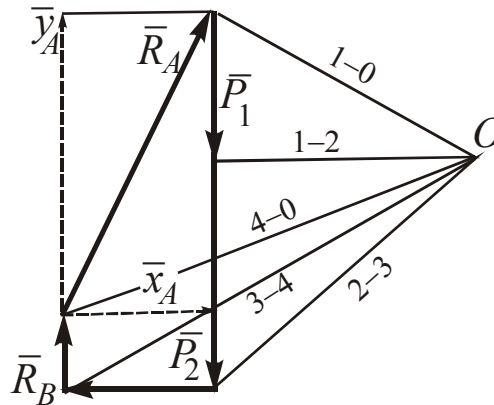
Ответ:  $R_B = 1,0 \text{ кН}$ ;  $R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 4,38 \text{ кН}$ .

## 2. Графический способ

### Веревочный многоугольник



### Силовой многоугольник



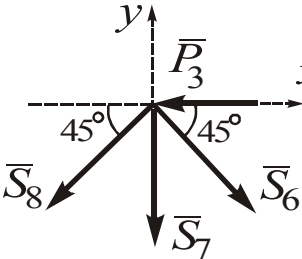
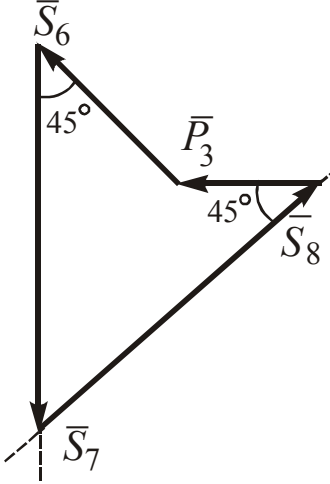
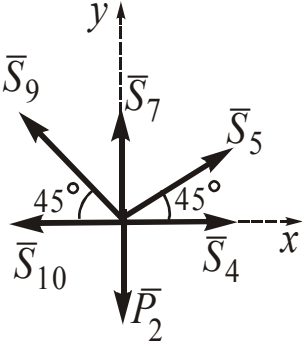
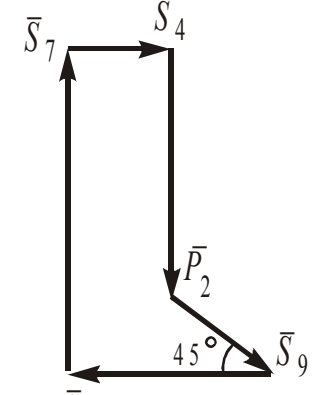
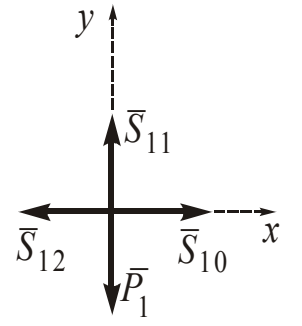
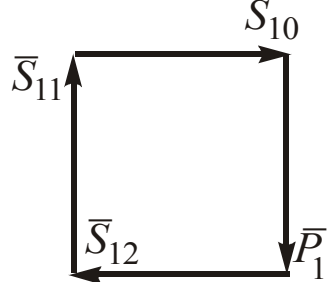
Ответы:  $R_B = 1 \text{ кН}$ ;  $R_A = 4,4 \text{ кН}$

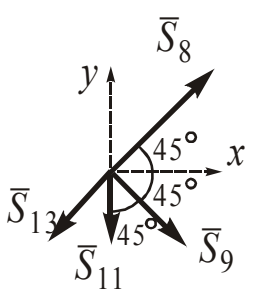
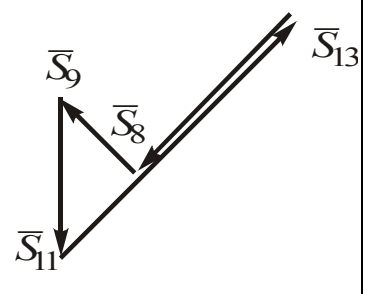
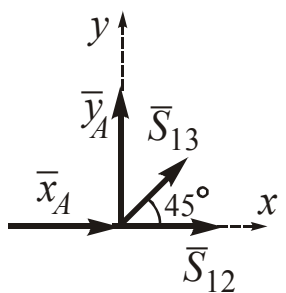
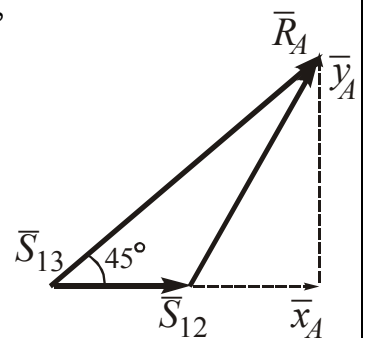
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ

## 1. Метод вырезания узлов

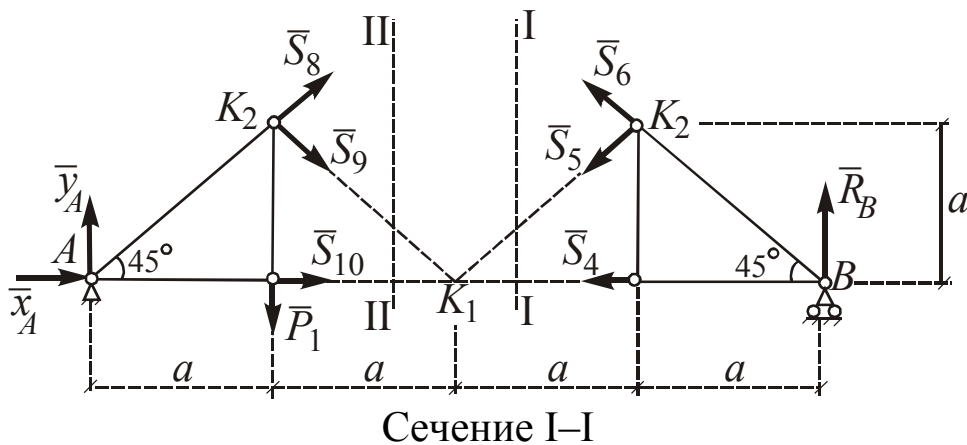
Таблица 1

№ узла	Расчетная схема узла	Аналитический способ	Геометрический способ
I		$\sum X = 0;$ $-S_2 - S_1 \cos 45^\circ = 0;$ $\sum Y = 0;$ $R_B + S_1 \cos 45^\circ = 0;$ $S_1 = -\sqrt{2} \text{ кН (сжат);}$ $S_2 = 1 \text{ кН (растянут)}$	 $S_1 = -1,41 \text{ кН}$ $S_2 = 1 \text{ кН}$
II		$\sum X = 0;$ $S_2 - S_4 = 0;$ $\sum Y = 0;$ $S_3 = 0;$ $S_3 = 0 \text{ кН;}$ $S_4 = 1 \text{ кН (растянут)}$	 $S_3 = 0$ $S_4 = 1 \text{ кН}$
III		$\sum X = 0;$ $S_1 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ -$ $-S_6 \cos 45^\circ = 0;$ $\sum Y = 0;$ $S_6 \cos 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ -$ $-S_3 - S_5 \sin 45^\circ = 0;$ $S_5 = 0;$ $S_6 = -\sqrt{2} = -1,41 \text{ кН}$ (сжат)	 $S_5 = 0 \text{ кН}$ $S_6 = -1,41 \text{ кН}$

№ узла	Расчетная схема узла	Аналитический способ	Геометрический способ
IV		$\sum X = 0;$ $-P_3 + S_6 \cos 45^\circ - S_8 \cos 45^\circ = 0;$ $\sum Y = 0;$ $-S_7 - S_6 \sin 45^\circ - S_8 \sin 45^\circ = 0;$ $S_7 = 4 \text{ кН (растянут);}$ $S_8 = -3\sqrt{2} \text{ кН (сжат)}$	 <p style="text-align: center;"> <math>S_7 = 4 \text{ кН}</math>  <math>S_8 = -3\sqrt{2} \text{ кН}</math> </p>
V		$\sum X = 0;$ $S_5 \cos 45^\circ + S_4 - S_{10} - S_9 \cos 45^\circ = 0;$ $\sum Y = 0;$ $S_5 \sin 45^\circ + S_7 + S_9 \sin 45^\circ - P_2 = 0;$ $S_{10} = 2 \text{ кН (растянут);}$ $S_9 = -1,41 \text{ кН (сжат)}$	 <p style="text-align: center;"> <math>S_{10} = 2 \text{ кН}</math>  <math>S_9 = -1,41 \text{ кН}</math> </p>
VI		$\sum X = 0;$ $S_{10} - S_{12} = 0;$ $\sum Y = 0;$ $S_{11} - P_1 = 0;$ $S_{12} = 2 \text{ кН (растянут);}$ $S_{11} = 2 \text{ кН (растянут)}$	 <p style="text-align: center;"> <math>S_{12} = 2 \text{ кН}</math> <math>S_{11} = 2 \text{ кН}</math> </p>

№ узла	Расчетная схема узла	Аналитический способ	Геометрический способ
VII		$\sum Y = 0;$ $S_8 \sin 45^\circ - S_9 \cos 45^\circ - S_{11} - S_{13} \sin 45^\circ;$ $S_{13} = -4\sqrt{2} \text{ кН (сжат)}$	 $S_{13} = -4\sqrt{2} \text{ кН}$
VIII		$\sum X = 0;$ $x_A + S_{12} + S_{13} \cos 45^\circ = 0;$ $2 + 2 - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 = 0;$ $4 - 4 = 0; 0 = 0;$ $\sum Y = 0;$ $y_A + S_{13} \sin 45^\circ = 0;$ $4 - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 = 0;$ $4 - 4 = 0; 0 = 0$	

## 2. Метод сечений Риттера





$$\begin{cases} m_{K_1}(\bar{F}_k) = 0; & R_B 2a + S_6 2a \sin 45^\circ = 0; \\ S_6 = -R_B / \sin 45^\circ = -\sqrt{2} = -1,41 \text{ кН} & \text{(сжат)}; \\ m_{K_2}(\bar{F}_k) = 0; & R_B a - S_4 a = 0; & S_4 = R_B = 1 \text{ кН} & \text{(растянут)}; \\ m_{K_3}(\bar{F}_k) = 0; & S_5 2a \cos 45^\circ = 0; & S_5 = 0 \end{cases}$$

### Сечение II–II

$$\begin{cases} m_{K_1}(\bar{F}_k) = 0; & -y_A 2a - S_8 2a \cos 45^\circ + P_1 a = 0; \\ m_{K_2}(\bar{F}_k) = 0; & S_{10} a + x_A a - y_A a = 0; \\ m_{K_3}(\bar{F}_k) = 0; & -S_9 2a \cos 45^\circ - P_1 a = 0; \end{cases}$$

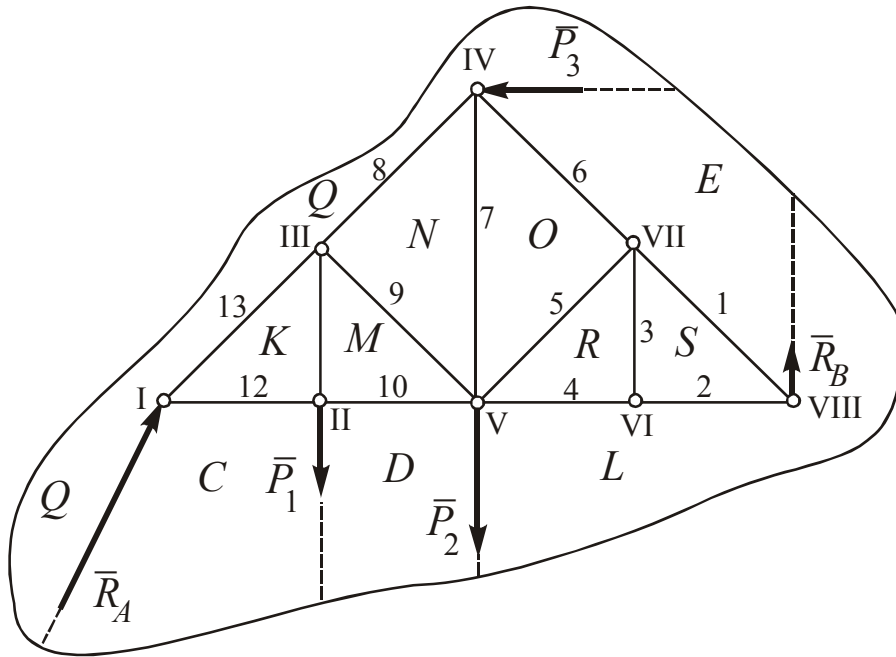
$$S_8 = -3\sqrt{2} \quad \text{(сжат)};$$

$$S_{10} = +2 \quad \text{(растянут)};$$

$$S_9 = -\sqrt{2} = -1,41 \quad \text{(сжат)}$$

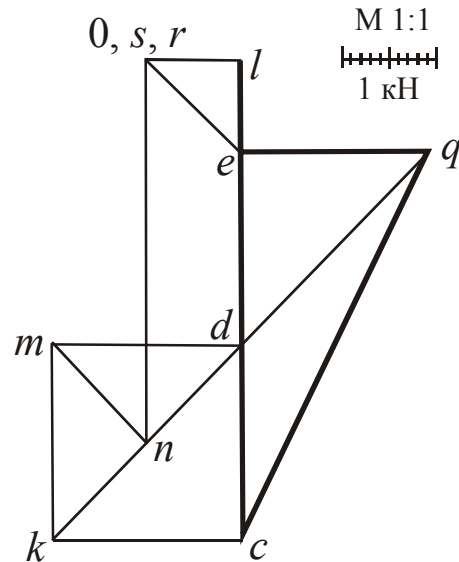
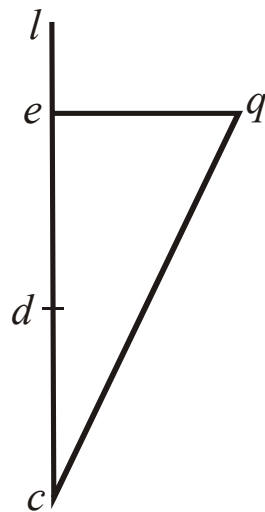
### 3. Построение диаграммы Максвелла-Кремоны

Построение диаграммы Максвелла-Кремоны в приведенном примере осуществлено следующим образом. Принимаем за начальную какую-либо внешнюю область фермы (например  $Q$ ) и ставим ей в соответствие точку  $q$  диаграммы. Переходя из области  $Q$  в область  $E$ , мы пересекаем линию действия силы  $\bar{P}_3$ , тогда из точки  $q$  отложим отрезок  $qe$ , параллельный этой силе в выбранном масштабе (в 1 см – 1 кН). Далее из области  $E$  в область  $L$ , получим отрезок  $el$ , соответствующий силе  $\bar{R}_B$ , и т.д., пока не обойдем всю ферму. В результате получим основу диаграммы – силовой многоугольник, который должен быть замкнут, так как силы, приложенные к ферме, уравновешиваются.



Силовой многоугольник  
внешних сил

Диаграмма  
Максвелла-Кремоны



Построение многоугольников сил, приложенных к узлам фермы, начинают с того узла, в котором сходятся два стержня, например с узла I. Для этого узла многоугольник сил должен состоять из вектора  $\overline{cq}$ , соответствующего силе  $\overline{R}_A$ ,  $\overline{kq}$  и  $\overline{kc}$ , соответствующих реакциям стержней 13 и 12. Для определения  $\overline{kq}$  и  $\overline{kc}$  через точку  $q$  проводим прямую, параллельную стержню 13, а через точку «с» – прямую, параллельную стержню 12. Точку пересечения этих прямых обозначим «k», тогда  $\overline{kc} = \overline{S}_{12}$ ,  $\overline{kq} = \overline{S}_{13}$ . Следующим рассматриваем узел II. Через точку «k» проводим прямую, параллельную стержню 11, а через точку «d» – парал-

тельную стержню 10. Точку их пересечения обозначаем « $m$ », тогда  $\overline{km} = \overline{S}_{11}$ ,  $\overline{md} = \overline{S}_{10}$ .

Дальнейшее построение проводится аналогично. Для узла VII остается неизвестной реакция стержня 1. Соединяем точки « $e$ » и « $s$ » на диаграмме, получаем вектор  $\overline{es}$ , параллельный стержню 1 и  $\overline{s}_1 = \overline{es}$ . При этом последний узел VIII является контрольным, так как реакции стержней для этого узла были определены ранее при обходе двух, прилежащих к данному узлу.

Если реакция стержня равна нулю (нулевой стержень), то на диаграмме две точки, соответствующие двум смежным областям на чертеже фермы, будут совпадающими ( $os$ ,  $rs$ ).

Таблица 2

## Результаты расчета

Усилия	Метод расчета		
	Диаграмма Максвелла-Кремоны	Метод Риттера	Вырезание узлов
S <sub>1</sub>	$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$
S <sub>2</sub>	1		1
S <sub>3</sub>	0		0
S <sub>4</sub>	1	1	1
S <sub>5</sub>	0	0	0
S <sub>6</sub>	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
S <sub>7</sub>	4		4
S <sub>8</sub>	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$
S <sub>9</sub>	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
S <sub>10</sub>	2	2	2
S <sub>11</sub>	2		2
S <sub>12</sub>	2		2
S <sub>13</sub>	$-4\sqrt{2}$		$-4\sqrt{2}$