

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Г. А. Липина
П. Н. Победаш

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

**Методические материалы к практическим занятиям
и самостоятельной работе**

для студентов специальности СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование

Рекомендовано цикловой методической комиссией
математических и естественнонаучных дисциплин
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты Николаева Е.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Ощепкова Е.А., председатель цикловой методической комиссии математических и естественнонаучных дисциплин

Липина Галина Александровна
Победаш Павел Николаевич

Дискретная математика с элементами математической логики: методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе [Электронный ресурс] для обучающихся специальности СПО 09.02.07 Информационные системы и программирование, очной формы обучения / сост. Г. А. Липина, П. Н. Победаш; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведены методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «**Дискретная математика с элементами математической логики**», позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

©КузГТУ, 2018
©Липина Г. А.,
Победаш П. Н.,
составление, 2018

Оглавление

Пояснительная записка	3
Общие положения	3
Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения.....	3
Раздел 1. Основы математической логики.....	3
Тема 1.1. Алгебра высказываний	3
Практическое занятие 1. Формулы логики	4
Самостоятельная работа по теме 1.1	5
Практическое занятие 2. Логические отношения.....	7
Тема 1.2. Булевы функции	8
Практическое занятие 3. Булевы функции.....	8
Раздел 2. Элементы теории множеств.....	11
Тема 2.1. Основы теории множеств	11
Практическое занятие 4. Множества и основные операции над ними. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна.....	11
Самостоятельная работа к теме 2.1	12
Раздел 3. Элементы теории графов.....	13
Тема 3.1. Основы теории графов	13
Практическое занятие 5. Общие понятия теории графов. Способы задания графов	13
Самостоятельная работа к теме 3.1	18
Раздел 4. Элементы комбинаторики.....	19
Тема 4.1. Элементы комбинаторного анализа	19
Практическое занятие 6. Комбинаторные формулы. Бином Ньютона.....	19
Самостоятельная работа к теме 4.1	21
Критерии оценки практической работы.....	23
Список источников.....	24

Пояснительная записка

Общие положения

Методические материалы разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики», при подготовке к практическим занятиям и организация самостоятельной работы.

В методических материалах приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Основы математической логики

Тема 1.1. Алгебра высказываний

Составные высказывания. Простейшие связки. Другие связки. Логические отношения. Варианты импликации. Основные законы, определяющие свойства введенных логических операций.

Практическое занятие 1. Формулы логики

Цель: изучить основные понятия и законы алгебры логики.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{X} \rightarrow (X \rightarrow Y)$.

Решение. Составим таблицу истинности (табл. 1.1).

Таблица 1.1 – Таблица истинности

X	Y	\overline{X}	$X \rightarrow Y$	$\overline{X} \rightarrow (X \rightarrow Y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Последний столбец состоит из единиц, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

Задача 2. Докажите эквивалентность

$$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$$

Решение.

Пусть $f_1 = X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$. Составим таблицу истинности (табл. 1.2).

Таблица 1.2 – Таблица истинности

X	Y	Z	$X \vee Z$	$Y \vee Z$	$X \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пусть $f_2 = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$. Составим таблицу истинности (табл. 1.3).

Таблица 1.3 – Таблица истинности

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Так как таблицы истинности (табл. 1.2 и табл. 1.3) для f_1 и f_2 совпадают, следовательно, эквивалентность доказана.

Задача 3. Даны три истинных суждения о четырех подозреваемых:

- а) Если Абрамов виновен, то Сидоров тоже виновен;
- б) Неверно, что если Васильев виновен, то и Дубов виновен;
- в) Неверно, что если Сидоров виновен, а Дубов нет.

Определите, кто из подозреваемых виновен.

1. Простые суждения: А – «Виновен Абрамов», В – «Виновен Васильев», С – «Виновен Сидоров», Д – «Виновен Дубов».

2. Формулы сложных суждений:

а) $A \rightarrow C = 1$; б) $\overline{B \rightarrow D} = 1$; в) $\overline{\tilde{N} \wedge \overline{D}} = 1$.

3. Снимем отрицание с суждения $\overline{B \rightarrow D} = 1$, получим $B \rightarrow D = 0$. Импликация равна нулю только в одном случае: $1 \rightarrow 0 = 0$, то есть $B = 1$ и $D = 0$.

Снимем отрицание с суждения $\overline{C \wedge \overline{D}} = 1$, получим $C \wedge \overline{D} = 0$. Известно, что $D = 0$, следовательно, $\overline{D} = 1$. Подставим значение в формулу $C \wedge 1 = 0$. Получаем $C = 0$.

Рассмотрим первую формулу $A \rightarrow C = 1$. Подставим в нее значение C , получим $A = 0$.

Окончательный ответ: $A=0, B=1, C=0, D=0$. Выходит, что Васильев виновен.

Самостоятельная работа по теме 1.1

- 1. Логичны ли следующие рассуждения?

1.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

1.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

1.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

1.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

1.5. Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключателей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.

1.6. Пусть каждый из трех членов комитета голосуют «за», нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».

2. Докажите, что контрапозиция эквивалентна первоначальной импликации.

3. Постройте составные высказывания, эквивалентные:

а) $X \leftrightarrow Y$;

б) $X \vee Y$, используя только связки отрицания и конъюнкции.

4. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях: «А, если В», «коль скоро А, то В», «в случае А имеет место В», «как А, так и В», «для А необходимо В», «для А достаточно В», «А вместе с В», «А, только если В», «А, пока В», «или А, или В», «А одновременно с В», «А – то же самое, что и В».

5. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний:

5.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

5.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут, и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

5.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

Практическое занятие 2. Логические отношения

Цель: изучить основные понятия и законы логических отношений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Преобразуйте формулу $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \leftrightarrow \overline{Y \rightarrow X}$ к виду, не содержащему импликацию и эквивалентность.

Решение. Запишем цепочку преобразований и приведем формулу у требуемому виду:

$$\begin{aligned} (X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) &\leftrightarrow \overline{Y \rightarrow X} = (X \rightarrow (\overline{Y} \vee Z)) \leftrightarrow Y \wedge \overline{X} = \\ &= \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z) \leftrightarrow (Y \wedge \overline{X}) = \end{aligned}$$

$$\left((\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)) \wedge (Y \wedge \overline{X}) \right) \vee \left(\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z) \right) \wedge \left(\overline{Y} \wedge \overline{X} \right)$$

Задача 2. Докажите равносильность $\overline{X} \rightarrow \overline{Y} = X \wedge \overline{Y}$ с помощью формул алгебры высказываний.

Решение. Используя формулу $X \rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$, запишем: $\overline{X \rightarrow Y} = \overline{\overline{X} \vee Y}$, тогда $\overline{\overline{X} \vee Y} = \overline{\overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}}$ по закону де Моргана, т. е. $\overline{\overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}} = X \wedge \overline{Y}$, т. к. по закону двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Пусть X означает: «Я сдам этот экзамен»; а Y : «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

- «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания».
- «Регулярное выполнение домашних заданий является необходимым условием того, что я сдам этот экзамен».
- «Сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания».
- «Я сдам этот экзамен в том и только том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания».
- «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Тема 1.2. Булевы функции

Понятие булевой функции. Свойства элементарных булевых функций. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы алгебры высказываний. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы.

Практическое занятие 3. Булевы функции

Цель: изучить основные понятия булевой функции.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Составьте таблицу истинности булевой функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \rightarrow \overline{x_3} \vee x_1 | (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1})$ и найдите ее двоичный набор.

Решение. Для вычисления значений функции следует определить порядок выполнения операций. Это можно сделать многими способами. Пусть, например, порядок будет такой:

$$f_1 = x_1 \oplus x_2; f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}; f_3 = x_1 | f_2; f_4 = \overline{x_3} \vee f_3; f_5 \rightarrow f_4.$$

Последовательно, составляются таблицы истинности всех указанных функций (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Таблица истинности

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Лексикографическое упорядочение наборов в таблице истинности булевой функции позволяет задать функцию двоичным набором длины 2^n , который будем обозначать буквой F . Двоичный набор данной функции $F = 11111111$. Отметим, что двоичный набор определяет булеву функцию в том и только в том случае, когда его длина есть степень двойки, а соответствующий показатель степени определяет число переменных данной функции.

Задача 2. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$.

Решение. Необходимо показать, что двоичный набор данной формулы $F = 1111$.

Составим таблицу истинности (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Таблица истинности

x	y	\overline{x}	$x \rightarrow y$	$\overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Задача 3. Докажите эквивалентность функций:

$$f(x, y, z) = x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

$$\text{и } f(x, y, z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge y).$$

Решение. Для доказательства построим таблицы истинности этих функций (табл. 3.2 и табл. 3.4) и сравним их двоичные наборы.

Таблица 3.3 – Таблица истинности

x	y	z	$x \vee z$	$y \vee z$	$x \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Таблица 3.4 – Таблица истинности

x	y	z	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Получаем $F_1 = 00000111$ и $F_2 = 00000111$. Значит, функции эквивалентны.

Задача 4. Упростить выражение (привести к ДНФ). Построить СДНФ и СКНФ.

$$4.1) F(x, y, z) = \overline{\overline{\overline{xy}} \vee (\overline{xz} \vee y)} \vee \overline{\overline{\overline{x\bar{y}z}} \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z)}$$

$$4.2) f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$$

$$4.3) f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

Раздел 2. Элементы теории множеств

Тема 2.1. Основы теории множеств

Общие понятия теории множеств. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Абстрактные законы операций над множествами. Декартово произведение множеств. Отношения. Бинарные отношения и их свойства.

Практическое занятие 4.

Множества и основные операции над ними. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна

Цель: изучить основные понятия теории множеств. Основные операции над множествами и их свойства

Продолжительность работы: 90 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества:

- а) $A \subset B \Rightarrow B \subset C$;
- б) $A \subset B$; $B \subset C$ и $A \setminus B = \emptyset$
- в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Задача 2. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский – 28; немецкий – 30; французский – 42; испанский и немецкий – 8; испанский и французский – 10; немецкий и французский – 5; все три языка – 3.

- а) Сколько студентов не изучают ни одного языка?
- б) Сколько студентов изучают один французский язык?

Решение. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна в виде трех кругов, обозначающих множество студентов, изучающих соответственно французский, немецкий и испанский языки. В каждую из восьми областей вписать данные, используя приведенные цифры. Начинать с конца списка и двигаться к началу.

Ответ: а) 20; б) 30.

Задача 3. Из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{1, 2\}$ составьте кортежи.

Решение. Из данных множеств можно составить 6 кортежей длины 2.

$\langle a, 1 \rangle; \langle a, 2 \rangle; \langle b, 1 \rangle; \langle b, 2 \rangle; \langle c, 1 \rangle; \langle c, 2 \rangle$.

Задача 4. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$.

Выписать все элементы декартова произведения $A \times B$ и $B \times A$.

Задача 5. Пусть $A = \{1, 2\}$. Выписать все элементы декартова произведения $A \times A$.

Задача 6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составьте все двузначные числа. Как связано получившееся множество с декартовым произведением $A \times A$, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Самостоятельная работа к теме 2.1

1. Дано универсальное множество U и множества A , B и C . Найти множество D . Записать ответ в виде списка.

1.1

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \\ A &= \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 5\}; \\ D &= (A \cup \bar{B}) - C. \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; \\ A &= \{a, d, e, g\}, B = \{b, d, g, h\}, C = \{a, b, c, g\}; \\ D &= (A \cup \bar{B}) \cap C. \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \\ A &= \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 8\}; \\ D &= (A \cap \bar{B}) - C. \end{aligned}$$

1.4

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; \\ A &= \{a, c, e, h\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, h\}; \\ D &= (A - \bar{B}) \cup C. \end{aligned}$$

1.5

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \\ A &= \{1, 4, 5, 7\}, B = \{2, 4, 5, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\}; \\ D &= (\bar{A} \cup \bar{B}) - C. \end{aligned}$$

$$1.6 \quad U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, c, d, g\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, g\};$$

$$D = (\bar{A} \cup B) - C.$$

2. На диаграмме Венна-Эйлера изобразить результат действия:

$$2.1 \quad (\bar{C} - \bar{B}) \cup A.$$

$$2.2 \quad (\bar{C} \cap \bar{B}) \cup A.$$

$$2.3 \quad (\bar{C} \cup \bar{B}) \cup A.$$

$$2.4 \quad (\bar{C} \cap \bar{B}) \cap A.$$

$$2.5 \quad (\bar{C} \cap \bar{B}) - A.$$

$$2.6 \quad (C \cap \bar{B}) \cap A.$$

$$2.7 \quad (C \cap \bar{B}) - \bar{A}.$$

3. Следующий опрос 100 студентов выявил следующие данные о числе студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий – 18; немецкий, но не испанский – 23; немецкий и французский – 8; немецкий – 26; французский – 48; французский и испанский – 8; никакого языка – 24.

а) Сколько студентов изучают испанский язык?

б) Сколько студентов изучают испанский и немецкий языки?

Раздел 3. Элементы теории графов

Тема 3.1. Основы теории графов

Основные понятия теории графов. Виды графов: ориентированные и неориентированные графы. Способы задания графов. Матрицы смежности и инцидентности для графа. Эйлеровы и Гамильтоновы графы. Деревья.

Практическое занятие 5.

Общие понятия теории графов. Способы задания графов

Цель: изучить общие понятия теории графов, способы задания графов.

Продолжительность работы: 180 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Граф G задан диаграммой. Для него:

- а) составить матрицу смежности;
- б) составить матрицу инцидентности;
- в) указать степени вершин графа;
- г) составить маршруты длины, равной 5;
- д) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- е) построить простой цикл, содержащий вершину V

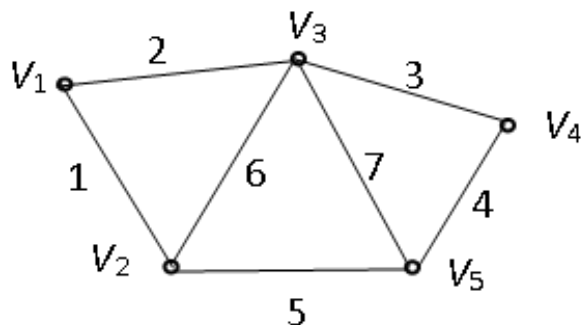


Рисунок 5.1 – Исходный граф

Решение.

а) Составим матрицу смежности вершин. Она является квадратной матрицей, в которой число строк и столбцов равно числу вершин n , в данном случае $n = 5$. Составим матрицу из пяти строк и пяти столбцов, запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Заполняем первую строку:

- $a_{11} = 0$, так как при вершине V_1 нет петли;
- $a_{12} = 1$, так как вершины V_1 и V_2 соединены одним ребром;
- $a_{13} = 1$, так как вершины V_1 и V_3 соединены одним ребром;
- $a_{14} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_4 нет ребра;

$a_{15} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_5 нет ребра.

Аналогично заполняем 2-ю строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_2 . Она соединена с вершинами V_1, V_3, V_5 одним ребром. Поэтому элементы a_{21}, a_{23}, a_{25} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем третью строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_3 . Она соединена с вершинами V_1, V_2, V_4, V_5 одним ребром. Поэтому элементы $a_{31}, a_{32}, a_{34}, a_{35}$ равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 4-ю строку. Вершина V_4 соединена с вершинами V_3 и V_5 . Поэтому элементы a_{43} и a_{45} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 5-ю строку. Вершина V_5 соединена с вершинами V_2, V_3 и V_4 . Поэтому элементы a_{52}, a_{53}, a_{54} равны 1, остальные равны 0.

Запишем матрицу смежности, в которую подставим полученные значения элементов:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \\
 \begin{array}{l}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

б) Составим матрицу инцидентности. В данном случае матрица инцидентности – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин, то есть $m = 5$, а число столбцов равно числу ребер, то есть $n = 7$. Запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\
 \begin{array}{l}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Так как граф неориентированный, то элементы матрицы будут принимать значения или 1, или 0.

Заполняем первую строку. Выделяем вершину V_1 , и смотрим, каким ребрам она принадлежит (инцидентна). Вершина V_1 инцидентна ребрам 1 и 2, поэтому $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем вторую строку. Выделяем вершину V_2 , и смотрим, каким ребрам она инцидентна. Вершина V_2 инцидентна ребрам 1, 5, 6, поэтому $a_{21} = 1$, $a_{25} = 1$, $a_{26} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем третью строку. Вершина V_3 инцидентна ребрам 2, 3, 6, 7, поэтому $a_{32} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{36} = 1$, $a_{37} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Аналогично заполняем остальные строки.

Запишем матрицу инцидентности, подставляя найденные значения элементов.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

в) Степенью вершин графа называется сумма инцидентных ей ребер.

Из вершины V_1 выходит два ребра, $d(V_1) = 2$. Вершине V_2 инцидентны три ребра, $d(V_2) = 3$. Для остальных вершин: $d(V_3) = 4$, $d(V_4) = 2$, $d(V_5) = 3$.

г) Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Длина маршрута равна количеству ребер в нем (с повторениями). Составим маршрут длины, равной 5:

$$M = \{ V_1, \underline{l_2}, V_3, \underline{l_3}, V_4, \underline{l_4}, V_5, \underline{l_5}, V_2, \underline{l_6}, V_3 \}.$$

д) Составим цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 . В цепи все ребра различны:

$$M_1 = \{ V_2, \underline{l_6}, V_3, \underline{l_2}, V_1, \underline{l_1}, V_2, \underline{l_5}, V_5 \}.$$

В простой цепи все вершины (и ребра) различны:

$$M_2 = \{ V_2, \underline{l_5}, V_5 \}.$$

е) Построим простой цикл, содержащий вершину V_4 . Проложим через V_4 замкнутый маршрут, в котором нет повторяющихся вершин и ребер: $M_3 = \{ V_4, l_4, V_5, l_5, V_2, l_6, V_3, l_3, V_4 \}$.

Задача 2. Для указанных графов (рис. 5.2):

- составить матрицу смежности;
- составить матрицу инцидентности;
- указать степени вершин графа;
- составить маршруты длины, равной 5;
- составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- построить простой цикл, содержащий вершину V_4 .

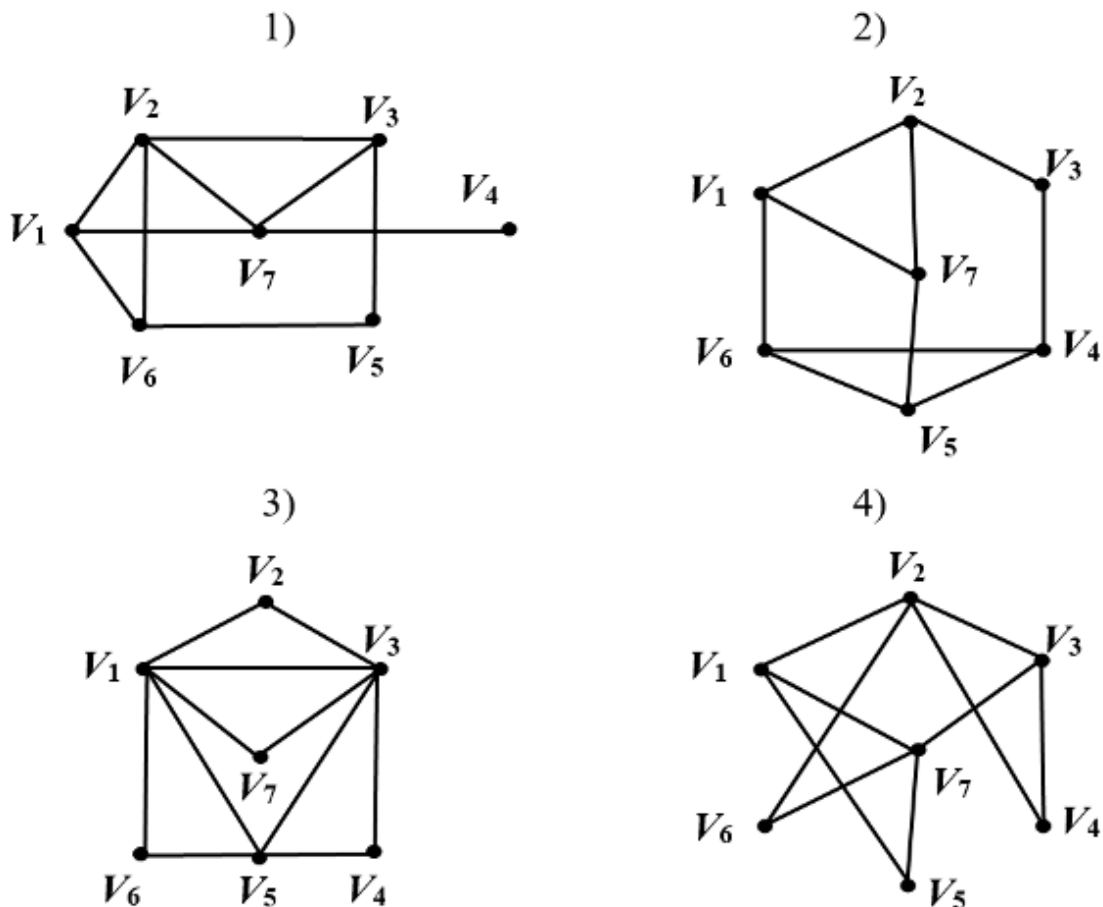


Рисунок 5.2 – Исходные состояния графов к заданию 2

Самостоятельная работа к теме 3.1

1. Для указанных графов (рис. 5.3):

- 1) составить матрицу смежности;
- 2) составить матрицу инцидентности;
- 3) указать степени вершин графа;
- 4) составить маршруты длины, равной 5;
- 5) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- 6) построить простой цикл, содержащий вершину V_4 .

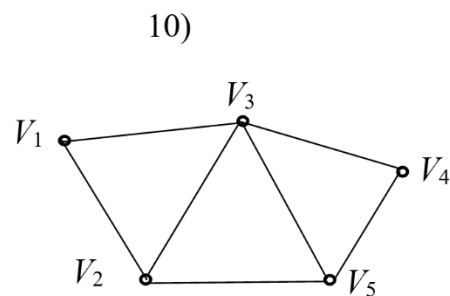
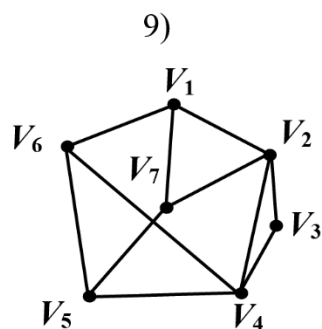
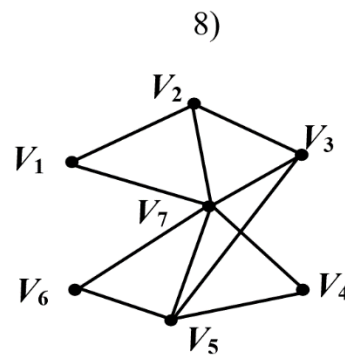
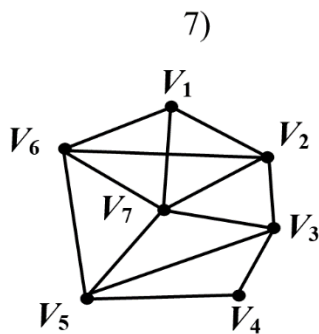
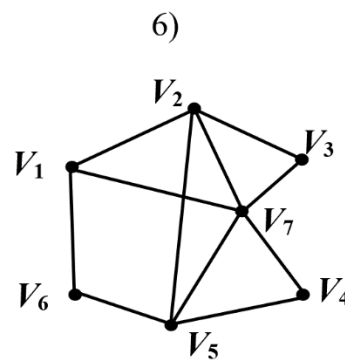
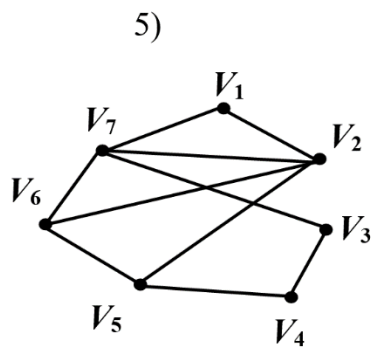


Рисунок 5.3 – Графы для самостоятельной работы

Раздел 4. Элементы комбинаторики

Тема 4.1. Элементы комбинаторного анализа

Основные правила комбинаторики. Перечислительная комбинаторика или теория перечислений. Комбинации элементов с повторениями. Бином Ньютона.

Практическое занятие 6.

Комбинаторные формулы. Бином Ньютона

Цель: изучить общие понятия и элементы комбинаторного анализа.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задания к практической работе:

Задача 1. Составьте все перестановки:

- а) из трех букв: a, b, c ;
- б) из четырех цифр: 5, 4, 3, 2.

Решение.

а) $abc, acb, bac, bca, cab, cba$;

б) 5432, 5423, 5342, 5324, 5343, 5234, 4532, 4523, 4324, 4352, 4235, 4253, 3542, 3524, 3452, 3425, 3245, 3254, 2345, 2354, 2435, 2453, 2534, 2543.

Задача 2. Составьте все размещения из четырех цифр: 1, 3, 5, 7 по две цифры в каждом.

Решение.

13; 15; 17; 31; 35; 37; 53; 57; 71; 73; 75.

Задача 3. Вычислите:

$$1) A_6^3, A_7^4, A_8^5, \frac{A_8^3 + A_7^2}{A_6^4}, \frac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4};$$

$$2) P_4, P_6, P_9, \frac{P_5 + P_4}{P_3};$$

$$3) C_6^2, C_8^3, C_{11}^4, C_{12}^7.$$

Задача 4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера. Если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Задача 5. Найдите:

- 1) четвертый член разложения $(a + 3)^7$;
- 2) четвертый член разложения $(a + \sqrt{b})^{12}$;
- 3) восьмой член разложения $(a^2 + b^2)^{13}$;
- 4) средний член разложения $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$.

Задача 6. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Решение. Число способов равно:

$$P(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Задача 7. В аквариуме 13 рыбок, из них 5 красных. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок была ровно 1 красная?

Задача 8. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для бега на дистанцию 1000 м?

Задача 9. На прилавке 11 банок рыбных консервов. Из них – одна испорчена. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок попалась испорченная?

Задача 10. Сколько способов составить слово БАБА из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

Задача 11. В темном погребе 10 банок с огурцами. Из них 3 – помутнели. Наугад выбирают 3 банки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок была ровно 1 помутневшая?

Задача 12. Сколько способов составить слово СПОР из карточек разрезной азбуки слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ, выбирая их случайным образом?

Задача 13. В корзинке 13 опенков, из них 4 ложных. Наугад выбирают 7 опят. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных грибов было ровно 2 ложных?

Задача 14. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для участия в эстафете на 200, 300 и 400 м?

Задача 15. В ведерке 10 зернышек, из них 3 не взойдут. Наугад выбирают 5 для посадки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных зернышек взойдут ровно 2?

Задача 16. В коробке 12 карандашей, 10 цветных и 2 простых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных карандашей было ровно 2 цветных?

Задача 17. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 – один для Маши, а другой для Вити?

Задача 18. В колхозном гараже 4 трактора и 3 сеялки. Наугад выбирают 4 машины. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных было ровно 3 трактора золотых?

Задача 19. Сколькими способами можно набрать последние 3 цифры телефонного номера?

Самостоятельная работа к теме 4.1

1. В курятнике 11 куриц, из них 7 рябок, остальные белые. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных куриц было ровно 3 белых?

2. Сколько способов составить слово АБРАКОДАБРА из карточек разрезной азбуки, переставляя их случайным образом?

3. В хлеву 9 коров, из них 6 доятся. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 доящихся коровы?

4. Сколько способов составить из букв слова «МИШЕНЬ» различных слов?

5. Сколькими способами можно из 6 стандартных и 5 нестандартных болтов выбрать 3, так чтобы среди них было 1 стандартный и 2 нестандартных?

6. Сколькими способами можно посадить 6 различных цветов в 6 разных цветочных горшков?

7. Сколькими способами можно из 4 стандартных и 5 нестандартных деталей выбрать 4, так чтобы среди них было 2 стандартные и 2 нестандартные?

8. Сколькими способами можно расставить на 6 путях 4 состава?

9. В клетке 8 мышей, из них 4 белых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных мышей было ровно 2 белых?

10. Сколькими способами можно из 15 человек класса выбрать культорга, физорга и профорга?

11. В аквариуме 7 рыбок, из них 5 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

12. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 без учета порядка?

13. В ящике 7 деталей, из них 3 стандартных. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных деталей было ровно 2 стандартных?

14. Сколькими способами можно из букв a, b, c, d составить слов длины 5?

15. В аквариуме 9 рыбок, из них 4 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

16. Сколькими способами можно в кинотеатре рассадить 6 человек на ряд из 18 мест?

Критерии оценки практической работы

Отметка	Критерии	Показатели по 100-й шкале
5 (отлично)	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения и получены верные ответы	100 баллов
	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения, но имеется одна - две вычислительные ошибки	(90;100) баллов
4 (хорошо)	– работа выполнена полностью, но при выполнении обнаружилось недостаточное владение навыками работы в рамках поставленной задачи	(85;90) баллов
	– правильно выполнена большая часть работы (свыше 85%) – работа выполнена полностью, но использованы наименее оптимальные подходы к решению поставленной задачи	(80;85) баллов
3 (удовлетворительно)	– работа выполнена не полностью, допущено более трех ошибок, но обучающийся владеет основными навыками работы, требуемыми для решения поставленной задачи.	(65;79) баллов
2 (неудовлетворительно)	– допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными знаниями, умениями и навыками работы или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.	(50;65) баллов
	– работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и навыков работы по проверяемой теме.	(30;50) баллов

Список источников

Основная литература

1. Спирина, М. С. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учебник для студентов среднего профессионального образования, обучающихся по специальности 09.02.07 "Информационные системы и программирование", 09.02.06 "Сетевое и системное администрирование" / М. С. Спирина, П. А. Спирин. – Москва : Академия, 2017. – 368 с. – Режим доступа: <http://www.academia-moscow.ru/catalogue/4831/295230/>. – Загл. с экрана.

2. Спирина, М. С. Дискретная математика. Сборник задач с алгоритмами решений [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов среднего профессионального образования, обучающихся по специальности 09.02.07 "Информационные системы и программирование", 09.02.06 "Сетевое и системное администрирование" / М. С. Спирина, П. А. Спирин. – Москва : Академия, 2017. – 288 с. – Режим доступа: <http://www.academia-moscow.ru/catalogue/4831/295286/>. – Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Гусева, А. И. Дискретная математика. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 208 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=910991>. – Загл. с экрана.

2. Канцедал, С. А. Дискретная математика. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 222 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=927464>. – Загл. с экрана.

3. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 592 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=71772. – Загл. с экрана.

4. Палий, И. А. Дискретная математика 2-е изд., испр. и доп. [электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 352 с. – Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/diskretnaya-matematika-416250>. – Загл. с экрана.

5. Гусева, А. И. Дискретная математика. Сборник задач. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 224 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=929964>. – Загл. с экрана.

6. Баврин, И. И. Дискретная математика. [электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 193 с. – Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/diskretnaya-matematika-uchebnik-i-zadachnik-423969>. – Загл. с экрана.