

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»**

**И. В. КУЗНЕЦОВ И. А. ПАНАЧЕВ Ю. Ф. ГЛАЗКОВ
Г. В. ШИРОКОЛОБОВ С. А. СИДЕЛЬНИКОВ**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ЧАСТЬ I

Курс лекций

Кемерово – 2017

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я73

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Директор Горного института Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, доктор технических наук, профессор Б. Н. Заровняев.

Профессор кафедры механики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет», доктор технических наук М. Ю. Насонов.

Доцент кафедры механики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет», кандидат технических наук П. В. Артамонов.

Сопротивление материалов. Часть I. Курс лекций / И. В. Кузнецов, И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков, Г. В. Широколов, С. А. Сидельников; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – 170 с.
ISBN 978-5-906969-50-7

Теоретическая часть содержит подробный вывод уравнений по рассматриваемому разделу и вопросы для самостоятельного контроля знаний.

Излагаются основные теории, гипотезы и уравнения сопротивления материалов, теория напряженно-деформированного состояния, рассматриваются простые и сложные виды деформирования твердого тела.

Предназначен для студентов технических направлений подготовки (специальностей) 08.03.01 «Строительство», 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», 21.05.04 «Горное дело», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я73

© КузГТУ, 2017

ISBN 978-5-906969-50-7

© И. В. Кузнецов, И. А. Паначев,
Ю. Ф. Глазков, Г. В. Широколов,
С. А. Сидельников, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КУРСА «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ».....	7
1.1 Основные определения сопротивления материалов.....	7
1.2 Реальный объект и расчетная схема. Схематизация понятий.....	8
1.3 Определение внутренних усилий. Метод сечений.....	12
1.4 Понятие о нормальных и касательных напряжениях.....	14
1.5 Связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами.....	15
Вопросы для самопроверки.....	16
ГЛАВА 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ.....	17
2.1 Некоторые сведения о геометрических характеристиках.....	17
2.2 Вычисление геометрических характеристик простых фигур.....	22
2.3 Вычисление моментов инерции при параллельном переносе и повороте координатных осей системы.....	23
2.4 Главные оси и главные моменты инерции.....	24
Вопросы для самопроверки.....	27
ГЛАВА 3 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	28
3.1 Внутренние усилия и напряжения при растяжении (сжатии).....	28
3.2 Перемещения и деформации при растяжении (сжатии).....	31
3.3 Понятие о допустимом напряжении.....	34
3.4 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии).....	35
Вопросы для самопроверки.....	36
ГЛАВА 4 РАСЧЕТ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ.....	37
4.1 Основные сведения о шарнирно-стержневых системах.....	37
4.2 Решение статически неопределимых систем.....	39
4.3 Температурные напряжения.....	41
4.4 Начальные (монтажные) напряжения.....	42
Вопросы для самопроверки.....	44
ГЛАВА 5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.....	45

5.1 Понятие напряженного состояния и его виды.....	45
5.2 Напряжения на наклонных площадках при линейном и плоском напряженных состояниях.....	47
5.3 Главные напряжения и главные площадки.....	51
5.4 Понятие о чистом сдвиге.....	55
Вопросы для самопроверки.....	59
ГЛАВА 6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	60
6.1 Главные деформации.....	60
6.2 Зависимость между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии.....	61
6.3 Объемная деформация при сложном напряженном состоянии.....	63
6.4 Потенциальная энергия деформации.....	64
Вопросы для самопроверки.....	68
ГЛАВА 7 КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ.....	69
7.1 Задачи теорий прочности. Эквивалентные напряжения.....	69
7.2 Классические критерии прочности (теории прочности).....	71
Вопросы для самопроверки.....	73
ГЛАВА 8 КРУЧЕНИЕ.....	74
8.1 Определение внутренних усилий при кручении.....	74
8.2 Определение напряжений и деформаций при кручении.....	75
8.3 Напряженное состояние и виды разрушения при кручении.....	78
8.4 Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	79
Вопросы для самопроверки.....	81
ГЛАВА 9 ИЗГИБ.....	82
9.1. Общие понятия и определения.....	82
9.2 Определение внутренних усилий при изгибе.....	84
9.3 Дифференциальные зависимости при изгибе.....	86
9.4 Нормальные напряжения при чистом изгибе прямого бруса.....	87
9.5 Касательные напряжения при поперечном изгибе прямого бруса.....	91
9.6 Полная проверка прочности. Опасные сечения и опасные точки.....	93
Вопросы для самопроверки.....	96

ГЛАВА 10 ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ.....	97
10.1 Основные понятия и определения.....	97
10.2 Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.....	99
10.3 Универсальное уравнение упругой линии. Метод начальных параметров.....	102
Вопросы для самопроверки.....	106
ГЛАВА 11 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ИЗГИБА.....	107
11.1 Оптимизация элементов конструкций. Общие понятия.....	107
11.2 Касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного профиля.....	109
11.3 Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней.....	111
Вопросы для самопроверки.....	113
ГЛАВА 12 КОСОЙ ИЗГИБ.....	114
12.1 Общее понятие о косом изгибе	114
12.2 Определение напряжений.....	114
12.3 Определение перемещений.....	117
Вопросы для самопроверки.....	119
ГЛАВА 13 ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ).....	121
13.1 Изгиб стержня при действии продольных и поперечных нагрузок	121
13.2 Внецентренное сжатие (растяжение) стержня	123
13.3 Ядро сечения.....	127
Вопросы для самопроверки.....	129
ГЛАВА 14 КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ.....	130
14.1 Общие понятия и определения	130
14.2 Определение внутренних усилий и напряжений при кручении с изгибом.....	130
14.3 Определение главных напряжений и расчет на прочность при кручении с изгибом.....	132
Вопросы для самопроверки.....	133
ГЛАВА 15 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	134
15.1 Общие понятия и определения.....	134
15.2 Основы метода сил.....	135
15.3 Канонические уравнения метода сил.....	136

Вопросы для самопроверки.....	139
ГЛАВА 16 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	140
16.1 Основные виды и понятия.....	140
16.2 Устойчивость сжатого стержня. Задача Эйлера.....	142
16.3 Зависимость критической силы от способа закрепления стержня.....	144
16.4 Критические напряжения. Расчет на устойчивость стержня при упруго-пластических деформациях	146
16.5 Расчеты на устойчивость с применением коэффициента понижения основного допускаемого напряжения.....	149
16.6 Замечания о выборе материала и рациональной формы сечения при продольном изгибе.....	150
16.7 Продольно-поперечный изгиб.....	151
Вопросы для самопроверки.....	155
ГЛАВА 17 УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ	156
17.1 Техническая теория удара.....	156
17.2 Общий прием вычисления напряжений при ударе	157
17.3 Частные случаи вычисления напряжений и проверка прочности при ударе.....	163
Вопросы для самопроверки.....	168
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	169

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КУРСА «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

1.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУРСА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Все твердые тела в той или иной мере характеризуются определенной прочностью и жесткостью (вследствие того, что свойствами прочности и жесткости обладают сами материалы, из которых тела состоят), а также устойчивостью. Без учета этих свойств современному инженеру невозможно выполнить правильный расчет инженерных конструкций и сооружений, машин и механизмов, гарантирующий их надежную и безопасную эксплуатацию. Основания для правильного выполнения такого расчета дает изучаемый курс – Соппротивление материалов.

Целью и задачами изучаемого курса является освоение инженерных методов расчета конструктивных элементов инженерных конструкций и сооружений, машин и механизмов на прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью понимают способность конструктивных элементов выдерживать определенную нагрузку без разрушения.

Под жесткостью понимают способность конструктивных элементов противостоят нагрузке в отношении изменения формы и размеров, которые не должны превышать определенных величин, допускаемых технологическими нормами и условиями.

Под устойчивостью понимают способность конструктивных элементов сохранять начальную форму упругого равновесия.

Для построения теории сопротивления материалов принимаются некоторые гипотезы, полученные в результате абстрагирования реальной действительности и поэтому с некоторым приближением отражающих ее:

а) касающиеся механических свойств материалов:

1) материал конструктивного элемента имеет сплошное (непрерывное) строение, т.е. во внимание не принимается внутренняя дискретная атомистическая структура материалов;

2) материал конструктивного элемента однороден, т.е. обладает во всех точках одинаковыми механическими свойствами;

3) материал конструктивного элемента изотропен, т.е. обладает во всех направлениях одинаковыми механическими свойствами;

4) материал конструктивного элемента абсолютно упругий, т.е. обладает способностью позволяющей конструктивному элементу полностью восстанавливать исходную форму и размеры после снятия нагрузки;

б) касающиеся характера взаимодействия конструктивного элемента и нагрузки:

5) принцип малости деформаций – возникающие в конструктивных элементах под действием нагрузок изменения формы и размеров очень малы по сравнению с размерами конструктивных элементов;

б) принцип независимости действия факторов или принцип суперпозиции – результат одновременного действия на конструктивный элемент системы факторов (силовых, температурных и др.) равен сумме результатов действия каждого фактора в отдельности;

7) принцип Сен-Венана – в точках конструктивного элемента, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок (внешних сил), внутренние силы весьма мало зависят от конкретного способа приложения нагрузок;

При этом не принимают во внимание внутренние силы, действующие в конструктивном элементе, находящемся в своем естественном (ненагруженном) состоянии, а определяют лишь дополнительные внутренние силы, которые появляются в результате нагружения конструктивного элемента.

1.2 РЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ И РАСЧЕТНАЯ СХЕМА. СХЕМАТИЗАЦИЯ ПОНЯТИЙ

При всем разнообразии конструктивных элементов, встречающихся в инженерных конструкциях и сооружениях, машинах и механизмах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных видов (рис. 1.1).

Стержень (брус) – конструктивный элемент, у которого один габаритный размер (длина) значительно превышает два других (поперечных) размера.

Оболочка – конструктивный элемент, ограниченный криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии

друг от друга.

Пластина – конструктивный элемент, ограниченный плоскими поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга.

Массивное тело – конструктивный элемент, у которого все три габаритных размера одного порядка.

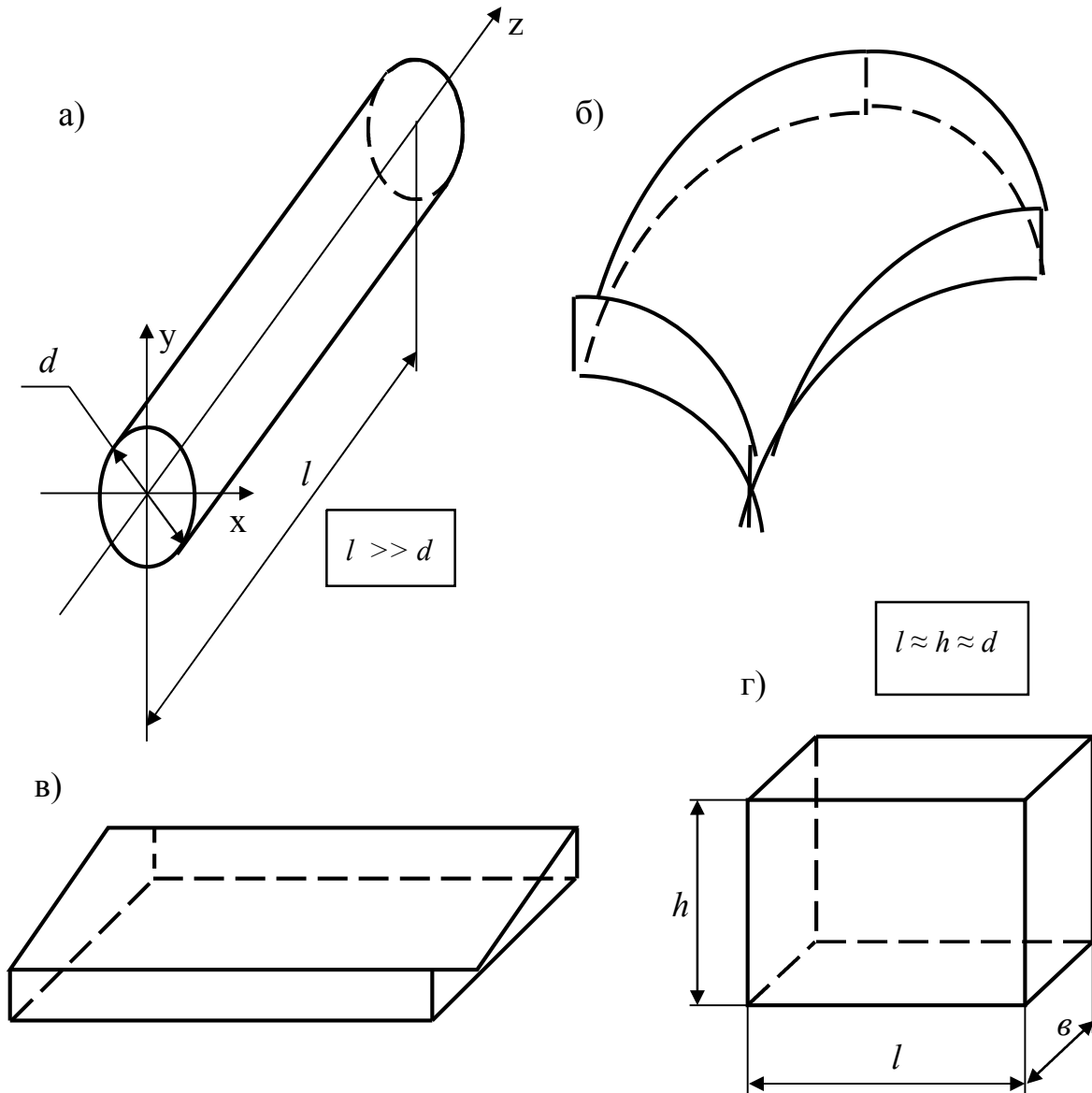


Рисунок 1.1 - Конструктивные элементы:
а) стержень (брус); б) оболочка;
в) пластина; г) массивное тело (массив)

В дальнейшем в рамках изучаемого курса будут рассматриваться только стержневые конструктивные элементы, т.к. изучение поведения оболочечных, пластинчатых и массивных конструктивных элементов не предусмотрено учебным планом.

В процессе эксплуатации конструкций и сооружений, машин и механизмов их конструктивные элементы подвергаются действию различных нагрузок (внешних сил).

Различают следующие нагрузки:

а) по способу передачи:

1) поверхностные – силы контактного взаимодействия различных тел (конструктивных элементов) друг с другом или с различными физическими объектами (грунт, снег, лед, вода, воздух и т.д.).

2) объемные – силы взаимодействия по всему объему тела (конструктивного элемента), не являющиеся результатом контакта тел (конструктивных элементов) (собственный вес, силы инерции, силы магнитного взаимодействия и т.д.).

3) распределенные – силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади конструкции (вес обледенения на ЛЭП, давление снега на перекрытие и т.д.).

4) сосредоточенные – силы, передающиеся на тело (конструктивный элемент) через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами тела (конструктивного элемента) (давление колесной пары подвижного состава на рельсы, взаимное давление зубьев зубчатых передач и т.д.).

б) по времени действия:

5) постоянные – силы, действующие непрерывно в течение всего срока службы сооружения (собственный вес конструкции).

6) временные – силы, действующие в ограниченном промежутке времени (вес снега, давление поезда на мост и т.д.).

в) по характеру действия:

7) статические – силы, прикладываемые к телу (конструктивному элементу) плавно и медленно возрастающие от нуля до своего конечного значения, остающиеся затем неизменными, т.е. не сопровождающиеся возникновением значительных ускорений и соответственно значительных сил инерции (давление плиты перекрытия на кладку, давление падающего снега).

8) динамические, которые делятся на:

8.1) ускоренно приложенные силы – прикладываемые к телу

(конструктивному элементу) с постоянным ускорением (ускоренный подъем или ускоренный спуск тела);

8.2) ударные силы – прикладываемые к телу (конструктивному элементу) практически сразу всей своей величиной и сопровождающиеся возникновением значительных ускорений и соответственно значительных сил инерции (при забивке свай, при процессековки и др.);

8.3) мгновенно приложенные силы (силы в сцепке вагонов при страгивании ж/д состава, воспламенение горючей смеси в цилиндре ДВС);

8.4) повторно-переменные силы (при работе валов).

Также силы делят на активные – силы, как правило, известные или заданные и реактивные – силы, возникающие в местах закрепления конструктивных элементов на опорах (реакции опорных связей) и подлежащие определению.

Реальные тела могут деформироваться, т.е. изменять свою форму и размеры под действием внешних сил или изменения температуры.

Изменение формы и размеров тела (конструктивного элемента) называется деформацией. Способность реальных тел деформироваться связана с внутренним строением материала тел. При этом различают деформации упругие (обратимые) и остаточные.

Упругой называется деформация, полностью исчезающая после снятия с тела (конструктивного элемента) нагрузки, тело возвращается к первоначальным размерам и форме.

Остаточные деформации, не исчезающие после разгрузки тела, подразделяют на пластические и деформации разрушения. Пластическими называют остаточные деформации, не сопровождаемые ни местными, ни общими разрушениями.

Все деформации стержня можно разделить на простые и сложные.

К простым деформациям относятся:

- 1) растяжение–сжатие – работа цепей, канатов и т.п.;
- 2) сдвиг (срез) – работа сварных, заклепочных и болтовых соединений;
- 3) кручение – работа валов;
- 4) изгиб – работа балок.

К сложным деформациям относятся любые комбинации про-

стных видов деформаций (совместное действие изгиба и кручения, совместное действие изгиба и растяжения–сжатия и т.д.).

1.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Тело (конструктивный элемент) при действии на него внешних сил (нагрузки) деформируется, в результате чего изменяется взаимное расположение частиц материала тела (конструктивного элемента) и между частицами возникают силы взаимодействия. Эти силы называются дополнительными внутренними силами.

Для решения задач сопротивления материалов необходимо уметь определять внутренние силы по заданным внешним силам. В основе решения этой задачи лежит метод сечений, согласно которому действие отбрасываемой отсеченной части нагруженного тела (конструктивного элемента) на его рассматриваемую отсеченную часть заменяется статическими эквивалентами внутренних сил – главным вектором R и главным моментом M (рис. 1.2).

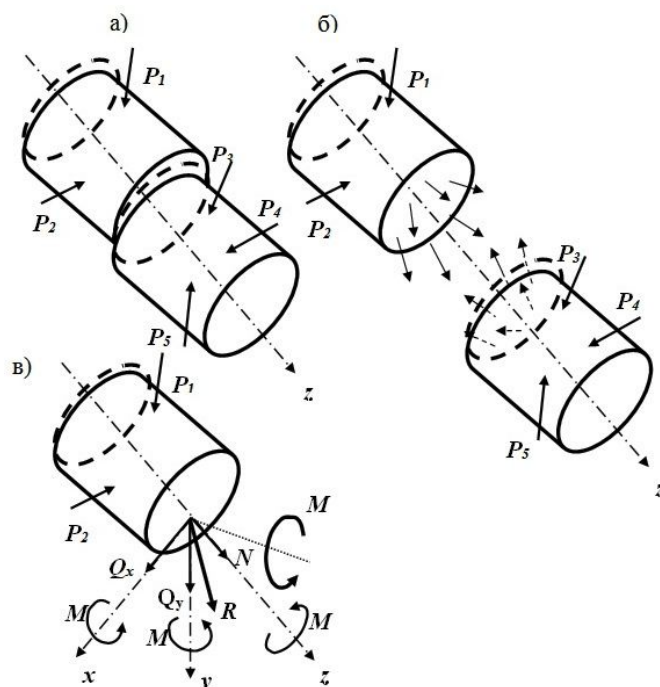


Рисунок 1.2 – Схема нагружения стержня (а) и внутренние усилия в сечении (б) и (в)

Разложением главного вектора и главного момента на составляющие по координатным осям, получают шесть составляющих N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_z , которые называются внутренними силами или внутренними силовыми факторами. Для их определения можно записать шесть уравнений равновесия рассматриваемой отсеченной части нагруженного тела (конструктивного элемента)

$$\begin{aligned} \Sigma x &= 0; & \Sigma y &= 0; & \Sigma z &= 0, \\ \Sigma M_x &= 0; & \Sigma M_y &= 0; & \Sigma M_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Знак внутренних силовых факторов, полученных при решении уравнений (1.1), указывает на правильность (знак плюс) или неправильность (знак минус) выбора их направлений. В связи с этим при определении усилий в сечениях стержня вводятся правила, которые обеспечивают однозначность усилий, какая бы часть стержня не рассматривалась – левая или правая по отношению к сечению.

Об этих правилах будет сказано ниже по мере изучения курса. Указанные шесть внутренних силовых факторов имеют следующие наименования: N – продольная (нормальная) сила; Q_x , Q_y – поперечные силы, M_x , M_y – изгибающие моменты, M_z – крутящий момент. Каждый из них определяет вид деформации. Если в поперечных сечениях стержня действует только продольная сила N , то брус работает на растяжение или сжатие; если же в сечениях действуют только поперечные силы Q_x , Q_y или одна из них, то стержень испытывает деформацию сдвига (среза).

Если в поперечных сечениях действуют изгибающие моменты M_x , M_y или один из них, то стержень испытывает деформацию изгиба. При наличии в сечениях стержня только крутящего момента M_z имеет место деформация кручения.

Таким образом, разложение главного вектора и главного момента внутренних сил на составляющие имеет четко выраженный физический смысл.

На практике имеют место случаи, когда в сечениях стержня одновременно действует несколько внутренних сил (например, нормальная сила и изгибающий момент), тогда говорят, что стержень подвержен сложному виду деформации.

1.4 ПОНЯТИЕ О НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Интенсивность внутренних сил в определенной точке сечения нагруженного тела (стержня) характеризуется напряжением.

Выделим в окрестностях интересующей нас точки сечения малую площадку ΔF , на которой возникает внутренняя сила ΔR (рис. 1.3). Отношение этой внутренней силы к площади данной площадки называется средним напряжением на площадке ΔF

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (1.2)$$

Тогда напряжение в точке, в окрестностях которой выделена площадка ΔF , будет определяться по формуле

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad (1.3)$$

Разложением ΔR на составляющие (продольную ΔN и поперечные ΔQ_x , ΔQ_y) получим нормальное напряжение и касательные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F}; \\ \tau_x &= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta F}; \\ \tau_y &= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta F}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

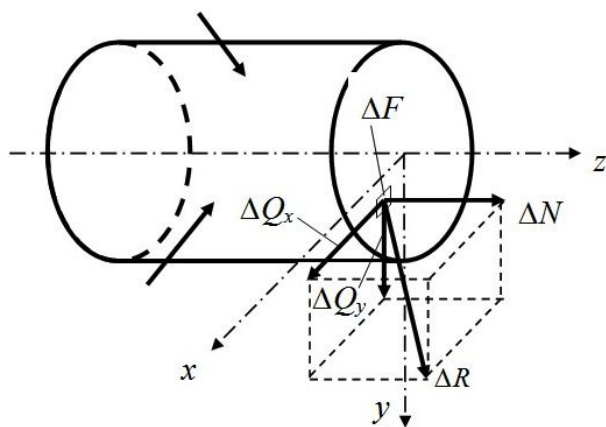


Рисунок 1.3 – Внутренние силы на малой площадке

Между напряжениями p , σ , τ_x , τ_y существует зависимость

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (1.5)$$

Таким образом, напряжения являются мерой интенсивности внутренних сил и измеряются в единицах давления (кг/см², Н/мм², Па).

Итак, через каждую точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, каждой из которых будут соответствовать определенные значения напряжений.

Совокупность напряжений характеризует напряженное состояние в данной точке тела.

1.5 СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ВНУТРЕННИМИ СИЛОВЫМИ ФАКТОРАМИ

Умножением напряжений σ , τ_x , τ_y на площадь дифференциально малой площадки dF , на которой они действуют, получают элементарные внутренние силы (рис. 1.4).

$$dN = \sigma dF, \quad dQ_x = \tau_x dF, \quad dQ_y = \tau_y dF.$$

Суммируя эти элементарные силы по всей площади сечения, получают составляющие главного вектора внутренних сил

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF, \\ Q_x &= \int_F \tau_x dF, \\ Q_y &= \int_F \tau_y dF. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Умножением каждой элементарной внутренней силы на расстояние до соответствующей оси получают элементарные моменты внутренних сил

$$dM_x = \sigma y dF, \quad dM_y = \sigma x dF, \quad dM_z = (\tau_x y - \tau_y x) dF.$$

Суммированием выражений элементарных моментов по площади всего сечения получают

$$M_x = \int_F \sigma y dF, \quad M_y = \int_F \sigma x dF, \quad M_z = \int_F (\tau_x y - \tau_y x) dF. \quad (1.9)$$

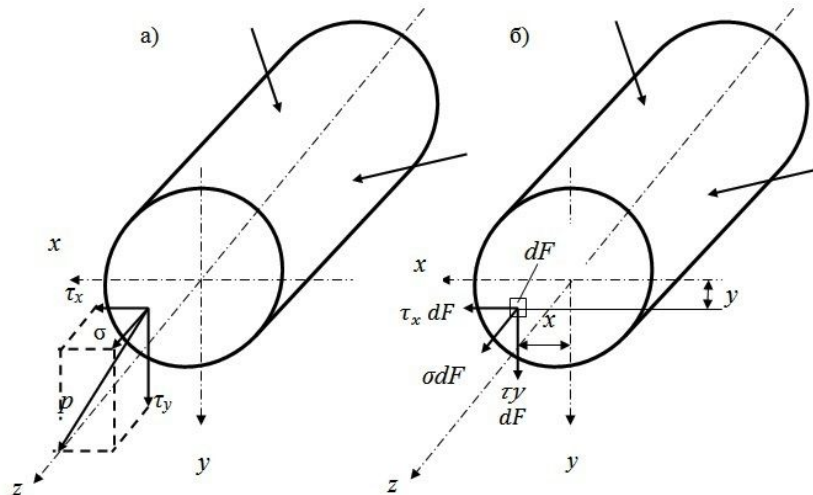


Рисунок 1.4 – Напряжения в поперечном сечении стержня (а) и элементарные внутренние силы (б)

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задачи предмета сопротивление материалов.
2. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов.
3. Нагрузки и их классификация.
4. Внутренние силы.
5. Метод сечений.
6. Напряжения в точке сечения.
7. Нормальные напряжения.
8. Касательные напряжения.
9. Связь между напряжениями и внутренними усилиями.

ГЛАВА 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

2.1 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

При решении задач сопротивления материалов, связанных с изучением поведения стержней, обычно задают систему отсчета в виде трех осей – продольной (здесь и далее z) и двух поперечных (x и y). Эти оси для прямого стержня показаны (рис. 2.1).

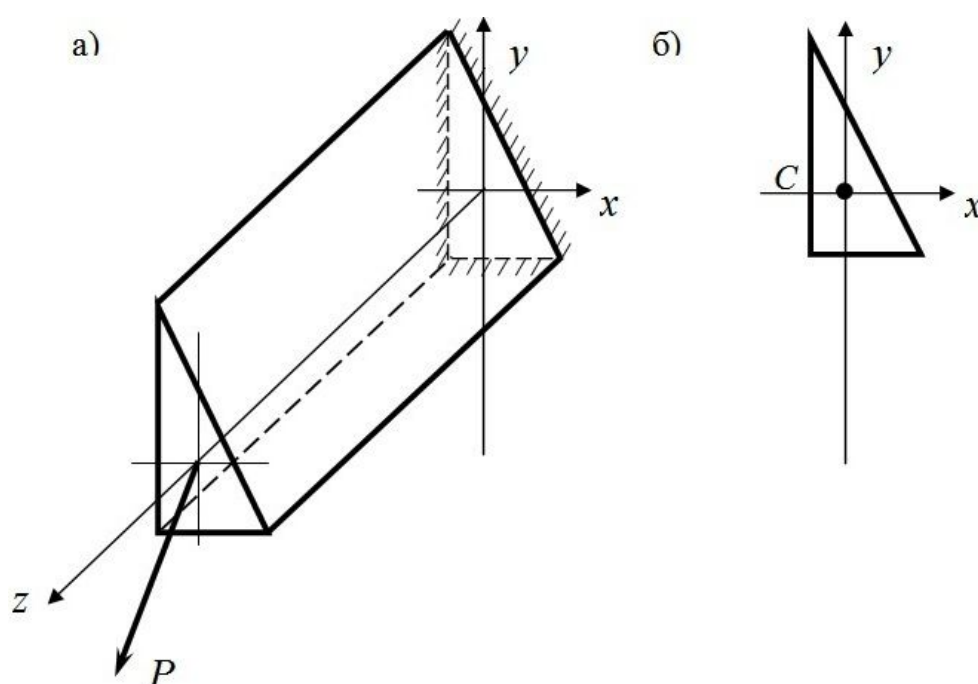


Рисунок 2.1 – Расположение координатных осей в прямом стержне (а) и в поперечном сечении (б)

Практика расчетов и эксплуатации стержневых конструкций показывает, что поведение их сильно зависит от ориентации нагрузки относительно выбранных осей. Одновременно при решении задач сопротивления материалов в расчетных моделях конструкций используются различные величины, зависящие от формы и размеров поперечных сечений стержней. Эти величины обобщенно называются геометрическими характеристиками.

Простейшими и очевидными геометрическими характеристиками являются площадь поперечного сечения стержня и его центр

тяжести (точка C на рис. 2.1). Однако наряду с ними существует еще целый ряд геометрических характеристик поперечного сечения, которые до этого не использовались и имеют не столь очевидный смысл. Далее рассмотрим некоторые геометрические характеристики поперечных сечений.

Статические моменты и центр тяжести сечения

Статические моменты тел и связанные с ними свойства впервые рассматриваются в курсе теоретической механики. В случае плоского сечения (рис. 2.2а) произведение произвольного дифференциально малого элемента dF на его координату y относительно некоторой оси x называется статическим моментом этого элемента $dS_y = ydF$ относительно оси x . Статическими моментами сечения называются суммы произведений элементарных площадей dF на их координаты относительно рассматриваемых осей.

Статические моменты площади F относительно осей x и y можно найти по формулам (рис. 2.2а).

$$S_x = \int_F ydF ; \quad S_y = \int_F xdF. \quad (2.1)$$

Среди бесконечного множества осей параллельных осям x и y существуют оси, относительно которых статические моменты (2.1) равны нулю. Такие оси называются центрными, а точка их пересечения – центром тяжести сечения.

В теоретической механике доказано, что если известны площадь F сечения и координаты его центра тяжести x_c и y_c , то статические моменты сечения могут быть определены следующим образом

$$S_x = Fy_c ; \quad S_y = Fx_c. \quad (2.2)$$

Статические моменты сечений могут быть как положительными, так и отрицательными и измеряются в единицах длины в третьей степени (см^3 , м^3 и т.п.).

Согласно (2.2) статические моменты сечений относительно центральных осей равны нулю.

Из выражений (2.2) следуют формулы для определения положения центра тяжести сечения

$$x_c = S_y/F ; y_c = S_x/F. \quad (2.3)$$

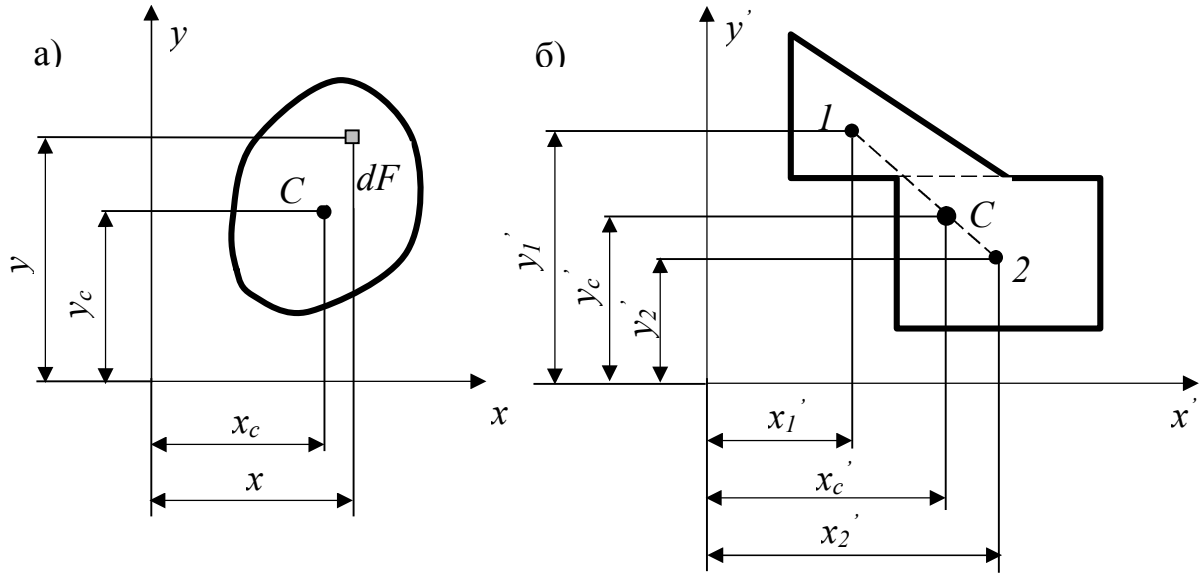


Рисунок 2.2 - К понятию статического момента (а) и определению центра тяжести сложного сечения (б)

Определение статических моментов, площади сложных (составных) сечений и всех других их геометрических характеристик подчиняется принципу суммирования (аддитивности). Это означает, что любая геометрическая характеристика сложного (составного) сечения может быть найдена как сумма геометрических характеристик простых сечений входящих в сложное сечение.

Например, для сложного сечения (см. рис. 2.2б) статические моменты могут быть записаны в виде

$$S'_x = F_1 y'_1 + F_2 y'_2; \quad S'_y = F_1 x'_1 + F_2 x'_2.$$

А выражения (2.3) в общем виде приобретут следующую форму:

$$x_c = \frac{\sum S'_{y_i}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i x'_i}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum S'_{x_i}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y'_i}{\sum F_i}. \quad (2.4)$$

На основании всего сказанного определение центра тяжести сложного сечения можно выполнить в следующем порядке:

1) задается некоторая произвольная вспомогательная система координатных осей x' и y' ;

2) сложное сечение разбивается на простые сечения, для которых возможно простое определение площадей и положений их центров тяжести;

3) по справочным данным из справочной литературы определяются площади простых сечений F_i и координаты их центров тяжести x'_i и y'_i во вспомогательной системе координатных осей;

4) для построения во вспомогательной системе координатных осей центра тяжести C сложного сечения по формулам (2.4) вычисляются его координаты x_c и y_c .

Моменты инерции

Осевыми моментами инерции сечения относительно рассматриваемых осей x и y называются суммы произведений элементарных площадей сечения dF на квадраты их координат относительно каждой из рассматриваемых осей x и y (рис. 2.3а):

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (2.5)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно двух рассматриваемых осей x и y называется сумма произведений элементарных площадей сечения dF на их координаты относительно рассматриваемой пары осей:

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.6)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно точки (полюса) пересечения рассматриваемых осей x и y называется сумма произведений элементарных площадей сечения dF на квадрат их расстояний до этой точки (полярных радиусов ρ):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = I_x + I_y. \quad (2.7)$$

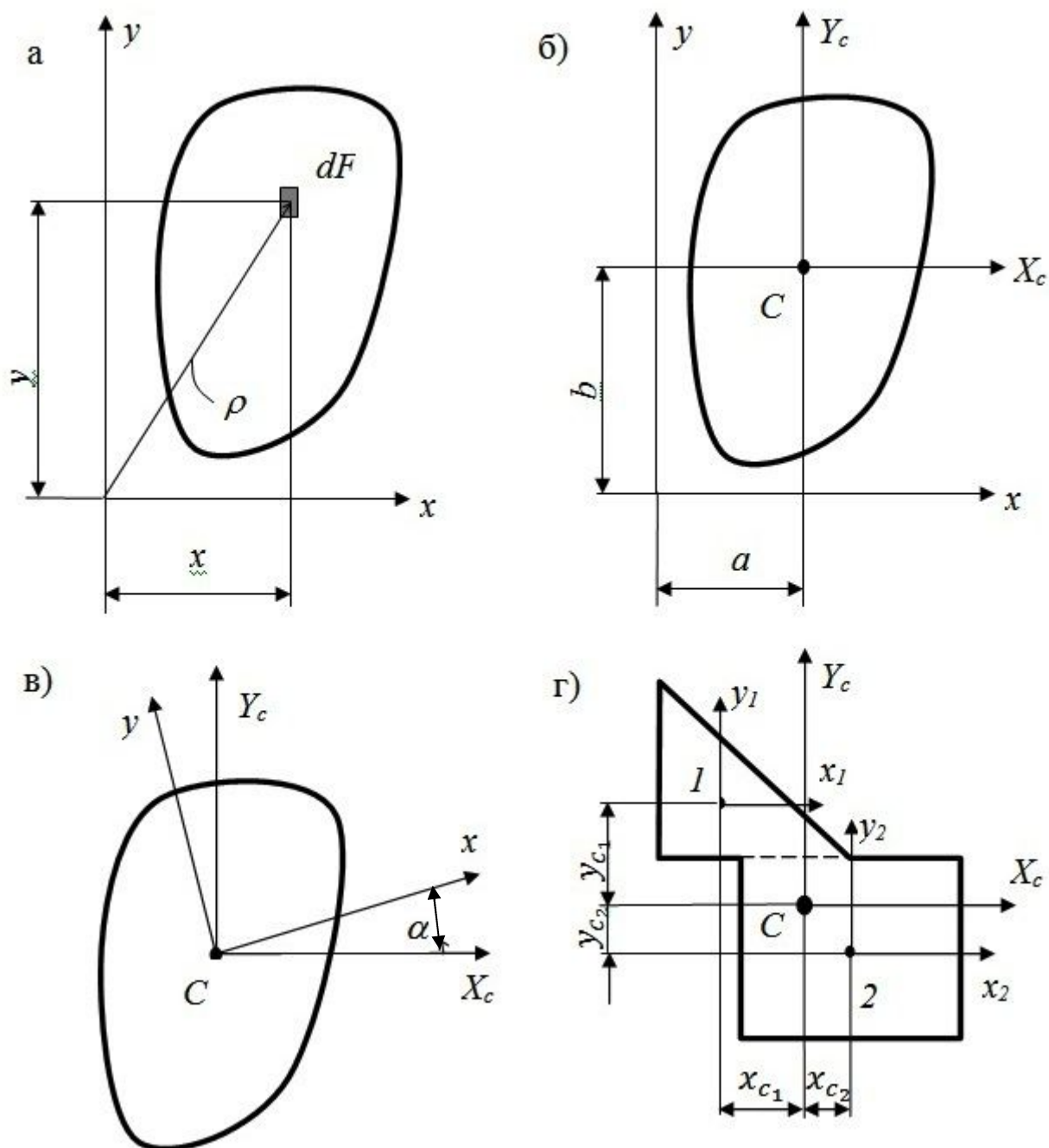


Рисунок 2.3 – К определению моментов инерции сечения (а), изменению моментов инерции при параллельном (б) и вращательном (в) переносе осей, определению моментов инерции сложных сечений (г)

Моменты инерции измеряются в единицах длины в четвертой степени (см^4 , м^4 и т.п.). Осевые и полярные моменты инерции могут быть только положительными. Знак центробежного момента инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от положения сечения относительно выбранной системы

координат (рис. 2.4): если большая часть площади сечения находится в I и III четвертях, то $I_{xy} > 0$, если же большая часть площади сечения находится в II и IV четвертях то $I_{xy} < 0$.

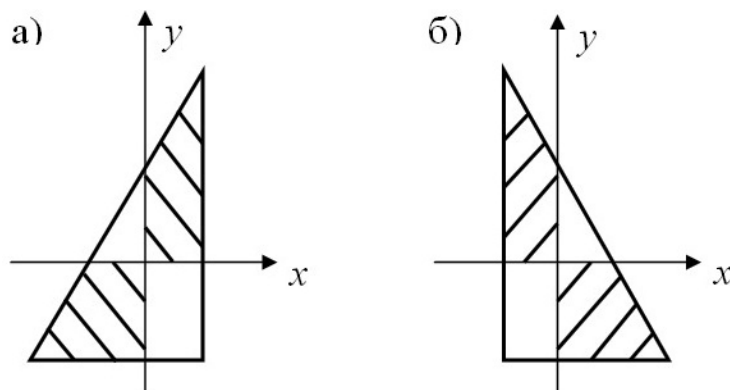


Рисунок 2.4 – К правилу знаков для центробежных моментов инерции: а) $I_{xy} > 0$; б) $I_{xy} < 0$

2.2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТЫХ ФИГУР

Вычислим моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей x , y параллельным его сторонам (рис. 2.5а).

Для определения момента инерции относительно оси x выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси x . Ширина элемента b , высота – dy . Тогда

$$dF = bdy,$$

$$I_x = \int_F y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}, \quad (2.8)$$

Очевидно, что

$$I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (2.9)$$

так как интеграл I_x не меняется, если переместить все полоски $dF = bdy$ параллельно оси x . Следовательно, момент инерции параллелограмма (рис. 2.5б) относительно центральной оси x , параллельной основанию,

$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.10)$$

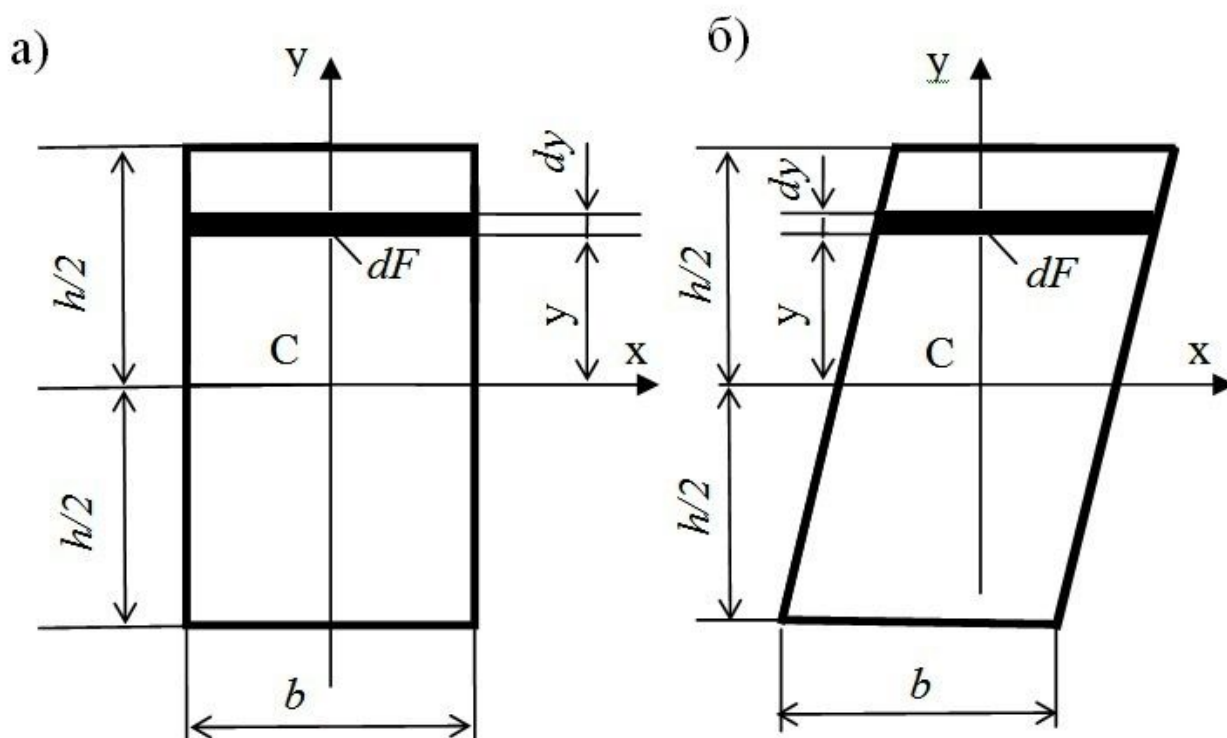


Рисунок 2.5 – Моменты инерции прямоугольника (а), параллелограмма (б)

2.3 ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ И ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ СИСТЕМЫ

В теории геометрических характеристик, которая является частным случаем разработанной Х. Гюйгенсом теории моментов инерции твердых тел, доказываются две теоремы об изменении моментов инерции при переносе системы осей.

Первая теорема утверждает то, что при параллельном переносе центральных осей X_C и Y_C в положения x и y соответственно (см. рис. 2.3б) значения моментов инерции относительно новых осей могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} I_x &= I_{X_C} + Fb^2; \\ I_y &= I_{Y_C} + Fa^2; \\ I_{xy} &= I_{X_C Y_C} + Fab, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где I_{Y_c} , $I_{X_c Y_c}$ – моменты инерции относительно центральных («старых») осей; I_x , I_y , I_{xy} – моменты инерции относительно перенесенных («новых») осей; a и b – величины переносов центральных осей, которые трактуются как координаты центра тяжести сечения в новых осях x и y , т.е. учитываются со своими знаками.

Формулы (2.11) также дают возможность определять моменты инерции сложных сечений, используя принцип суммирования (аддитивности). Для этого сложное сечение разбивается на простые сечения и моменты инерции простых сечений учитываются по формулам (2.11). Таким образом, для сложного сечения (см. рис. 2.3г) справедливы формулы

$$\begin{aligned} I_{X_c} &= \sum (I_{x_i} + F_i y_{c_i}^2); \\ I_{Y_c} &= \sum (I_{y_i} + F_i x_{c_i}^2); \\ I_{X_c Y_c} &= \sum (I_{x_i y_i} + F_i x_{c_i} y_{c_i}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где x_i , y_i – центральные оси простых сечений, параллельные центральным осям X_c и Y_c сложного сечения; x_{c_i} , y_{c_i} – координаты центров тяжести простых сечений в осях X_c , Y_c .

Здесь и далее под простыми сечениями понимаются такие фигуры, для которых все необходимые в расчете геометрические характеристики могут быть найдены по справочным данным.

Вторая теорема описывает изменение моментов инерции при повороте системы осей на угол α . Все сказанное ниже может быть отнесено к любой системе осей. Однако для целей данной работы будут обсуждаться только системы центральных осей для всего сечения. Например, для моментов инерции относительно повернутых на угол α осей x и y (см. рис. 2.3в) справедливы зависимости

$$\begin{aligned} I_x &= I_{X_c} \cos^2 \alpha + I_{Y_c} \sin^2 \alpha - I_{X_c Y_c} \sin 2\alpha; \\ I_y &= I_{X_c} \sin^2 \alpha + I_{Y_c} \cos^2 \alpha + I_{X_c Y_c} \sin 2\alpha; \\ I_{xy} &= 0,5(I_{X_c} - I_{Y_c}) \sin 2\alpha + I_{X_c Y_c} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Зависимости (2.13) порождают ряд замечательных свойств у неограниченного множества систем осей x и y , проходящих через одну точку сечения:

1) функции $I_x(\alpha), I_y(\alpha), I_{xy}(\alpha)$ являются гладкими и периодическими;

2) среди неограниченного множества центральных осей x, y всегда существует хотя бы одна система осей, для которой выполняются условия:

$$I_x = I_{max}, I_y = I_{min}, I_{xy} = 0;$$

3) система осей, соответствующих п. 2, является системой главных центральных осей (главных осей). Положение таких осей характеризуется определенными углами наклона (углами поворота);

4) осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными центральными моментами инерции (главными моментами инерции) и являются экстремальными.

В случае сложного сечения углы поворота главных осей α_{01} и $\alpha_{02} = \alpha_{01} + 90^\circ$ относительно системы центральных осей X_c и Y_c можно определить из решения тригонометрического уравнения

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{X_c Y_c}}{I_{X_c} - I_{Y_c}}, \quad (2.14)$$

где $I_{X_c}, I_{Y_c}, I_{X_c Y_c}$ – моменты инерции относительно центральных осей сложного сечения.

При этом положительные углы откладывают против хода часовой стрелки, а отрицательные – по ходу часовой стрелки.

Значения экстремальных моментов инерции I_{max}, I_{min} могут быть определены подстановкой углов α_{01} и $\alpha_{02} = \alpha_{01} + 90^\circ$ в первые две формулы (2.13).

Второй способ определения величин главных моментов инерции состоит в использовании формулы

$$I_{max/min} = \frac{I_{X_c} + I_{Y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{X_c} - I_{Y_c})^2 + 4I_{X_c Y_c}^2}. \quad (2.15)$$

При использовании выражения (2.15) возникает проблема определения типа экстремума задаваемого углом α_{01} (максимума или минимума). Для этого можно использовать стандартное правило

математического анализа:

$$\frac{d^2 I_{X_c}(\alpha)}{d\alpha^2} < 0, \quad (2.16)$$

если при $\alpha = \alpha_{01}$, то угол α_{01} определяет положение главной оси, относительно которой возникает главный момент инерции I_{max} , а угол $\alpha_{02} = \alpha_{01} + 90^\circ$ тогда будет определять положение главной оси, относительно которой возникает главный момент инерции I_{min} .

В случаях когда $I_{X_c} \neq I_{Y_c}$, может быть полезным следующее свойство: если $I_{X_c} > I_{Y_c}$, то ось I_{max} повернута относительно оси X_c на меньший (по модулю) угол, чем ось I_{min} . Иногда, когда габаритные размеры сечения в направлении главных осей визуально существенно отличаются, может быть полезно свойство вытянутости сечения вдоль оси I_{min} и сжатости вдоль оси I_{max} .

В некоторых практически важных и часто встречающихся случаях задача определения главных осей и главных моментов инерции существенно упрощается. К ним относятся сечения, у которых есть оси или центр симметрии. У таких сечений центр тяжести расположен на осях симметрии (прямоугольник, ромб, двутавр) или на оси симметрии (швеллер). Центробежный момент инерции сечения, найденный с использованием оси симметрии, всегда равен нулю. Это значит, что любая ось симметрии не только центральная, но и главная. Вычисления по формулам (2.14) и (2.15) в этих случаях теряют смысл в виду очевидности результатов.

Нахождение положения главных осей и величин главных моментов инерции можно выполнить в следующем порядке:

1) после определения центра тяжести всего сечения надо задать его центральные оси X_c и Y_c ;

2) с помощью справочных данных из справочной литературы определить моменты инерции простых элементов сечения I_{x_i} , I_{y_i} , $I_{x_i y_i}$ относительно их собственных центральных осей x_i и y_i ;

3) по справочным данным и результатам нахождения центра тяжести C сложного сечения определить координаты центров тяжести простых сечений x_{c_i} и y_{c_i} относительно центральных осей сложного сечения X_c и Y_c ;

4) определить моменты инерции всего сечения I_{X_c} , I_{Y_c} , $I_{X_c Y_c}$ по формулам (2.12);

5) решить уравнение (2.14) и найти угол поворота α_{01} главной оси I_{max} (или I_{min}) относительно оси X_c ;

6) установить положение какой главной оси (I_{max} или I_{min}) определяет угол α_{01} ;

7) с помощью формул (2.13) или (2.15) определить величины главных моментов инерции I_{max} и I_{min} .

В процессе дальнейшего изучения дисциплины в расчетную практику будут вводиться новые геометрические характеристики поперечных сечений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Геометрические характеристики сечения: виды, необходимость введения понятий, определения, использование, свойства.

2. Статический момент плоского сечения, свойство, определение центра тяжести сложного сечения; моменты инерции простых фигур и сложных сечений.

3. Изменение моментов инерции плоских сечений при параллельном переносе осей и повороте осей.

4. Главные оси и главные моменты инерции плоских сечений.

5. Осевой момент инерции прямоугольного сечения и полярный момент инерции круглого сечения.

6. Статические моменты площади сечения. Определение центра тяжести плоского сечения.

7. Моменты инерции плоского сечения.

8. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, из которых одни – центральные.

9. Зависимости между моментами инерции при повороте осей координат.

ГЛАВА 3 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

3.1 ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

При центральном растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержней имеет место лишь один внутренний силовой фактор – продольная сила N , уравнивающая действие нагрузок, приложенных к рассматриваемой отсеченной части стержня. Сила N приложена в центре тяжести поперечного сечения и перпендикулярна его плоскости. Поэтому силу N также называют нормальной силой (рис. 3.1).

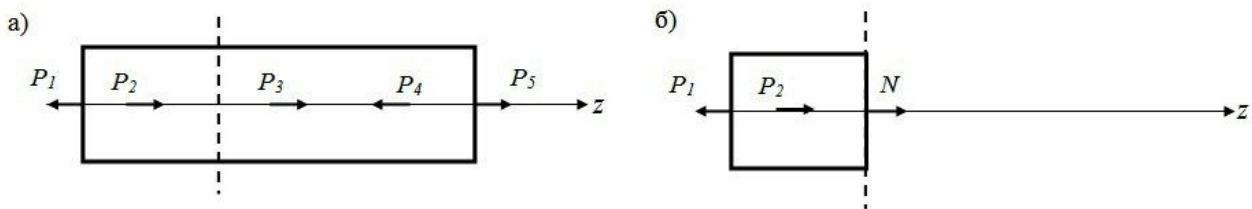


Рисунок 3.1 – Центральнo растянутый стержень (а) и уравновешенная отсеченная часть стержня (б)

Величина внутренней продольной силы N в данном сечении, согласно определению внутренней продольной силы (3.1), равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (нагрузок), расположенных по одну (любую) сторону от сечения, на нормаль к сечению (если стержень прямой, то на его продольную ось z).

В рассматриваемом случае внутренняя продольная сила равна алгебраической сумме нагрузок P_1 и P_2 , приложенных к левой отсеченной части стержня, или может быть найдена как алгебраическая сумма нагрузок P_3 , P_4 и P_5 , приложенных к правой отсеченной части стержня

$$N = \sum P_{iz}. \quad (3.1)$$

При растяжении внутренняя продольная сила положительна и направлена от поперечного сечения, а при сжатии – отрицательна и направлена к поперечному сечению.

Исходя из гипотезы плоских сечений (поперечные сечения

стержней, плоские и нормальные к продольной оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации), подтверждающейся результатами экспериментов, можно показать, что величина нормальных напряжений, равномерно распределенных по поперечному сечению, определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (3.2)$$

Знак нормальных напряжений определяется знаком внутренней продольной силы N , т.е. при растяжении являются положительными, а при сжатии – отрицательными (рис. 3.2).

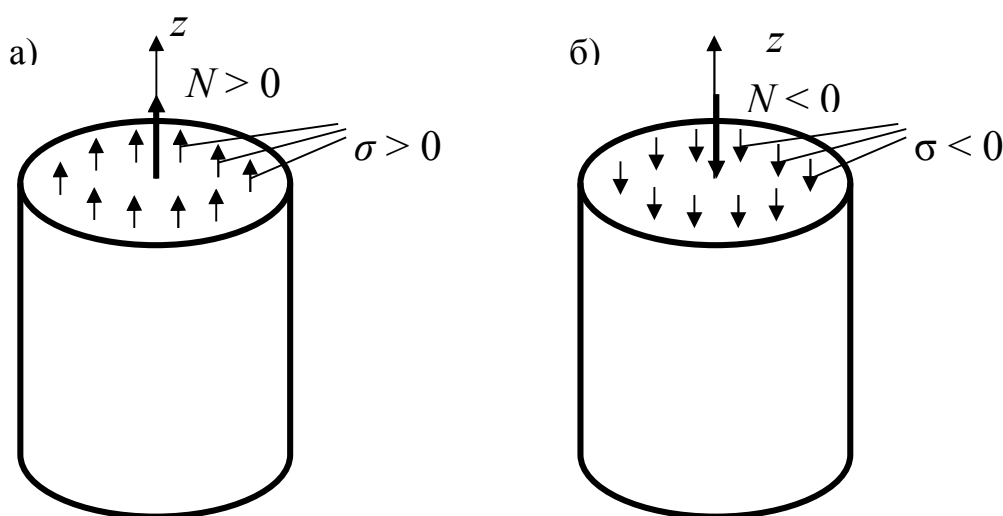


Рисунок 3.2 - Нормальные напряжения при растяжении (а) и сжатии (б)

Для определения напряжений в наклонных сечениях рассмотрим стержень (рис. 3.3).

Исходя из принципа Сен-Венана, полные напряжения p , равномерно распределенные по наклонному сечению с углом наклона α и площадью F_α , определяются по формуле

$$p = \frac{P}{F_\alpha}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $F_\alpha = F / \cos \alpha$, получим

$$\begin{aligned} \sigma &= P/F, \\ p &= \frac{P}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где σ – нормальные напряжения в поперечном сечении.

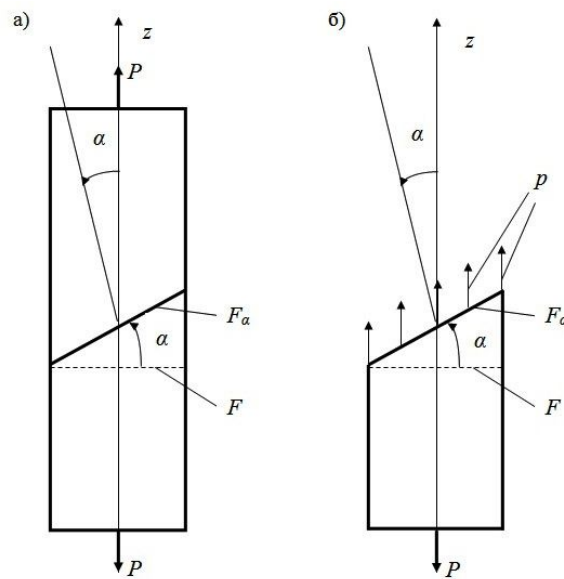


Рисунок 3.3 – Центрально растянутый стержень с наклонным сечением (а) и его отсеченная часть с полными напряжениями p (б)

Разложением полных напряжений p на составляющие по нормали к наклонному сечению и по плоскости наклонного сечения получают нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения (рис. 3.4.) в соответствии с формулами

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (3.5)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.6)$$

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{\max} = \sigma$ возникают в поперечных сечениях стержней (у которых угол $\alpha = 0$), а максимальные касательные напряжения, равные половине наибольших нормальных напряжений $\tau_{\max} = \sigma/2$, действуют по наклонным сечениям с углом наклона α .

Нормальные напряжения считаются положительными, если они направлены от сечения, и отрицательными, когда направлены к сечению. Касательные напряжения считаются положительными, когда они стремятся повернуть рассматриваемую часть стержня по ходу часовой стрелки, и отрицательными, когда стремятся повернуть рассматриваемую часть стержня против хода часовой стрелки. На рисунке 3.4 Показаны положительные направления нормальных

напряжений σ_α и касательных напряжений τ_α .

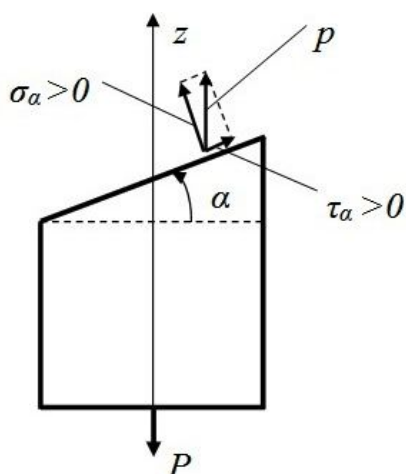


Рисунок 3.4 – Полные p , нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения в наклонном сечении

3.2 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

При центральном растяжении стержня его продольный размер (длина) увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются (рис. 3.5), а при центральном сжатии стержня продольный размер (длина) уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

Абсолютное изменение размеров стержня характеризуется абсолютной линейной деформацией. При этом различают абсолютную продольную деформацию

$$\Delta l = l_1 - l, \quad (3.7)$$

и абсолютную поперечную деформацию

$$\Delta b = b_1 - b, \quad (3.8)$$

где l и b – начальные продольный и поперечный размеры стержня; l_1 и b_1 – окончательные продольный и поперечный размеры стержня.

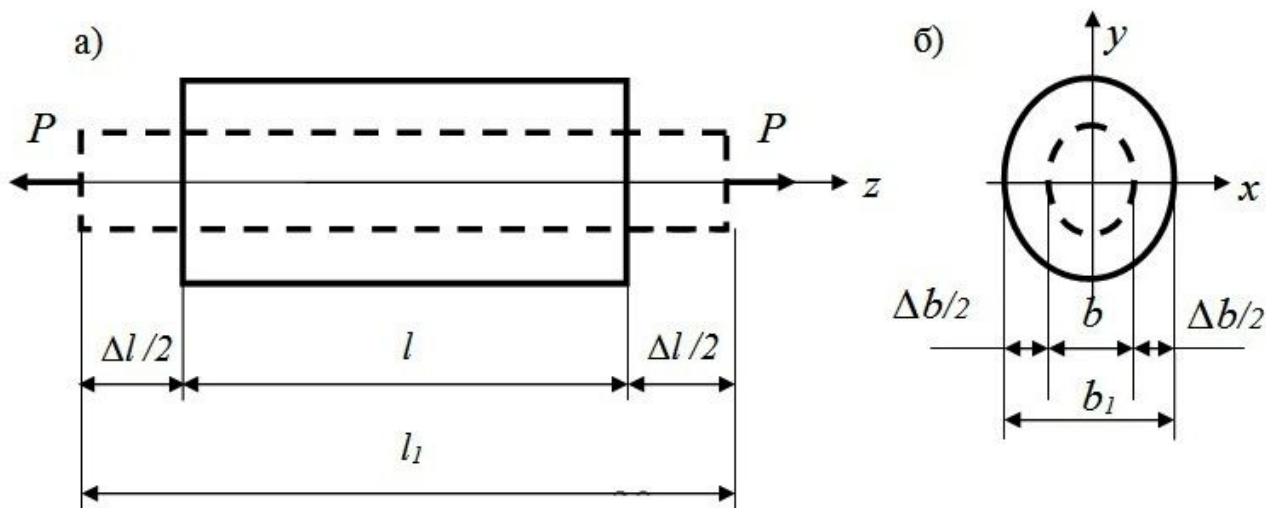


Рисунок 3.5 – Изменение продольного (а) и поперечного (б) размеров растянутого стержня

Кроме абсолютных линейных деформаций существуют относительные линейные деформации. При этом различают относительную продольную деформацию

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.9)$$

и относительную поперечную деформацию

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (3.10)$$

Между нормальными напряжениями и относительной продольной деформацией до определенного предела нагружения существует следующая зависимость (закон Гука):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.11)$$

где E – модуль продольной упругости (модуль упругости первого рода, модуль Юнга).

Это физическая постоянная материала, характеризующая его жесткость, т.е. сопротивляемость материала упругой деформации при растяжении–сжатии. Так как относительная продольная деформация является величиной безразмерной, то модуль продольной упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение.

Учитывая (3.2) и (3.9) получается другая формула для определения абсолютной продольной деформации стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (3.12)$$

где EF – жесткость сечения стержня при растяжении–сжатии.

В случае растяжения–сжатия стержня, имеющего несколько участков, используется формула

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i F_i}, \quad (3.13)$$

где N_i – внутренняя продольная сила на i -ом участке стержня; l_i – длина i -го участка стержня; $E_i F_i$ – жесткость сечения при растяжении–сжатии на i -м участке стержня.

Максимальные значения, полученные по формуле (3.12), как и по формуле (3.9), используются в условиях жесткости при растяжении–сжатии

$$\begin{aligned} \Delta l_{\max} &\leq [\Delta l], \\ \varepsilon_{\max} &\leq [\varepsilon]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Величины $[\Delta l]$ и $[\varepsilon]$ назначаются с учетом требований к жесткости стержня.

В тех же пределах нагружения, в которых соблюдается закон Гука, существует еще одна зависимость (закон Пуассона):

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (3.15)$$

где μ – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации).

Знак «–» соответствует противоположному изменению продольного и поперечного размеров стержня как при растяжении, так и при сжатии.

Величина безразмерного коэффициента Пуассона определяется по формуле

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\Delta b l}{b \Delta l} \right|. \quad (3.16)$$

Для всех изотропных материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах

$$0 \leq \mu \leq 0,5.$$

Вместе E и μ называются упругими постоянными материала.

3.3 ПОНЯТИЕ О ДОПУСКАЕМОМ НАПРЯЖЕНИИ

Фактические нагрузки, действующие на конструктивные элементы, и свойства конструкционных материалов, из которых они изготовлены, могут значительно отличаться от тех, которые принимаются при выполнении расчетов. При этом факторы, снижающие прочность конструктивных элементов (перегрузки, несоответствие свойств конструкционных материалов допущениям о сплошности, однородности, изотропности и т.д.) имеют чаще всего случайный характер и потому не могут быть точно учтены. Но так как конструктивные элементы должны безопасно эксплуатироваться и при этих неблагоприятных условиях, то требуется предпринять определенные меры предосторожности. С этой целью необходимо, чтобы фактические напряжения, обеспечивающие безотказную эксплуатацию конструктивных элементов, не превышали тех предельных напряжений, которые могут привести к разрушению конструктивных элементов или возникновению в них заметных остаточных (пластических) деформаций.

При статических нагрузках для пластичных материалов предельным является предел текучести σ_T , а для хрупких материалов – предел прочности σ_B .

В расчетах на прочность в качестве ограничения фактических напряжений используют допускаемое напряжение, определяемое по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}, \quad (3.26)$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение материала; n – основной коэффициент запаса прочности (коэффициент безопасности).

Вопрос о назначении коэффициента запаса прочности решается с учетом влияния общих факторов – неоднородности конструкционного материала, неточности определения нагрузок, приближенности используемых расчетов.

Для пластичных материалов коэффициент запаса прочности принимается (1,4÷1,6), а для хрупких материалов – (2,5÷3,0). Влияние иных факторов учитывается дополнительными коэффициентами, на которые умножается основной коэффициент запаса прочности.

3.4 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

При центральном растяжении–сжатии в опасных поперечных сечениях стержней (в которых возникают наибольшие внутренние продольные силы) должно соблюдаться условие прочности стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma]. \quad (3.27)$$

Здесь имеется в виду соответствующее допускаемое напряжение на растяжение ($[\sigma]_p$ или $[\sigma]_+$) или на сжатие ($[\sigma]_c$ или $[\sigma]_-$) в зависимости от того какой деформации подвергается стержень.

В условиях центрального растяжения–сжатия при расчете конструктивных элементов с использованием условия прочности решаются следующие типовые задачи:

1) Проверка прочности стержня – определение по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня максимального фактического напряжения и сравнению их с соответствующим допускаемым напряжением, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma].$$

При этом фактическое напряжение не должно по возможности отклоняться от допускаемого напряжения более, чем на 5%. Перенапряжение свыше (+5%) недопустимо с точки зрения обеспечения прочности стержня, а недонапряжение свыше (–5%) свидетельствует о перерасходе материала.

2) Подбор поперечного сечения стержня – определение по заданным нагрузке и соответствующему допускаемому напряжению таких размеров поперечного сечения стержня, которые обеспечивают соблюдение условия прочности стержня, т.е.

$$F \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

3) Определение несущей способности стержня (допускаемой нагрузки) – заключается в определении по заданным размерам поперечного сечения стержня и соответствующему допускаемому

напряжению допускаемой внутренней продольной силы

$$[N] = F[\sigma].$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня (эпюра N).
2. Закон Гука. Коэффициент Пуассона.
3. Формула нормальных напряжений при растяжении–сжатии.
4. Условие прочности при растяжении и сжатии. Три типа задач сопротивления материалов, решаемых с помощью этого условия.

ГЛАВА 4 РАСЧЕТ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

4.1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Во многих конструкциях (системах) внутренние продольные силы (при растяжении–сжатии), как и любые другие внутренние силовые факторы (при других видах деформаций), возникающие в поперечных сечениях конструктивных элементов (стержней), определяются при помощи метода сечений из уравнений статики (равновесия) отсеченной части. Такие системы называются статически определенными.

Рассмотрим в качестве примера следующую статически определенную шарнирно-стержневую систему (рис. 4.1).

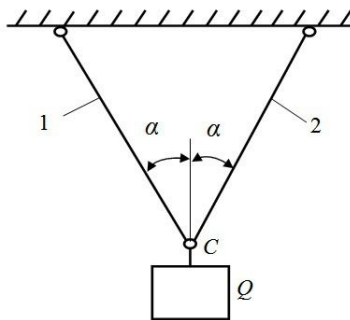


Рисунок 4.1 – Статически определимая шарнирно-стержневая система

В случае подвески груза весом Q на двух симметричных стержнях 1 и 2 внутренние продольные силы в них N_1 и N_2 определяются из уравнений статики (4.1) отсеченной части системы (рис. 4.2).

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0; & \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; & \quad N_1 = N_2; \\ \Sigma y = 0; & \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - Q = 0; & \quad N_1 = N_2 = Q / 2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Системы, в конструктивных элементах которых внутренние продольные силы в частности (как и любые другие внутренние силовые факторы) не могут быть определены только из уравнений равновесия отсеченной части системы, называются статически неопределимыми.

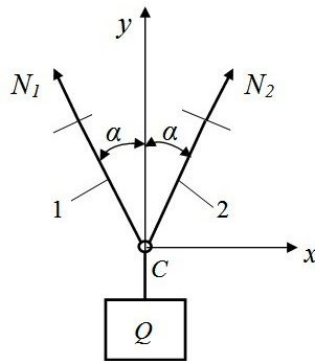


Рисунок 4.2 – Отсеченная часть статически определимой шарнирно-стержневой системы

Рассмотрим в качестве примера следующую статически неопределимую систему шарнирно-стержневую систему (рис. 4.3).

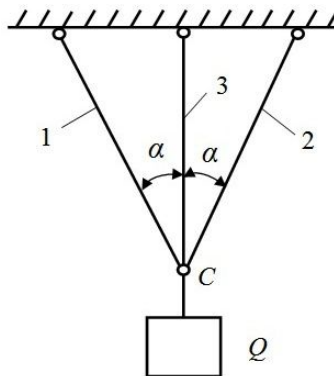


Рисунок 4.3 – Статически неопределимая шарнирно-стержневая система

В этом случае груз весом Q подвешен на трех стержнях, в связи с чем неизвестных внутренних продольных сил в поперечных сечениях стержней три: N_1 , N_2 , N_3 , а использовать для их определения можно только два уравнения равновесия (4.2) отсеченной части системы (рис. 4.4).

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0; & \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; & \quad N_1 = N_2; \\ \Sigma y = 0; & \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - Q = 0; & \quad 2N_1 \cos \alpha + N_3 = Q. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для характеристики статически неопределимых систем используют степень статической неопределимости S

$$S = k_1 - k_2, \quad (4.3)$$

где k_1 – число неизвестных внутренних продольных сил (внутренних силовых факторов); k_2 – число независимых уравнений статики

(равновесия).

В рассматриваемом случае $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $S = 1$.

Таким образом, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой.

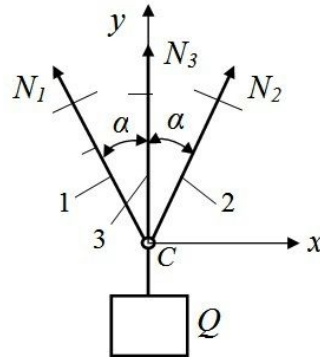


Рисунок 4.4 – Отсеченная часть статически неопределимой шарнирно-стержневой системы

4.2 РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

При расчете статически неопределимых систем необходимо рассматривать деформации ее элементов (стержней), что позволяет использовать дополнительные уравнения совместности деформаций, количество которых равняется S .

Проанализируем деформации стержней рассматриваемой системы (рис. 4.5).

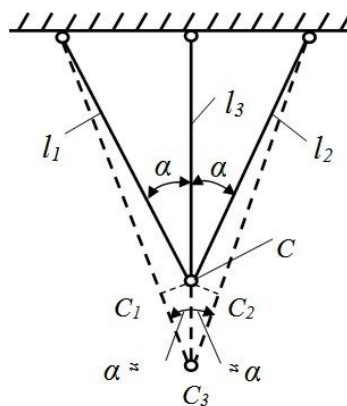


Рисунок 4.5 – Деформации стержней статически неопределимой шарнирно-стержневой системы

В соответствии с принципом малости деформаций принимаем, что углы между стержнями в процессе деформации практически не изменяются. Из рисунка 4.5 видно, что отрезок $CC_3 = \Delta l_3$. Для того

чтобы определить удлинение стержня 1, опустим перпендикуляр CC_1 на новое положение стержня 1. Полученный отрезок $C_1C_3 = \Delta l_1$. Аналогично получим отрезок $C_2C_3 = \Delta l_2$.

Из прямоугольного треугольника CC_1C_3 определяем соотношение между деформациями стержня 1 и стержня 3 – дополнительное уравнение (уравнение совместности деформаций)

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha. \quad (4.5)$$

С учетом соотношения (3.12) получим выражения для деформаций стержней 1 и 3:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3}. \quad (4.6)$$

Учитывая, что $l_3 = l_1 \cos \alpha$, и подставляя (4.6) в (4.5), получаем

$$N_1 = N_3 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^2 \alpha. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) во второе из уравнений (4.3), получаем

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \frac{E_1 F_1 \cos^3 \alpha}{E_1 F_3}}; \quad (4.8)$$

$$N_1 = \frac{Q \frac{E_1 F_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^3 \alpha}.$$

И наконец, подставляя (4.8) в (4.7), получаем

$$N_1 = \frac{Q \frac{E_1 F_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^3 \alpha}. \quad (4.9)$$

Из выражений (4.8) и (4.9) следует, что величина внутренних продольных сил зависит не от абсолютных величин площадей поперечных сечений стержней, модулей продольной упругости материалов стержней, а от их отношений. Задаваясь различными соотношениями площадей поперечных сечений стержней, можно получить различные комбинации внутренних продольных сил. В этом заклю-

чается одна из особенностей статически неопределимых систем.

4.3 ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Другой особенностью статически неопределимых систем является возникновение температурных в результате изменения температуры элементов конструкции.

Для понимания причин этого рассмотрим статически неопределимый стержень, жестко защемленный по концам (рис. 4.6).

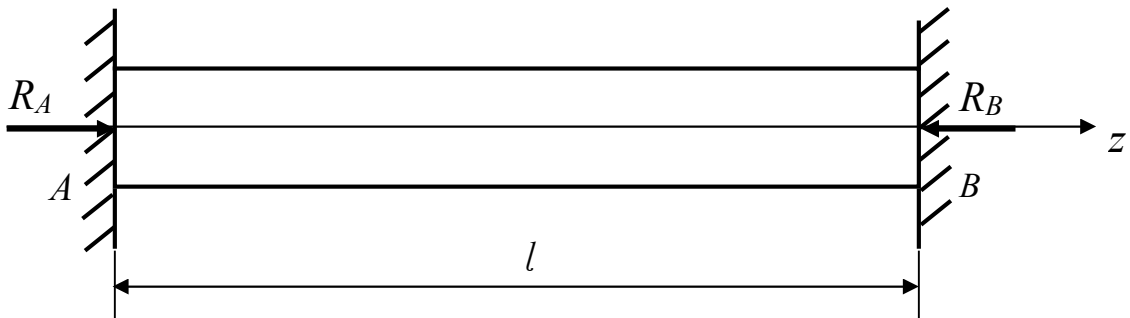


Рисунок 4.6 - Статически неопределимый стержень

В статически неопределимом стержне защемления (опоры) препятствуют свободному удлинению стержня и в них возникают опорные реакции R_A и R_B , равные и противоположно направленные друг другу (в силу симметрии стержня). Поэтому далее опорные реакции будут обозначены R . Для их определения недостаточно единственно возможного в этом случае уравнения статики $\Sigma z = 0$.

Для составления дополнительного уравнения учтем, что длина стержня, защемленного по концам, не изменяется. Это возможно лишь в случае, когда силовое изменение длины стержня Δl^N (силовая деформация стержня), вызванное действием сжимающих опорных реакций R , равно температурному изменению длины стержня Δl^t , защемленного одним концом (температурная деформация стержня) $\Delta l^N = \Delta l^t$.

Если бы стержень был жестко защемлен одним концом (т.е. был бы статически определимым), то при повышении температуры он удлинился без возникновения внутренних сил и напряжений. При этом температурная деформация (удлинение) стержня составила бы

$$\Delta l^t = \alpha l \Delta t, \quad (4.10)$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения материала стержня; l – начальная длина стержня; Δt – изменение температуры стержня.

Для определения силовой деформации стержня используется выражение

$$\Delta l^N = \frac{Rl}{EF}. \quad (4.11)$$

Тогда температурные усилие и напряжение в стержне рассчитываются как

$$N^t = R = \alpha EF \Delta t, \quad (4.12)$$

$$\sigma^t = \frac{N^t}{F} = \alpha E \Delta t. \quad (4.13)$$

4.4 НАЧАЛЬНЫЕ (МОНТАЖНЫЕ) НАПРЯЖЕНИЯ

При изготовлении различных конструкций и сооружений нельзя достичь абсолютно точного соответствия фактических размеров конструктивных элементов тем их размерам, которые соответствуют требованиям чертежей. В статически определимых системах такие неточности не вызовут никаких напряжений в отличие от статически неопределимых систем (рис. 4.7).

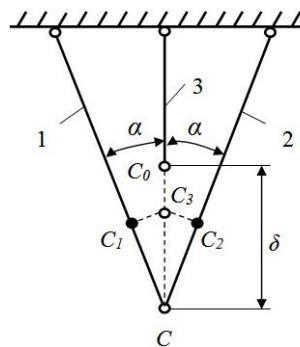


Рисунок 4.7 – Статически неопределимая шарнирно-стержневая система с неточно изготовленным средним стержнем

Средний стержень 3 изготовлен короче, чем следует, на величину $CC_0 = \delta$. Чтобы соединить нижний конец среднего стержня с нижними концами крайних стержней где-то в точке C_3 , необходимо

средний стержень растянуть на величину $\Delta l_3 = C_0 C_3$, а крайние стержни сжать на величину $\Delta l_1 = C C_1$ и $\Delta l_2 = C C_2$ соответственно.

Из рисунка получаем уравнение совместности деформаций стержней:

$$\delta = \Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}, \quad (4.14)$$

где δ – зазор.

Так как внешних нагрузок нет и усилия в крайних стержнях N_1 и N_2 сжимающие, а усилие в среднем стержне N_3 растягивающее, то уравнение равновесия (4.2) примет вид

$$N_3 - 2N_1 \cos \alpha = 0. \quad (4.15)$$

Заменяя Δl_1 и Δl_3 в (4.14) согласно (4.6) и с учетом $l_3 = l_1 \cos \alpha$, получаем

$$\delta = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3} + \frac{N_1 l_3}{E_1 F_1 \cos^2 \alpha}. \quad (4.16)$$

Далее, совместно решая (4.16) и (4.17), получаем

$$N_3 = \frac{\delta E_3 F_3}{l_3 \left[1 + \frac{E_3 F_3}{2E_1 F_1 \cos^3 \alpha} \right]}. \quad (4.17)$$

$$N_1 = \frac{\delta E_3 F_3}{2l_3 \left[1 + \frac{E_3 F_3}{2E_1 F_1 \cos^3 \alpha} \right] \cos \alpha} = N_2. \quad (4.18)$$

Следует отметить, что в целях упрощения в формулу (4.14) можно подставлять длину среднего стержня l_3 , а не « $\delta - l_3$ » ввиду малости δ по сравнению с l_3 .

Для получения монтажных напряжений умножим уравнение равновесия (4.15) на задаваемое отношение площадей поперечных сечений стержней $\frac{F_1}{F_3} \neq 0$.

В результате получим уравнение, связывающее монтажные напряжения в стержнях:

$$\sigma_3 = \sigma_1 2 \frac{F_1}{F_2} \cos \alpha. \quad (4.19)$$

С учетом формулы (3.2) выражение (4.16) принимает вид

$$\delta = \sigma_3 \frac{\cos\alpha}{E_3} + \sigma_1 \frac{1}{E_1 \cos\alpha}. \quad (4.20)$$

Далее совместное решение уравнений (4.19) и (4.20) позволяет определить монтажные напряжения.

Рассмотренный расчет позволяет сделать вывод о том, что неточности изготовления конструктивных элементов приводят к возникновению напряжений при отсутствии внешних нагрузок.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие системы являются статически неопределимыми?
2. Что такое степень статической неопределимости?
3. Какие связи называются лишними?
4. Запишите алгоритм раскрытия статической неопределимости.
5. Что представляют собой дополнительные уравнения?
6. Чему равно число дополнительных уравнений?
7. Какое состояние системы считается опасным?
8. Какая нагрузка является допустимой, предельной и предельно допустимой?

ГЛАВА 5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

5.1 ПОНЯТИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ЕГО ВИДЫ

Центральное растяжение–сжатие бруса является простейшим видом деформации тела, когда напряженное состояние всех его точек одинаково (однородное напряженное состояние). В общем смысле напряженное состояние в теле неоднородно, оно меняется от точки к точке и поэтому по любому сечению $m-n$ этого тела напряжения распределены неравномерно (рис. 5.1).

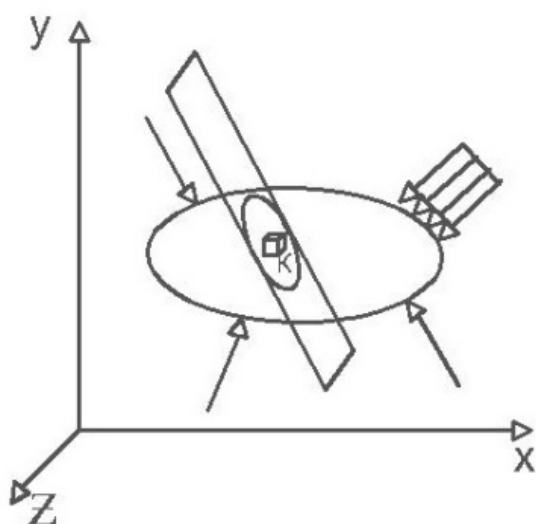


Рисунок 5.1 – Напряженное состояние в точке тела

При изучении напряженного состояния в какой-либо точке K мысленно вырезают в окрестности этой точки элемент со сторонами dx, dz, dy .

Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех точках одинаково и совпадает с напряженным состоянием в точке K , поэтому как по граням элемента, так и по любым его сечениям напряжения считаются распределенными равномерно. Это позволяет исследовать закон распределения напряжений по наклонным сечениям элементарного параллелепипеда (рис. 5.2).

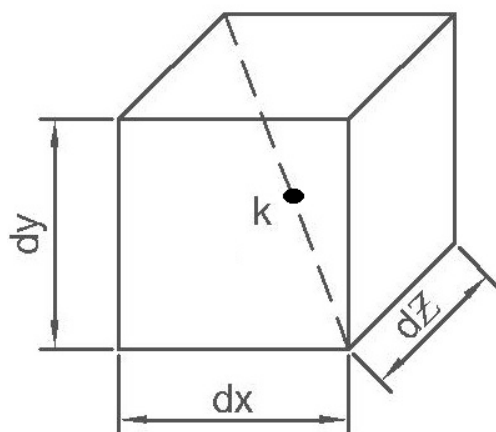


Рисунок 5.2 – Элементарный параллелепипед

Напряжения на гранях считаются заданными, а напряжения, возникающие в наклонных площадях, определяют методом сечений.

Если под действием внешних нагрузок площадки стремятся отойти одна от другой или же придавиться друг к другу, то между ними возникают нормальные напряжения σ , соответственно сжимающие или растягивающие.

Если площадки стремятся сдвинуться одна относительно другой, то между ними возникают касательные напряжения τ .

В любой точке напряженного тела всегда можно выделить параллелепипед, ориентированный так, что его грани будут свободны от касательных напряжений.

При этом различают три вида напряженного состояния: линейное ЛНС (рис. 5.3а), плоское ПНС (рис. 5.3б), объемное ОНС (рис. 5.3в).

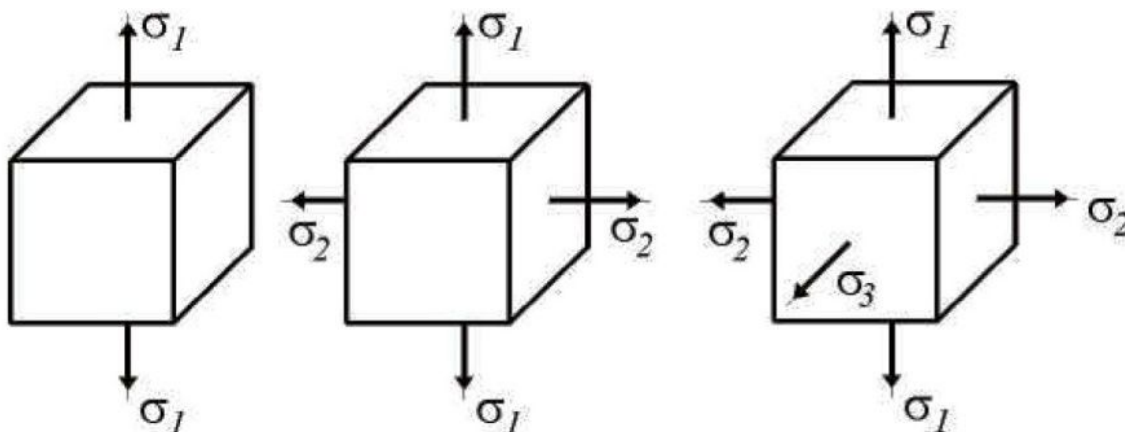


Рисунок 5.3 – Виды напряженного состояния в точке тела

5.2 НАПРЯЖЕНИЯ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ ПРИ ЛИНЕЙНОМ И ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Напряжения в сечениях, наклонных к оси стержня при растяжении-сжатии, представлены на рисунке 5.4.

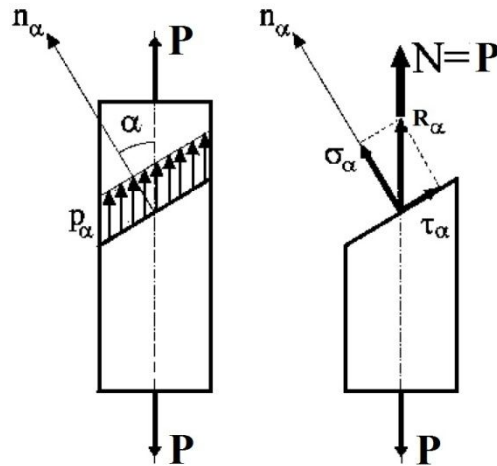


Рисунок 5.4 – Напряжения на наклонных сечениях

Предполагая, что нормальные и касательные напряжения распределены по наклонному сечению равномерно, найдем

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{F_{\alpha}} = \frac{P \cos \alpha}{\frac{F}{\cos \alpha}} = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (5.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{T_{\alpha}}{F_{\alpha}} = \frac{\frac{P \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{F}{\cos \alpha}} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.2)$$

Тогда:

- 1) при $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$, $\sigma_{\max} = \sigma$, $\tau = 0$;
- 2) при $\alpha = \pm 45^{\circ}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 2\alpha = \pm 1$, $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$, $\sigma_{45} = \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}$;
- 3) $\alpha = 90^{\circ}$, $\sigma_{90} = 0$, $\tau_{90} = 0$.

Из этого видно, что с изменением наклона площадки, проходящей через точку K_1 , изменяются и действующие на ней напряжения.

В более сложных случаях действия сил на брус вопрос об определении наибольших напряжений, а также положения площадок, на которых они действуют, усложняется. Для решения этого вопроса приходится специально исследовать закон изменения

напряжений при изменении наклона площадок. Возникает проблема исследования напряженного состояния в точке упругого тела.

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через данную точку.

При исследовании напряженного состояния элементов конструкций часто приходится иметь дело с плоским напряженным состоянием. Оно встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении.

При анализе плоского напряженного состояния в точке напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{xy}$ считаются заданными, поэтому их называют исходными напряжениями.

Примером служит тонкая пластинка, нагруженная системой сил (рис. 5.5а).

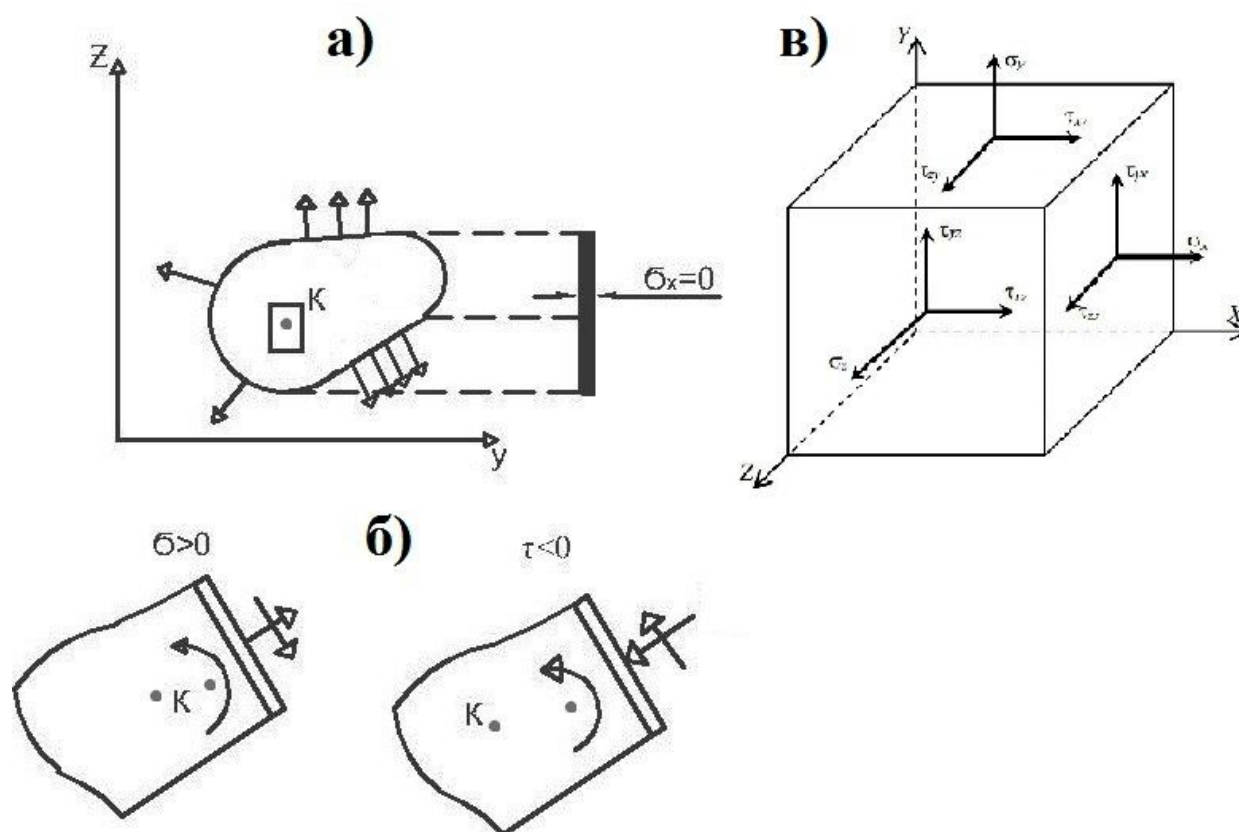


Рисунок 5.5 – Тонкая пластинка

Правило знаков для напряжений при плоском напряженном состоянии изображено на рисунке 5.5б.

Параллелепипед, выделенный из тела, должен находиться в равновесии под действием сил, приложенных к его граням.

А так как длины его ребер равны dx, dz, dy , тогда силы, приложенные к его граням, будут с плечом соответственно dx, dz, dy . Вследствие этого нормальные усилия на гранях параллелепипеда взаимно уравновешены, а касательные напряжения на тех же гранях образуют две пары сил:

$$\tau_{yx} dy dz (dx) + \tau_{xy} dx dz (dy) = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = -\tau_{xy}.$$

На любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно, при плоском напряженном состоянии могут быть два варианта действия касательных напряжений (рис. 5.6).

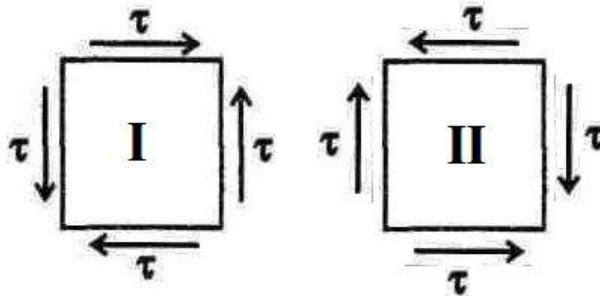


Рисунок 5.6 – Варианты действия касательных напряжений при ПНС

Вывод формул для напряжений на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии иллюстрируется рисунком 5.7.

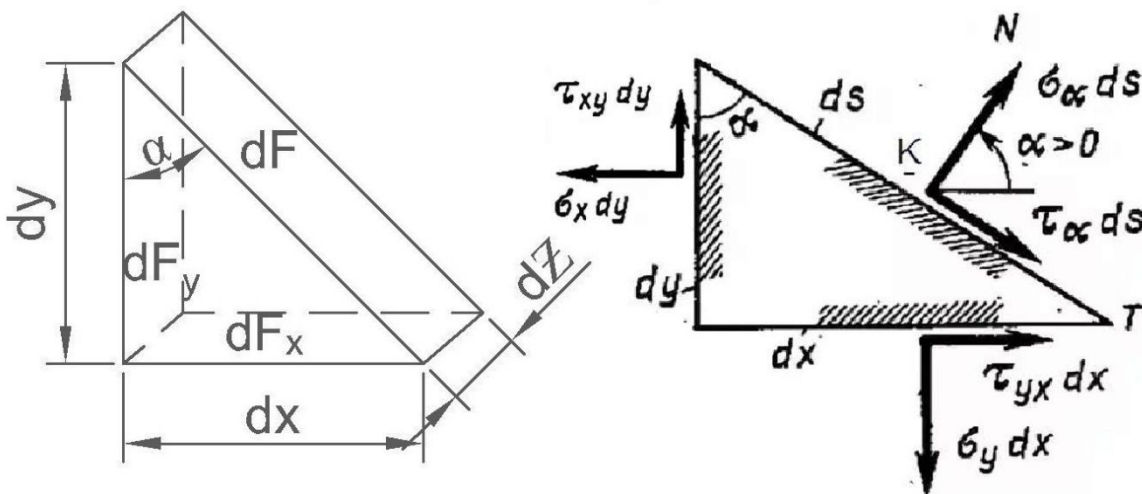


Рисунок 5.7 – Расчетная схема

$$\left. \begin{aligned} dF_y &= dz \times dy = dF \times \cos \alpha; \\ dF_x &= dz \times dx = dF \times \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Проектируя все силы на N и T , определяем напряжения на наклонных площадках:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha dF - \sigma_y dF_x \sin \alpha - \sigma_x dF_y \cos \alpha + \tau_{xy} dF_y \cos \alpha + \tau_{yx} dF_y \sin \alpha = 0; \\ \tau_\alpha dF - \tau_{xy} dF_x \sin \alpha - \tau_{yx} dF_y \cos \alpha + \sigma_y dF_y \cos \alpha + \sigma_x dF_y \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Подставив вместо dF_y и dF_x их значения (5.4), сократим все слагаемые на dF и, учтя, что

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx};$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha; \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha, \quad (5.4)$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

получим

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha.$$

Если $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, то

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha. \quad (5.5)$$

Напряжения на взаимно перпендикулярных площадках изображены на рисунке 5.8.

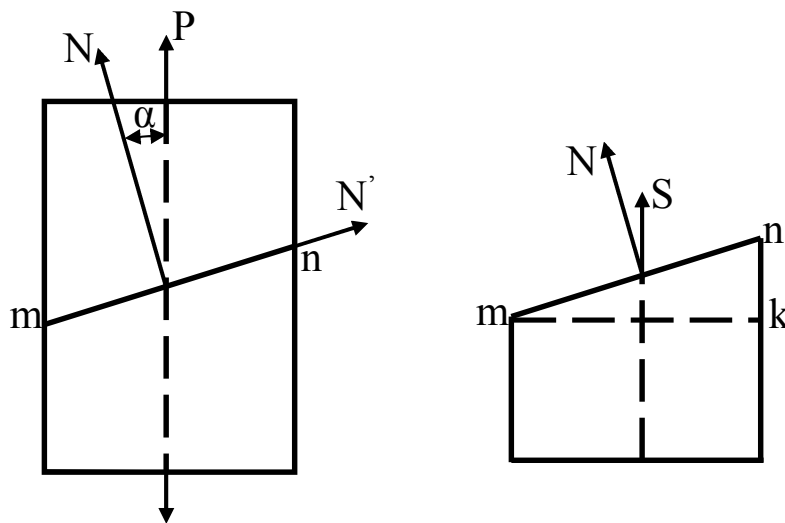


Рисунок 5.8 – Схема усилий на взаимно перпендикулярных площадках

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma \cos^2 \alpha ; \\ \tau_{\alpha} &= \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha . \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Угол $\alpha > 0$ при отсчете от оси стержня против хода часовой стрелки и нормального напряжения $\sigma_{\alpha} > 0$. Касательные напряжения (+), если нормаль к площадке, поворачиваясь против хода часовой стрелки, совпадает с направлениями этих напряжений.

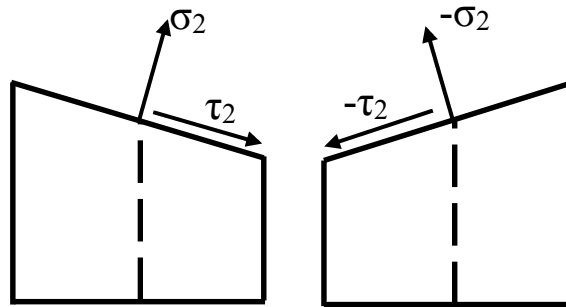


Рисунок 5.9 – Напряжения на взаимно перпендикулярных площадках

Из рисунка 5.9 имеем

$$\begin{cases} \sigma'_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2(\alpha + 270) = \sigma \sin^2 \alpha ; \\ \tau'_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 270) = \frac{\sigma}{2} \sin^2 \alpha . \end{cases}$$

Сравним эти две формулы и получим $\tau_{\alpha} = -\tau'_{\alpha}$ - справедливо для любого случая напряженного состояния.

$$\sigma_{\alpha} + \sigma'_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha + \sigma \sin^2 \alpha = \sigma = \sigma_{max},$$

то есть сумма нормального напряжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям величина постоянная.

5.3 ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ

При изменении угла наклона площадок меняется и величина как нормальных, так и касательных напряжений. Но если провести одну из площадок так, чтобы нормаль к ней совпала с направлением оси стержня, т.е. составила угол $\alpha = 0$, то на этой площадке, как следует из соотношения $\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$, нормальные напряжения будут максимальными, а касательные равны нулю.

Площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, называются главными площадками. Нормальные напряжения, дей-

ствующие по этим площадкам, называются главными напряжениями.

Если обозначить главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то для растянутого (сжатого) стержня:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 & - \text{ЛНС;} \\ \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma, \sigma_3 = 0 & - \text{ПНС;} \\ \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma, \sigma_3 = \sigma & - \text{ОНС.}\end{aligned}$$

Для определения главного напряжения, а также наклона главных площадок воспользуемся общим выражением для напряжения на произвольной площадке и приравняем нулю производную

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0.$$

В качестве функции используем

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right); \\ \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= -2\tau_\alpha, \quad \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0.\end{aligned}$$

Обозначив α_0 как угол наклона главной площадки и приравняв выражение в скобках к нулю, найдем

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (5.7)$$

Это выражение дает два взаимно перпендикулярных направления с углами наклона $\alpha_0, \alpha_0 + 90^\circ$, по которым действуют главные напряжения (рис. 5.10).

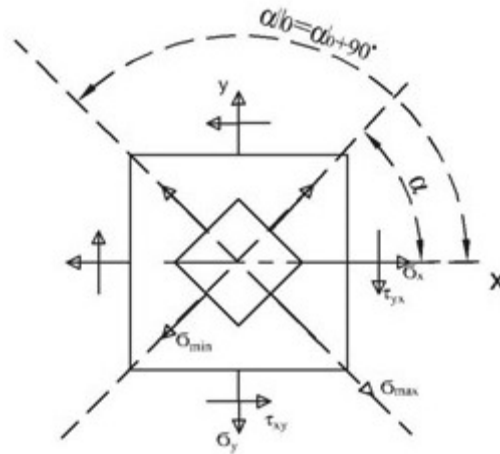


Рисунок 5.10 – Главные напряжения на площадках

Для определения величины главных напряжений в формуле (5.5) подставим $\alpha = \alpha_0$ и, вынося $\cos 2\alpha$ за скобку, получим

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \tau_{yx} \tan 2\alpha_0 \right) \cos 2\alpha_0; \quad (5.8)$$

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}.$$

Знак " \pm " поставлен потому, что $\cos(2\alpha'_0 + 180^\circ)$ имеют противоположенные знаки, тогда

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{2\tau_{yx}^2}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}} \right) =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}; \quad (5.9)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}; \quad (5.10)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (5.11)$$

Из приведенного вывода следует, что при любых исходных напряжениях $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в данной точке существует параллелепипед, на гранях которого действуют только нормальные напряжения. Другими словами, плоское напряженное состояние в точке всегда

может быть сведено к растяжению–сжатию в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Анализируя формулу (5.9), видим, что она дает два главных напряжения, но не указывает, в каком из них действует σ_{\max} и σ_{\min} .

Таким образом, с поворотом площадки в направлении вектора касательных напряжений нормальное напряжение на площадке алгебраически возрастает.

Направление σ_{\max} всегда проходит через две четверти осей координат, в которых стрелки касательных напряжений τ_{yx} и τ_{xy} сходятся.

Касательные напряжения дают удлинение одной диагонали, именно к этой диагонали и тяготеет направление σ_{\max} .

Одно и то же напряженное состояние может быть представлено различными исходными площадками и напряжениями, так как касательные напряжения на главных площадках отсутствуют, то главные площадки и напряжения наиболее просто определяют напряжение в точке (рис. 5.11).

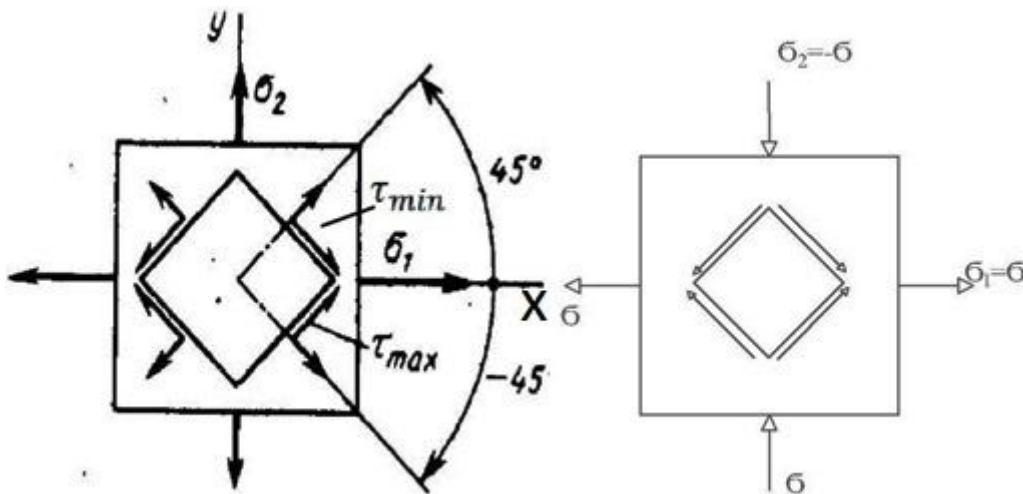


Рисунок 5.11 – Распределение главных и экстремальных касательных напряжений в точке

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha ; \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha . \end{cases}$$

Обозначим $\sigma_{\max} = \sigma_1$ и $\sigma_{\min} = \sigma_2$, отсчитывая угол α от направления σ_1 , напишем формулы для σ_2 и τ_2 , полагая, что

$$\sigma_x = \sigma_1; \sigma_y = \sigma_2 \text{ и } \tau_{yx} = 0.$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (5.12)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.13)$$

Из формулы (5.13) при $\alpha = 45^\circ$ $\sin 2\alpha = \pm 1$, касательные напряжения имеют экстремальные значения

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.14)$$

Экстремальные касательные напряжения в точке равны полуразности главных напряжений и действительны на площадках, наклоненных к главным площадкам под углом 45° .

Подставляя (5.9) в (5.14), получим

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (5.15)$$

В общем случае на площадках с τ_{\min}^{\max} нормальные напряжения не равны нулю. Полагая, что в (5.12) $\alpha = \pm 45^\circ$, получим

$$\sigma_{\pm 45} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (5.17)$$

В частном случае, когда на гранях действуют два главных напряжения $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, экстремальные касательные напряжения численно равны главным напряжениям, а нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями в этом случае равны нулю – случай чистого сдвига.

5.4 ПОНЯТИЕ О ЧИСТОМ СДВИГЕ

Чистым сдвигом называется такой вид плоского напряженного и деформированного состояния, при котором на двух взаимно перпендикулярных площадках, ориентированных определенным образом, действуют только касательные напряжения. Указанные площадки называются площадками чистого сдвига.

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha;$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{yx} = -\tau, \\ \sigma_\alpha = +\tau \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha. \end{cases}$$

σ_α обращается в нуль только на площадках чистого сдвига ($\alpha = 0$ или $n\frac{\pi}{2}$). На всех других площадках нормальные напряжения не равны нулю (рис. 5.12).

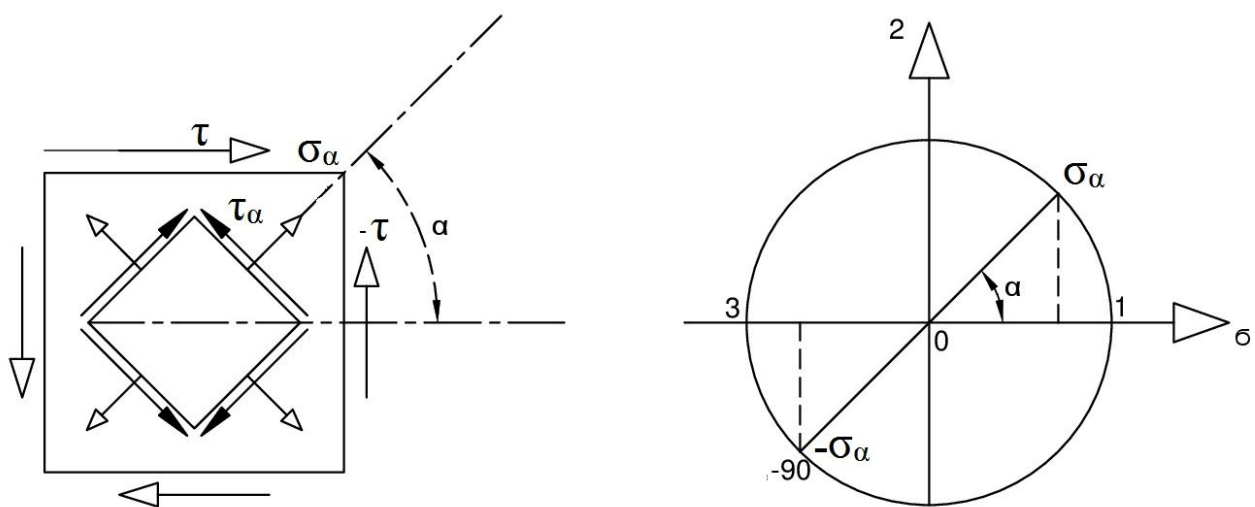


Рисунок 5.12 – Распределение напряжений при чистом сдвиге

Таким образом, при чистом сдвиге наблюдается своеобразный «закон парности нормальных напряжений». Отсюда, как частный вывод, следует, что при чистом сдвиге главные напряжения удовлетворяют условию $\sigma_1 = -\sigma_2$.

Пример чистого сдвига – скручиваемая тонкостенная труба (рис. 5.13).

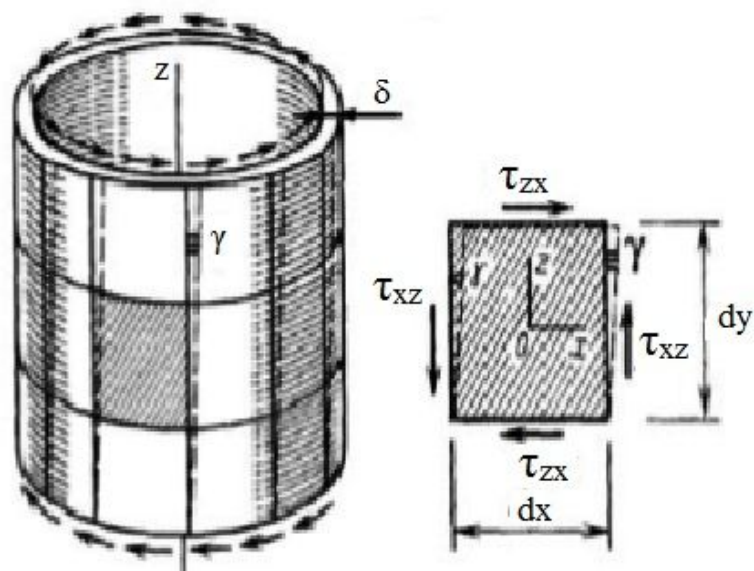


Рисунок 5.13 – Пример чистого сдвига

Часто деформация кручения используется для экспериментального изучения работы материалов на сдвиг, так как практически не удастся создать напряженного состояния чистого сдвига путем неоднородности приложения касательных напряжений к кромкам пластины.

Найдем величину экстремальных напряжений при чистом сдвиге с помощью формул. Первая из них указывает, что при $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin 2\alpha = 1$ имеет место максимальное нормальное напряжение $\sigma_1 = \tau$, а при $\alpha = 135^\circ \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$ – минимальные напряжения $\sigma_2 = -\tau$.

Итак, при чистом сдвиге главные напряжения, сжимающие и растягивающие, равны между собой и численно равны экстремальным касательным напряжениям. Главные площадки составляют с площадками чистого сдвига угол 45° (рис. 5.14).

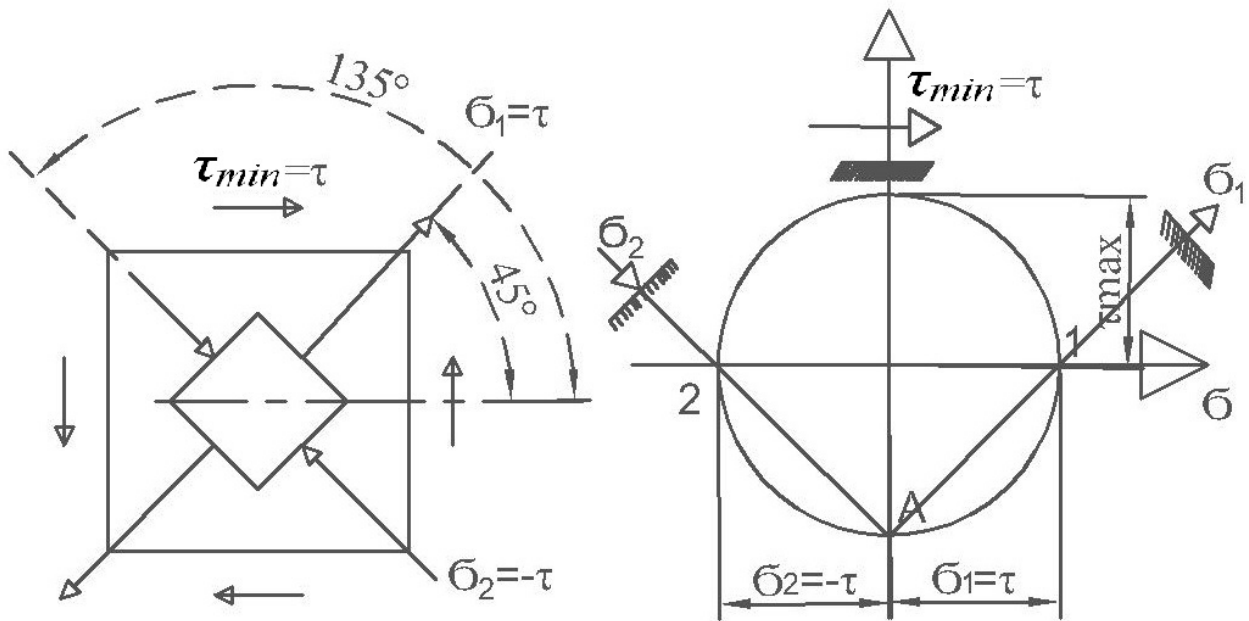


Рисунок 5.14 – Распределение главных напряжений при чистом сдвиге, их графическое представление

Чистый сдвиг – единственный вид плоского напряженного состояния, при котором отсутствуют изменение объема материала, а любой выделенный элемент при чистом сдвиге изменяет только форму.

Касательные напряжения на гранях элемента – τ , допускаемое напряжение при растяжении для данного материала $[\sigma]$.

Главные напряжения при чистом сдвиге $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$;
 $\sigma_3 = -\tau$;

По II теории $\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma]$.

Подставляя значения σ_1 и σ_3 , найдем

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}.$$

Правая часть полученного выражения представляет допускаемое напряжение при чистом сдвиге:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}.$$

Полученные величины допускаемых напряжений применяют для расчета на прочность деталей, испытывающих деформации среза (болты, заклепки, шпонки и т.д.)

Условие прочности на сдвиг (срез) может быть записано в общем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau].$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется напряженным состоянием в точке?
2. Какие напряжения называются главными?
3. Какие напряженные состояния называются линейными, плоскими и объемными?
4. Чему равны нормальные и касательные напряжения при линейном напряженном состоянии?
5. Чему равны наибольшие и наименьшие нормальные напряжения при плоском напряженном состоянии?
6. Чему равны наибольшие касательные напряжения при плоском напряженном состоянии?
7. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
8. Что называется деформацией чистого вида?

ГЛАВА 6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1 ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Бесконечно малый элемент с длиной сторон dx и dy , произвольно ориентированный при плоском напряженном состоянии при действии на него нормальных σ_x , σ_y и касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx} , деформируется следующим образом (рис. 6.1).

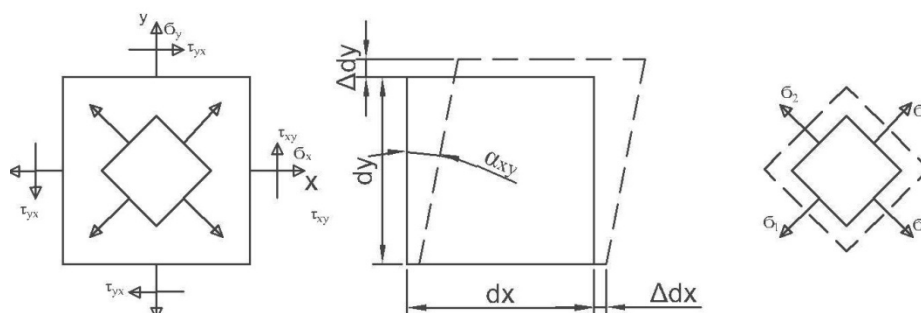


Рисунок 6.1 – Деформация элемента при плоском напряженном состоянии

На рисунке 6.1 Δdx и Δdy – удлинения сторон элемента, характеризуется величинами относительных удлинений по направлениям:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}. \quad (6.1)$$

Касательные напряжения вызывают угловую деформацию (угол сдвига) – деформацию сдвига γ_{xy} (рис. 6.2).

Любое плоское состояние сводится к растяжению-сжатию в двух взаимно перпендикулярных направлениях главными напряжениями σ_1 и σ_2 (см. рис. 6.1).

И так, через каждую точку можно указать два взаимно перпендикулярных направления, в которых отрезки получают удлинения ε_1 и ε_2 , а прямой угол между ними не изменяется. Удлинения ε_1 и ε_2 называют главными деформациями в точке. В точках упругого изотропного тела направление главных напряжений и главных деформаций всегда совпадают.

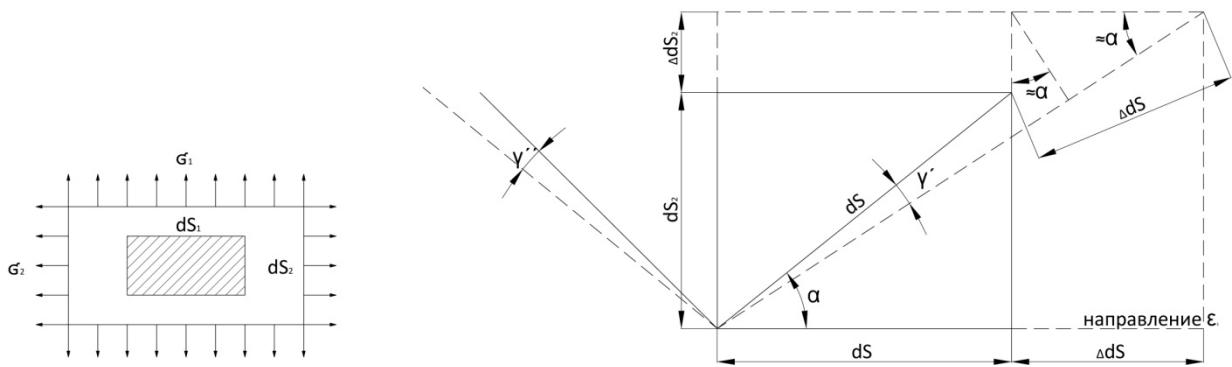


Рисунок 6.2 – Угловая деформация при плоском напряженном состоянии

Главные деформации ε_1 и ε_2 имеют экстремальные значения в данной точке.

6.2 ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Предположим, что по граням элемента действуют главные напряжения σ_1 и σ_2 .

В начале найдем удлинения элемента по осям 1, 2, 3 при условии, что $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$ (рис. 6.3).

Если $\sigma_1 \neq 0$ и при этом не превосходит предела пропорциональности, то по закону Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\sigma_3}{E}, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - главные удлинения.

Так как удлинение в направлении оси 1 вызывает укорочение по осям 2 и 3, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E}; \\ \varepsilon_2 &= -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \\ \varepsilon_3 &= -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если же $\sigma_2 \neq 0, \sigma_1 = 0$, то

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E}; \\ \varepsilon_1 &= -\mu\varepsilon_2 = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \\ \varepsilon_3 &= -\mu\varepsilon_2 = -\mu\frac{\sigma_2}{E}.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Если же $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$, то, суммируя полные удлинения по осям 1, 2, 3, получим

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}; \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}; \\ \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).\end{cases}\tag{6.5}$$

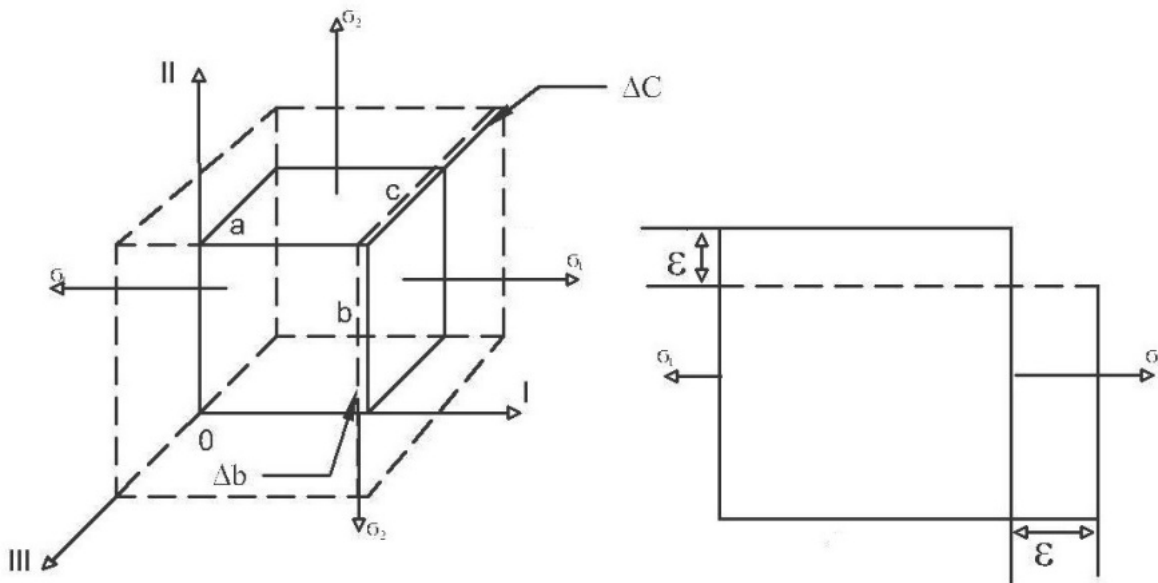


Рисунок 6.3 – Деформации элемента при действии главных напряжений

Эти зависимости справедливы для любых направлений. Решая их (зависимости) относительно σ_1 и σ_2 , получим:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1).\end{cases}\tag{6.6}$$

Для произвольных (не главных) площадок:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x). \end{cases} \quad (6.7)$$

Тогда обобщенный закон Гука при объемном напряженном состоянии примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases} \quad (6.8)$$

6.3 ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Установим связь между относительным изменением объема ε_v и главным напряжением. До деформации элемент занимал объем $V_0 = abc$. В деформированном состоянии

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right); \quad (6.9)$$

$$V = V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3);$$

$$V = V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Учитывая незначительную величину деформации, последними четырьмя членами пренебрегаем. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (6.10)$$

Выразим члены удлинения через члены напряжения (по общему закону Гука):

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (6.11)$$

В частности, при равномерном всестороннем сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -r$:

$$\varepsilon_v = -\frac{r}{k} = -\frac{3r(1 - 2\mu)}{E}. \quad (6.12)$$

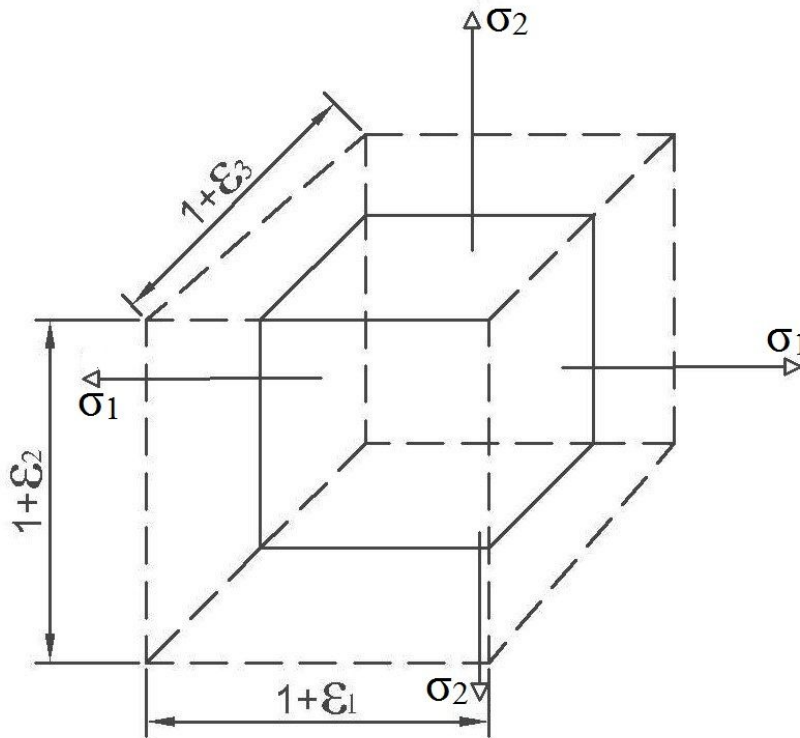


Рисунок 6.4 – Изменение относительных деформаций при плоском напряженном состоянии

6.4 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Потенциальной энергией деформации называется энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации. Когда под действием внешней статической нагрузки тело деформируется, точки приложения внешних сил перемещаются, и потенциальная энергия положения груза убывает на величину, которая численно равна работе, совершенной внешними силами. Энергия, потерянная внешними силами, не исчезает, а превращается в основном в потенциальную энергию деформации тела. Остальная незначительная часть рассеивается, главным образом, в виде тепла за счет различных процессов, происходящих в материале при деформации.

Потенциальная энергия деформации накапливается в обратной форме - в процессе разгрузки тела она снова превращается в энергию внешних сил или в кинетическую энергию.

Величину потенциальной энергии деформации на единицу объема называют удельной потенциальной энергией (u), которая в разных точках тела различна по величине.

Величину потенциальной энергии деформации можно легко вычислить на основе закона сохранения энергии.

Поскольку при статической нагрузке кинетическая энергия системы остается неизменной, то приращение потенциальной энергии деформации u равно уменьшению потенциальной энергии положения внешних сил u_n . Уменьшение потенциальной энергии внешних грузов численно равно работе Ap , совершаемой ими при деформации. Таким образом, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела:

$$u = Ap. \quad (6.13)$$

В сложном растяжении-сжатии

$$u = \frac{Pl}{2F\Delta l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Вычислим теперь удельную потенциальную энергию в общем сложном объемном напряженном состоянии (рис. 6.5).

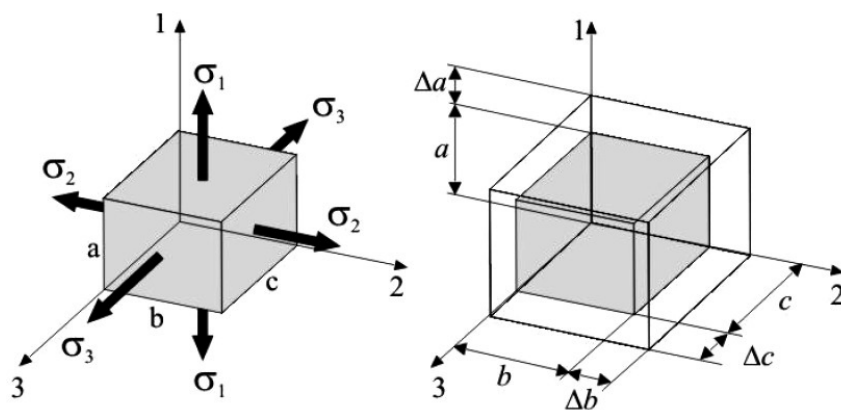


Рисунок 6.5 – Деформация элемента при объемном напряженном состоянии

В свою очередь главные деформации элемента при объемном напряженном состоянии рассчитываются

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}.$$

Поскольку площади граней равны по 1 см^2 , то действующие в них усилия численно равны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Они производят работу на тех перемещениях, которые получают грани при деформации:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (6.15)$$

Подставляя в обобщенный закон Гука, получаем

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (6.16)$$

При деформации элемента изменяется как его объем, так и форма. В соответствии с этим можно считать, что полная удельная потенциальная энергия деформации рассчитывается как

$$u = u_V + u_P, \quad (6.17)$$

где u_V - удельная потенциальная энергия изменения объема, т.е. энергия, накапливаемая за счет изменения объема; u_P - удельная потенциальная энергия формоизменения, т.е. энергия, накапливаемая вследствие изменения формы.

Непосредственное вычисление u_P затруднительно, поэтому найдем сначала u_V . Это можно сделать из предположения о том, что в различных элементах при действии разных членов напряжений величина u_V будет одинаковой, коль скоро у элементов будет одинаковое изменение объема ε_V .

Рассмотрим два элементарных объема A и A_0 , по граням первого из которых действуют произвольные главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а по граням второго – три главных напряжения, равные по величине среднему напряжению $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ (рис. 6.6).

Удельная потенциальная энергия деформации элемента в первом состоянии (A) равна

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

Удельная потенциальная энергия деформации элемента во втором состоянии (A_0) равна

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2\mu(\sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0 + \sigma_0\sigma_0)] = \frac{3(1-\mu)}{2E} \sigma_0^2.$$

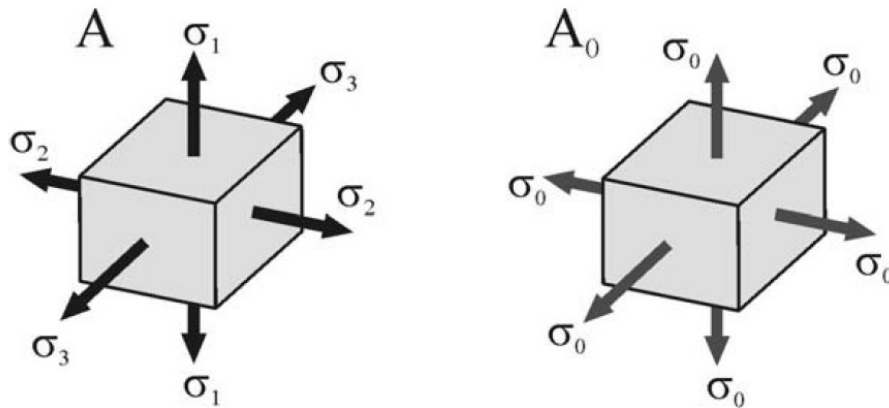


Рисунок 6.6 – Общий вид напряженного состояния двух элементов при действии произвольных и равных по величине главных напряжений

Очевидно, что деформация второго состояния проходит без искажения формы, т.к. действующие по его граням одинаковые главные напряжения σ_0 вызывают одинаковое изменение размеров по всем направлениям, поэтому потенциальная энергия формоизменения в этом случае равна нулю. Значит, потенциальная энергия объема в этом случае

$$u_{V0} = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2k}.$$

Нетрудно убедиться, что относительное изменение объема обоих кубиков одинаково, т.е.

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{V0} = \frac{\sigma_0}{k}.$$

Следовательно, потенциальная энергия изменения объема у них также одинакова:

$$u_V = u_{V0}, \quad u_V = \frac{3(1-2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18E} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Теперь найдем потенциальную энергию формоизменения

$$u_\phi = u - u_V = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?
2. Что представляют собой площадки чистого сдвига и чем они отличаются от площадок сдвига?
3. Как связаны между собой нормальные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках при чистом сдвиге?
4. Как деформируются под действием касательных напряжений элементарный параллелепипед, боковые грани которого совпадают с площадками чистого сдвига?
5. Что такое абсолютный и относительный сдвиг?
6. Сформулируйте закон Гука при сдвиге.
7. Какое напряженное состояние называется линейным, плоским, объемным?
8. Правила знаков для нормальных и касательных напряжений.
9. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
10. Главные напряжения и главные площадки.
11. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
12. Как обозначаются главные напряжения при растяжении и сжатии?
13. Запишите обобщенный закон Гука при плоском и объемном напряженном состояниях.
14. Запишите формулу удельной потенциальной энергии деформации.

ГЛАВА 7 КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

7.1 ЗАДАЧИ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Задача проверки прочности в общем виде по методу допускаемых напряжений заключается в проверке выполнения условия (7.1) не превышения некоторыми расчетными напряжениями σ их допускаемых значений $[\sigma]$.

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (7.1)$$

где σ_0 - опасное напряжение, получаемое с помощью специальных экспериментов; n - нормативный коэффициент запаса прочности (надежности).

Для случаев одноосных растяжения и сжатия значения опасных напряжений получают с помощью простых опытов, описанных в главе 3. В нормах расчета на прочность при статических нагрузках в качестве опасных принимаются два вида состояний: хрупкое разрушение или пластическое течение. Так как при растяжении и сжатии в точках конструкции реализуются одноосные (простые) напряженные состояния, то условия прочности фактически являются условиями прочности при простых напряженных состояниях. Поэтому при одноосных растяжении и сжатии пластичного материала $\sigma_0 = \sigma_T$ (пределу текучести), а для хрупких материалов $\sigma_0 = \sigma_R$ (пределу прочности при одноосном растяжении) или $\sigma_0 = \sigma_C$ (пределу прочности при одноосном сжатии).

При сложных напряженных состояниях, плоских и объемных, проблема определения опасных напряжений резко усложняется. Путь их определения с помощью прямых опытов возможен в относительно редких случаях. Результаты, полученные в таких испытаниях, говорят о том, что значения опасных напряжений сильно зависят от соотношений главных напряжений. Поскольку подобных соотношений возможно бесконечное множество, то и количество необходимых испытаний становится крайне большим.

Поэтому путь прямого эксперимента практически не реализуем. Ему препятствуют два основных обстоятельства. Во-первых,

дороговизна этого пути из-за большого объема опытов и, во-вторых, сложность необходимого испытательного оборудования, которое иногда просто отсутствует. Например, до настоящего времени не разработано четких методик и оборудования для проведения испытаний конструкционных материалов при трехосных растяжениях.

Из всего выше сказанного возникает проблема – как при ограниченном количестве опытных данных (обычно из опытов на одноосные растяжение и сжатие) производить проверку прочности при любом напряженном состоянии.

Задачу проверки прочности решают теории прочности (теории предельных напряженных состояний). Их основой являются два утверждения:

- существует некоторая механическая величина (критерий прочности) φ , опасное значение которой φ_0 является индикатором возникновения опасного (предельного) состояния;

- величина φ_0 не зависит от вида напряженного состояния и определяется по результатам опытов на одноосные растяжение и сжатие.

Формулировка условия возникновения опасного (предельного) состояния по i -й теории прочности имеет вид

$$\varphi^i = \varphi_0^i, \quad (7.2)$$

где φ^i - расчетное значение критерия прочности, которое выражается через компоненты расчетного тензора напряжений; φ_0^i - опасное (предельное) значение критерия прочности, которое выражается через характеристики прочности при одноосных состояниях растяжения и сжатия ($\sigma_T, \sigma_P, \sigma_C$).

После подстановки в условие (7.2) напряжений величина в левой его части имеющая размерность напряжений называется эквивалентным напряжением.

Эквивалентное напряжение – напряжение при одноосном напряженном состоянии, равноопасное расчетному напряженному состоянию. Равноопасными полагаются напряженные состояния, которые при их увеличении в одинаковое число раз становятся опасными.

С введением эквивалентных напряжений и допускаемых напряжений условие прочности в обобщенном виде принимает вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I \leq [\sigma]_{+-}, \quad (7.3)$$

где $[\sigma]_{+-}$ - допускаемое напряжение материала при одноосных состояниях растяжения или сжатия.

Теории прочности не являются универсальным инструментом, т.к. они не описывают всего многообразия механических свойств конструкционных материалов. Тем не менее, теории прочности до сих пор достаточно широко применяются при расчетах конструкций из пластичных и хрупких материалов.

7.2 КЛАССИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ (ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ)

В настоящем курсе ограничимся обсуждением первых четырех теорий прочности, которые часто называют классическими.

1. Теория наибольших растягивающих напряжений (первая теория). По этой теории критерий прочности $\varphi^I = \sigma_1 \geq 0$. В соответствии с первой теорией при положительном (растягивающем) первом главном напряжении разрушение наступает отрывом при достижении предела прочности материала на одноосное растяжение. Условие разрушения имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{max}}. \quad (7.4)$$

Используя понятие эквивалентного напряжения и вводя обозначения $\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_1 \geq 0$, $[\sigma]_+ = \frac{\sigma_{\text{max}}}{n_0}$, получаем окончательное условие прочности по первой теории:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]_+ = \frac{\sigma_{\text{max}}}{n_0}. \quad (7.5)$$

Судьба первой теории была не легкой. Она вызвала во время своего появления большое недоверие и подверглась серьезной опытной проверке. Опыт показали ограниченность ее применения областью растягивающих напряженных состояний для хрупких материалов. В настоящее время первая теория используется редко и представляет, скорее, исторический интерес, но она породила целую новую область экспериментальной механики и в этом ее основное значение.

2. Теория наибольших относительных удлинений (вторая теория). Вторая теория была предложена как попытка ликвидации недостатков первой. Критерий прочности по этой теории $\varphi^{II} = \varepsilon_1 \geq 0$. После подстановок компонент тензора напряжений и введения эквивалентного напряжения условие прочности имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_+ = \frac{\sigma_{\max}}{n_0}. \quad (7.6)$$

Опытные проверки второй теории показали, что она применима только для хрупких материалов в условиях сходных с условиями применимости первой теории. Никаких преимуществ, по сравнению с первой теорией, вторая теория не показала, поэтому в настоящее время вторая теория практически не используется и имеет только историческое значение.

3. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория). Судьба третьей теории очень показательна. Она была разработана на основе многочисленных и оригинальных опытов по приведению в состояние текучести пластичных материалов. Критерием пластичности (критерием прочности) здесь принимается максимальное касательное напряжение $\varphi^{III} = \tau_{\max}$. Используя зависимость $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$ и принимая предел текучести при сдвиге $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2}$, получаем условие прочности по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\max}}{n_0}. \quad (7.7)$$

Многочисленные эксперименты и опыт практического использования третьей теории показали, что ее предсказания о наступлении текучести хорошо согласуются с практикой. Недостатком этой теории обычно считают неучет влияния промежуточного главного напряжения σ_2 . До настоящего времени теория максимальных касательных напряжений широко используется при проектировании объектов машиностроения и решении задач теории пластичности как физический закон наступления пластичности (критерий пластичности).

4. Теория энергии формоизменения (четвертая или энергетическая теория). Главной причиной разработки энергетической теории

была попытка учета второго главного напряжения σ_2 (см. выше описание третьей теории). Опыты показывают, что σ_2 некоторым образом, хотя и не слишком сильно, влияет на наступление текучести пластичных материалов. В качестве критерия пластичности по четвертой теории принимается удельная потенциальная энергия, затрачиваемая на изменении формы элемента тела

$$\varphi^{IV} = u_0 = (1 + \mu) \frac{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}{6E}.$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения при растяжении в момент начала текучести выражается зависимостью $u_{\phi_0} = \frac{(1+\mu)\sigma_T^2}{3E}$. Окончательно, условие прочности по четвертой теории принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0}. \quad (7.8)$$

Опыт использования четвертой теории показал ее хорошую применимость при расчетах конструкций из пластичных материалов. Она полнее учитывает прочностные свойства материалов по сравнению с третьей теорией и обеспечивает некоторую экономию материала. Например, в нормах строительного проектирования металлических конструкций рекомендуется использовать энергетическую теорию прочности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие напряженные состояния считаются простым и какие - сложными?
2. Что такое критерий прочности
3. Как определяются опасные напряжения при простых напряженных состояниях?
4. Какие состояния считаются опасным для хрупких материалов?
5. Какие состояния считаются опасным для пластичных материалов?
6. Что такое критерий прочности?

ГЛАВА 8 КРУЧЕНИЕ

8.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Кручение, это простое сопротивление стержня, при котором во всех его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие – крутящий момент M_K . Простейшие нагрузки, вызывающие состояние кручения, представляет система распределенных и сосредоточенных пар сил (рис. 8.1), которые называются скручивающими моментами.

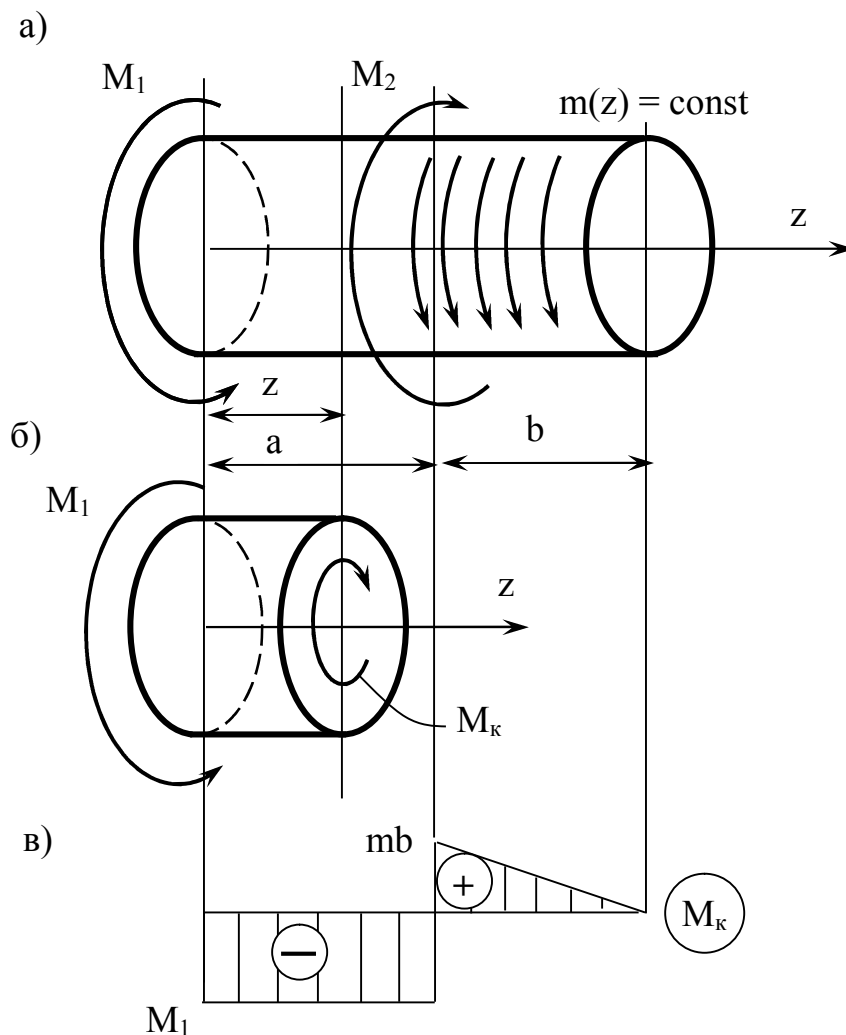


Рисунок 8.1 – Скручивающие нагрузки (а), метод сечений (б) и эпюра крутящих моментов (в)

Наиболее распространенными стержнями, испытывающими кручение, являются валы. Валом называют стержень, передающий мощность с помощью вращательного движения. В последующем изложении рассматриваемые стержни будут называться валами.

Валы бывают статически определимыми или неопределимыми. Далее будут обсуждаться только статически определимые конструкции. Это означает, что реакции внешних и внутренних связей можно определить с помощью только уравнений статики. Крутящие моменты в таких случаях можно определить с помощью метода сечений (см. рис. 8.1б). Значение крутящего момента в сечении Z определяются суммированием отсеченной нагрузки, действующей с одной стороны от расчетного сечения

$$M_K(z) = \sum \int_0^z m(z) dz = \sum \int_z^L m(z) dz. \quad (8.1)$$

Результаты определения крутящих моментов изображаются в виде их эпюры (см. рис. 8.1в).

8.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим задачу о кручении валов с круглыми поперечными сечениями. Опыты с подобными валами показывают, что их деформации при кручении обладают симметрией относительно продольной оси z (рис. 8.2).

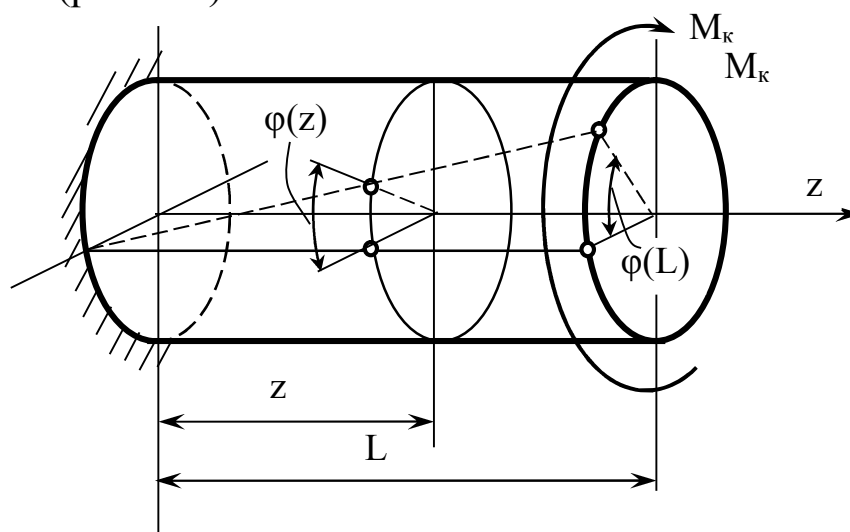


Рисунок 8.2 – Деформации вала при кручении

При изучении кручения круглого вала используются следующие допущения:

- поперечные сечения остаются плоскими и вращаются относительно продольной оси z как жесткое целое на углы $\varphi(z)$, которые называются углами закручивания;
- волокна вала испытывают деформации сдвига $\gamma(\rho)$, где ρ – расстояние от волокна до оси вала;
- волокна вала не меняют своей длины;
- соседние волокна не давят друг на друга.

Из этих допущений следует, что нормальные напряжения в поперечном сечении вала отсутствуют, но будут действовать касательные напряжения, вызванные сдвигами волокон.

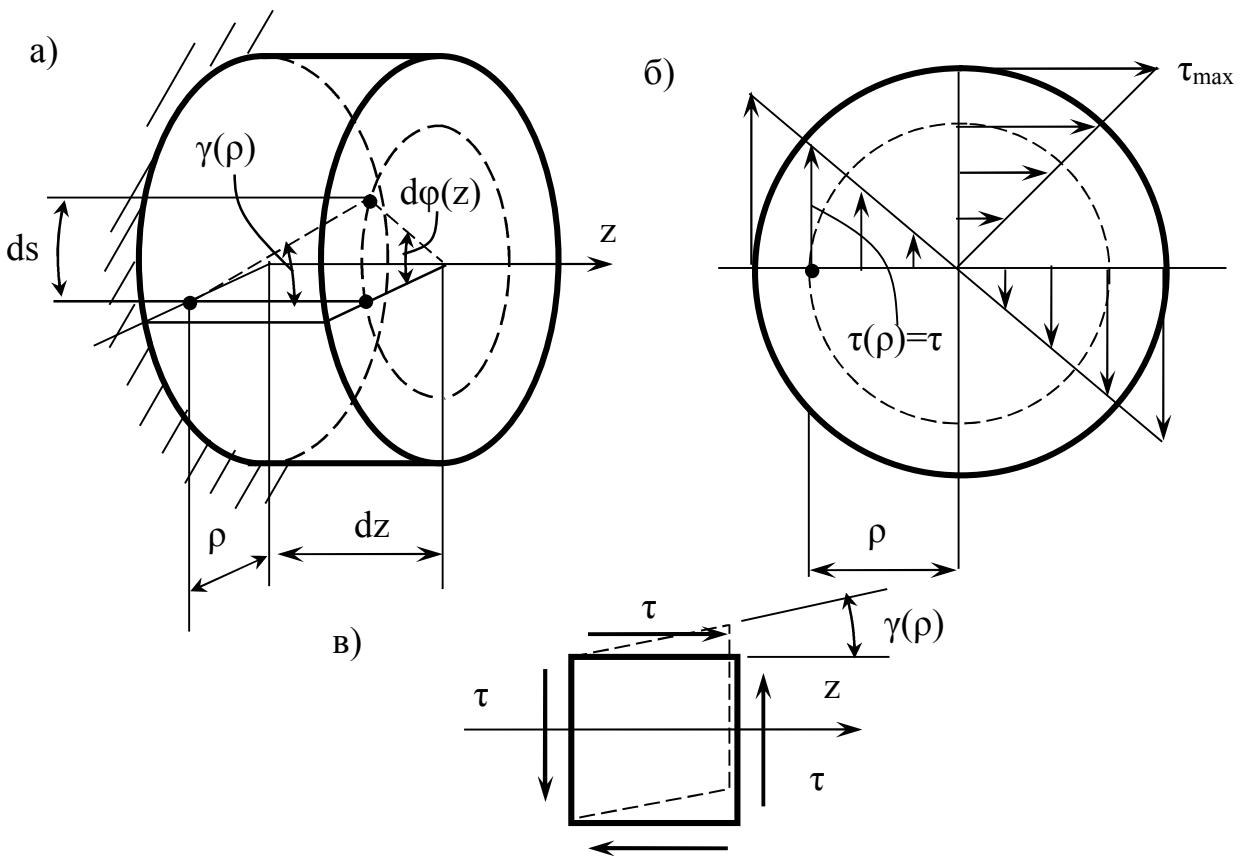


Рисунок 8.3 – Деформации (а), напряжения в поперечном сечении (б) и НДС элемента вала (в)

В точке вала возникает напряженно-деформированное состояние (НСД) чистого сдвига (см. рис. 8.3в). Положим, что между τ и γ существует линейная зависимость в виде $\tau = G\gamma$ (закон Гука второго рода), где G – модуль упругости второго рода.

Для нахождения напряжений крутящий момент M_K связывается с напряжениями τ статическим уравнением

$$M_K = \int_F \tau \rho dF = \int_F G \gamma dF. \quad (8.2)$$

Закон изменения углов сдвига $\gamma(\rho)$ определяется равенствами (см. рис. 8.3а) $ds = \rho d\varphi(z) = dz \gamma(\rho)$. Из этих равенств следует

$$\gamma(\rho) = \gamma = \frac{d\varphi(z)}{dz} \rho, \quad (8.3)$$

где $\frac{d\varphi(z)}{dz} = Q(z)$ – относительный (погонный) угол закручивания, который не зависит от ρ . После подстановки зависимости (8.3) в уравнение (8.2) получаем дифференциальное уравнение углов закручивания

$$M_K = \frac{d\varphi(z)}{dz} G \int_F \rho^2 dF = \frac{d\varphi(z)}{dz} G I_\rho. \quad (8.4)$$

После подстановки (8.4) в (8.3) и несложных преобразований получаем уравнение касательных напряжений

$$\tau = \frac{M_K}{I_\rho} \rho. \quad (8.5)$$

В пределах поперечного сечения в уравнении (8.5) переменной является только ρ и закон распределения напряжений τ будет линейным и осесимметричным (см. рис. 8.3б). Максимальные напряжения действуют в точках на контуре сечения (опасных точках) и определяются выражением

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_\rho} r = \frac{M_k}{W_\rho}, \quad (8.6)$$

где $r = \frac{D}{2}$ – радиус поперечного сечения; $W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$ – полярный момент сопротивления (момент сопротивления сечения при кручении).

При кручении расчетным деформациями считаются углы закручивания φ или их погонные значения θ . Значения углов закручивания можно определить интегрированием дифференциального уравнения (8.4). Например, интегрируя его разделением переменных, получим уравнение углов закручивания

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \int_0^z \frac{M(z)dz}{GI_\rho} = \varphi(0) + \Delta\varphi(z), \quad (8.7)$$

где $\varphi(0)$ - угол закручивания поперечного сечения вала в начале координат; $\Delta\varphi(z)$ - приращение углов закручивания на участке вала длиной z .

8.3 НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

В точках вала реализуется плоское напряженное состояние чистого сдвига. В этом случае действуют главные напряжения (рис. 8.4б) $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$.

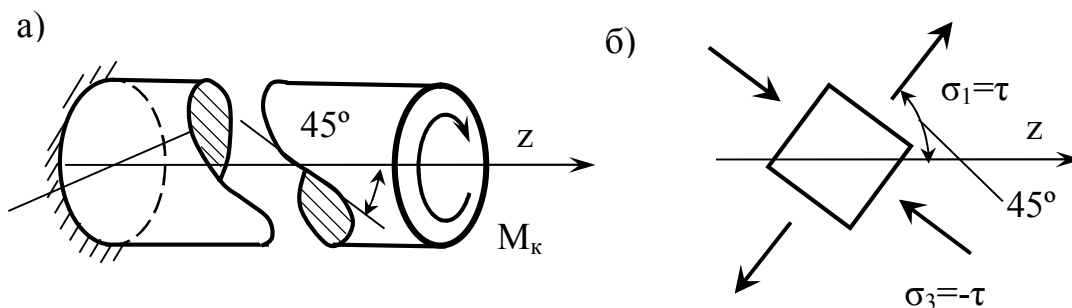


Рисунок 8.4 – Разрушение хрупких материалов (а) и главные напряжения (б) при кручении

В опытах на кручение реализуются два вида разрушения. Валы из пластичных материалов разрушаются срезом по площадкам действия максимальных касательных напряжений. Разрушение всегда начинается в точках на контуре сечения и поэтому они считаются опасными. Хрупкие материалы при кручении начинают разрушаться в тех же точках, но разрушение происходит отрывом. Поверхность разрушения, в начальный момент образования трещины отрыва, наклонена (см. рис. 8.4а) под углом 45° к продольной оси стержня.

8.4 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Проверки прочности при кручении производятся из учета того факта, что здесь реализуется плоское напряженное состояние, которое считается сложным и требует использования теорий прочности. В соответствии с методом допускаемых напряжений условие прочности при кручении принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (8.8)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение при кручении, которое назначается по одной из теорий прочности.

Если вал изготавливается из пластичных материалов, то допускаемое напряжение назначается по третьей или четвертой теории прочности. Например, по третьей теории

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (8.9)$$

Сравнивая (8.8) и (8.9), получаем условие назначения допускаемого касательного напряжения по третьей теории

$$[\tau]^{\text{III}} = 0.5[\sigma]. \quad (8.10)$$

Аналогичные процедуры по четвертой теории приводят к выражению $[\tau]^{\text{IV}} \approx 0,57[\sigma]$. Для валов из хрупких материалов обычно используется первая теория, которая приводит к выражению $[\tau]^{\text{I}} = [\sigma]$. На основании условия прочности (8.8) формулируется условие для подбора сечения вала

$$W_\rho \geq \frac{M_K^{\max}}{[\tau]}. \quad (8.11)$$

Замена W_ρ в правой части (8.11) на его выражения через диаметры D и d формулирует условие назначения этих диаметров.

Оценка жесткости вала производится по максимумам углов закручивания φ_{\max} или относительных углов закручивания θ_{\max}

$$\varphi_{\max} \leq [\varphi], \theta_{\max} \leq [\theta], \quad (8.12)$$

где $[\varphi], [\theta]$ - допускаемые значения деформаций, которые назначаются по отраслевым нормам проектирования валов.

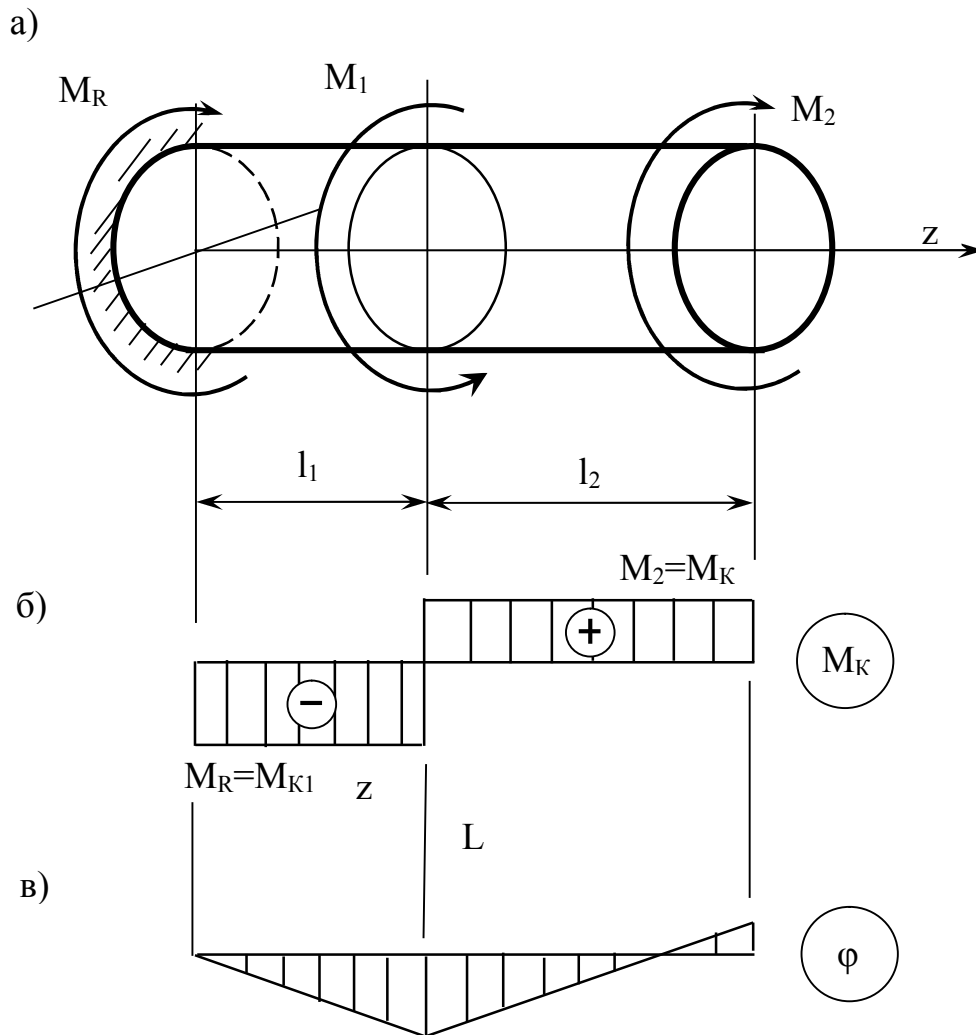


Рисунок 8.5 – Нагрузки (а); эпюры крутящих моментов (б) и углов закручивания (в)

В большинстве реальных случаев валы работают при сосредоточенных скручивающих нагрузках (см. рис. 8.5а). При таких нагрузках эпюры крутящих моментов M_K имеют кусочно-постоянный вид (см. рис. 8.5б). Используя выражение (8.7), получаем формулу для определения приращения угла закручивания на участке « i » длиной l_i :

$$\Delta\varphi_i = \frac{M_K^i l_i}{GI_\rho}. \quad (8.13)$$

После определения приращений углов закручивания по формуле (8.13) значения углов закручивания на границах участков находят суммированием приращений с построением эпюры $\varphi(z)$ (см. рис. 8.5в). По условиям жесткости (8.12) можно подбирать сечение вала подобно условию (8.11).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое крутящий момент как он определяется?
2. Опишите закон распределения напряжений в круглом поперечном сечении вала.
3. В каких точках вала действуют максимальные напряжения и как они определяются?
4. Как выполняется проверка прочности при кручении?
5. Назовите основные допущения при кручении.
6. Опишите особенности разрушения пластичных и хрупких материалов при кручении.
7. Как назначаются допускаемые напряжения при кручении?
8. В каком порядке определяются углы закручивания, и строится их эпюра?
9. Как записываются условия жесткости при кручении?
10. В каком порядке подбирается диаметр вала при кручении?

ГЛАВА 9 ИЗГИБ

9.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Изгибом называют состояние стержня, когда в его поперечных сечениях основными внутренними усилиями являются изгибающие моменты M_x и M_y (рис. 9.1).

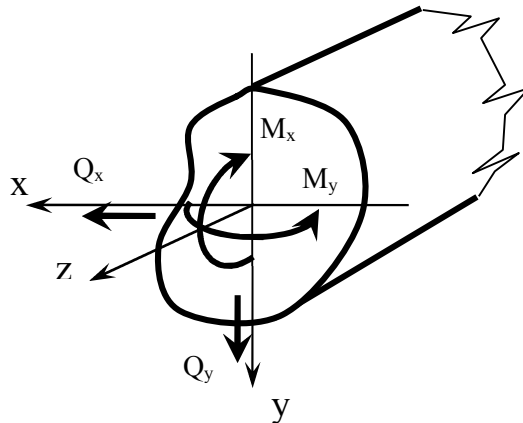


Рисунок 9.1 – Изгибающие моменты и поперечные силы

Изгиб сопровождается искривлением оси стержня, которая в этом случае называется изогнутой осью (упругой линией). В зависимости от приложенной нагрузки и возникающих изгибающих моментов существуют разные типы изгибов.

Если нагрузка действует в одной плоскости, содержащей продольную ось стержня, изгиб называют плоским. Случай, когда плоскости действия изгибающего момента и изогнутой оси совпадают, называют прямым (простым) изгибом. Косым (сложным) называют изгиб, при котором действуют оба изгибающих момента, а изогнутая ось представляет пространственную кривую. В частном случае плоского косого изгиба плоскость действия изгибающего момента не совпадает с плоскостью изогнутой оси.

Чистым считается изгиб, при котором во всех поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты. Если в поперечных сечениях действуют изгибающие моменты и поперечные силы, то изгиб называется поперечным.

В данной главе будет рассматриваться только прямой изгиб. Наиболее простой стержневой конструкцией, работающей на изгиб, является балка. Обычно это горизонтальный стержень, опертый на

неподвижное горизонтальное основание, и воспринимающий вертикальную нагрузку. Внешние связи балок принято называть опорами. На практике обычно используют три типа опор (рис. 9.2).

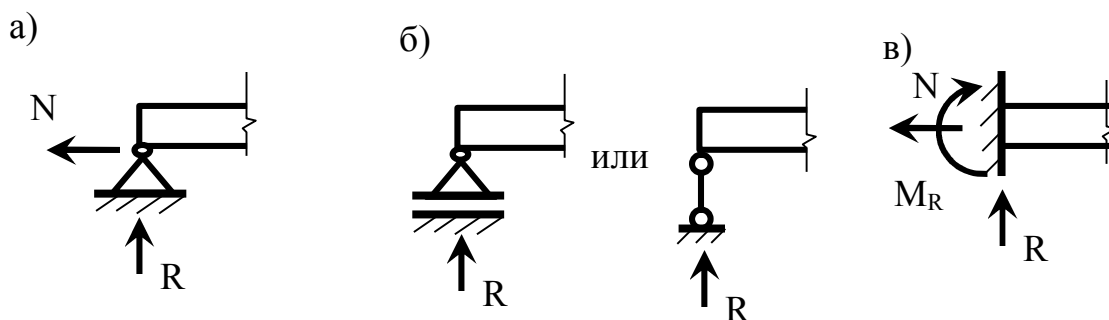


Рисунок 9.2 – Балочные опоры: неподвижный шарнир (а), подвижный шарнир (б) и заделка (в)

Шарнирная неподвижная опора – не допускает поступательных перемещений опорного сечения балки, но допускает повороты в плоскости изгиба (см. рис. 9.2а). В этой опоре возникают две реактивных силы (опорные реакции) – вертикальная R и горизонтальная N .

Шарнирная подвижная опора – не допускает только вертикальных поступательных перемещений опорного сечения и создает одну вертикальную реакцию R (см. рис. 9.2б).

Заделка – опора, которая не допускает никаких перемещений. В заделке возникают реактивные силы R , N и реактивный момент M_R (см. рис. 9.2в).

В зависимости от конструкции балок и их опор различают их простые и составные (сложные) варианты. Простая балка состоит из одного горизонтального бруса, а сложная может состоять из двух и более брусьев, соединенных между собой шарнирами или ползунами.

Простые балки имеют следующие названия:

- балка на двух опорах (рис. 9.3а);
- консольная балка (консоль) (рис. 9.3б);
- консольная балка на двух опорах (рис. 9.3в).

Балки, как и любые другие конструкции, могут быть статически определимыми и статически неопределимыми. В случаях статически определимых балок реакции опор могут быть определены только из уравнений статики. Например, все балки, приведенные на

рисунке 9.3 – статически определимые. Отметим, что в данной главе рассматриваются только статически определимые балки.

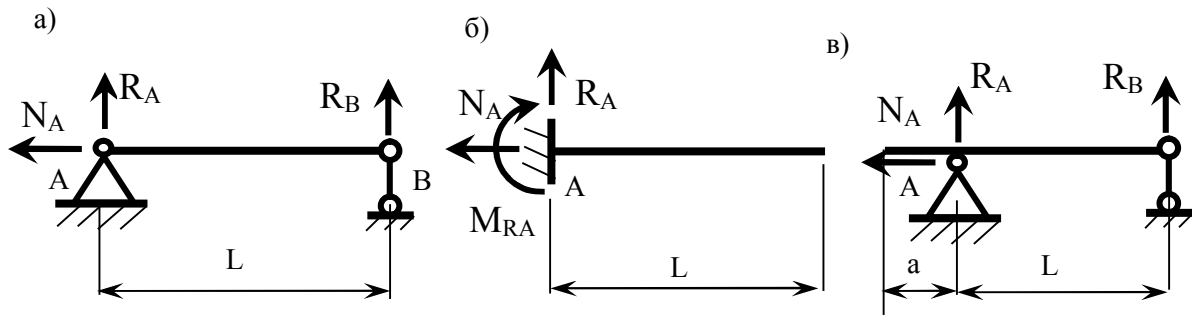


Рисунок 9.3 – Простые балки: на двух опорах (а), консоль (б) и одноконсольная на двух опорах

9.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

В случаях статически определимых балок решение вопроса о внутренних усилиях обычно начинается с нахождения опорных реакций. Для этого составляются стандартные уравнения статики для всей балки или любой ее части, если балка составная.

После определения опорных реакций нахождение поперечных сил $Q_y = Q$ и изгибающих моментов $M_x = M$ производится методом сечений. Для этого составляются два уравнения равновесия для всех сил, действующих с одной стороны от расчетного сечения z (рис. 9.4) в следующем виде:

$$\sum y = 0; \sum m_x = 0. \quad (9.1)$$

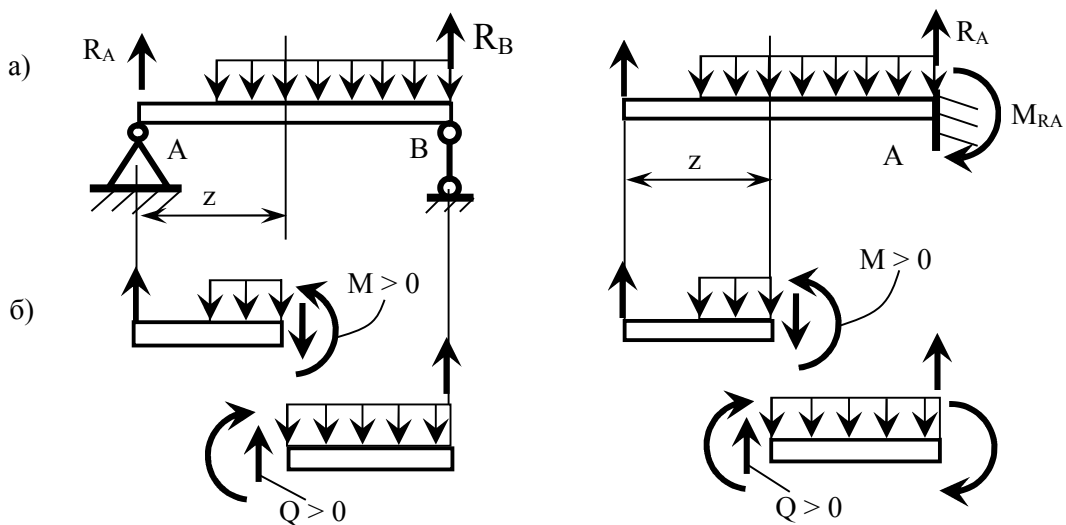


Рисунок 9.4 – Расчетные сечения (а) и отсеченные части балки (б)

При использовании уравнений (9.1) возможны два пути. На первом отсеченные части балки изображаются в виде, показанном на рисунке 9.4б. Отметим, что направления Q и M должны быть показаны положительными, как на рисунке 9.4б. После нахождения Q и M их знаки трактуются стандартным для статики образом.

На втором пути уравнения (9.1) преобразуются к виду

$$Q = \sum P_i, M = \sum m_z(P_i). \quad (9.2)$$

Формулы (9.2) реализуют следующие правила:

- поперечная сила $Q(z)$ определяется как сумма проекций отсеченных нагрузок (слева или справа) на вертикальную ось y ;
- изгибающий момент $M(z)$ определяется как сумма моментов отсеченных нагрузок относительно расчетного сечения.

При использовании второго пути необходимо использовать правила знаков, иллюстрированные на рисунке 9.5.

Этот рисунок можно трактовать следующим образом:

- отсеченные нагрузки, сдвигающие левую часть балки вверх, а правую вниз, учитываются при нахождении Q со знаком «плюс»;
- отсеченные нагрузки, загибающие отсеченные части балки вверх, и растягивающие нижние волокна, учитываются при нахождении M со знаком «плюс».

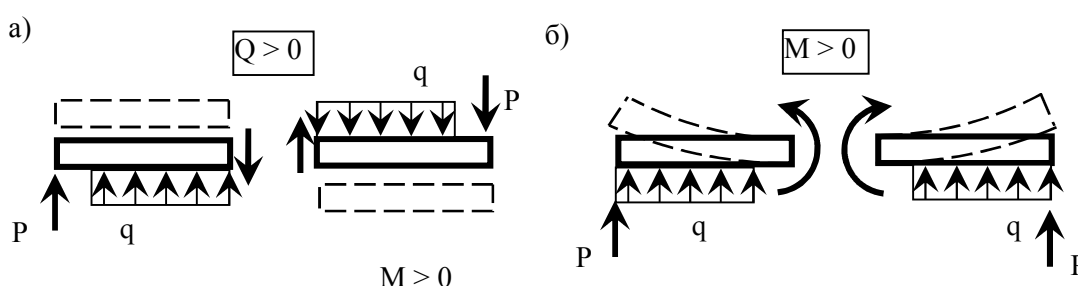


Рисунок 9.5 – Нагрузки, вызывающие положительные поперечные силы (а) и изгибающие моменты (б)

Итоги определения внутренних усилий изображаются в виде их эпюр. В данном курсе положительные ординаты на эпюре Q принято откладывать сверху, а на эпюре M – снизу, на растянутом волокне (рис. 9.6).

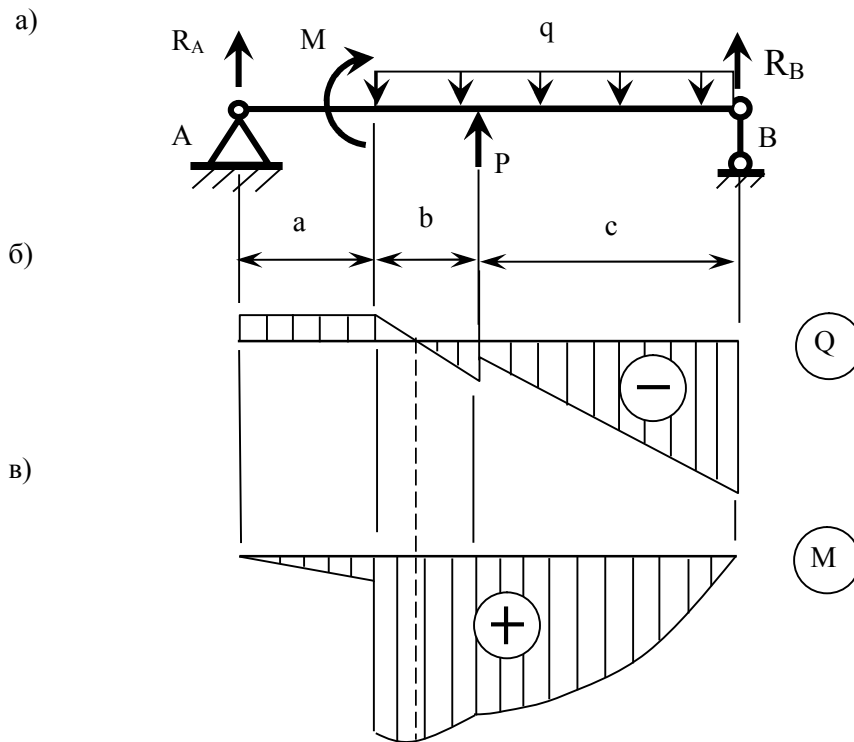


Рисунок 9.6 – Нагрузки (а); эпюры Q (б) и M (в)

9.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Между эпюрами Q и M существует общая зависимость, которая определяется дифференциальными уравнениями равновесия. Для вывода этой зависимости рассмотрим условия равновесия элементарного участка балки длиной dz (рис. 9.7).

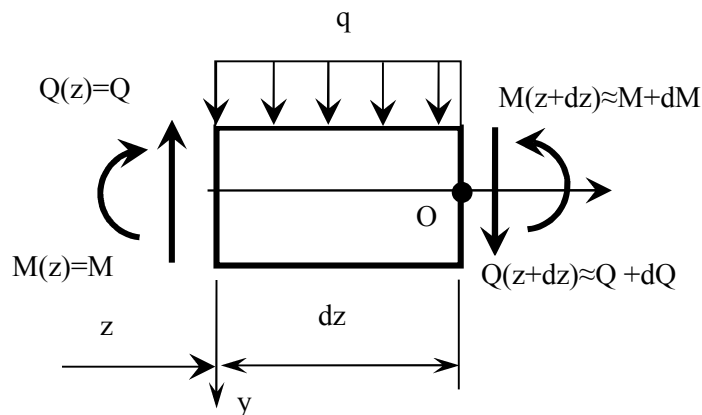


Рисунок 9.7 – Нагрузка и внутренние усилия на элементарном участке балки

Уравнения равновесия для этого участка имеют вид

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; -Q + (Q + dQ) - qdz = 0; \\ \sum m_0 &= 0; -M + (M + dM) + q \frac{dz^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

После преобразований эти уравнения принимают форму

$$\frac{dQ}{dz} = -q; \quad \frac{dM}{dz} = Q. \quad (9.4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия (9.4) играют важную роль в теории изгиба и имеют разнообразное применение. В данном параграфе они используются для формулировки правил контроля эпюр Q и M , которые сводятся к следующим утверждениям.

1. На участке балки, где $q = 0$ (см. участок «а» на рис. 9.6), значения Q постоянны, а значения M меняются линейно. Если $Q > 0$, то значения M увеличиваются. В частном случае, при $Q = 0$, эпюра M постоянна. Этот случай является чистым прямым изгибом.

2. На участке балки, где $q = const > 0$, эпюра Q линейно убывает, а эпюра M является квадратной параболой выгнутой в сторону действия нагрузки q (см. участки «b» и «с» на рис. 9.6). Если на подобном участке есть сечение, в котором выполняется условие $Q = 0$, то в этом сечении на эпюре M будет вершина параболы с аналитическим максимумом (см. участок «b» на рис. 9.6).

3. В сечении, где приложена сосредоточенная сила $P < 0$ (см. сечение на границе участков «b» и «с» на рис. 9.6), на эпюре Q будет положительный скачок равный P , а на эпюре M – излом.

4. В сечении, где приложен момент $M > 0$ (см. сечение на границе участков «а» и «b» на рис. 9.6), на эпюре Q изменений нет, а на эпюре M будет положительный скачок, равный M .

9.4 НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО БРУСА

Рассмотрим задачу определения напряжений при чистом прямом изгибе. Опыты показывают, что в таком случае изгиба деформации балки имеют сравнительно простой вид (рис. 9.8).

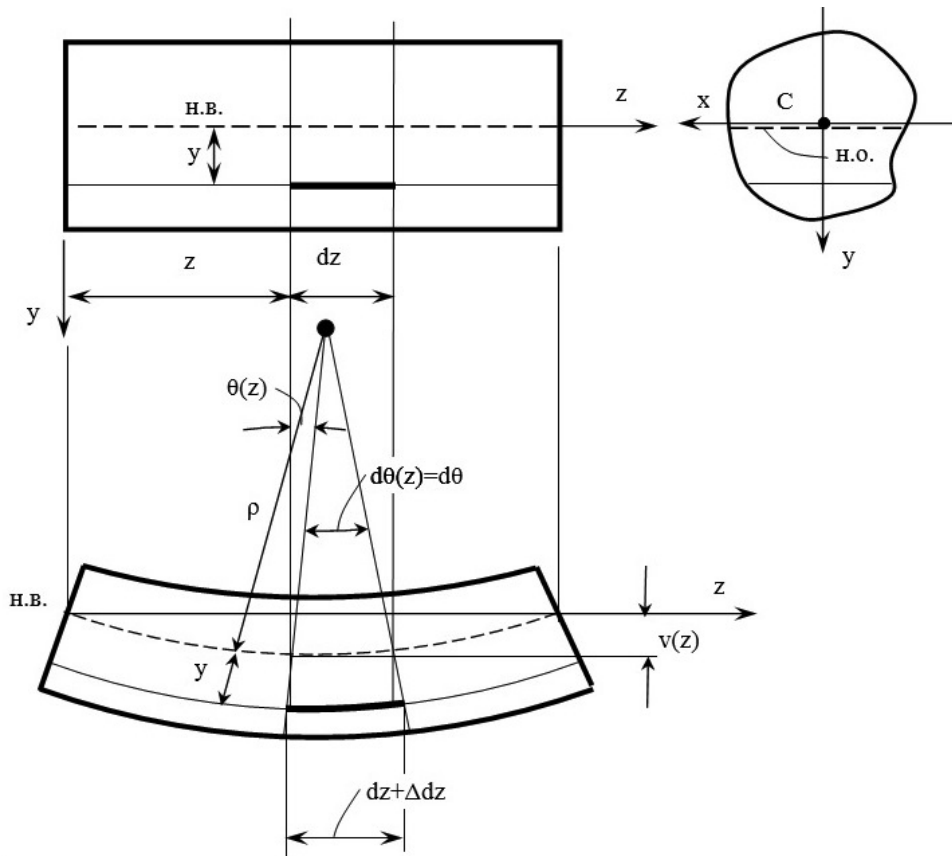


Рисунок 9.8 – Деформации балки при чистом прямом изгибе

Законы деформирования балки и ее элементов сводятся к следующим допущениям (гипотезам).

1. Волокна балки приобретают форму концентрических дуг окружностей.

2. Поперечные сечения балки остаются плоскими и ортогональными к изогнутой оси балки.

3. В балке имеется нейтральное волокно (н.в.), которое не испытывает деформаций удлинения.

4. Соседние волокна балки не давят друг на друга.

Введенные гипотезы позволяют сделать ряд выводов. Касательные напряжения в поперечном сечении балки равны нулю, что следует из допущения 2. Следовательно, в поперечных сечениях будут действовать только нормальные напряжения σ , которые связаны с продольными деформациями волокон.

Из допущения 4 следует, что каждое отдельное волокно испытывает состояние осевого растяжения или сжатия. След нейтрального волокна в плоскости поперечного сечения образует прямую линию перпендикулярную плоскости изгиба. Эта линия обладает тем

свойством, что нормальные напряжения на этой линии равны нулю. В дальнейшем эту прямую будем называть нейтральной осью (н.о.) и связывать с поперечной осью координат x .

Допущение 2 приводит к законам распределения продольных деформаций волокон и нормальных напряжений. Поперечные сечения вращаются вокруг н.о. и волокна, равноудаленные от н.о., удлиняются одинаково. Нормальные напряжения распределены в сечении по закону $\sigma(y)$, т.е. зависят только от расстояния y расчетной точки до оси x (н.о.). Этот закон в общем виде проиллюстрирован рисунке 9.9.

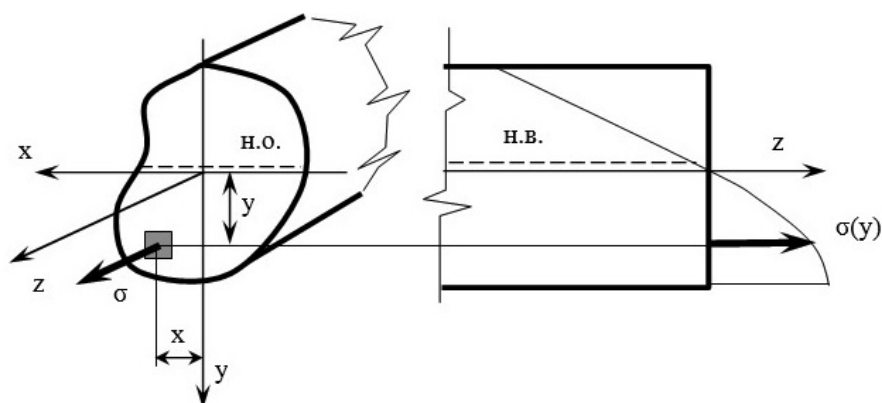


Рисунок 9.9 – Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении балки

Определение напряжений, как задача определения реакций внутренних связей, является статически неопределимой. Для ее решения используют три группы уравнений: статические, геометрические и физические

1. Статические уравнения описывают связи напряжений с внутренними усилиями. Из шести уравнений связи в рассматриваемой задаче, только три имеют нетривиальный смысл.

$$N = 0 = \int_F \sigma dF; M_x = M = \int_F \sigma y dF; M_y = 0 = \int_F \sigma x dF. \quad (9.4)$$

2. Геометрическая сторона задачи состоит в установлении закона изменения продольных деформаций волокон по высоте сечения балки. Введем радиус кривизны нейтрального волокна ρ (см. рис. 9.8), который в условиях поставленной задачи будет некоторой константой.

Тогда радиус кривизны расчетного волокна $\rho(y) = \rho + y$. Начальная длина волокон в пределах элемента балки $dz = \rho d\theta$, где $d\theta$ – приращение углов поворота сечений балки на отрезке dz . Длина расчетного волокна после деформации определяется подобным образом: $z_1 = dz + \Delta dz = \rho(y)d\theta = (\rho + y)d\theta$.

Относительная продольная деформация расчетного волокна

$$\varepsilon(y) = \varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{dz_1 - dz}{dz} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (9.5)$$

3. Закон связи напряжений с деформациями (физический закон) примем линейным в форме закона Гука. Практика расчетов балок по допускаемым напряжениям говорит о том, что расчетные напряжения не достигают границ применимости этого закона. Тогда уравнение нормальных напряжений принимает вид

$$\sigma(y) = \sigma = E \frac{y}{\rho}, \quad (9.6)$$

где E – модуль упругости первого рода материала конструкции (модуль упругости при растяжении).

Подставляя (9.6) в (9.4) и учитывая, что E и ρ здесь постоянны, получим ряд уравнений

$$N = 0 = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = \frac{E}{\rho} S_x; \quad M = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} I_x; \quad 0 = \frac{E}{\rho} \int_F xy dF = \frac{E}{\rho} I_{xy}. \quad (9.7)$$

где $S_x = 0$ – статический момент поперечного сечения относительно н.о. (оси x), которая проходит через центр тяжести C сечения; $I_{xy} = 0$ – центробежный момент инерции поперечного сечения относительно осей x и y , которые являются главными; $I_x = I_y$ – момент инерции поперечного сечения относительно н.о.

Из этих результатов следует важный вывод – чистый изгиб будет прямым, если изгибающий момент M действует в одной из главных плоскостей стержня. Главными называются плоскости, которые содержат продольную ось z и одну из главных центральных осей поперечного сечения x или y .

Уравнение нормальных напряжений окончательно принимает вид

$$\sigma = \frac{M}{I} y. \quad (9.8)$$

Формула (9.8) описывает линейный закон распределения σ по высоте сечения. Особый интерес представляют максимальные растягивающие $\sigma_{\max} = \sigma_I$ и максимальные сжимающие $\sigma_{\min} = \sigma_{II}$ нормальные напряжения, которые возникают в точках I и II наиболее удаленных от н.о. (рис. 9.10).

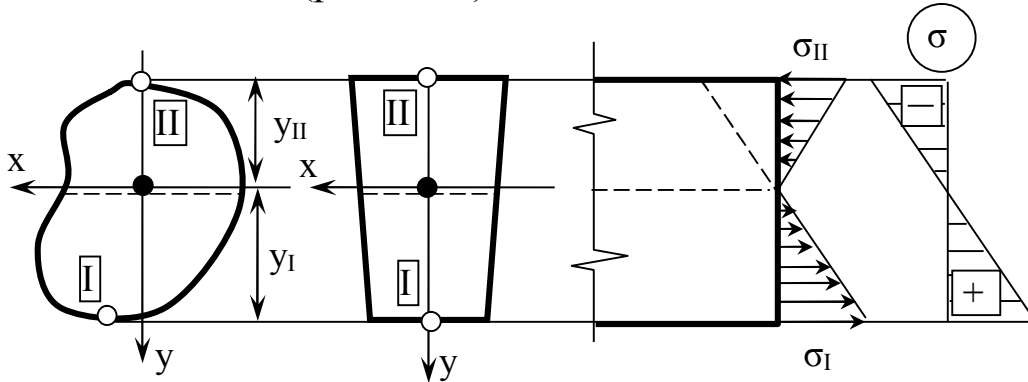


Рисунок 9.10 – Распределение нормальных напряжений при прямом изгибе

Точки I и II считаются опасными при чистом прямом изгибе. Обычно напряжения в этих точках находят с использованием специальных геометрических характеристик - моментов сопротивления сечения при изгибе относительно растянутого волокна I или сжатого II волокон

$$W_I = \frac{I}{y_I}; \quad W_{II} = \frac{I}{y_{II}}, \quad (9.9)$$

где y_I и y_{II} - расстояния от опасных точек до н.о. (см. рис. 9.10).

С использованием выражений (9.9) формулы для нахождения модульных значений наибольших напряжений принимают вид

$$\sigma_I = \frac{M}{W_I}; \quad \sigma_{II} = \frac{M}{W_{II}}. \quad (9.10)$$

9.5 КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО БРУСА

При поперечном изгибе кроме изгибающих моментов M в поперечных сечениях действуют поперечные силы Q . Напомним, что в соответствии с методом сечений, поперечная сила есть проекция главного вектора напряжений, действующих в сечении, на верти-

кальную ось и равна сумме проекций касательных напряжений τ на эту же ось (рис. 9.11).

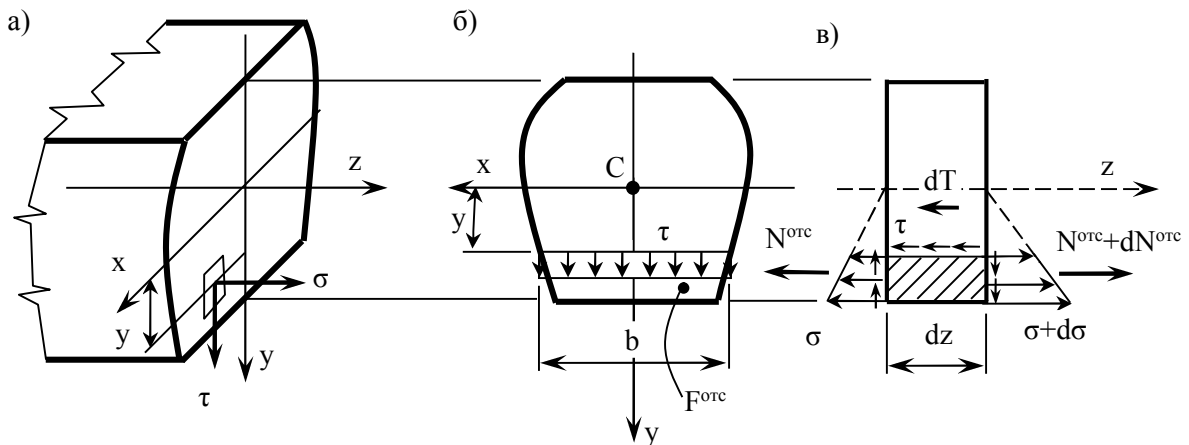


Рисунок 9.11 – Напряжения при поперечном изгибе (а) и равновесие отсеченной части балки (б)

Определение касательных напряжений в общем случае изгиба является нетривиальным и требует строгих решений на основе теорий упругости или пластичности. В инженерной практике обычно используют приближенное решение, предложенное Д. И. Журавским. Оно основано на использовании условия равновесия «отсеченной» части балки (см. рис. 9.11б, в). Отсеченная часть образована двумя поперечными сечениями z и $z + dz$ и горизонтальным сечением y . На рисунке 9.11в отсеченная часть выделена штриховкой.

Решение основано на предположениях о постоянстве Q и равномерном распределении вертикальной компоненты касательных напряжений по ширине сечения b .

Равнодействующая нормальных напряжений в отсеченной части поперечного сечения z определяется выражением

$$N^{отс} = \int_{F^{отс}} \sigma dF = \frac{M}{I} \int_{F^{отс}} y dF = \frac{M}{I} S^{отс},$$

где $S^{отс}$ - статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно н. о. Аналогично записывается

$$N^{отс} + dN^{отс} = \frac{M + dM}{I} S^{отс}.$$

Равнодействующая касательных напряжений в горизонтальном сечении равна $T = \tau b dz$. Уравнение проекций сил, действующих на отсеченную часть балки, на продольную ось z имеет вид

$$N^{\text{отс}} + (N^{\text{отс}} + dN^{\text{отс}}) - T = 0.$$

После замены компонент этого уравнения на напряжения и учета второго уравнения (9.4) получаем формулу для определения касательных напряжений (формулу Журавского):

$$\tau = \frac{QS^{\text{отс}}}{Ib}. \quad (9.11)$$

Анализ формулы (9.11) показывает, что касательные напряжения нелинейно меняются по высоте сечения (рис. 9.12).

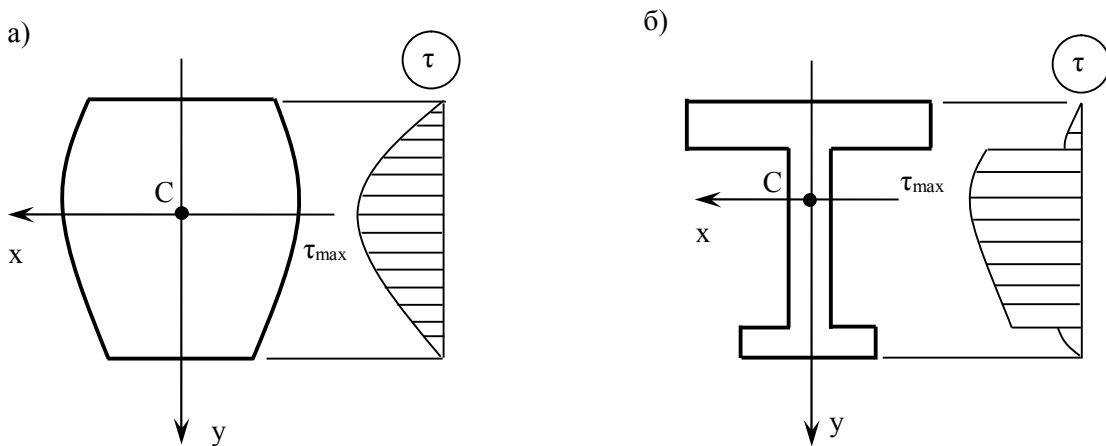


Рисунок 9.12 – Эюры τ в сечениях с непрерывным (а) и скачкообразным (б) изменениями их ширины

Важными являются следующие свойства распределения τ :

- в точках I и II, наиболее удаленных от н.о., они равны нулю;
- максимальные значения τ действуют в окрестности н.о.

9.6 ПОЛНАЯ ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ. ОПАСНЫЕ ТОЧКИ И ОПАСНЫЕ СЕЧЕНИЯ

При анализе напряженных состояний точек балок и проверке прочности исходят из упрощающих допущений о том, что в точке на плоскости поперечного сечения действуют нормальные $\sigma = \sigma_z$ и касательные $\tau = \tau_{yz}$ напряжения. Остальными компонентами полного тензора напряжений пренебрегают ввиду их малости. Компо-

ненты σ и τ определяются соответственно по формулам (9.8) и (9.11).

При таких упрощениях напряженное состояние точки балки рассматривается как неполное плоское (рис. 9.13б). Анализ вопросов прочности удобно вести с применением главных напряжений.

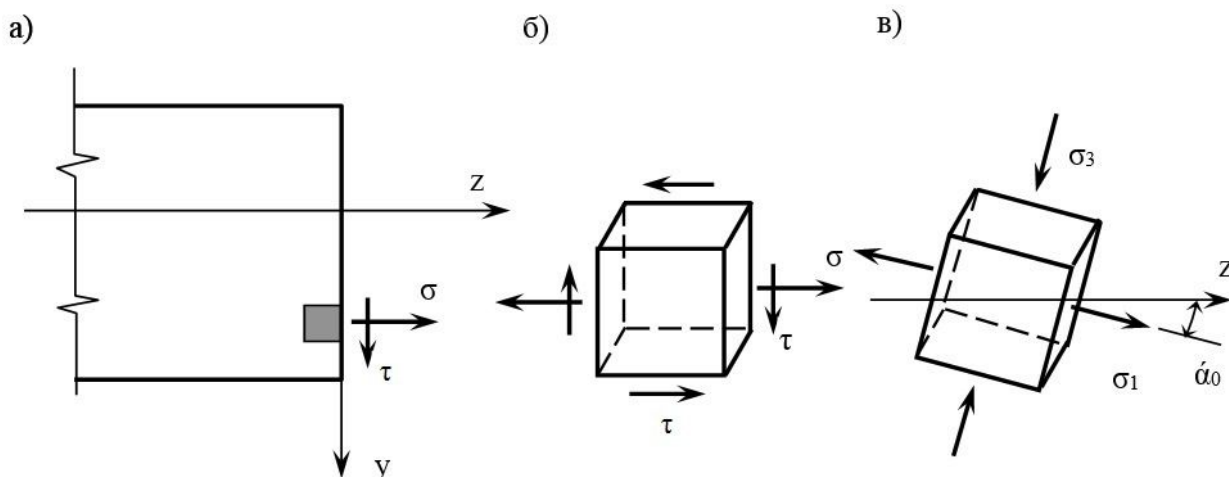


Рисунок 9.13 – Напряжения в поперечном сечении (а), напряженное состояние точки балки (б) и главные напряжения (в)

Используя теорию плоского напряженного состояния, получаем формулы для определения главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (9.12)$$

Направление одной из главных нормалей I или 3 определяется углом ее поворота α_0 относительно продольной оси z в плоскости изгиба:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{\tau}{\sigma} \right). \quad (9.13)$$

Отметим, что в точках I и II реализуются простые напряженные состояния одноосных растяжения или сжатия. Условия прочности в этих точках можно записать следующим образом

$$\sigma_I = \frac{M_{\max}}{W_I} \leq [\sigma]_+; \quad \sigma_{II} = \frac{M_{\max}}{W_{II}} \leq [\sigma]_-, \quad (9.14)$$

где M_{\max} – максимальное по модулю значение изгибающего момента; $[\sigma]_+$ и $[\sigma]_-$ – допускаемые напряжения материала конструкции при одноосных растяжении и сжатии.

Сечения, в которых действуют максимальные изгибающие моменты, считаются опасными. Опыт расчетов балок на прочность показывает, что такие сечения почти всегда наиболее опасны. Это утверждение основано на том факте, что касательные напряжения в балках с шириной сечения одного порядка с его высотой, значения максимальных касательных напряжений намного меньше максимальных нормальных.

Вторым типом опасных сечений считаются сечения, в которых действуют максимальные поперечные силы. Опасные точки в этих сечениях расположены в его центре тяжести C , а проверка прочности производится в форме проверки на срез:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_C^{\text{отс}}}{Ib} \leq [\tau], \quad (9.15)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение материала на срез, которое назначается по правилам, изложенным в разделе о кручении.

Иногда, но сравнительно редко, возникает необходимость учета всех главных напряжений (полная проверка прочности). Примером таких случаев может быть сечение двутавровой формы с небольшой толщиной стенки (рис. 9.14). В таких сечениях опасными могут быть точки III на границе полки и стенки. Комбинация не максимальных, но близких к своим максимумам, σ и τ , могут вызвать разрушения. Сечения с такими опасными точками должны испытывать внутренние усилия близкие к максимальным.

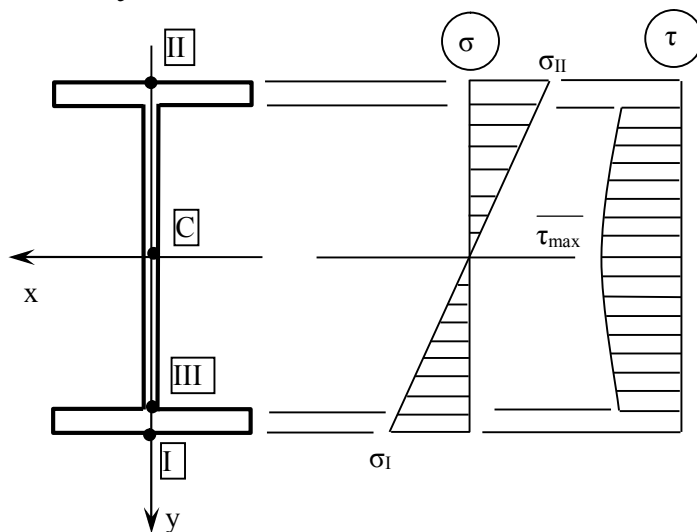


Рисунок 9.14 – Опасные точки двутаврового сечения

При полной проверке прочности с использованием классических теорий прочности условия прочности записываются в следующих формах:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ЭКВ}}^I &= \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_+; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].\end{aligned}\tag{9.16}$$

При подборе сечения используется метод последовательных приближений. Начальные значения размеров сечения с заданной формой находят из условия прочности в точках I и II, переписанных в форме

$$W_I \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]_+}; \quad W_{II} \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]_-}.\tag{9.17}$$

После вычисления правых частей (9.17) назначаются такие размеры сечения, которые удовлетворяют этим условиям.

Если есть опасения, что не все условия прочности удовлетворяются, то производится полная проверка прочности начальных размеров во всех опасных точках. Если хотя бы одно условие прочности не удовлетворяется, то производится увеличение размеров сечения и повторяется полная проверка прочности с новыми размерами. Процедуры увеличения размеров и полной проверки прочности повторяются до полного удовлетворения всех условий прочности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется поперечной силой и изгибающим моментом?
2. Что называют балкой?
3. Опишите типы балочных опор и их реакции.
4. Как определяются величины опорных реакций?
5. Как используется метод сечений в теории изгиба?
6. Какие допущения используются в теории чистого изгиба?
7. Сформулируйте правила контроля эпюр внутренних усилий.

ГЛАВА 10 ДЕФОРМАЦИИ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

10.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной главе деформации балки будут рассматриваться как изменение положений точек балки и ее основных элементов при прямом изгибе. Под такими элементами понимаются волокна и поперечные сечения.

Точное решение задачи об определении перемещений точек балки выполнить достаточно сложно. С точки зрения инженерной практики основным интересом представляются перемещения точек балки в плоскости изгиба. В нашем случае это плоскость yOz . Как правило, основными считаются поступательные перемещения в направлении оси y (по вертикали). В теории изгиба их называют прогибами (рис. 10.1а), и их максимальная величина f ограничивается нормами эксплуатации балок.

В большинстве случаев прогибы балки должны удовлетворять условию жесткости в форме

$$f \leq [f] = \left(\frac{1}{100} \div \frac{1}{600} \right) l, \quad (10.1)$$

где l – характерный продольный размер балки, обычно ее длина.

Практика изгиба показывает, что из двух внутренних усилий – поперечной силы Q и изгибающего момента M , наиболее значимыми является последний. Вклад поперечных сил в перемещения обычно не превышает $(1 \div 2)\%$ от вклада изгибающих моментов. Поэтому в задаче определения перемещений влиянием поперечных сил обычно пренебрегают.

Если учитываются только изгибающие моменты то, в соответствии с теорией чистого изгиба, полагается, что поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси балки. При таких упрощениях задача определения перемещений сводится к нахождению двух величин: прогиба центра тяжести поперечного сечения балки $v(z)$ и угла поворота поперечного сечения в плоскости изгиба $\theta(z)$.

Выполнение условия жесткости (10.1) приводит к тому, что максимальные углы поворота сечений не превышают $1 \div 2$ градусов.

Это свойство позволяет еще более упростить схему деформирования балки.

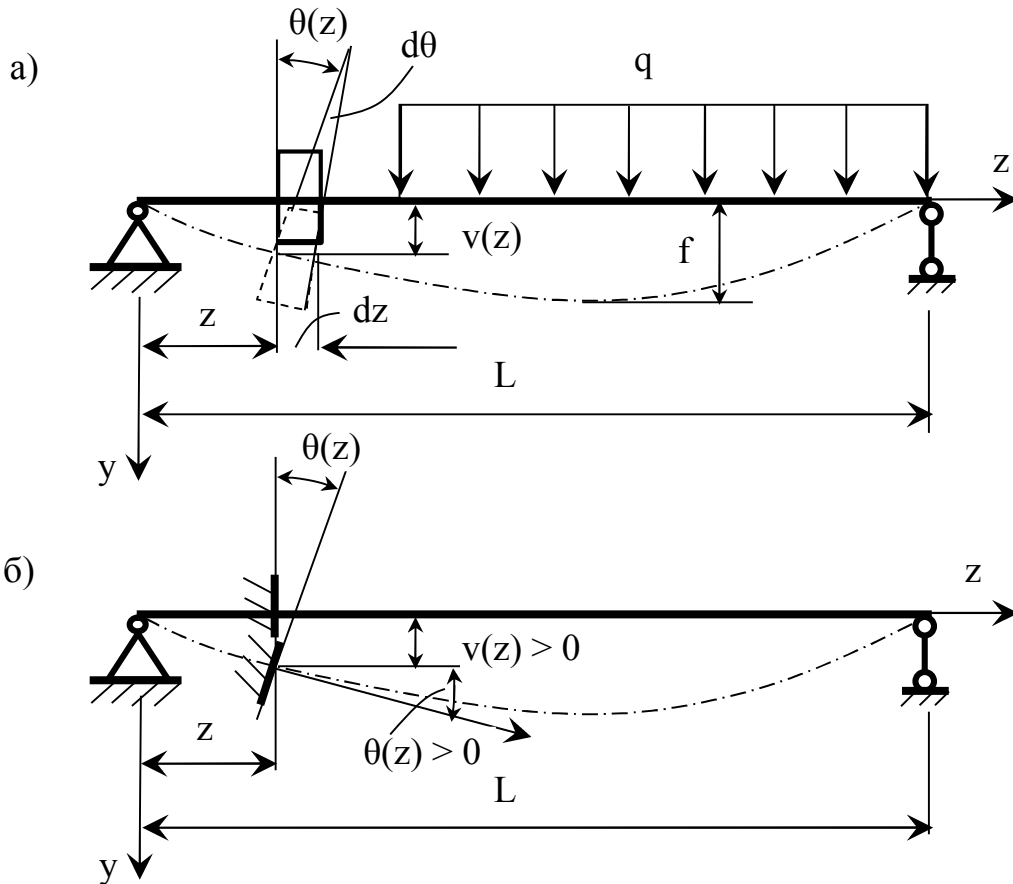


Рисунок 10.1 – Перемещения при изгибе (а) и их схематизация (б)

В соответствии со схемой на рисунке 10.1б углы поворота сечения и нормали повернутого сечения относительно оси z равны. Так как повернутая нормаль касательна к изогнутой оси балки, то функции прогибов $v(z)$ и углов поворота $\theta(z)$ при малых углах поворота связываются дифференциальным уравнением

$$\tan \theta(z) \approx \theta(z) = \frac{dv(z)}{dz}. \quad (10.2)$$

Из (10.2) следует, что из двух искомых функций $v(z)$ и $\theta(z)$, одна из них становится основной, а вторая определяется интегрированием или дифференцированием. Чаще всего основной является функция прогибов $v(z)$.

10.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Функцию прогибов часто называют уравнением изогнутой оси балки. Для его нахождения используем второе уравнение (9.7), которое запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta(z)}{dz} = \pm \frac{M(z)}{EI}. \quad (10.3)$$

Уравнение (10.3) можно определить как дифференциальное уравнение углов поворота сечений балки. Знак в его правой части выбирается в зависимости принятых правил знаков изгибающих моментов и перемещений сечений. В соответствии с рисунком 10.1б положительный прогиб v направлен вдоль оси y (вниз). Положительным считается угол поворота θ при вращении сечения по часовой стрелке. Так как положительный изгибающий момент уменьшает угол поворота, то в (10.3) будет знак «-».

В результате возникает система двух дифференциальных уравнений первого порядка, которая в упрощенном виде запишем следующим образом:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = -\frac{M}{EI}; \quad v' = \frac{dv}{dz} = \theta. \quad (10.4)$$

Таким образом, задача определения перемещений $v(z)$ и $\theta(z)$ сводится к последовательному интегрированию системы дифференциальных уравнений (10.4). Иногда удобно свести систему (10.4) к одному уравнению относительно функции прогибов. После повторного дифференцирования второго уравнения (10.4) и замены через первое уравнение получается дифференциальное уравнение прогибов или дифференциальное уравнение изогнутой оси балки второго порядка:

$$v'' = -\frac{M}{EI}. \quad (10.5)$$

Дифференцируя (10.5) еще два раза и делая замену в правой части результата дифференцирования с учетом дифференциальных уравнений равновесия (9.4) получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки четвертого порядка

$$v^{IV} = -\frac{M''}{EI} = \frac{q}{EI}. \quad (10.6)$$

Отметим, что уравнение (10.6) в приведенном виде справедливо при $EI = \text{const}$ и только такие случаи изгиба рассматриваются в данной главе. Уравнение (10.6) используется, например, при решении задач изгиба балок на упругом основании.

В обобщенном виде интегралы системы (10.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= -\frac{1}{EI} \int M(z) dz + C_1; \\ v(z) &= \int \theta(z) dz + C_2 = -\frac{1}{EI} \int dz \int M(z) dz + C_1 + C_2. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть найдены из граничных (начальных в математике) условий задачи. Граничные условия формулируются с помощью сведений о перемещениях на опорах балки. На рисунке 10.2 приведены некоторые схемы простых балок и соответствующие их опорам граничные условия.

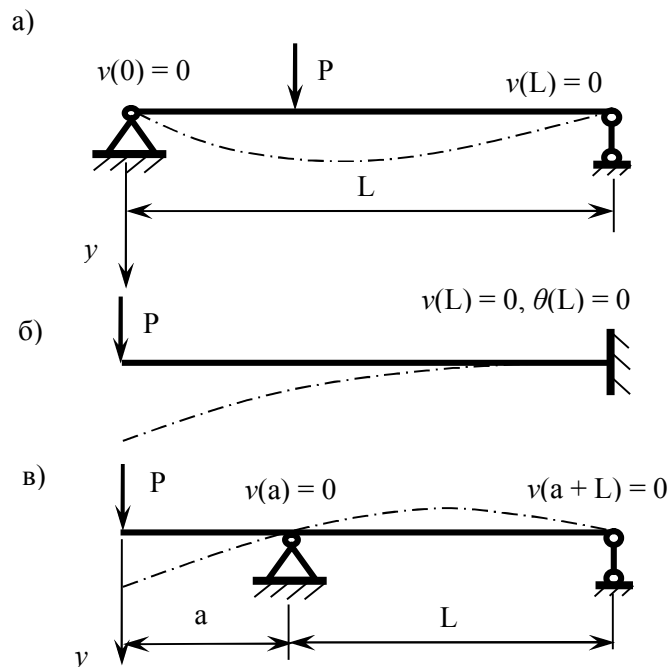


Рисунок 10.2 – Граничные условия для балки на двух опорах (а), консоли (б) и консольной балки на двух опорах (в)

Для примера рассмотрим задачу определения перемещений консольной балки нагруженной силой P на свободном ее конце (рис. 10.3).

Рассматриваемая задача обладает тем упрощающим решение свойством, что в ней только один участок, и интегралы (10.7) вычисляются достаточно просто.

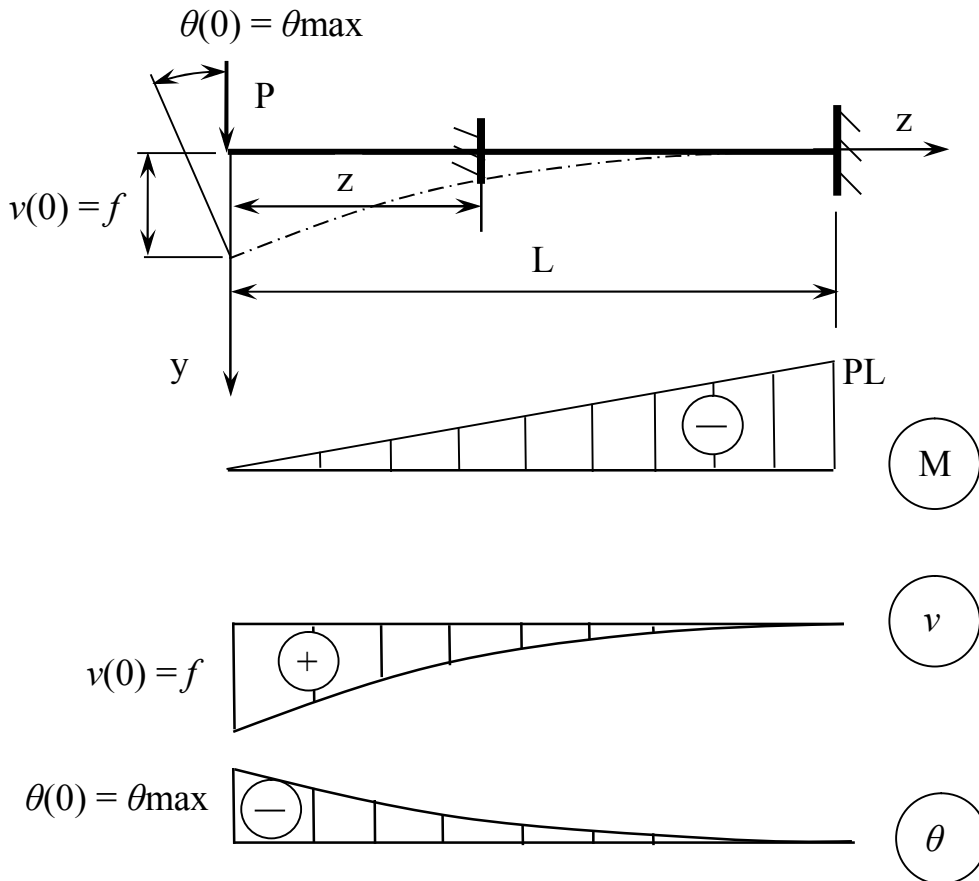


Рисунок 10.3 – Перемещения в консольной балке

Уравнение изгибающих моментов в принятой системе координат $M(z) = -Pz$.

Уравнения углов поворота и прогибов в общем виде

$$\theta(z) = \frac{1}{EI} \int Pz dz + C_1 = \frac{Pz^2}{2EI} + C_2;$$

$$v(z) = \frac{1}{2EI} \int Pz^2 dz + C_1 z + C_2 = \frac{Pz^3}{6EI} + C_1 z + C_2.$$

Учитываем граничные условия в соответствии с рисунком 10.2б

$$\theta(L) = 0 = \frac{PL^2}{2EI} + C_1; \quad C_1 = -\frac{PL^2}{2EI};$$

$$v(L) = 0 = \frac{PL^3}{6EI} + \left(-\frac{PL^2}{2EI}\right)L + C_2; \quad C_2 = \frac{PL^3}{3EI}.$$

Окончательно уравнения перемещений принимают форму

$$\theta(z) = \frac{P}{2EI}(z^2 - L^2); \quad v(z) = \frac{PL^3}{6EI} - \frac{PL^2z}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}.$$

Смысл произвольных постоянных интегрирования определяется значениями перемещений в начале координат при $z=0$

$$\theta(0) = -\frac{PL^2}{2EI} = C_1; \quad v(0) = \frac{PL^3}{3EI} = C_2.$$

Значения искомых величин в начале координат называют начальными параметрами задачи, а данное решение есть частный случай метода начальных параметров.

10.3 УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Действия, приведенные выше при расчете консольной балки, обычно называют методом непосредственного интегрирования. Он удобен для балок с простой нагрузкой, когда имеется один участок. Если балка имеет сложную нагрузку и несколько участков нагружения, то метод непосредственного интегрирования становится громоздким и неудобным. Балки со сложной нагрузкой рассчитывают методом начальных параметров (МНП).

Для получения решения задачи в форме МНП воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси четвертого порядка (10.4). Существует несколько математических способов доказательства МНП. Здесь будет обсуждаться метод, основанный на разложении аналитической функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности заданной точки оси z с координатой $z = a$. Это разложение имеет вид

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(z-a)^4 + \dots$$

Название метода происходит от того факта, что независимо от количества участков нагрузки, решение определяется как универ-

сальные уравнения искомым функций, справедливых для всех участков. При этом каждая произвольная постоянная интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 выражается через один из четырех начальных параметров Q_0, M_0, θ_0, v_0 и эти постоянные справедливы для всех участков. Значения поперечной силы Q_0 и изгибающего момента M_0 в начале координат называются статическими начальными параметрами. Они определяются при нахождении внутренних усилий. Угол поворота θ_0 и прогиб v_0 сечения в начале координат называют кинематическими начальными параметрами, и они находятся из граничных условий задачи.

Разложим в ряд Тейлора функцию прогибов $v_I(z)$ на первом участке в окрестности начала координат (при $z = 0$ это ряд Маклорена).

$$v_I(z) = v_I(0) + v_I'(0)z + \frac{v_I''(0)}{2}z^2 + \frac{v_I'''(0)}{6}z^3 + \frac{v_I^{IV}(0)}{24}z^4 + \dots \quad (10.8)$$

Учитывая дифференциальные зависимости между перемещениями и внутренними усилиями (9.4), (10.1) и (10.2) и значения q, Q, M, θ и v в начале координат, получим

$$\begin{aligned} v_I(0) &= v_0; & v_I''(0) &= -\frac{M_0}{EJ}; & v_I^{IV}(0) &= \frac{q_0}{EJ}; \\ v_I'(0) &= \theta_0; & v_I'''(0) &= -\frac{Q_0}{EJ}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

После подстановки (10.9) в (10.8) получаем уравнение прогибов в форме МНП на первом участке

$$v_I(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{2EI}z^2 - \frac{Q_0}{6EI}z^3 + \frac{q_0}{24EI}z^4. \quad (10.10)$$

Отметим, что при учете нагрузок только тех типов, которые показаны на рисунке 10.4, слагаемые в разложении (10.8) порядка выше четвертого отбрасываются.

На втором участке балки при $z > a_1$ по аналогии разложим в ряд Тейлора в окрестности $z = a_1$ приращение функции прогибов $\Delta v_I(z)$, вызванное нагрузками M_1, P_1 и q_1 , которые добавляются на этом участке

$$\Delta v_I(z) = \Delta v_I(z - a_1)^0 + \Delta \theta_1(z - a_1) - \frac{M_1}{2EJ}(z - a_1)^2 - \frac{P_1}{6EJ}(z - a_1)^3 + \frac{q_1}{24EJ}(z - a_1)^4. \quad (10.11)$$

Очевидно, что все слагаемые (10.11) учитываются при $z > a_1$ или $(z - a_1) > 0$. Для автоматизации учета слагаемых универсальных уравнений удобно ввести правило отрицательных аргументов: если аргумент вида $(z - a_1)$ слагаемого универсального уравнения становится отрицательным, то такое слагаемое отбрасывается (обнуляется).

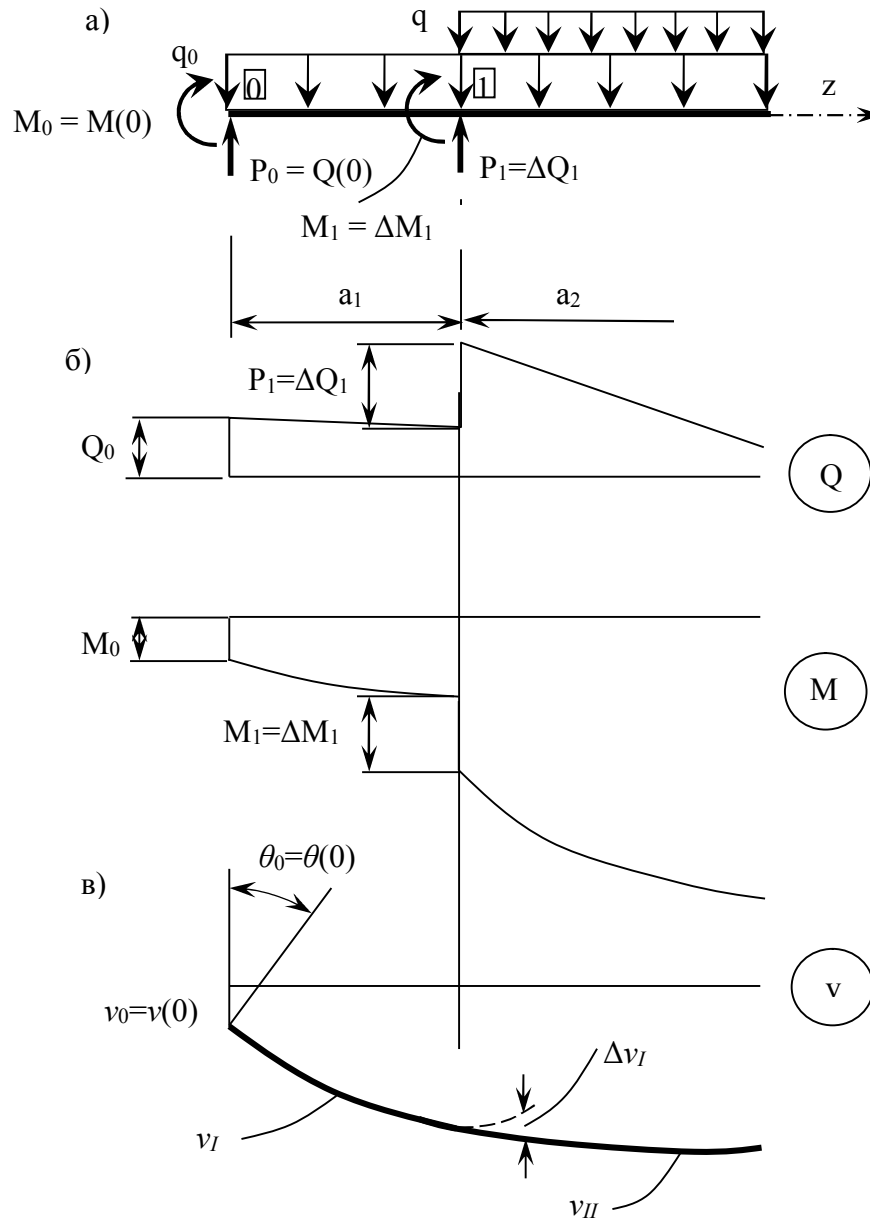


Рисунок 10.4 – Нагрузки (а), внутренние усилия (б) и перемещения (в) в методе начальных параметров

Величины Δv_1 и $\Delta \theta_1$ являются скачками соответственно прогибов и углов поворота. Такие скачки возможны в составной балке, если в сечении I имеются внутренние связи в виде ползуна

(рис. 10.5а) или сквозного шарнира (рис. 10.5б). В сплошной балке подобных скачков нет, и слагаемые со скачками перемещений отбрасываются.

Суммируя уравнения (10.10) и (10.11) и распространяя результаты на любое количество участков, получим универсальное уравнение прогибов:

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{2EJ} z^2 - \frac{Q_0}{6EJ} z^3 + \frac{q_0}{24EJ} z^4 + \sum \Delta v_i (z - a_i)^0 + \sum \Delta \theta_i (z - a_i) - \sum \frac{M_i}{2EJ} (z - a_i)^2 - \sum \frac{P_i}{6EJ} (z - a_i)^3 + \sum \frac{q_i}{24EJ} (z - a_i)^4. \quad (10.12)$$

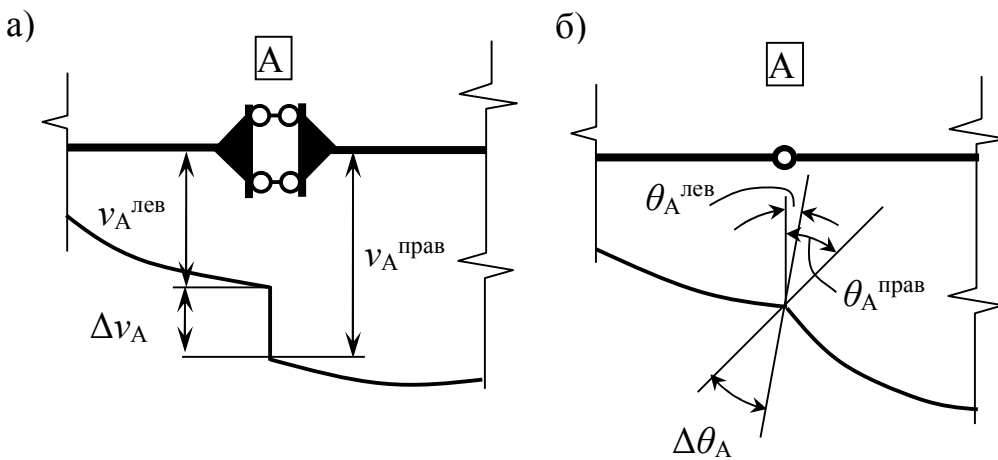


Рисунок 10.5 – Скачки прогиба в ползуне (а) и угла поворота в сквозном шарнире (б)

Дифференцируя (10.12) в соответствии со вторым уравнением (10.4) получим универсальное уравнение углов поворота:

$$\theta(z) = \theta_0 - \frac{M_0}{EJ} z - \frac{Q_0}{2EJ} z^2 + \frac{q_0}{6EJ} z^3 + \sum \Delta \theta_i (z - a_i)^0 - \sum \frac{M_i}{EJ} (z - a_i) - \sum \frac{P_i}{2EJ} (z - a_i)^2 + \sum \frac{q_i}{6EJ} (z - a_i)^3. \quad (10.13)$$

С помощью первого уравнения (10.4) и второго уравнения (9.4) получаем универсальные уравнения изгибающих моментов и поперечных сил

$$M(z) = M_0 + Q_0 z - \frac{q_0}{2} z^2 + \sum M_i (z - a_i)^0 + \sum P_i (z - a_i) - \sum \frac{q_i}{2EJ} (z - a_i)^2. \quad (10.14)$$

$$Q(z) = Q_0 - q_0 z + \sum P_i (z - a_i)^0 - \sum q_i (z - a_i). \quad (10.15)$$

Отметим, что рассмотренный выше порядок решения задачи МНП, можно условно назвать прямым. В практике учебных программ часто используется вариант МНП, основанный на использовании так называемых «правил Клебша». Фактически, использование этих правил реализует обратный по отношению к прямому путь решения задачи.

При использовании упомянутых правил реализуется следующий план решения задачи.

1. Записывается универсальное уравнение изгибающих моментов в форме (10.14).

2. Составляется дифференциальное уравнение изогнутой оси балки второго порядка в форме (10.5).

3. Полученное в п. 2 дифференциальное уравнение интегрируется два раза по схеме разделения переменных. При интегрировании каждое слагаемое интегрируется независимо от других слагаемых (так называемое интегрирование «без раскрытия скобок»).

4. При наличии ползунов и шарниров на соответствующих этапах интегрирования в уравнения перемещений вводятся слагаемые, учитывающие скачки прогибов и углов поворота, в форме (10.12) и (10.13).

В завершение рассмотрения МНП отметим, что количество граничных условий кинематического типа (относительно заданных перемещений) должно быть равно сумме количества кинематических начальных параметров (двум) плюс количество шарниров и ползунов в конструкции балки.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Опишите деформирование балки при изгибе.
2. Какие внутренние усилия учитываются при изгибе?
3. Как перемещаются поперечные сечения балки?
3. Какими величинами описываются перемещения при изгибе?
4. Как связаны между собой прогибы углы поворота?
5. Как записывается дифференциальное уравнение углов поворота?
6. Что называют дифференциальным уравнением изогнутой оси балки и как оно выводится?

ГЛАВА 11 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ИЗГИБА

11.1 ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Под оптимальным проектированием принято понимать такое назначение характеристик конструкции и несущей нагрузки, при котором она будет наилучшей из всех конструкций рассматриваемого типа.

Признаки, используемые при оптимизации, называются критериями оптимизации – это величина, которая в ходе поиска оптимального решения должна принять либо минимум, либо максимум. После того, как определена цель проектирования и выбраны критерии оптимизации, формируется целевая функция – функция, включающая в себя все критерии и их вклад (важность) в искомое решение. Затем разрабатываются модель и метод оптимизации, с помощью которых ищется максимум или минимум целевой функции.

При решении оптимизационных задач приходится принимать во внимание очень многие факторы, учесть которые удастся только при помощи ЭВМ с использованием специальных методов.

Как правило, в сопротивлении материалов за критерий оптимизации принимают минимальный вес конструкции или максимальную нагрузку, которую может выдержать элемент. При этом очень часто критерий минимального веса заменяется критерием равнопрочности (равенство напряжений во всех сечениях элемента конструкции).

До сих пор мы рассматривали расчет на изгиб стержней, сечение которых оставалось постоянным по длине. Такие стержни, особенно при значительной их длине, нельзя считать рациональными с точки зрения веса и расхода материала: так как размеры сечения подбираются по усилиям, действующим в опасном сечении, в остальных же сечениях получается весьма значительный избыток прочности. Для экономии материала, а также для увеличения в нужных случаях гибкости балок применяют балки равного сопротивления, у которых во всех сечениях наибольшее нормальное напряжение одинаково и не превышает допустимого значения (рис. 11.1). То есть у балки равного сопротивления момент сопротивления данного сече-

ния должен быть прямо пропорционален изгибающему моменту в этом сечении.

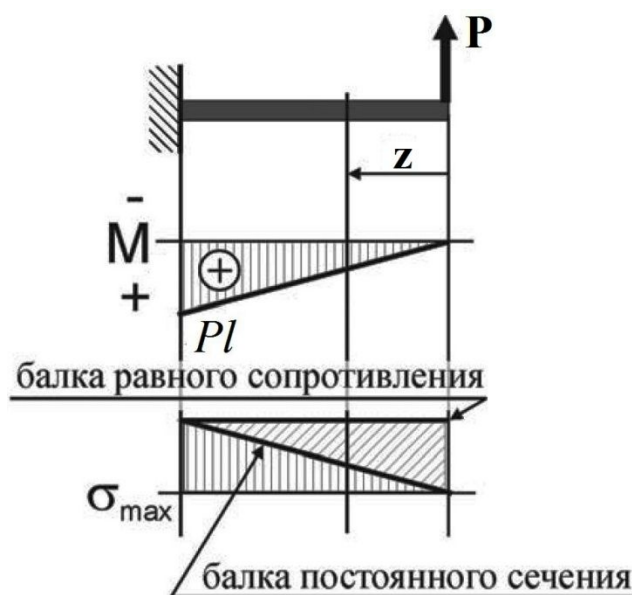


Рисунок 11.1 – Эпюры изгибающих моментов и нормальных напряжений для балки равного сопротивления

Балки равного сопротивления часто находят применение на практике, например, при проектировании рессор. Рассматривая рессору как балку на двух опорах, легко найти, что брус равного сопротивления будет иметь форму ромба (рис. 11.2).

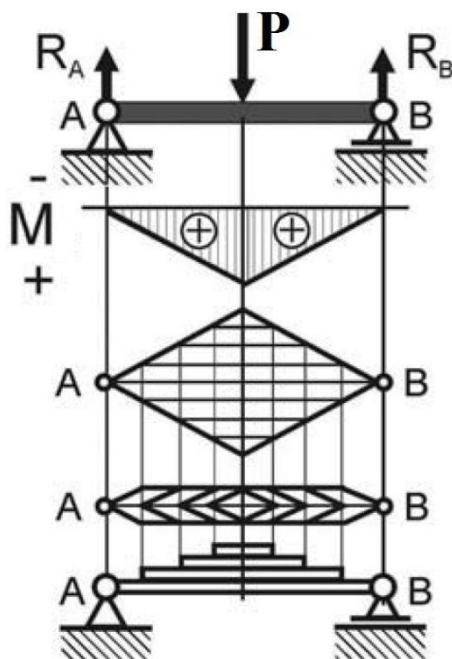


Рисунок 11.2 – Расчетная схема рессоры

Так как подобная конструкция крайне неудобна в эксплуатации, поступают следующим образом. Пусть лист рессоры разделен на узкие полоски. Если расположить эти полоски не рядом друг с другом, а одна над другой, то работа такой балки не изменится, а ее конструкция станет более компактной.

11.2 КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ

При поперечном изгибе тонкостенного стержня в его сечениях преобладающими остаются нормальные напряжения, которые в основном и определяют прочность стержня. Однако здесь, в отличие от стержня сплошного сечения, существенное значение приобретают касательные напряжения и законы их распределения. Тонкостенные стержни замкнутого профиля сопротивляются нагрузкам примерно так же, как и массивные. Иначе обстоит дело с тонкостенным открытым профилем (незамкнутое сечение).

Допущения, положенные в основу вывода формулы Журавского для касательных напряжений, в достаточной степени соответствуют действительности для массивного сечения. Когда сечение представляет собой тонкостенный профиль, например, вроде швеллера, его ширина b значительна (по сравнению с толщиной t) и картина распределения касательных напряжений здесь существенно меняется: они не только переменны вдоль средней линии полки, но и направление их становится не параллельным к поперечной силе Q (рис. 11.3).

Заметим, что в полках будут действовать и касательные напряжения, параллельные Q . Однако эти напряжения настолько малы, что их можно не принимать во внимание. Выведем формулу для вычисления касательных напряжений (обозначим их τ_{xz}) в полках тонкостенных профилей (на примере швеллера). Учитывая, что полка узкая (t мало по сравнению с b), примем следующие допущения:

- 1) касательные напряжения τ_{xz} постоянны по толщине полки и зависят только от расстояния z до вертикальной оси;
- 2) всюду в полке касательные напряжения τ_{xz} параллельны ее средней линии.

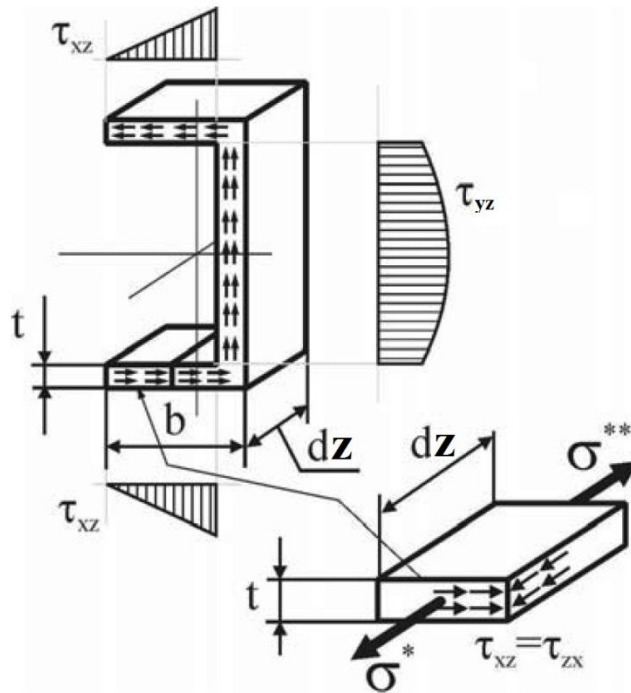


Рисунок 11.3 – Эпюры касательных напряжений для швеллера

Рассматривая равновесие отсеченной части полки (шириной dz) подобно тому, как это делалось при выводе формулы Журавского, заметим, что на передней и задней гранях элемента возникают нормальные напряжения σ^* и σ^{**} , которые рассчитываются по формулам

$$\sigma^* = \frac{M_x y}{I_x}; \quad (11.1)$$

$$\sigma^{**} = \frac{(M_x + dM)y}{I_x}. \quad (11.2)$$

Точно такие же напряжения τ_{xz} будут возникать и на боковой грани элемента (по закону парности касательных напряжений). Остальные поверхности элемента свободны от напряжений, так как являются наружными (незагруженными) поверхностями балки. Проецируя все силы, действующие на элемент, на ось z , получаем уравнения

$$\int_F \sigma^* dF - \int_F \sigma^{**} dF + \tau_{xz} dz t = 0;$$

$$\int_F \frac{M_x y}{I_x} dF - \int_F \frac{M_x y}{I_x} dF - \int_F \frac{dM y}{I_x} dF + \tau_{xz} dz t = 0; \quad (11.3)$$

$$\tau_{xz} dz t - \frac{dM}{I_x} \int_F y dF = 0.$$

Как видим, вывод формулы для напряжений τ_{xz} совершенно аналогичен выводу формулы Журавского для касательных напряжений при поперечном изгибе.

Обобщая изложенное на случай тонкостенного сечения с произвольным незамкнутым криволинейным профилем, можем констатировать, что при изгибе от поперечной силы Q в сечении возникают касательные напряжения τ_n , равномерно распределенные по толщине стенки t и ориентированные по касательной к очертанию контура сечения. Определяются эти напряжения по формуле Д. И. Журавского для тонкостенного незамкнутого сечения:

$$\tau_n = \frac{Q_y S'_x}{t I_x}, \quad (11.4)$$

где S'_x – статический момент отсеченной части сечения относительно оси x .

11.3 ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Касательные напряжения в незамкнутых поперечных сечениях тонкостенных стержней образуют «поток», параллельный контурным линиям каждого элемента сечения (рис. 11.4).

В некоторых случаях этот поток может создавать момент относительно оси стержня, вызывающий его закручивание и искривление (депланацию) сечения. Рассмотрим поперечный изгиб консольной балки швеллерного сечения в плоскости ZOY .

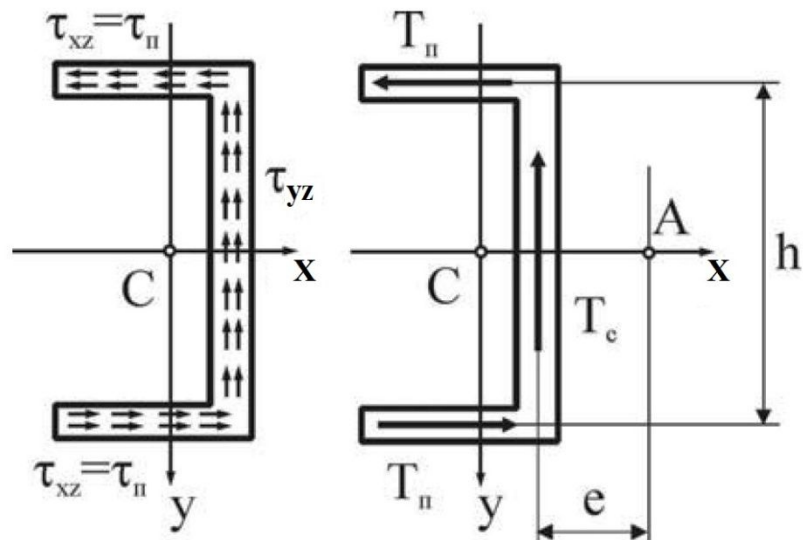


Рисунок 11.4 – Касательные напряжения в незамкнутых поперечных сечениях

В стенке швеллера будут возникать касательные напряжения τ_{xz} , а в полках – касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_n$. Равнодействующей касательных напряжений в стенке является сила T_c , которая практически равна внутренней поперечной силе Q_y . Касательные напряжения в полках приводятся к равнодействующим силам T_n . Силы T_c и T_n создают момент относительно центра тяжести швеллера, вызывающий закручивание стержня (помимо его изгиба). Таким образом, если линия действия внешней силы P проходит через центр тяжести сечения швеллера, то балка будет испытывать изгиб с кручением. Как известно, открытые (незамкнутые) тонкостенные профили плохо работают на кручение. Кроме того, если балка заделана так, что депланация сечения в заделке становится невозможной, то будет иметь место стесненное кручение, при котором в сечении дополнительно возникают не только касательные, но и значительные нормальные напряжения. Поэтому желательно принимать меры, устраняющие кручение в балках прокатного профиля.

Установим положение такой точки, при прохождении через которую линии действия внешней силы поток касательных напряжений при изгибе не будет вызывать закручивания стержня. Очевидно, что такая точка A расположена на оси x вне контура сечения швеллера, поскольку при этом равнодействующие касательных напряжений T_c и T_n будут давать моменты разных знаков относительно точки A (см. рис. 11.4). Составим уравнение равновесия сечения швеллера под действием сил T_c и T_n

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow T_c e - 2T_n \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow e = \frac{T_n h}{T_c}. \quad (11.5)$$

Итак, если линия действия силы P будет проходить через точку A , то стержень будет испытывать только изгиб, поэтому точка A называется центром изгиба, а продольная ось, проходящая через эту точку – осью центров изгиба.

Ось центров изгиба обладает тем свойством, что поперечная нагрузка, пересекающая эту ось, вызывает только изгиб стержня. В противном случае возникает дополнительная деформация кручения относительно этой оси.

В общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, и его положение подлежит определению. В некоторых случаях положение центра изгиба устанавливается без предварительных вычислений. Так, для сечений с двумя осями симметрии, например, для двутавра, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Это имеет место также для кососимметричных сечений. Для сечений в виде тавра и уголка центр изгиба находится в точке пересечения средних линий элементов сечения.

Таким образом, наряду с основной продольной осью z , проходящей через центр тяжести сечений, стержень обладает еще осью центров изгиба, к точкам которой должны приводиться поперечные нагрузки при разделении деформаций изгиба и кручения. Иногда эта ось называется осью жесткости, а сама точка A – центром жесткости (центром сдвига).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое критерии оптимизации?
2. Что такое целевая функция?
3. Понятие о балках равного сопротивления.
4. Распределение касательных напряжений при изгибе балок тонкостенного профиля.
5. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней.

ГЛАВА 12 КОСОЙ ИЗГИБ

12.1 ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О КОСОМ ИЗГИБЕ

Косой изгиб имеет место, когда плоскость действия нагрузки (силовая плоскость) не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции стержня и характеризуется углом наклона α . Однако, если разложить нагрузку P по главным осям инерции ox и oy , то получим её составляющие $P_y = P \cos \alpha$ и $P_x = P \sin \alpha$, каждая из которых вызывает свой прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно M_x и M_y (рис. 12.1). Таким образом, косой изгиб является сочетанием двух прямых изгибов.

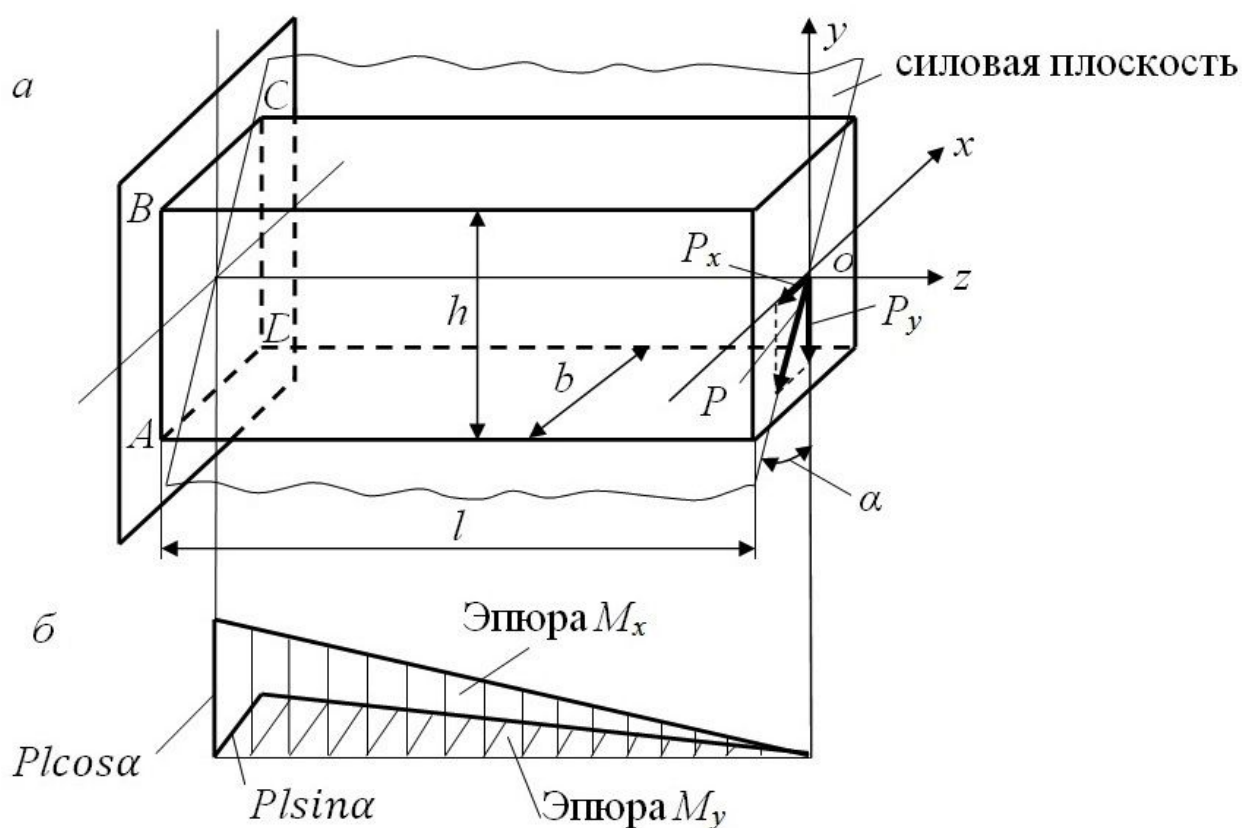


Рисунок 12.1 – Расчетная модель косоуго изгиба стержня (а) и эпюры изгибающих моментов (б)

12.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Применяя принцип независимости действия сил, получим общую формулу для определения нормальных напряжений σ , как ал-

гебраическую сумму напряжений от изгибающих моментов M_x и M_y :

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y_{\max} \pm \frac{M_y}{I_y} x_{\max}. \quad (12.1)$$

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, значения слагаемых следует определять по модулю, а знаки ставить по смыслу (рис. 12.2).

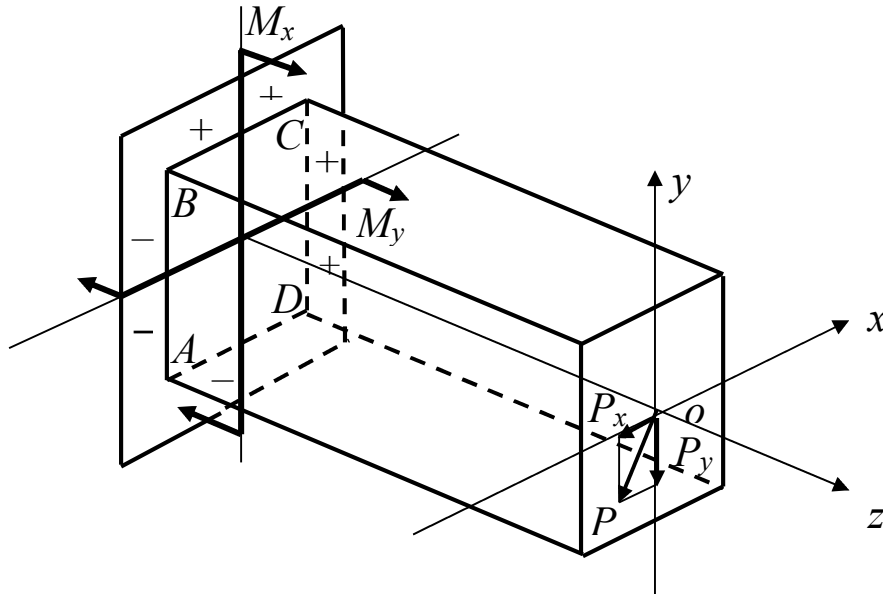


Рисунок 12.2 – Расстановка знаков от действия изгибающих моментов

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки с равными по модулю и максимальными одноименными координатами (прямоугольник, двутавр),

$|x_A| = |x_B| = x_C = x_D = x_{\max}$ и $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{\max}$
напряжения в этих точках будут равны

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm \frac{M_x}{I_x} y_{\max} \pm \frac{M_y}{I_y} x_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad (12.2)$$

где W_x и W_y – осевые моменты сопротивления сечения.

Учитывая (см. рис. 12.2) и конкретизируя формулу (12.2) для указанных точек, получим выражения

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_B = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}, \quad (12.3)$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_D = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанными видами сечений записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.4)$$

В остальных случаях для определения σ_{\max} (или σ_{\max}^p и $|\sigma_{\max}^c|$) для балок из хрупкого материала необходимо по общей формуле (12.2) проверить напряжения во всех подозрительных точках.

Есть и другой путь: полагая в выражении (12.1) $\sigma = 0$ и учитывая, что в опорном (опасном) сечении $M_x = Pl \cos \alpha$, $M_y = Pl \sin \alpha$, получим уравнение нейтральной линии

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x = 0, \quad (12.5)$$

где x и y – координаты любой точки нейтральной линии.

Полученное уравнение нейтральной линии является уравнением прямой линии, проходящей через центр тяжести сечения стержня. Для определения положения нейтральной линии (рис. 12.3) используется выражение

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.6)$$

где β – угол наклона нейтральной линии относительно центральной оси x .

На величину угла β влияет отношение осевых моментов инерции $\frac{I_x}{I_y}$.

В случае, когда $\frac{I_x}{I_y} = 1$, имеет место равенство $\beta = \alpha$, то есть когда у сечения все центральные оси являются главными (любой правильный многоугольник), косоу изгиб невозможен.

Так как напряжения в точках сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то σ_{\max} будут возникать в наиболее удаленных от нее точках A и C .

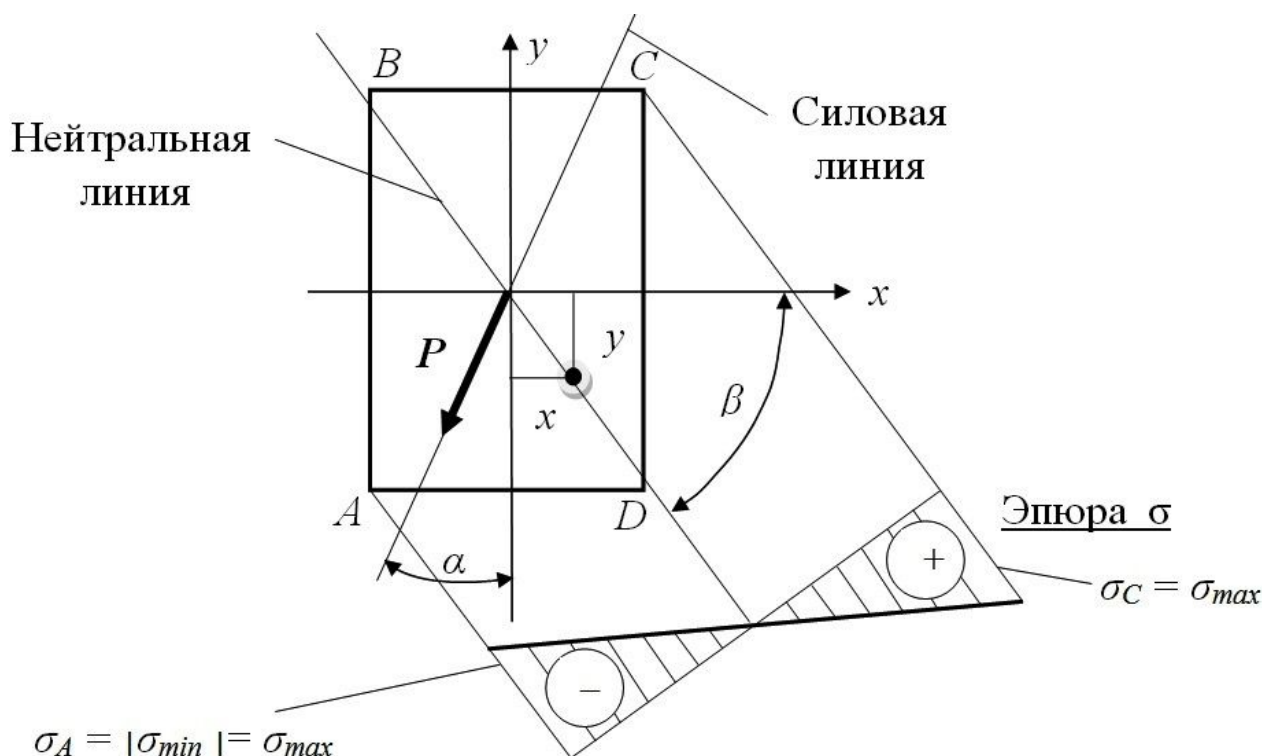


Рисунок 12.3 – К определению положения нейтральной линии

Для подбора сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер) используется условие прочности в виде

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{1}{W_x} \left(|M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y| \right) = \frac{1}{W_x} (|M_x + k M_y|) \leq [\sigma],$$

где $k = \frac{W_x}{W_y}$.

Значения коэффициента k задают в соответствии со следующими рекомендациями: для прямоугольника – $k = \frac{h}{b}$; для двутавра – в пределах 6÷8 для первой трети таблицы сортамента, в пределах 8÷10 для второй трети таблицы, в пределах 11÷13 для последней трети, что соответствует отношению $\frac{W_x}{W_y}$ реальных прокатных профилей; для швеллера – 6,5.

12.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Так как кривой изгиб является сочетанием двух прямых изгибов, то перемещения в прямых стержнях (как правило, прогибы) могут определяться теми же методами, что и в случае прямого изгиба. Отдельно определяются перемещения в плоскости yz (от составляющей нагрузки, действующей в этой плоскости) и отдельно – в плоскости xz .

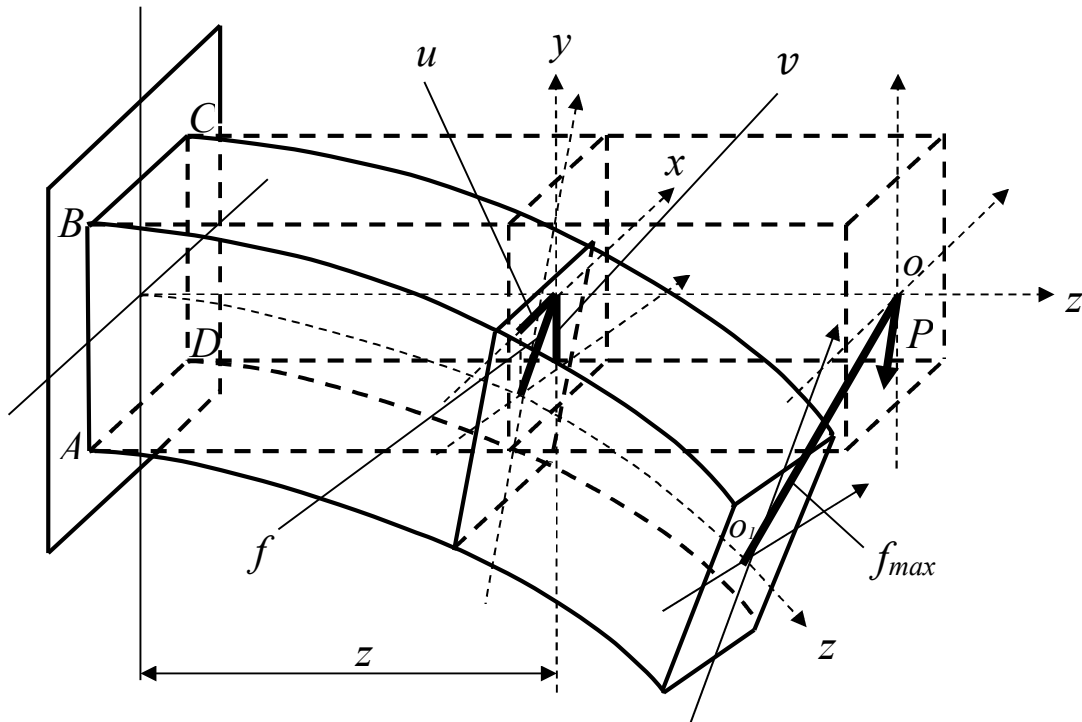


Рисунок 12.4 – К определению перемещений в стержне при кром изгибе

Когда при кром изгибе нагрузка, действующая на стержень, расположена в одной плоскости, изогнутая ось стержня (упругая линия) представляет собой плоскую кривую, расположенную не в плоскости действия нагрузки (см. рис. 12.4). В результате деформации центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения (с координатой z) сместится на величину v в направлении оси y и на величину u в направлении оси x . Прогибы v и u соответственно равны

$$v = (P_y/EI_x)\varphi(z); \quad u = (P_x/EI_y)\varphi(z), \quad (12.7)$$

где $\varphi(z)$ – некоторая функция абсциссы z рассматриваемой точки.

Использование принципа независимости сил позволяет определить результирующие перемещения (полные прогибы f) путем

геометрического суммирования перемещений (прогибов) v и u , вызванных отдельно каждым из двух прямых изгибов

$$f = \sqrt{v^2 + u^2}. \quad (12.8)$$

Направление полного прогиба (рис. 12.5) характеризуется углом его наклона γ к оси y

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{u}{v} = \frac{(P_x/EI_y)\varphi(z)}{(P_y/EI_x)\varphi(z)} = \frac{I_x P_x}{I_y P_y} = \frac{I_x P \sin \alpha}{I_y P \cos \alpha} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (12.9)$$

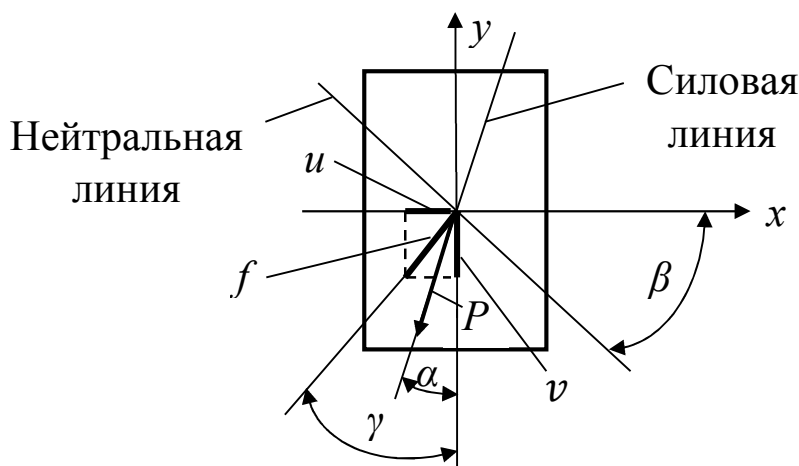


Рисунок 12.5 – К определению направления полного прогиба при косом изгибе

С целью оценки жесткости стержня при косом изгибе значение максимального прогиба f_{\max} сравнивается с допускаемым значением прогиба $[f]$ по условию жесткости (12.10) аналогично тем рекомендациям, что приняты при прямом изгибе

$$f_{\max} \leq [f]. \quad (12.10)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой изгиб называется косым?
2. Сочетанием каких видов изгиба является косою изгиб?

3. Как определяются нормальные напряжения при косом изгибе?
4. Как устанавливаются знаки нормальных напряжений?
5. Как определяется положение нейтральной линии при косом изгибе?
6. Как определяется положение опасных точек при косом изгибе?
7. Как записывается условие прочности при косом изгибе?
8. Как определяются перемещения при косом изгибе?
9. Как определяется направление перемещений при косом изгибе?
10. Как записывается условие жесткости при косом изгибе?

ГЛАВА 13. ИЗГИБ СО СЖАТИЕМ (РАСТЯЖЕНИЕМ)

13.1 ИЗГИБ СТЕРЖНЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

На практике очень часто встречаются случаи совместной работы стержня на изгиб и на сжатие или растяжение. Подобного рода деформация может вызываться или совместным действием на стержень продольных и поперечных сил, или только одними продольными силами. Расчетная схема (рис. 13.1) рассматриваемого случая представляет собой стержень большой жесткости с приложенной к нему равномерно распределенной нагрузкой q и продольными сжимающими силами P .

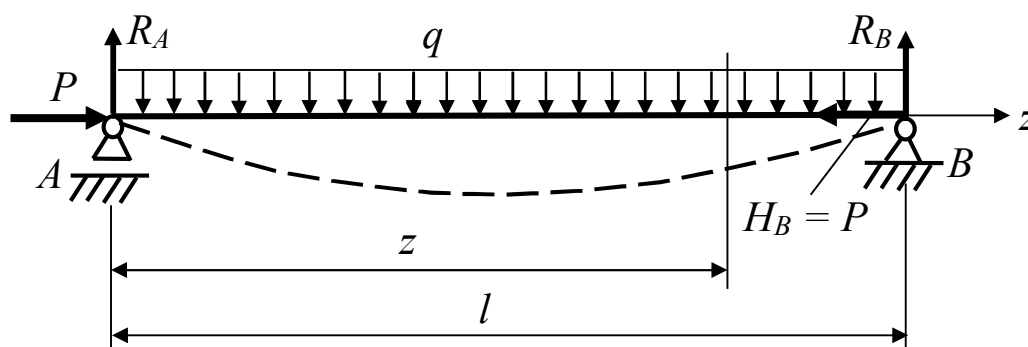


Рисунок 13.1 – Совместное действие изгиба и сжатия

В отличие от гибких стержней (с малой жесткостью) для рассматриваемых стержней с большой жесткостью (у которых можно пренебречь прогибами ввиду их малости по сравнению с размерами поперечного сечения), с достаточной для практики степенью точности можно считать, что и после деформации силы P будут вызывать лишь осевое сжатие стержня.

Применяя принцип независимости действия сил, нормальное напряжение в любой точке каждого поперечного сечения стержня определяют как алгебраическую сумму напряжений, вызванных силами P и равномерно распределенной нагрузкой q .

Нормальные напряжения от сил P , равномерно распределенные по площади F поперечного сечения и одинаковые для всех сечений, определяются

$$\sigma_P = -\frac{P}{F}.$$

Нормальные напряжения от прямого изгиба в сечении с абсциссой z выражаются

$$\sigma_q = \frac{M_{x(z)}}{I_x} y.$$

Таким образом, полное напряжение в точке с координатой y (считая от нейтральной оси x) для этого сечения равно

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M_{x(z)}}{I_x} y. \quad (13.1)$$

На рисунке 13.2 изображены эпюры распределения напряжений в рассматриваемом сечении отдельно от сил P и равномерно распределенной нагрузки q и суммарная эпюра напряжений.

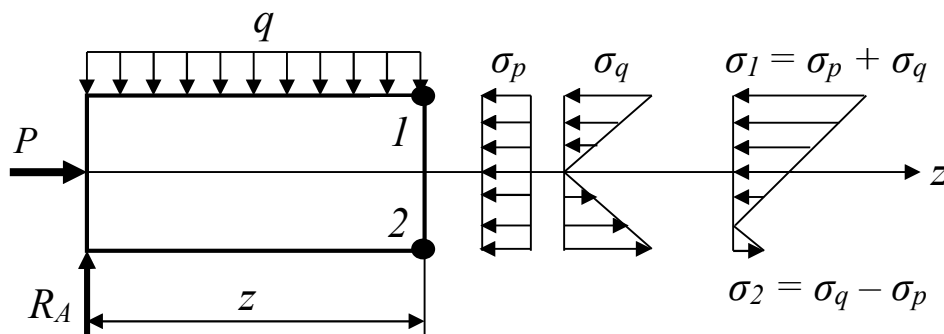


Рисунок 13.2 – Эпюры напряжений при изгибе со сжатием

Наибольшее напряжение в этом сечении будет в верхних волокнах, где оба вида деформации вызывают сжатие; в нижних волокнах может быть или сжатие, или растяжение в зависимости от величины напряжений σ_P и σ_q . Для составления условия прочности найдем наибольшее нормальное напряжение.

Так как напряжения от сил P во всех точках сечений одинаковы и равномерно распределены, то опасными будут точки, наиболее напряженные от изгиба. Такими являются крайние точки 1 и 2 в сечении с наибольшим изгибающим моментом, и напряжения в них определяются

$$\sigma_{q\max} = \mp \frac{M_{x\max}}{W_x}.$$

Таким образом, напряжения в крайних точках 1 и 2 среднего сечения балки выражаются формулой

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{M_{x\max}}{W_x}.$$

Расчетное максимальное напряжение будет равно

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left| \frac{P}{F} + \frac{M_{x\max}}{W_x} \right|. \quad (13.2)$$

Если бы силы P были растягивающими, то знак первого слагаемого в (13.1) изменится и опасными станут нижние волокна балки.

Обозначая буквой N сжимающую или растягивающую силу, записывают общую формулу для проверки прочности

$$\sigma_{\max} = \mp \left[\frac{N}{F} + \frac{M_{x\max}}{W_x} \right] \leq [\sigma]. \quad (13.3)$$

В случае сочетания сжатия (растяжения) с косым изгибом используется выражение

$$\sigma_{\max} = \mp \left[\frac{N}{F} + \frac{M_{x(z)}}{I_x} y + \frac{M_{y(z)}}{I_y} x \right] \leq [\sigma]. \quad (13.4)$$

13.2 ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ) СТЕРЖНЯ

Другим практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень большой жесткости двух равных и прямо противоположных сил P , направленных по прямой, параллельной оси стержня (рис. 13.3а). Расстояние точки A от центра тяжести сечения $OA = e$ называется эксцентриситетом. Случай внецентренного сжатия имеет большее практическое значение.

Далее, сохраняя равновесие стержня, в точках O прикладываются по две равные и противоположные силы P (рис. 13.3б).

Силы P , зачеркнутые один раз, вызывают осевое сжатие, а пары сил P , зачеркнутые дважды, вызывают чистый изгиб моментами

$M = Pe$ (см. рис. 13.3в). Так как плоскость действия изгибающих пар OB не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции стержня xoz и yoz , то возникает сочетание продольного сжатия и чистого косо го изгиба.

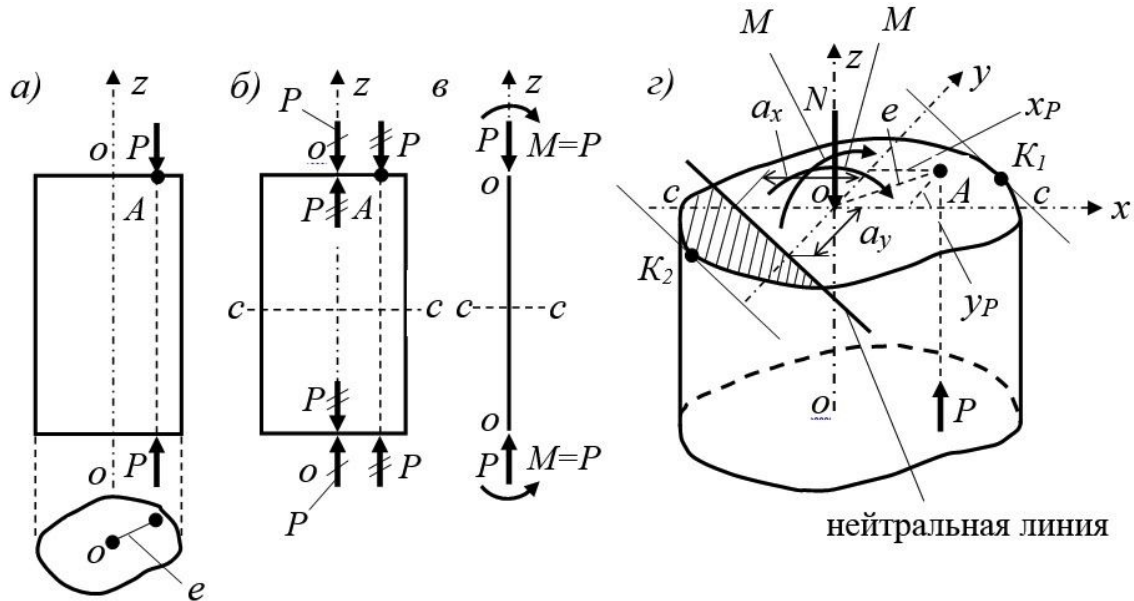


Рисунок 13.3 – а) расчетная схема; б) преобразование нагрузок; в) приведенная расчетная схема; г) исследование напряжений

Отбрасывая верхнюю часть стержня, рассмотрим нижнюю его часть (см. рис. 13.3г).

Координаты x_P и y_P точки A (точки пересечения линии действия сил P с плоскостью сечения) являются положительными. Для определения нормального напряжения σ в любой точке с координатами x и y учитываются напряжения от осевых сжимающих сил P и напряжения от чистых прямых изгибов в главных плоскостях инерции.

Сжимающие нормальные напряжения от осевых сил P в любой точке равны

$$\sigma = -\frac{N}{F} = -\frac{P}{F}.$$

Чистый прямой изгиб в главной плоскости yoz вызывается моментом $M_x = Py_P$ вокруг нейтральной оси ox и вызывает в точке нормальное сжимающее напряжение

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x}y = -\frac{Py_P}{I_x}y.$$

Чистый прямой изгиб в главной плоскости xOz вызывается моментом $M_y = Px_P$ вокруг нейтральной оси Oy и вызывает в точке нормальное сжимающее напряжение

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y}x = -\frac{Px_P}{I_y}x.$$

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух чистых прямых изгибов, получаем формулу для напряжения в точке

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Py_F}{I_x}y - \frac{Px_F}{I_y}x = -P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P y}{I_x} + \frac{x_P x}{I_y} \right). \quad (13.5)$$

Эта формула может использоваться для определения напряжений в любой точке любого сечения стержня, только необходимо вместо x и y подставить координаты точки (с их знаками) относительно главных осей.

В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат x и y , учитывать также и знак силы P ; при внецентренном сжатии в выражении (13.5) стоит знак минус, а при внецентренном растяжении – должен стоять знак плюс.

Полученной формуле можно придать другой вид

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_P y}{i_x^2} + \frac{x_P x}{i_y^2} \right], \quad (13.6)$$

где i_x и i_y – радиусы инерции сечения относительно главных осей.

Для определения положения опасных точек с наибольшими напряжениями необходимо установить положение нейтральной линии.

Принимая в формуле (13.6) $\sigma = 0$ и обозначая координаты точек нейтральной (нулевой) линии через x_0 и y_0 , получим уравнение нейтральной линии

$$0 = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_P y_0}{i_x^2} + \frac{x_P x_0}{i_y^2} \right]$$

или

$$\frac{P}{F} \neq 0; \quad 1 + \frac{y_P \cdot y_0}{i_x^2} + \frac{x_P \cdot x_0}{i_y^2} = 0. \quad (13.7)$$

Так как уравнение нейтральной линии является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения стержня, то для определения ее положения удобно определить отрезки $a_x(y_0)$ и $a_y(x_0)$, отсекаемые ею соответственно на главных осях инерции сечения x и y по выражениям

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_P}. \quad (13.8)$$

Если величины x_P и y_P положительны, то отрезки a_x и a_y будут отрицательны, т.е. нейтральная линия пересекает координатные оси, принадлежащие четверти, противоположной той, в которой находится точка приложения силы P (см. рис. 13.3г).

Нейтральная линия делит сечение на две части – сжатую и растянутую. На рисунке 13.3г растянутая часть сечения заштрихована. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной линии, получаем две точки K_1 и K_2 , в которых возникают наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

Измеряя координаты y и z этих точек и подставляя их значения в формулу (13.5), вычисляем величины наибольших напряжений в точках K_1 и K_2

$$\sigma_{(K_1, K_2)} = -P \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P y_{(K_1, K_2)}}{I_x} + \frac{x_P x_{(K_1, K_2)}}{I_y} \right].$$

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности имеет вид

$$|\sigma_{max}| = P \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P y_{max}}{I_x} + \frac{x_P x_{max}}{I_y} \right] \leq [\sigma]. \quad (13.9)$$

Для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки с равными по модулю и максимальными одноименными координатами (прямоугольник, двутавр), формула (13.9) упрощается

$$|\sigma_{max}| = \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_x} + \frac{x_P}{W_y} \right] \leq [\sigma]. \quad (13.10)$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Однако из выражений (13.8) следует, что положение точки приложения силы и положение нейтральной линии связаны. Чем ближе подходит точка приложения силы P к центру сечения, тем меньше ее координаты x_P и y_P и тем больше отрезки a_x и a_y . Таким образом, с приближением точки приложения силы P к центру тяжести сечения нейтральная линия удаляется от него и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки приложения силы P нейтральная линия будет проходить вне сечения и во всех точках сечения будут возникать напряжения одного знака. В таком случае достаточно проверить прочность материала лишь в наиболее удаленной точке K_1 .

13.3 ЯДРО СЕЧЕНИЯ

При конструировании стержней из материалов (бетон, кирпич и др.), хуже сопротивляющихся растяжению по сравнению со сжатием, необходимо, чтобы во всех точках сечения возникали лишь сжимающие напряжения. Этого можно достигнуть, не давая точке A (точке приложения силы P) слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

Пока точка приложения силы P располагается внутри ядра сечения, нейтральная линия не пересекает контура сечения, оно всё лежит по одну сторону от нейтральной линии и во всех его точках возникают сжимающие напряжения. При удалении точки приложения силы P от центра тяжести сечения нейтральная линия приближается к контуру сечения и граница ядра сечения определится тем, что при расположении точки приложения силы P на этой границе нейтральная линия подойдет вплотную к сечению и коснется его.

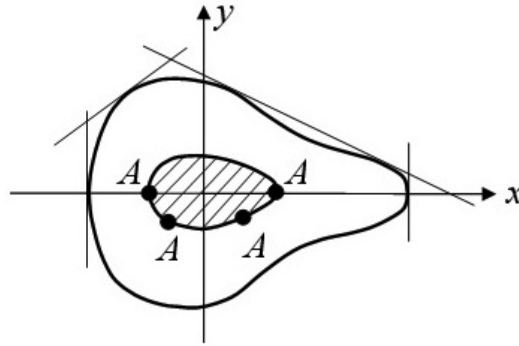


Рисунок 13.4 – К расположению точки приложения сжимающей силы и нейтральной линии

Таким образом, если перемещать точку приложения силы P так, чтобы нейтральная линия «окатывала» контур сечения (см. рис. 13.4), не пересекая его, то точка приложения силы P обойдет по границе ядро сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то нейтральная линия должна «окатывать» контур сечения по огибающей.

Чтобы получить очертание ядра сечения, необходимо дать нейтральной линии несколько положений, касательных к контуру сечения (см. рис. 13.4).

При многоугольной форме контура сечения (рис. 13.5) нейтральную линию необходимо последовательно совместить с каждой из сторон многоугольного сечения.

Далее для каждого из этих положений определить отрезки a_{xi} и a_{yi} и вычислить координаты x_{Pi} и y_{Pi} точек приложения силы по формулам (13.11), вытекающим из зависимостей (13.8):

$$x_{Pi} = -\frac{i_y^2}{a_{xi}}, \quad y_{Pi} = -\frac{i_x^2}{a_{yi}}. \quad (13.11)$$

Полученные значения являются координатами $x_{яi}$ и $y_{яi}$ точек контура ядра сечения, соответствующих положениям нейтральной линии.

При переходе от одной стороны контура сечения к другой стороне (например, от 1 к 2) нейтральная линия совершает вращение вокруг точки B , разделяющей эти стороны. При этом точка приложения силы P перемещается по границе ядра сечения (представляющей прямую линию) между точками с координатами $(x_{я1}; y_{я1})$ и $(x_{я2}; y_{я2})$, соответствующими рассматриваемым положениям

нейтральной линии. Это объясняется тем, что в соответствии с (13.7) координаты x_p и y_p точек приложения силы P связаны линейно.

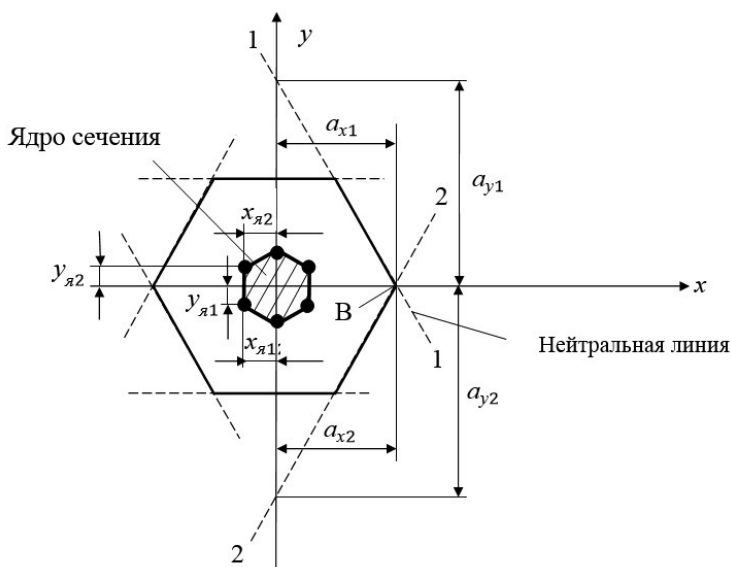


Рисунок 13.5 – Ядро сечения для многоугольного сечения

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Для каких стержней рассмотрено совместное действие продольных и поперечных нагрузок?
2. Как определяются напряжения при совместном действии продольных и поперечных нагрузок?
3. Как записывается условие прочности при совместном действии продольных и поперечных нагрузок?
4. Что называется внецентренным сжатием (растяжением) стержня?
5. Для каких стержней рассмотрено внецентренное сжатие стержня?
6. Как определяются напряжения при внецентренном сжатии (растяжении) стержня?
7. Как определяется положение нейтральной линии при внецентренном сжатии (растяжении) стержня?
8. Как записывается условие прочности при внецентренном сжатии (растяжении) стержня?

ГЛАВА 14 КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

14.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ранее был рассмотрен расчет на прочность валов при чистом кручении. Однако круглые валы редко работают на чистое кручение. Как правило, при работе вал изгибается собственным весом, весом шкивов, давлением на зубья шестерен, натяжением ремней и т.д. В таком случае вал будет находиться в условиях сложного сопротивления и испытывать совместное действие кручения и изгиба (рис. 14.1).

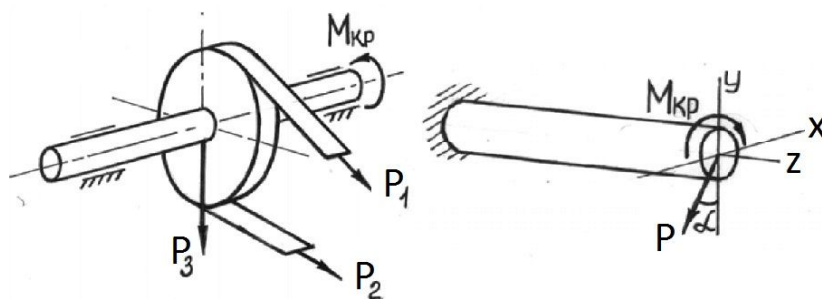


Рисунок 14.1 – Кручение с изгибом

Кручение с изгибом – частный случай сложного сопротивления, который может рассматриваться как сочетание чистого кручения и поперечного изгиба.

14.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ С ИЗГИБОМ

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 \Rightarrow N = 0; \quad \sum F_y \neq 0 \Rightarrow Q_y \neq 0; \quad \sum F_x \neq 0 \Rightarrow Q_x \neq 0; \\ \sum m_z \neq 0 \Rightarrow N = 0; \quad \sum m_y \neq 0 \Rightarrow M_y \neq 0; \quad \sum m_x \neq 0 \Rightarrow M_x \neq 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Обычно две составляющие поперечной силы и изгибающего момента приводят к их полным результирующим. Заметим, что часто поперечной силой пренебрегают (для достаточно длинных валов) и рассматривают кручение с изгибом как совместное действие крутящего и изгибающего моментов.

Опасное сечение вала определяется по эпюрам внутренних усилий. При построении эпюр внутренних усилий при кручении с изгибом необходимо иметь ввиду следующие правила:

1) эпюры крутящего момента, а также эпюры составляющих поперечной силы и изгибающего момента строятся по той же процедуре, что и в случае простого сопротивления;

2) результирующая поперечная сила может не лежать в плоскости действия результирующего изгибающего момента, а потому между ними уже не будет соблюдаться зависимость Журавского;

3) эпюра полного изгибающего момента будет прямой только на тех участках, где изгибающие моменты ограничены прямыми с общей нулевой точкой. На участках, где такая общая точка отсутствует, эпюра полного момента будет описываться вогнутой кривой.

Опасное сечение при кручении с изгибом устанавливается из совместного анализа эпюр крутящего и полного изгибающего моментов. Опасным будет считаться то сечение, где оба момента достигают своей максимальной величины. Если моменты достигают максимума в разных сечениях, необходимо проверить все сечения, в которых внутренние усилия достаточно велики.

Для определения максимальных напряжений используем принцип независимости действия сил и найдем напряжения отдельно от кручения и отдельно от изгиба (рис. 14.2).

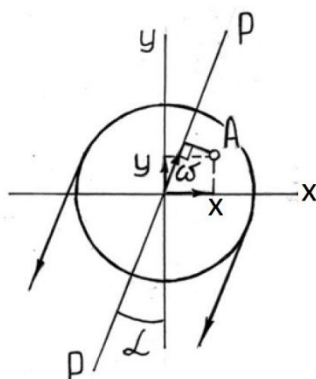


Рисунок 14.2 – Поперечное сечение вала при кручении с изгибом

Напряжения при кручении определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_x \rho}{I_p}; \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \quad (14.2)$$

Напряжения при изгибе определяются из уравнений

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}; \quad \sigma = \frac{M_{\text{и}}}{I_{\text{ос}}} (y \cos \alpha + x \cos \beta), \quad (14.3)$$

где $M_{\text{и}}$ – полный изгибающий момент; $I_{\text{ос}}$ – осевой момент инерции для круглого сечения. Обозначим сумму в скобках как ω . Тогда

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}} \omega}{I_{\text{ос}}}; \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{ос}}}. \quad (14.4)$$

Опасными точками в сечении будут являться точки, наиболее удаленные от нейтральной оси (для круглого сечения – перпендикулярной плоскости действия результирующего изгибающего момента). При этом в точках сечения будет возникать плоское напряженное состояние, а потому расчет на прочность необходимо проводить с привлечением известных теорий прочности.

14.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

Подставив величины максимальных нормальных и касательных напряжений в формулу для главных напряжений ($\sigma_2 = 0$), получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Расчет брусьев при изгибе с кручением проводится с применением теорий прочности. При этом расчет элементов из пластичных материалов выполняется на основе III и IV теорий прочности, а из хрупких – по теории Мора.

Проанализируем расчет на прочность по III теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{ос}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{2W_{\text{ос}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_z^2}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Выражение под корнем называют приведенным (эквивалентным) моментом по третьей теории

$$M_{\text{ЭКВ}}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (14.7)$$

Окончательно условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{III}}{W_{\text{ОС}}} \leq [\sigma]. \quad (14.8)$$

Проанализируем расчет на прочность по IV теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$$
$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{И}}}{W_{\text{ОС}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{2W_{\text{ОС}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0.75M_z^2}}{W_{\text{ОС}}} \leq [\sigma]. \quad (14.9)$$

Приведенный момент по четвертой теории определяется по формуле

$$M_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2 + 0.75M_z^2}. \quad (14.10)$$

Окончательно условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{IV}}{W_{\text{ОС}}} \leq [\sigma]. \quad (14.11)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое кручение с изгибом?
2. Правила при построении эпюр внутренних усилий при кручении.
3. Определение максимальных напряжений при кручении с изгибом.
4. Понятие опасных точек при кручении с изгибом.
5. Расчет на прочность при кручении с изгибом.

ГЛАВА 15 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

15.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статически неопределимая система – это конструкция, силовые факторы в элементах которой невозможно определить только из уравнений равновесия (уравнений статики).

Статическая неопределимость возникает в том случае, когда число наложенных на систему связей оказывается больше, чем это необходимо для обеспечения ее равновесия. При этом некоторые из этих связей становятся «лишними», а усилия в них – «лишними» неизвестными. По числу «лишних» неизвестных устанавливают степень статической неопределимости системы. Отметим, что термин «лишние связи» является условным, так как эти связи необходимы для обеспечения прочности и жесткости системы, хотя и «избыточны» с точки зрения ее равновесия (рис. 15.1а).

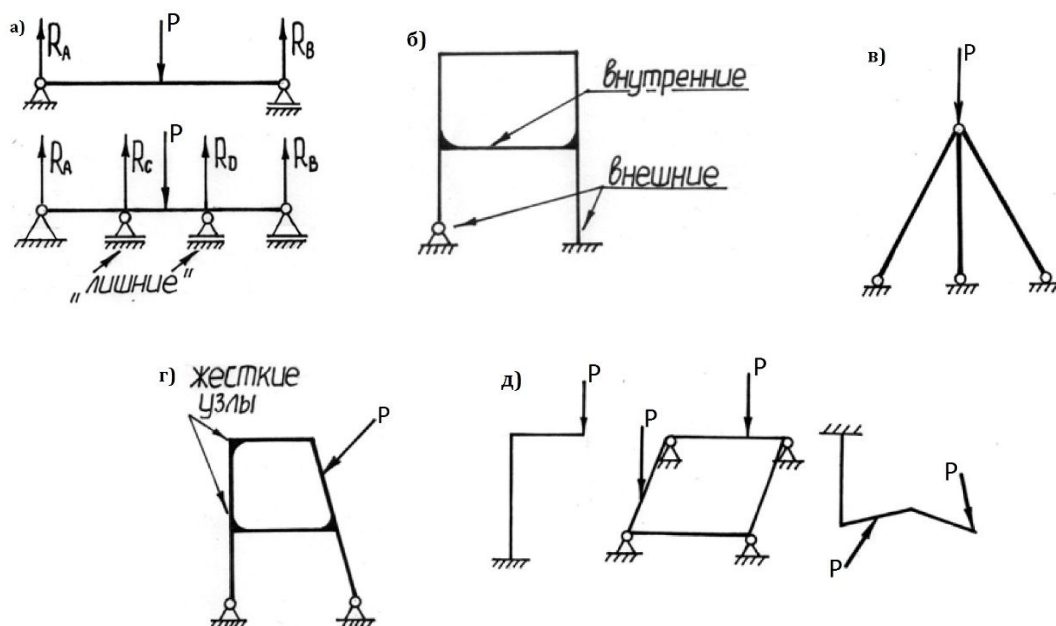


Рисунок 15.1 – Статически неопределимые системы

Связь – условие закрепления или соединения элементов конструкции, не допускающее изменения их взаимного положения (внутренние связи) и положения в пространстве (внешние связи) (см. рис. 15.1б).

Ферма – конструкция, состоящая из прямых стержней, соединенных между собой шарнирами, и нагруженная силами, приложенными в узлах (в шарнирах) (см. рис. 15.1в).

Рама – конструкция, состоящая из стержней произвольной конфигурации и имеющая один или несколько жестких (не шарнирных) узлов (см. рис. 15.1г).

Как рамы, так и фермы могут быть плоскими (все элементы конструкции и силы лежат в одной плоскости), плоскопространственными (все элементы конструкции лежат в одной плоскости, а силы перпендикулярны к этой плоскости), пространственными (элементы конструкции и силы располагаются произвольно друг относительно друга) (см. рис. 15.1д).

Для раскрытия статической неопределимости необходимо, помимо статической стороны задачи, проанализировать деформации системы и в дополнение к уравнениям равновесия составить уравнения совместности деформаций, из решения которых и находятся «лишние» неизвестные. При этом число таких уравнений должно равняться степени статической неопределимости системы.

15.2 ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ

Для того чтобы обратить заданную статически неопределимую систему в статически определимую, в методе сил используется следующий прием. Все «лишние» связи, наложенные на конструкцию, отбрасываются, а их действие заменяется соответствующими реакциями – силами или моментами. При этом для сохранения заданных условий закрепления и нагружения реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения в направлении этих реакций равнялись бы нулю (или заданным величинам) (рис. 15.2).

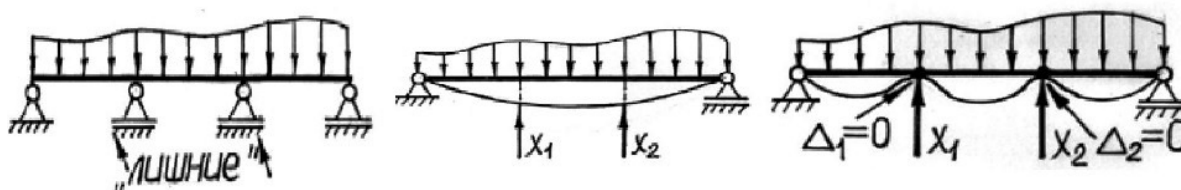


Рисунок 15.2 – Основы метода сил

Таким образом, при раскрытии статической неопределимости этим методом искомыми оказываются не деформации, а соответ-

ствующие им силы – реакции связей (отсюда и название «метод сил»).

Запишем основные этапы раскрытия статической неопределенности по методу сил:

1) определяем степень статической неопределенности – системы, то есть число лишних неизвестных;

2) удаляем лишние связи и заменяем исходную статически неопределимую систему статически определимой. Эта новая система, освобожденная от лишних связей, называется основной. Выбор лишних связей может быть достаточно произвольным и зависит лишь от желания расчетчика, для одной и той же исходной статически неопределимой системы возможны различные варианты основных систем. Однако нужно следить за тем, чтобы основная система оставалась геометрически неизменяемой – ее элементы после удаления лишних связей не должны иметь возможности свободно перемещаться в пространстве;

3) составляем уравнения для деформаций в точках приложения лишних неизвестных. Так как в исходной системе эти деформации равны нулю, то и указанные уравнения необходимо также приравнять к нулю;

4) находим из полученных уравнений величину лишних неизвестных.

15.3 КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Определять перемещения соответствующих точек основной системы можно любым способом, однако лучше всего общими методами – методом Максвелла-Мора или способом Верещагина. При этом дополнительные уравнения перемещений удобно составлять в канонической форме, то есть по определенной закономерности.

В общем случае система канонических уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Коэффициент δ_{iP} есть перемещение i -й точки основной системы под действием внешних сил. Для его определения можно вос-

пользоваться методом Максвелла-Мора, учитывая все участки конструкции.

$$\delta_{iP} = \sum \int \frac{M_P M_i}{EI_{oc}} dz, \quad (14.2)$$

где M_P – внутренний изгибающий «грузовой» момент; M_i – внутренний изгибающий «единичный» момент.

Коэффициент δ_{ij} есть перемещение i -й точки основной системы под действием j -й единичной силы. Для его определения можно воспользоваться методом Максвелла-Мора, учитывая все участки конструкции.

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{M_i M_j}{EI_{oc}} dz, \quad (14.3)$$

где M_i – внутренний изгибающий «единичный» момент (определяется по i -й «единичной» системе); M_j – внутренний изгибающий «единичный» момент (определяется по j -й «единичной» системе).

Таким образом, для определения коэффициентов δ необходимо определить внутренние изгибающие моменты для нескольких систем: одной «грузовой», загруженной только внешними силами, и несколькими «единичными», каждая из которых загружается всего лишь одной силой – единичной силой, приложенной по направлению и в той точке, где ищется лишняя неизвестная (X). Затем эти внутренние усилия необходимо подставить в интеграл Максвелла Мора и найти δ .

Существует способ значительно упростить систему канонических уравнений метода сил, если есть возможность учесть симметрию конструкции и приложенных к ней нагрузок, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений оказываются равными нулю.

Усилия (и внешние, и внутренние), действующие на симметричную конструкцию, можно разделить на симметричные и кососимметричные.

Симметричной нагрузка будет являться в том случае, если усилия, приложенные к одной части конструкции, зеркально отображаются в усилиях, приложенных к другой ее части.

Кососимметричной будем считать нагрузку, если усилия, приложенные к одной части конструкции, являются зеркальным отоб-

ражением усилий, приложенных к другой ее части, но взятых с противоположным знаком.

Заметим, что любую несимметричную нагрузку, приложенную к симметричной конструкции, можно разложить на две составляющие, одна из которых будет симметричной, а другая – кососимметричной (рис. 15.3).

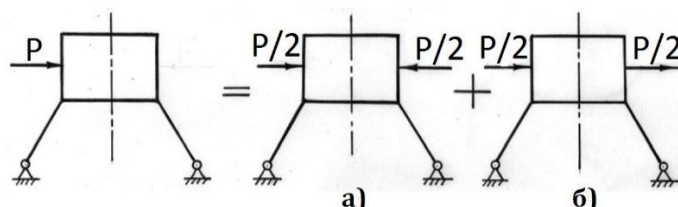


Рисунок 15.3 – Симметричные (а) и кососимметричные (б) нагрузки

Особенностью, упрощающей решение статически неопределимых задач с учетом симметрии, является тот факт, что в качестве лишних неизвестных здесь целесообразно выбирать не реакции опор, а внутренние усилия, расположенные в плоскости симметрии конструкции (рис. 15.4).

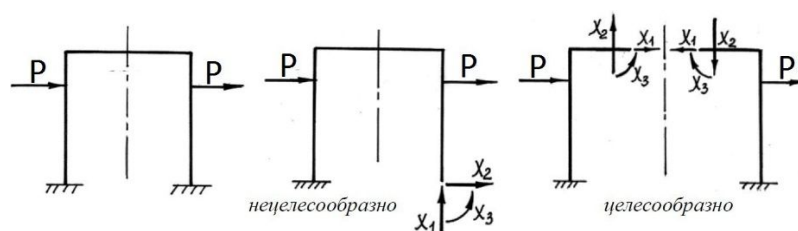


Рисунок 15.4 – Составление расчетной схемы с учетом симметрии

При этом искомые внутренние усилия можно будет также подразделить на симметричные и кососимметричные: осевое усилие N и изгибающие моменты M_y , M_x – симметричные силовые факторы; а поперечные силы Q_y , Q_x и крутящий момент M_z – кососимметричные.

При анализе симметричных конструкций удобно использовать следующие правила:

1) в симметричной конструкции при симметричной внешней нагрузке в плоскости симметрии равны нулю кососимметричные внутренние усилия;

2) в симметричной конструкции при кососимметричной внешней нагрузке в плоскости симметрии равны нулю симметричные внутренние усилия.

После того, как путем решения системы канонических уравнений найдены неизвестные «лишние» усилия X_1, X_2, \dots, X_n , эти усилия и заданную нагрузку можно приложить к основной системе (получим эквивалентную статически определимую систему). Затем от их совместного действия обычным способом можно определить внутренние усилия по участкам системы, построить их эпюры и провести расчет на прочность.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое статически неопределимая система?
2. Что такое связь?
3. Что такое ферма и рама?
4. Основная идея метода сил.
5. Учет симметрии при расчете статически неопределимых систем.

ГЛАВА 16 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

16.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Ранее были рассмотрены методы определения напряжений и деформаций при растяжении и сжатии, сдвиге и кручении, изгибе. Были установлены критерии прочности материала при сложном сопротивлении. Однако в ряде случаев проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность и жесткость бывает недостаточно для того, чтобы получить полное представление о работе сооружения.

Наряду с проблемами прочности и жесткости существует проблема устойчивости инженерных сооружений и их конструктивных элементов. При изучении предыдущих тем полагалось, что во время деформации любой системы (ее элемента) имеет место не требующая уточнений форма равновесия. В действительности же в деформированном состоянии равновесие между внешними силами (нагрузкой) и вызываемыми ими внутренними усилиями может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

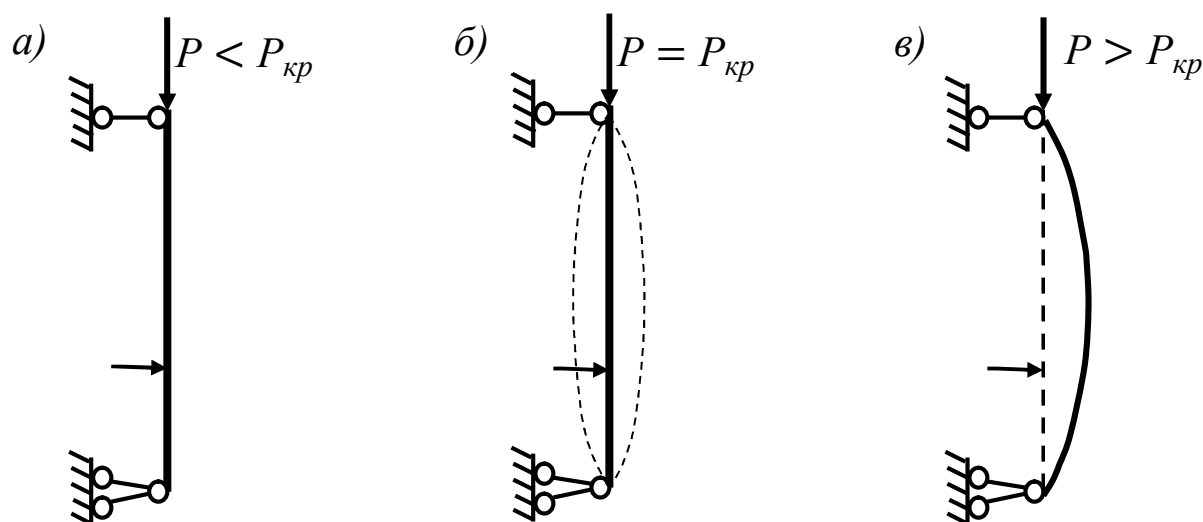


Рисунок 16.1 – Формы равновесия сжатого стержня:
а) устойчивое; б) критическое (безразличное); в) неустойчивое

Упругое равновесие устойчиво, если деформированная система (ее элемент) при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться начальному состоянию и возвращает-

ся к нему после устранения малого горизонтального воздействия, нарушившего начальное равновесное состояние (см. рис. 16.1а).

Упругое равновесие неустойчиво, если деформированная система (ее элемент) при любом малом отклонении от состояния равновесия приобретает стремление продолжать деформироваться в направлении малого отклонения и после устранения малого горизонтального воздействия в начальное равновесное состояние не возвращается (см. рис. 16.1в).

Между этими двумя состояниями равновесия существует критическое (переходное) равновесное состояние, при котором деформированная система (ее элемент) находится в безразличном равновесии: может сохранить начальное равновесное состояние и с той же вероятностью может его потерять от самого малого горизонтального воздействия (см. рис. 16.1б).

Устойчивость формы равновесия деформированного сжатого стержня зависит от величины приложенной к нему нагрузки. Если сила сжимающая стержень невелика ($P < P_{кр}$), то начальная прямолинейная форма равновесия сжатого стержня является устойчивой (см. рис. 16.1а). При увеличении сжимающей силы до значения ($P = P_{кр}$) в стержне возникает критическое (безразличное) равновесие, при котором наряду с прямолинейной формой равновесия возможны смежные с ней слегка искривленные формы равновесия (штриховые линии на рис. 16.1б). При дальнейшем самом незначительном возрастании сжимающей силы ($P > P_{кр}$), характер деформации стержня резко изменяется – стержень выпучивается (см. рис. 16.1в), т.е. прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой.

Сжимающая сила, превышение которой приводит к потере устойчивости сжатого стержня (смене начальной прямолинейной формы равновесия на криволинейную форму равновесия), называется критической и обозначается $P_{кр}$.

Достижение сжимающей силой критического значения равносильно разрушению системы (сжатого стержня), т.к. криволинейная форма равновесия неминуемо будет утрачена из-за практически неограниченного увеличения деформаций и напряжений.

Особенность разрушения вследствие потери устойчивости заключается в том, что обычно оно происходит внезапно и очень

быстро и при низких значениях напряжений, когда прочность системы (сжатого стержня) далеко не исчерпана.

16.2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Расчет, связанный с определением критической силы сжатого стержня, иногда называют расчетом стержня на продольный изгиб. Целью такого расчета является определение наименьшего значения осевой сжимающей силы $P_{\min} = P_{\text{кр}}$, при которой возможно равновесие слегка искривленного стержня (задача Эйлера).

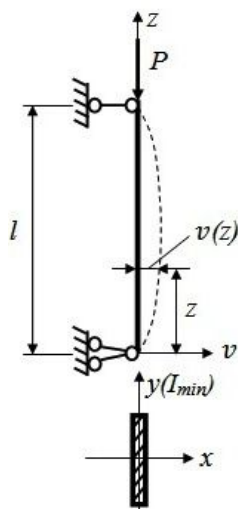


Рисунок 16.2 – Расчетная схема для определения критической силы

Решение поставленной задачи достигается путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси сжатого стержня (см. рис. 16.2.)

$$EI_{\min} v'' = -M_{\text{изг}}, \quad (16.1)$$

где I_{\min} – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения (т.к. изгиб стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, т.е. перпендикулярно к той центральной оси поперечного сечения, относительно которой осевой момент инерции сечения минимален).

Знак « \rightarrow » в правой части уравнения (16.1) обусловлен тем, что знак второй производной от прогиба v'' и знак изгибающего момента $M_{\text{изг}} = Pv$ всегда противоположны.

Выражение (16.1) можно записать иначе:

$$EI_{\min} v'' = -Pv. \quad (16.2)$$

Разделив (16.2) на $EI_{\min} \neq 0$ и обозначив $\frac{P}{EI_{\min}} = \kappa^2$, получим однородное дифференциальное уравнение вида

$$v'' + \kappa^2 v = 0. \quad (16.3)$$

Его решение имеет общий вид

$$v = A \sin \kappa z + B \cos \kappa z, \quad (16.4)$$

где A и B – постоянные интегрирования.

Для их определения используются условия закрепления стержня:

- 1) при $z = 0 \rightarrow v = 0$;
- 2) при $z = l \rightarrow v = 0$.

Из первого условия следует, что $B = 0$, в связи с чем (16.4) принимает вид

$$v = A \sin \kappa z. \quad (16.5)$$

Из второго условия следует, что $0 = A \sin \kappa l$.

Так как согласно условиям задачи $A \neq 0$, то $\sin \kappa l = 0$ и, следовательно,

$$\kappa l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi,$$

где n – любое целое число.

Тогда $\kappa = \frac{\pi n}{l}$, а, следовательно, $\kappa^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$.

С учетом того, что $\kappa^2 = \frac{P}{EI_{\min}}$, получим

$$\frac{P}{EI_{\min}} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Так как $P_{\text{кр}} = P_{\min}$, то $P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min} n_{\min}^2}{l^2}$.

Учитывая, что $n_{\min} = 1$, имеем

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (16.6)$$

Выражение (16.6), получено Эйлером и позволяет определить критическую силу для сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами.

16.3 ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ОТ СПОСОБА ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Помимо рассмотренного основного способа (с шарнирно закрепленными концами) фиксации стержня существуют и другие варианты закрепления концов стержня. Формула Эйлера, обобщающая все возможные варианты, принимает вид

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (16.7)$$

где μ – коэффициент приведения длины стержня; $l_{\text{прив}} = \mu l$ – приведенная длина стержня.

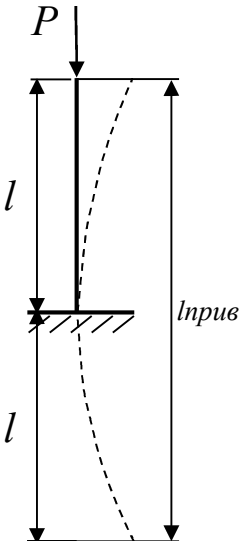
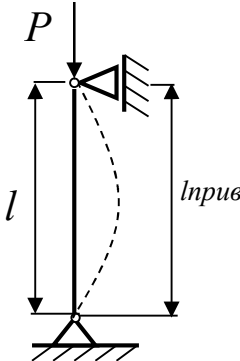
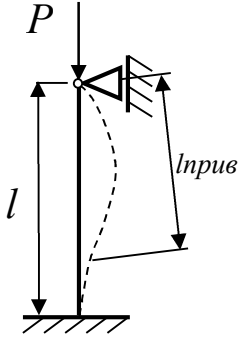
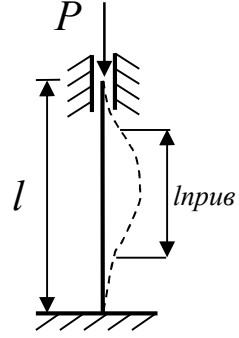
Имеется возможность сравнения (табл. 16.1) вида изогнутых осей (определяется отношение длины полуволны синусоиды к длине стержня) для различно закрепленных сжатых стержней с видом изогнутой оси рассмотренного сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами (с длиной полуволны синусоиды равной длине стержня и, следовательно, с коэффициентом приведения длины стержня $\mu = 1$).

Результаты такого подхода позволяют сделать вывод о том, что с возрастанием жесткости закрепления сжатых стержней значения коэффициента приведения длины стержня μ уменьшаются, а критическая сила $P_{\text{кр}}$ в соответствии с формулой (16.7) увеличивается.

Формула Эйлера применяется при условии соблюдения закона Гука (16.3), т.е. при условии, что фактические сжимающие напряжения в стержне не превышают предела пропорциональности материала стержня

$$\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (16.8)$$

Таблица 16.1 – Справочная информация

Способы закрепления концов стержней			
Один конец – жестко, другой – не закреплен	Оба конца закреплены шарнирно	Один конец – шарнирно, другой – жестко	Оба конца закреплены жестко
			
$l_{прив} = \mu l$			
Значения коэффициентов приведения длины стержней			
$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,5$
Значения критической силы			
$0,25P_{кр}$	$P_{кр}$	$2P_{кр}$	$4P_{кр}$

16.4 КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

По значению критической нагрузки можно определить соответствующее значение критического напряжения, используя выражение

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 F} \quad (16.9)$$

или при $I_{\min} = F i_{\min}^2$,

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}, \quad (16.10)$$

где $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

Введем в расчет специальную комплексную безразмерную характеристику стержня – гибкость стержня λ , определяемую из выражения

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (16.11)$$

В результате для определения критического напряжения $\sigma_{кр}$ получим выражение

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (16.12)$$

С учетом выражения (16.7) условие применения формулы Эйлера можно представить выражением

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}} \quad (16.13)$$

или выражением

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (16.14)$$

Введем в расчет специальную характеристику материала стержня – предельную гибкость $\lambda_{\text{пред}}$, определяемую из выражения

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (16.15)$$

В результате условие применения формулы Эйлера можно представить выражением

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}. \quad (16.16)$$

В случае когда $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, используют эмпирические (полученные путем обработки экспериментальных данных) формулы Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - v\lambda + c\lambda^2, \quad (16.17)$$

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = F(a - v\lambda + c\lambda^2), \quad (16.18)$$

где a, v, c – коэффициенты, зависящие от материала стержня.

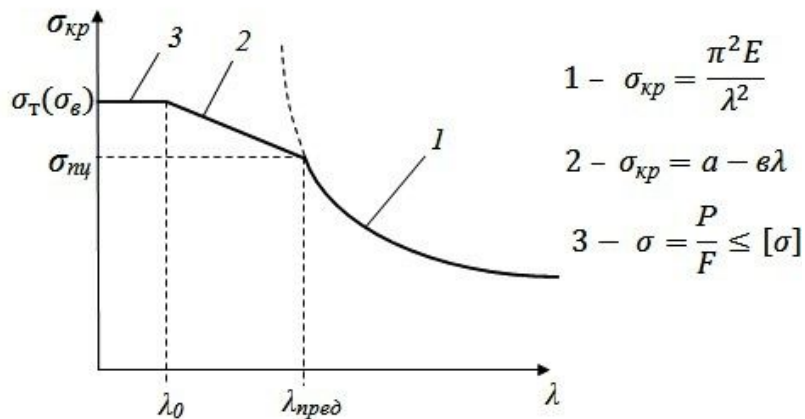
Для стержней из сталей рекомендуется принять коэффициент $c = 0$.

Применение формул Ясинского ограничено, с одной стороны, предельной гибкостью $\lambda_{\text{пред}}$, а с другой стороны – гибкостью λ_0 , при которой $\sigma_{\text{кр}}$ становится равной пределу текучести σ_T материала стержня.

Для определения гибкости λ_0 используется выражение

$$\lambda_0 = (0,2 \div 0,4)\lambda_{\text{пред}}. \quad (16.19)$$

Для большинства материалов гибкости по материалу λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ определены и приводятся в справочниках по сопротивлению материалов. Рассмотрим диаграмму зависимости $\sigma_{\text{кр}}$ от λ (рис. 16.3.). На диаграмме представлены три участка зависимости критической силы от гибкости стержня в соответствии трем типам стержней с указанием соответствующих формул.



1 – гипербола Эйлера; 2 – прямая Ясинского; 3 – участок малой гибкости

Рисунок 16.3 – Диаграмма устойчивости стержней из стали Ст3

Деление стержней по типам производится при помощи критериев, связанных с гибкостью (критериев гибкости):

- $\lambda \geq \lambda_{пред}$ – стержни большой гибкости;
- $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{пред}$ – стержни средней гибкости;
- $\lambda < \lambda_0$ – стержни малой гибкости.

1. Стержни большой гибкости (длинные стержни).

Такие стержни теряют устойчивость без разрушения при упругих деформациях. Напряжения при этом находятся в границах от нуля до предела пропорциональности $\sigma_{пц}$.

2. Стержни средней гибкости (средние стержни).

Такие стержни теряют устойчивость с разрушением при упруго-пластических деформациях. Начало потери устойчивости происходит при упругих деформациях, а после потери устойчивости стержни сразу приобретают остаточные пластические деформации или хрупко разделяются на части.

Напряжения в момент потери устойчивости находятся в следующих границах:

а) для пластичных материалов – от предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ до предела текучести σ_T ;

б) для хрупко-пластичных материалов – от предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ до условного предела текучести $\sigma_{0,2}$;

в) для хрупких материалов – от предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ до предела прочности σ_B .

3. Стержни малой гибкости (короткие стержни).

Такие стержни разрушаются вследствие исчерпания прочности, поэтому расчет таких стержней на продольный изгиб нецелесообразен ввиду отсутствия у них склонности к потере устойчивости.

16.5 РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ПОНИЖЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Расчет центрально сжатых стержней может производиться из условия устойчивости, имеющего вид

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_y, \quad (16.20)$$

где $[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_c$ – допускаемое значение напряжения на устойчивость; $[\sigma]_c$ – основное допускаемое напряжение на прочность при сжатии; φ – коэффициент понижения основного допускаемого напряжения на прочность при сжатии (коэффициент продольного изгиба), который зависит от материала и гибкости стержня и выбирается из интервала $0 < \varphi < 1$.

Условие устойчивости (16.15) позволяет выполнять два вида расчетов:

1. Определение напряжений при заданной нагрузке и размерах сечения стержня и сравнение их с допускаемыми значениями (проверочный расчет на устойчивость стержня);
2. Определение площади поперечного сечения стержня при заданном материале и нагрузке (проектировочный расчет с целью подбора поперечного сечения стержня).

Допускаемая сжимающая нагрузка для стержня, гарантированно не теряющего устойчивость, определяется по выражению

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}, \quad (16.21)$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости.

При этом n_y следует принимать больше коэффициента запаса прочности n , т.к. на устойчивость сжатых стержней оказывают заметное влияние такие факторы, как начальная кривизна стержня, неизбежный эксцентриситет приложения нагрузки. К тому же n_y

существенным образом зависит от материала стержня, поэтому назначается, исходя из следующих рекомендаций:

$$\begin{aligned} \text{для стержней из стали} & n_y = 1,8 \div 3,0; \\ \text{для стержней из древесины} & n_y = 2,8 \div 3,2; \\ \text{для стержней из чугуна} & n_y = 5,0 \div 5,5. \end{aligned}$$

16.6 ЗАМЕЧАНИЯ О ВЫБОРЕ МАТЕРИАЛА И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМАХ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Критическая сила для стержней большой гибкости не зависит от характеристик прочности материала, а зависит от его жесткости (модуля продольной упругости E). Поэтому для двух одинаковых стержней, но изготовленных из разных сталей (из дешевой малоуглеродистой стали и дорогостоящей высокопрочной низколегированной стали) критические нагрузки одинаковы. Таким образом, использование высокопрочных сталей для повышения устойчивости стержней большой гибкости нецелесообразно, а для стержней малой гибкости оправдано, т.к. в этом случае повышение предела текучести увеличивает критическое напряжение и соответственно коэффициент запаса устойчивости.

Наиболее экономичными, а значит рациональными, считаются сечения, у которых наибольшей является величина наименьшего радиуса инерции при наименьшей площади. Для сравнения различных сечений определяется их безразмерная характеристика – удельный радиус инерции сечения ξ по формуле

$$\xi = \frac{i_{\min}}{\sqrt{F}}. \quad (16.22)$$

С учетом (16.17) наиболее выгодными являются трубчатые и немного уступающие им коробчатые тонкостенные сечения.

При расчете стержней на устойчивость необходимо стремиться к их равной устойчивости во всех направлениях, т.е. добиваться того, чтобы главные моменты инерции сечения были по возможности одинаковыми. Однако, если приведенные длины у рассматриваемого стержня в главных плоскостях различны (из-за разного спо-

соба закрепления стержня в главных плоскостях), то следует проектировать сечения с разными главными моментами инерции, добиваясь одинаковости или хотя бы близости гибкостей стержня в главных плоскостях. Если это не представляется возможным, то расчет стержня следует выполнять по максимальной гибкости.

16.7 ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Широко распространенный случай продольного изгиба стержней, вызванный действием только продольно приложенной нагрузки, в действительности почти всегда бывает осложнен какими-нибудь дополнительными факторами. К последним относятся: начальная кривизна стержня, внецентренное приложение сжимающей нагрузки или дополнительные поперечные нагрузки. Предметом изучения в настоящих методических указаниях является именно продольно-поперечный изгиб стержней, вызванный одновременным действием продольных и поперечных нагрузок. Особый интерес при этом представляет расчет на прочность и, в частности, выбор критерия оценки прочности стержней.

При продольно-поперечном изгибе жестких стержней, нагруженных в одной из главных плоскостей инерции, в соответствии с недеформированной схемой стержня используется следующее условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_{0\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (16.23)$$

где $M_{0\max}$ – наибольший изгибающий момент от поперечной нагрузки (сил P).

Однако при расчете гибких (не жестких) стержней наряду с возникновением прогибов v_0 , вызванных действием поперечных нагрузок, возникают дополнительные прогибы v_s , вызванные действием продольной нагрузки N (рис. 16.4). В этом случае условие прочности стержня (в соответствии с деформированной схемой стержня) принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{0\max}}{W_x} + \frac{Sv_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (16.24)$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (16.25)$$

где $\sigma_{\max} = M_{0\max} + Nv_{\max}$ – наибольший полный изгибающий момент при продольно – поперечном изгибе; v_{\max} – наибольший полный прогиб, равный наибольшей сумме прогиба v_0 от поперечных нагрузок и прогиба v_s от продольной нагрузки.

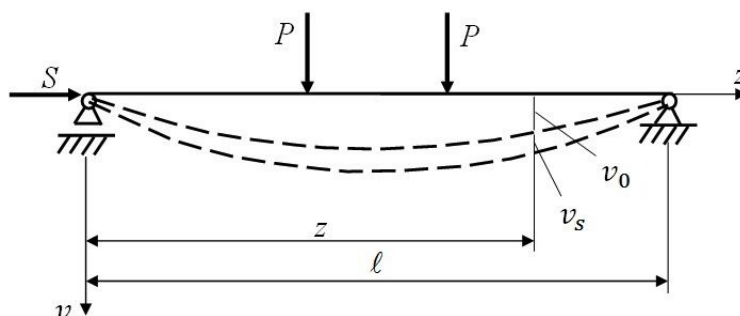


Рисунок 16.4 – Деформированная схема стержня

В связи с тем, что полный изгибающий момент может быть определен только после того, как будет найден полный прогиб, а определение полного прогиба невозможно без знания полного изгибающего момента, то точный способ определения полного изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе стержней (особенно при наличии у них нескольких участков нагружения) требует решения сложного дифференциального уравнения.

На практике обычно используют приближенный способ определения полного изгибающего момента. Так, если шарнирно опертые стержни нагружены только поперечной нагрузкой, направленной в одну сторону, то используют допущение о том, что изогнутая ось таких стержней имеет форму синусоиды

$$v_0(z) = v_{0\max} \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (16.26)$$

При наличии наряду с указанными поперечными нагрузками еще и продольной силы изогнутая ось стержня также имеет форму синусоиды

$$v(z) = v_{\max} \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (16.27)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня нагруженного только поперечной нагрузкой

$$\frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} = -\frac{M_0(z)}{EI_x}. \quad (16.28)$$

при продольно – поперечном изгибе имеет вид

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M_0(z)}{EI_x} - \frac{Sv(z)}{EI_x}. \quad (16.29)$$

Исключением $M_0(z)$ из уравнений (16.28) и (16.29) и с учетом (16.26) и (16.27) получаем

$$(v_{\max} - v_{0\max}) \frac{d^2}{dz^2} \left(\sin \frac{\pi z}{l} \right) = -\frac{S}{EI_x} v_{\max} \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (16.30)$$

После дифференцирования (16.30) имеем

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v_{\max} - v_{0\max}) = \frac{S}{EI_x} v_{\max}. \quad (16.31)$$

Введем величину (Эйлерову силу)

$$S_9 = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (16.32)$$

С учетом введенной силы S_9 получаем формулу для приближенного определения наибольшего полного прогиба

$$v_{\max} = \frac{v_{0\max}}{1 - \frac{S}{S_9}}. \quad (16.33)$$

При использовании формулы (16.32) следует иметь в виду, что сила S_9 введена формально, поэтому определяется независимо от гибкости стержня, а момент инерции сечения следует определять относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки.

Выражение (16.28) приводит к удовлетворительным результатам при условии

$$S \leq 0,8S_9.$$

С учетом (16.33) получается формула для приближенного определения полного наибольшего изгибающего момента:

$$M_{\max} = M_{0\max} + \frac{Sv_{0\max}}{1 - \frac{S}{S_3}}. \quad (16.34)$$

Особенностью расчета на прочность при продольно-поперечном изгибе является нелинейная зависимость напряжений и нагрузки, характеризующая опережающий рост напряжений по сравнению с увеличением нагрузки (рис. 16.5).

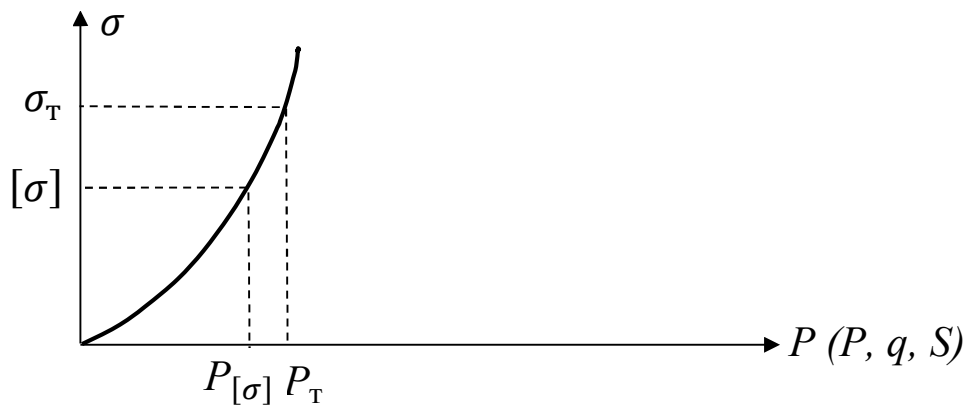


Рисунок 16.5 – Зависимость напряжений от нагрузки

Из рисунка видно, что если для пластичного материала напряжения в стержне равны допускаемым напряжениям $[\sigma]$, то коэффициент запаса прочности по напряжениям равен

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}. \quad (16.35)$$

Однако коэффициент запаса прочности по нагрузкам получается значительно меньше

$$n_p = \frac{P_T}{P_{[\sigma]}} < n_{\sigma}. \quad (16.36)$$

Поэтому расчет при продольно-поперечном изгибе необходимо производить не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чём заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Что называется критической силой?
3. Какое дифференциальное уравнение из теории поперечного изгиба используется при выводе формулы Эйлера?
4. Как записывается формула Эйлера?
5. Что называется гибкостью стержня?
6. Как влияют жесткость EI поперечного сечения и длина стержня l на величину критической силы?
7. Какой момент инерции сечения входит в формулу Эйлера?
8. Что такое коэффициент приведения длины стержня и какие значения он принимает?
9. Что такое предельная гибкость?
10. Как записывается условие применения формулы Эйлера?
11. Как записывается формула Ясинского?
12. Как записывается условие применения формулы Ясинского?
13. Как записывается условие устойчивости сжатого стержня?
14. Что называется продольно-поперечным изгибом?
15. Применяется ли принцип независимости сил при продольно-поперечном изгибе?
16. Как определяются нормальные напряжения при продольно-поперечном изгибе?
17. Почему расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе должен выполняться по допускаемым нагрузкам, а не по допускаемым напряжениям?

ГЛАВА 17 УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

17.1 ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Явление удара получается в том случае, когда скорость рассматриваемой части конструкции или соприкасающихся с ней частей изменяется в очень короткий период времени.

При забивке свай тяжелый груз падает с некоторой высоты на верхний торец сваи и погружает её в грунт: баба останавливается почти мгновенно, вызывая удар. Аналогичные явления происходят при ковке: удар испытывают и изделие, и шток молота с бойком, так как последний очень быстро останавливается при соприкосновении с изделием. Во время удара между обеими ударяющимися деталями возникают весьма большие взаимные давления. Скорость ударяющего числа за очень короткий промежуток времени изменяется и в частном случае до нуля: тело останавливается. Значит, на него от ударяемой детали передаются очень большие ускорения, направленные в сторону, обратную его движению, т.е. передается реакция P_{∂} , равная произведению массы ударяющего тела на его ускорение, т.е.

$$J = P_{\partial} = \frac{Q}{g} a, \quad (17.1)$$

где Q – вес ударяющего числа; a – ускорение.

При расчетах на удар используются гипотезы:

1. Удар считается неупругим, т.е. ударяющее тело продолжает двигаться вместе с ударяемым, не отрываясь от него.

2. Ударяемое тело имеет одну степень свободы, и вся масса тела сосредоточена в точке удара.

3. Кинетическая энергия ударяемого тела полностью преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации ударяемой конструкции.

4. Ударяемая конструкция считается идеально упругой, следовательно, зависимость между динамическими усилиями и перемещениями так же, как и при статическом нагружении, подчиняется закону Гука.

По закону равенства действия и противодействия на ударяемую часть конструкции передается такая же сила, но обратно

направленная (рис. 17.1). Эти силы вызывают напряжение в обоих телах.

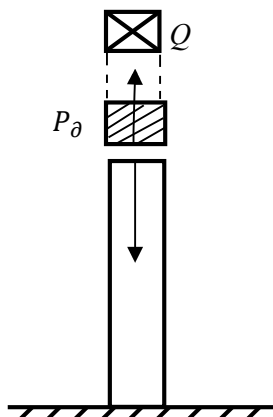


Рисунок 17.1 – Схема нагружения стержня при ударе

Таким образом, в ударяемой части конструкции возникают такие напряжения, как будто к ней была приложена сила инерции ударяющего тела, мы можем вычислить эти напряжения, рассматривая силу инерции P_d как статическую нагрузку нашей конструкции.

Затруднения заключаются в вычислении этой силы инерции. Продолжительность удара, т.е. того промежутка времени, в течение которого происходит падение скорости до нуля мы не знаем, поэтому остается неизвестной величина ускорения a , а стало быть, и силы J . Не применим принцип Даламбера, хотя и вычисление напряжений при ударе представляет собой частный случай задачи учета сил инерции, однако для вычисления силы $J = P_d$ и связанных с ней напряжений и деформаций приходится применять другой прием и пользоваться законом сохранения энергии.

При ударе происходит очень быстрое превращение одного вида энергии в другой: кинетическая энергия ударяющего тела превращается в потенциальную энергию деформации. Выражая эту энергию в функции силы P_d или напряжений, или деформаций мы получаем возможность вычислить эти величины.

17.2 ОБЩИЙ ПРИЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УДАРЕ

А. Предположим, что очень жесткое тело A весом Q , деформацией которого можно пренебречь, падая с некоторой высоты H ,

ударяет по другому телу B , опирающемуся на упругую систему C . В частном случае это может быть падение груза на призматический стержень, один конец которого закреплен (продольный удар), падение груза на балку, лежащую на опорах (изгибающийся удар) (рис. 17.2).

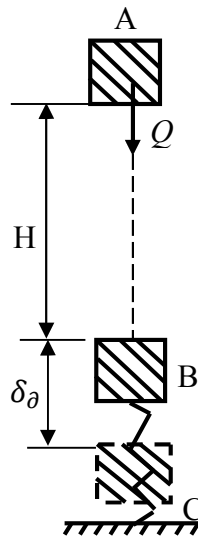


Рисунок 17.2 – Схема нагружения упругого тела при ударе

В течение короткого промежутка времени упругая система C испытывает некоторую деформацию. Обозначим перемещение δ_d . В результате удара в системе C возникнут напряжения P_d (δ_d или τ_d , в зависимости от вида деформации).

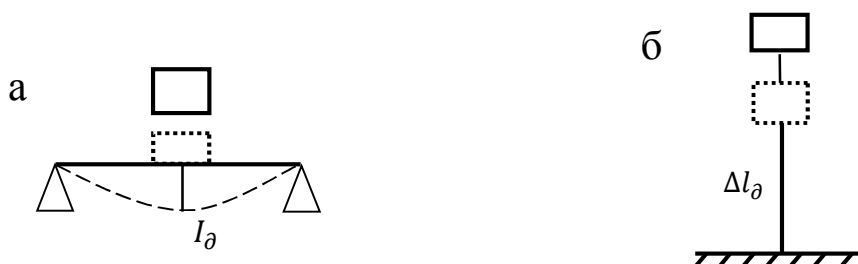


Рисунок 17.3 – Схематизация нагружения балки (а) и стержня (б) при ударе

Полагая, что кинетическая энергия T ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию d деформации упругой системы, можно написать $T = U_d$.

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдет путь $H + \delta_{\partial}$, то его запас энергии будет измеряться произведенной им работой A_{∂} и будет равен

$$T = A_{\partial} = Q (H + \delta_{\partial}). \quad (17.2)$$

Теперь вычислим U_{∂} . При статической деформации потенциальная энергия U_c численно равна половине произведения действующей силы на соответствующую деформацию

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c. \quad (17.3)$$

Статистическая деформация δ_c в ударяемом сечении может быть вычислена по закону Гука, который в общем виде запишется

$$\delta_c = \frac{Q}{c} \text{ или } Q = c \delta_c, \quad (17.4)$$

где c – некоторый коэффициент пропорциональности (иногда называют жесткостью системы), он зависит от свойств материала, формы и размеров тела, вида деформации и положения ударяемого сечения.

Так при простом растяжении-сжатии

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EF}, \quad c = \frac{EF}{l}. \quad (17.5)$$

При изгибе δ , нагруженной посередине силой Q ,

$$\delta_c = f_{cmax} = \frac{Ql^3}{48EI}, \quad c = \frac{48EI}{l^3}. \quad (17.6)$$

Таким образом, формула (17.3) может быть представлена

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c = \frac{c}{2} \delta_c^2, \quad Q = c \delta_c. \quad (17.7)$$

В основу этой формулы положены две предпосылки:

- справедливость закона Гука,
- постепенный – от нуля до окончательного значения – рост силы Q , напряжений P_c , G_c и пропорциональных им деформаций δ_c .

Опыты с определением E по наблюдениям над упругими колебаниями стержней показали, что при динамическом действии

нагрузок закон Гука остается в силе и модуль упругости имеет свою величину. Что касается характера нарастания напряжений и деформаций, то и при ударе деформация происходит хотя и быстро, но не мгновенно, δ_c постоянно растет в течение короткого промежутка времени от нуля до окончательного значения, параллельно росту деформаций возрастают и напряжения P_∂ .

Реакция системы C на действие упавшего груза Q (называется P_∂) является следствием развития деформации δ_∂ , она растет параллельно δ_∂ от нуля до максимума и если напряжения P_∂ не превосходят предела пропорционально, связаны с ней законом Гука

$$\delta_\partial = \frac{P_\partial}{C}, \quad P_\partial = C\delta_\partial.$$

Таким образом, обе предпосылки для правильности принимаются и при ударе. Поэтому можно считать, что

$$U_\partial = \frac{1}{2} P_\partial \delta_\partial = \frac{C}{2} \delta_\partial^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_\partial^2, \quad (17.8)$$

Подставим значения T и U_∂ в уравнение (17.2), получим

$$Q(H + \delta_\partial) = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_\partial^2. \quad (17.9)$$

Преобразовав, получим

$$\delta_\partial^2 - 2\delta_c \delta_\partial - 2H\delta_c = 0 \quad (17.10)$$

или

$$\delta_\partial = \frac{2\delta_c \pm \sqrt{4\delta_c^2 - 4 \cdot 2H\delta_c}}{2} = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}. \quad (17.11)$$

Или удерживая перед радикалом знак «+» для определения наибольшей величины деформации системы в направлении удара, получим

$$\delta_\partial = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\partial \delta_c, \quad (17.12)$$

$$\delta_{\partial} = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right]. \quad (17.13)$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$P_{\partial} = P_c \left[1 + \frac{2H}{\delta_c} \right] = K_{\partial} P_c. \quad (17.14)$$

$$P_{\partial} = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_{\partial} Q. \quad (17.15)$$

Из формулы видно, что величина динамической деформации, напряжений и усилий зависит от величины статической деформации, т.е. от жесткости и продольных размеров ударяемого тела. Тогда динамический коэффициент будет рассчитываться как

$$K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}. \quad (17.16)$$

Заменяя в формуле (17.10) $H = \frac{V^2}{2g}$, где V – скорость ударяющего тела в начальный момент удара, получим

$$K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\delta_c}}. \quad (17.17)$$

но так как $\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c}$, где $T_0 = QH$ – энергия ударяющего тела к моменту начала удара, то

$$K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}}. \quad (17.8)$$

Б. Если в формулах (17.7) и (17.8) $H = 0$, т.е. просто сразу приложим груз Q , то $\delta_{\partial} = 2\delta_c$ и $P_{\partial} = 2P_c$: при внезапном приложении силы Q деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же силы.

Если величина H (или V) велика по сравнению с δ_c , то в подкоренном выражении формул (17.9 – 17.13) можно пренебречь единицей, тогда

$$\delta_{\partial} = \delta_c \left(1 + \frac{2H}{\delta_c} \right); \quad (17.19)$$

$$P_{\partial} = P_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \rightarrow \frac{2H}{\delta_c} \geq 10. \quad (17.20)$$

И при очень большой величине отношения $\frac{2H}{\delta_c}$ можно пренебречь единицей, стоящей перед корнем:

$$\begin{aligned} \delta_{\partial} &= \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}, \\ P_{\partial} &= P_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}, \\ K_{\partial} &= \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}, \\ \frac{2H}{\delta_c} &\geq 110. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Обобщая можно сформулировать прием решения задач на определение напряжений при ударе, применяя закон сохранения энергии, надо:

- 1) вычислить кинетическую энергию ударяющего тела T ;
- 2) вычислить потенциальную энергию U_{∂} тел, воспринимающих удар;
- 3) приравнять U_{∂} и T , из полученного уравнения найти динамическое напряжение или деформацию.

Так как $\frac{2H}{\delta_c}$ может быть представлено отношением $\frac{T_0}{U_c}$, то можно сказать, что изложенный метод применим, пока энергия удара превышает не больше чем в 100 раз потенциальную энергию деформа-

ции, соответствующую статической нагрузке конструкции весом ударяющего груза.

17.3 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ УДАРЕ

Полученные формулы показывают, какие большие качественные различия ведет за собой количественное изменение периода действия силы на тело.

Рассмотрим некоторые случаи удара при простейших деформациях. При этом для нахождения коэффициента динамичности применим основные формулы

$$\begin{cases} K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}; \\ K_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}} \end{cases} \quad (17.22)$$

и приближенную (17.15)

$$K_{\partial} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}. \quad (17.23)$$

Для определения δ_{∂} , p_{∂} , P_{∂} используем зависимости

$$\delta_{\partial} = K_{\partial} \delta_c, \quad p_{\partial} = K_{\partial} \delta_c, \quad P_{\partial} = K_{\partial} Q_c.$$

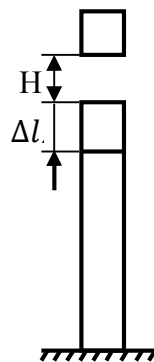


Рисунок 17.4 – Расчетная схема при продольном ударе

Вследствие продольного растягивающего или сжимающего удара (см. рис. 17.4)

$$\begin{aligned} \delta_c = \Delta l_c &= \frac{Ql}{EF}, & Q &= \frac{\Delta l EF}{l}, \\ P_c = \sigma_c &= \frac{Q}{F}, & \sigma &= E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}, & U &= \frac{1}{2} Q \delta_c, \\ U_c &= \frac{Q^2 l}{2EF} = \frac{\sigma_c^2 Fl}{2E} = \frac{EF \Delta l_c^2}{2l}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Для вычисления K_∂ может быть выбрано одно из выражений

$$\begin{aligned} K_\partial &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EF}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Fl}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EF}}. \end{aligned} \quad (17.25)$$

После этого без затруднений вычисляем Δl_∂ , σ_∂ и P_∂ . Приближенная формула для вычисления напряжений в данном частном случае будет иметь вид

$$K_\partial = \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{\frac{2T_0 EF}{Fl}}, \quad \sigma_\partial = \sigma_c K_\partial = \sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}}. \quad (17.26)$$

Замечаем, что как при статической, так и при динамической нагрузке напряжение в сжатом стержне зависит от величины сжимающей силы и от площади поперечного сечения стержня. Но при статическом действии груза Q передающаяся на стержень сила равна Q и не зависит от размеров и материалов стержня. При ударе же величина силы P_∂ , вызывающей напряжения в стержне, зависит от ускорения, передающегося от ударяемого тела на ударяющее, т.е. от величины промежутка времени, в течение которого изменяется скорость ударяющего тела. В свою очередь этот промежуток времени зависит от величины динамической продольной деформации Δl_∂ , от податливости стержня. Чем эта величина больше, т.е. чем меньше E и чем больше длина l , тем больше продолжительность удара, меньше ускорение и меньше давление P_∂ .

Таким образом, при равномерном распределении напряжений, одинаковом во всех сечениях стержня, динамическое напряжение

будет уменьшаться с увеличением площади поперечного сечения стержня и с увеличением его податливости; именно поэтому смягчающие удар всякие рессоры и пружины расположены между ударяющими деталями. Все это и отражают приведенные выше формулы.

В частности, исходя из формулы (17), с известным приближением можно считать, что при продольном ударе величина напряжений зависит уже не от площади, а от объема стержня.

Найдя величину динамического напряжения, можем написать условие прочности

$$\sigma_{\partial} \leq [\sigma_0], \quad (17.27)$$

где $[\sigma_0] = \frac{\sigma_T}{K_{\partial}}$; $K_{\partial} = (1,5 \div 1,6 - 2)$.

Условие прочности при динамическом нагружении будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = K_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}. \quad (17.28)$$

При изгибе величина статической деформации δ_c , представляющий собой статический прогиб f_c в месте удара зависит от схемы нагрузки и условий опираний балки.

Пример:

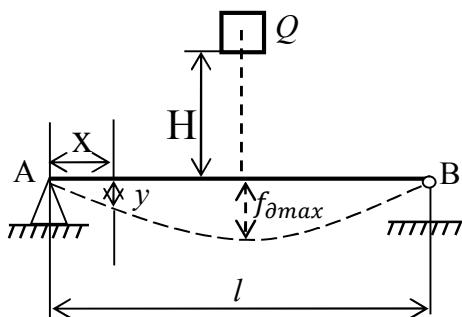


Рисунок 17.6 – Расчетная схема при изгибном ударе

$$\delta_c = f_{\text{стmax}} = \frac{Ql^3}{48EI}. \quad (17.29)$$

$$P_c = \sigma_{\text{стmax}} = \frac{Ql}{4W}. \quad (17.30)$$

$$U_c = \frac{Qf_{\text{стmax}}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{96EI}. \quad (17.31)$$

Подставляя в формулу для K_{∂} значения $\delta_c = f_{\text{стmax}}$ или U_c , находим K_{∂} , а затем и величину динамических напряжений и де-

формаций. Так, например, в случае балки на двух опорах при вычислении $\sigma_{\partial\max}$ имеем

$$\sigma_{\partial\max} = K_{\partial}\sigma_{c\max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EI}{Q^2l^3}} \right]. \quad (17.32)$$

Условие прочности в этом случае запишется

$$\sigma_{\partial\max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EI}{Q^2l^3}} \right] \leq [\sigma_{\partial}] = \frac{\sigma_{\tau}}{K_{\partial}^0}. \quad (17.33)$$

Приближенные формулы для определения $f_{\partial\max}$ и $\sigma_{\partial\max}$ в случае удара по балке на двух опорах получают вид

$$\begin{aligned} f_{\partial\max} = K_{\partial}f_{c\max} &= f_{c\max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \frac{Ql^3}{48EI} \sqrt{\frac{96T_0EI}{Q^2l^3}} \sqrt{\frac{96T_0EI l^6}{48^2 E^2 l^2 l^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{T_0 l^3}{24EI}}. \end{aligned} \quad (17.34)$$

$$\sigma_{\partial\max} = K_{\partial}\sigma_{c\max} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96T_0EI}{Q^2l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0EI}{W^2l}}. \quad (17.35)$$

Аналогичные выражения для $f_{\partial\max}$ и $\sigma_{\partial\max}$ получаются и в случае удара по консоли.

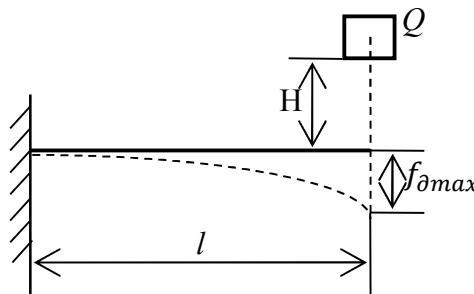


Рисунок 17.7 – Расчетная схема консольной балки при ударе

Имея в виду, что $I = i^2F$, а $W = \frac{I}{z_{\max}} = \frac{I}{i} = \left(\frac{z_{\max}}{i}\right)^2$;

$f_{c\max} = \frac{Ql^3}{3EI}$; $\sigma_{\partial\max} = \frac{Ql}{W}$; $U_c = \frac{Qf_c}{2} = \frac{Q^2l^3}{6EI}$, можем представить формулу (17.22) в виде

$$\sigma_{\partial\max} = \frac{z_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0E}{Fl}}. \quad (17.36)$$

Из формулы (17.36) видно, что динамические напряжения при изгибе балки зависят от модуля упругости материала, объема балки и формы её поперечного сечения ($\frac{z_{\max}}{i}$), а также от схемы нагружения и условий опирания балки (в данном случае в подкоренном выражении стоит $6T_0$, для балок, иначе загруженных и закрепленных, часовой коэффициент T_0 будет другим).

Таким образом, в балке прямоугольного сечения высотой h и шириной b , поставленной на ребро или положенной плашмя, наибольшие напряжения при ударе будут одинаковы и равны (по приближенной формуле)

$$\sigma_{\partial\max} = \sqrt{\frac{18T_0E}{Fl}}, \quad (17.37)$$

так как в обоих случаях

$$\frac{z_{\max}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}.$$

Как известно, при одинаковой статической нагрузке наибольшие напряжения в балке, положенной плашмя, будут в отношении $\frac{h}{b}$ больше, чем напряжения в балке, поставленной на ребро. Это справедливо до тех пор, пока явление удара происходит в пределах упругости.

Сопrotивление балки ударным нагрузкам зависит от момента сопротивления и от жесткости балки. Чем больше податливость, деформируемость балки, тем большую живую силу удара она может принять при одних и тех же дополнительных напряжениях. Наибольший прогиб балка дает в том случае, когда во всех ее сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т.е. если это будет балка равного сопротивления, такие балки при одном и том же

$[\sigma]_d$ дают большие прогибы, чем балки постоянного сечения и значит, могут поглощать большую энергию удара, поэтому рессоры обычно и делают в форме балок равного сопротивления.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Опишите явление удара.
2. Основные гипотезы при ударе.
3. Основные формулы при ударе для определения высоты, деформации, энергии.
4. Расчетная формула коэффициента динамичности при ударе.
5. Условие прочности при ударе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паначев, И. А.* Сопротивление материалов [Электронный ресурс] / И. А. Паначев, Г. В. Широколов, Ю. Ф. Глазков; КузГТУ. – Кемерово, 2010. – 208 с.

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90680&type=utchposob:common>

2. *Паначев, И. А.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / И. А. Паначев, М. Ю. Насонов; КузГТУ. – Кемерово, 2011. – 220 с.

3. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов: учеб. для студентов вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 2007. - 560 с.

4. *Степин, П. А.* Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М.: Высш. шк., 2010. – 314 с.

5. *Афанасьев, А. М.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / А. М. Афанасьев, В. А. Марьин. – М.: Наука, 1975. – 322 с.

**Кузнецов Илья Витальевич
Паначев Иван Андреевич
Глазков Юрий Федорович
Широколобов Георгий Валентинович
Сидельников Сергей Александрович**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ЧАСТЬ I**

Курс лекций

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 18.12.2017. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 10,7
Тираж 100 экз. Заказ

КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А