

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т.Ф. Горбачева»

**С. М. Простов**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Рекомендовано в качестве учебного пособия для самостоятельной  
работы учебно-методическими комиссиями специальностей  
130400.65 «Горное дело» и 271101.65 «Строительство  
уникальных зданий и сооружений»

Кемерово 2013

**Рецензенты:**

**Богатырева А. С. к.т.н., доцент кафедры теоретической  
и геотехнической механики**

**Гордиенко Р. Ф., доцент кафедры теоретической  
и геотехнической механики**

**Филимонов К. А., председатель УМК специальности 130400.65  
«Горное дело»**

**Покатилов А.В., председатель УМК специальности 271101.65  
«Строительство уникальных зданий и сооружений»**

**Простов Сергей Михайлович.** Теоретическая механика: учебное пособие [Электронный ресурс]: для студентов специальностей 130400.65 «Горное дело» и 271101.65 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / С. М. Простов. – Электрон. дан. – Кемерово: КузГТУ, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); зв.; цв.; 12 см. – Систем. требования: Pentium IV; ОЗУ 32 Мб; Windows-XP; (CD-ROM-дисковод); мышь. – Загл. с экрана

Изложены основные теоретические положения статики, кинематики, динамики материальной точки и механической системы, аналитической механики, необходимые для решения задач. Подробно описана методика решения задач, приведены примеры их решения с детальными пояснениями, подобраны задания для самостоятельного решения. Приведены материалы специализированного характера, относящиеся к гирроскопическому ориентированию и геомеханике. Предназначено для студентов специальностей «Горное дело» и «Строительство уникальных зданий и сооружений»

@ КузГТУ  
@ Простов С. М.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>7</b>
<b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ</b>	<b>12</b>
1.1. Классификация сил	12
1.2. Аксиомы статики	14
1.3. Основные виды связей и их реакции	15
1.4. Трение	17
<b>2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ НА ТЕЛО</b>	<b>19</b>
2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил	19
2.2. Алгебраический момент силы относительно центра	21
2.3. Пара сил	22
2.4. Момент силы относительно центра и пара сил как векторы	23
2.5. Момент силы относительно оси	25
2.6. Координаты центра тяжести тела	26
<b>3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ</b>	<b>29</b>
3.1. Равновесие системы сходящихся сил	29
3.2. Теорема о параллельном переносе силы (Пуансо)	29
3.3. Равновесие произвольной плоской системы сил	30
3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил	33
<b>4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ</b>	<b>34</b>
4.1. Методика решения задач на равновесие систем сил	34
4.2. Система сходящихся сил	36
4.3. Произвольная плоская система сил	43
4.4. Произвольная пространственная система сил	52
4.5. Расчет плоской фермы	59
4.6. Центр тяжести однородного плоского тела	65
<b>5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ</b>	<b>69</b>
5.1. Способы задания движения точки	69
5.2. Скорость и ускорение точки	72
5.2.1. Векторный способ	72
5.2.2. Координатный способ	73

5.2.3. Естественный способ	74
5.3. Виды движения точки	77
<b>6. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА</b>	<b>79</b>
6.1. Вращательное движение тела	79
6.2. Поступательное движение тела	83
6.3. Плоскопараллельное движение тела	84
6.4. Способы расчета скоростей плоского механизма	87
6.4.1. Мгновенный центр скоростей	87
6.4.2. План скоростей	89
6.4.3. Теорема о проекциях скоростей точек	90
6.5. Способы расчета ускорений плоского механизма	91
6.5.1. Аналитический способ	91
6.5.2. План ускорений	92
6.5.3. Мгновенный центр ускорений	94
6.6. Сферическое движение тела	96
6.7. Общий случай движения свободного тела	97
<b>7. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ</b>	<b>98</b>
7.1. Понятие составного движения тела (точки)	98
7.2. Абсолютная скорость точки	101
7.3. Абсолютное ускорение точки	101
7.4. Кориолисово ускорение точки	104
<b>8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ</b>	<b>105</b>
8.1. Типовая задача кинематики точки	105
8.2. Расчет ускорений точки	109
8.3. Расчет скоростей плоского механизма	113
8.4. Расчет ускорений плоского механизма	120
8.5. Расчет скоростей в составном движении точки	130
8.6. Расчет ускорений в составном движении точки	133
<b>9. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ</b>	<b>141</b>
9.1. Законы динамики	141
9.2. Виды задач динамики, меры движения материальной точки	143
9.3. Прямолинейные свободные колебания материальной точки	145
9.4. Импульс и работа силы	148
9.5. Теоремы динамики материальной точки	151
9.6. Потенциальное силовое поле	153

9.7. Динамика относительного движения материальной точки	155
<b>10. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ</b>	<b>157</b>
10.1. Меры движения механической системы	157
10.2. Силы, действующие на механическую систему	161
10.3. Теоремы динамики механической системы	164
10.4. Проявление законов динамики механической системы в физических явлениях	168
10.5. Принцип Даламбера	171
10.5.1. Принцип Даламбера для материальной точки	172
10.5.2. Принцип Даламбера для механической системы	173
10.6. Элементы теории удара	176
10.6.1. Основные положения теории удара	176
10.6.2. Удар тела о неподвижную поверхность	177
10.6.3. Соударение двух тел	177
<b>11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ</b>	<b>180</b>
11.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	180
11.2. Применение теорем динамики материальной точки	196
11.3. Применение теорем динамики механической системы	200
11.4. Применение принципа Даламбера	216
<b>12. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА</b>	<b>222</b>
12.1. Классификация связей в аналитической механике	222
12.2. Возможные перемещения и число степеней свободы механической системы	224
12.3. Принцип возможных перемещений	227
12.4. Общее уравнение динамики	229
12.5. Обобщенные координаты	231
12.5.1. Понятие обобщенных координат	231
12.5.2. Обобщенная сила	232
12.5.3. Условия равновесия механической системы в обобщенных координатах	234
12.5.4. Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах	235
<b>13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ</b>	<b>237</b>

13.1.	Применение принципа возможных перемещений	237
13.2.	Применение общего уравнения динамики	249
13.3.	Применение уравнения Лагранжа II рода	253
14.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕНЕНИЕ ГИРОСКОПОВ	265
14.1.	Виды гироскопов, допущения элементарной теории гироскопов	266
14.2.	Свойства гироскопов	268
14.3.	Применение гироскопов, гироскопическое ориентирование	271
14.4.	Некоторые направления применения гироскопов в технике	278
14.5.	Вопросы для самопроверки	281
14.6.	Задачи для самостоятельного решения	282
15.	ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ	286
15.1.	Влияние вращения Земли на равновесие тел	287
15.2.	Связь вращения Земли с геомеханическими процессами	288
15.3.	Влияние вращения Земли на движение тел относительно ее поверхности	292
15.4.	Проявление кориолисовой силы инерции в геофизических процессах	294
15.5.	Вопросы для самопроверки	298
	Список рекомендуемой литературы	301

## ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с ФГОС специальностей «Горное дело» и «Строительство уникальных зданий и сооружений» **целью** изучения дисциплины «Теоретическая механика» является подготовка к области профессиональной деятельности специалиста, включающей научное и инженерное обеспечение деятельности человека в недрах Земли при эксплуатационной разведке, добыче и переработке полезных ископаемых, строительстве и эксплуатации подземных и наземных объектов различного назначения. При изучении теоретической механики обучающиеся получают фундаментальные знания в области механики движения и взаимодействия тел.

**Задачи** изучения теоретической механики следующие:

- усвоить основные законы движения и равновесия тел;
- научиться анализировать и объяснять механические явления, исходя из законов и теорем механики;
- приобрести навыки применения основных законов и методов механики к решению прикладных задач.

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, изучение которой способствует формированию у обучающегося логического мышления, воспитанию научного подхода к постановке и решению прикладных задач, формированию общей технической культуры будущего специалиста, его образа мышления. Глубокие знания теоретической механики, ее основных положений и законов механического движения, необходимы специалисту любого естественнонаучного направления, так как механическое движение лежит в основе функционирования всех машин и механизмов и большинства технологических процессов, сопровождает ряд других более сложных физических процессов и явлений. Исторически теоретическая механика стала первой из естественных наук, оформившейся в аксиоматизированную теорию, и до сих пор остается эталоном, по образцу и подобию которого строятся другие естественные науки. Фундаментальные понятия (пространство, время, тело, масса, сила) и их производные (системы отсчета, механическая система, механическое движение, равновесие, работа, мощность, энергия) имеют общенаучное значение.

Изложение теоретической механики базируется на знаниях математики и физики, изучаемых в рамках общего и высшего профессионального образования. В свою очередь на материале теоретической механики базируются такие общетехнические дисциплины, как прикладная механика, сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, гидромеханика. Теоретическая механика является также основой при изучении дисциплин профессионального блока горного и строительного направлений таких, как геомеханика и геомеханические процессы, механика разрушения и упрочнения, физико-технический контроль процессов горного производства, подземная гидрогазодинамика, физические процессы при добыче и переработке полезных ископаемых, горная геофизика и ряда технологических дисциплин.

Для успешного изучения курса теоретической механики, помимо знаний элементарной математики в рамках школьного курса, обучающийся должен обладать следующими знаниями: из курса физики иметь понятия о массе, силе, скорости, ускорении, знать законы равнопеременного и равномерного движения; из курса математики иметь понятия о векторах и математических операциях с векторами, включая понятия скалярного и векторного произведений, иметь навыки решения дифференциальных уравнений, вычисления интегралов и производных; из курса начертательной геометрии и графики иметь навыки пространственного мышления.

Освоение дисциплины направлено на формирование общекультурных компетенций:

Освоение дисциплины направлено на формирование *общепрофессиональной компетенции* – способность демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовность использовать основные законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать законы механики, включающие в себя аксиомы статики и динамики; условия состояния покоя и движения твердых тел; виды и уравнения движения твердого тела и механиче-

ских систем; виды преобразования механического движения с оценкой его меры и меры причин, вызывающих это движение;

- уметь оценивать и прогнозировать поведение материалов (горных пород) под воздействием на них различных внешних эксплуатационных факторов с использованием законов механики; исследовать состояние покоя механических систем в рамках механики абсолютно твердого тела; определять кинематические характеристики твердых тел в различных случаях их движения; составлять и интегрировать дифференциальные уравнения движения механических систем на примерах процессов горного производства;

- владеть методами оценки поведения материалов (горных пород) под воздействием на них различных эксплуатационных факторов с использованием законов механики; основами методов расчета и исследования напряженно-деформированного состояния массива горных пород; методами расчета реакций связей, кинематических и динамических характеристик механических систем на примерах процессов горного и строительного производства.

Основное содержание теоретической механики как учебной дисциплины состоит в следующем.

*Теоретическая механика* – это наука об общих законах движения материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между ними.

Данное определение весьма емко и нуждается в конкретных пояснениях. Главная особенность теоретической механики состоит в том, что она рассматривает *общие законы*, действующие в любом механическом явлении или процессе. Это требует вполне определенных ограничений. *Первое ограничение* накладывается на рассматриваемые тела: законы динамики распространяются только на *абсолютно твердые тела* (у которых расстояния между любыми точками постоянны) и *материальные точки* (тела, размерами которых пренебрегают). Поскольку реальные тела деформируются и разрушаются под нагрузкой, в чистом виде законы механики применимы далеко не всегда, чаще они дополняются зависимостями, учитывающими неидеальность тел. *Второе ограничение* – скорости движения тел должны быть много меньше

ше скорости света. Практически это ограничение выполняется всегда, поскольку человечество пока не смогло сколько-нибудь заметно приблизиться к этому пределу.

Теоретическая механика занимает важное место в ряду естественных наук: она позволяет связать фундаментальные науки с прикладными. Она предполагает использование классического научного метода: сформулировав ряд исходных положений (аксиом), с помощью математического аппарата получают все необходимые для решения практических задач законы и методы расчета. В связи с этим теоретическая механика использует основные понятия (пространство, время, масса, скорость, ускорение, сила и т.д.), системы единиц и размерности из физики, базируется на применении математических методов (геометрия, тригонометрия, дифференциальное, интегральное, векторное исчисление, теория поля и т.п.), при решении пространственных задач требуются навыки объемного мышления. В свою очередь, механика является базой для целого ряда прикладных наук: более глубоко изучающих движение конкретных физических тел (газо-, гидромеханика, прикладная, небесная механика и т.п.); развивающих методы расчета на прочность (сопротивление материалов, детали машин, строительная механика и т.п.); включающих механические расчеты различных машин и процессов (горные или пищевые машины, геомеханика, кораблестроение и т.п., в том числе даже отдельные разделы криминалистики).

Традиционно курс теоретической механики в технических вузах разделяют на следующие части, отражающие различные стороны анализа законов движения тел и решаемых при этом задач: *статика* (условия равновесия тел); *кинематика* (геометрические свойства движения тел без учета сил и масс); *динамика* (законы движения тел с учетом масс и действующих сил, как правило, в векторной форме); *аналитическая механика* (решение задач статики и динамики в аналитической форме).

Основные этапы формирования теоретической механики как науки неразрывно связаны с потребностями общества.

- 1. Возникновение основ механики* (3–4 в. до н.э.). Законы механики не выходят за рамки философских рассуждений (Аристотель), построения общих моделей строения мира (Птолемей), расчета простейших машин и приспособлений (Архимед). Отсут-

ствует какой-либо математический аппарат и физический эксперимент.

2. *Формирование классической механики* (16–17 в.). Базируется на развитии ремесел, астрономии, мореплавания, военного дела. Наблюдения механических явлений, попытки их описания и объяснения Н. Коперником, Н. Тартальей, Д. Кардано, Г. Галилеем, Х. Гюйгенсом, И. Кеплером и др. завершились изложением основных законов механики Исааком Ньютоном в сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

3. *Развитие аналитической механики* (18 в.). Открытие принципов кинетостатики и возможных перемещений Я. Германом, Л. Эйлером, Ж.-Л. Даламбером, а также развитие дифференциального и интегрального исчисления, методов составления и решения дифференциальных уравнений завершились созданием аналитических методов решения задач, обобщенных Ж.-Л. Лагранжем в работе «Аналитическая механика» (1788 г.).

4. *Современный этап* (с начала 18 в. до наших дней). Характеризуется развитием и углублением задач динамики, формированием основных понятий и задач статики и кинематики (И.-С. Кениг, Л. Пуансо, Л. Кремона, Г. Кориолис и др.). Значительный вклад в развитие механики внесли русские ученые: М. В. Остроградский (аналитическая механика), С. В. Ковалевская (динамика твердого тела), П. Л. Чебышев (теория механизмов), А. М. Ляпунов (теория устойчивости) и др. Главная заслуга русских механиков состоит в развитии и реализации теорий летательных аппаратов, гироскопов, устойчивости кораблей, ракетных двигателей, космических полетов и др. «Школа» русских механиков создана в 1868–1921 гг. Н. Е. Жуковским в МВТУ, в нее вошли А. Н. Крылов, С. А. Чаплыгин, И. В. Мещерский, К. Э. Циолковский, С. П. Королев и другие выдающиеся ученые.

Настоящее учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов специальностей горного профиля. Оно содержит краткое изложение основных теоретических положений, необходимых для решения задач, подробное описание методик и примеры решений с пояснениями, подборку заданий для самостоятельного выполнения. Рассмотрены материалы, относящиеся к приложению законов механики в прикладных дисциплинах и решению специализированных задач.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

*Статика* – раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия тел (состояния их покоя или поступательного равномерного прямолинейного движения) под действием сил.

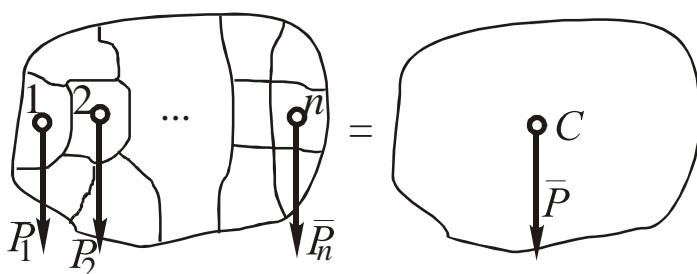
### 1.1. Классификация сил

*Сила* – вектор, однозначно определяющий механическое действие одного тела на другое. Как и всякий вектор, вектор силы  $\bar{F}$  характеризуется тремя параметрами: линией действия, направлением, величиной (модулем). Единица размерности силы в СИ: Н – Ньютон. Сложение, разложение, умножение, проецирование векторов сил производят по правилам действия с векторами.

В зависимости от характера приложения различают силы *объемные* – приложенные ко всем частицам объема тела (к ним относят гравитационные, электростатические, электромагнитные и др. силы) и *поверхностные* – приложенные только к элементам поверхности тела (силы давления и трения). Реальные объемные и поверхностные силы являются *распределенными*. В механике при решении задач эти силы, как правило, заменяют *сосредоточенными*, т.е. приложенными в точке.

Примеры замены основных распределенных сил сосредоточенными.

1. *Гравитационная* (сила тяжести) – сосредоточенную силу



$\bar{P}$  прикладывают в центре тяжести тела  $C$  (у однородного симметричного тела он находится в центре или на оси геометрической симметрии) (рис. 1.1).

Рис. 1.1

2. *Поверхностная* (давление газа, воды, ветра, снега и др.).

Равномерно распределенная нагрузка (рис. 1.2).

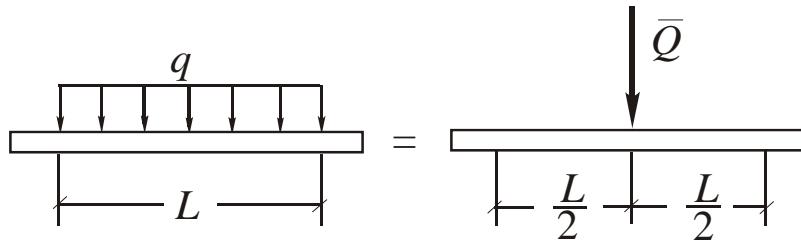


Рис 1.2

$$Q = q L,$$

где  $q$  – интенсивность нагрузки, Н/м;  $L$  – интервал, м.

Нагрузка, распределенная по закону треугольника (рис. 1.3).

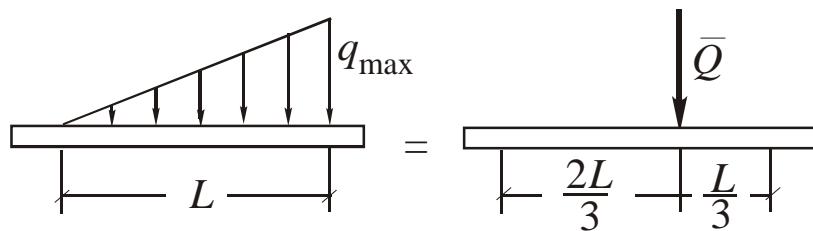


Рис. 1.3

$$Q = 0,5 q_{\max} L.$$

При более сложном характере распределения нагрузки величина  $Q$  пропорциональна площади заштрихованной фигуры.

Кроме того, различают *активные* силы (их линии действия, направления, величины заданы) и *реакции связей* (их линии действия и направления зависят от вида связи, см. п. 1.3).

*Системой сил* называют любую совокупность сил, приложенных к точке, телу или системе тел.

*Эквивалентные* системы сил – под действием которых тело движется одинаково или находится в равновесии.

*Равнодействующая*  $\bar{R}$  – одна сила, эквивалентная системе  $n$  сил:  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum \bar{F}_k$ .

Равнодействующая двух сил  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$  находится по правилу параллелограмма.

*Уравновешенная* система сил – под действием которой тело

находится в равновесии (эквивалентная нулю):  $\sum \bar{F}_k = 0$ .

## 1.2. Аксиомы статики

*Аксиомами* называют положения, принимаемые на основе опыта без доказательств.

1. *Аксиома равновесия системы двух сил*: система двух сил уравновешена только в том случае, когда силы равны по модулю и направлены противоположно по одной линии (рис. 1.4):

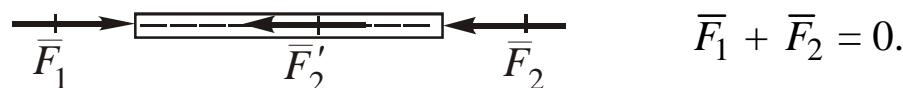


Рис. 1.4

*Следствие*: изменение точки приложения силы на линии вектора не изменяет ее действия на тело, поскольку во всех положениях она будет уравновешена одной и той же силой, приложенной по общей линии действия.

2. *Аксиома сохранения движения тела*: движение или равновесие тела не изменится, если к нему дополнительно приложить или отнять уравновешенную систему сил.

3. *Аксиома действия и противодействия*: действие одного тела на другое сопровождается равным по величине и обратным по направлению противодействием:  $F_{12} = F_{21}$  (рис. 1.5).

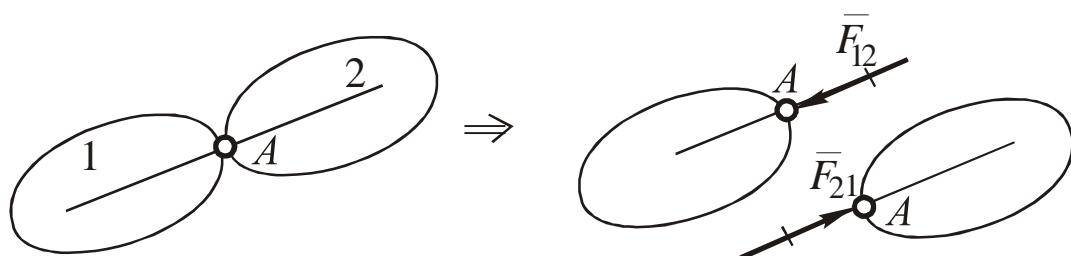


Рис. 1.5

*Примечание*: система сил действия и противодействия не уравновешена, т.к.  $\bar{F}_{12}$  приложена к телу 1, а  $\bar{F}_{21}$  – к телу 2.

4. *Аксиома (принцип) «отвердевания»*: равновесие системы тел не нарушится, если эти тела будут жестко соединены между собой (рис. 1.6).

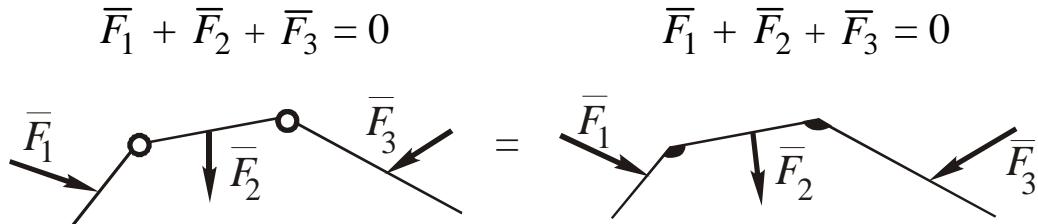


Рис. 1.6

5. *Аксиома связей*: тело, находящееся под действием связей, может быть освобождено от их действия, если к нему дополнительно приложить реакции этих связей.

Под *связью* в статике понимают любое устройство, препятствующее перемещению тела под действием активных сил. *Реакция связи* – сила, с которой связь действует на тело.

### 1.3. Основные виды связей и их реакции

Практически любое реальное тело находится под действием связей. Ниже приведены 4 основные группы связей. Общее правило определения направления реакции связи состоит в следующем: она направлена в сторону, противоположную той, куда связь препятствует перемещаться телу в точке ее приложения.

*Примечание:* на рис. 1.7–1.14 с целью сокращения объема графической информации указаны одновременно и связи, и их реакции, что, строго говоря, противоречит аксиоме связей (п. 1.2).

1. *Гладкая поверхность*. Реакция  $\bar{N}$  приложена в точке (на интервале) контакта, направлена по общей нормали к поверхностям в сторону от отбрасываемой связи (рис. 1.7).

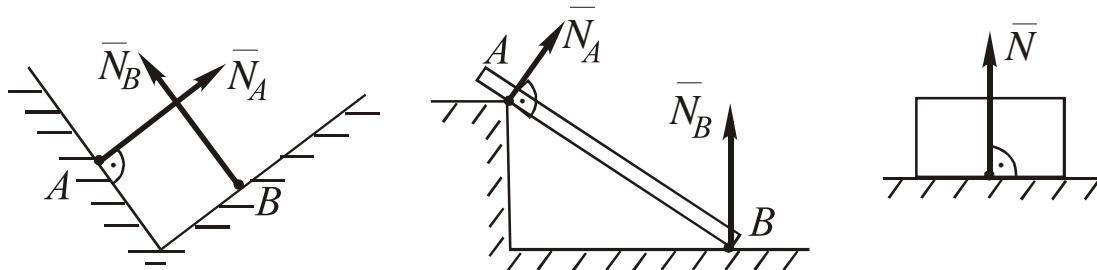


Рис. 1.7

*Подвижный шарнир.* Реакция  $\bar{N}_A$  приложена к оси шарнира и направлена по нормали к опорной шероховатой поверхности от нее (рис. 1.8).

2. *Растянутая нить.* Реакция  $\bar{T}$  приложена в точке присоединения нити и направлена вдоль нее (по касательной), в сторону, куда нить тянет тело (рис. 1.9).

*Стержень* (от нити на чертеже отличается наличием шарниров на концах). Реакция  $\bar{S}$  приложена к точке присоединения и направлена вдоль стержня. Принято считать, что  $S > 0$ , если стержень растянут, и  $S < 0$  – если он сжат (рис. 1.10).

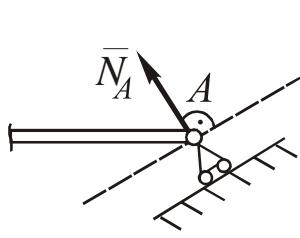


Рис. 1.8

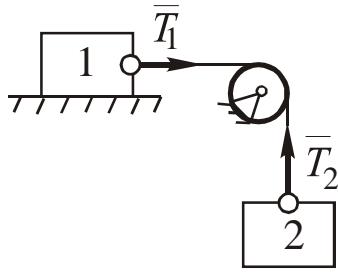


Рис. 1.9

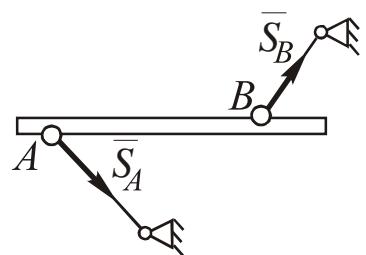


Рис. 1.10

### 3. Неподвижные шарниры.

*Оевой* (в плоском механизме ось шарнира перпендикулярна чертежу). Реакция  $\bar{R}$  приложена к оси и направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач  $\bar{R}$  разлагают на составляющие в этой плоскости (рис. 1.11).

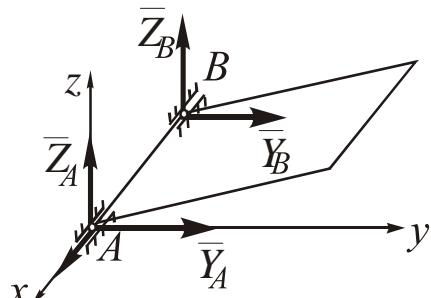
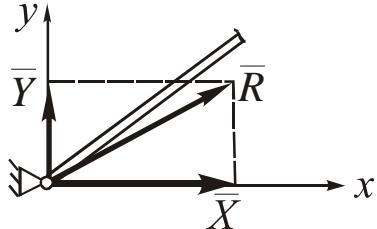


Рис. 1.11

*Сферический (под пятник).* Реакция  $R$  приложена к центру сферы (пересечению оси стержня под пятника с опорной поверхностью).

ностью) и разлагается на составляющие  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (рис. 1.12).

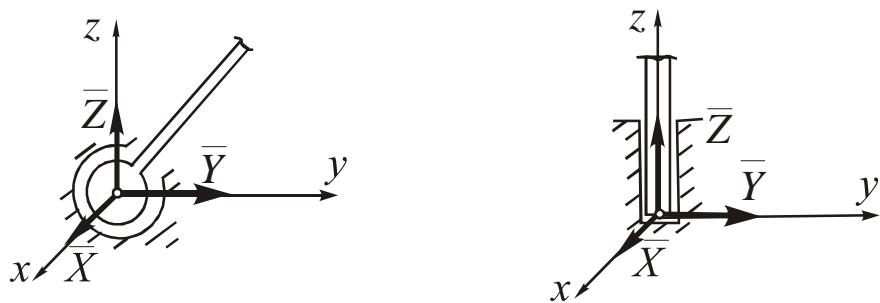


Рис. 1.12

#### 4. Заделки.

*Жесткая* (рис. 1.13). Реакция приводится к точке  $A$  пересечения оси стержня со стенкой и представляет собой комбинацию реакции неподвижного осевого шарнира ( $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$ ) и пары сил с неизвестным реактивным моментом  $m_A$  (см. п. 2.3).

*Скользящая* (рис. 1.14). Реакция приводится к средине  $A$  ползуна и представляет собой комбинацию реакции гладкой поверхности  $\bar{N}_A$  и пары сил с неизвестным реактивным моментом  $m_A$  (см. п. 2.3).

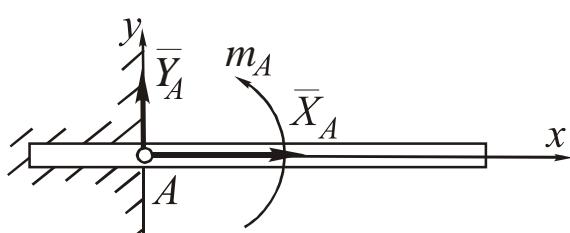


Рис.1.13

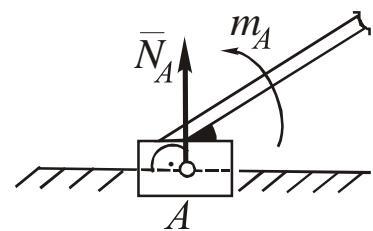


Рис. 1.14

## 1.4. Трение

Поверхности с трением являются особыми видами связей. Принципиально различают два вида трения: скольжения и качения.

*Трение скольжения* возникает при относительном перемещении шероховатых поверхностей. Физическими причинами его являются зацепление шероховатостей и прилипание поверхностей (адгезия). Теория трения скольжения до настоящего времени

не разработана. Расчеты основаны на использовании экспериментально полученных Ш. Кулоном законов, сущность которых сводится к следующему.

1. Сила трения скольжения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  направлена по касательной к соприкасающимся поверхностям в сторону, противоположную относительному смещению (при равновесии – возможному смещению) тела (рис. 1.15).

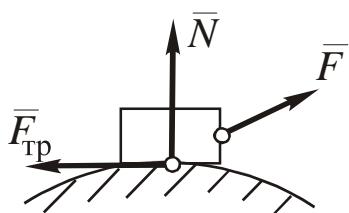


Рис. 1.15

2. С увеличением сдвигающей силы  $\bar{F}$  величина  $\bar{F}_{\text{тр}}$  увеличивается в диапазоне  $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пр}}$ , где  $F_{\text{пр}}$  – предельное значение силы трения, после превышения которого начинается перемещение тела,

$$F_{\text{пр}} = f_0 N; f_0 – \text{статический коэффициент трения}$$

ент трения, зависящий от материала, вида обработки поверхностей, температуры, влажности и определяемый экспериментально. Значения  $f_0$  составляют: для пары «кирпич-бетон» – 0,7–0,8; «дерево-дерево» – 0,4–0,7; «металл-металл» – 0,1–0,3; «металл-лед» – 0,02–0,04. В задачах статики обычно рассматривают предельное равновесие тела, т.е.  $F_{\text{тр}} = F_{\text{пр}}$ . С увеличением относительной скорости величина коэффициента трения  $f = F_{\text{тр}} / N$  сначала резко падает, а затем стабилизируется, при этом  $f < f_0$ .

*Трение качения* возникает при качении колеса. Физической причиной его является деформирование тел, вследствие чего механическое взаимодействие катящегося тела и опорной поверхности происходит не в точке, а на интервале  $AB$  (рис. 1.16).

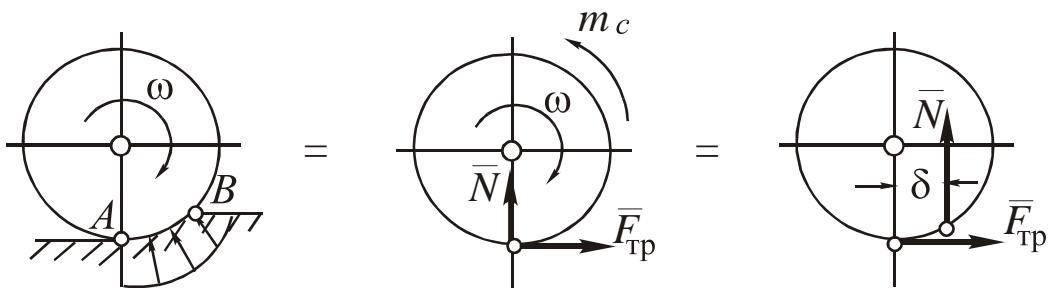


Рис. 1.16

При приведении к точке  $A$  реакция представляет собой комбинацию реакции поверхности с трением скольжения ( $\bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}$ ) и пары сил (см. п. 2.3), направленной в сторону, обратную направлению поворота  $\omega$ , момент которой  $m_c$  (момент сил сопротивления качению) вычисляют по формуле  $m_c = \delta N$ , где  $\delta$  – коэффициент трения качения, измеряющийся в метрах и определяемый экспериментально. Значения  $\delta$  составляют: для пары «дерево-дерево» 0,5–1 мм; «сталь-сталь» – 0,01–0,05 мм.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ НА ТЕЛО

Действие одиночной силы  $\bar{F}$  на тело очевидно: она будет вызывать перемещение точки приложения силы (сдвигение ее) в направлении вектора  $\bar{F}$ . При приложении систем сил их действие сводится к сдвигу и повороту тела.

### 2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил

*Сходящимися* называют силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующую силу  $\bar{F}_k$  при  $k = 1 \dots n$  определяют в соответствии с уравнением  $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$  графически или аналитически.

*Графический* способ основан на правиле сложения векторов (равнодействующая двух сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах). Последовательным применением этого правила можно сложить любое количество сил, однако на практике его в чистом виде не применяют ввиду трудоемкости. Гораздо более удобно построение *силового многоугольника*, стороны которого представляют собой отложенные из начальной точки  $O_F$  в масштабе, последующая из конца предыдущей, слагаемые силы (рис. 2.1). Поскольку данная фигура совмещает в себе все стороны упомянутых выше параллелограммов, равнодействующая  $\bar{R}$  будет замыкающей стороной силового многоугольника.

Графические построения дают высокую погрешность, а для объемных задач они практически невозможны.

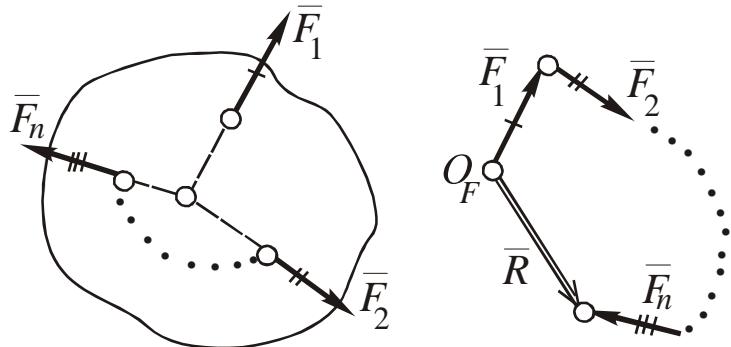


Рис. 2.1

*Аналитический* способ основан на сложении проекций сил  $\bar{F}_k$  на координатные оси  $x, y, z$ :  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$ . Величину вектора  $\bar{R}$  определяют через проекции  $R_x, R_y, R_z$ :  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ , а его направление – через «направляющие косинусы»:

$$\cos(\bar{R}^\Lambda, x) = R_x/R; \cos(\bar{R}^\Lambda, y) = R_y/R; \cos(\bar{R}^\Lambda, z) = R_z/R,$$

где  $R_x = \sum F_{kx}$ ;  $R_y = \sum F_{ky}$ ;  $R_z = \sum F_{kz}$ .

Проекция вектора  $\bar{F}$  на ось  $x$  – скалярная величина

$F_x = \pm F \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – острый угол между линиями действия  $\bar{F}$  и оси  $x$  без учета их направления; знак «+» выбирается в том случае, если с учетом направлений  $\bar{F}$  и  $x$  фактический угол между ними острый, и «–» – если он тупой (рис. 2.2).

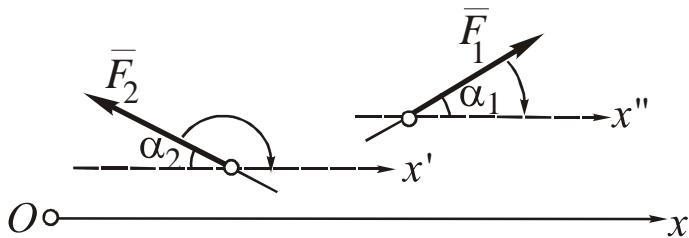


Рис. 2.2

Если  $\bar{F}_{1x} = +F_1 \cos \alpha_1, \bar{F}_{2x} = -F_2 \cos \alpha_2$ .

Поскольку система сходящихся сил всегда имеет равнодействующую  $\bar{R}$ , то  $\bar{R}$  является количественной мерой сдвигающего эффекта данной системы сил.

## 2.2. Алгебраический момент силы относительно центра

При наличии закрепленной точки  $O$  в плоскости действие силы  $\bar{F}$  даст *вращающий эффект*, количественной мерой которого является *момент силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$* , определяемый по формуле

$$m_O(\bar{F}) = \pm \bar{F} h_O,$$

где  $h_O$  – *плечо силы  $\bar{F}$*  относительно точки  $O$ , равное величине перпендикуляра, опущенного из  $O$  на линию действия  $\bar{F}$ . Знак «+» выбирают, если поворот плеча вокруг  $O$  в направлении  $\bar{F}$  виден *против часовой стрелки*, и «-» – если *по часовой*.

На рис. 2.3  $m_O(\bar{F}_1) = +F_1 h_1$ ;  $m_O(\bar{F}_2) = -F_2 h_2$ .

Свойства  $m_O(F)$ .

1.  $|m_O(\bar{F})| = F h_O = 0$ , если

$h_O = 0$ , т.е. момент силы равен нулю, если линия действия силы  $\bar{F}$  проходит через точку  $O$  (рис. 2.4).

2. *Геометрическая интерпретация.*  $|m_O(\bar{F})| = F h_O = AB h_O = 2 S_{\Delta OAB}$ , т.е. момент силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника, образованного силой и этим центром (рис. 2.5).

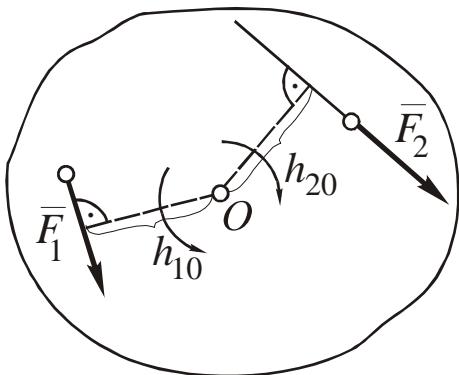


Рис. 2.3

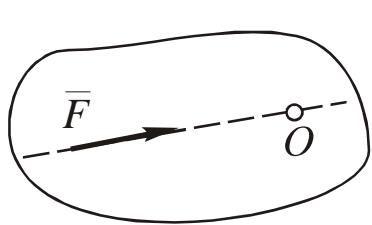


Рис. 2.4

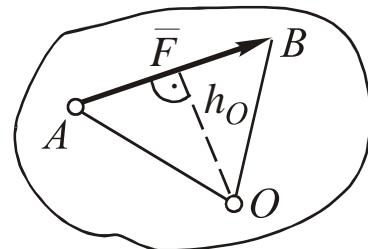


Рис. 2.5

3. *Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона):* относительно любого центра момент равнодействующей  $\bar{R}$  равен сумме моментов слагаемых (составляющих)  $\bar{F}_k$  этой силы.

Пусть система сил  $\bar{F}_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), приложенных к точке  $A$ ,

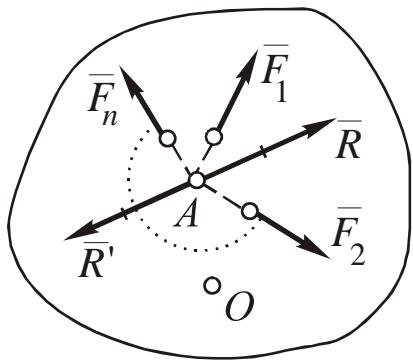


Рис. 2.6

имеет равнодействующую  $\bar{R}$  (рис. 2.6). Мысленно приложим к телу дополнительно силу  $\bar{R}' = -\bar{R}$ . Получим две уравновешенные системы сил:  $\bar{R} + \bar{R}' = 0$  и  $\sum \bar{F}_k + \bar{R}' = 0$ , которые не имеют сдвигающего эффекта. Но тогда обе системы сил не имеют и вращающего эффекта, т.е.:  $m_O(\bar{R}) + m_O(\bar{R}') = 0$  и  $\sum m_O(\bar{F}_k) + m_O(\bar{R}') = 0$ , откуда, приравнивая первые слагаемые левых частей уравнений, получим:  $m_O(\bar{R}) = \sum m_O(\bar{F}_k)$ , что и требовалось доказать.

### 2.3. Пара сил

*Парой сил* называют особую систему из двух параллельных сил, равных по величине и направленных противоположно. Условное обозначение пары  $\Pi(\bar{F}; \bar{F}')$ .

Свойства пары сил.

1. Оценим сдвигающий эффект пары, т.е. найдем ее равнодействующую (рис. 2.7):

$$R_x = F \cos \alpha - F' \cos \alpha = 0; \quad R_y = F \sin \alpha - F' \sin \alpha = 0; \\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0.$$

Таким образом, пара сил *не дает сдвигающего эффекта*.

2. Оценим суммарный вращающий эффект пары (рис. 2.8):

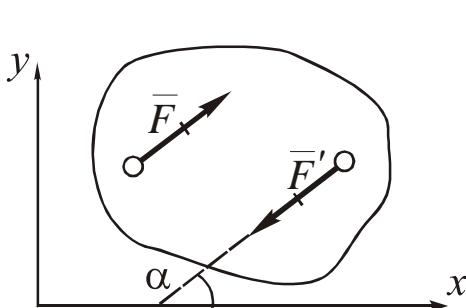


Рис. 2.7

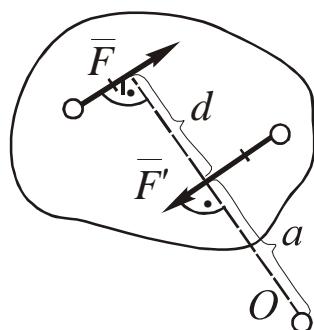


Рис. 2.8

$$m_O(\bar{F}) + m_O(\bar{F}') = -F(a+d) + \bar{F}'a = -Fd = m(\bar{F}, \bar{F}').$$

Величину  $m(\bar{F}, \bar{F}')$  называют *моментом пары*, т.к. она не зависит от выбора центра  $O$ , а величину  $d$  – плечом пары. Величина и знак момента пары определяют *величину и направление вращающего эффекта пары*.

Данное свойство позволяет сделать три практических важных вывода:

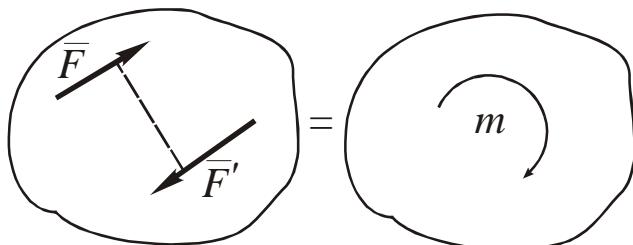


Рис. 2.9

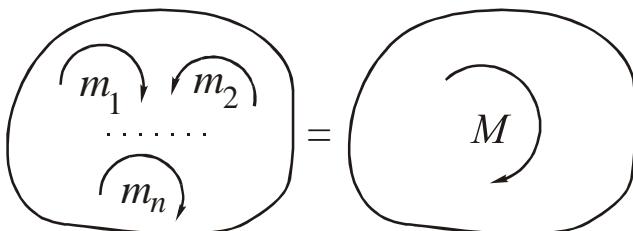


Рис. 2.10

а) пары, имеющие разные значения  $F$  и  $d$ , но равные моменты  $m$ , эквивалентны;

б) при решении задач удобнее показывать не сами силы пары  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ , а направление поворота плеча пары и ее момент  $m$  (рис. 2.9);

в) система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической

сумме моментов слагаемых пар (рис. 2.10):  $M = \sum m_k$ .

#### 2.4. Момент силы относительно центра и пара сил как векторы

При решении пространственных задач удобно задавать вращающий эффект силы или пары вектором  $\bar{m}$ , который дополнительно определяет плоскость их действия.

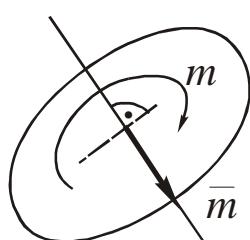


Рис. 2.11

*Вектор пары сил*  $\bar{m} = \bar{m}(\bar{F}; \bar{F}')$  имеет следующие параметры (рис. 2.11):

а) перпендикулярен плоскости действия пары;

б) направлен по правилу «правого винта» по отношению к направлению поворота

пары в плоскости;

в) по модулю равен моменту пары  $m$ .

*Вектор момента силы относительно центра  $\bar{m}_O(\bar{F})$*  выражим через радиус-вектор  $\bar{r}$  точки приложения силы  $\bar{F}$ , отложенный из  $O$  (рис. 2.12):

а) он перпендикулярен плоскости, образованной векторами  $(\bar{r}; \bar{F})$ ;

б) направлен по правилу «правого винта» по отношению к направлению кратчайшего совмещения  $\bar{r}$  с  $\bar{F}$  (если  $\bar{r}$  отложить из точки  $A$ );

в)  $|m_O(\bar{F})| = F h_O = F r \sin(180 - \alpha) = F r \sin \alpha$ .

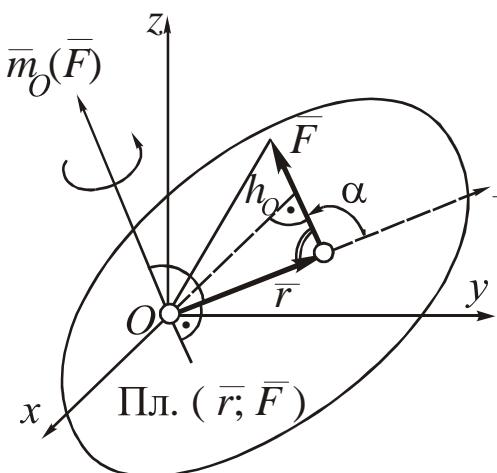


Рис. 2.12

Из приведенного анализа следует, что параметры вектора  $\bar{m}_O(\bar{F})$  совпадают с векторным произведением  $\bar{r}$  и  $\bar{F}$ :

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Особенности использования векторов  $\bar{m}$  и  $\bar{m}_O(\bar{F})$  состоят в следующем:

1) вектор  $\bar{m}$  (рис. 2.11) – свободный, т.к. он не зависит от выбора центра;

2) сложение векторов  $\bar{m}$

и  $\bar{m}_O(\bar{F})$  производят аналогично сложению векторов сил, т.е. графически или аналитически (см. п. 2.1).

Пример графического сложения векторов моментов пар приведен на рис. 2.13.

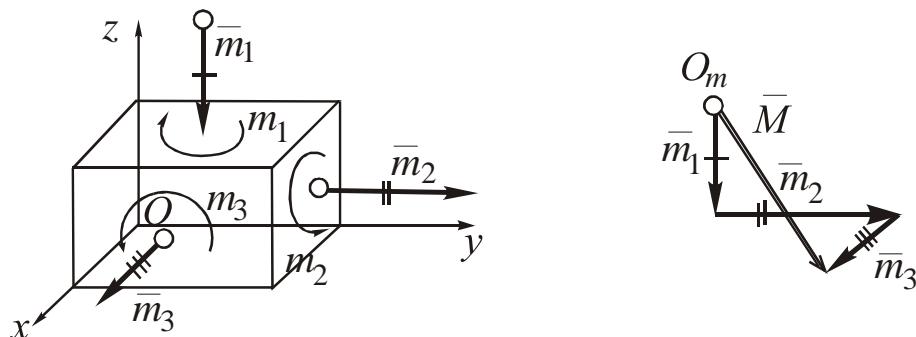


Рис. 2.13

## 2.5. Момент силы относительно оси

Для определения меры вращающего эффекта силы относительно оси можно найти проекцию на эту ось вектора момента силы относительно точки  $C$ , взятой на этой оси.

Например, для момента относительно оси  $z$  (рис. 2.14):

$$m_z(\bar{F}) = \text{Пр}_z \bar{m}_C(\bar{F}) = m_C(\bar{F}) \cos \alpha.$$

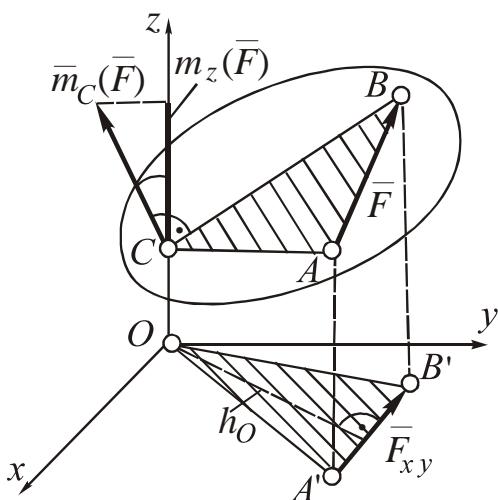


Рис. 2.14

Используя геометрическую интерпретацию  $\bar{m}_C(\bar{F})$ , получим  $m_z(\bar{F}) = 2 S_{\Delta CAB} \cos \alpha = 2 S_{\Delta OA'B'}$ , т.е. независимо от положения точки  $C$  величина  $m_z(\bar{F})$  будет неизменно равна  $2 S_{\Delta OA'B'}$ .

Определение  $m_z(\bar{F})$  указанным выше путем весьма трудоемко и при решении задач не используется. Другой путь состоит в приведении данного момента к моменту относительно центра:  $m_z(\bar{F}) =$

$2S_{\Delta OAB} = m_O(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_O$ , аналогично:  $m_x(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{yz})$ ;  $m_y(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xz})$ .

Таким образом, момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. Для краткости назовем  $\bar{F}_{xy}$ ,  $\bar{F}_{yz}$ ,  $\bar{F}_{xz}$  «вращающими» проекциями силы  $\bar{F}$  на координатные или параллельные им плоскости.

Свойства  $m_z(\bar{F})$ .

1.  $m_z(\bar{F}) = F_{xy}h_O = 0$  в двух случаях: а)  $F_{xy} = 0$  ( $\bar{F} \parallel z$ ); б)  $h_O = 0$  ( $\bar{F} \cap z$ ), т.е. момент равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее.

2. Связь моментов относительно координатных осей и их начала  $O$ :

$$\begin{aligned}
 m_x(\bar{F}) &= \text{Пр}_x \bar{m}_O(\bar{F}); \\
 m_y(\bar{F}) &= \text{Пр}_y \bar{m}_O(\bar{F}); \\
 m_z(\bar{F}) &= \text{Пр}_z \bar{m}_O(\bar{F}), \\
 \text{откуда} \quad |\bar{m}_O(\bar{F})| &= \sqrt{m_x^2(\bar{F}) + m_y^2(\bar{F}) + m_z^2(\bar{F})}.
 \end{aligned}$$

3. Связь моментов силы относительно координатных осей с проекциями на эти оси:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x) = \bar{i}m_x(\bar{F}) + \bar{j}m_y(\bar{F}) + \bar{k}m_z(\bar{F}),$$

откуда  $m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y$ ;  $m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z$ ;  $m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x$ .

4. Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона): если  $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ , то  $m_{z(x, y)}(\bar{R}) = \sum m_{z(x, y)}(\bar{F}_k)$  (определение теоремы и ее доказательство аналогичны п. 2.2).

Рекомендуемый порядок определения момента силы относительно оси:

- 1) проверить, не равен ли момент нулю (свойство 1);
- 2) если момент не равен нулю, найти «вращающую» проекцию  $\bar{F}$  на координатную плоскость или другую плоскость, перпендикулярную оси, указать расположение этой проекции и найти ее величину;
- 3) найти плечо, опустив перпендикуляр из точки  $O$  пересечения оси с плоскостью, перпендикулярной оси, на «вращающую» проекцию, определить знак момента по направлению поворота плеча в направлении «вращающей» проекции аналогично п. 2.2 (при наблюдении из конца оси).

## 2.6. Координаты центра тяжести тела

*Центром тяжести* тела называют точку  $C$ , через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести отдельных частей тела.

Для тел, размеры которых малы по отношению к радиусу Земли, формулы для расчета координат точки  $C$  получают, ис-

пользуя теорему Вариньона (п. 2.5). Для моментов относительно оси  $y$  (рис. 2.15):

т. к.  $\bar{P} = \sum \bar{P}_k$ , то  $m_y(\bar{P}) = \sum m_y(\bar{P}_k)$ , т.е. по п. 2.5:

$$P_{x_C} = P_1 x_1 + \dots + P_n x_n = \sum P_k x_k, \text{ откуда } x_C = \frac{1}{P} \sum P_k x_k.$$

Аналогично получают остальные координаты:

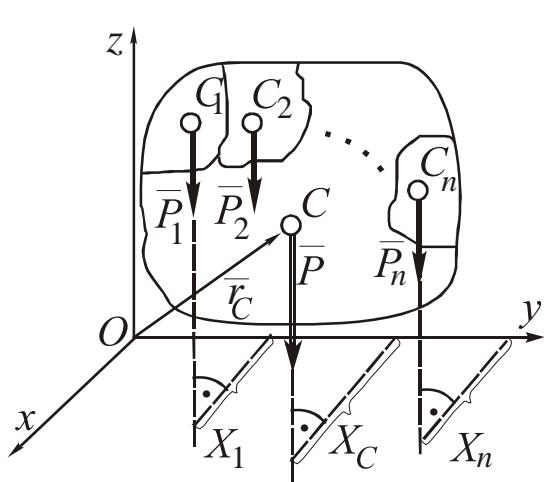


Рис. 2.15

Для тел, изготовленных из одного материала (однородных), формулы для координат и радиуса-вектора  $C$  примут следующий вид (приведены формулы только для  $x_C$ , остальные записывают аналогично):

а) для объемных тел  $x_C = \frac{1}{V} \sum V_k x_k$ ;

б) для плоских тел  $x_C = \frac{1}{S} \sum S_k x_k$ ;

в) для проволочных фигур (тонких линий)  $x_C = \frac{1}{L} \sum L_k x_k$ ,

где  $V, S, L$  – соответственно, объем, площадь и длина всего тела;  $V_k, S_k, L_k$  – объем, площадь и длина  $k$ -го участка тела.

У однородных тел, имеющих плоскость, ось или центр геометрической симметрии, точка  $C$  лежит на этой плоскости, оси или в этом центре.

Если тело нельзя разбить на конечное число  $n$  элементов, то его разбивают на элементарные участки, а суммирование в формулах заменяют интегрированием.

$$y_C = \frac{1}{P} \sum P_k y_k; z_C = \frac{1}{P} \sum P_k z_k.$$

где –  $P_k$  вес  $k$ -й части тела;  $x_k, y_k, z_k$  – координаты центра тяжести  $k$ -й части тела.

Радиус-вектор  $C$  определяется по формуле

$$\bar{r}_C = \bar{i} x_C + \bar{j} y_C + \bar{k} z_C = \frac{1}{P} \sum P_k \bar{r}_k$$

Примеры вывода формул для координат центров тяжести методом интегрирования приведены ниже.

*Дуга окружности (линия) (рис. 2.16):*

$$y_C = 0 \text{ (т.к. } x \text{ — ось симметрии);}$$

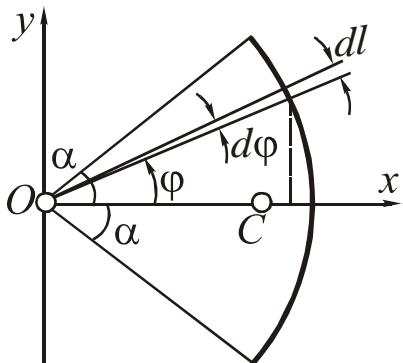


Рис. 2.16

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x \, dl,$$

где  $L = 2R\alpha$  — длина дуги;  $x$  — координата элементарного участка длиной  $dl$ ;  $R$  — радиус дуги;  $2\alpha$  — центральный угол дуги, рад.

Используя угловую координату  $\varphi$ , получим:

$$x = R \cos \varphi; \quad dl = R d\varphi;$$

$$X_C = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

*Круговой сектор (рис. 2.17):*

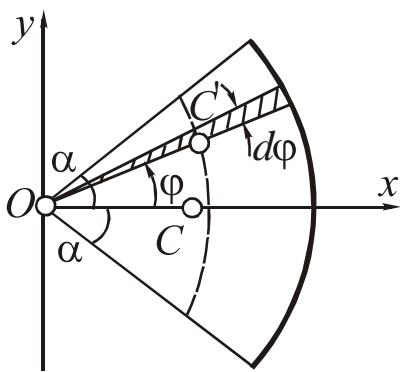


Рис. 2.17

$$y_C = 0;$$

$dS = 2\pi R^2 \alpha$  — площадь сектора;  
 $dS = \pi R^2 d\varphi$  — площадь элементарного участка;  $x = OC \cos \varphi$  — координата центра тяжести элементарного участка ( $OC = 2/3 R$ , т.к.  $C$  — точка пересечения медиан элементарного треугольника).

$$x_C = \frac{1}{2\pi R^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2\pi}{3} R \cos \varphi R^2 d\varphi = \frac{2}{3} \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

### 3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

#### 3.1. Равновесие системы сходящихся сил

Система сходящихся сил обладает только сдвигающим эффектом (п. 2.1), поэтому равновесие тела возможно только в случае, если количественная мера этого эффекта (равнодействующая) равна нулю,  $\bar{R} = 0$ .

При решении задач используют следующие условия равновесия:

а) *аналитическое* (через проекции равнодействующей  $\bar{R}$ );  
 $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$  только в случае, если  $R_x = \sum F_{kx} = 0$ ;  
 $R_y = \sum F_{ky} = 0$ ;  $R_z = \sum F_{kz} = 0$ , т.е. для равновесия необходимо и достаточно, чтобы *суммы проекций сил на координатные оси равнялись нулю*;

б) *графическое* (построением силового многоугольника);  
т.к.  $\bar{R}$  – замыкающая сторона силового многоугольника, то при равновесии этот многоугольник должен быть *замкнутым* (последняя сила  $\bar{F}_n$  должна, с учетом точности построений, прийти в начальную точку  $O_F$ , рис. 2.1).

#### 3.2. Теорема о параллельном переносе силы (Пуансо)

При параллельном переносе силы в новую точку тела для сохранения эквивалентности следует *дополнительно приложить пару*, момент которой равен моменту силы относительно нового центра.

Справедливость теоремы доказывают эквивалентными преобразованиями (рис.3.1):

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F} + \bar{F}' + \bar{F}'' = & m(\bar{F}''; \bar{F}) &= -F d = \\ &= \bar{F}' + \Pi(\bar{F}''; \bar{F}) & &= m_B(\bar{F}). \\ (\text{аксиома 2, п. 1.2});\end{aligned}$$

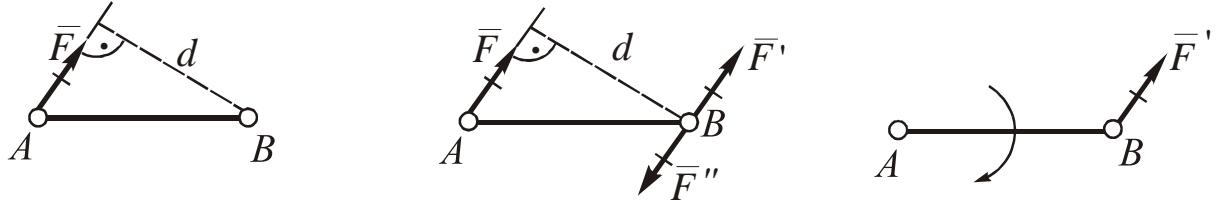


Рис. 3.1

Таким образом,  $\bar{F}_{(A)} = \bar{F}'_{(B)} + \Pi(\bar{F}''; \bar{F})$ , где  $m(\bar{F}''; \bar{F}) = m_B(\bar{F})$ .

### 3.3. Равновесие произвольной плоской системы сил

*Произвольной плоской* называют систему сил, расположенных произвольно в плоскости.

Для определения действия плоской системы сил на тело преобразуем ее в комбинацию систем сходящихся сил и пар с помощью теоремы по п. 3.2, т.е. перенесем все силы  $\bar{F}_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) в произвольную точку  $O$  (эту операцию называют *приведением плоской системы сил к центру  $O$* ) (рис. 3.2):

$$\bar{F}_1 = F'_1 + \Pi(m_1), \text{ где } m_1 = m_0(\bar{F}_1);$$

$$\bar{F}_2 = F'_2 + \Pi(m_2), \text{ где } m_2 = m_0(\bar{F}_2);$$

$$\bar{F}_n = F'_n + \Pi(m_n), \text{ где } m_n = m_0(\bar{F}_n).$$

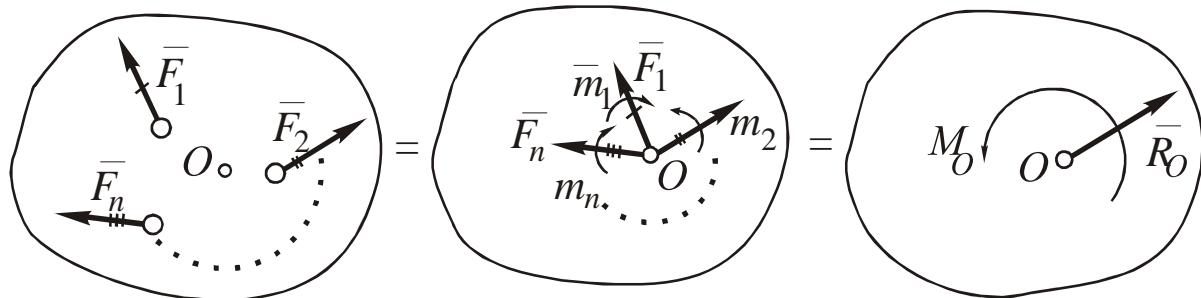


Рис. 3.2

Найдем равнодействующую системы сил  $\bar{F}_k$  и сложим пары сил  $\prod(m_k)$  (п. 2.3):

$$\bar{R}_O = \sum \bar{F}'_k = \sum \bar{F}_k; M_O = \sum m_k = \sum m_O(\bar{F}_k).$$

$\bar{R}_O$  называют *главным вектором*, а  $M_O$  – *главным моментом* плоской системы сил. Следовательно, действие плоской системы сил на тело сводиться к сдвигающему эффекту, мерой которого является  $\bar{R}_O$ , и вращающему эффекту, мерой которого является  $M_O$ .

Для вывода условий равновесия приравняем нулю меры сдвигающего и вращающего эффектов:

$$\begin{aligned} R_O &= \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 0 & R_{Ox} = \sum F_{kx} = \sum F_{kx} = 0; \\ M_O &= \sum m_O(\bar{F}_k) = 0 & R_{Oy} = \sum F_{ky} = \sum F_{ky} = 0; \\ && \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы *суммы их проекций на непараллельные оси и суммы моментов относительно произвольного центра равнялись нулю*.

### Примечания

1. При решении задач иногда удобнее применять *дополнительные формы уравнений равновесия* (приводятся без вывода):

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0; & \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0; & \text{или} & \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum F_{kx} &= 0; & & \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0, \end{aligned}$$

где ось  $x$  не перпендикулярна  
отрезку  $AB$ ;

где центры  $A$ ,  $B$  и  $C$  не должны  
находиться на одной прямой.

2. Т.к. все формы условий равновесия тела содержат 3 уравнения, из них можно найти не более *трех неизвестных* ( $m \leq 3$ ), в этом случае задачу на равновесие плоской системы сил считают *статически определимой*, при  $m > 3$  – *статически неопределенной* (решение таких задач возможно только с учетом деформирования тел, они рассматриваются в курсе сопротивления материалов) (рис. 3.3).

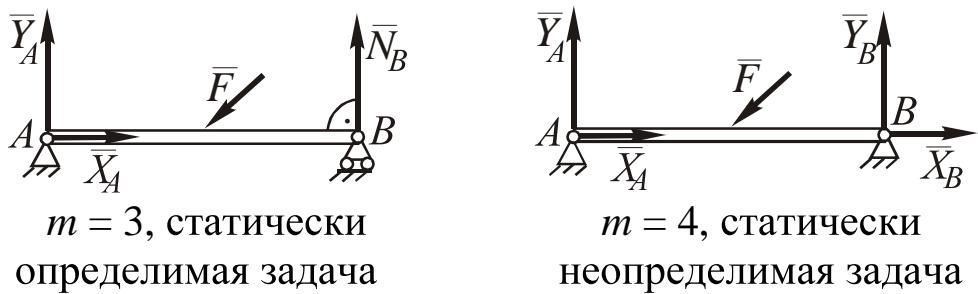


Рис. 3.3

3. Существуют *графические условия равновесия* плоской системы сил, связанные с построением замкнутых силового (пп. 2.1, 3.1) и веревочного многоугольников, которые в данном пособии не рассматриваются.

4. *Системой тел* называют несколько тел, соединенных между собой *внутренними связями*. При решении задач на равновесие системы тел рассматривают равновесие каждого из тел, отделяя их от системы (рис. 3.4) и составляя для каждого по 3 уравнения равновесия, при этом к реакциям внутренних связей применяют аксиому действия и противодействия (аксиома 3, п. 1.2).

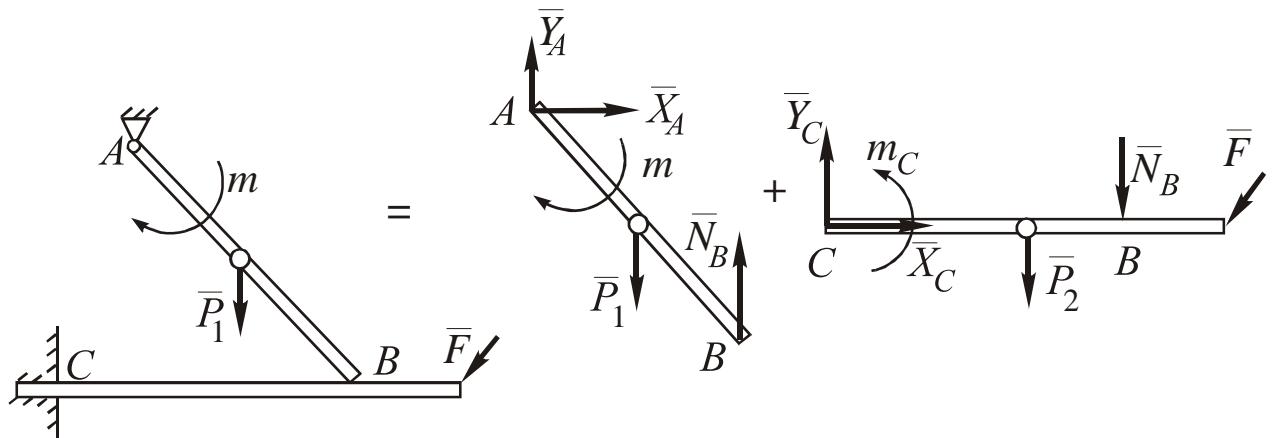


Рис. 3.4

На рис. 3.4  $\bar{N}_B$  – реакция внутренней связи (гладкая поверхность), суммарное количество неизвестных реакций – 6 ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{N}_B, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, m_C$ ), что равно количеству уравнений равновесия для двух тел, т.е. задача статически определима.

Возможно также рассмотрение равновесия системы тел с *отвердевшими внутренними связями* (аксиома 4, п. 1.2).

5. В качестве системы тел может рассматриваться *одно тело (балка) при его сечении*, при этом внутренняя связь считается *жесткой заделкой* (рис. 3.5).

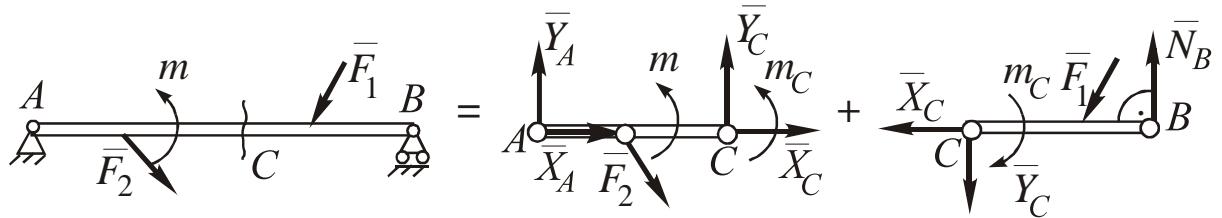


Рис. 3.5

На рис. 3.5  $\bar{X}_C$ ,  $\bar{Y}_C$ ,  $m_C$  – реактивные усилия и момент пары внутри балки.

### 3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

*Произвольной пространственной* называют систему сил, расположенных произвольно в пространстве (объеме).

Преобразуем произвольную пространственную систему сил в комбинацию систем сходящихся сил и пар с помощью теоремы (п. 3.2), т.е. перенесем параллельно силы  $\bar{F}_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), каждую в своей плоскости, в произвольную точку  $O$ , при этом изображая пары сил векторами (приведем систему сил к центру  $O$ ).

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_1 + \Pi(\bar{m}_1), \text{ где } \bar{m}_1 = \bar{m}_O(\bar{F}_1);$$

$$\bar{F}_2 = \bar{F}'_2 + \Pi(\bar{m}_2), \text{ где } \bar{m}_2 = \bar{m}_O(\bar{F}_2);$$

.....

$$\bar{F}_n = \bar{F}'_n + \Pi(m_n), \text{ где } \bar{m}_n = \bar{m}_O(\bar{F}_n).$$

Найдем главный вектор  $\bar{R}_O$  (п.2.1) и главный момент  $\bar{M}_O$  (п. 2.4) пространственной системы сил (рис. 3.6):

$$\bar{R}_O = \sum \bar{F}_k; \quad \bar{M}_O = \sum \bar{m}_k = \bar{m}_O(\bar{F}_k).$$

Для вывода условий равновесия приравняем нулю меры сдвигающего  $\bar{R}_O$  и врачающего  $\bar{M}_O$  эффектов:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = 0, \text{ откуда: } R_{Ox} = \sum F'_{kx} = \sum F_{kx} = 0;$$

$$R_{Oy} = \sum F'_{ky} = \sum F_{ky} = 0;$$

$$R_{Oz} = \sum F'_{kz} = \sum F_{kz} = 0;$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0, \text{ откуда: } M_x = \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ M_y = \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ M_z = \sum m_z(\bar{F}_k) = 0.$$

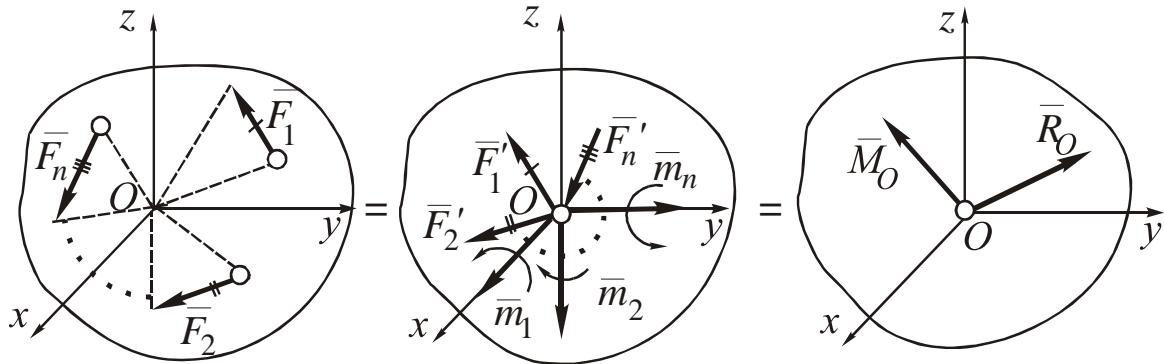


Рис. 3.6.

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы *суммы их проекций на координатные оси и моментов относительно этих осей равнялись нулю*.

## 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

### 4.1. Методика решения задач на равновесие систем сил

1. Установить, равновесие какого тела (тел) следует рассмотреть. Таким будет тело, к которому приложены *все связи*, реакции которых необходимо определить в задаче. Возможны следующие варианты рассматриваемых тел: точка (узел), одиночное тело (например, стержень, шар, цилиндр, пластина и т.д.), система тел. В последнем случае считают внутренние связи отвердевшими (применяют принцип «отвердевания») (п. 1.2) или разделяют систему тел на отдельные тела (п. 3.3, примечание 4).

2. Составление рабочего чертежа. От выбранного сечения тела отбрасывают все связи, заменяя их действие реакциями (п. 1.3). Реакции обозначают соответствующими буквами (произ-

вольное обозначение или применение общего символа реакции  $\bar{R}$  недопустимо). Часть связей (*гладкая поверхность, подвижный шарнир, нить*) имеет вполне определенное направление реакции. Усилие в *стержне*  $\bar{S}$  предполагают положительным (направляют реакцию как у растянутой нити). Составляющие реакций *неподвижных шарниров, жесткой заделки* рекомендуется направлять сонаправленно с координатными осями, а пары с реактивными моментами (у заделок) – против часовой стрелки. Все участки *растянутой нити* при огибании ею блоков имеют одинаковые натяжения, а если к нити подвешен груз, то реакция нити равна весу груза. Линию действия реакции *нити* при наличии отклоняющих блоков определяют по участку, прилегающему к точке ее соединения с телом, независимо от остальных участков. Направление *силы трения скольжения*  $\bar{F}_{\text{тр}}$  вдоль линии действия принимают произвольно.

На чертеже изображают активные силы, при этом распределенные силы заменяют сосредоточенными (рис. 1.2, 1.3).

3. *Составление уравнений равновесия.* Вид уравнений равновесия зависит от конкретного вида системы сил: сходящейся (п. 3.1), произвольной плоской (п. 3.3), произвольной пространственной (п. 3.4). Количество уравнений *не должно быть больше* достаточного для равновесия тела: 2 – для плоской системы сходящихся сил, 3 – произвольной плоской и 6 – пространственной («лишние» уравнения являются алгебраическим следствием основных). Суммарное количество уравнений *должно быть не меньше числа неизвестных* (иначе задача статически неопределенна).

Составление уравнений равновесия следует *вести параллельно*, выясняя ориентацию очередной рассматриваемой силы относительно осей и плоскостей, а затем определяя *все ее проекции и моменты*.

4. *Решение системы уравнений равновесия.* Составленные уравнения для тел объединяют в систему и решают любым методом (наиболее распространен метод подстановок). Использование рациональных приемов позволяет иметь в одном или нескольких уравнениях по одному неизвестному. Это позволяет,

начиная решение с этих уравнений, решить систему методом подстановок. Получение *отрицательных корней* свидетельствует о том, что фактическое направление соответствующих реакций (составляющих) обратное указанным на чертеже.

*5. Проверка решения.* При отсутствии ответов правильность решения может быть проверена графически или аналитически. Точность аналитических расчетов при этом принимают  $0,01 R_{\text{ср}}$ , а графических –  $0,05R_{\text{ср}}$ , где  $R_{\text{ср}}$  – средняя величина модулей найденных  $m$  реакций ( $R_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |R_i|$ ).

## 4.2. Система сходящихся сил

Решение задач имеет следующие особенности.

*Составление рабочего чертежа.* Различают *плоскую и объемную* системы сходящихся сил. В первом случае чертеж изображают в плоскости  $xy$ , во втором – в пространстве  $xyz$ . Систему сил признают сходящейся в случае, когда все силы приложены к одной точке тела, а также когда к различным точкам тела, находящегося в равновесии, в плоскости приложены *три силы* (поскольку при этом равнодействующая двух сил будет направлена по линии действия третьей). Если одной из сходящихся сил является реакция неподвижного шарнира (п. 1.3, поз. 3), то ее не следует разлагать на составляющие, т.к. линия действия ее будет проходить через общую точку пересечения сил.

*Составление уравнений равновесия.* Как известно (п. 3.1), уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил имеют вид:  $\Sigma F_{kx} = 0$ ;  $\Sigma F_{ky} = 0$ . Рекомендуется выбирать *стандартное расположение осей*:  $Ox$  – горизонтально вправо,  $Oy$  – вертикально вверх. Если одну из осей расположить перпендикулярно к неизвестной реакции, то в соответствующем уравнении проекций будет только одна неизвестная сила, что облегчает вычисление корней уравнения равновесия, однако несколько усложняет определение проекций сил.

Если оси  $x$  и  $y$  *взаимно перпендикулярны*, проекции сил находят следующим образом:

1) определяют острый угол  $\alpha$  между линией действия силы  $\bar{F}$  и одной из осей *без учета ее направления*, проекция силы на эту ось будет равна  $F \cos \alpha$ , а на вторую ось –  $F \sin \alpha$ ;

2) мысленно вектор  $\bar{F}$  и оси  $x$ ,  $y$  переносят параллельно в начало вектора  $\bar{F}$ , если *с учетом их направлений* меньший угол между  $F$  и осью *острый*, то проекция на эту ось *положительна*, если он *тупой – отрицательна*.

*Проверка решения.* В задачах данного вида обычно делают графическую проверку – *строят силовой многоугольник*. Выбрав начальную точку  $O_F$  и масштаб сил, откладывают из  $O_F$  в масштабе известные силы (каждый последующий вектор из конца предыдущего), из  $O_F$  и конечной точки построения проводят линии действия неизвестных сил до их пересечения, определяют направления неизвестных сил (ни одна пара стрелок в силовом многоугольнике не должна «сходиться»). Отличие величин неизвестных, найденных двумя способами, не должно превышать 5 %.

*Примечание:* в некоторых задачах допускается применение только геометрического расчета, т.е. выполняют построение силового многоугольника и его решение относительно неизвестных.

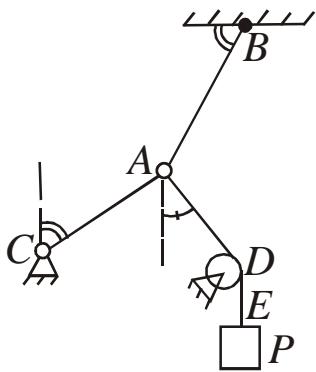


Рис. 4.1

*Пример 1.* Узел  $A$  удерживается в равновесии стержнем  $AC$ , нитями  $AB$  и  $ADE$ , к последней привязан груз весом  $\bar{P}$ . Найти реакции связей (рис. 4.1).

*Примечание:* в дальнейшем применяны следующие обозначения основных углов:  $\angle - 30^\circ$ ;  $\angle - 45^\circ$ ;  $\angle - 60^\circ$ ;  $\angle - 90^\circ$ , в остальных случаях величина угла указывается в градусах.

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие узла  $A$ , т.к. к этому телу приложены все действующие связи.

2. Реакцию  $\bar{T}_B$  нити  $AB$  направляем к точке подвеса  $B$ , реакцию  $\bar{S}_C$  стержня  $AC$  – к точке  $C$ , реакция нити  $ADE$  направлена по участку  $AD$ , прилегающему к узлу  $A$ , к точке  $D$  и равна по ве-

личине весу груза  $P$  (таким образом, эта реакция найдена без расчета). Изображаем рабочий чертеж (рис. 4.2).

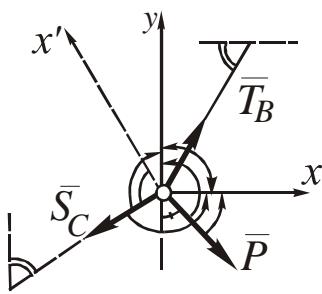


Рис. 4.2

3. Рассмотрим силу  $\bar{T}_B$ . Линия действия  $\bar{T}_B$  составляет с параллелью оси  $x$  угол  $60^\circ$ , с учетом направлений вектора и осей оба угла с осями острые (показаны на рис. 2.2 стрелками), получены проекции:  $T_{Bx} = T_B \cos 60$ ;  $T_{By} = T_B \sin 60$ .

Линия действия силы  $\bar{S}_C$  составляет с параллелью оси  $y$  угол  $60^\circ$ , углы с осями тупые:  $S_{cy} = -S_C \cos 60$ ;  $S_{cx} = -S_C \sin 60$ .

Линия действия силы  $\bar{P}$  составляет с осью  $y$  угол  $45^\circ$ , угол с осью  $x$  острый, с  $y$  – тупой:  $P_y = -P \cos 45$ ,  $P_x = P \sin 45$ . Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\sum F_{kx} = T_B \cos 60 - S_C \sin 60 + P \sin 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = T_B \sin 60 - S_C \cos 60 - P \cos 45 = 0.$$

*Примечание:* при выборе оси  $x' \perp \bar{S}_C$  в соответствующем уравнении была бы одна неизвестная сила –  $T_B$ , что облегчало нахождение корней уравнений.

4. Решая систему уравнений, получим:  $T_B = S_C = 1,92P$ . Т.к.  $S_C > 0$ , стержень  $AC$  растянут.

5. Для проверки строим силовой многоугольник (рис. 4.3).

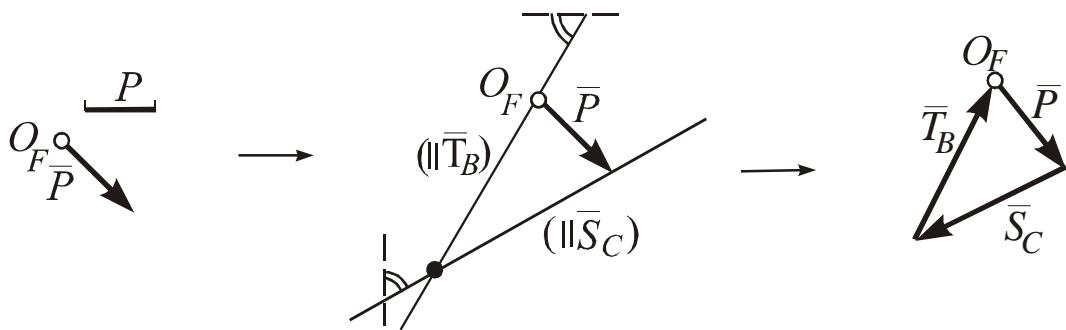


Рис. 4.3

Из графического решения:  $S_C = 1,9P$ ;  $T_B = 1,93P$ . Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

*Пример 2.* Шар имеет радиус 1 м и вес 10 Н,  $a = 0,2$  м. Найти реакции связей (рис. 4.4).

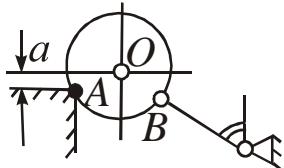


Рис. 4.4

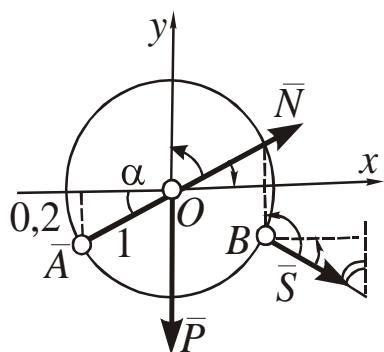


Рис. 4.5

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие шара. К нему приложены *три* силы, поэтому эти силы – сходящиеся.

2. Реакцию гладкой поверхности  $\bar{N}$  приложим в точке  $A$  по нормали к шару (она направлена к центру  $O$ ), реакцию  $\bar{S}$  стержня – в точке  $B$ , считая его растянутым. Вес шара  $\bar{P}$  приложен в точке  $O$ , направлен вертикально вниз. Рабочий чертеж показан на рис. 4.5.

3. Сила  $\bar{P}$  направлена по оси  $y$  противоположно ей:  $P_x = 0$ ;  $P_y = -P$ .

Линия действия силы  $\bar{S}$  составляет угол  $60^\circ$  с параллелью оси  $y$ , угол с  $x$  острый, с  $y$  – тупой:  $S_y = -S \cos 60$ ,  $S_x = S \sin 60$ .

Обозначим  $\alpha$  угол между линиями силы  $N$  и оси  $x$  (этот угол неизвестен, но  $\sin \alpha = 0,2 / 1 = 0,2$ ;  $\cos \alpha = \sqrt{1^2 - \sin^2 \alpha} = 0,98$ ), углы силы с осями оба острые:  $N_x = N \cos \alpha$ ;  $N_y = N \sin \alpha$ .

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = S \sin 60 + N \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P - S \cos 60 + N \sin \alpha = 0.$$

4. Решая систему уравнений, получим  $N = 12,9$  Н;  $S = -14,8$  Н (стержень сжат).

5. Строим силовой многоугольник (рис. 4.6).

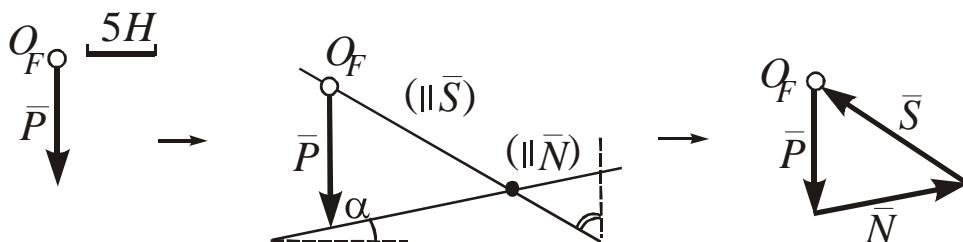


Рис. 4.6

Из графического расчета  $S = -15,1$  Н (направление  $\bar{S}$  противоположно ранее указанному на рис. 4.5);  $N = 12,5$  Н. Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

*Пример 3.* Определить реакции связей в точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  (рис. 4.7).

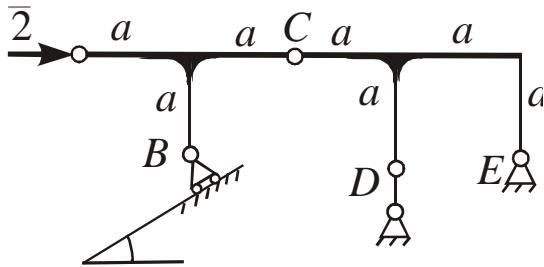


Рис. 4.7

*Решение.* 1. Связи в точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  приложены к системе тел  $BC + CDE$ , причем  $C$  – внутренняя связь. Рассматриваем равновесие каждой части системы тел (другой вариант: первое тело – система тел с отвердевшим шарниром  $C$ ; второе тело – одна из частей системы тел).

2. Тело  $BC$ . Реакция  $\bar{N}$  подвижного шарнира  $B$  перпендикулярна к опорной поверхности. Реакцию  $\bar{R}_C$  неподвижного шарнира  $C$  нет необходимости разлагать на составляющие, т.к. ее линия пройдет через точку пересечения сил  $\bar{2}$  и  $\bar{N}$ , направление  $\bar{R}_C$  выбираем произвольно.

Тело  $CDE$ . Реакция  $\bar{R}'_C$  направляется согласно аксиоме действия и противодействия,  $\bar{R}'_C = R_C$ . Реакцию  $\bar{S}$  стержня в точке  $D$  направим аналогично реакции нити. Реакция  $\bar{R}_E$  неподвижного шарнира  $E$  должна проходить через точку пересечения  $\bar{R}'_C$  и  $\bar{S}$  (т.к. к телам  $BC$  и  $CDE$  приложены по *три* силы, обе системы сил – сходящиеся).

Рабочий чертеж показан на рис. 4.8.

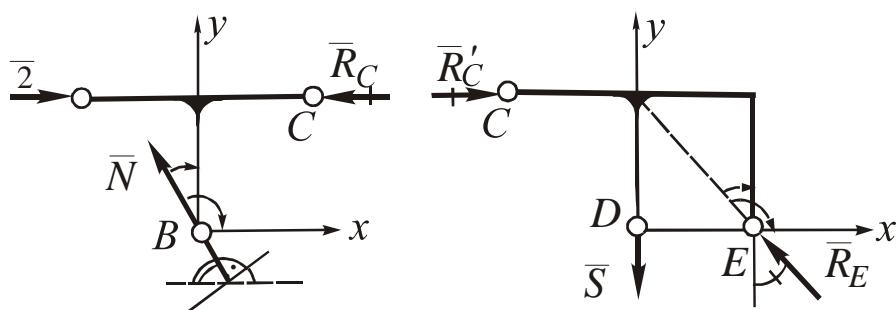


Рис. 4.8

3. Тело  $BC$ . Сила  $\bar{2}$  направлена по оси  $x$ :  $2_x = 2$ ;  $2_y = 0$ . Сила  $\bar{R}'_C$  направлена параллельно противоположно  $x$ :  $R_{Cx} = -R_C$ ;  $R_{Cy} = 0$ . Линия силы  $\bar{N}$  образует угол  $60^\circ$  с параллелью  $x$ , угол с осью  $x$  тупой, с  $y$  – острый:  $N_x = -N \cos 60$ ;  $N_y = N \sin 60$ .

Тело  $CDE$ . Сила  $\bar{R}_C$  сонаправлена  $x$ :  $R_{Cx} = R_C$ ;  $R_{Cy} = 0$ . Сила  $\bar{S}$  направлена по оси  $y$  противоположно ей:  $S_y = -S$ ;  $S_x = 0$ . Линия силы  $\bar{R}_E$  составляет угол  $45^\circ$  с параллелью оси  $y$ , угол с осью  $x$  тупой, с  $y$  – острый:  $R_{Ey} = R_E \cos 45$ ;  $R_{Ex} = -R_E \sin 45$ .

Получена система из 4 уравнений равновесия с 4 неизвестными:

$$BC: \quad \sum F_{kx} = 2 - R_C - N \cos 60 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N \sin 60 = 0;$$

$$CDE: \quad \sum F_{kx} = R_C - R_E \sin 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -S + R_E \cos 45 = 0.$$

4. Решение системы уравнений:  $N = 0$ ;  $R_C = 2$  Н;  $R_E = 2,8$  Н;  $S = 2$  Н.

5. Строим два силовых многоугольника (рис. 4.9).

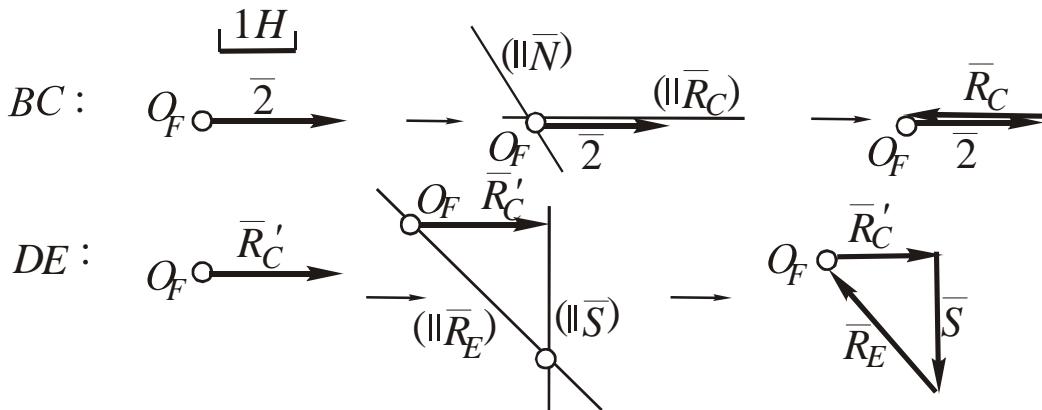
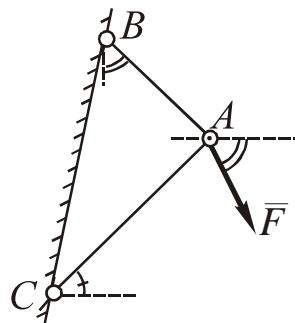


Рис. 4.9

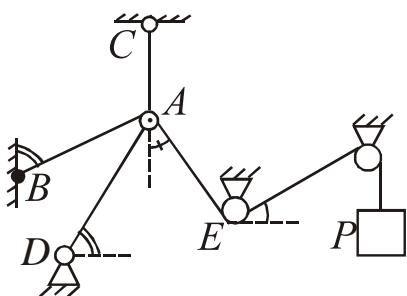
Из графического расчета:  $R_C = R'_C = 2$  Н;  $N = 0$ ;  $S = 2,02$  Н;  $R_E = 2,9$  Н. Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

*ЗАДАНИЕ.* В задачах 4.1–4.10 для самостоятельного решения определить реакции связей через заданные силы.

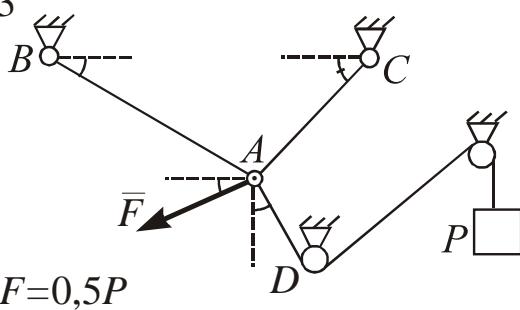
4.1



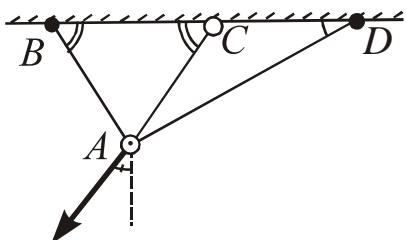
4.2



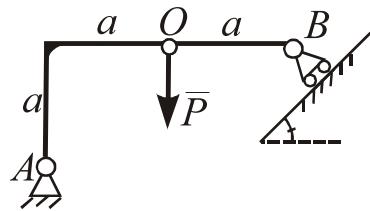
4.3



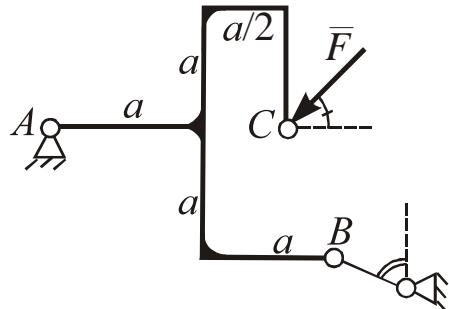
4.4



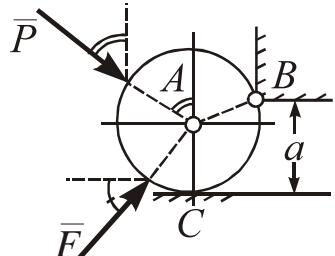
4.5



4.6

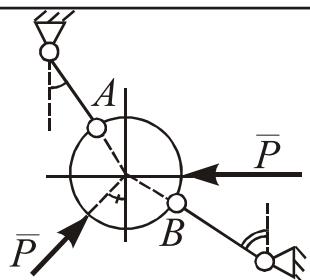


4.7

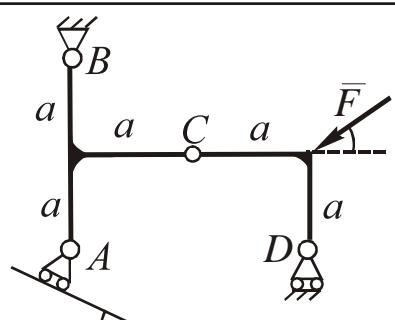


$$F = 0,5P; \quad AC = 1 \text{ m}; \quad a = 1,5 \text{ m}$$

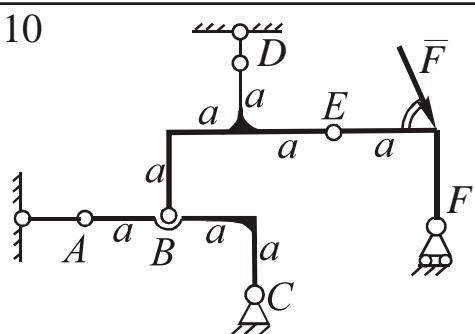
4.8



4.9



4.10



### 4.3. Произвольная плоская система сил

Решение задач имеет следующие особенности.

*Составление чертежа.* Чертеж всегда располагают в координатной плоскости  $xy$ , оси рекомендуется направлять стандартно ( $x$  – вправо,  $y$  – вверх).

*Составление уравнений равновесия.*

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в основной форме имеют вид (п. 3.3):  $\sum F_{kx} = 0$ ;  $\sum F_{ky} = 0$ ;  $\sum m_O(F_k) = 0$ . Дополнительные формы уравнений равновесия (п. 3.3, примечание 1) применяют, в основном, при расчете ферм (см. п. 5).

Графическое решение задач на равновесие плоской системы сил связано с совместным построением замкнутых *силового и векторного многоугольников* (см., например, [2, с. 37–39]), что весьма трудоемко, и в данном пособии не рассматривается.

Проверку решения осуществляют составлением дополнительного проверочного уравнения равновесия (обычно, это уравнение моментов). Поясним, как рационально составить расчетное и проверочное уравнения моментов. *Расчетное уравнение* должно содержать наименьшее возможное количество неизвестных. Если выбрать центр *на пересечении линий действия двух из трех неизвестных сил*, то по свойству 1 (п. 2.2) моменты их относительно этого центра будут равны нулю, и в уравнении будет только *одно* неизвестное. При непараллельных неизвестных силах (реакциях) таких пересечений будет три, выбор конкретного центра зависит от геометрических условий задачи. *Проверочное уравнение* должно содержать *все неизвестные силы (реакции)*, поэтому выбранный центр *не должен лежать на линиях действия ни одной из них*. Вместе с тем, данное уравнение можно несколько сократить, если проверочный центр выбрать *на пересечении максимального количества известных (активных) сил*. В задачах на равновесие системы тел следует избегать дублирования проверок, т.е. найденную реакцию достаточно проверить один раз.

Выбрав оси  $x$ ,  $y$  и центры в расчетном и проверочном уравнениях моментов, приступают к определению проекций и момен-

тов сил, рассматривая их по очереди:

1) уясняют расположение силы, определяют величины и знаки проекций на обе оси (см. п. 4.2);

2) определяют моменты сил относительно выбранных центров, опуская *перпендикуляр* (*плечо*) из *центра на линию действия силы, а затем поворачивая плечо вокруг центра в направлении вектора силы*; момент равен произведению модуля силы на плечо со знаком «+», если указанный поворот плеча происходит *против часовой стрелки* (*ч.с.*), и «» – если *по часовой* (если центр находится на линии действия силы, момент равен нулю).

В отдельных случаях для определения момента силы целесообразно использовать теорему Вариньона (п. 2.2, поз. 3): силу разлагают на составляющие, параллельные осям (их величины равны соответствующим проекциям силы), и находят сумму моментов этих составляющих. Трудоемкость решения при этом снижается в том случае, когда для определения плеча обычным способом требуются громоздкие геометрические расчеты.

Если в уравнении моментов все плечи сил могут быть выражены через общий размер, на эту величину производят сокращение, таким образом можно обойтись без абсолютных размеров плеч.

*Проверка решения.* Найденные из решения расчетных уравнений неизвестные силы (реакции) подставляют в проверочное уравнение. С учетом погрешности расчетов полученная сумма моментов не должна превышать установленного предела:

$$\sum m_P(F_k) \leq 0,01R_{cp}, \text{ где } R_{cp} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |R_i| - \text{средняя величина модулей найденных реакций, иначе решение содержит ошибку.}$$

*Пример 1.* Вес однородного стержня равен  $\bar{P}$ . Найти реакции связей (рис. 4.10).

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие стержня  $AB$ .

2. Вес стержня  $\bar{P}$  приложим к его центру  $O$ . Реакции  $\bar{S}$  стержня и  $\bar{T}$  нити направляем от точки  $A$  вдоль связей, реакцию  $\bar{N}$  гладкой поверхности – перпендикулярно к ней. Рабочий чертеж показан на рис. 4.11.

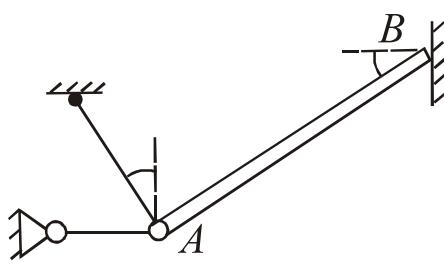


Рис. 4.10

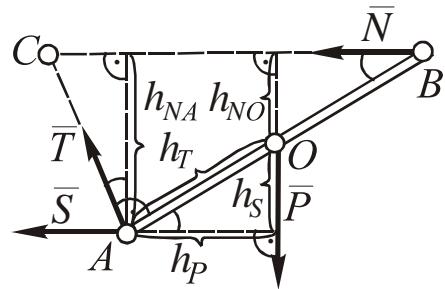


Рис. 4.11

3. Координатные оси располагаем стандартно. Центр в расчетном уравнении моментов выбираем на пересечении сил  $\bar{T}$  и  $\bar{S}$  – в точке  $A$  (формально подходит также точка  $C$  на пересечении  $\bar{N}$  и  $\bar{T}$ ). Центр в проверочном уравнении моментов выбираем в точке  $O$  (через нее не проходит ни одна из неизвестных сил  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{S}$  и проходит известная сила  $\bar{P}$ ). Выделяем точки  $A$  и  $O$  на чертеже.

Сила  $\bar{N}$  параллельна противоположна  $x$ :  $N_x = -N$ ,  $N_y = 0$ . Плечи  $h_{NA} = AB \sin 30$ ,  $h_{NO} = 0,5AB \sin 30$ , поворот обоих плеч вокруг неподвижных точек – против ч.с. (знаки моментов «+»).

Сила  $\bar{S}$  сонаправлена с  $\bar{N}$ :  $S_x = -S$ ,  $S_y = 0$ .  $m_A(\bar{S}) = 0$  (сила проходит через  $A$ ), плечо относительно  $O$ :  $h_S = 0,5AB \sin 30$ , поворот – по ч.с. (знак момента «–»).

Сила  $\bar{P}$  параллельна противоположна  $y$ :  $P_y = -P$ ;  $P_x = m_O(P) = 0$  (сила проходит через  $O$ ), плечо относительно  $A$ :  $h_P = 0,5AB \cos 30$ , поворот – по ч.с. (знак момента «–»).

Линия силы  $\bar{T}$  под углом  $30^\circ$  к оси  $y$ , угол с  $x$  тупой, с  $y$  – острый:  $T_y = T \cos 30$ ,  $T_x = -T \sin 30$ .  $m_A(\bar{T}) = 0$  (сила проходит через  $A$ ), плечо относительно  $O$ :  $h_T = 0,5AB$ , поворот плеча – по ч.с. (знак момента «–»).

Уравнения равновесия имеют вид;

$$\sum F_{kx} = -N - S - T \sin 30 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P + T \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = NAB \sin 30 - 0,5PAB \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_O(\bar{F}_k) = 0,5NAB \sin 30 - 0,5SAB \sin 30 - 0,5TAB = 0 \text{ (про-)}$$

верка).

В уравнениях моментов производим сокращение на общий размер  $AB$ .

4. Решая систему расчетных уравнений, получаем:  
 $S = -1,43P$  (стержень сжат);  $T = 1,15P$ ;  $N = 0,86P$ .

5. Находим среднее значение модулей реакций:

$$R_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(1,43 + 1,15 + 0,86)P = 1,15P. \text{ Подставляем корни в проверочное уравнение, полученная сумма составляет}$$

$\sum m_O(\bar{F}_k) = -0,0025P$ , что по модулю меньше  $0,01R_{\text{ср}}$ , следовательно, расчет верен.

*Пример 2.* Силы, связи и геометрические данные указаны на чертеже. Составить уравнения для определения реакций связей и их проверки (рис. 4.12).

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие изогнутого стержня  $ABCDE$ .

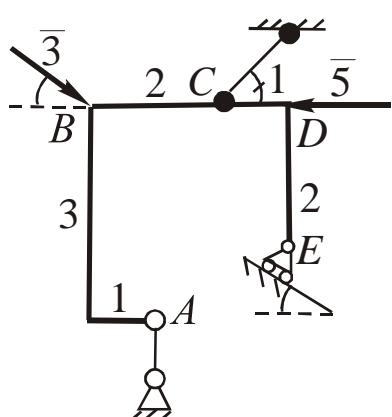


Рис. 4.12

2. Реакции стержня  $\bar{S}$  и нити  $\bar{T}$  направляем вдоль связей соответственно от точек  $A$  и  $C$ , реакцию подвижного шарнира  $\bar{N}$  – перпендикулярно к опорной поверхности.

Рабочий чертеж показан на рис. 4.13.

3. Координатные оси располагаем стандартно (на чертеже не показаны). Центр расчетного уравнения моментов выбираем на пересечении сил  $\bar{T}$  и  $\bar{S}$  (точка  $O$ ). Центр проверочного уравнения – точка  $B$  (силы  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{S}$  через нее не проходят, а известные силы  $\bar{3}$  и  $\bar{5}$  в ней пересекаются). Выделяем  $O$  и  $B$  на чертеже.

Сила  $\bar{5}$  параллельна противоположна  $x$ :

$5_x = -5$ ,  $5_y = 0$ .  $m_B(\bar{5}) = 0$  (сила проходит через  $B$ ), плечо относительно  $O$ :  $h_5 = 1$ , поворот плеча против ч.с. (знак момента «+»).

Линия силы  $\bar{T}$  составляет с  $x$   $45^\circ$ , углы с  $x$  и  $y$  острые :  $T_x = T \cos 45$ ,  $T_y = T \sin 45$ .  $m_O(\bar{T}) = 0$  (сила проходит через  $O$ ).

Для определения  $m_B(\bar{T})$  рассмотрим составляющие  $\bar{T}_x$  и  $\bar{T}_y$ .  $m_B(\bar{T}_x) = 0$  (сила проходит через  $B$ ), плечо  $\bar{T}_y$  относительно  $B$ :  $h_{Ty} = 2$ , поворот плеча против ч.с. (знак момента «+»).

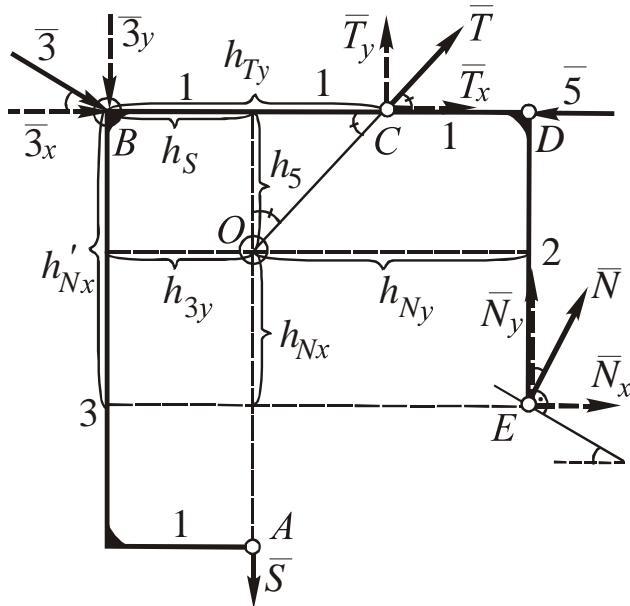


Рис. 4.13

Сила  $\bar{S}$  параллельна противоположна оси  $y$ :  $S_y = -S$ ,  $S_x = 0$ .  $m_O(\bar{S}) = 0$  (сила проходит через точку  $O$ ). Плечо  $S$  относительно  $B$ :  $h_S = 1$ , поворот плеча по ч.с. (знак момента «-»).

Линия силы  $\bar{N}$  составляет с  $y$   $30^\circ$ , углы с  $x$  и  $y$  острые:  $N_y = N \cos 30$ ,  $N_x = N \sin 30$ . Для определения моментов  $\bar{N}$  рассмотрим составляющие  $\bar{N}_x$  и  $\bar{N}_y$ . Плечи  $\bar{N}_x$  относительно  $O$  и  $B$  соответственно  $h_{Nx} = 1$  и  $h'_{Nx} = 2$ , поворот обоих плеч против ч.с. (знаки моментов «+»). Плечи  $\bar{N}_y$  относительно  $O$  и  $B$  соответственно  $h_{Ny} = 2$  и  $BD = 3$ , поворот обоих плеч против ч.с. (знаки моментов «+»).

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -5 + T \cos 45 + 3 \cos 30 + N \sin 30 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = T \sin 45 - 3 \sin 30 - S + N \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_O(\bar{F}_k) = 5 \cdot 1 - 3 \cos 30 \cdot 1 + 3 \sin 30 \cdot 1 + N \sin 30 \cdot 1 + N \cos 30 \cdot 2 = 0;$$

Линия силы  $\bar{3}$  составляет с  $x$   $30^\circ$ , угол с  $x$  острый, с  $y$  тупой:  $3_x = 3 \cos 30$ ,  $3_y = -3 \sin 30$ ,  $m_B(\bar{3}) = 0$  (сила проходит через  $B$ ). Для определения  $m_o(\bar{3})$  рассмотрим составляющие  $\bar{3}_x$  и  $\bar{3}_y$ . Плечо  $\bar{3}_x$  относительно  $O$ :  $h_5 = 1$ , поворот плеча по ч.с. (знак момента «-»), плечо  $\bar{3}_y$  относительно  $O$ :  $h_{3y} = 1$ , поворот плеча против ч.с. (знак момента «+»).

$\sum m_B(\bar{F}_k) = T \sin 45 \cdot 2 - S \cdot 1 + N \sin 30 \cdot 2 + N \cos 30 \cdot 3 = 0$  (проверка).

*Пример 3.* Величины  $q$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $m$ , а также все необходимые размеры известны. Составить уравнения для определения реакций связей и проверки (рис. 4.14).

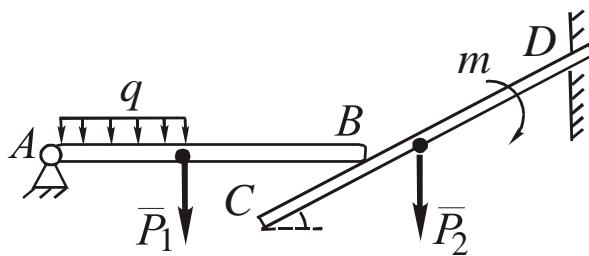


Рис. 4.14

*Решение.* 1. Рассмотрим равновесие системы тел  $AB + CD$ , которую разъединим на отдельные тела.

2. К телу  $AB$  приложены: сила тяжести  $\bar{P}_1$ , реакция неподвижного шарнира  $A$  (указываем ее составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ ), реакция  $\bar{N}$  гладкой поверхности стержня  $CD$ , перпендикулярная к нему, сосредоточенная сила  $Q = q \cdot 0,5AB$ , эквивалентная распределенной нагрузке (п. 1.1, поз. 2). К телу  $CD$  приложены: сила тяжести  $\bar{P}_2$ , активная пара сил с моментом  $m$ , реакция  $\bar{N}'$  гладкой поверхности стержня  $AB$  ( $\bar{N}'$  противоположна  $\bar{N}$ ,  $N' = N$  по аксиоме действия и противодействия, п. 1.2, поз. 3), реакция жесткой заделки в точке  $D$  (комбинация составляющих  $\bar{X}_D$ ,  $\bar{Y}_D$  и пары сил с неизвестным реактивным моментом  $m_D$ ).

Рабочий чертеж показан на рис. 4.15.

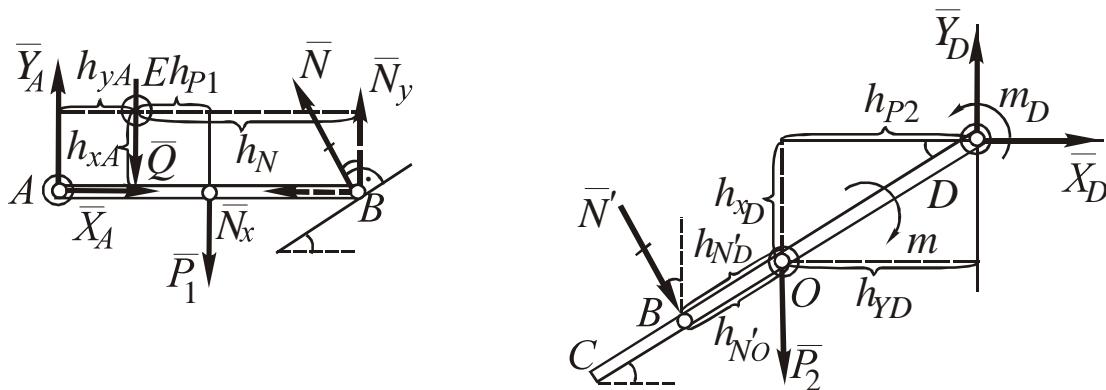


Рис. 4.15

3. Оси  $x$  и  $y$  расположены стандартно. Центры расчетных уравнений моментов удобнее всего выбрать в точках  $A$  и  $D$  при-

ложении неподвижного шарнира и жесткой заделки. Центры проверочных уравнений: на линии действия силы  $\bar{Q}$  в точке  $E$  на расстоянии  $0,25AB$  от стержня (при выборе центра на стержне  $AB$  не будет проверена сила  $\bar{X}_A$ ) и в центре  $O$  стержня  $CD$ .

Проекции и моменты сил  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{P}_1, \bar{N}, \bar{N}', \bar{P}_2, \bar{X}_D$  и  $\bar{Y}_D$  найдены аналогично ранее рассмотренным примерам (необходимые углы и плечи сил указаны на рис. 4.15). Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю, а сумма моментов относительно любого центра – моменту пары (п. 2.3), поэтому в обоих уравнениях моментов для тела  $CD$  следует записать « $m_D - m$ ». Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$AB: \sum F_{kx} = X_A - N \sin 30 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - P_1 + N \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -Q \cdot 0,25AB - P_1 \cdot 0,5AB + N \cos 30 \cdot AB = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum m_E(\bar{F}_k) = & X_A \cdot 0,25AB - Y_A \cdot 0,25AB - P_1 \cdot 0,5AB - \\ & - N \sin 30 \cdot 0,25AB + N \cos 30 \cdot 0,75AB = 0 \text{ (проверка);} \end{aligned}$$

$$CD: \sum F_{kx} = X_D + N \sin 30 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_D - P_2 - N \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = P_2 \cdot 0,5CD \cos 30 + N \cdot 0,75CD + m_D - m = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum m_O(\bar{F}_k) = & -X_D \cdot 0,5CD \sin 30 + Y_D \cdot 0,5CD \cos 30 + \\ & + N \cdot 0,25CD + m_D - m = 0 \text{ (проверка).} \end{aligned}$$

В третьем и четвертом уравнениях можно провести сокращения на величину  $AB$ .

*Пример 4.* Однородный стержень весом  $\bar{P}$  опирается на шероховатый пол и стенку и удерживается в равновесии под углом  $\alpha$ . Составить уравнения равновесия для определения давления стержня на опорные поверхности и коэффициента трения (рис. 4.16).

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие стержня  $AB$ .

2. Силу тяжести  $\bar{P}$  прикладываем в центре  $O$  стержня, а в точках  $A$  и  $B$  – реакции шероховатых поверхностей:  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_B$  перпендикулярны им,  $\bar{F}_{\text{тр}A}$  и  $\bar{F}_{\text{тр}B}$  вдоль поверхностей в произвольных направлениях (п. 1.4).

Рабочий чертеж показан на рис. 4.17.

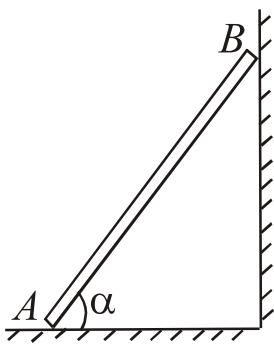


Рис. 4.16.

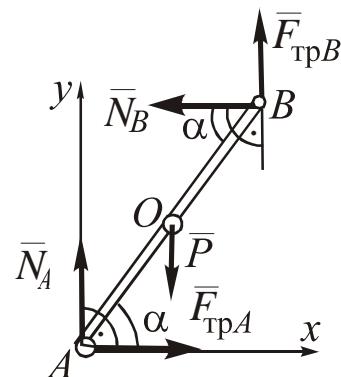


Рис. 4.17

3. Составляем уравнения равновесия: проекций на оси  $x$  и  $y$ , моментов относительно центра  $A$  (расчетное) и  $O$  (проверочное). Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\sum F_{kx} = F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N_A - P + F_{\text{тр}B} = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -P \cdot 0,5AB\cos\alpha + N_B \cdot AB\sin\alpha + F_{\text{тр}B} \cdot AB\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_O(\bar{F}_k) = F_{\text{тр}A} \cdot 0,5AB\sin\alpha - N_A \cdot 0,5AB\cos\alpha +$$

$$+ N_B \cdot 0,5AB\sin\alpha + F_{\text{тр}B} \cdot 0,5AB\cos\alpha = 0 \text{ (проверочное).}$$

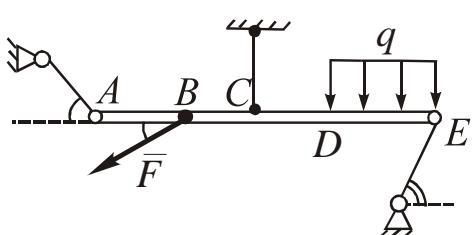
Произведем сокращение в третьем уравнении на  $AB$ , в четвертом – на  $0,5AB$ .

Три расчетные уравнения дополняют формулами, определяющими величины сил трения скольжения (п. 1.4):  $F_{\text{тр}A} = f N_A$ ;  $F_{\text{тр}B} = f N_B$ . Таким образом, получают систему из пяти уравнений с пятью неизвестными. Данную систему уравнений решают относительно  $N_A$ ,  $N_B$  и  $f$ .

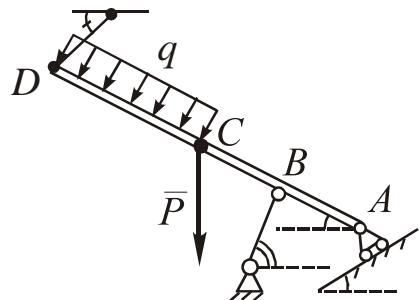
*Примечание: давления стержня на опорные поверхности в точках  $A$  и  $B$   $\bar{N}'_A$  и  $\bar{N}'_B$  по аксиоме действия и противодействия (п. 1.2, поз. 3) равны по величине и противоположны соответствующим реакциям  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_B$ .*

**ЗАДАНИЕ.** В задачах 4.11–4.20 для самостоятельного решения составить уравнения равновесия для определения реакций связей и проверки (все необходимые размеры считать заданными и обозначать в уравнениях буквами из чертежа).

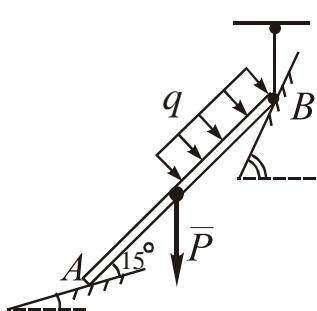
4.11



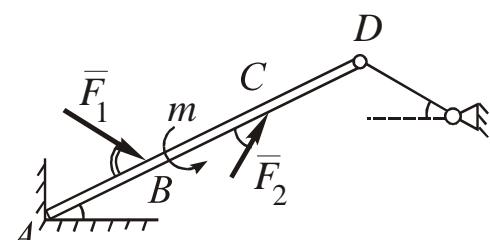
4.12



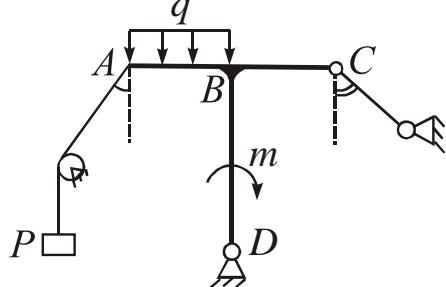
4.13



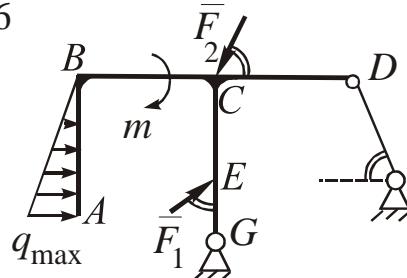
4.14



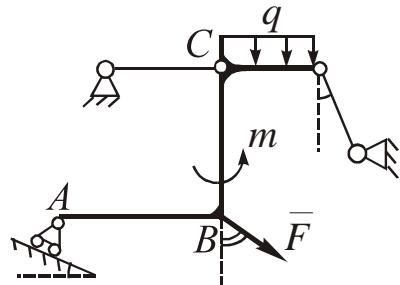
4.15



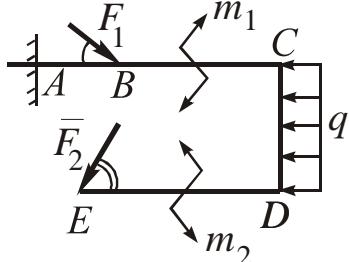
4.16



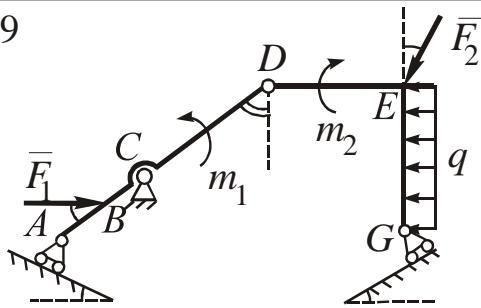
4.17



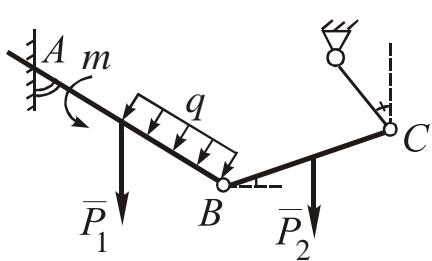
4.18



4.19



4.20



#### 4.4. Произвольная пространственная система сил

Решение задач имеет следующие особенности.

*Составление рабочего чертежа.* Рассматриваемое тело изображают на аксонометрическом чертеже, координатные оси рекомендуется направлять стандартно:  $x$  – на «наблюдателя»,  $y$  – вправо,  $z$  – вверх («наблюдатель» находится в первом октанте), что позволяет более точно уяснить расположение векторов сил относительно координатных осей и плоскостей. В необходимых случаях заданные в задаче направления осей рекомендуется изменить на стандартные.

*Составление уравнений равновесия.*

Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил имеют вид (п. 3.4):

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \sum m_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Для проверки решения составляют уравнение проекций или моментов, выбрав дополнительную ось.

Определяют проекции и моменты сил следующим образом.

1. Четко уясняют расположение силы в пространстве. Возможны следующие случаи ориентации вектора относительно координатных осей:

а) вектор параллелен одной из осей ( $\bar{F}_1$  на рис. 4.18);

б) вектор расположен в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, его линия составляет угол  $\alpha$  с параллелью одной из осей (на рис. 4.18 сила  $\bar{F}_2$  параллельна плоскости  $xz$ );

в) вектор расположен в плоскости, перпендикулярной одной из координатных плоскостей, его линия составляет угол  $\beta$  с этой плоскостью (на рис. 4.18 сила  $\bar{F}_3$  находится в плоскости,

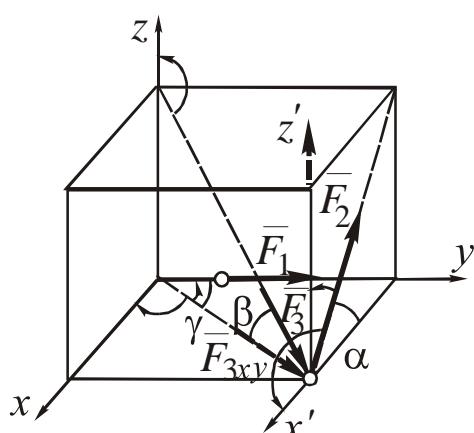


Рис. 4.18

перпендикулярной плоскости  $xy$ ).

2. Определяют проекции силы на координатные оси в соответствии с частным случаем ее расположения (рис. 4.18):

а) сила проецируется в натуральную величину на параллельную ось (знак проекции определяют по сонаправленности с осью), остальные проекции – нулевые:

$$F_{1y} = F_1; F_{1x} = F_{1z} = 0;$$

б) проекция силы на ось, с которой она образует угол  $\alpha$ , равна  $F_2 \cos \alpha$ , на вторую ось в плоскости действия силы  $-F_2 \sin \alpha$  (знаки проекций определяют по остроте угла с учетом направлений силы и оси (рис. 2.2), третья проекция – нулевая:

$$F_{2x} = -F_2 \cos \alpha; F_{2z} = F_2 \sin \alpha; F_{2y} = 0;$$

в) проецируют силу на перпендикулярную плоскость :  $F_{3xy} = F_3 \cos \beta$ , указывают направление  $F_{3xy}$ ; проекция на ось, перпендикулярную  $xy$ , равна  $F_3 \sin \beta$ ; проекции на оси в плоскости  $xy$  и знаки всех проекций определяют аналогично п. 2, б:

$$F_{3z} = -F_3 \sin \beta; F_{3y} = F_{3xy} \cos \gamma = F_3 \cos \beta \cos \gamma;$$

$$F_{3x} = F_{3xy} \sin \gamma = F_3 \cos \beta \sin \gamma.$$

3. Определяют моменты силы относительно координатных осей (п. 2.5):

– фиксируют нулевые моменты (в случаях, когда сила параллельна или пересекает соответствующую ось);

– определяют ненулевые моменты, выделяя перпендикулярную рассматриваемой оси координатную или другую плоскость, проецируют силу на эту плоскость (данная проекция условно называется «вращающей» относительно этой оси) и находят момент «вращающей» проекции относительно точки пересечения оси с выделенной плоскостью, т.е. опускают плечо из данной точки на линию действия «вращающей» проекции, находят длину плеча и знак момента по направлению поворота плеча «вращающей» проекцией силы при наблюдении из конца оси.

В ряде случаев удобно вместо момента самой силы находить сумму моментов составляющих силы, параллельных координатным осям, применяя теорему Вариньона (п. 2.5, поз. 4).

В уравнениях моментов плечи всех сил могут быть выраже-

ны через общий размер, что дает возможность после составления уравнения произвести сокращение на эту величину.

*Пример 1.* Составить уравнения равновесия для определения реакций связей механизма (рис. 4.19).

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие оси  $BE$  с рукояткой  $AB$  и колесом  $DG$ .

2. Поворачиваем координатные оси вместе с телом до стандартного положения.

Реакции неподвижных осевых шарниров  $C$  и  $E$  имеют составляющие, параллельные координатным осям  $x$  и  $z$  (в плоскостях, перпендикулярных общей оси шарниров  $y$ ):  $\bar{X}_C$ ,  $\bar{Z}_C$ ,  $\bar{X}_E$ ,  $\bar{Z}_E$ . Реакция нити  $\bar{T}$  направлена от точки  $G$  вдоль нити, ее величина равна весу груза  $P$ .

Рабочий чертеж показан на рис. 4.20.

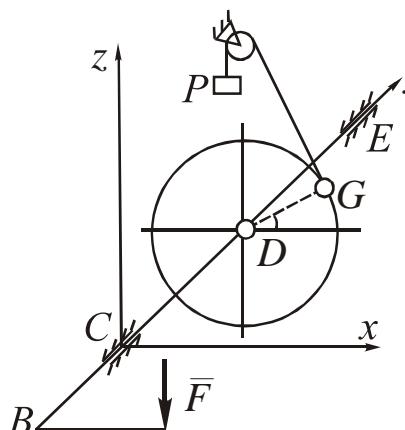


Рис. 4.19

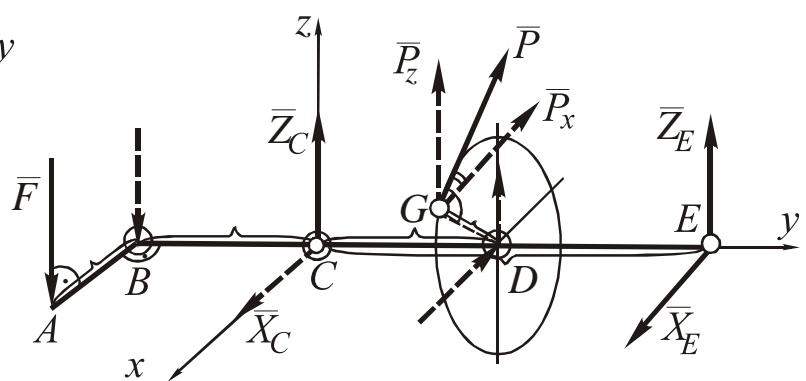


Рис. 4.20

3. Сила  $\bar{X}_C$  направлена по оси  $x$ :  $X_{Cx} = X_C$ ;  $X_{Cy} = X_{Cz} = 0$ , проходя через точку  $C$ , она пересекает все три координатные оси:  $m_x(\bar{X}_C) = m_y(\bar{X}_C) = m_z(\bar{X}_C) = 0$ .

Сила  $\bar{Z}_C$  направлена по оси  $z$ :  $Z_{Cz} = Z_C$ ;  $Z_{Cx} = Z_{Cy} = 0$ , она также проходит через точку  $C$ :  $m_x(\bar{Z}_C) = m_y(\bar{Z}_C) = m_z(\bar{Z}_C) = 0$ .

Сила  $\bar{X}_E$  расположена в плоскости  $xy$  параллельна сонаправлена оси  $x$ :  $X_{Ex} = X_E$ ,  $X_{Ey} = X_{Ez} = 0$ , она параллельна  $x$  и пересекает  $y$ :  $m_x(\bar{X}_E) = m_y(\bar{X}_E) = 0$ . Для определения  $m_z(\bar{X}_E)$  выде-

лим плоскость  $xy \perp z$ . «Вращающая» проекция  $\bar{X}_E$  совпадает с самой силой. Опуская перпендикуляр из  $C$  на линию  $\bar{X}_E$ , получаем плечо  $CE$ . Из конца оси  $z$  поворот плеча силой  $\bar{X}_E$  виден по ч.с. (знак момента « $-$ »):  $m_z(\bar{X}_E) = -X_E CE$ .

Сила  $\bar{Z}_E$  расположена в плоскости  $yz$  параллельно сонаправленно  $z$ :  $Z_{Ez} = Z_E$ ,  $Z_{Ex} = Z_{Ey} = 0$ , она параллельна  $z$  и пересекает  $y$ :  $m_z(\bar{Z}_E) = m_y(\bar{Z}_E) = 0$ . Для определения  $m_x(\bar{Z}_E)$  выделим плоскость  $yz \perp x$ . «Вращающая» проекция  $\bar{Z}_E$  совпадает с самой силой. Опуская плечо из  $C$  на линию  $\bar{Z}_E$ , получаем  $CE$ , из конца оси  $x$  поворот  $CE$  силой  $\bar{Z}_E$  виден против ч.с. (знак момента « $+$ »):  $m_x(\bar{Z}_E) = Z_E CE$ .

Сила  $\bar{F}$  направлена параллельно противоположно  $z$ :  $F_z = -F$ ,  $F_x = F_y = 0$ ,  $m_z(\bar{F}) = 0$ . Для определения  $m_x(\bar{F})$  выделим плоскость  $yz \perp x$ , «вращающая» проекция (показана на рис. 4.20 пунктиром) параллельна  $z$ , проходит через  $B$  и равна по модулю силе  $F$ . Опуская из  $C$  плечо и поворачивая его в направлении «вращающей» проекции (против ч.с.), получаем  $m_x(\bar{F}) = F \cdot BC$ . Для определения  $m_y(\bar{F})$  выделим вертикальную плоскость, перпендикулярную  $y$  и проходящую через  $B$  (сила  $\bar{F}$  лежит в этой плоскости), «Вращающая» проекция совпадает с самой силой  $\bar{F}$ . Опуская из  $B$  плечо на  $\bar{F}$  и поворачивая его в направлении  $\bar{F}$  (против ч.с.), получаем  $m_y(\bar{F}) = F \cdot AB$ .

Сила  $\bar{P}$  расположена в плоскости колеса, перпендикулярной  $y$ , под углом  $60^\circ$  к оси  $x$ :  $P_x = -P \cos 60$ ,  $P_z = P \sin 60$ , все моменты силы ненулевые. Для определения  $m_x(\bar{P})$  выделим плоскость  $yz \perp x$ , проекция  $\bar{P}$  на эту плоскость проходит через  $D$  и равна по величине  $P_z$  (показана на рис. 4.20 пунктиром). Опуская плечо из  $C$  на «вращающую» проекцию и поворачивая его (против ч.с.), получим  $m_x(\bar{P}) = P_z \cdot CD = P \sin 60 \cdot CD$ . Для определения  $m_z(\bar{P})$  выделим плоскость  $xy \perp z$ , проекция  $\bar{P}$  на эту плоскость параллельна  $x$ , проходит через  $D$  и равна  $P_x$ . Опуская из  $C$  плечо на «вращающую» проекцию и поворачивая его (против ч.с.), по-

лучим  $m_z(\bar{P}) = P_x \cdot CD = P \cos 60^\circ \cdot CD$ . Для определения  $m_y(\bar{P})$  выделим плоскость колеса, перпендикулярную  $y$  (сила  $\bar{P}$  лежит в этой плоскости). «Вращающая» проекция совпадает с самой силой  $\bar{P}$ . Опуская из  $D$  плечо на  $\bar{P}$  и поворачивая его в направлении  $\bar{P}$  (по ч.с.), получим  $m_y(\bar{P}) = -P \cdot DG$ .

Получена система из 5 уравнений равновесия (шестая сумма  $\sum F_{ky}$  тождественно обращается в нуль):

$$\sum F_{kx} = X_C + X_E - P \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_C + Z_E - F + P \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = Z_E - CE + F \cdot BC + P \sin 60^\circ \cdot CD = 0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = F \cdot AB - P \cdot DG = 0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -X_E \cdot CE + P \cos 60^\circ \cdot CD = 0.$$

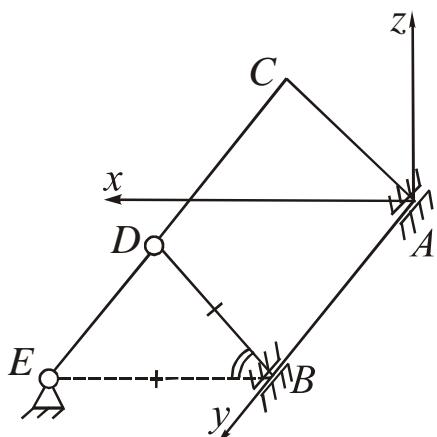


Рис. 4.21

Решая систему уравнений, можно найти 5 неизвестных реакций. *Пример 2.* Составить уравнения равновесия для определения реакций связей, приложенных к прямоугольной однородной пластине весом  $\bar{P}$  (рис. 4.21).  $BD = BE$ .

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие пластины  $ABCD$ .

2. Поворачиваем оси вместе с телом до стандартного положения. Составляющие реакций неподвижных шарниров  $A$  и  $B$  направлены параллельно осям  $x$  и  $z$ . Реакция  $\bar{S}$  направлена от  $D$  по стержню  $DE$ . Сила тяжести  $\bar{P}$  приложена к центру  $O$  пластины и направлена вертикально вниз.

Рабочий чертеж показан на рис. 4.22.

3. Силы  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Z}_B$  рассматривают аналогично примеру 1.

Для уяснения расположения силы  $\bar{P}$  проведем отрезок  $OG \parallel AC$ . Сила  $\bar{P}$  расположена в вертикальной плоскости, образованной  $\bar{P}$  и  $G$ , параллельно противоположно оси  $z$ :  $P_z = -P$ ,  $P_x = P_y = 0$ ,  $m_z(\bar{P}) = 0$ . Для определения  $m_x(\bar{P})$  выделим плос-

кость  $yz \perp x$ , проекция  $\bar{P}$  на эту плоскость параллельна  $z$ , проходит через  $G$  и равна по величине  $\bar{P}$  (показана на рис. 4.22 пунктиром). Опуская из  $A$  плечо на «вращающую» проекцию и поворачивая его (по ч.с.), получим

$m_x(\bar{P}) = -P \cdot AG = -P \cdot 0,5AB$ . Для определения  $m_y(\bar{P})$  выделим плоскость треугольника, образованного  $\bar{P}$  и  $G$ , перпендикулярную  $x$ , сила  $\bar{P}$  лежит в этой плоскости и совпадает с «вращающей» проекцией. Опуская плечо из  $G$  на силу  $\bar{P}$  и поворачивая его в направлении  $\bar{P}$  (против ч.с.), получим  $m_y(\bar{P}) = P \cdot OG \cos 60 = P \cdot 0,5BD \cos 60$ .

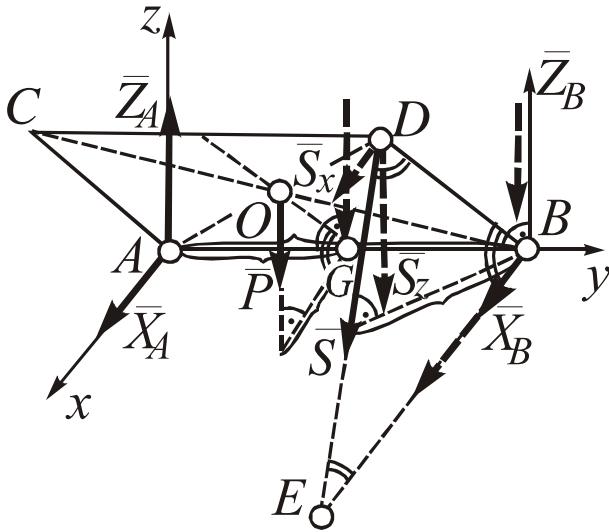


Рис. 4.22

Сила  $\bar{S}$  лежит в плоскости  $\Delta BDE$ , перпендикулярной  $y$ , и составляет угол  $60^\circ$  с параллелью оси  $x$ :  $S_x = S \cos 60$ ,  $S_z = -S \sin 60$ ,  $S_y = 0$ , все моменты силы ненулевые. Для определения  $m_x(\bar{S})$  выделим плоскость  $yz \perp x$ , проекция  $\bar{S}$  на эту плоскость параллельна  $z$ , проходит через  $B$  и равна по величине  $S_z$  (показана на рис. 4.22 пунктиром). Опуская из  $A$  плечо на линию «вращающей» проекции и поворачивая его (по ч.с.), получим  $m_x(\bar{S}) = -S_z AB = -S \sin 60 \cdot AB$ . Для определения  $m_z(\bar{S})$  выделим плоскость  $xy \perp z$ , проекция  $\bar{S}$  на эту плоскость параллельна  $x$ , проходит через  $B$  и равна по модулю  $S_x$ . Опуская плечо из  $A$  на «вращающую» проекцию и поворачивая его (по ч.с.), получим  $m_z(\bar{S}) = -S_x AB = -S \cos 60 \cdot AB$ . Для определения  $m_y(\bar{S})$  выделим плоскость  $\Delta BDE$ , сила  $\bar{S}$  лежит в этой плоскости и совпадает с «вращающей» проекцией. Опуская из  $B$  плечо на  $\bar{S}$  и поворачивая его в направлении  $\bar{S}$  (против ч.с.), получим  $m_y(\bar{S}) = S \cdot BD \sin 60$ .

Получена система из 5 уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= X_A + X_B + S \cos 60 = 0; \\ \sum F_{ky} &= Z_A + Z_B - P - S \sin 60 = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= Z_B \cdot AB - P \cdot 0,5AB - S \sin 60 \cdot AB = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= P \cdot 0,5BD \cos 60 + S \cdot BD \sin 60 = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= -X_B \cdot AB - S \cos 60 \cdot AB = 0.\end{aligned}$$

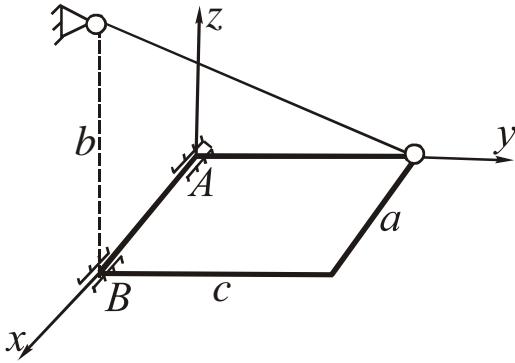


Рис. 4.23

2. Сила тяжести пластины  $\bar{P}$  приложена к ее центру. Составляющие реакции шарнира  $B$  параллельны осям  $y$  и  $z$ . Составляющие реакции подпятника  $A$  направлены по трем осям. Реакция стержня  $\bar{S}$  направлена по стержню.

Решение. 1. Рассматриваем равновесие пластины.

Рабочий чертеж показан на рис. 4.24.

3. Силы  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ ,  $\bar{Y}_B$ ,  $\bar{Z}_B$ ,  $\bar{P}$  рассмотрены аналогично примерам 1 и 2.

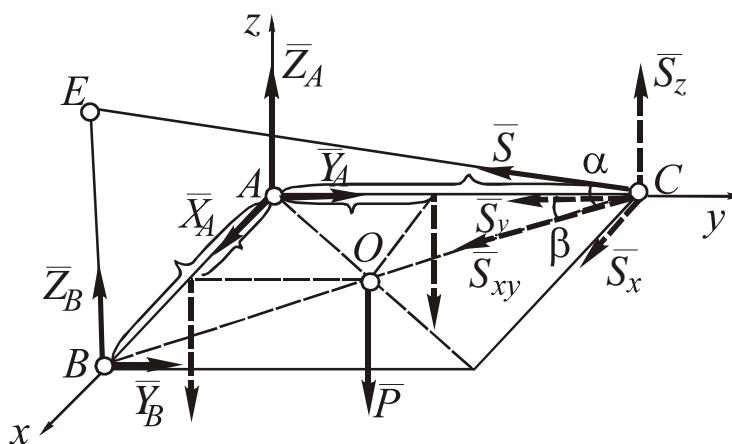


Рис. 4.24

Сила  $\bar{S}$  лежит в плоскости  $\Delta BCE$ , перпендикулярной  $xy$ , и составляет с этой плоскостью угол  $\alpha$ :  $S_{xy} = S \cos \alpha$ ,  $S_z = S \sin \alpha$ . Проекция  $\bar{S}_{xy}$  в плоскости  $xy$  составляет угол  $\beta$  с осью  $y$ :  $S_y = -S_{xy} \cos \beta = -S \cos \alpha \cos \beta$ ;  $S_x = S_{xy} \sin \beta = S \cos \alpha \sin \beta$ .

Т.к.  $\bar{S}$  пересекает ось  $y$ , то  $m_y(\bar{S}) = 0$ . Для определения  $m_x(\bar{S})$  выделим плоскость  $yz \perp x$ , в этой плоскости лежат состав-

ляющие  $\bar{S}_y$  и  $\bar{S}_z$ , но  $m_A(\bar{S}_y) = 0$ , т.к.  $\bar{S}_y$  проходит через  $A$ . Опускаем плечо из  $A$  на  $\bar{S}_z$  и поворачивая его в направлении силы (против ч.с.), получим  $m_x(\bar{S}) = S_z \cdot c = S \sin\alpha \cdot c$ . Для определения  $m_z(\bar{S})$  выделим плоскость  $xy \perp z$ , в этой плоскости лежат составляющие  $\bar{S}_x$  и  $\bar{S}_y$ , но  $m_A(\bar{S}_y) = 0$ , т.к.  $\bar{S}_y$  проходит через  $A$ . Опускаем плечо из  $A$  на  $\bar{S}_x$  и поворачивая его в направлении  $\bar{S}_x$  (по ч.с.), получим  $m_z(\bar{S}) = -S_x \cdot c = -S \cos\alpha \sin\beta \cdot c$ .

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\sum F_{kx} = X_A + S \cos\alpha \sin\beta = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - S \cos\alpha \cos\beta = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B - P + S \sin\alpha = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = P \cdot 0,5c + S \sin\alpha \cdot c = 0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = -Z_B \cdot a + P \cdot 0,5a = 0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -Y_B \cdot a - S \cos\alpha \sin\beta \cdot c = 0.$$

Производим сокращение в уравнениях моментов на общие множители  $c$  и  $a$ . Функции углов  $\alpha$  и  $\beta$  выражаем через размеры  $a, b$  и  $c$ :

$$\sin\alpha = b(a^2 + b^2 + c^2)^{-0,5}; \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\cos\beta = c(a^2 + c^2)^{-0,5}; \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}.$$

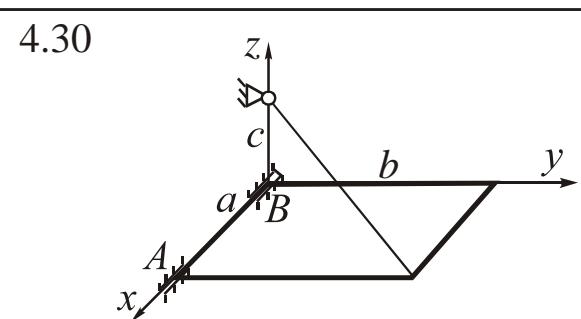
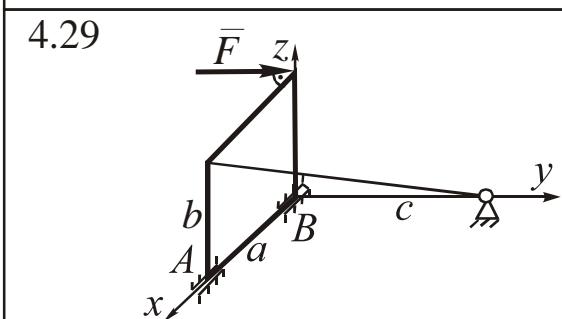
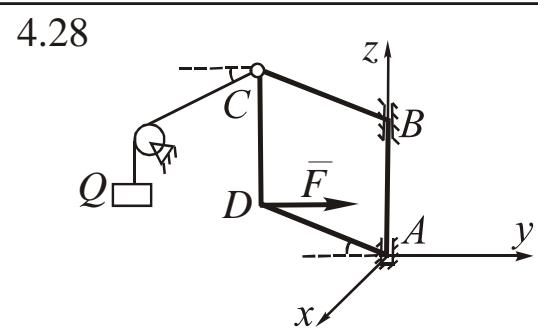
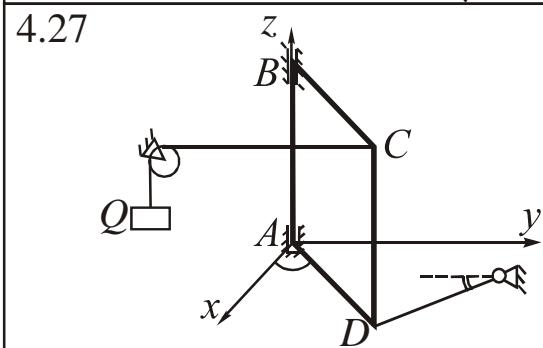
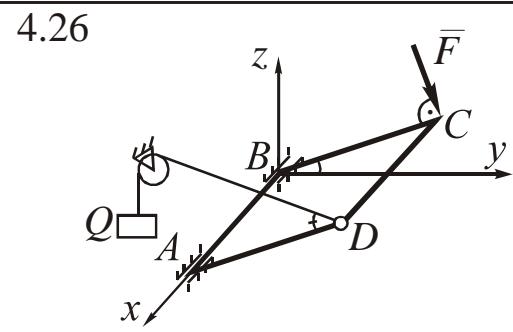
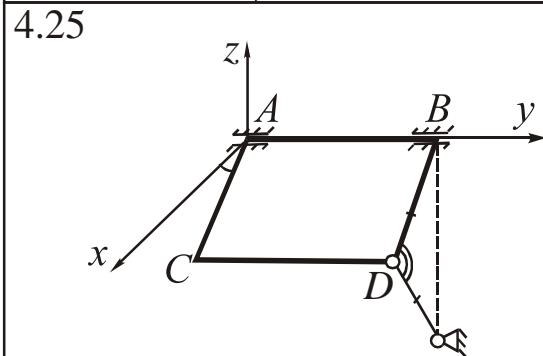
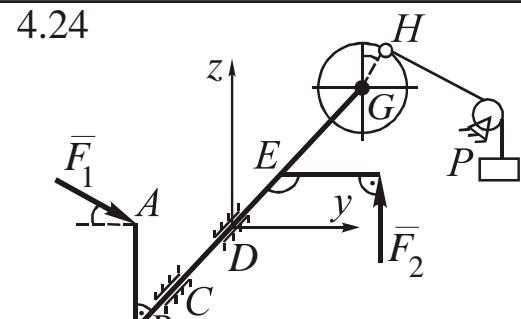
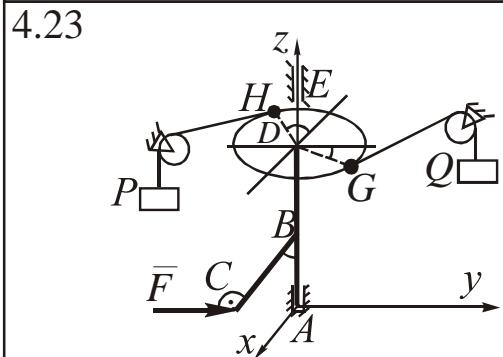
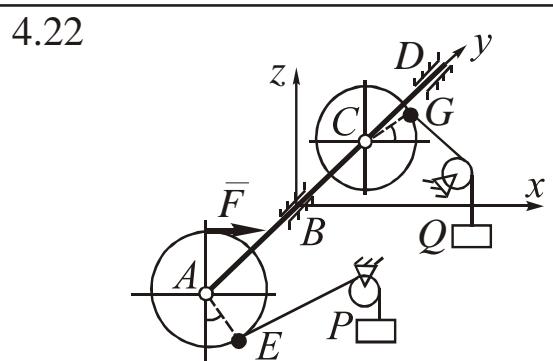
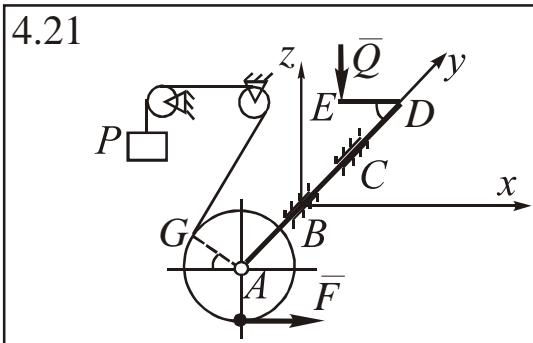
*ЗАДАНИЕ.* В задачах 4.21–4.30 для самостоятельного решения составить уравнения равновесия для определения реакций связей (все необходимые размеры считать заданными и обозначать буквами из чертежа).

#### 4.5. Расчет плоской фермы

Фермой называют конструкцию, состоящую из стержней, соединенных на концах шарнирами (узлами). Фермами являются элементы мостов, эстакад, галерей, копров, перекрытий и т.п.

При расчете плоских ферм вводят следующие допущения.

1. Нагрузка к ферме может быть приложена только к ее узлам, весом стержней пренебрегают. В этом случае стержни фермы растянуты или сжаты.



2. Рассчитываемые фермы должны быть жесткими (абсолютно твердыми) и статически определимыми (не содержащими «лишних» стержней, без которых ферма остается жесткой).

Простейшая жесткая и статически определимая ферма состоит из трех стержней и трех узлов ( $C = 3$ ,  $Y = 3$ ). Любая жесткая и статически определимая ферма может быть получена из простейшей присоединением к ней ( $Y - 3$ ) узлов, к каждому из которых прилегает 2 новых стержня. Таким образом, жесткая и статически определимая ферма должна иметь следующее соотношение  $C$  и  $Y$ :  $C = 3 + 2(Y - 3) = 2Y - 3$ . При  $C < 2Y - 3$  ферма будет *нежесткой*, а при  $C > 2Y - 3$  – *статически неопределенной*.

Расчет фермы – комплексная задача, включающая расчеты, рассмотренные в п. 2 и п. 3, имеющая ряд методических особенностей. Рекомендуемый порядок решения задач следующий.

1. Подсчитать количество стержней и узлов фермы и *проверить ее на жесткость и статическую определимость*. Если одной из внешних связей фермы является стержень, его не следует включать в число стержней фермы, т.к. в этом случае ферма будет нежесткой.

2. Отбросить связи и *определить их реакции*, решая задачу на равновесие произвольной плоской системы сил (см. п. 4.3).

3. Определить усилия в стержнях фермы *методом вырезания узлов*, сущность которого заключается в том, что последовательно рассматривают равновесие узлов, мысленно отделяя их от фермы и решая задачу на равновесие плоской системы сходящихся сил (см. п. 4.2). Необходимо учитывать, что решение возможно только в том случае, если к вырезаемому узлу прилегает *не более двух стержней* с неизвестными реакциями.

4. Выборочно для проверки определяют усилия в отдельных стержнях фермы *методом сечений (Риттера)*, сущность которого заключается в том, что проводят сечение, рассекающее ферму *на две не связанные между собой части и проходящее через три стержня*, включая проверяемый, а затем рассматривают одну из частей фермы, решая задачу на равновесие произвольной плоской системы сил (см. п. 4.3), причем в каждом из составляемых уравнений равновесия должна содержаться *только одна проверяемая реакция*.

5. В отдельных случаях дополнительно строят *диаграмму Максвелла-Кремоны*, представляющую собой плоскую фигуру, совмещающую в себе многоугольники сил, приложенных к узлам фермы. По существу, данная диаграмма аналогична методу вырезания узлов, но ряд методических приемов позволяет сделать

расчеты более компактными. Методика построения подобных диаграмм приведена в [2, с. 41–44], в данном пособии этот метод не рассматривается.

*Пример.* Провести расчет плоской фермы. Размеры и величины сил в Н указаны на рис. 4.25.

*Решение.* 1. Подсчитываем количество стержней и узлов фермы:

$C = 5$ ,  $V = 4$  (вертикальный стержень, присоединенный к узлу  $B$ , является внешней связью и не входит в состав фермы). Т.к.  $2V - 3 = 5$ ,  $C = 5$ , то ферма жесткая и статически определимая.

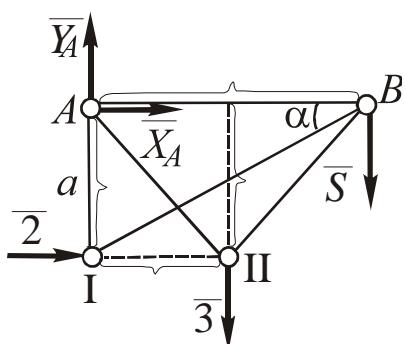


Рис. 4.25

2. Составляющие  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  реакции

неподвижного шарнира  $A$  направляют параллельно координатным осям, реакцию  $\bar{S}$  стержня – вдоль него. Рабочий чертеж показан на рис. 4.26.

Координатные оси расположены стандартно. Выбираем центры в уравнениях моментов: расчетного – в точке  $A$  (на пересечении  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ ), проверочно-

го – в узле  $\Pi$  (через нее не проходят неизвестные реакции и проходят известные силы  $\bar{2}$  и  $\bar{3}$ ).

Получены уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + 2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - S - 3 = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -S \cdot 2a + 2 \cdot a - 3 \cdot a = 0;$$

$$\sum m_{\Pi}(\bar{F}_k) = -X_A \cdot a - Y_A \cdot a - S \cdot a = 0 \text{ (проверка).}$$

Решение системы уравнений:  $X_A = -2$  Н,  $Y_A = 2,5$  Н,

$$S = -0,5 \text{ H.}$$

Проверка:  $-X_A - Y_A - S = -(-2) - 2,5 - (-0,5) = 0$ , решение верно.

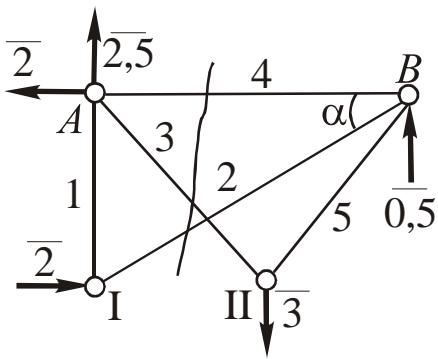


Рис. 4.27

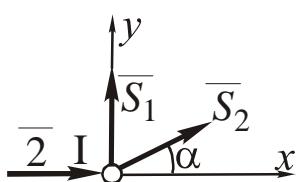


Рис. 4.28

$$\text{где } \cos\alpha = 2a(a^2 + 4a^2)^{-0,5} = 0,9; \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 0,45.$$

Решение уравнений:  $S_2 = -2,24 \text{ H}$ ,  $S_1 = 1 \text{ H}$ .

Выбираем масштаб, строим силовой многоугольник, откладывая полученные значения сил (рис. 4.31, а), он замыкается, значит решение верно.

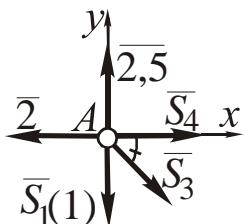


Рис. 4.29

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = -2 + S_4 + S_3 \cos 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 2,5 - S_1 - S_3 \sin 45 = 0.$$

Решение уравнений:  $S_3 = 2,12 \text{ H}$ ,  $S_4 = 0,5 \text{ (H)}$ . Силовой многоугольник (рис. 4.31, б) замыкается, решение верно.

Вырезаем узел B: к нему приложены известные силы  $\overline{0,5}$ ,  $\overline{S}_4$

3. Нумеруем узлы римскими цифрами и буквами ( $A$ ,  $B$ , I, II), стержни – арабскими (1–5). Ранее найденные реакции указываем с учетом их фактического направления (рис. 4.27). К узлам I и II прилегает по 2 стержня, к узлам  $A$  и  $B$  по 3.

Вырезаем узел I (отделяем его от фермы), к нему приложены активная сила  $\overline{2}$  и реакции  $\overline{S}_1$ ,  $\overline{S}_2$  стержней (считаем их растянутыми) (рис. 4.28).

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 2 + S_2 \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_1 + S_2 \sin\alpha = 0,$$

Вырезаем узел  $A$ : к нему приложены известные силы  $\overline{2}$ ,  $\overline{2,5}$ ,  $\overline{S}_1$  (1) и реакции  $\overline{S}_3$ ,  $\overline{S}_4$  (все стержни считаем растянутыми) (рис. 4.29).

Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = -2 + S_4 + S_3 \cos 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 2,5 - S_1 - S_3 \sin 45 = 0.$$

$(0,5)$ ,  $\bar{S}_2$   $(-2,24)$  и реакция  $\bar{S}_5$  (все стержни считаем растянутыми, в том числе и стержень 2, сохраняя  $S_2 = -2,24$ ) (рис. 4.30).

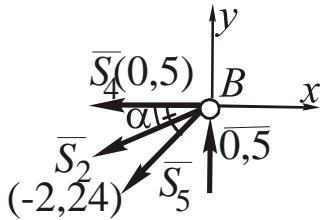


Рис. 4.30

$$\sum F_{kx} = -S_4 - S_2 \cos\alpha - S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -S_2 \sin\alpha + 0,5 - S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

Из первого уравнения  $S_5 = 2,12$  Н.

Второе уравнение используем для проверки (при подстановке  $S_5$  получаем 0,01, что ниже 1 %-й погрешности). Сило-вой многоугольник (рис. 4.31, *в*) замкнут – решение верно.

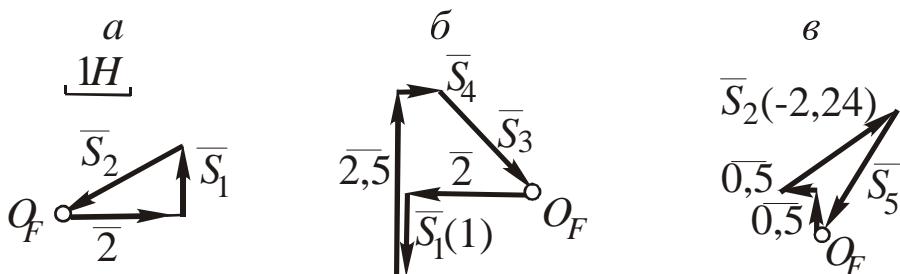


Рис. 4.31

4. Для проверки  $\bar{S}_2$  и  $\bar{S}_3$  проводим сечение через стержни 2–3–4 (рис. 4.27) и рассматриваем равновесие левой части фермы (она состоит из стержня 1). К ней приложены известные силы  $\bar{2}$ ,  $\bar{2,5}$ , и реакции  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{S}_3$ ,

$\bar{S}_4$  рассеченных стержней (реакции направлены в сторону отброшенной части фермы) (рис. 4.32).

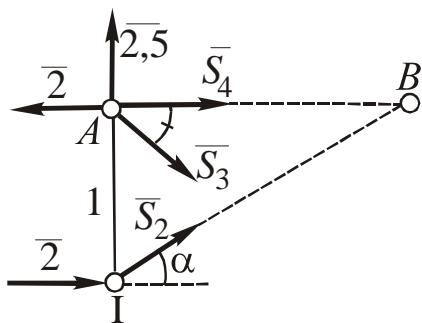


Рис. 4.32

Составляем уравнение для определения  $\bar{S}_2$ . Поскольку неизвестные  $\bar{S}_3$

и  $\bar{S}_4$  пересекаются в точке A, составляем уравнение моментов относительно этого центра (при параллельных силах составляют уравнение проекций на ось, перпендикулярную этим силам). Для определения  $\bar{S}_3$  составляем уравнение моментов относительно точки B (в ней пересекаются  $\bar{S}_4$  и  $\bar{S}_2$ ).

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 2 \cdot a + S_2 \cos\alpha \cdot a = 0;$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = -2,5 \cdot 2a + 2 \cdot a + S_3 \sin 45 \cdot 2a = 0.$$

Решение уравнений:  $S_2 = -2,12$  (Н),  $S_3 = 2,12$  Н, что совпадает с результатами, полученными методом вырезания узлов.

*ЗАДАНИЕ. В задачах 4.31–4.40 для самостоятельного решения провести расчет ферм согласно приведенному примеру, считая заданными размеры и величины сил в Н (методом сечений проверить два любых стержня).*

#### 4.6. Центр тяжести однородного плоского тела

Наиболее распространенным и универсальным способом расчета координат центра тяжести тела является *способ разбиений*, предусматривающий следующий порядок решения.

1. Плоскую фигуру разбивают на элементы, имеющие центр геометрической симметрии, или стандартные тела, координаты центров тяжести которых вычисляются по известным формулам (дуга окружности, круговой сектор (п. 2.6) и т.п.). В ряде случаев целесообразно *дополнять* реальные элементы до симметричных тел, при этом площадь или длину дополненной части тела считают *отрицательной*.

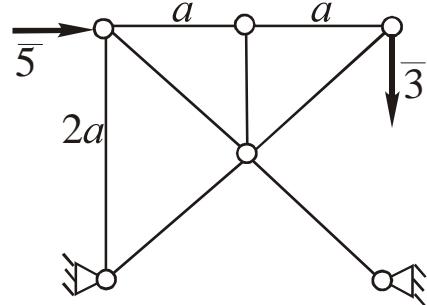
2. Указывают расположение центров тяжести каждого из элементов, определяют их площади  $S_k$  (длины  $L_k$ ) и координаты  $x_k, y_k$  центров тяжести. Если рассматриваемым элементом является дуга окружности или круговой сектор, то следует учитывать, что соответствующие координаты отсчитывают *от центра окружности* по оси симметрии. Центр тяжести треугольника делит его медианы в отношении 1:2. При большом количестве элементов результаты расчетов рекомендуется фиксировать в виде таблицы.

3. Результаты расчетов подставляют в формулы (п. 2.6):

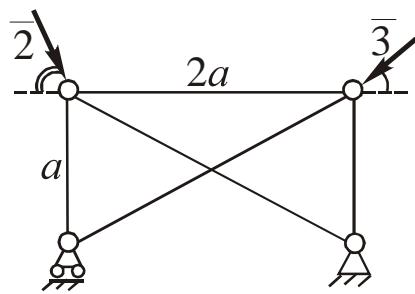
$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{\sum S_k}, \quad y_C = \frac{\sum y_k S_k}{\sum S_k} \text{ или } x_C = \frac{\sum x_k L_k}{\sum L_k}, \quad y_C = \frac{\sum y_k L_k}{\sum L_k}.$$

По полученным координатам  $x_C, y_C$  определяют положение точки  $C$ .

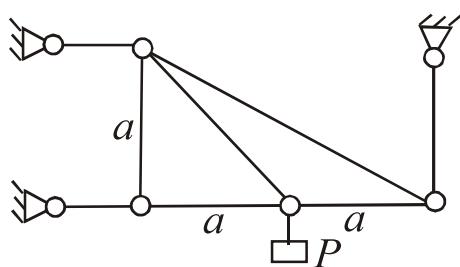
4.31



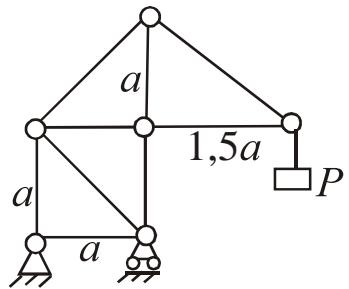
4.32



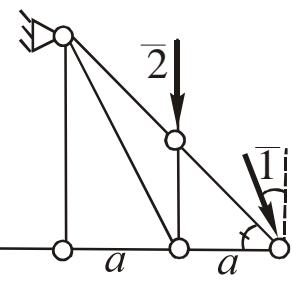
4.33



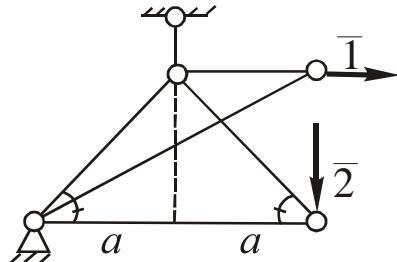
4.34



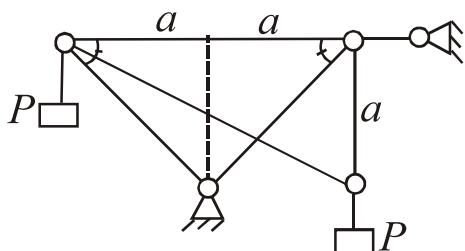
4.35



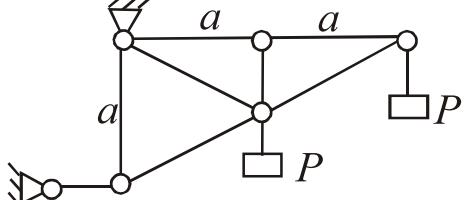
4.36



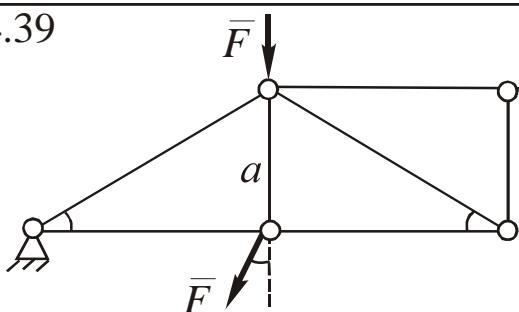
4.37



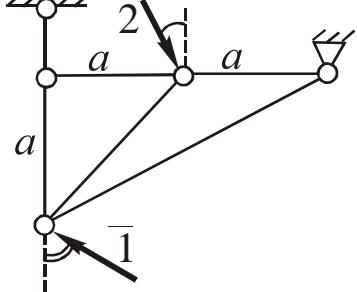
4.38



4.39



4.40



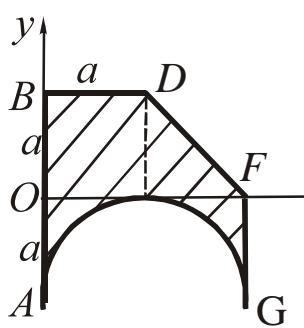


Рис. 4.33

*Пример 1.* Определить центр тяжести однородной пластины  $ABDFG$  (рис. 4.33).

*Решение.* 1. Разделяем пластину на три элемента: 1 – прямоугольную пластину  $AB-EF$ , применяя *дополнение* (центр тяжести  $C_1$  расположен в пересечении диагоналей); 2 – треугольник  $DEF$  (его площадь отрицательна, центр тяжести  $C_2$  расположен в пересечении медиан); 3 – полуокружность  $AHG$  (площадь отрицательна, центр тяжести  $C_3$  расположен на оси симметрии) (рис. 4.34).

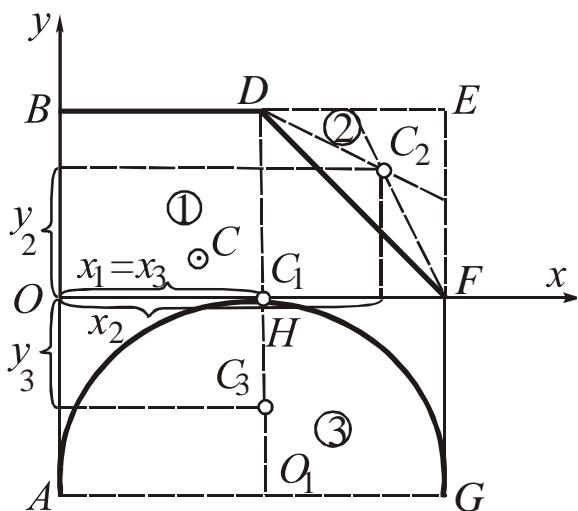


Рис. 4.34

2. Координаты  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_3$  очевидны. Определяем остальные координаты:

$$x_2 = OH + \frac{2}{3}HF = 1,67a;$$

$$y_2 = \frac{2}{3}EF = 0,67a;$$

$$\begin{aligned} y_3 &= -(O_1H - C_3) = \\ &= -\left(a - \frac{2}{3}a \frac{\sin \pi/2}{\pi/2}\right) = -0,58a. \end{aligned}$$

Результаты расчетов сводим в таблицу:

$k$	$x_k$	$y_k$	$S_k$
1	$a$	0	$4a^2$
2	$1,67a$	$0,67a$	$-0,5a^2$
3	$a$	$-0,58a$	$-1,57a^2$

3. Определяем координаты  $x_C$  и  $y_C$  центра тяжести пластины:

$$x_C = \frac{a \cdot 4a^2 - 1,67a \cdot 0,5a^2 - a \cdot 1,57a^2}{a^2(4 - 0,5 - 1,57)} = 0,83a;$$

$$y_C = \frac{0 \cdot 4a^2 - 0,67a \cdot 0,5a^2 + 0,58a \cdot 1,57a^2}{a^2(4 - 0,5 - 1,57)} = 0,3a.$$

Указываем на рис. 4.34 точку  $C(0,83a; 0,3a)$ .

*Пример 2.* Определить центр тяжести проволочной фигуры  $OABDE$  (рис. 4.35).

*Решение.* 1. Разделяем фигуру на четыре элемента: 1 – отрезок  $AB$ ; 2 – отрезок  $OB$ ; 3 – отрезок  $BE$ ; 4 – дугу  $BD$ .

Центры тяжести  $C_1-C_3$  отрезков находятся в их серединах,  $C_4$  дуги – на оси симметрии (рис. 4.36).

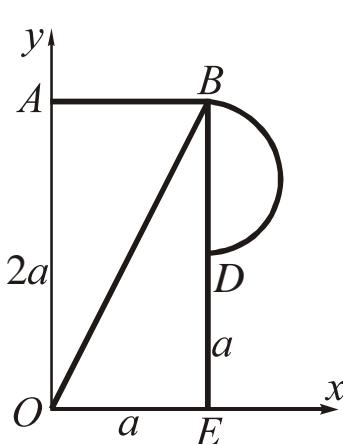


Рис. 4.35

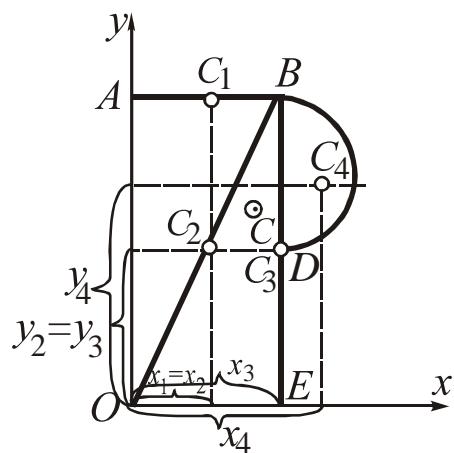


Рис. 4.36

Координаты  $x_1-x_3$  и  $y_1-y_4$  очевидны,  $x_4 = a + \frac{a \sin \pi/2}{2 \cdot \pi/2} = 1,32a$ .

Результаты расчетов:

$k$	$x_k$	$y_k$	$l_k$
1	$0,5a$	$2a$	$a$
2	$0,5a$	$a$	$2,24a$
3	$a$	$a$	$2a$
4	$1,32a$	$1,52a$	$1,57a$

3. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_C = \frac{0,5a \cdot a + 0,5a \cdot 2,24a + a \cdot 2a + 1,32a \cdot 1,57a}{a(1+2,24+2+1,57)} = 0,84a;$$

$$y_C = \frac{2a \cdot a + a \cdot 2,24a + a \cdot 2a + 1,5a \cdot 1,57a}{a(1+2,24+2+1,57)} = 1,26a.$$

Указываем на рис. 6.4 точку  $C(0,84a; 1,26a)$ .

*ЗАДАНИЕ.* В задачах 4.41–4.50 для самостоятельного решения найти центры тяжести однородных плоских тел и фигур.

## 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

*Кинематикой* называют раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их масс и действующих на них сил. При этом под движением понимают изменение с *текущим временем* положения тела в пространстве *относительно системы отсчета*.

### 5.1. Способы задания движения точки

*Задать* движение точки (тела) означает каким-либо способом определить положение точки (тела) в пространстве *в любой момент времени*.

Различают три основные способы задания движения точки (по существу они являются аксиомами кинематики): естественный, координатный, векторный.

При *естественном* способе задают (рис. 5.1):

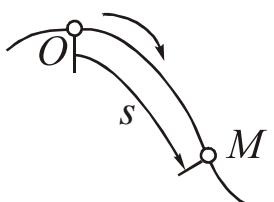


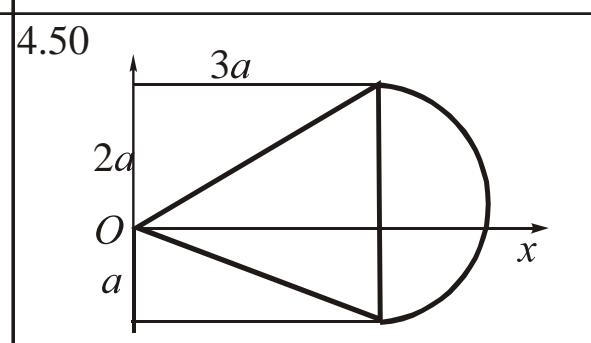
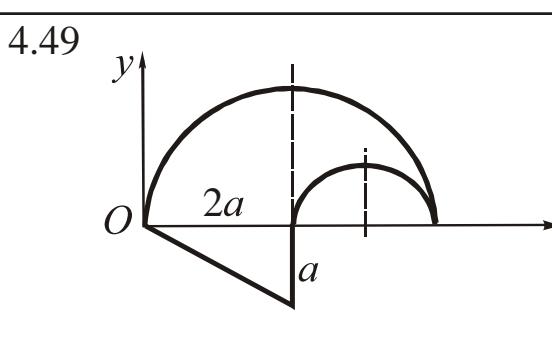
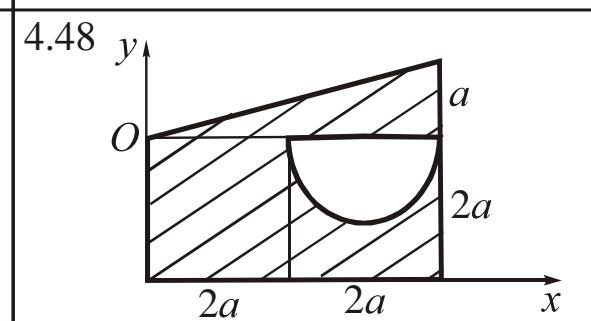
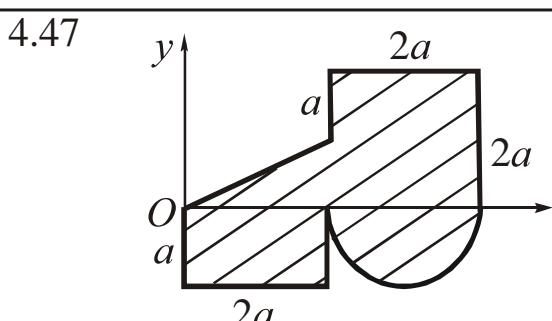
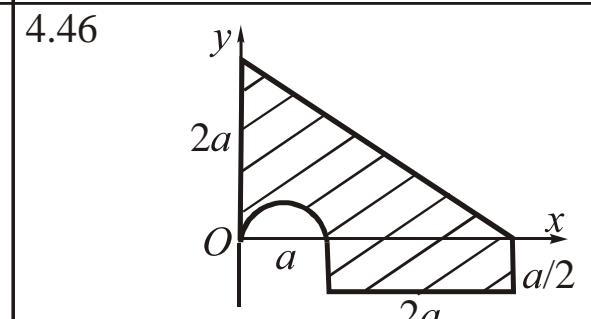
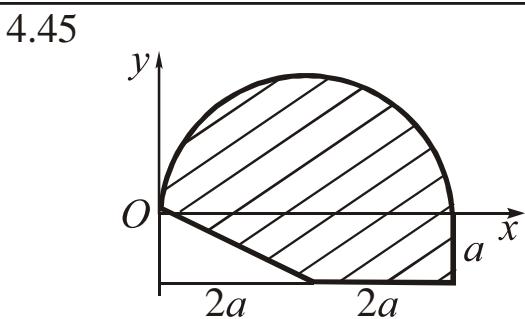
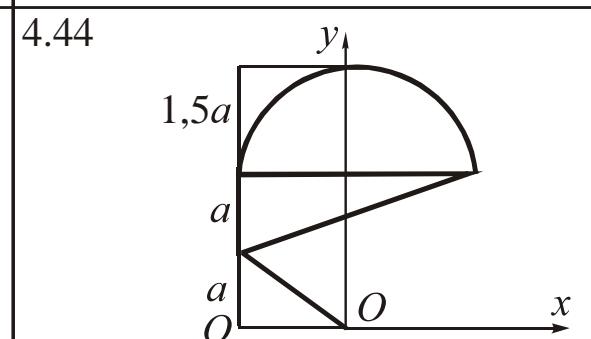
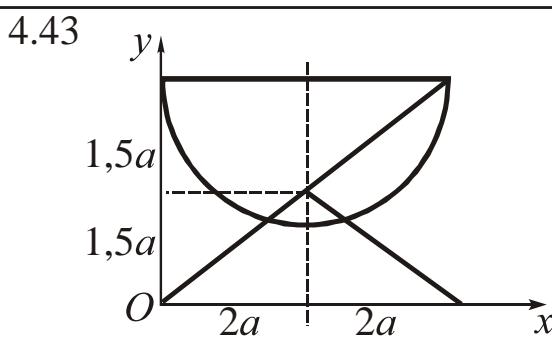
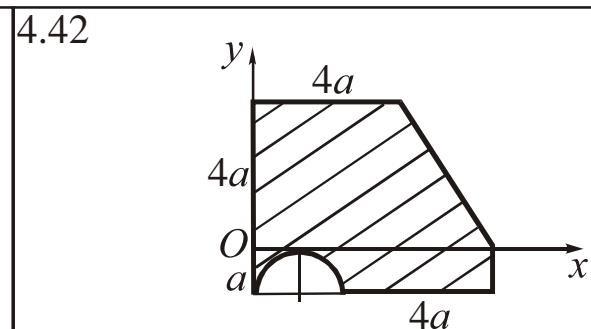
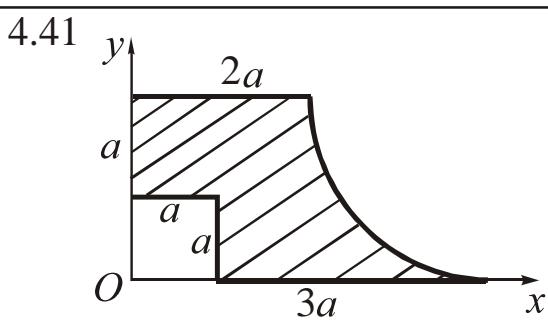
Рис. 5.1

- *траекторию*, то есть линию, по которой происходит движение точки  $M$  (ее можно задать аналитически уравнением или графически);

- *начало отсчета* на траектории ( $O$ ) и направление положительного отсчета ( $\rightarrow$  или  $+$ );

- *закон движения* точки по траектории

$s = s(t)$ , где  $s$  – «дуговая» координата;  $t$  – время.



Следует отличать координату  $s$ , которая может, как возрастать, так и убывать и иметь отрицательные значения, от «*пути*», который представляет собой неубывающую величину, равную сумме элементарных отрезков, проходимых точкой.

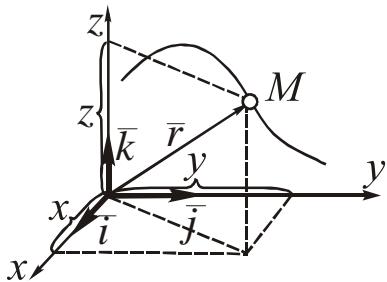


Рис. 5.2

При *координатном* способе задают функции (уравнения) координат точки, чаще всего, прямоугольных (рис. 5.2):

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

При *векторном* способе задают вектор-функцию  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  (рис. 5.2).

*Сравнительная оценка* способов задания движения точки:

- векторный способ наиболее просто осуществим математически, так как достаточно задать одно уравнение, однако он наименее нагляден;
- естественный способ требует наибольшего объема информации, но он наиболее нагляден, поэтому он чаще других применяется для практических целей (например, графики движения поездов, прохождения маршрута в турпоходе);
- координатный способ обеспечивает наиболее простой расчет скорости и ускорения точки (п. 5.2), поэтому в задачах кинематики точки движение чаще всего задается именно эти способом.

*Переход от координатного способа к векторному* обеспечивается с помощью единичных векторов  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  (рис. 5.2):

$$\bar{r}(t) = \bar{i}x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t).$$

*Переход от координатного способа к естественному* включает:

- определение уравнения траектории путем исключения параметра  $t$  в уравнениях движения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \Rightarrow f(x, y, z) = 0$$

или построение траектории графически по координатам точки в задаваемые моменты времени  $t$ ;

- за начало отсчета  $O$  целесообразно принимать начальную

точку  $M_O$  с координатами  $x_O = x(t)|_{t=0}; y_O = y(t)|_{t=0}; z_O = z(t)|_{t=0}$ , направление положительного отсчета совпадает с направлением вектора скорости  $\bar{V}_O$  в момент  $t = 0$ ;

– закон движения по траектории вычисляют через функцию скорости (п. 5.2)

$$s(t) = \int_0^t V(t) dt = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

## 5.2. Скорость и ускорение точки

Скорость и ускорение точки – *пространственно-временные характеристики* ее движения. Под *скоростью* понимают вектор  $\bar{V}$ , характеризующий быстроту изменения положения точки с течением времени, под *ускорением* – вектор  $\bar{a}$ , характеризующий быстроту изменения скорости.

### 5.2.1. Векторный способ

Рассмотрим положения точки  $M$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$

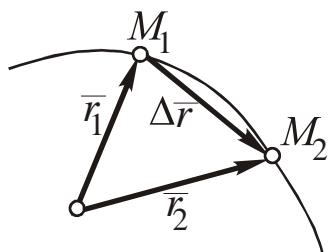


Рис. 5.3

$(t_2 > t_1, t_2 - t_1 = \Delta t)$ . Определим вектор перемещения точки  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (рис. 5.3). Отношение  $\bar{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  называют *средней скоростью* точки, ее достаточно часто применяют на практике, однако она неудобна тем, что зависит от величины интервала времени  $\Delta t$ . Поэтому переходят к предельному значению  $\bar{V}_{\text{ср}}$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \bar{V}(t)$$

(в механике принято обозначать производную по времени точкой).

Функцию  $\bar{V}(t)$  называют *скоростью точки – функцией времени*.

Так как при  $\Delta t \rightarrow 0$  точки  $M_2$  и  $M_1$  неограниченно приближаются, вектор  $\bar{V}(t)$  в момент  $t$  направляется *по касательной* к траектории (годографу вектор-функции  $\bar{r}(t)$ ).

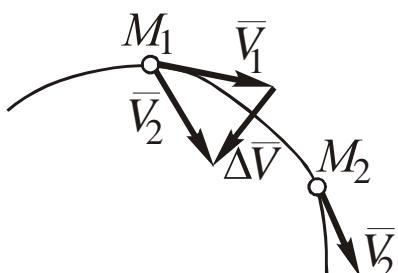


Рис. 5.4

Аналогично рассмотрим изменение вектора  $\bar{V}$  за интервал времени от  $t_1$  до  $t_2$ :  $\Delta \bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$  (рис. 5.4). Отношение  $\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$  – среднее ускорение точки.

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d \bar{V}}{d t} = \dot{\bar{V}} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} = \bar{a}(t)$  – *ускорение точки – функция времени*.

Из рис. 5.4 следует, что вектор  $\bar{a}(t)$  в момент  $t$  расположен в плоскости, образованной двумя касательными к траектории при их неограниченном приближении к расчетному положению точки (эту плоскость называют *соприкасающейся*) и направлен внутрь траектории.

Таким образом, скорость  $\bar{V}(t)$  и ускорение  $\bar{a}(t)$  точки равны соответственно первой и второй производным по времени от вектор-функции  $\bar{r}(t)$ .

### 5.2.2. Координатный способ

Используем уравнение перехода от координатного способа к векторному (п. 5.1):

$$\bar{V} = \frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}.$$

Выразим вектор  $\bar{V}$  через его проекции на координатные оси:

$$\bar{V} = \bar{i}V_x + \bar{j}V_y + \bar{k}V_z.$$

Сопоставляя эти два уравнения, получим

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z},$$

то есть проекции вектора скорости равны соответствующим про-

изводным по времени от функций координат точки.

По найденным проекциям можно определить величину и направление (направляющие косинусы) вектора  $\bar{V}$ :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos(\bar{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{V}; \quad \cos(\bar{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos(\bar{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{z}}{V}.$$

Аналогично определяют проекции, величину и направление вектора ускорения  $\bar{a}$ :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z \Rightarrow a_x = \ddot{x}; a_y = \ddot{y}; a_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};$$

$$\cos(\bar{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Вместо направляющих косинусов при решении задач применяют графическое построение векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{a}$  по проекциям (рис. 5.5): выбирая масштабы, из расчетного положения точки  $M$  откладывают соответствующие проекции с учетом их знаков и соединяют точку  $M$  с концами построений.

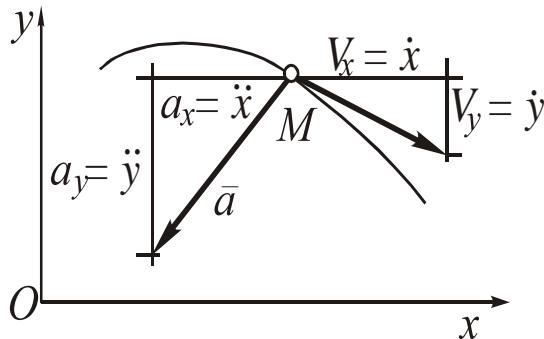


Рис. 5.5

### 5.2.3. Естественный способ

Принципиальным отличием естественного способа является

то, для определения векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{a}$  применяют координатные оси, которые ориентированы определенным образом относительно траектории и *перемещаются по ней вместе с точкой* (эти оси называют подвижными или естественными) (рис. 5.6):

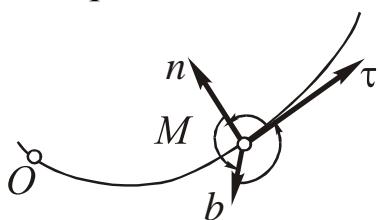


Рис. 5.6

$M\tau$  – касательная, направленная по касательной к траектории в сторону от начала отсчета  $O$ ;

$Mn$  – главная нормаль, направленная в соприкасающейся плоскости  $\tau Mn$  перпендикулярно к оси  $M\tau$  в сторону вогнутости траектории;

$Mb$  – бинормаль, направленная перпендикулярно к плоскости  $\tau Mn$  в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение  $\tau$  с  $n$  видно против часовой стрелки.

Оси  $\tau, n, b$  образуют естественные координатные плоскости:  $\tau Mn$  – соприкасающуюся;  $nMb$  – нормальную;  $\tau Mb$  – спрямляющую.

Из п. 5.2.1 следует, что вектор  $\bar{V}$  направлен по касательной  $\tau$ , а вектор  $\bar{a}$  расположен в соприкасающейся плоскости  $\tau Mn$  (проекция на бинормаль  $a_b$  равна нулю).

Определим проекции векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{a}$  на естественные оси.

Аналогично п. 5.2.1 рассмотрим положения  $M_1$  и  $M_2$  точки в моменты  $t_1, t_2$  и воспользуемся ранее полученным выражением для  $\bar{V}$  и  $\bar{a}$ :

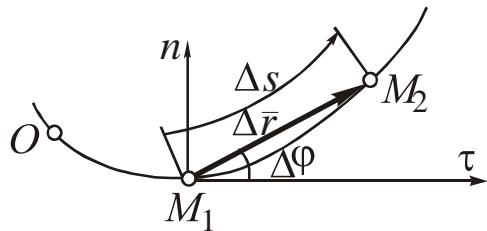


Рис. 5.7

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

В проекциях на ось  $\tau$  (рис. 5.7)

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r \cos \Delta \phi}{\Delta t}.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $\Delta r \rightarrow \Delta s$ ,  $\cos \Delta \phi \rightarrow 1$ ,

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

то есть скорость точки равна первой производной по времени от функции  $s(t)$ . При  $\dot{s} > 0$  вектор  $\bar{V}$  направлен в сторону оси  $\tau$ , при  $\dot{s} < 0$  – противоположно.

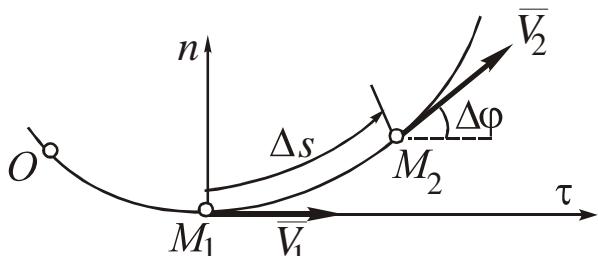


Рис. 5.8

Рассмотрим проекции вектора  $\bar{a}$  на оси  $\tau$  и  $n$  (рис. 5.8):

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{V}_2 - V_1}{\Delta t};$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 \sin \Delta \phi}{\Delta t};$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 \cos \Delta \phi - V_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \ddot{s}.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V$ ,  $\sin \Delta \phi \rightarrow \Delta \phi$ . Преобразуя выражение для  $a_n$ , получим

$$a_n = V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta s} = V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{V^2}{\rho},$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории в расчетной точке  $M$ , характеризующий отклонение вектора  $\bar{V}$  от касательной в соседней с  $M$  точке. Физический смысл  $\rho$  состоит в том, что он равен радиусу окружности, наиболее плотно прилегающей к траектории в расчетной точке (для окружности радиуса  $R$  во всех точках  $\rho = R$ , для прямой  $\rho \rightarrow \infty$ , для остальных кривых  $\rho$  можно вычислить, зная уравнение траектории).

Введем составляющие вектора  $\bar{a}$ , направленные по осям  $\tau$  и  $n$  и равные по модулю соответствующим проекциям  $a_n$  и  $a_\tau$ :

$\bar{a}_\tau$  – *касательное* (тангенциальное) ускорение, характеризующее изменение скорости по величине, при  $a_\tau = \dot{V} > 0$   $\bar{a}_\tau$  направлен в сторону оси  $\tau$ , при  $a_\tau < 0$  – противоположно;

$\bar{a}_n$  – *нормальное* (центростремительное) ускорение, характеризующее изменение скорости по направлению, так как  $a_n = \frac{V^2}{\rho} \geq 0$ , то есть *неотрицательно*,  $\bar{a}_n$  всегда направлено в сторону оси  $n$ .

Полное ускорение  $\bar{a}$  определяют через составляющие (рис. 5.9):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$\cos\left(\overline{a}^{\wedge}, \tau\right) = \frac{a_{\tau}}{a}.$$

Ускорения  $a_{\tau}$  и  $a_n$  можно получить через функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  при координатном способе задания движения. Например, при движении в плоскости ( $z = \text{const}$ ):

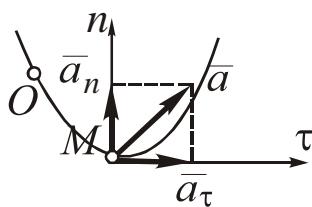


Рис. 5.9

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V};$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \dots = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{V}.$$

(в последнем уравнении промежуточные преобразования опущены).

### 5.3. Виды движения точки

В зависимости от вида траектории точки различают следующие виды ее движения:

– при  $\rho(t) = \text{const} \rightarrow \infty$  – *прямолинейное* (рис. 5.10); траекторией точки является прямая (луч, отрезок),

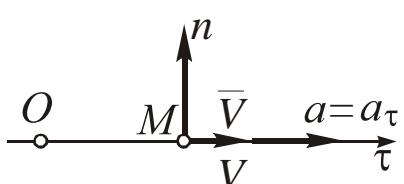


Рис. 5.10

$$a_n(t) = \frac{V^2(t)}{\rho(t)} = \text{const} = 0,$$

то есть в любой момент времени векторы  $\overline{V}$  и  $\overline{a} = \overline{a}_{\tau}$  направлены *по траектории*;

– при  $\rho(t) = \text{const} = R$  – *движение по окружности* (рис. 5.11); траекторией точки является окружность радиуса  $R$ ,

$$a_n(t) = \frac{V^2(t)}{R},$$

так как ось  $n$  проходит через центр окружности  $O_1$ , вектор  $\bar{a}_n$  направлен к  $O_1$ , векторы  $\bar{V}$  и  $\bar{a}_\tau$  направлены перпендикулярно к  $MO_1$ ;

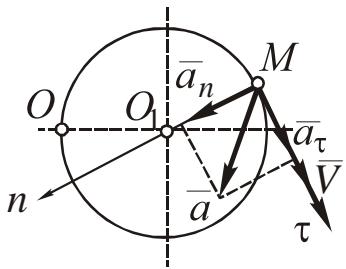


Рис. 5.11

– при  $\rho(t) \neq \text{const}$  – *криволинейное*.

В зависимости от закона изменения касательного ускорения  $a_\tau = a_\tau(t)$  различают следующие виды движения:

–  $a_\tau(t) = \text{const} = 0$  – *равномерное*, для которого функции  $V(t)$  и  $s(t)$

можно получить интегрированием, используя выражения из п. 5.2.3

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \int dV = 0 \Rightarrow V(t) = V_0;$$

$$\frac{ds}{dt} = V_0 \Rightarrow \int ds = \int V_0 dt \Rightarrow s(t) = V_0 t + s_0,$$

где  $V_0, s_0$  – соответственно начальная скорость и координата;

–  $a_\tau(t) = \text{const} \neq 0$  – *равнопеременное*

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau \Rightarrow \int dV = \int a_\tau dt \Rightarrow V(t) = a_\tau t + V_0;$$

$$\frac{ds}{dt} = a_\tau + V_0 \Rightarrow \int ds = \int (a_\tau + V_0) dt \Rightarrow s(t) = a_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0;$$

–  $a_\tau(t) \neq \text{const}$  – *неравнопеременное*.

В зависимости от направлений векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{a}_\tau$  в расчетный момент  $t$  (в зависимости от знаков производных  $\dot{s}$  и  $\dot{V}$ ) различают:

–  $\bar{V} \uparrow \uparrow \bar{a}_\tau$  ( $\dot{s} > 0, \dot{V} > 0$  или  $\dot{s} < 0, \dot{V} < 0$ ) – *ускоренное движение*;

–  $\bar{V} \uparrow \downarrow \bar{a}_\tau$  ( $\dot{s} > 0, \dot{V} < 0$  или  $\dot{s} < 0, \dot{V} > 0$ ) – *замедленное движение*.

Рассмотренные признаки движения точки могут применяться отдельно или в комплексе (например, движение точки по ок-

ружности, неравнопеременное, ускоренное в момент  $t_1$  и замедленное в момент  $t_2$ ).

## 6. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данном пособии рассмотрены вращательное, поступательное и плоскопараллельное движения тела.

Анализ движений тела будет включать следующие этапы:

- закон движения тела (уравнения, определяющие его положение в пространстве в любой момент времени);
- кинематические характеристики движения тела (аналоги скорости и ускорения точки);
- связь скорости и ускорения произвольной точки тела с его кинематическими характеристиками.

### 6.1. Вращательное движение тела

*Вращательным* называют движение тела, у которого существует

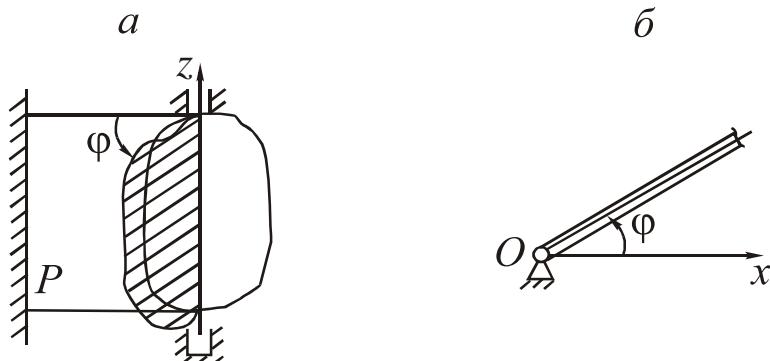


Рис. 6.1

*неподвижная ось  $z$ .* В плоском механизме ось перпендикулярна чертежу и видна в виде точки  $O$ . Неподвижность оси  $z$  и центра  $O$  обеспечивается шарнирами (рис. 6.1).

Вращательными являются движения двери, форточки, ротора или маховика двигателя, лопасти вентилятора.

При данном движении в любой момент времени положение тела однозначно определяется углом поворота  $\varphi$  сечения тела, проходящего через ось  $z$ , относительно фиксированного начального положения  $P$  (рис. 6.1,  $a$ ) или оси, проходящей через  $O$ , от-

носительно оси отсчета  $x$  (рис. 6.1, б). Алгебраическую величину  $\varphi$  называют угловой координатой. Таким образом, закон вращательного движения тела имеет вид:  $\varphi = \varphi(t)$ , рад.

*Кинематические характеристики* вращательного движения тела определим аналогично п. 5.2.

Пусть в момент  $t_1$  положение тела определяется угловой координатой  $\varphi_1$ , а в момент  $t_2 - \varphi_2$ . Получим следующие пространственно-временные характеристики:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \omega_{cp} \text{ — средняя угловая скорость тела;}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega(t) \text{ — угловая скорость тела — функция времени;}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \varepsilon_{cp} \text{ — среднее угловое ускорение тела;}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \varepsilon(t) \text{ — угловое ускорение тела — функция времени.}$$

Введенные угловые характеристики  $\omega$  и  $\varepsilon$  скалярные, на чертеже их обозначают дуговыми стрелками, направленными вокруг оси следующим образом: при положительных значениях производных  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$  — в сторону направления положительного отсчета координаты  $\varphi$ , при отрицательных — в обратную (рис. 6.2). Под «направлением»  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  понимают два возможных случая:

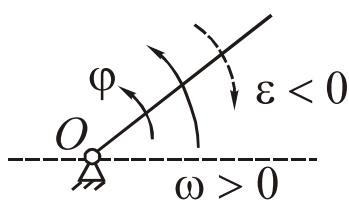


Рис. 6.2

(рис. 6.2). При положительных производных  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$  — в сторону направления положительного отсчета координаты  $\varphi$ , при отрицательных — в обратную (рис. 6.2). Под «направлением»  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  понимают два возможных случая: *по или против часовой стрелки*.

При решении пространственных задач вводят векторы  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\varepsilon}$ , которые по модулю равны  $\omega$  и  $\varepsilon$ , направлены параллельно оси вращения  $z$  по движению правого винта при повороте его в направлении  $\omega$  или  $\varepsilon$  (по правилу «правого винта») (рис. 6.3).

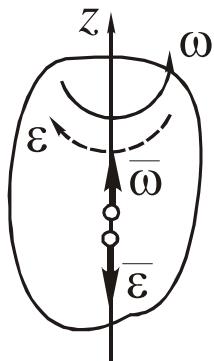
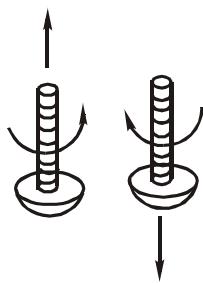


Рис. 6.3



Единицы размерности в СИ:

$\omega$  – рад/с или  $\text{с}^{-1}$ ;  
 $\epsilon$  – рад/с<sup>2</sup> или  $\text{с}^{-2}$ .

Аналогично п. 5.3 рассмотрим виды вращательного движения тела.

В зависимости от вида функции  $\epsilon = \epsilon(t)$  различают:

- *равномерное вращение*,  $\epsilon(t) = \text{const} = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ ;
- *равнопеременное вращение*,  $\epsilon(t) = \text{const} \neq 0$ ,  $\omega = \epsilon t + \omega_0$ ,

$$\varphi = \epsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0,$$

где  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  – начальные угловая скорость и координата;

- *неравнопеременное вращение*,  $\epsilon(t) \neq \text{const}$ .

В зависимости от знаков (направлений)  $\omega$  и  $\epsilon$  в расчетный момент времени различают:

- *ускоренное вращение*,  $\omega > 0$ ,  $\epsilon > 0$  или  $\omega < 0$ ,  $\epsilon < 0$ ;
- *замедленное вращение*,  $\omega > 0$ ,  $\epsilon < 0$  или  $\omega < 0$ ,  $\epsilon > 0$ .

Установим связь скорости  $V_M$  и ускорения  $a_M$  произвольной точки  $M$  тела с  $\omega$  и  $\epsilon$ .

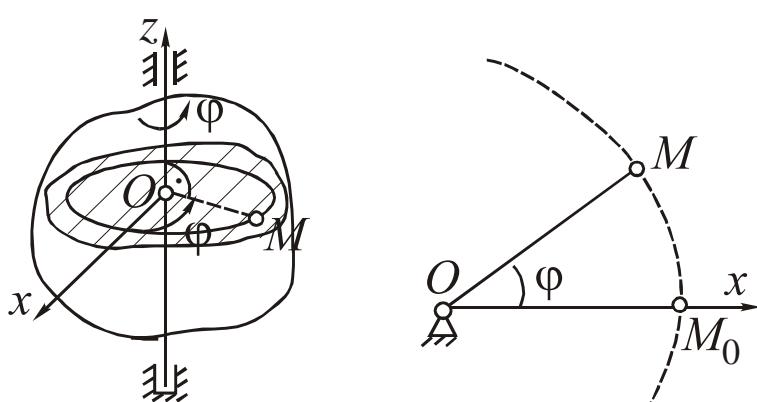


Рис. 6.4

Движение  $M$  будет происходить в плоскости, проходящей через  $M$  перпендикулярно оси  $z$ , по окружности, центр  $O$  которой расположен на пересечении этой плоскости с осью  $z$  (рис. 6.4). Закон движения точки по траектории:

$$s(t) = M_0 M(t) = \varphi(t) MO.$$

Для определения величин и направлений векторов  $\bar{V}_M$  и  $\bar{a}_M$  воспользуемся формулами для естественного способа задания движения (п. 5.2.3) и движения точки по окружности (п. 5.3) (рис. 6.5):

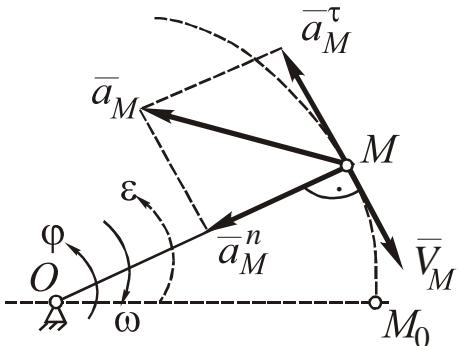


Рис. 6.5

$$V_M = \dot{s} = \frac{d\phi}{dt} MO = \omega MO;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2};$$

$$a_M^n = \frac{V_M^2}{MO} = \omega^2 MO;$$

$$a_M^\tau = \ddot{s} = \dot{V}_M = \frac{d\omega}{dt} MO = \varepsilon MO.$$

Направлены векторы следующим образом:  $\bar{a}_M^n$  к точке  $O$  (центру окружности), а  $\bar{V}_M$  и  $\bar{a}_M^\tau$  перпендикулярно к  $MO$  (см. рис. 5.11). Направления векторов  $\bar{V}_M$  и  $\bar{a}_M^\tau$  определяют по направлениям  $\omega$  и  $\varepsilon$ : если представить  $MO$  стрелкой, поворачивающейся вокруг  $O$  в направлении  $\omega$  (или  $\varepsilon$ ), то вектор  $\bar{V}_M$  (или  $\bar{a}_M^\tau$ ) направлен в ту сторону, в которую будет скользить конец этой стрелки. Назовем это *правилом согласованности*  $\omega$  с  $\bar{V}_M$  и  $\varepsilon$  с  $\bar{a}_M^\tau$ .

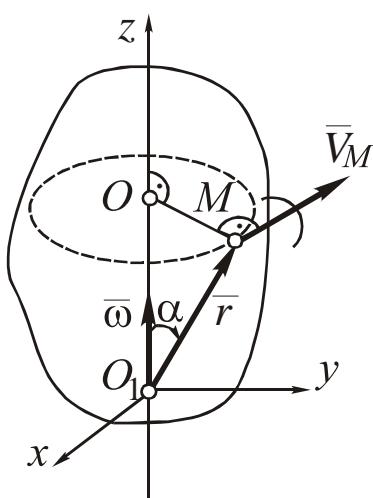


Рис. 6.6

Таким образом, величины и направления векторов определяют по следующим формулам, которые являются основными для расчета плоских механизмов:

$$\bar{V}_M \perp MO \text{ согласовано } \omega; V_M = \omega MO;$$

$$\bar{a}_M^n \perp O; a_M^n = \omega^2 MO;$$

$$\bar{a}_M^\tau \perp MO \text{ согласовано } \varepsilon; a_M^\tau = \varepsilon MO.$$

В пространственных задачах  $\bar{V}_M$  и  $\bar{a}_M^\tau$  выражают через векторы  $\bar{\omega}$  и  $\bar{r}$  (рис. 6.6). Поскольку вектор  $\bar{V}_M$  расположен перпендикулярно плоскости, образованной  $\bar{\omega}$  и  $\bar{r}$ , направ-

лен в сторону движения правого винта при повороте его в направлении кратчайшего совмещения  $\bar{\omega}$  с  $\bar{r}$ , а модуль  $\bar{V}_M$  равен

$$V_M = \omega MO = \omega r \sin \alpha,$$

то  $\bar{V}_M$  совпадает с векторным произведением  $\bar{\omega}$  и  $\bar{r}$ :

$$\bar{V}_M = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор  $M$ , проведенный из произвольной точки  $O_1$  на оси  $z$ .

Ускорение  $\bar{a}_M$  определим, беря производную от  $\bar{V}_M$ :

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V},$$

где  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_M^\tau$ ,  $\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{a}_M^n$ .

## 6.2. Поступательное движение тела

*Поступательным* называют движение тела, при котором любой отрезок прямой, соединяющей две точки тела, перемещается параллельно первоначальному положению.

Поступательно движутся: поршень или ползун (они имеют направляющие поверхность или ось, препятствующие повороту); линейка рейсшины (проведенные по ней линии параллельны); кабина колеса обозрения.

Для анализа поступательного движения тела рассмотрим его положения в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Выберем точку  $A$  за «полюс», то есть будем считать ее движение известным. Выразим движение точки  $B$  (рис. 6.7):

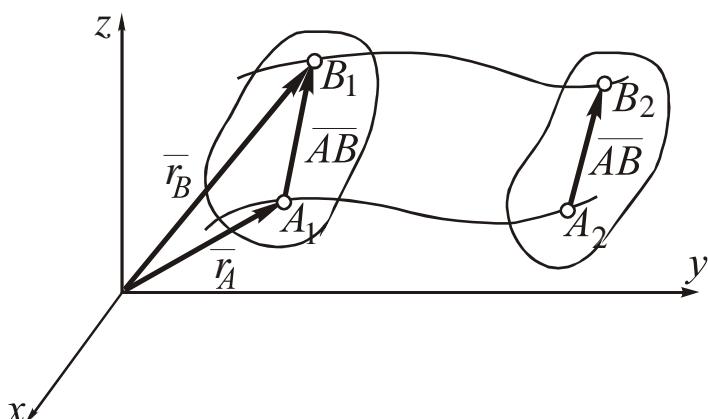


Рис. 6.7

$$\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{AB},$$

где  $\bar{AB} = \text{const}$ , так как  $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overline{A_2B_2}$ .

Траектория точки  $B$  может быть получена путем смещения траектории точки  $A$  в направлении  $\bar{AB}$  (при наложении траектории совместятся).

Определим  $\bar{V}_B$  и  $\bar{a}_B$ :

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_A + \overline{AB}) = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_A;$$

$$\bar{a}_B = \frac{d^2\bar{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\bar{r}_A + \overline{AB}) = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} = \bar{a}_A.$$

Таким образом, свойства поступательного движения тела состоят в следующем.

1. *Закон движения* совпадает с законом движения полюса, за который может быть выбрана любая точка тела. Например, для полюса  $A$  вектор-функция  $\bar{r}_A = \bar{r}_A(t)$  – закон движения тела. Этот закон может быть также записан в координатной и естественной формах.

2. *Кинематические характеристики* движения тела – скорость  $\bar{V}_A = \dot{\bar{r}}_A$  и ускорение  $\bar{a}_A = \ddot{\bar{r}}_A$  полюса.

3. В любой момент времени скорости и ускорения всех точек тела равны соответственно скорости  $\bar{V}_A$  и ускорению  $\bar{a}_A$  полюса.

*Примечание.* Поступательное – единственный вид движения, по отношению к которому допустимо употребление выражений «скорость тела» и «ускорение тела». В остальных случаях термины "скорость" и "ускорение" относятся только к *точкам тела*.

### 6.3. Плоскопараллельное движение тела

*Плоскопараллельным (плоским)* называют движение тел, при котором все его точки перемещаются параллельно неподвижной плоскости.

Плоскопараллельным является движение отдельных деталей плоских механизмов, у которых движение всех точек и элементов происходит в неподвижной плоскости.

В кривошипно-шатунном механизме (рис. 6.8) кривошип  $OA$  движется вращательно (точка  $O$  неподвижна), ползун  $B$  – поступательно (он имеет направляющую ось), а шатун  $AB$  – плоскопараллельно (нет признаков поступательного и вращательного

движений).

В планетарном механизме (рис. 6.9) колесо I и кривошип (водило)  $OA$  вращаются вокруг неподвижной точки  $O$ , колесо II движется плоскопараллельно – оно катится по поверхности колеса I.

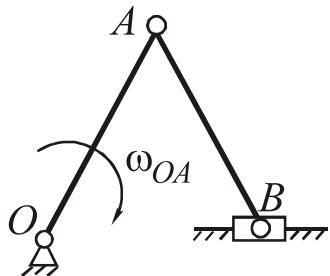


Рис. 6.8

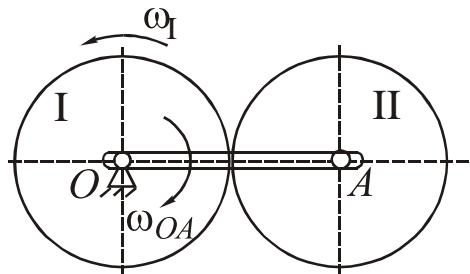


Рис. 6.9

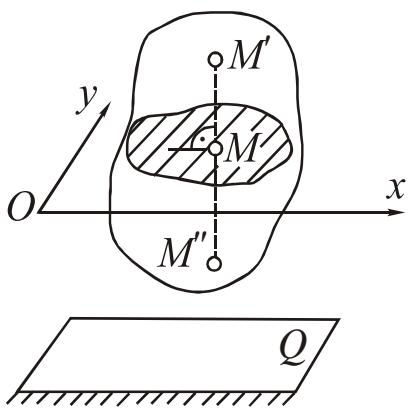


Рис. 6.10

Рассмотрим общий случай объемного тела, которое движется параллельно плоскости  $Q$  (рис. 6.10). Проведем сечение тела плоскостью  $xy$ , параллельной  $Q$ . Любой перпендикуляр к  $xy$   $M'M''$ , оставаясь параллельным самому себе, будет двигаться поступательно, а движение точки  $M$  (траектория, закон, скорость, ускорение) будет одинаковым с движением остальных точек отрезка  $M'M''$ , то есть движение сечения (*плоской фигуры*)

в плоскости  $xOy$  однозначно определяет движение всего тела.

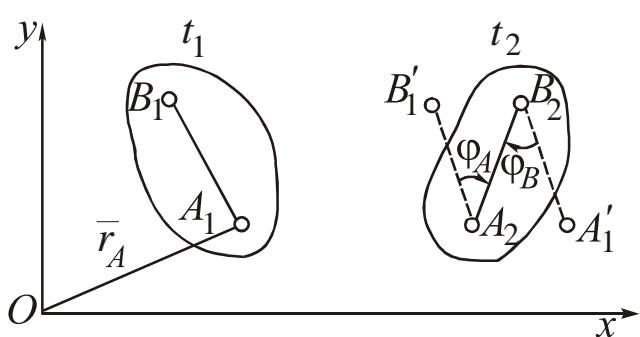


Рис. 6.11

$A_1B_1 \rightarrow A'_2B'_1$  и поворота вокруг полюса  $A_2$   $A_2B'_1 \rightarrow A_2B_1$  на угол  $\varphi_A$ .

Для определения закона движения плоской фигуры (отрезка  $AB$ ) рассмотрим ее положения в моменты  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 6.11). Выбрав за полюс точку  $A$ , представим перемещение в виде комбинации поступательного перемещения

При выборе за полюс точки  $B$  фигура совершил комбинацию из поступательного перемещения  $A_1B_1 \rightarrow A'_1B_2$  и вращательного  $A'_1B_2 \rightarrow A_2B_1$  на угол  $\phi_B$  (углы  $\phi_A$  и  $\phi_B$  равны). Таким образом, плоскопараллельное движение тела является *комбинацией поступательного*, когда все точки перемещаются одинаково с произвольно выбранным полюсом, и *вращательного* вокруг этого полюса, причем вращательная часть движения от выбора полюса не зависит. Установленное свойство позволяет записать *уравнения движения* тела как совокупность уравнений поступательного (описывающего движение полюса, например  $A$ ) и вращательного движений:

$$\bar{r}_A = \bar{r}_A(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

*Кинематические характеристики* плоскопараллельного движения тела включают скорость  $\bar{V}_A = \dot{\bar{r}}_A$  и ускорение  $\bar{a}_A = \ddot{\bar{r}}_A$  полюса, а также угловые скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  и ускорение  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  вращательной части движения.

Приняв  $A$  за полюс, определим скорость  $\bar{V}_M$  и ускорение  $\bar{a}_M$  произвольной точки  $M$  тела, считая известными  $\bar{V}_A$ ,  $\bar{a}_A$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ . В соответствии со свойством плоскопараллельного движения представим  $\bar{V}_M$  и  $\bar{a}_M$  в виде сумм составляющих (рис. 6.12):

$$\begin{aligned}\bar{V}_M &= \bar{V}_{M \text{ (пост)}} + \bar{V}_{M \text{ (вр)}}; \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_{M \text{ (пост)}} + \bar{a}_{M \text{ (вр)}},\end{aligned}$$

где  $\bar{V}_{M \text{ (пост)}}$ ,  $\bar{a}_{M \text{ (пост)}}$  – скорость и ускорение точки  $M$  в поступательной части движения тела;  $\bar{V}_{M \text{ (вр)}}$ ,  $\bar{a}_{M \text{ (вр)}}$  – скорость и ускорение точки  $M$  во вращательной части движения тела вокруг полюса  $A$ .

По свойству поступательного движения (п. 6.2)

$$\bar{V}_{M \text{ (пост)}} = \bar{V}_A; \quad \bar{a}_{M \text{ (пост)}} = \bar{a}_A.$$

Введем обозначения:  $\bar{V}_{M \text{ (вр)}} = \bar{V}_{MA}$ ;  $\bar{a}_{M \text{ (вр)}} = \bar{a}_{MA}$  (в ряде учебников принята обратная индексация –  $\bar{V}_{AM}$ ,  $\bar{a}_{AM}$ ).

По свойствам вращательного движения (п. 6.1), считая полюс  $A$  условно неподвижным, получим (рис. 6.12)

$$V_{MA} = \omega MA; \quad \bar{V}_{MA} \perp MA \text{ согл. } \omega;$$

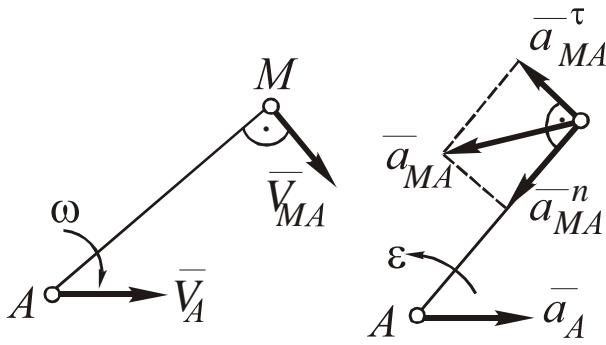


Рис. 6.12

$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau$ ;  
 $a_{MA}^n = \omega^2 MA$ ;  $\bar{a}_{MA}^n$  к  $A$ ;  
 $a_{MA}^\tau = \varepsilon MA$ ;  
 $\bar{a}_{MA}^\tau \perp MA$  согл.  $\varepsilon$ .  
 Таким образом,  $\bar{V}_M$  и  
 $\bar{a}_M$  можно определить из  
 векторных уравнений:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}; \quad \bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau.$$

## 6.4. Способы расчета скоростей плоского механизма

Существуют следующие основные способы расчета скоростей плоского механизма:

- с помощью мгновенных центров скоростей;
- план скоростей;
- с помощью теоремы о проекциях скоростей точек.

Основным является способ мгновенных центров скоростей, план скоростей и теорему о проекциях скоростей точек применяют для проверки решения.

### 6.4.1. Мгновенный центр скоростей

*Мгновенным центром скоростей* (МЦС) называют точку  $P$ , связанную с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю ( $V_P = 0$ ).

*Основной случай определения положения МЦС.* Выбрав МЦС  $P$  за полюс, выражим через  $\bar{V}_P$  скорости  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$  любых двух точек тела в соответствии с п. 6.3:

$$\begin{aligned}\bar{V}_A &= \bar{V}_P + \bar{V}_{AP} = \bar{V}_{AP}, \text{ где } \bar{V}_{AP} \perp AP; \\ \bar{V}_B &= \bar{V}_P + \bar{V}_{BP} = \bar{V}_{BP}, \text{ где } \bar{V}_{BP} \perp BP,\end{aligned}$$

откуда следует, что точка  $P$  находится на пересечении перпендикуляров, проведенных в двух точках тела к линиям скоростей этих точек (рис. 6.13):

$$\perp (\bar{V}_A), \perp (\bar{V}_B) \Rightarrow P.$$

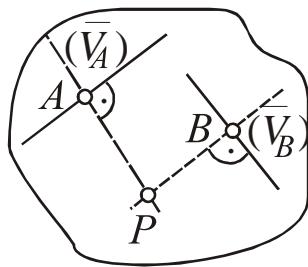


Рис. 6.13

Отметим, что для определения  $P$  не нужны векторы  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$ , достаточно их линий. МЦС не является физической точкой, поэтому он может находиться вне тела или даже в бесконечности (этот случай будет рассмотрен ниже).

*Свойство МЦС.* Если известны положение МЦС и  $\omega$  тела, то для произвольной точки  $M$  можно записать:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_P + \bar{V}_{MP} = \bar{V}_{MP},$$

откуда  $V_M = \omega MP$ ;  $\bar{V}_M \perp MP$  согласовано  $\omega$ .

Если угловая скорость тела  $\omega$  неизвестна, то ее можно найти по вектору скорости  $\bar{V}_M$  (рис. 6.14):

$$\omega = V_M / MP; \omega \text{ согл. } \bar{V}_M.$$

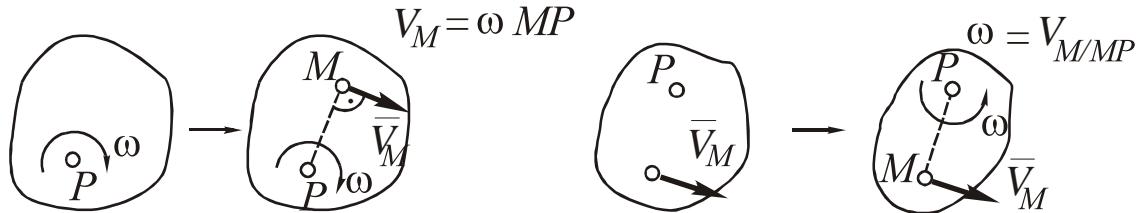


Рис. 6.14

Из приведенных зависимостей следует, что связь между  $\bar{V}_M$  и  $\omega$  для плоского движения аналогична связи для вращательного движения тела вокруг неподвижной точки  $O$  (п. 6.1), то есть в расчетном положении происходит *мгновенное вращательное движение* тела вокруг МЦС (поэтому МЦС еще называют *мгновенным центром вращения*).

*Особые случаи определения положения МЦС.*

1. При качении колеса без проскальзывания по неподвижной поверхности МЦС находится в точке соприкосновения, при этом никаких построений не требуется (рис. 6.15).

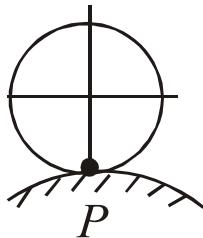


Рис. 6.15

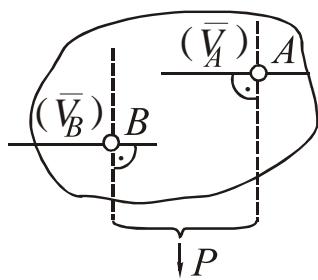


Рис. 6.16

2. При  $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$  МЦС уходит в бесконечность (рис. 6.16):

$$\perp(\bar{V}_A), \perp(\bar{V}_B) \Rightarrow P \rightarrow \infty;$$

$$\omega = V_A / AP = V_B / BP = 0;$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} = \bar{V}_B, \text{ так как } V_{BA} = \omega BA = 0,$$

то есть плоское движение в данном случае является *мгновенным поступательным* (отсутствует вращательная часть движения, скорости всех точек равны).

3. При  $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$  и  $AB \perp \bar{V}_A$  перпендикуляры к линиям скоростей сливаются, для определения МЦС используют свойство пропорциональности расстояний до МЦС и скоростей точек:

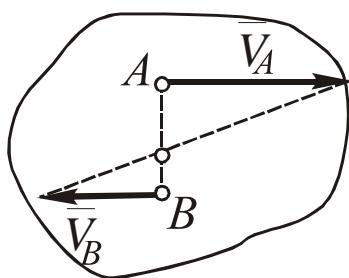
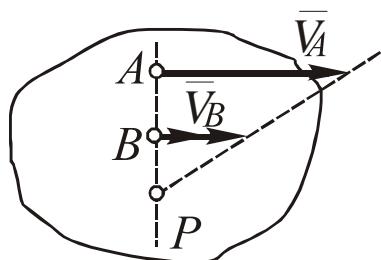


Рис. 6.17

$$\frac{AP}{BP} = \frac{V_A}{V_B},$$

то есть находят  $AP$  или  $BP$  из уравнения или делают графическое построение (рис. 6.17):  $P$  находится на пересечении общего перпендикуляра с линией, соединяющей концы векторов  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$ , отложенных в масштабе.

#### 6.4.2. План скоростей

*План скоростей* представляет собой *графическое решение* системы векторных уравнений, связывающих скорости точек тел со скоростями полюсов.

*Пример.* Для механизма на рис. 6.18 при известной скорости  $V_A = 1 \text{ м/с}$  найти  $\bar{V}_B$ ,  $\bar{V}_C$  и  $\omega$  ( $AC = BC = 1 \text{ м}$ ).

*Решение.* Для определения  $\bar{V}_B$  составим уравнение, принимая  $A$  за полюс:  $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$ . Выбираем масштаб, откладывая

вектор  $\bar{V}_A$  из произвольной точки  $0_V$ , строим треугольник скоростей, при этом линия  $\bar{V}_B$  вертикальна, а  $\bar{V}_{BA} \perp BA$ , расставляем стрелки векторов в соответствии с уравнением. Измеряя с учетом масштаба, получим:  $V_B = 1,74$  м/с;  $V_{BA} = 2$  м/с;  $\omega = V_{BA} / BA = 2/2 = 1 \text{ c}^{-1}$ .

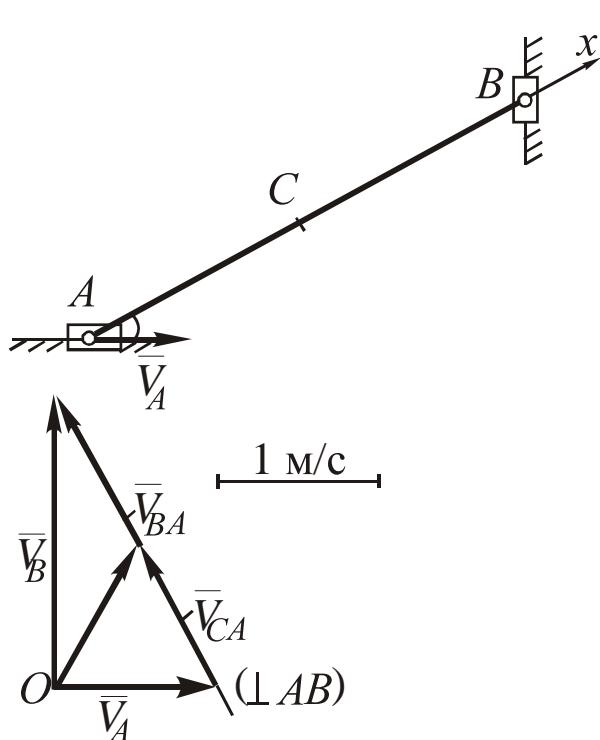


Рис. 6.18

Для определения  $\bar{V}_C$  составим уравнение  $\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA}$ . Так как  $V_{CA} = \omega CA = \frac{V_{BA}}{BA} CA = V_{BA} \frac{CA}{BA}$ , откладывая соответствующую долю  $\bar{V}_{BA}$  на плане, строя треугольник и расставляя стрелки, получим  $V_C = 1$  м/с.

При построении треугольников скоростей используют правила их построения из геометрии: по стороне и двум углам, по двум сторонам и углу, по трем сторонам.

### 6.4.3. Теорема о проекциях скоростей точек

*Проекции скоростей точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны.*

Выбирая ось  $x$ , проходящую через  $B$  и  $A$ , принимая  $A$  за полюс, в соответствии с п. 6.3 получим:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \text{ где } \bar{V}_{BA} \perp x.$$

В проекциях на ось  $x$ :

$$\text{Пр. } \bar{V}_{Bx} = \text{Пр. } \bar{V}_{Ax}, \text{ так как Пр. } \bar{V}_{BAx} = 0.$$

*Пример.* Для механизма на рис. 6.18, проводя  $x$  через  $A$  и  $B$ , в соответствии с теоремой:

$$V_A \cos 30 = V_B \cos 60, \text{ откуда } V_B = V_A \frac{\cos 30}{\cos 60} = 1,74 \text{ м/с.}$$

## 6.5. Способы расчета ускорений плоского механизма

Основными способами расчета ускорений являются аналитический и план ускорений. Проверку проводят построением мгновенных центров ускорений.

### 6.5.1. Аналитический способ

*Аналитический способ* состоит в аналитическом решении системы векторных уравнений, связывающих ускорения точек тел с ускорениями полюсов.

*Пример.* При известном ускорении  $a_A = 1 \text{ м/с}^2$ , используя данные примера п. 6.4.2, найти  $\bar{a}_B$ ,  $\bar{a}_C$  и  $\varepsilon$ .

*Решение.* Принимая  $A$  за полюс, выражаем  $\bar{a}_B$  (рис. 6.19):

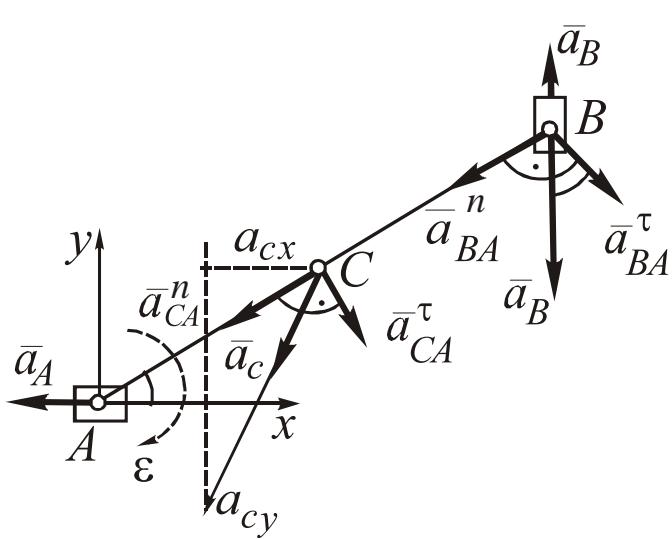


Рис. 6.19

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Анализируем слагаемые уравнения. У вектора  $\bar{a}_B$  известна только линия (она вертикальна), указываем одно из возможных направлений вектора (вверх). Вектор  $\bar{a}_A$  известен.

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлен от  $B$  к полюсу  $A$ ,  $a_{BA}^n = \omega^2 BA = 2 \text{ м/с}^2$ . У вектора  $\bar{a}_{BA}^\tau$  известна только линия

$(\bar{a}_{BA}^\tau \perp BA)$ , указываем одно из возможных направлений. В результате анализа установлено, что неизвестны два параметра: модули  $a_B$  и  $a_{BA}^\tau$ .

Обе оси или одну из них целесообразно направлять перпендикулярно к неизвестным векторам (при произвольном выборе

решение системы уравнений более трудоемко). В данном случае направим ось  $x$  перпендикулярно к  $\bar{a}_B$ , а ось  $y$  – стандартно.

Уравнения проекций векторного уравнения на оси имеют вид (проекции ускорений находят аналогично проекциям сил в статике):

$$(x): 0 = -a_A - a_{BA}^n \cos 30 + a_{BA}^\tau \sin 30;$$

$$(y): a_B = -a_{BA}^n \sin 30 - a_{BA}^\tau \cos 30.$$

Решение системы уравнений:  $a_{BA}^\tau = 5,48 \text{ м/с}^2$ ;  $a_B = -5,77 \text{ м/с}^2$ . Отрицательное значение  $a_B$  свидетельствует о том, что фактическое направление  $\bar{a}_B$  следует указать обратным ранее выбранному.

Определяем  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = a_{BA}^\tau / BA = 2,74 \text{ с}^{-2}$ ;  $\varepsilon$  согл.  $\bar{a}_{BA}^\tau$  (применив правило согласованности и указываем направление  $\varepsilon$  вокруг полюса  $A$  по часовой стрелке).

Оставляя  $A$  полюсом, выражаем  $\bar{a}_C$ :  $\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau$ .

Вектор  $\bar{a}_C$  неизвестен полностью.  $\bar{a}_{CA}^n = \omega^2 CA = 1 \text{ м/с}^2$ ;  $\bar{a}_{CA}^n$  к  $A$

$a_{CA}^\tau = \varepsilon CA = 2,74 \text{ м/с}^2$ ;  $\bar{a}_{CA}^\tau \perp CA$  согл.  $\varepsilon$ . Указываем векторы  $\bar{a}_{CA}^n$  и  $\bar{a}_{CA}^\tau$  на чертеже.

Так как направление  $\bar{a}_C$  неизвестно, оставляем оси  $x$  и  $y$  стандартными и проецируем на них векторное уравнение:

$$(x): a_{Cx} = -a_A - a_{CA}^n \cos 30 + a_{CA}^\tau \sin 30 = -0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$(y): a_{Cy} = -a_{CA}^n \sin 30 - a_{CA}^\tau = -2,88 \text{ м/с}^2.$$

По проекциям определяем величину  $a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 2,92 \text{ м/с}^2$  и направление  $\bar{a}_C$  (указано на рис. 6.19).

### 6.5.2. План ускорений

*План ускорений* представляет собой *графическое решение* системы векторных уравнений, связывающих ускорения точек тел с ускорениями полюсов.

*Пример.* Построить план ускорений в задаче п. 6.5.1 (рис. 6.19).

*Решение.* Составляем уравнение  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$  и анализируем его аналогично п. 6.5.1.

Выбирая масштаб, из начальной точки  $O_a$ , читая уравнение, наносим на план информацию об ускорениях (рис. 6.20): проводим линию  $\bar{a}_B$  (вертикаль), возвращаемся в  $O_a$ , откладываем  $\bar{a}_A$ , из его конца  $\bar{a}_{BA}^n$ , из его конца линию  $\bar{a}_{BA}^\tau (\perp BA)$ . Точка пересечения  $D$  является графическим решением векторного уравнения. Расставив стрелки векторов в соответствии с уравнением, после измерений с учетом масштаба получим:  $a_{BA}^\tau = 5,5 \text{ м/с}^2$ ;  $a_B = 5,8 \text{ м/с}^2$ . Величину и направление  $\varepsilon$  определяем аналогично п. 6.5.1.

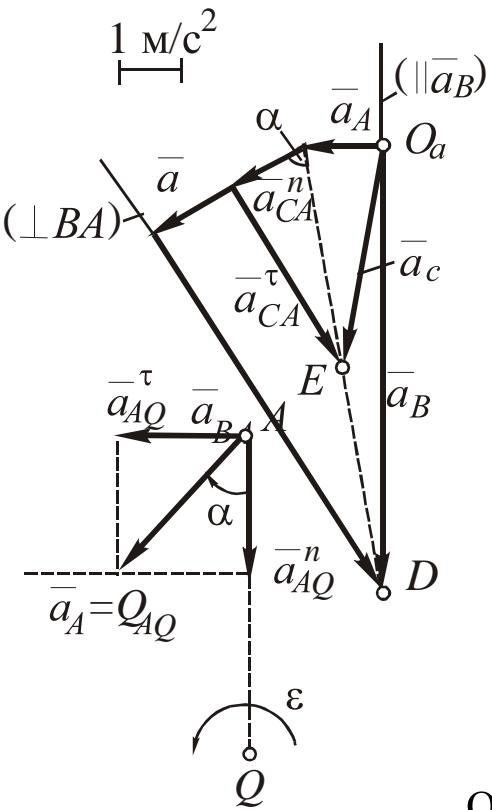


Рис. 6.21

Составляем уравнение  $\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau$  и анализируем его, причем векторы  $\bar{a}_{CA}^n$  и  $\bar{a}_{CA}^\tau$  можно найти графически: они со направлены соответственно с  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^\tau$ , а величины их пропорциональны отношению  $CA/BA$ :

$$\begin{aligned} a_{CA}^n &= \omega^2 CA = \omega^2 BA \frac{CA}{BA} = \\ &= a_{BA}^n \frac{CA}{BA} = 0,5 a_{BA}^n \end{aligned};$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon CA = \varepsilon BA \frac{CA}{BA} = a_{BA}^\tau \frac{CA}{BA} = 0,5 a_{BA}^\tau.$$

Отложив из конца  $\bar{a}_A$  последовательно  $\bar{a}_{CA}^n$  и  $\bar{a}_{CA}^\tau$ , соединив  $O_a$  с концом  $a_{CA}^\tau$ , получим  $\bar{a}_C = 2,9 \text{ м/с}^2$ .

### 6.5.3. Мгновенный центр ускорений

*Мгновенным центром ускорений (МЦУ)* называют точку  $Q$ , связанную с телом, ускорение которой в данный момент времени равно нулю ( $\bar{a}_Q = 0$ ).

*Основной случай определения положения МЦУ.* Выбрав МЦУ  $Q$  за полюс, выразим через  $\bar{a}_Q$  ускорения произвольных точек  $A$  и  $B$  в соответствии с п. 6.3:

$$\begin{aligned}\bar{a}_A &= \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ} = \bar{a}_{AQ} = \bar{a}_{AQ}^n + \bar{a}_{AQ}^\tau; \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_{BQ}^n + \bar{a}_{BQ}^\tau.\end{aligned}$$

Рассмотрим ускорение  $\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ}$  (рис. 6.21). Определим угол  $\alpha$  между  $AQ$  и  $\bar{a}_A$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{a}_{AQ}^\tau}{\bar{a}_{AQ}^n} = \frac{\varepsilon_{AQ}}{\omega^2_{AQ}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

При  $\varepsilon = 0$   $\alpha = 0$ ; при  $\omega = 0$   $\alpha = \pi/2$ .

Так как величина  $\alpha$  не зависит от выбора точки,  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  наклонены к  $AQ$  и  $BQ$  под углом  $\alpha$ .

Таким образом, точка  $Q$  находится на пересечении лучей, проведенных из точек  $A$  и  $B$  от векторов  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  под углом  $\alpha$ , отложенном в направлении  $\varepsilon$ .

Необходимые направления  $\bar{a}_A$ ,  $\bar{a}_B$ ,  $\varepsilon$  и величину  $\alpha$  определяют аналитически (п. 6.5.1) или из плана ускорений (п. 6.5.2). Данный способ расчета применяют в качестве проверочного или в том случае, когда требуется найти ускорения более чем трех точек одного тела.

*Свойство МЦУ.* При известных положении  $Q$ , значениях  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  для произвольной точки  $M$ :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ},$$

откуда  $a_M = \sqrt{(a_{MQ}^n)^2 + (a_{MQ}^\tau)^2} = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$ ,  $\bar{a}_M$  составляет угол  $\alpha$  с  $MQ$  и направлено согл. с  $\alpha$  (рис. 6.22).

*Особые случаи определения положения МЦУ.* При  $\bar{a}_A \parallel \bar{a}_B$  лучи, проведенные под углом  $\alpha$ , оказываются параллельными

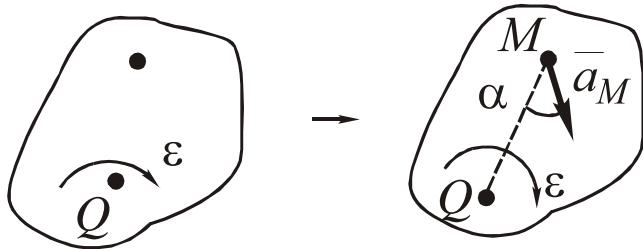


Рис.6.22

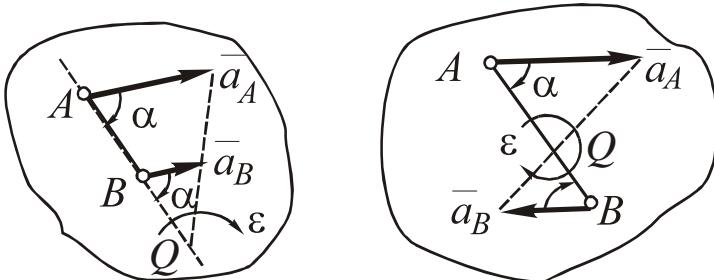


Рис.6.23

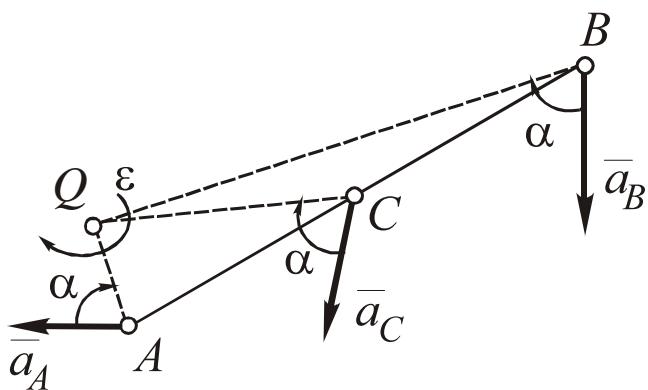


Рис. 6.24

вектор  $\bar{a}_C$  под углом  $\alpha$  к  $CQ$  согл. с  $\varepsilon$  (рис. 6.24).

Получаем  $AQ = 0,35$  м;  $BQ = 2$  м;  $CQ = 1$  м.

Проверочные соотношения составляют:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{1}{0,35} = 2,88 \text{ c}^{-2}; \quad \frac{a_B}{BQ} = \frac{5,8}{2} = 2,9 \text{ c}^{-2}; \quad \frac{a_C}{CQ} = \frac{2,9}{1} = 2,9 \text{ c}^{-2};$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{2,74^2 + 1^4} = 2,91 \text{ c}^{-2}.$$

(случай мгновенного поступательного движения, при котором ускорения всех точек тела равны) или сливаются. В последнем случае положение  $Q$  определяется построением (рис. 6.23).

*Пример.* Построить МЦУ и проверить значения  $a_B$ ,  $a_C$ ,  $\varepsilon$ , найденные в п. 6.5.1 и п. 6.5.2 (рис. 6.19, 6.20).

*Решение.* Откладываем направления  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  из плана ускорений (рис. 6.20), проводим лучи под углом  $\alpha$  ( $\alpha = 70^\circ$ , угол между  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}$ ) в направлении  $\varepsilon$  (по ч.с.). Полученную на пересечении лучей точку  $Q$  соединим с  $C$  и строим

Расхождение проверочных соотношений не превышает 5 %.

## 6.6. Сферическое движение тела

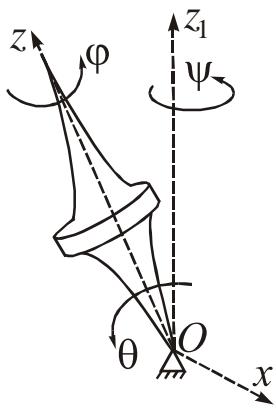


Рис. 6.25

*Сферическим* называют движение тела, при котором одна его точка остается неподвижной.

Примеры: волчок, ротор гироскопа.

Для задания сферического движения используют неподвижную  $Oz_1$ , подвижную  $Oz$  и следующие угловые координаты (углы Эйлера) (рис. 6.25)

$\phi$  – угол собственного вращения вокруг подвижной оси  $z$ ;

$\psi$  – угол прецессии вокруг неподвижной оси  $z_1$ ;

$\theta$  – угол нутации вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости  $zOz_1$ .

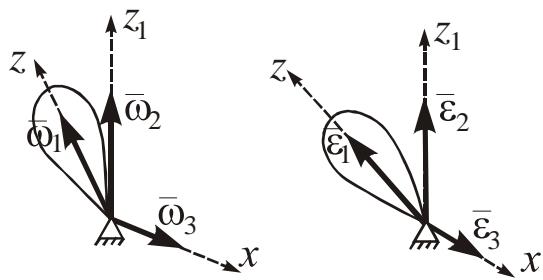


Рис. 6.26

Таким образом, уравнения сферического движения тела имеют вид:

$$\dot{\phi}(t); \dot{\psi}(t); \dot{\theta}(t).$$

Для определения кинематических характеристик сферического движения определяют соответствующие угловые скорости и угловые ускорения (рис. 6.26):

$$\omega_1 = \dot{\phi}; \quad \varepsilon_1 = \ddot{\phi};$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}; \quad \varepsilon_2 = \ddot{\psi};$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}; \quad \varepsilon_3 = \ddot{\theta}.$$

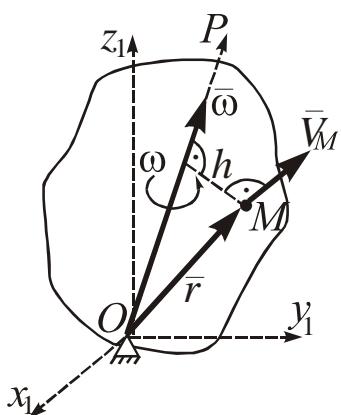


Рис. 6.27

Векторы  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$  и  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3$  – кинематические характеристики сферического движения тела (в отличие от вращательного движения

тела, линии векторов  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\varepsilon}$  в данном случае не совпадают).

*Скорость и ускорение произвольной точки  $M$  можно определить через векторы  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\varepsilon}$  аналогично п. 6.1 (рис. 6.27):*

$\bar{V}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}$  – скорость точки  $M$ , направленная перпендикулярно плоскости, образованной  $\bar{\omega}$  и  $\bar{r}$ ;

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} + \bar{V} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{oc}};$$

$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$  – вращательное ускорение, линия которого не совпадает с  $\bar{V}_M$ ;

$\bar{a}_{\text{oc}} = \bar{\omega} \times \bar{V}_P$  – осцестремительное ускорение, направленное к оси  $P$  (вектору  $\bar{\omega}$ ).

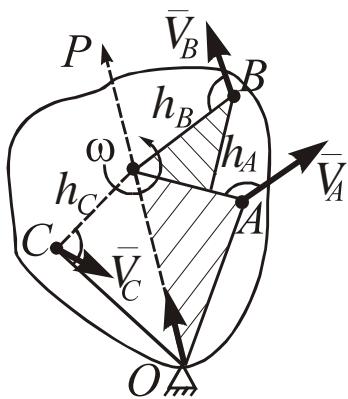


Рис.6.28

Практически для определения скорости  $\bar{V}_M$  применяют метод, аналогичный методу мгновенных центров скоростей (п. 6.4.1), т. е. определяют *мгновенную ось вращения*  $OP$ , находящуюся на пересечении плоскостей, перпендикулярных к векторам  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$  (рис. 6.28). Скорости точек тела  $\bar{V}_A$ ,  $\bar{V}_B$ ,  $\bar{V}_C$  пропорциональны соответствующим расстояниям  $h_A$ ,  $h_B$ ,  $h_C$  до оси  $OP$ .

## 6.7. Общий случай движения свободного тела

Движение тела в общем (произвольном) случае можно представить по аналогии с плоскопараллельным движением (п. 6.3) в виде комбинации двух одновременно происходящих движений: поступательного, при котором все точки тела перемещаются одинаково с произвольно выбранным полюсом  $A$  и сферического вокруг этого полюса (рис. 6.29).

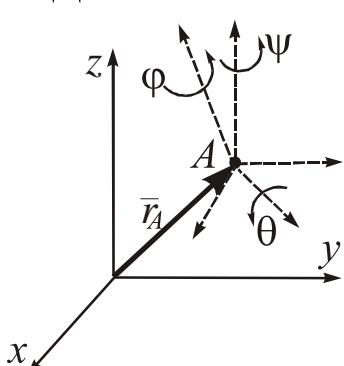


Рис. 6.29

*Закон свободного движения тела* включает:

$\bar{r}_A(t)$  – уравнение движения полюса (поступательной части движения);

$\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  – уравнения сферической части свободного движения.

Если представить сферическую часть движения как мгновенное вращательное вокруг мгновенной оси  $OP$ ,

то в любой момент времени свободное движение тела характеризуется следующими кинематическими характеристиками:

$$\bar{V}_A = \dot{\bar{r}}_A, \bar{\omega} \quad (\text{рис. 6.30})$$

$$\text{и } \bar{a}_A = \ddot{\bar{r}}_A, \bar{\varepsilon}.$$

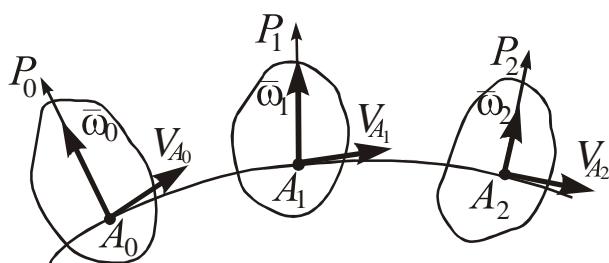


Рис. 6.30

Общие выражения для определения скорости  $\bar{V}_M$  и ускорения  $\bar{a}_M$  произвольной точки  $M$  имеют следующий вид:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}; \quad \bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA},$$

где  $\bar{V}_{MA}$ ,  $\bar{a}_{MA}$  – соответственно скорость и ускорение точки  $M$  в сферическом движении тела вокруг полюса  $A$

$$\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}; \quad \bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\text{вр}} + \bar{a}_{MA}^{\text{oc}} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AM} + \bar{\omega} \times \bar{V}_{MA}.$$

## 7. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### 7.1. Понятие составного движения тела (точки)

В разделах 5–6 движение точки или тела рассматривалось относительно *неподвижной системы отсчета*. В ряде задач возникает необходимость принципиально нового подхода к анализу и расчету движения тела.

Рассмотрим простейший пример. Пусть автомобиль (считаем его точкой  $M_1$ ) движется по прямолинейному шоссе (неподвижной оси  $x$ ) (рис. 7.1). Это обычное движение точки, рассмотренное в п. 5.3. Ситуация принципиально изменяется, если на дороге появляется другой автомобиль (точка  $M_2$ ), который необходимо обогнать. Водителю автомобиля  $M_1$  необходимо решить две

задачи: оценив скорости  $M_1$  и  $M_2$ , как можно быстрее обогнать автомобиль  $M_2$ , чтобы избежать появления встречного автомобиля; при обгоне нельзя превышать максимально допустимой скорости. Главное отличие состоит в том, что движение автомобиля  $M_1$  происходит и относительно дороги (оси  $Ox$ ) и относительно автомобиля  $M_2$ .

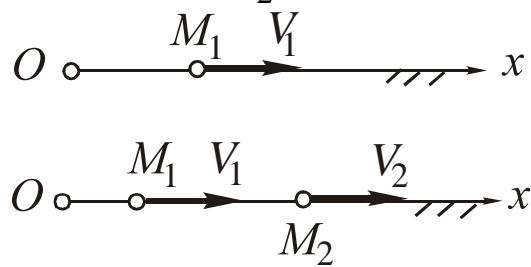


Рис. 7.1

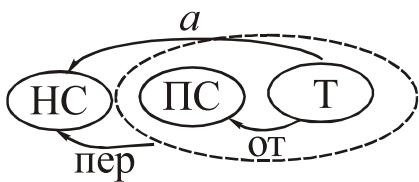


Рис. 7.2

*Составным* (в ряде учебников его называют *сложным*) называют движение тела или точки Т, происходящее одновременно относительно двух систем отсчета, одну из которых считают неподвижной НС, а вторая, подвижная ПС, движется относительно НС по определенному закону. Таким образом, в составном движении участвуют *три тела*: Т, НС и ПС, каждое из которых движется относительно других. Для рассмотрения этих движений введем условную схему *составного движения* (рис. 7.2), на которой указаны движущиеся тела, а стрелки изображают их движения. Для приведенного примера (рис. 7.2): Т – автомобиль  $M_1$ ; НС – дорога (ось  $Ox$ ); ПС – автомобиль  $M_2$ .

Приняты следующие названия движений точек:

- *абсолютное* (индекс  $a$ ) – движение тела или точки Т относительно неподвижной системы отсчета НС (автомобиля  $M_1$  относительно дороги  $Ox$ );
- *относительное* (лат. «*relativus*» – относительный) (индекс отн или  $r$ ) – движение Т относительно ПС, которая в этом движении считается неподвижной;
- *переносное* (лат. «*entrainer*» – увлекать за собой) (индекс пер или  $e$ ) – движение Т при ее жестком соединении с ПС относительно НС.

Отметим, что все три указанные движения являются *движениями точки Т*, причем только одно из них, абсолютное, реально,

а два остальных, относительное и переносное, – *воображаемые*.

Введение понятия составного движения позволяет представить абсолютное движение точки как совокупность более простых движений (переносного и относительного), которые происходят по прямой или окружности (п. 5.3), что позволяет расширить круг решаемых задач.

В быту и технике составное движение тела встречается весьма часто. Рассмотрим наиболее характерные примеры.

*При движении лодки по реке* схема составного движения имеет вид, показанный на рис. 7.3.

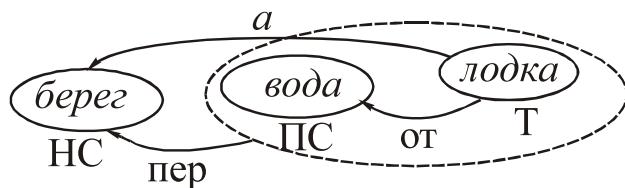


Рис. 7.3

Абсолютным (реальным) будет движение лодки относительно берега; относительным – лодки относительно неподвижной воды (таким оно было бы при мысленной замене реки на пруд или озеро); переносным – лодки относительно берега (если мысленно остановить мотор или бросить весла). Нетрудно видеть, что даже если считать относительное движение лодки (точки) прямолинейным равномерным, а переносное – прямолинейным неравномерным (скорость течения воды в реке в разных точках изменяется), траектория и изменение скорости лодки в абсолютном движении будут достаточно сложными, однако их можно легко рассчитать, используя аппарат составного движения точки.

В следующих примерах самостоятельно составьте схемы составного движения точки и проанализируйте их: бомбометание, то есть бросание бомбы с летящего самолета; движение (бег) человека по эскалатору метро; движение участка магнитной ленты видеомагнитофона при вращающейся видеоголовке (сравните с неподвижной аудиоголовкой); запуск межпланетной ракеты с учетом вращения Земли (переносная скорость точки на экваторе составляет порядка 450 м/с).

Абсолютным (реальным) будет движение лодки относительно берега; относительным – лодки относительно неподвижной воды (таким оно было бы при мысленной замене реки на пруд или озеро); переносным – лодки относительно берега (если мысленно остановить мотор или бросить весла). Нетрудно видеть, что даже если считать относительное движение лодки (точки) прямолинейным равномерным, а переносное – прямолинейным неравномерным (скорость течения воды в реке в разных точках изменяется), траектория и изменение скорости лодки в абсолютном движении будут достаточно сложными, однако их можно легко рассчитать, используя аппарат составного движения точки.

## 7.2. Абсолютная скорость точки

Для определения связи между скоростями точки в составном движении примем за неподвижную систему отсчета координатные оси  $Oxyz$ , а за подвижную – тело, относительно которого движение точки  $M$  происходит по произвольной линии  $AB$  (рис.7.4).

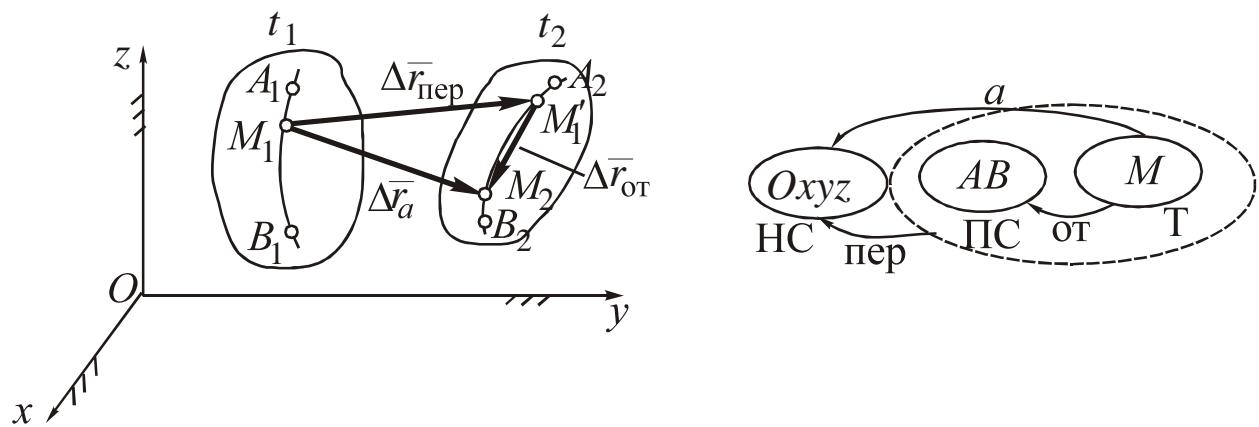


Рис. 7.4

Рассмотрим положения точки  $M$  и тела  $AB$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . В соответствии со схемой движения определим конечные перемещения точки:  $\Delta\bar{r}_{\text{от}} = M_1M_2$ ; переносное  $\Delta\bar{r}_{\text{пер}} = M_1M'_1$ ; относительное  $\Delta\bar{r}_{\text{от}} = M'_1M_2$ . Из чертежа следует, что  $\Delta\bar{r}_a = \Delta\bar{r}_{\text{пер}} + \Delta\bar{r}_{\text{от}}$ . Поделим слагаемые уравнения на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}_{\text{пер}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}_{\text{от}}}{\Delta t} \text{ или } \bar{V}_a = \bar{V}_{\text{пер}} + V_{\text{от}}.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.

## 7.3. Абсолютное ускорение точки

Примем за неподвижную систему отсчета  $O'x'y'z'$ , за подвижную –  $Oxyz$  (рис. 7.5).

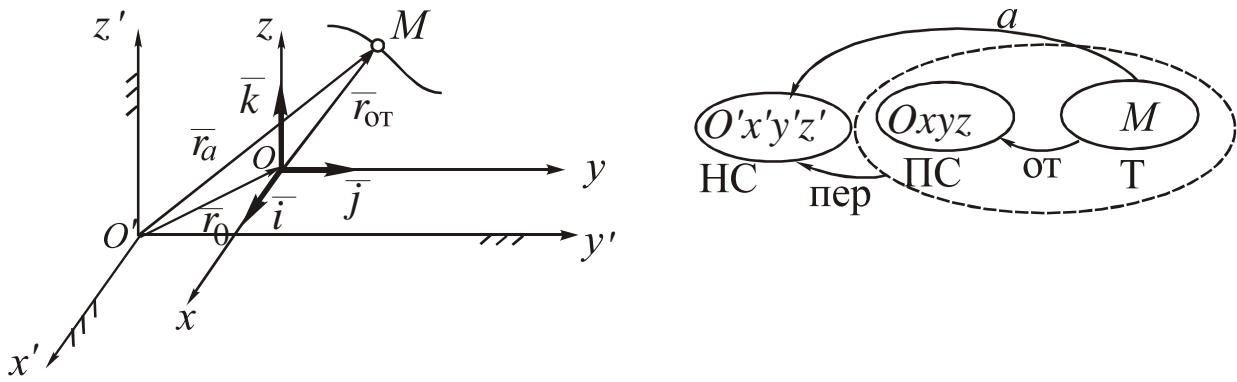


Рис. 7.5

Определим *относительное движение точки*  $M$  (при неподвижной ПС), выражив радиус-вектор  $\bar{r}_{\text{от}}$  через координаты точки  $x, y, z$  и единичные векторы  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ :  $\bar{r}_{\text{от}} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ ;

$$\bar{V}_{\text{от}} = \dot{\bar{r}}_{\text{от}} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z};$$

$$\bar{a}_{\text{от}} = \ddot{\bar{r}}_{\text{от}} = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z}.$$

Абсолютное ускорение можно определить через производную от абсолютной скорости:

$$\bar{a}_a = \dot{\bar{V}}_a = \frac{d}{dt}(\bar{V}_{\text{пер}} + \bar{V}_{\text{от}}) = \frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} + \frac{d\bar{V}_{\text{от}}}{dt}.$$

Определим абсолютное ускорение для случая *переносного поступательного движения* (при этом, согласно п. 2.2, оси  $x, y, z$  перемещаются без поворота, то есть векторы  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  остаются постоянными, скорости и ускорения всех точек, принадлежащих подвижной системе отсчета, равны соответственно  $\bar{V}_0$  и  $\bar{a}_0$ ):

$$\frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} = \frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0 = \bar{a}_{\text{пер}};$$

$$\frac{d\bar{V}_{\text{от}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}) = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z} = \bar{a}_{\text{от}};$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{от}},$$

то есть абсолютное ускорение равно векторной сумме переносного и относительного ускорений.

Рассмотрим случай *переносного непоступательного движения* (согласно п. 6.1, векторы  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  будут изменять направле-

ния, а переносная скорость точки  $M$  определится через вектор угловой скорости  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ , направленный по оси вращения ПС –  $\bar{V}_M = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{r}_a$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{r}_a) = \frac{d\bar{\omega}_{\text{пер}}}{dt} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \\ &= \bar{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \bar{r}_a + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_a = \bar{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \bar{r}_a + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times (\bar{V}_{\text{пер}} + \bar{V}_{\text{от}}) = \\ &= (\bar{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \bar{r}_a + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{пер}}) + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой изменение  $\bar{V}_{\text{пер}}$  в переносном движении (при  $\bar{V}_{\text{от}} = 0$ ), а второе – дополнительное изменение  $\bar{V}_{\text{пер}}$  за счет перемещения  $M$  относительно оси переносного вращения в процессе относительного движения.

$$\frac{d\bar{V}_{\text{от}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}) = (\bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z}) + \left( \frac{d\bar{i}}{dt}\dot{x} + \frac{d\bar{j}}{dt}\dot{y} + \frac{d\bar{k}}{dt}\dot{z} \right).$$

Первое слагаемое равно  $\bar{a}_{\text{от}}$ , для преобразования второго воспользуемся формулами Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{k} \\ (\text{сравните } \bar{V} &= \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \text{ п. 6.1}). \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{V}_{\text{от}}}{dt} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times (\bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}) = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}}.$$

Дополнительное изменение  $\bar{V}_{\text{от}}$  обусловлено поворотом подвижных координатных осей в процессе переносного вращения.

После сложения полученных производных получим  

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{от}} + 2(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}}) = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{к}},$$

где  $\bar{a}_{\text{к}}$  – кориолисово ускорение.

## 7.4. Кориолисово ускорение точки

*Кориолисовым* называют дополнительное (добавочное) ускорение точки, обусловленное изменением переносной скорости

в процессе относительного движения и относительной скорости в процессе переносного движения.

Определяют  $\bar{a}_k$  в соответствии с правилами вычисления векторного произведения  $\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}})$ :

- строят плоскость, образованную  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\bar{V}_{\text{от}}$  (предварительно отложив вектор  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  из точки  $M$ ) и перпендикуляр к ней;
- направляют вектор  $\bar{a}_k$  по перпендикуляру по правилу правого винта, поворачивая его в направлении угла  $\alpha$  кратчайшего совмещения  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  с  $\bar{V}_{\text{от}}$ ;
- определяют модуль  $a_k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{от}} \sin \alpha$ .

На рис. 7.6 приведены примеры определения  $\bar{a}_k$  в случаях, когда векторы  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\bar{V}_{\text{от}}$  направлены по координатным осям ( $\alpha = \pi/2$ ).

Признаки равенства  $\bar{a}_k$  нулю:

- $\omega_{\text{пер}} = 0$  (переносное движение поступательное или функция  $\omega_{\text{пер}}(t)$  такова, что в расчетный момент обращается в нуль);
- $V_{\text{от}} = 0$  (функция  $V_{\text{от}}(t)$  такова, что в расчетный момент обращается в нуль);
- $\sin \alpha = 0$  или  $\alpha = 0, \pi/2$  (вектор  $\bar{V}_{\text{от}}$  параллелен оси переносного вращения и вектору  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ ).

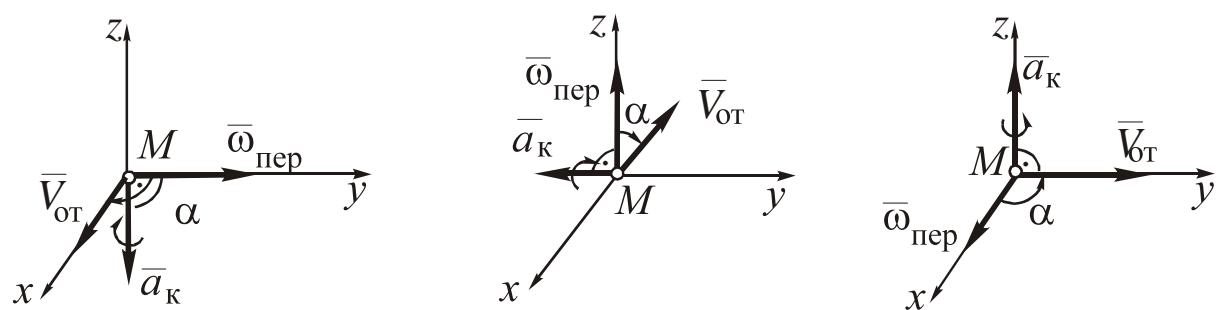


Рис. 7.6

## 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

### 8.1. Типовая задача кинематики точки

*Типовой* называют задачу, в которой заданы уравнения движения точки в плоскости в координатной форме  $x(t)$ ,  $y(t)$  и расчетный момент времени  $t_1$ . Содержание задачи следующее.

1. Получить уравнение траектории.
2. Определить скорость  $\bar{V}_1$  и ускорение  $\bar{a}_1$  точки в момент  $t_1$ .
3. Определить составляющие ускорения  $\bar{a}_1^t$ ,  $\bar{a}_1^n$  и радиус кривизны траектории  $\rho_1$  в момент  $t_1$ .
4. Построить чертеж, на котором отразить все найденное выше, кроме  $\rho_1$ .

#### *Порядок решения типовой задачи*

1. Для получения уравнения траектории в плоскости следует исключить параметр  $t$  из уравнений движения. Это достигается путем прямой подстановки или математических преобразований. Если в уравнениях движения содержатся тригонометрические функции, следует использовать известные соотношения (например,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $2 \sin^2 \alpha / 2 = 1 - \cos \alpha$ ).

Получив уравнение траектории, дают краткое описание линии, необходимое для графического построения:

- для прямой указывают, проходит ли она через  $O$ ;
- для гиперболы и экспоненты указывают асимптоты;
- для параболы – ось симметрии;
- для окружности – координаты центра и радиус;
- для эллипса – координаты центра и полуоси.

2. Модули векторов  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{a}_1$  определяют по проекциям, равным производным по времени от функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  (п. 5.2.2):

$$V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}, \text{ где } \dot{x}_1 = \dot{x}|_{t_1}, \dot{y}_1 = \dot{y}|_{t_1};$$

$$a_1 = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2}, \text{ где } \ddot{x}_1 = \ddot{x}|_{t_1}, \ddot{y}_1 = \ddot{y}|_{t_1}.$$

Направления векторов  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{a}_1$  определяют графически при

построении чертежа или аналитически через направляющие косинусы:

$$\cos \left( \overline{V}_1^{\wedge}, x \right) = \dot{x}_1 / V_1; \cos \left( \overline{a}_1^{\wedge}, x \right) = \ddot{x}_1 / V_1.$$

3. Поскольку необходимые производные уже найдены, целесообразно через их значения определить касательное ускорение:

$$a_1^{\tau} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{y}_1 \ddot{y}_1}{V_1}.$$

Нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определяют, используя полное ускорение:

$$a_1^n = \sqrt{a_1^2 - (a_1^{\tau})^2}; \rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n}.$$

4. Построение чертежа является наиболее ответственным этапом решения задачи, поскольку позволяет проверить его правильность.

Траекторию строят по полученному уравнению линии и уравнениям движения точки:

- прямую – по двум точкам (начальной и расчетной);
- гиперболу, экспоненту, параболу – по нескольким точкам, расположенным в районе расчетной;
- окружность – по центру и радиусу;
- эллипс – по центру и полуосям.

На траектории указывают начальное  $M_0$  и расчетное  $M_1$  положения точки:  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$ , где  $x_0 = x(t)|_{t_0}$ ,  $y_0 = y(t)|_{t_0}$ ,  $x_1 = x(t)|_{t_1}$ ,  $y_1 = y(t)|_{t_1}$ .

У незамкнутой линии (прямая, парабола, гипербола, экспонента) траекторией является только часть линии (луч, отрезок, дуга), у замкнутых (окружность, эллипс) – вся линия.

Векторы  $\overline{V}_1$ ,  $\overline{a}_1$  строят по проекциям, соответственно откладывая  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{y}_1$  или  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{y}_1$  от  $M_1$  в выбранных масштабах и соединяя  $M_1$  стрелкой с концом последней проекции.

Величины составляющих  $\bar{a}_1^\tau$ ,  $\bar{a}_1^n$  определяют графически, проводя оси  $\tau$  (по касательной или вектору  $\bar{V}_1$  в сторону от  $M_0$ ),  $n$  (перпендикулярно  $\tau$  внутрь траектории) и проецируя  $\bar{a}_1$  на эти оси.

Проверки правильности решения заключаются в следующем:

- точки  $M_0$  и  $M_1$  должны находиться на построенной траектории;
- вектор  $\bar{V}_1$  должен быть направлен по касательной к траектории;
- значения  $a_1^\tau$  и  $a_1^n$ , определенные аналитически (поз. 3) и графически (поз. 4), должны совпадать в пределах допустимой погрешности (5 %).

*Пример.* Решить типовую задачу кинематики точки при  $t = 1$  с, если уравнения движения точки имеют вид:

$$x = 4 - 3\cos(1,5\pi t), \text{ м}; \quad y = 4\sin(1,5\pi t), \text{ м}.$$

*Решение.* 1. Преобразуем уравнения движения:

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 = \cos^2(1,5\pi t); \quad \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = \sin^2(1,5\pi t).$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений:

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = \cos^2(1,5\pi t) + \sin^2(1,5\pi t) = 1.$$

Получено уравнение эллипса, центр его имеет координаты  $(4; -1)$ , полуоси  $(3, 4)$ .

2. Определяем производные по времени от функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и их значения при  $t_1 = 0,5$  с:

$$\dot{x} = 4,5\pi \sin(1,5\pi t); \quad \dot{x}|_{t_1} = \dot{x}_1 = 10,0;$$

$$\dot{y} = 6\pi \cos(1,5\pi t); \quad \dot{y}|_{t_1} = \dot{y}_1 = -13,4;$$

$$\ddot{x} = 6,25\pi^2 \sin(1,5\pi t); \quad \ddot{x}|_{t_1} = \ddot{x}_1 = -47,5;$$

$$\ddot{y} = 9\pi^2 \cos(1,5\pi t); \quad \ddot{y}|_{t_1} = \ddot{y}_1 = -63,1.$$

Определяем скорость и ускорение точки в момент  $t_1$ :

$$V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} = 16,7 \text{ м/с}; a_1 = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2} = 80,0 \text{ м/с}^2.$$

3. Определяем составляющие ускорения и радиус кривизны траектории:

$$a_1^\tau = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{y}_1 \ddot{y}_1}{V_1} = 22,2 \text{ м/с}^2; a_1^n = \sqrt{a_1^2 - a_1^\tau^2} = 76,9 \text{ м/с}^2;$$

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n} = 3,63 \text{ м.}$$

4. Строим чертеж, отражающий проведенные расчеты (рис. 8.1):

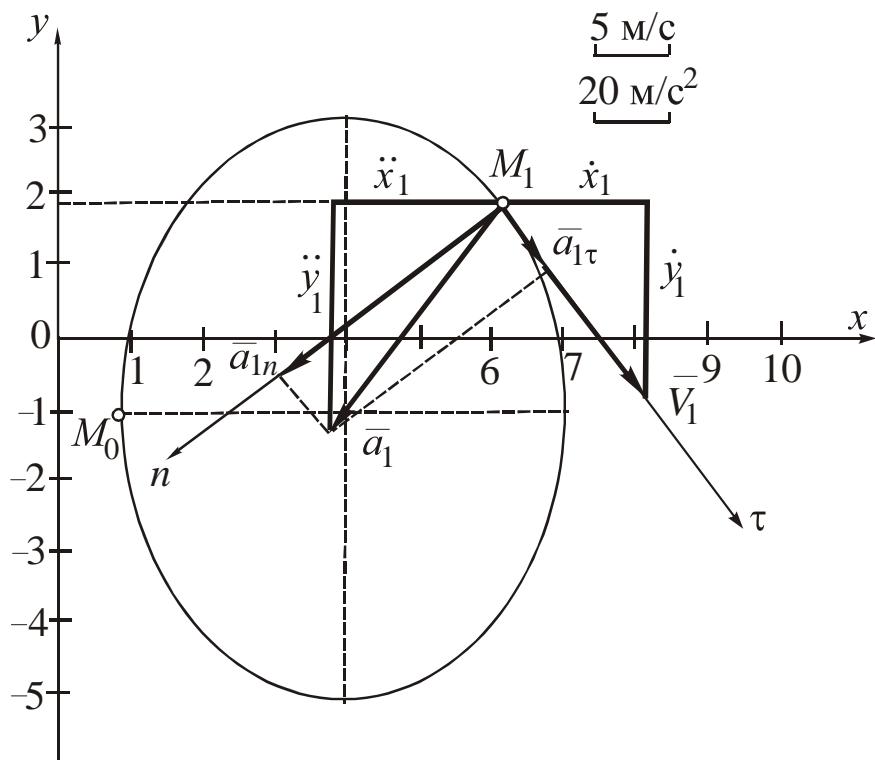


Рис. 8.1

а) откладываем координатные оси  $x$ ,  $y$ , выбираем масштаб расстояний, по координатам центра  $(4, -1)$  и полуосям  $(3, 4)$  строим овал;

б) определяем координаты начальной  $M_0$  (при  $t_0 = 0$ :  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -1$ ) и расчетной  $M_1$  (при  $t_1 = 0,5$ :  $x_1 = 6,12$ ,  $y_1 = 1,83$ ) точек

и наносим их на чертеж;

в) выбираем масштаб скоростей и ускорений, откладывая из  $M_1$  проекции  $\dot{x}_1 = 10,0$  и  $\dot{y}_1 = -13,4$  с учетом их знаков, получим вектор  $\bar{V}_1$ , а откладывая  $\ddot{x}_1 = -47,5$  и  $\ddot{y}_1 = -63,1$  – вектор  $\bar{a}_1$ ;

г) направляем ось  $\tau$  по вектору  $\bar{V}_1$  от точки  $M_0$ , а ось  $n \perp \tau$  внутрь эллипса, находим составляющие  $\bar{a}_1^\tau$  и  $\bar{a}_1^n$ , опуская перпендикуляры из конца  $\bar{a}_1$  на оси  $\tau$  и  $n$ , измеряя их с учетом масштаба, получим  $a_1^\tau = 22 \text{ м/с}^2$  и  $a_1^n = 77 \text{ м/с}^2$ .

Проверки решения: точки  $M_0$  и  $M_1$  находятся на траектории, а вектор  $\bar{V}_1$  направлен по касательной к ней; расхождение значений  $a_1^\tau$  и  $a_1^n$ , определенных аналитически и графически, не превышают 5 %.

*Задание.* Решить *самостоятельно* типовые задачи кинематики точки 8.1–8.10 ( $x, y$  – в м;  $t$  – в с):

$$8.1) x = 1 - 4 \cos(\pi t / 3), \quad y = 3 - 5 \sin(\pi t / 3), \quad t_1 = 2;$$

$$8.2) x = t^2 - 2t, \quad y = 3t^2 - 6t - 1, \quad t_1 = 1;$$

$$8.3) x = 3 + 2 \sin(\pi t), \quad y = 1 - \sin^2(\pi t), \quad t_1 = 1/3;$$

$$8.4) x = t - 1, \quad y = 2t^2 - 4t + 3, \quad t_1 = 3;$$

$$8.5) x = e^t, \quad y = e^{3t} - 2, \quad t_1 = 1;$$

$$8.6) x = 2 \sin^2 t, \quad y = 1 - \cos^2 t, \quad t_1 = \pi/2;$$

$$8.7) x = 3 \sin t, \quad y = 2 \cos(2t), \quad t_1 = \pi;$$

$$8.8) x = \sqrt[3]{t}, \quad y = 2t, \quad t_1 = 1;$$

$$8.9) x = 3 \ln(t + 3), \quad y = 2t + 6, \quad t_1 = 1;$$

$$8.10) x = 2 \sin^2(\pi t / 6), \quad y = 1 + \cos(\pi t / 3), \quad t_1 = 1.$$

## 8.2. Расчет ускорений точки

Возможны следующие нетиповые задачи кинематики точки.

Если движение точки задано координатным или естественным способом, требуется определить не значения скорости и ускорения, а их функции, особенности решения состоят в следую-

щем:

1) скорость точки определяют через первые производные от координат,  $V(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$  или  $V(t) = \dot{s}(t)$ , полное ускорение – через вторые производные от координат  $a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)}$ ;

2) касательное ускорение определяют через производные от функций скорости или координат

$$a_\tau(t) = \dot{V}(t) = \frac{\dot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{V(t)} = \ddot{s}(t);$$

3) нормальное ускорение определяют через полное и касательное,  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ , если из уравнений движения непосредственно следует, что траекторией является прямая, то  $a_n(t) = 0$ , если траекторией является окружность радиуса  $R$ , то  $a_n(t) = \frac{V^2(t)}{R}$ .

Если в условии оговорено, что движение точки *равнопеременное*,  $a_\tau(t) = \text{const}$  (п. 5.3), то решение основано на использовании зависимостей между параметрами  $s$ ,  $V$ ,  $a_\tau$ ,  $t$ :

1) анализируют условие задачи, привязывая кинематические характеристики точки к рассматриваемым моментам времени и применяя временные индексы;

2) записывают систему уравнений, описывающих равнопеременное движение для всех рассматриваемых моментов времени

$$s = s_0 + V_0 t + a_\tau t^2 / 2, \quad V = V_0 + a_\tau t$$

( $s_0$  обычно принимают нулевым, совмещая начало движения точки с началом отсчета), определяют неизвестные и отбрасывают уравнения, содержащие неизвестные, которые определять не требуется;

3) решают систему уравнений относительно требуемых неизвестных;

4) используя кинематические зависимости, определяют остальные неизвестные.

*Пример 1.* Определить касательное и нормальное ускорения точки, если ее движение задано уравнениями ( $x$ ,  $y$  в м)

$$x = 2 \sin(3t^2), \quad y = 2 \cos(3t^2).$$

*Решение.* 1. Определяем первые производные от функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и скорость точки:

$$\dot{x} = 12t \cos(3t^2); \quad \dot{y} = -12t \sin(3t^2);$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(12t)^2 [\cos^2(3t^2) + \sin^2(3t^2)]} = 12t \text{ м/с.}$$

2. Поскольку определена функция  $V(t)$ , касательное ускорение определяем через производную от нее:  $a_\tau = \dot{V} = 12 \text{ м/с}^2$ .

3. Из уравнений движения следует, что траекторией точки является окружность радиуса  $R = 2 \text{ м}$ , поэтому нормальное ускорение можно вычислить, не определяя полного ускорения, то есть

$$\text{менее трудоемким путем: } a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(12t)^2}{2} = 72t^2 \text{ м/с}^2.$$

*Пример 2.* Автомобиль, двигаясь равнозамедленно при торможении, остановился через 20 с. Определить тормозной путь, скорость и ускорение автомобиля через 5 с после начала торможения, если начальная скорость 20 м/с, а движение происходит на закруглении радиуса 100 м. Автомобиль принять за материальную точку.

*Решение.* 1. Движение точки равнопеременное,  $a_\tau = \text{const}$ . В задаче кроме начального ( $t_0 = 0$ ) рассматриваются два момента времени:  $t_1 = 5 \text{ с}$  и  $t_2 = 20 \text{ с}$ . Известны характеристики движения точки в эти моменты:  $V_0 = 20 \text{ м/с}$ ,  $s_0 = 0$ ,  $V_2 = 0$ ; требуется определить  $V_1$ ,  $a_1$ ,  $s_2$ . Траектория точки – окружность радиуса  $R = 100 \text{ м}$ .

2. Записываем систему уравнений равнопеременного движения для моментов  $t_1$ ,  $t_2$  и анализируем их:

$$V_1 = V_0 + a_\tau t; \quad s_1 = V_0 t_1 + a_\tau t_1^2 / 2;$$

$$V_2 = V_0 + a_\tau t^2 / 2; \quad s_2 = V_0 t_2 + a_\tau t_2^2 / 2.$$

Поскольку  $s_1$  определять не надо, исключаем второе уравнение. Остается система из трех уравнений с тремя неизвестными  $V_1$ ,  $a_\tau$ ,  $s_2$ .

3. Решая систему уравнений, получаем  $a_\tau = -1 \text{ м/с}^2$ ,

$V_1 = 15 \text{ м/с}$ ,  $s_2 = 200 \text{ м}$ .

4. Для определения полного ускорения дополнительно найдем нормальное ускорение:

$$a_1^n = \frac{V_1^2}{R} = 2,25 \text{ м/с}^2; a_1 = \sqrt{a_\tau^2 + a_1^{n2}} = 2,46 \text{ м/с}^2.$$

*Задание. Задачи 8.11–8.20 решить самостоятельно.*

8.11. Точка движется по окружности радиуса 1 м, закон движения имеет вид  $s = 0,5 \cos(3\pi t^3)$ , м. Определить скорость, касательное и нормальное ускорения точки.

8.12. Определить скорость и ускорение точки, если уравнения движения имеют вид ( $x$ ,  $y$  в м)

$$x = 1,5 \cos^2(2t^2); y = 2 \sin^2(2t^2).$$

8.13. Определить функцию радиуса кривизны траектории, если уравнения движения имеют вид ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  в м)

$$x = 3 \cos(2t); y = 3 \sin(2t); z = 5t.$$

8.14. Точка движется по окружности радиуса 0,5 м. Закон движения  $s = 2t^2 - t$ , м. Определить, в какой момент нормальное ускорение точки равно касательному.

8.15. Точка движется по окружности с постоянным по величине ускорением  $a = 1 \text{ м/с}^2$ . Закон движения  $s = 2t + 1$ , м. Найти радиус окружности.

8.16. Через 3 с после начала торможения автомобиль имел скорость 12 м/с. Считая изменение скорости равномерным, найти время движения до остановки, начальную скорость и ускорение автомобиля, если он движется по выпуклому мосту радиуса 200 м, а тормозной путь составил 100 м. Размерами автомобиля пренебречь.

8.17. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. На какой высоте он будет иметь скорость 10 м/с и через какое время упадет на землю.

8.18. Поезд движется равнозамедленно по дуге радиуса 1000 м. Пройдя 400 м, он уменьшил скорость с 72 до 36 км/ч. Определить время движения, начальное и конечное ускорение.

8.19. Поезд движется со скоростью 90 км/ч. Определить, за какое время до прихода на станцию и на каком расстоянии от нее

следует начать торможение, чтобы обеспечить снижение скорости до 0,1 м/с, считая, что замедление постоянно и составляет  $0,5 \text{ м/с}^2$ .

8.20. Капли воды вытекают из отверстия с периодом 1 с. Определить, на каком расстоянии от предыдущей окажется капля через 2 с после начала движения.

### 8.3. Расчет скоростей плоского механизма

*Плоским* называют механизм, движение всех элементов которого происходит в неподвижной плоскости. Звенья плоского механизма соединены между собой шарнирами, зубчатыми (фрикционными) или ременными (цепными) передачами, исключающими проскальзывание.

Порядок расчета скоростей плоского механизма следующий.

1. Расчет ведут, рассматривая по очереди звенья механизма, начиная с того звена, для которого задана угловая скорость или скорость точки. После полного расчета текущего звена переходят к следующему, кинематически соединенному с предыдущим.

2. При рассмотрении звена устанавливают вид его движения, затем определяют угловую скорость тела и скорости его точек.

Признаком *поступательного* движения является наличие направляющей плоскости или оси, препятствующей повороту тела. В этом случае без расчета принимают векторы скоростей всех точек тела равными, а  $\omega = 0$  (п. 6.2).

Признаком *вращательного* движения является наличие у тела неподвижной точки – оси шарнира (ее обычно обозначают точкой  $O$  с индексами) (п. 6.1). Если угловая скорость тела неизвестна, ее определяют через скорость любой его точки  $M$

$$\omega = V_M / MO, \quad \omega \text{ согл. } \bar{V}_M,$$

скорости точек тела определяют через его угловую скорость

$$V_M = \omega MO, \quad \bar{V}_M \perp MO \text{ согл. } \omega.$$

Признаком *плоскопараллельного* (*плоского*) движения тела в плоском механизме является отсутствие признаков поступательного и вращательного движений. В этом случае расчет производят в следующей последовательности: определяют положение

мгновенного центра скоростей (МЦС) тела, рассчитывают его угловую скорость, а затем скорости точек (п. 6.4.1).

*МЦС тела* (его обозначают  $P$  с индексом, соответствующим рассматриваемому телу) находится в точке пересечения перпендикуляров к линиям скоростей любых двух точек тела, опущенных из этих точек (если одна или обе из этих линий неизвестны, следует временно перейти к следующему звену с целью определения линии скорости общей точки):

$$\perp(\bar{V}_A), \perp(\bar{V}_B) \Rightarrow P.$$

Следует различать *особые случаи МЦС*:

- если рассматриваемое тело – колесо, которое *катится без скольжения по неподвижной поверхности*, то  $P$  находят без построений, он лежит в точке соприкосновения колеса с поверхностью;
- если построенные перпендикуляры не пересекаются, то МЦС уходит в бесконечность ( $P \rightarrow \infty$ ), движение является *мгновенным поступательным*, векторы скоростей точек равны, а  $\omega = 0$ ;
- если перпендикуляры сливаются, то для определения МЦС откладывают векторы  $\bar{V}_A, \bar{V}_B$  в масштабе и проводят прямую через их концы до пересечения с общим перпендикуляром.

*Угловую скорость* тела определяют через скорость любой его точки:  $\omega = V_M / MP$ ,  $\omega$  согл.  $\bar{V}_M$ .

*Скорости точек тела* определяют через угловую скорость:

$$V_M = \omega MP, \quad \bar{V}_M \perp MP \text{ согл. } \omega \text{ (рис.6.14).}$$

3. Для проверки решения строят *план скоростей* (п. 6.4.2).
4. Для проверки отдельных скоростей применяют *теорему о проекциях скоростей точек тела* (п. 6.4.3).

В рассмотренных ниже примерах с целью исключения громоздких математических расчетов предусмотрено определение только направлений скоростей точек, угловых скоростей звеньев и их качественное сравнение.

*Пример 1.* Механизм (рис. 8.2) изображен в масштабе (все необходимые размеры и углы заданы чертежом. Задана угловая скорость  $\omega_{OA}$ .

Найти направления скоростей точек, угловых скоростей звеньев и сравнить их по величине.

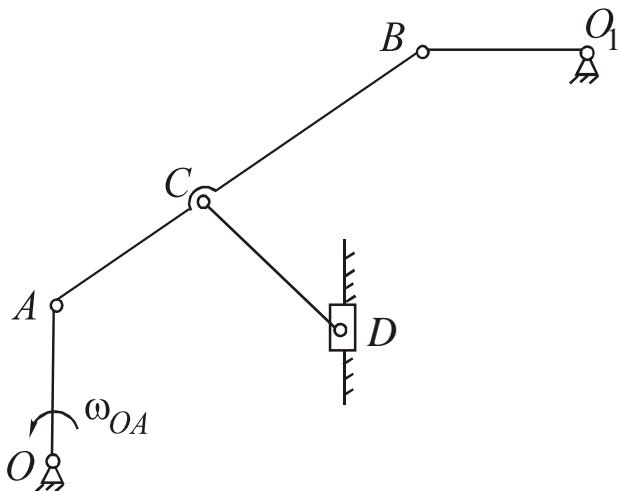


Рис. 8.2

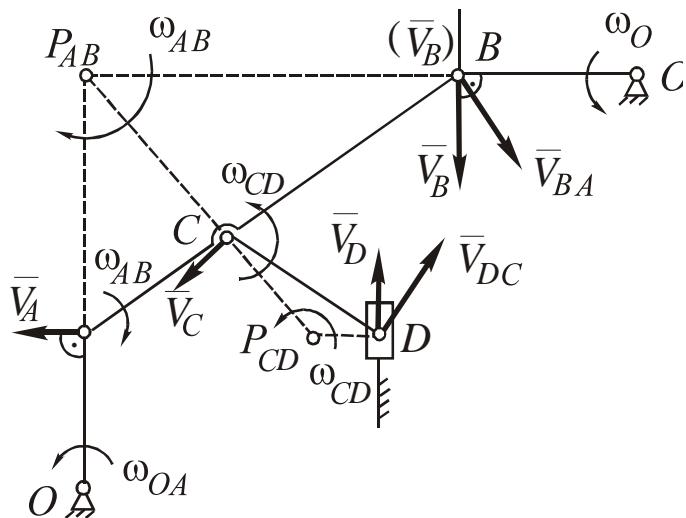


Рис. 8.3

*Решение.*

1. Механизм состоит из стержней  $AO$  (движение вращательное вокруг  $O$ ),  $AB$  (плоское),  $BO_1$  (вращательное,  $O_1$ ),  $CD$  (плоское) и ползуна  $D$  (поступательное прямолинейное по вертикали).

2. Так как известна  $\omega_{OA}$ , начинаем расчет со звена  $OA$  (вращательное,  $O$ ) (рис. 8.3):

$$V_A = \omega_{OA} AO; V_A \perp AO$$

согл.  $\omega_{OA}$ .

Расчет звена  $AB$  (плоское):

– для определения линии  $\bar{V}_B$  временно рассмотрим звено  $BO_1$ , т.к. движение  $BO_1$  вращательное ( $O_1$ ), то  $(\bar{V}_B) \perp BO_1$ ;

– определяем МЦС  $\begin{cases} \perp \bar{V}_A \\ \perp (\bar{V}_B) \end{cases} \rightarrow P_{AB}$ ;

– угловая скорость  $\omega_{AB} = V_A / AP_{AB}$ ;  $\omega_{AB}$  согл.  $\bar{V}_A$ ;

– скорости точек  $B$  и  $C$ :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \bar{V}_B \text{ согл. } \omega_{AB};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}; \bar{V}_C \perp CP_{AB} \text{ согл. } \omega_{AB}.$$

Расчет звена  $BO_1$  (вращательное,  $O_1$ ):

$$\omega_{BO_1} = V_B / BO_1; \omega_{BO_1} \text{ согл. } V_B.$$

Расчет звена  $CD$  (плоское):

– линия скорости  $\bar{V}_D$  идет по направляющей ползуна  $D$ ;

– определяем МЦС  $\left. \begin{array}{l} \perp \bar{V}_C \\ \perp (\bar{V}_D) \end{array} \right\} \rightarrow P_{CD}$ ;

– угловая скорость  $\omega_{CD} = V_C / CP_{CD}$ ;  $\omega_{CD}$  согл.  $\bar{V}_C$ ;

– скорость точки  $V_D = \omega_{CD} \cdot DP_{CD}$ ;  $\bar{V}_D$  согл.  $\omega_{CD}$ .

Вместо числовых расчетов сделаем *качественное сравнение* полученных величин:

– точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  принадлежат звену  $AB$ , величины скоростей пропорциональны их расстояниям до  $P_{AB}$

$$V_C < V_A < V_B \quad (CP_{AB} < AP_{AB} < BP_{AB});$$

– точки  $C$  и  $D$  принадлежат  $CD$

$$V_C > V_D \quad (CP_{CD} < DP_{CD});$$

– звенья  $OA$  и  $AB$  имеют общий шарнир  $A$ , звенья  $AB$  и  $BO_1$

– шарнир  $B$ , звенья  $AB$  и  $CD$  – шарнир  $C$ ; угловые скорости звеньев обратно пропорциональны расстояниям от общего шарнира до неподвижной точки каждого звена (МЦС)

$$\omega_{OA} > \omega_{AB} \quad (AO < AP_{AB}),$$

$$\omega_{AB} < \omega_{BO_1} \quad (BP_{AB} > BO_1),$$

$$\omega_{AB} < \omega_{CD} \quad (CP_{AB} > CP_{CD}).$$

3. Для проверки решения построим план скоростей (п. 6.4.2) (рис. 8.4).

Рассмотрим звено  $AB$ . Выбирая  $A$  за полюс, составим уравнения:  $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$  и  $\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA}$ . Из произвольной точки  $O_V$ , отложив в масштабе  $\bar{V}_A$ , проводим линии до пересечения: из  $O_V - \bar{V}_B \perp BO_1$ , из конца  $\bar{V}_A - \bar{V}_{BA} \perp BA$ . Расставив стрелки в соответствии с первым уравнением, получим его графическое решение, т.е. треугольник скоростей. Отложив из конца  $\bar{V}_A$  вектор

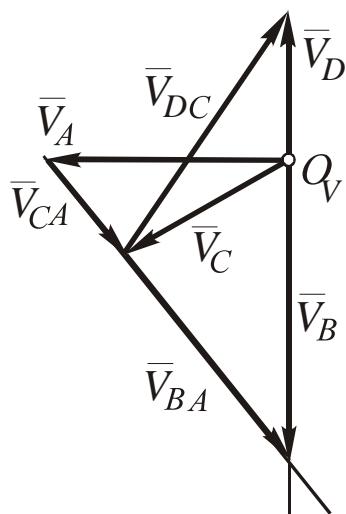


Рис. 8.4

в соответствии с первым уравнением, получим его графическое решение, т.е. треугольник скоростей. Отложив из конца  $\bar{V}_A$  вектор

$\bar{V}_{CA} = \bar{V}_{BA} \frac{CA}{BA}$  и вектор  $\bar{V}_C$  в соответствии со вторым уравнением, получим его графическое решение.

Рассмотрим звено  $CD$ . Выбираем  $C$  за полюс, составляем уравнение  $\bar{V}_D = \bar{V}_C + \bar{V}_{DC}$ . Проводим линии до пересечения: из  $O_V - \bar{V}_D$  (вертикально, по направляющей ползуна, из конца  $\bar{V}_C - \bar{V}_{DC} \perp DC$ . Расставляем стрелки и получаем графическое решение этого уравнения.

Для определения направлений в угловых скоростей  $\omega_{AB}$  и  $\omega_{CD}$  перенесем вектора  $\bar{V}_{BA}$  и  $\bar{V}_{DC}$  из плана скоростей соответственно в точки  $B$  и  $D$  механизма.  $\omega_{AB}$  направляем согл. с  $\bar{V}_{BA}$  вокруг полюса  $A$ ,  $\omega_{AB} = V_{BA} / BA$ .  $\omega_{CD}$  – согл. с  $\bar{V}_{DC}$  вокруг полюса  $C$ ,  $\omega_{CD} = V_{DC} / DC$ .

Все направления и соотношения скоростей, полученные способами МЦС и плана скоростей, совпадают.

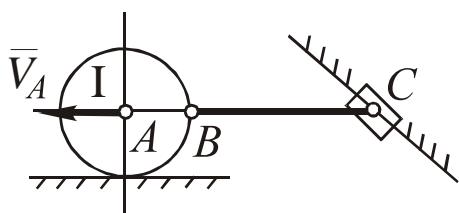


Рис. 8.5

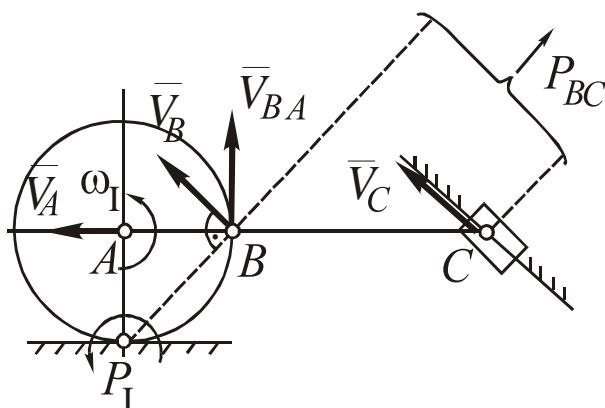


Рис. 8.6

точке соприкосновения с опорной поверхностью;

*Пример 2.* Механизм (рис. 8.5) изображен в масштабе, задана скорость  $\bar{V}_A$ . Сделать кинематический расчет.

*Решение.*

1. Механизм состоит из колеса I (движение плоское, качение без проскальзывания, особый случай 1, рис. 8.6), стержня BC (плоское) и ползуна C (поступательное прямолинейное).

2. Т.к. известна скорость  $\bar{V}_A$ , расчет начинаем с колеса I (плоское) (рис. 8.6):

– МЦС определяем без построений,  $P_I$  находится в

- угловая скорость  $\omega_I = V_A / AP_I$ ;  $\omega_I$  согл.  $\bar{V}_A$ ;
- скорость точки  $V_B = \omega_I \cdot BP_I$ ;  $\bar{V}_B \perp BP_I$  согл.  $\omega_I$ .

Расчет звена  $BC$  (плоское):

- линия скорости  $\bar{V}_C$  по направляющей ползуна  $C$ ;

– определяем МЦС  $\left. \begin{array}{l} \perp \bar{V}_B \\ \perp (\bar{V}_C) \end{array} \right\} \rightarrow P_{BC} \rightarrow \infty$ ;

– т.к. при  $P \rightarrow \infty$  движение *мгновенное поступательное*, без расчета  $\omega_{BC} = 0$ ,  $\bar{V}_C = \bar{V}_D$ .

Проведем *качественное сравнение* полученных величин. Точки  $A$  и  $B$  принадлежат колесу I:  $V_A < V_B$  ( $AP_I > BP_I$ ). Колесо I и звено  $BC$  имеют общий шарнир  $B$ :  $\omega_I > \omega_{BC}$  ( $BP_I > BP_{BC}$ ).

3. Для проверки решения построим *план скоростей* (рис. 8.7).

Рассмотрим колесо I. Выбирая за полюса точки  $A$  и  $P$ , составим уравнения:  $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$  и  $\bar{V}_B = \bar{V}_P + \bar{V}_{BP}$ . Из произвольной точки  $O_V$ , отложив в масштабе  $\bar{V}_A$ , проводим линии до пересечения: из конца

$\bar{V}_A - \bar{V}_{BA} \perp BA$ , из  $O_V$  (из конца вектора  $\bar{V}_P$ ) –  $\bar{V}_{BP} \perp BP$ . Расставив стрелки в соответствии с уравнениями, получим их графическое решение.

Рассмотрим звено  $BC$ . Выбирая  $B$  за полюс, составим уравнение  $\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}$ . Проводим линии до пересечения: из  $O_V - \bar{V}_C$  (по направляющей ползуна), из конца  $\bar{V}_B - \bar{V}_{CB} \perp CB$ . Получили  $\bar{V}_C = \bar{V}_B$ ,  $\bar{V}_{CB} = 0$ .

Перенесем  $\bar{V}_{BA}$  с плана на механизм в точку  $B$  и направим  $\omega_I$  согл. с  $\bar{V}_{BA}$  вокруг полюса  $A$ ,  $\omega_I = V_{BA} / BA$ .

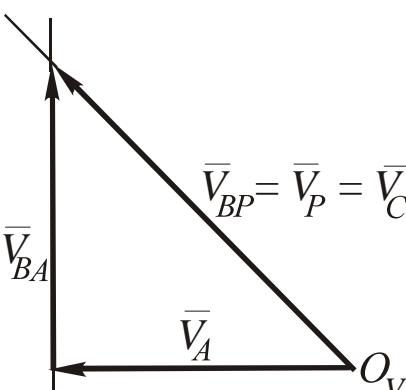


Рис. 8.7

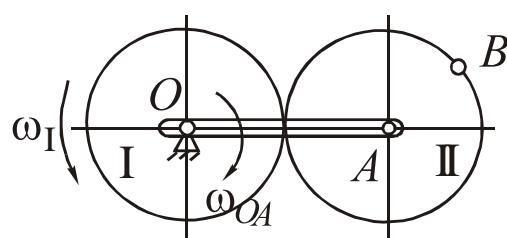


Рис. 8.8

Направления и соотношения скоростей, полученные двумя

способами, совпадают.

*Пример 3.* В механизме  $\omega_I = 3\omega_{OA}$ ,  $r_I = r_{II}$  (рис. 8.8). Сделать кинематический расчет.

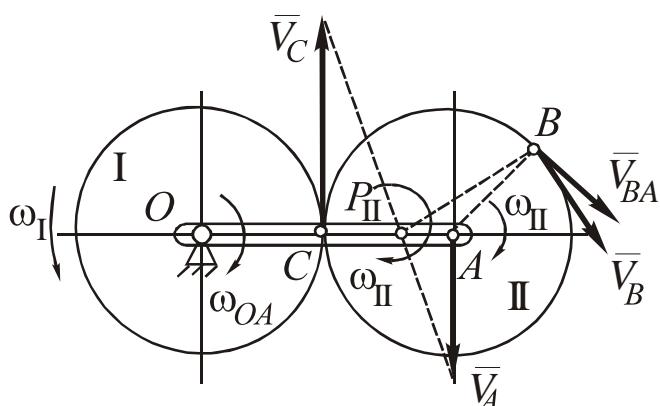


Рис. 8.9

*Решение 1.* Механизм состоит из колеса I, стержня  $AO$  (движение обоих тел вращательное вокруг  $O$ ) и колеса II (плоское).

2. Расчет кривошипа  $OA$  (вращательное,  $O$ ):  
 $V_A = \omega_{AO} \cdot AO$ ,  $\bar{V}_A \perp AO$  согл.  $\omega_{OA}$  (рис. 8.9).

Расчет колеса I

(вращательное,  $O$ ). Определяем скорости точки  $C$  на контакте колес I и II:  $V_C = \omega_I \cdot CO$ ,  $\bar{V}_C \perp CO$  согл.  $\omega_I$ .

Расчет колеса II (плоское):

– восстанавливая перпендикуляры к  $\bar{V}_B$  и  $\bar{V}_C$ , получим, что они сливаются (рис. 8.9);

– определяем величины  $V_B$  и  $V_C$ ,  $V_A = \omega_{AO} \cdot AO = 2\omega_{AO} r$ ,  $V_C = \omega_I \cdot CO = 3\omega_{AO} r$ , т.е.  $V_C = 1,5V_A$ ;

– откладывая в масштабе  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_C$ , соединяя их концы, получаем МЦС  $P_{II}$  на пересечении с  $AC$ ;

– угловая скорость  $\omega_{II} = V_A / AP_{II}$ ,  $\omega_{II}$  согл.  $\bar{V}_A$  или  $\omega_{II} = V_C / CP_{II}$ ,  $\omega_{II}$  согл.  $\bar{V}_C$ ;

– скорость точки  $V_B = \omega_{II} \cdot BP_{II}$ ,  $\bar{V}_B \perp BP_{II}$  согл.  $\omega_{II}$ ;

Проведем *качественное сравнение* полученных величин.

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  принадлежат колесу II:  $V_A < V_C < V_B$  (т.к.  $AP_{II} < CP_{II} < BP_{II}$ ). Колеса I и II имеют общую точку  $C$ :  $\omega_I < \omega_{II}$  ( $CO > CP_{II}$ ). Стержень  $OA$  и колесо II имеют общий шарнир  $A$ :  $\omega_{OA} < \omega_{II}$  ( $AO > AP_{II}$ ).

3. План скоростей (рис. 8.10).

Считая скорости  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_C$  известными, рассмотрим колесо

II. Выбирая  $A$  и  $C$  за полюса, выражаем скорость  $\bar{V}_B$ :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \bar{V}_B = \bar{V}_C + \bar{V}_{BC}.$$

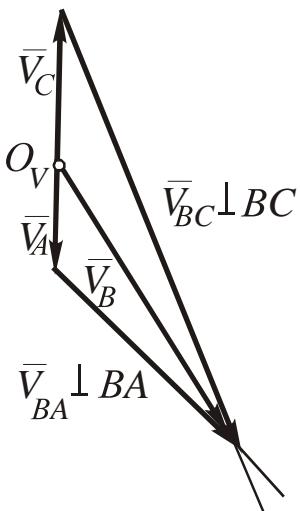
Отложив из произвольной точки  $O_V$  в масштабе  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_C$ , проводим линии до пересечения: из конца  $\bar{V}_A - \bar{V}_{BA} \perp BA$ , из конца  $\bar{V}_C - \bar{V}_{BC} \perp BC$ . Соединяем  $O_V$  с точкой пересечения. Расставив стрелки в соответствии с уравнениями, получим их графическое решение.

Перенесем  $\bar{V}_{BA}$  с плана на механизм в точку  $B$  и направим  $\omega_{\Pi}$  согл. с  $V_{BA}$  вокруг полюса  $A$ ,  $\omega_{\Pi} = V_{BA} / BA$ .

Направления и соотношения скоростей, полученные двумя способами, совпадают.

*Задание.* В задачах для самостоятельного решения 8.21–8.40 сделать кинематический расчет скоростей плоского механизма.

Рис. 8.10



#### 8.4. Расчет ускорений плоского механизма

Порядок расчета ускорений плоского механизма следующий.

1. Определяют угловые скорости всех звеньев механизма (п. 8.3).

2. Расчет ускорений ведут, рассматривая по очереди звенья механизма, начиная с того звена, для которого заданы угловое ускорение или ускорение точки.

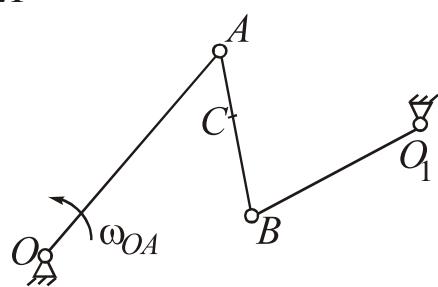
3. При рассмотрении звена устанавливают вид его движения, а затем рассчитывают ускорение его точек и угловое ускорение.

При *поступательном* движении ускорения всех точек равны,  $\varepsilon = 0$  (п. 6.2).

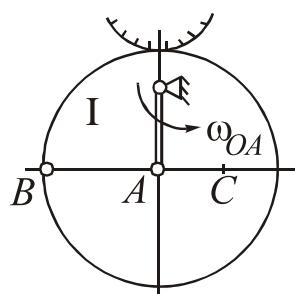
При *вращательном* движении расчет ведут по формулам, приведенным в п. 6.1:  $a_M^n = \omega^2 MO$ ,  $\bar{a}_M^n$  к  $O$ ;  $a_M^{\tau} = \varepsilon MO$ ,

$\bar{a}_M^{\tau} \perp MO$  согл.  $\varepsilon$ , где  $O$  – неподвижная точка звена.

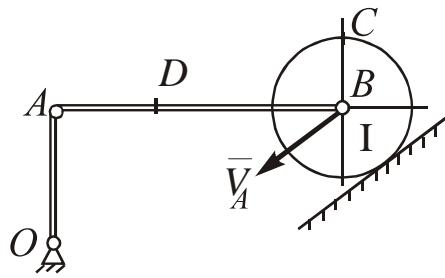
8.21



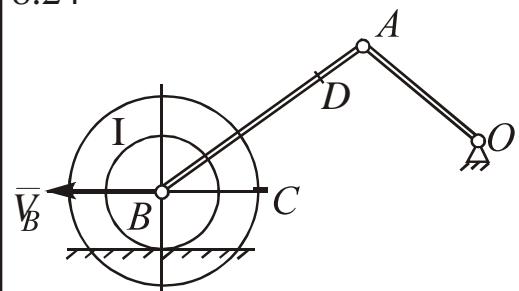
8.22



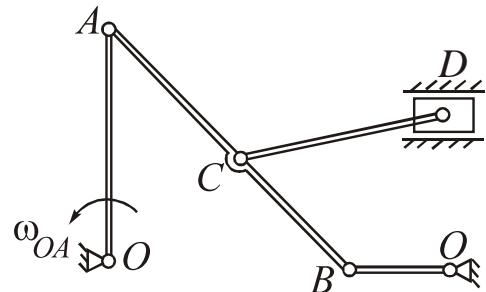
8.23



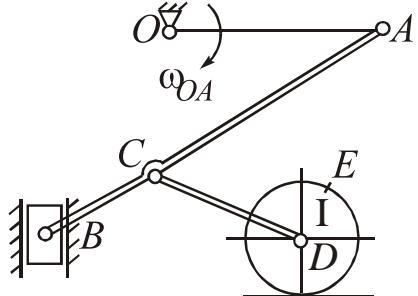
8.24



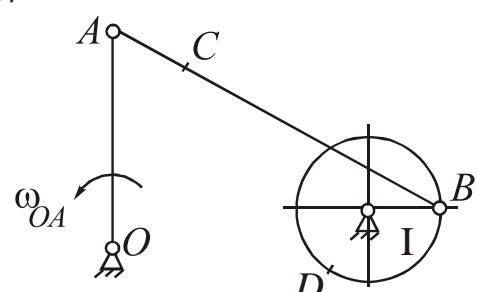
8.25



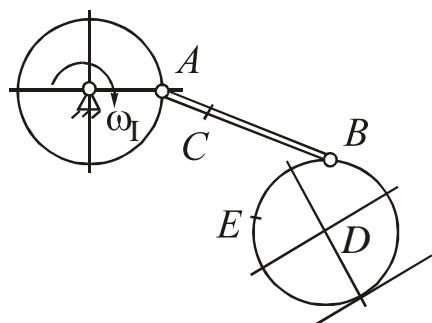
8.26



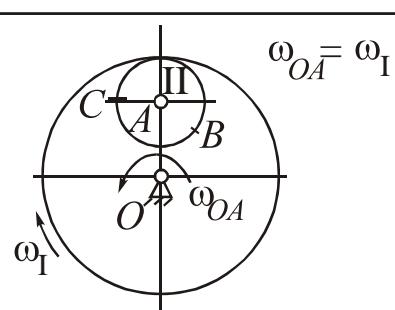
8.27



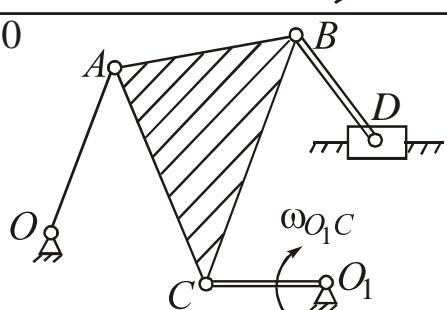
8.28



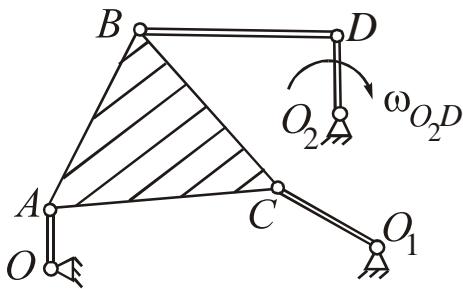
8.29



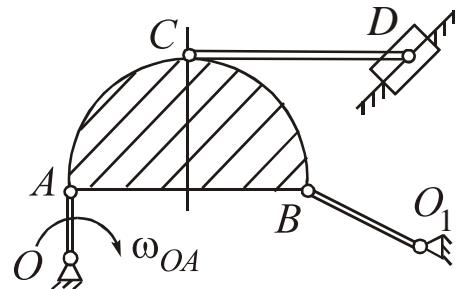
8.30



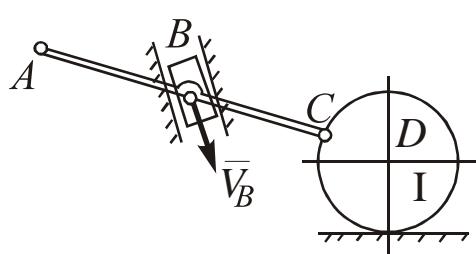
8.31



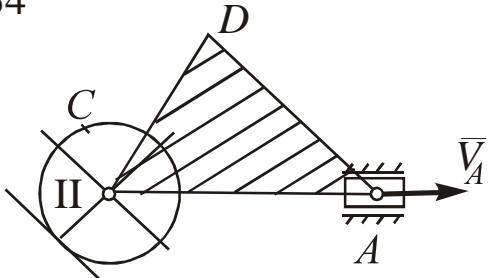
8.32



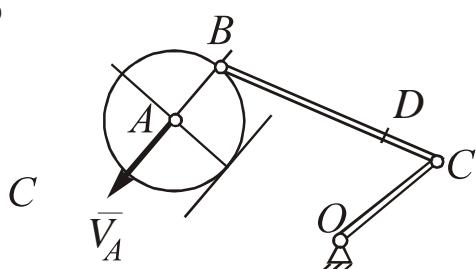
8.33



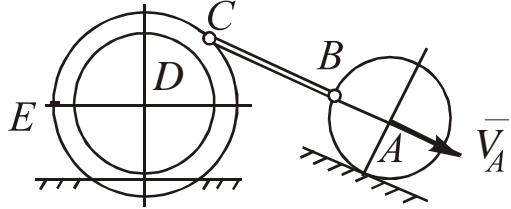
8.34



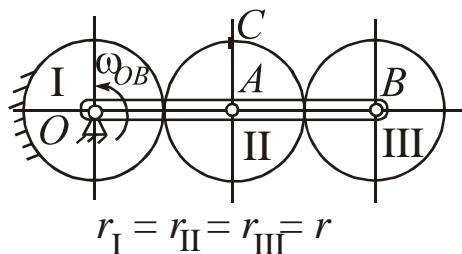
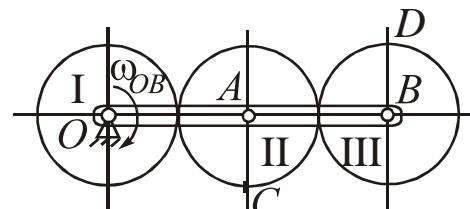
8.35



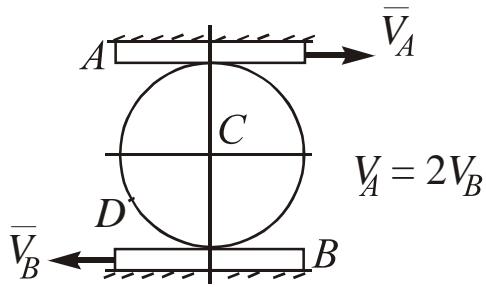
8.36



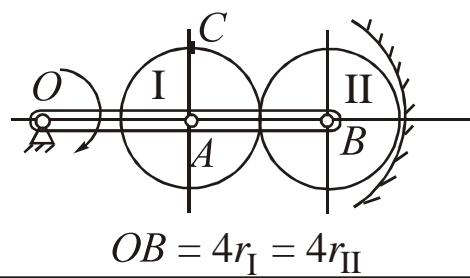
8.37

8.38  $r_I = r_{II} = r_{III} = r$ ;  $\omega_I = \omega_{OB}$ 

8.39



8.40



При *плоскопараллельном* движении основным способом расчета является *аналитический* способ (п. 6.5.1). Для его реализации выбирают за *полюс* точку тела, ускорение которой известно, и выражают через ускорение полюса ускорение одной из точек тела (в первую очередь определяют ускорение точки с известной траекторией):

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau, (A - \text{полюс}).$$

Полученное векторное уравнение анализируют и, если оно содержит не более двух неизвестных параметров (параметром является модуль или угол наклона вектора), выбирают две непараллельные оси (для облегчения последующего решения оси целесообразно выбирать перпендикулярно неизвестным по величине векторам), проецируют векторное уравнение на выбранные оси и решают систему скалярных уравнений.

Угловое ускорение звена определяют через найденное ускорение  $\bar{a}_{MA}^\tau$ :

$$\varepsilon = \bar{a}_{MA}^\tau / MA, \varepsilon \text{ согл. } \bar{a}_{MA}^\tau \text{ (вокруг полюса } A\text{)}.$$

Если в векторном уравнении больше двух неизвестных, за  $M$  выбирают точку, ускорение которой известно, и описанным выше способом определяют  $\varepsilon$  и  $\omega - \omega = \sqrt{\bar{a}_{MA}^n / MA}$  после чего возвращаются к расчету неизвестных ускорений точек.

4. Для проверки решения строят *план ускорений* (п. 6.5.2), при этом расхождение полученных величин не должно превышать 5 %.

5. Наряду с планом ускорений для проверочных расчетов в случае, если требуется проверить ускорение трех или более точек, определяют положение мгновенного центра ускорений и делают соответствующий проверочный расчет (п. 6.5.3).

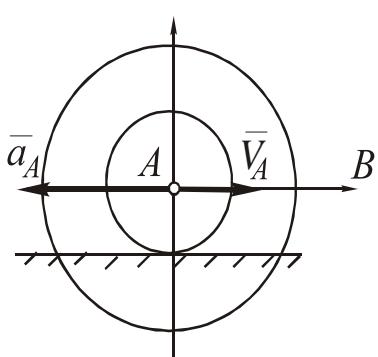


Рис. 8.11

*Пример 1.* Расчет ускорений ползунно-рычажного механизма рассмотрен в п.п. 6.5.1–6.5.3.

*Пример 2.*

Составное колесо (рис. 8.11) катится без скольжения,  $V_A = 1 \text{ м/с}$ ,  $a_A = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $R = 2r = 2 \text{ м}$ .

Определить  $\bar{a}_B$  и  $\varepsilon$ .

*Решение 1.* Так как МЦС  $P$  находится в точке соприкосновения (особый случай 1, п. 6.4.1),  $\omega = V_A / AP = V_A / r = 1 \text{ (с}^{-1}\text{)}$ .

2. Механизм состоит из одного звена, которое движется плоскопараллельно.

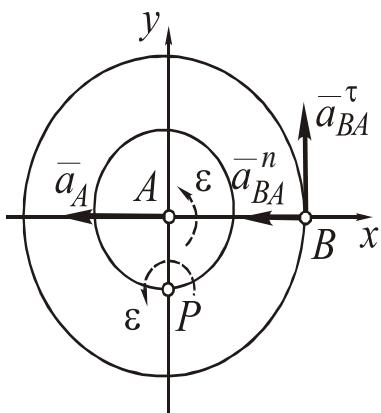


Рис. 8.12

3. Выбираем за полюс  $A$  и выражаем ускорение точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

Анализируем слагаемые уравнения (рис. 8.12).

У ускорения  $\bar{a}_B$  неизвестны и модуль и направление.

Ускорение  $\bar{a}_{BA}^n$  полностью определяется:

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega^2 BA = 2 \text{ м/с}^2; \bar{a}_{BA}^n \text{ к } A.$$

Для определения  $\bar{a}_{BA}^\tau$  вычислим угловое ускорение колеса:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V_A}{AP} \right). \quad \text{Поскольку } AP = \text{const}, \quad \text{получаем}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{AP} \frac{dV_A}{dt} = \frac{\bar{a}_A^\tau}{AP} = \frac{\bar{a}_A}{AP} = \frac{\bar{a}_A}{r} = 1 \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad \varepsilon \text{ согл. } \bar{a}_A \text{ (вокруг } P\text{)}.$$

$\bar{a}_{BA}^\tau = \varepsilon BA = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}, \bar{a}_{BA}^\tau \perp BA$  согл.  $\varepsilon$  (вокруг полюса  $A$ , следует второй раз указать направление  $\varepsilon$ ).

Таким образом, в векторном уравнении два неизвестных параметра (модуль и направление  $\bar{a}_B$ ). Выбираем оси  $x$  и  $y$  стандартно и проецируем уравнения.

$$(x): \quad a_{Bx} = -\bar{a}_A - \bar{a}_{BA}^n = -1 - 2 = -3;$$

$$(y): \quad a_{By} = \bar{a}_{BA}^\tau = 2.$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 3,61 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Направление  $\bar{a}_B$  находим графическим построением по проекциям (рис. 8.13).

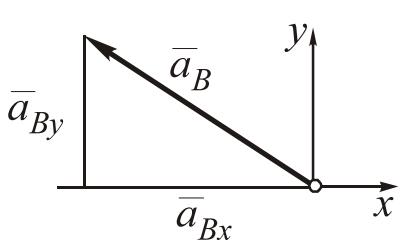


Рис. 8.13

4. Для проверки решения строим *план ускорений* (рис. 8.14).

Используем результаты анализа векторного уравнения и масштаб. Откладываем из произвольной точки  $O_a$  вектор  $\bar{a}_A$ , из его конца —  $\bar{a}_{BA}^n$ , а из конца последнего вектора —  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Соединяя  $O_a$  с концом последнего вектора, согласно расчетному уравнению, получаем  $\bar{a}_B = 3,6 \text{ (м/с}^2)$ , расхождение не превышает 5 %.

5. Проверка построением *мгновенного центра ускорений*. Из

плана ускорений (рис. 8.14) определяем угол между  $\bar{a}_{BA}$  и  $\bar{a}_{BA}^n$  ( $\alpha = 45^\circ$ ) и проводим лучи из точек  $A$  и  $B$  к ускорениям  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$ , откладывая угол  $\alpha$  в направлении  $\varepsilon$ , на пересечении лучей получаем МЦУ  $Q$ .

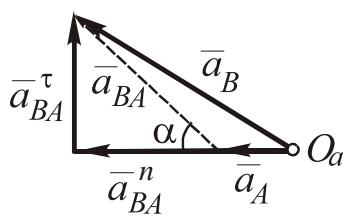


Рис. 8.14

Из рис. 8.15 измерением полу-

чаем:

$$AQ = 0,7 \text{ м}, BQ = 2,5 \text{ м}$$

Проверочные соотношения составляют:

$$\frac{a_A}{AQ} = 1,43 \text{ (с}^{-2}\text{)}; \quad \frac{a_B}{BQ} = 1,44 \text{ (с}^{-2}\text{)};$$

$$\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} = 1,41 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Так как проверочные соотношения отличаются не более, чем на 5 %, величины  $\bar{a}_B$ ,  $\omega$  и  $\varepsilon$  найдены верно.

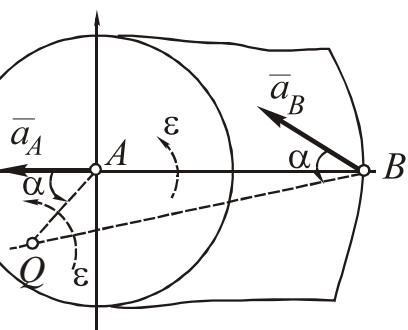


Рис. 8.15

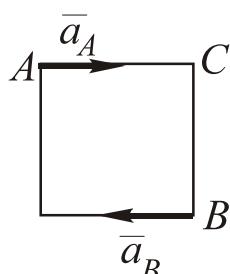


Рис. 8.16

*Пример 3.*  $a_A = a_B = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $AC = BC = 1 \text{ м}$  (рис. 8.16).

Определить  $\varepsilon$ ,  $\omega$  и  $\bar{a}_C$ .

*Решение.* 1. Определение  $\omega$  из условия невозможно.

2. Механизм состоит из одного тела, которое движется плоскопараллельно.

3. Выбираем за полюс  $A$  и выражаем известное ускорение  $\bar{a}_B$  с целью определения  $\omega$  и  $\varepsilon$ :

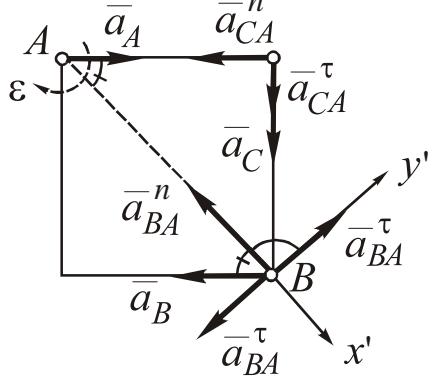


Рис. 8.17

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

Ускорения  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^\tau$  неизвестны по величине и направлена:  $\bar{a}_{BA}^n$  от  $B$  к  $A$ ,  $\bar{a}_{BA}^\tau \perp BA$  (выбираем одно из направлений, вправо вверх) (рис. 8.17).

Выбираем оси:  $x' \perp \bar{a}_{BA}^\tau$ ,

$y' \perp \bar{a}_{BA}^n$  и проецируем векторное уравнение:

$$(x'): -a_B \cdot \cos 45 = a_A \cdot \cos 45 - a_{BA}^n;$$

$$(y'): -a_B \sin 45 = a_A \sin 45 + a_{BA}^\tau,$$

откуда получаем:  $a_{BA}^n = \sqrt{2}$  (м/с<sup>2</sup>),  $a_{BA}^\tau = -\sqrt{2}$  (м/с<sup>2</sup>) (знак «» свидетельствует, что фактическое направление  $\bar{a}_{BA}^\tau$  – обратное ранее указанному). Определяем  $\varepsilon$  и  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{a_{BA}^n / BA} = 1 (\text{с}^{-1});$$

$$\varepsilon = a_{BA}^\tau / BA = 1 (\text{с}^{-2}); \varepsilon \text{ согл. } \bar{a}_{BA}^\tau \text{ (вокруг полюса } A\text{)}.$$

Для расчета  $\bar{a}_C$  выражаем это ускорение через ускорение полюса  $A$ :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau.$$

Ускорение  $\bar{a}_C$  неизвестно полностью. Определяем  $\bar{a}_{CA}^n$  и  $\bar{a}_{CA}^\tau$ :

$$a_{CA}^n = \omega \cdot CA = 1 (\text{м/с}^2), \bar{a}_{CA}^n \text{ к } A;$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon \cdot CA = 1 (\text{м/с}^2), \bar{a}_{CA}^\tau \perp CA \text{ согл. } \varepsilon.$$

Выбираем стандартные оси  $x$  и  $y$  решаем векторное уравнение аналитически:

$$(x): a_{Cx} = a_A - a_{CA}^n = 0;$$

$$(y): a_{Cy} = -a_{CA}^\tau = -1,$$

откуда  $a_C = a_{Cy} = 1 \text{ (м/с}^2)$ ,  $\bar{a}_C$  направлено вертикально вниз.

4. *План ускорений.* Согласно первому векторному уравнению (для  $\bar{a}_B$ ), отложив в масштабе из произвольной точки  $O_a$  векторы  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$ , проводим до пересечения прямые: из конца  $\bar{a}_A - \bar{a}_{BA}^n \parallel BA$ , из конца  $\bar{a}_B - \bar{a}_{BA}^\tau \perp BA$ . Расставив стрелки векторов и измеряя их, получаем:  $a_{BA}^n = a_{BA}^\tau = \sqrt{2} \text{ (м/с}^2)$  (рис. 8.18).

Рис. 8.18

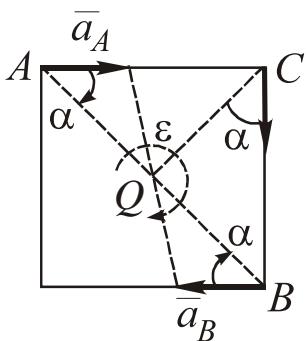


Рис. 8.19

Согласно второму векторному уравнению (для  $\bar{a}_C$ ) из конца  $\bar{a}_A$  откладываем  $\bar{a}_{CA}^n$ , из его конца —  $\bar{a}_{CA}^\tau$ . Соединяя  $O_a$  с концом  $\bar{a}_{CA}^\tau$  получим  $\bar{a}_C$  ( $1 \text{ м/с}^2$ ).

5. *Мгновенный центр ускорений.* Из плана ускорений определяем угол между  $\bar{a}_{BA}$  и  $\bar{a}_{BA}^n$  ( $\alpha = 45^\circ$ ), проводим до пересечения лучи из точек  $A$  и  $B$  к ускорениям  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  под углом  $\alpha$ , отложенном в направлении  $\varepsilon$ . Так как лучи сливаются (особый случай, рис. 6.23), точку  $Q$  определяем, соединяя концы  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$ .  $AQ = BQ = CQ = 0,7 \text{ м}$  (рис. 8.19).

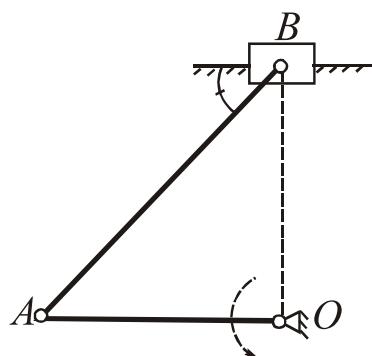
$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = 1,44 \text{ (с}^{-2}\text{)}; \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 1,41 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Определяем  $\bar{a}_C$ :  $\bar{a}_C = CQ \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 1 \text{ (м/с}^2)$ ;  $\bar{a}_C$  откладываем под углом  $\alpha$  к  $CQ$  в сторону, согласованную с  $\varepsilon$  (вокруг  $Q$ ).

Проверочные соотношения величина и направление  $\bar{a}_C$  отличаются не более чем на 5 %.

*Задание.* В задачах для самостоятельного решения 8.41–8.52 определить ускорение обозначенных точек и угловые ускорение звеньев.

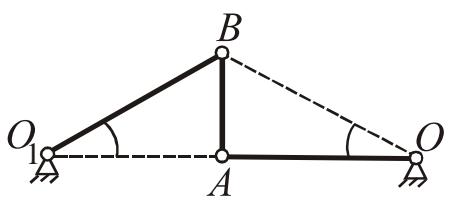
8.41



$$\omega_{OA} = 1 \text{ c}^{-1}, \varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2}, AB = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\varepsilon_{AB}, \bar{a}_B - ?$$

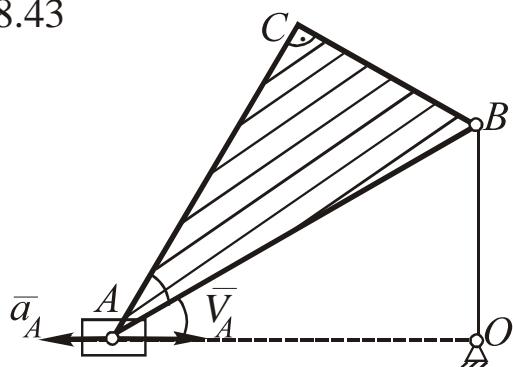
8.42



$$\omega_{OA} = \text{const} = 2 \text{ c}^{-1}, AB = 1 \text{ m}$$

$$\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{OB}, \bar{a}_B - ?$$

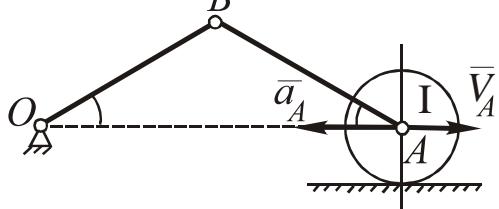
8.43



$$V_A = 1 \text{ m/c}, a_A = 0,2 \text{ m/c}^2; OB = 1 \text{ m}$$

$$\bar{a}_B, \bar{a}_C, \varepsilon_{ABC}, \varepsilon_{OB} - ?$$

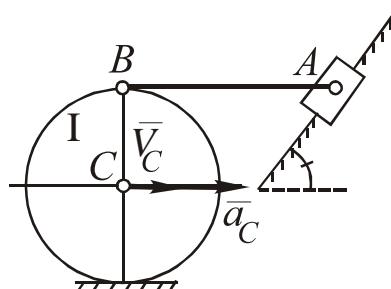
8.44



$$V_A = 0,5 \text{ m/c}, a_A = 1 \text{ m/c}^2; OB = 1 \text{ m}$$

$$\bar{a}_B, \varepsilon_{AB}, \varepsilon_I - ?$$

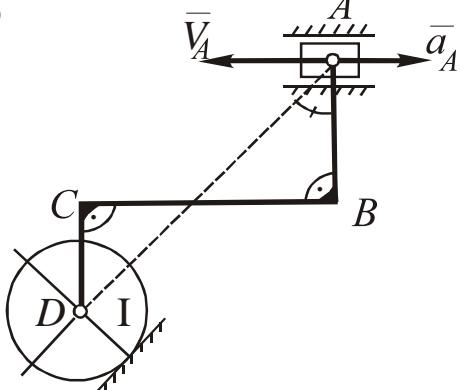
8.45



$$V_C = 2 \text{ m/c}, a_C = 1 \text{ m/c}^2; AB = 2r_I = 2 \text{ m}$$

$$\bar{a}_B, \bar{a}_A, \varepsilon_{AB}, \varepsilon_I - ?$$

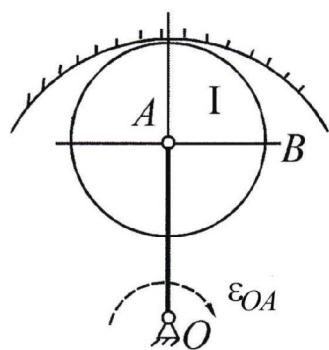
8.46



$$BC = 4r_I = 4 \text{ m}, V_A = 4 \text{ m/c}, a_A = 1 \text{ m/c}^2$$

$$\bar{a}_D, \varepsilon_{ABCD}, \varepsilon_I - ?$$

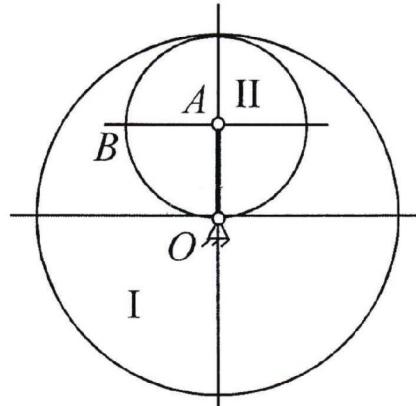
8.47



$$\omega_{OA} = 1 \text{ c}^{-1}, \varepsilon_{OA} = 2 \text{ c}^{-2}, AO = 2r_I = 2 \text{ m}$$

$$a_B, \varepsilon_I - ?$$

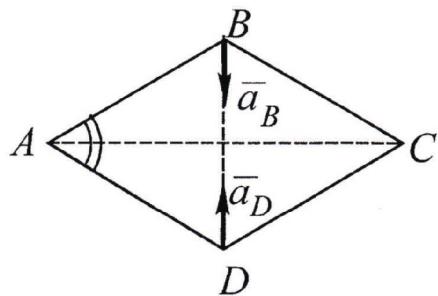
8.48



$$\omega_{OA} = 2\omega_I = \text{const} = 2 \text{ c}^{-1}, AO = 1 \text{ m}$$

$$a_B, \varepsilon_{II} - ?$$

8.49

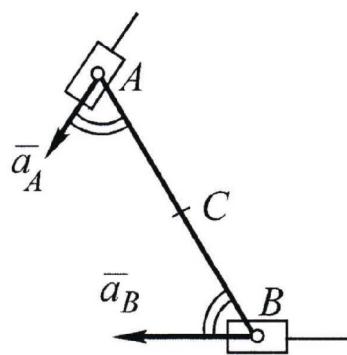


$$AB = BC = CD = 2 \text{ m},$$

$$a_B = 2a_D = 1 \text{ m/c}^2$$

$$a_A, a_C, \omega, \varepsilon - ?$$

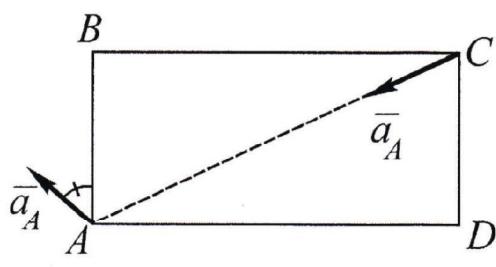
8.50



$$AB = 2AC = 1 \text{ m}, a_B = 2a_A = 1 \text{ m/c}^2$$

$$a_C, \omega, \varepsilon - ?$$

8.51

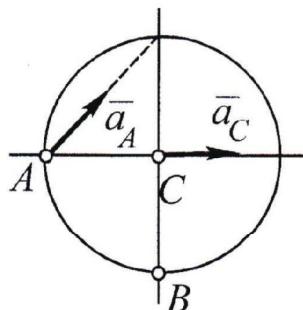


$$AB = 2 \text{ m}, BC = 2\sqrt{3} \text{ m},$$

$$a_C = 2a_A = 2 \text{ m/c}^2$$

$$a_B, a_D, \omega, \varepsilon - ?$$

8.52



$$a_A = 2 \text{ m/c}^2, a_C = 3 \text{ m/c}^2, r = 1 \text{ m}$$

$$a_B, \omega, \varepsilon - ?$$

## 8.5. Расчет скоростей в составном движении точки

Теория составного движения точки используется для расчета механизмов, допускающих относительные перемещения точек или звеньев.

Порядок решения задач следующий.

1. Определяют вид движения каждого из тел механизма.
2. Составляют схему составного движения точки (п. 7.1, рис. 7.2), для чего выбирают согласно условию задачи неподвижную систему отчета НС, точку Т и подвижную систему отчета ПС:

- за НС выбирают тело жестко связанное с землей;
- за Т выбирают точку движение которой требуется найти;
- за ПС выбирают тело, на котором «находится воображаемый наблюдатель, следящий за движением точки Т», или тело, движение которого задано, или тело, движение которого следует найти.

3. Записывают векторное уравнение связи скоростей точки в составном движении (п. 7.2) и анализируют его, определяя известные и неизвестные слагаемые, при этом анализ переносного и относительного движений требует изменений механизма согласно составленной схеме. Следует отметить, что в задачах на расчет скоростей точки в составном движении точки неизвестными чаще являются ее *переносная или относительная скорости*.

4. Если неизвестных не более двух, проецируют расчетное уравнение на непараллельные оси (их рекомендуется выбирать перпендикулярно неизвестным скоростям) и решают систему скалярных уравнений относительно неизвестных величин.

5. Для проверки решения строят план скоростей.

*Пример.* В кулисном механизме (рис. 8.20) скорость кулисы  $V_{BC} = 1 \text{ м/с}$ ;  $AO = 1 \text{ м}$ .

Определить угловую скорость кривошипа  $\omega_{AO}$  и скорость ползуна относитель-

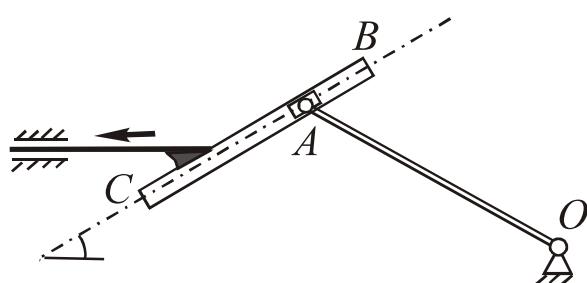


Рис. 8.20

но его кулисы  $\bar{V}_{A(BC)}$ .

*Решение.*

1. Механизм состоит из кулисы  $BC$  (движение поступательное по горизонтали), кривошипа  $AO$  (вращательное вокруг  $O$ ) и ползуна  $A$  (поступательное относительно кулисы  $BC$ ).

2. Выбираем за НС основание механизма (землю), за точку Т – шарнир А ползуна, а за ПС – кулису  $BC$ , поскольку «воображаемый наблюдатель» находится на кулисе  $BC$  и «следит» за движением точки  $A$  (рис. 8.21).

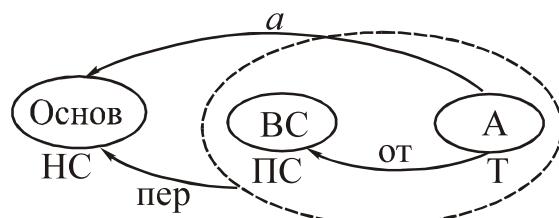


Рис. 8.21

3. Расчетное уравнение согласно п.7.2.  $\bar{V}_a = \bar{V}_{\text{пр}} + \bar{V}_{\text{от}}$ . Согласно схеме (рис. 8.21) в *абсолютном* движении точки  $A$  движется относительно основания.

Так как в реальном механизме точка  $A$  принадлежит кривошипу  $OA$ , для расчета скорости  $A$  в *абсолютном* движении рассмотрим движение  $OA$  (вращательное), при этом остальные звенья механизма отбрасываем:  $V_A - ?$ ,  $\bar{V}_A \perp AO$ , то есть величина неизвестна, направление принимаем произвольно (рис. 8.22).

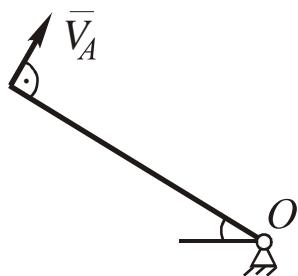


Рис. 8.22

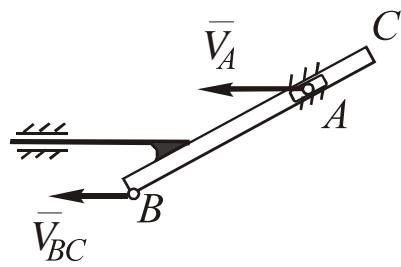


Рис. 2.23

В *переносном* движении точки  $A$ , как часть кулисы  $BC$ , движется относительно основания. Для расчета переносной скорости изменяем механизм – «привариваем» ползун  $A$  к кулисе  $BC$  и рас-

сматриваем ее движение (поступательное):  $\bar{V}_A = \bar{V}_{BC}$ , т.е. скорость известна (рис. 8.23).

В относительном движении точки  $A$  движется относительно неподвижно кулисы. Для расчета относительной скорости изме-

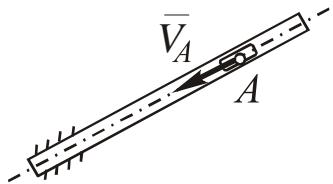


Рис. 8.24

няем механизм – жестко закрепляем кулису и рассматриваем движение ползуна (поступательное):  $V_A - ?$   $\bar{V}_A$  – по направляющей, т.е. величина неизвестна, направление принимаем произвольно (рис. 8.24).

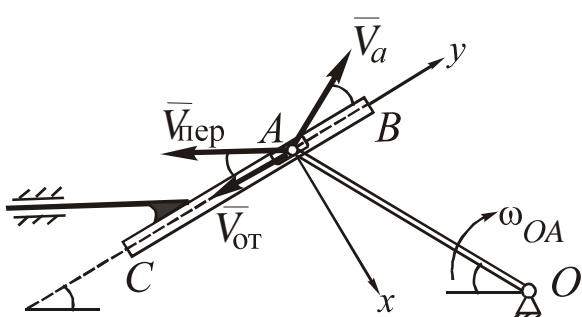


Рис. 8.25

Рабочий чертеж имеет вид (скорости точки  $A$  указывают с индексами, соответствующими схеме на рис. 8.25).

4. Выбираем оси  $x \perp \bar{V}_{\text{от}}$ ,  $y \perp x$  и проецируем векторное расчетное уравнение на эти оси (проекции находят аналогично п. 4.2):

$$(x): -V_a \sin 30 = -V_{\text{пер}} \sin 30;$$

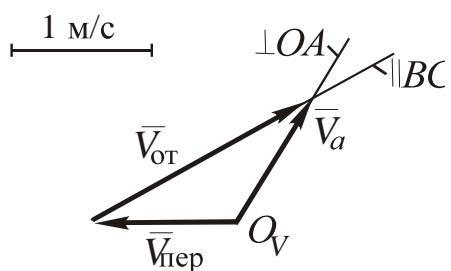
$$(y): V_a \cos 30 = -V_{\text{пер}} \cos 30 - V_{\text{от}}.$$

5. Из решения системы уравнений:  $V_a = 1$  м/с;  $V_{\text{от}} = -1,74$  м/с, т.е. вектор  $\bar{V}_{\text{от}}$  направлен обратно к ранее предложенному направлению. Определяем угловую скорость звена  $OA$  по результатам расчета абсолютного движения (рис. 8.22):

$$\omega_{OA} = \bar{V}_A / OA; \omega_{OA} \text{ согл. } \bar{V}_A.$$

6. Для проверки решения строим план скоростей.

Отложив из произвольной точки  $O_V$  в масштабе  $\bar{V}_{\text{пер}}$ , про-



водим линии до пересечения: из  $O_V - \bar{V}_a \perp AO$ , из конца  $\bar{V}_{\text{пер}} - \bar{V}_{\text{от}}$   $\parallel BC$ . Расставляя стрелки в соответствии с расчетным уравнением и измеряя с учетом масштаба, получаем:  $V_a = 1$

Рис. 8.26

м/с,  $V_{\text{от}} = 1,7$  м/с (рис.8.26).

Направления  $\bar{V}_a$  и  $\bar{V}_{\text{от}}$  совпадают с результатами аналитического расчета, разница величин векторов не превышает 5 %.

*Задание.* В задачах для самостоятельного решения 8.53–8.62 найти требуемые скорости в плоских механизмах.

## 8.6. Расчет ускорений в составном движении точки

Порядок решений задач следующий.

1. Определяют вид движения каждого из тел механизма.
2. Составляют схему составного движения точки.
3. Определяют фактическое положение точки  $M$  относительно подвижной системы, по расчетному значению дуговой координаты  $s(t)$ , причем при движении по окружности целесообразно перейти от дуговой к угловой координате.
4. Записывают векторные уравнения связи скоростей (п. 7.2) и ускорений (п. 7.3) точки в составном движении, анализируют их, при этом, как правило, неизвестными являются абсолютные скорость и ускорение точки.

При анализе *переносного и относительного движений* следует прежде всего указать плоскости и описать траектории точки (ими являются прямая или окружность), а затем рассчитать скорость и составляющие ускорения, используя законы относительного движения точки по траектории и вращательного движения подвижной системы отсчета, причем при положительных значениях производных, соответствующие кинематические характеристики ( $\omega$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{a}$ ) направляют в направлении отсчета, а при отрицательном – в обратном направлении.

При *поступательном* движении подвижной системы отсчета переносную скорость и ускорение определяют по закону движений любой точки ПС.

*Кориолисово ускорение* определяют в следующей последовательности:

– определяют вектор  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ , направляя его по оси переносного вращения по правилу правого винта по отношению к направлению поворота тела  $\omega_{\text{пер}}$ , и переносят его параллельно в точку  $M$ ;

<p>8.53</p> <p><math>\omega_{OM} = 2 \text{ rad/s}</math>, <math>OM = \sqrt{2} \text{ m}</math></p> <p><math>\bar{V}_{M(OL)}</math>, <math>\omega_{OL} - ?</math></p>	<p>8.54</p> <p><math>V_A = 5 \text{ m/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{B(A)}</math>, <math>V_{BC} - ?</math></p>
<p>8.55</p> <p><math>AO_1 = O_1B = 1 \text{ m}</math>, <math>\omega_{AB} = 3 \text{ rad/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{B(LM)}</math>, <math>\omega_{LM} - ?</math></p>	<p>8.56</p> <p><math>OO_1 = 0.5R = 0.5 \text{ m}</math></p> <p><math>\omega_I = 2 \text{ rad/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{A(I)}</math>, <math>\bar{V}_{AB} - ?</math></p>
<p>8.57</p> <p><math>OA = 2 \text{ m}</math>, <math>\omega_{OA} = 1 \text{ rad/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{A(BC)}</math>, <math>\bar{V}_{BC} - ?</math></p>	<p>8.58</p> <p><math>OA = 2 \text{ m}</math>, <math>\omega_{OL} = 3 \text{ rad/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{A(OL)}</math>, <math>\bar{V}_{AB} - ?</math></p>
<p>8.59</p> <p><math>V_A = 2 \text{ m/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{C(OL)}</math>, <math>\omega_{OL} - ?</math></p>	<p>8.60</p> <p><math>V_C = 2 \text{ m/s}</math></p> <p><math>\bar{V}_{A(OL)}</math>, <math>\omega_{OL} - ?</math></p>
<p>8.61</p> <p><math>\omega_{OA} = 5 \text{ rad/s}</math>, <math>OM = 2 \text{ m}</math></p> <p><math>\bar{V}_{M(OL)}</math>, <math>\bar{V}_{MN} - ?</math></p>	<p>8.62</p> <p><math>V_{AC} = 1 \text{ m/s}</math>, <math>OA = 1 \text{ m}</math></p> <p><math>\bar{V}_{A(OL)}</math>, <math>\omega_{OL} - ?</math></p>

- проверяют наличие признаков  $a_k = 0$  ( $\bar{\omega}_{\text{пер}} = 0$  или  $V_{\text{от}} = 0$  или  $\bar{\omega}_{\text{пер}} \parallel \bar{V}_{\text{от}}$ );
- при  $a_k \neq 0$  в соответствии с п.7.4 строят плоскость, образованную векторами  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\bar{V}_{\text{от}}$ , направляют  $\bar{a}_k$  перпендикулярно ей по правилу правого винта по отношению к направлению угла  $\alpha$  кратчайшего совмещения  $\omega_{\text{пер}}$  с  $\bar{V}_{\text{от}}$ , затем вычисляют величину  $a_k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{от}} \sin \alpha$ .

Результаты расчетов изображают на *рабочем чертеже*, порядок построения которого следующий:

- выбирают стандартные пространственные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (во всех задачах рассматриваемые вектора не будет находиться в одной плоскости),
- изображают ПС (если ПС является пластина, ее целесообразно изображать во фронтальной плоскости), при этом для повышения наглядности чертежа следует оси вращения и симметрии механизма совмещать с осями координат;
- указывают расчетное положение точки  $M$  в соответствии с поз. 3;
- изображают все кинематические характеристики ( $\bar{V}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$ ), полученные в ходе анализа расчетных уравнений.

5. Проектируют векторные расчетные уравнения на координатные оси, по полученным проекциям определяют величины и направления (обычно, графически построением по проекциям) векторов  $\bar{V}_a$  и  $\bar{a}_a$ .

*Пример.*

Диск ( $r = 1$  м) вращается вокруг горизонтальной оси по закону  $\varphi = t^3 - 4t$  (рад). По ободу движется точка  $M$  по закону

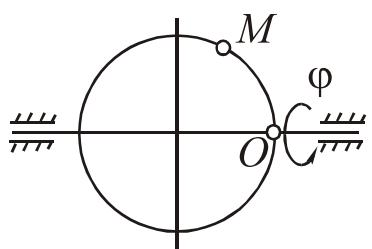


Рис. 8.27

$s = OM = \frac{2}{3}\pi t^2$  (м). Определить абсолютную скорость и ускорение точки  $M$  в момент  $t_1 = 1$  с (рис. 8.27).

*Решение.*

1. Механизм состоит из диска (движение вращательное вокруг гори-

зонтальной оси) и точки М (движение по окружности относительно обода диска).

2. Выбираем за НС систему координатных осей  $x_1y_1z_1$ , за точку – М, за ПС – диск (рис. 8.28).

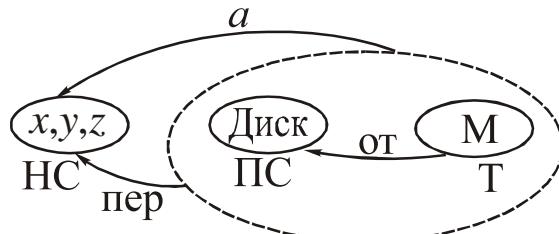


Рис. 8.28

3. Положение точки на диске определяем по дуговой координате  $OM = S \Big|_{t_1=1} = \frac{2}{3}\pi$  (м). Целесообразно перейти к угловой координате  $\phi_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ$ .

4. На рабочем чертеже изображаем оси  $x_1y_1z_1$ , диск и расчетное положение  $M_1$  точки (откладывая угол  $\phi_1$  от оси  $O_1y$ ) (рис. 8.29).

Расчетные уравнения имею вид:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_{\text{пер}} + \bar{V}_{\text{от}};$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_k.$$

Т.к. *переносное* движение – вращательное вокруг оси  $y$ , плоскость переносного движения точки  $M$  параллельна  $x_1O_1z$  (плоскость, переходящая через  $M_1$  перпендикулярно  $O_1y$ ), движение происходит по окружности с центром  $O_2$

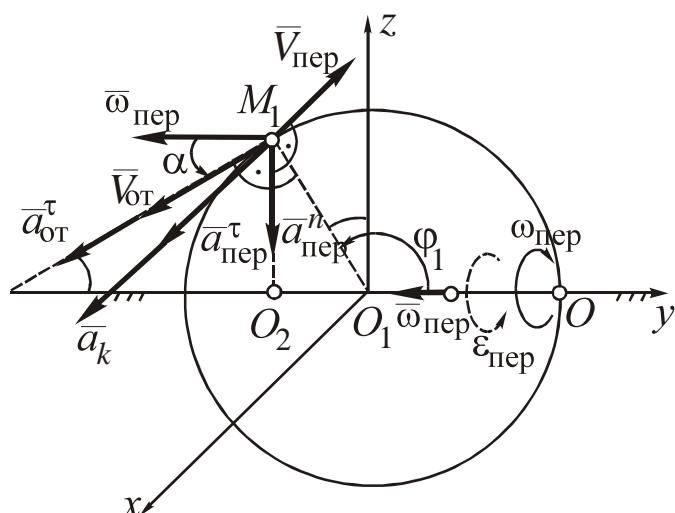


Рис. 8.29

(на пересечении ранее построенной плоскости с осью  $O_1y$ ) и ра-

диусом  $O_2M_1 = R \sin 60 = 0,87$  (м).

Определяем угловые скорость и ускорение переносного вращения:

$$\omega_{\text{пер}} = \dot{\phi} \Big|_{t=1} = (3t^2 - 4) \Big|_{t=1} = -1 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \ddot{\phi} \Big|_{t=1} = 6t \Big|_{t=1} = 6 \text{ (с}^{-2}\text{)},$$

Т.к.  $\omega_{\text{пер}} < 0$ , а  $\varepsilon_{\text{пер}} > 0$ , направляем вокруг оси  $O_1y$   $\varepsilon_{\text{пер}}$  – по направлению  $\phi$ , а  $\omega_{\text{пер}}$  – против него.

Определяем скорость и составляющие ускорения точки (они должны находиться в плоскости траектории):

$$V_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} M_1O_2 = 0,87 \text{ (м/с)}, \bar{V}_{\text{пер}} \perp M_1O_2 \text{ согл. } \omega_{\text{пер}};$$

$$a_{\text{пер}}^n = \omega_{\text{пер}}^2 M_1O_2 = 0,87 \text{ (м/с}^2\text{)}, \bar{a}_{\text{пер}}^n \text{ к } O_2;$$

$$a_{\text{пер}}^\tau = \varepsilon_{\text{пер}} M_1O_2 = 5,2 \text{ (м/с}^2\text{)}, \bar{a}_{\text{пер}}^\tau \perp M_1O_2 \text{ согл. } \varepsilon_{\text{пер}}.$$

*Относительное* движение происходит в плоскости диска ( $yO_1z$ ) по окружности с центром  $O_1$  и радиусом  $R = 1$  м, начало отсчета – от точки  $O$ . Определяем скорость и ускорение точки в относительном движении (они должны находиться в плоскости траектории):

$$V_{\text{от}} = \dot{s} \Big|_{t=1} = \frac{4}{3} \pi t \Big|_{t=1} = 4,2 \text{ (м/с);}$$

$\bar{V}_{\text{от}} \perp M_1O_1$ , т.к.  $V_{\text{от}} > 0$ , направляем вектор от  $O$ ;

$$a_{\text{от}}^n = \frac{\bar{V}_{\text{от}}^2}{R} = 17,6 \text{ (м/с}^2\text{)}; \bar{a}_{\text{от}}^n \text{ к } O_1;$$

$$a_{\text{от}}^\tau = \ddot{s} \Big|_{t=1} = \frac{4}{3} \pi = 4,2 \text{ (м/с}^2\text{);}$$

$\bar{a}_{\text{от}}^\tau \perp M_1O_1$ , т.к.  $a_{\text{от}}^\tau > 0$ , направляем вектор от  $O$ .

Определяем кориолисово ускорение:

– вектор  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  направляем по оси переносного вращения

$O_1y$  по движению правого винта в направлении  $\omega_{\text{пер}}$ , переносим

вектор параллельно в точку  $M_1$ ;

–  $\bar{a}_k \perp \text{Пл}(\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{V}_{\text{от}})$ , пр. винт  $\alpha$  (вектора  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\bar{V}_{\text{от}}$  образуют плоскость  $yO_1z$ , перпендикуляр к ней параллелен оси  $O_1x$ , правый винт движется сонаправлено  $O_1x$ )  
 $a_k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{от}} \sin \alpha = 2 \cdot 1 \cdot 4,2 \sin 30 = 4,2 \text{ (м/с}^2\text{)}$ .

5. Проецируем расчетные уравнения на координатные оси:

$$(x): V_{ax} = -V_{\text{пер}} = -0,87; a_{ax} = \bar{a}_{\text{пер}}^\tau + a_k = 9,4;$$

$$(y): V_{ay} = -V_{\text{от}} \cos 30 = -3,64;$$

$$a_{ay} = a_{\text{от}}^n \sin 30 - a_{\text{от}}^\tau \cos 30 = 5,15;$$

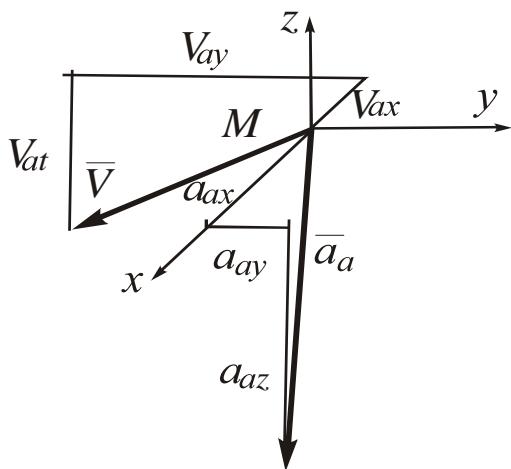
$$(z): V_{az} = -V_{\text{от}} \sin 30 = -2,1;$$

$$a_{az} = -\bar{a}_{\text{пер}}^n - \bar{a}_{\text{от}}^n \cos 30 - \bar{a}_{\text{от}}^\tau \sin 30 = -18,21.$$

Модули абсолютных скоростей и ускорения:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2} = 4,27 \text{ (м/с);}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 21,13 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

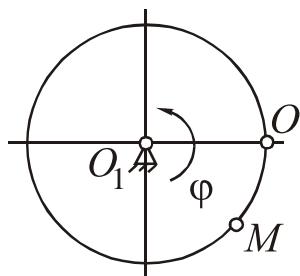


Направления  $\bar{V}_a$  и  $\bar{a}_a$  находим графическим построением по проекциям (рис. 8.30).

Рис. 8.30

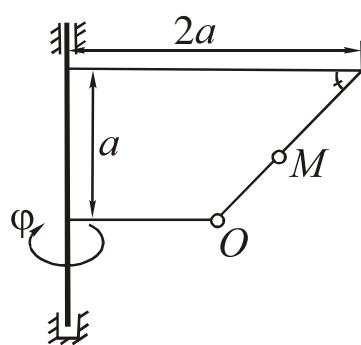
*Задание.* В задачах для самостоятельного решения 8.63–8.74 определить абсолютные скорость и ускорение точки.

8.63



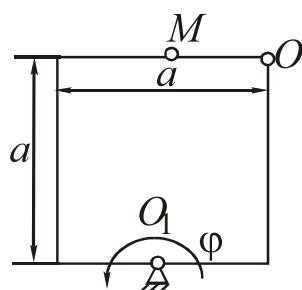
$$R = 2 \text{ м}, t_1 = 2 \text{ с}, \\ OM = s = 0,2\pi(1+t^2) \text{ (м)}, \\ \varphi = \frac{1}{3}t^3 - t^2 \text{ (рад)}$$

8.64



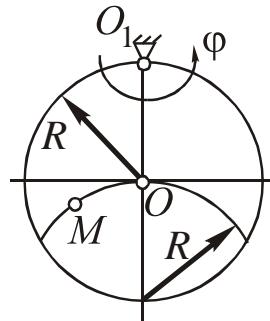
$$a = 5\sqrt{2} \text{ м}, t_1 = 0,5 \text{ с}, \\ OM = s = 2\sin(\pi t) \text{ (м)}, \\ \varphi = 3t^2 \text{ (рад)}$$

8.65



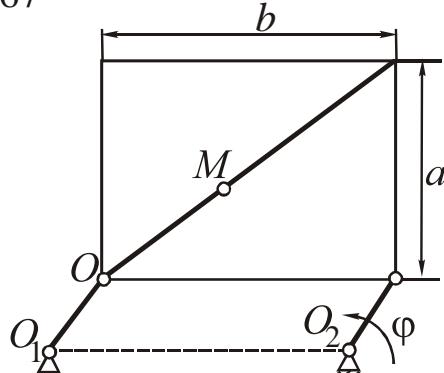
$$a = 4 \text{ м}, t_1 = 2 \text{ с}, \\ OM = s = 2\sin(\frac{\pi}{2}t) + 4 \text{ (м)}, \\ \varphi = 2t - 3t^2 \text{ (рад)}$$

8.66



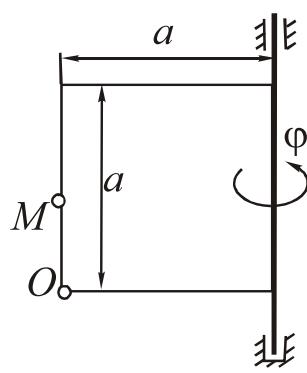
$$R = 1 \text{ м}, t_1 = 3 \text{ с}, \\ OM = s = \frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{6}t), \\ \varphi = 0,5t^2 + t \text{ (рад)}$$

8.67



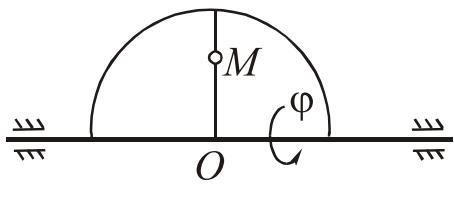
$$a = 3 \text{ м}, b = 4 \text{ м}, t_1 = 2 \text{ с}, \\ OM = s = 0,5t + t^2 \text{ (м)}, \\ \varphi = 2t + t^2 \text{ (рад)}$$

8.68



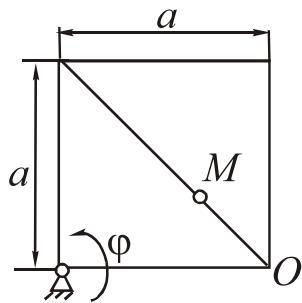
$$a = 3 \text{ м}, t_1 = 1 \text{ с}, \\ OM = s = 1,5t^2 \text{ (м)}, \\ \varphi = t - 0,5t^3 \text{ (рад)}$$

8.69



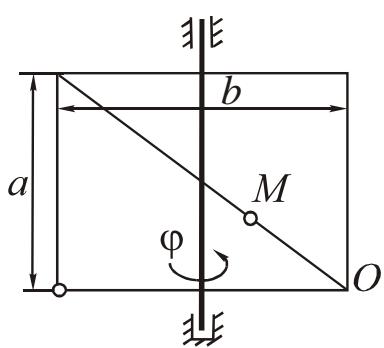
$$t_1 = 1 \text{ c}, \\ OM = s = t^3 + 1 \text{ (m)}, \\ \varphi = 4\sin\left(\frac{\pi t^3}{4}\right) \text{ (рад)}$$

8.70



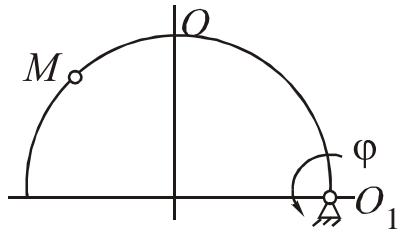
$$a = 2\sqrt{2} \text{ m}, t_1 = 1 \text{ c}, \\ OM = s = t + t^3 \text{ (m)}, \\ \varphi = \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \text{ (рад)}$$

8.71



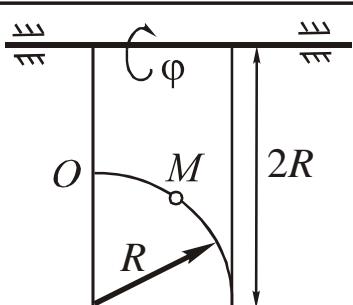
$$a = 1,5 \text{ m}, b = 2 \text{ m}, t_1 = 1 \text{ c}, \\ OM = s = \frac{1}{4}t^3 + t \text{ (m)}, \\ \varphi = 2t^4 \text{ (рад)}$$

8.72



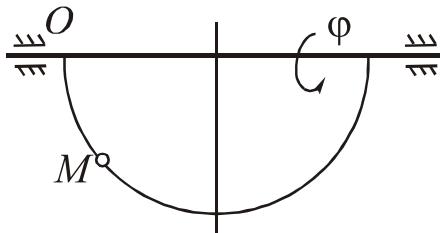
$$R = 6 \text{ m}, t_1 = 1 \text{ c}, \\ OM = s = \pi(2 + t^3) \text{ (m)}, \\ \varphi = 1 - t^4 \text{ (рад)}$$

8.73



$$R = 8 \text{ m}, t_1 = 2 \text{ c}, \\ OM = s = \pi t^2 \text{ (m)}, \\ \varphi = 2,5t^2 \text{ (рад)}$$

8.74



$$R = 5 \text{ m}, t_1 = 1 \text{ c}, \\ OM = s = \pi(t^3 + 4) \text{ (m)}, \\ \varphi = 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \text{ (рад)}$$

## 9. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*Динамика* – раздел теоретической механики, в котором рассматриваются законы движения материальных тел с учетом их масс и действующих на них сил. *Динамика* – заключительный раздел классической механики, в нем используются знания о силах из статики и свойствах движения тел из кинематики.

Традиционно данный раздел начинают с изучения движения простейшего тела – *материальной точки*.

### 9.1. Законы динамики

Рассмотренные ниже законы являются *аксиомами динамики*. Они изложены впервые И. Ньютоном в 1687 г.

*Основной закон динамики* – произведение массы материальной точки на вектор ее ускорения равно вектору силы, вызывающей это ускорение:

$$m \bar{a} = \bar{F}. \quad (9.1)$$

Масса  $m$  является мерой механической инертности материальной точки (т.е. способности ее сохранять движение или состояния покоя). Инертная масса равна гравитационной массе тела, входящей в закон тяготения, что впервые было экспериментально доказано советскими учеными путем точных измерений. Единицей размерности в СИ является килограмм (кг). При заданном весе тела  $P$  массу определяют через ускорение свободного падения ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ):

$$m = \frac{P}{g}.$$

Из основного закона выводят все теоремы динамики материальной точки и механической системы, поэтому его можно считать *основой динамики*.

Свойства основного закона.

1. При действии на точку системы сил  $\bar{F}_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) последняя эквивалентна равнодействующей  $\bar{R}$  (т.к. силы сходящиеся):

$$m\bar{a} = \bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k . \quad (9.2)$$

2. Независимость действия сил: каждая из действующих на точку сил сообщает ей такое же ускорение, какое сообщала бы, действуя изолированно (в отдельных учебниках это свойство рассматривается как отдельный закон динамики). Для случая двух сил это свойство следует из правила разложения вектора  $\bar{a}$  по направлениям сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  (рис. 9.1).

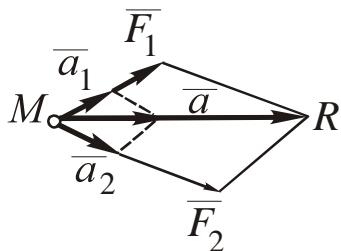


Рис. 9.1

$$\begin{aligned} m\bar{a} &= m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 \Rightarrow m\bar{a}_1 = \bar{F}_1 \\ m\bar{a} &= \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \Rightarrow m\bar{a}_2 = \bar{F}_2 . \end{aligned}$$

3. Ускорение  $\bar{a}$  можно представить в дифференциальной форме:

$$m\bar{a} = m \frac{d\bar{V}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_k . \quad (9.3)$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме*.

*Закон инерции* – материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока оно не будет изменено действующими на нее силами.

Данный закон может быть получен из основного закона:

$$\text{при } \sum \bar{F}_k = 0 \Rightarrow m\bar{a} = 0 \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0 ;$$

$a_n = 0$ , т.е. движение точки прямолинейное ( $\rho \rightarrow \infty$ );

$a_\tau = 0$ , т.е. движение равномерное ( $V = \text{const}$ ).

Значение данного закона состоит в том, что на его основе вводят понятия *инерциальной системы отсчета*, относительно которой выполняется закон инерции (а, значит, и основной закон динамики). Известны следующие инерциальные системы отсчета:

– *звездная* (за начало принята любая из звезд, а оси направлены на 3 другие звезды), данная система близка к идеальной инерциальной, т.к. ближайшие звезды находятся на расстоянии порядка  $10^{13}\text{--}10^{14}$  км, поэтому гравитационные силы пренебрежимо малы, а сами звезды практически неподвижны;

– солнечная или гелиоцентрическая (за начало которой принято Солнце, ближайшая к нам звезда);

– земная или геоцентрическая (жестко связанная с планетой Земля), данная система дает значительную погрешность ввиду годового и суточного движения Земли вокруг Солнца, однако в большинстве инженерных задач механики ею можно пренебречь.

*Закон действия и противодействия* – всякое действие одного тела на другое сопровождается равным по величине и обратным по направлению противодействием. Например, при скатывании лыжника с горы силами действия являются: вес  $\bar{P}$ , реакция  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  поверхности горы, сопротивление  $\bar{R}$  воздуха. Силы противодействия приложены соответственно к планете Земля, поверхности горы и воздуху. Силы действия и противодействия не уравновешены, т.к. приложены к разным телам (рис. 9.2).

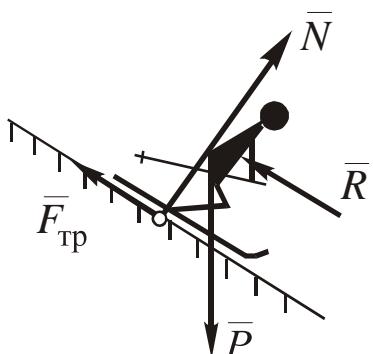


Рис. 9.2

## 9.2. Виды задач динамики, меры движения материальной точки

В зависимости от рассматриваемых в задаче тел разделяют задачи динамики материальной точки МТ и механической системы МС (системы материальных точек или твердых тел). Тело может быть принято за материальную точку в двух случаях (если об этом нет указаний в условии задач):

- если оно представляет собой результат бесконечного разбиения реального тела;
- если тело конечных размеров движется поступательно равномерно прямолинейно (доказательство см. в п. 10.3).

В зависимости от вида условия различают *прямые* и *обратные* задачи динамики МТ и МС. В *прямых* задачах известен закон движения точки (тела), в *обратных* он неизвестен. В частности, в *прямых* задачах динамики МТ ее движение задано векторным, координатным или естественным способом, тогда действующую

силу определяют непосредственно из основного закона:  $\bar{F}(t) = m \bar{a}(t)$ , где  $\bar{a}(t)$  – ускорение точки, определяемое методами кинематики (пп. 5.2 и 8.2). Т.к. прямая задача, по существу, относится к кинематике, основной объем задач динамики относится к обратным.

Задачи динамики МТ в зависимости от траектории точки могут быть с *прямолинейным* и *криволинейным* движением. При *прямолинейном* движении уравнение (9.2) проецируют на ось  $x$ , совпадающую с траекторией:

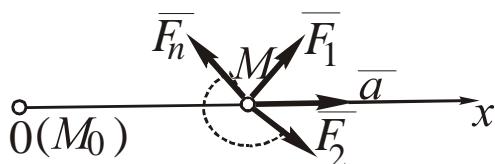


Рис. 9.3

$m a_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$ , при *криволинейном* движении – на неподвижные координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  или подвижные оси  $\tau$ ,  $n$  и  $b$  (рис. 9.3):

$$m a_x = \sum_{k=1}^n F_{kx};$$

$$m a_\tau = m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau};$$

$$m a_y = \sum F_{ky};$$

$$m a_n = m \frac{V^2}{r} = \sum F_{kn};$$

$$m a_z = \sum F_{kz};$$

$$m a_b = 0 = \sum F_{kb}.$$

Решение обратных задач динамики возможно двумя способами:

- интегрированием дифференциальных уравнений (9.3) движения МТ;
- применением теорем динамики МТ и МС, определяющих изменение их мер движения.

*Мерами движения* МТ называют следующие ее динамические характеристики, объединяющие массу  $m$  и скорость  $V$ :

$m \bar{V}$  – количество движения;

$\frac{mV^2}{2}$  – кинетическая энергия;

$\bar{m}_0(m \bar{V}) = \bar{r} \times m \bar{V}$  – момент количества движения (кинети-

ческий момент).

Меры  $m\bar{V}$  и  $\bar{m}_0(m\bar{V})$  характеризуют способность материальных тел передавать движение друг другу в результате механического взаимодействия (например, удара), мера  $\frac{mV^2}{2}$  – возможность превращения механической энергии в ее другие виды (тепловую, химическую, биологическую).

### 9.3. Прямолинейные свободные колебания материальной точки

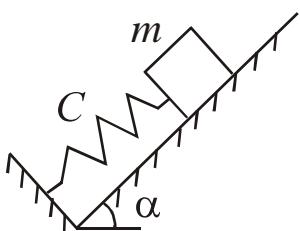


Рис. 9.4

Пусть тело движется поступательно по гладкой наклонной поверхности, причем с телом соединен упругий элемент – пружина (рис. 9.4).

Определим закон движения груза при следующих заданных величинах:  $m$  – масса тела;  $C$  – жесткость пружины;  $x_0$  – начальная деформация пружины;

$V_0$  – начальная скорость тела;  $\alpha$  – угол наклона.

Т.к. тело движется поступательно, заменим его материальной точкой, направляем ось  $x$  в одну из двух сторон параллельно направляющей поверхности. За начало оси  $x$  целесообразно выбрать положение статистического равновесия  $M_{ct}$ , что позволяет упростить решение.

На чертеже (рис. 9.5) указаны расчетное положение  $M$  и соответствующее недеформированной пружине  $M_H(x = \lambda_{ct})$ , а также действующие на  $M$  силы: вес  $\bar{P}$ , реакция гладкой поверхности  $\bar{N}$  и упругая сила  $\bar{F}_y$ ,  $F_y = C\lambda$ , где  $\lambda$  – деформация пружины (направление  $\bar{F}_y$  противоположно  $\lambda$ ). Ускорение  $\bar{a}$  направлено по оси  $x$ , его обычно не показывают.

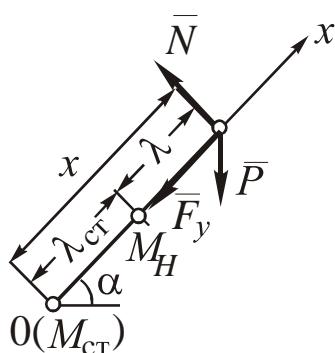


Рис. 9.5

Запишем уравнение (9.2) в вектор-

ной форме и в проекциях на ось  $x$ :

$$m\ddot{x} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_y;$$

$$(x): m\ddot{x} = P \sin \alpha - F_y = P \sin \alpha - C\lambda = \\ P \sin \alpha - C(x - \lambda_{ct}) = P \sin \alpha - Cx + C\lambda_{ct}. \quad (9.4)$$

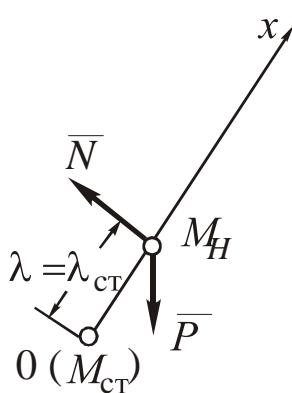


Рис. 9.6

Для положения статического равновесия ( $\ddot{x} = 0$ ), в соответствии с рис. 9.6 уравнение (9.4) примет вид:

$$0 = P \sin \alpha - C\lambda = P \sin \alpha - C\lambda_{ct} \quad (9.5).$$

Вычитая (9.5) из (9.4), получим

$$ma + cx = 0,$$

или в дифференциальной форме

$$m\ddot{x} + Cx = 0. \quad (9.6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (9.6) имеет вид

$$x = A \sin(kt + \alpha), \quad (9.7)$$

где  $A$ ,  $\alpha$  – постоянные интегрирования (соответственно, амплитуда и фаза колебаний),  $k = \sqrt{C/m}$  – круговая частота колебаний.

Для определения постоянных  $A$  и  $\alpha$  используем начальные условия:

$$\text{при } t_0 = 0: x_0 = \lambda_0 = A \sin \alpha;$$

$$\dot{x}_0 = V_0 = Ak \cos \alpha.$$

Возводя в квадрат и складывая части уравнений, получим постоянную  $A$ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{k}\right)^2};$$

поделив почленно первое уравнение на второе – постоянную  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{V_0} \text{ или } \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{x_0 k}{V_0} \right).$$

Уравнение (9.7) называют уравнением свободных (собственных или гармонических) колебаний. В технике вместо круговой частоты  $k$  определяют период  $T = \frac{2\pi}{k}$  или частоту колебаний

$$\nu = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

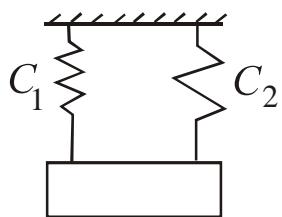
Примечания.

1. Частота  $k$  свободных колебаний зависит только от параметров  $C$  и  $m$ , а амплитуда  $A$  и фаза  $\alpha$  колебаний зависит не только от  $k$ , но и от начальных условий  $\lambda_0$  и  $V_0$ .

2. При нескольких пружинах следует различать их последовательное и параллельное соединение и заменить одной эквивалентной.

При *последовательном* соединении (пружины имеют общую точку) их деформации суммируются (рис. 9.7):

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{F_y}{C_1} + \frac{F_y}{C_2} = F_y \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{F_y}{C_3},$$



$$\text{откуда } \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ или } C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

где  $C_3$  – жесткость эквивалентной пружины.

При *параллельном* соединении суммируются силы упругости пружин, их деформации одинаковы (рис. 9.8):

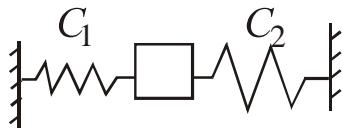


Рис. 9.8

$$F_3 = F_{y1} + F_{y2} = C_1 \lambda + C_2 \lambda = (C_1 + C_2) \lambda = C_3 \lambda,$$

$$\text{откуда } C_3 = C_1 + C_2.$$

3. Если к телу кроме рассмотренных выше сил приложена сила вязкого сопротивления  $\bar{R} = -\mu \bar{V}$  ( $\mu$  – коэффициент сопротивления), то колебания будут *затухающими*, при приложении дополнительно возмущающей силы  $Q = Q_0 \sin pt$  ( $Q_0$  – амплитуда,  $p$  – частота) – *вынужденными*. Расчет затухающих и вынужденных колебаний рассмотрен в [2].

## 9.4. Импульс и работа силы

Наряду с мерами движения МТ в динамике вводят динамические характеристики силы, увязывающие ее с временем действия и перемещением точки: импульс и работа силы.

*Элементарный импульс* силы  $\bar{F}$  – произведение  $\bar{F}$  на элементарный интервал времени  $dt$ :  $d\bar{S}_F = \bar{F} dt$ .

*Полный импульс*  $\bar{S}_F$  равен сумме (интегралу) от элементарных импульсов на произвольном интервале времени от 0 до  $t$ :

$$\bar{S}_F(t) = \int_0^t d\bar{S}_F = \int_0^t \bar{F}(t) dt. \quad (9.8)$$

Если сила постоянна по величине и направлению ( $\bar{F} = \text{const}$ ), из (9.8) следует  $\bar{S}_F(t) = \bar{F}t$ , т.е. векторы силы и ее импульса совпадают по направлению.

Единица размерности  $S_F$  в СИ: Н·с.

*Элементарной работой* силы  $\bar{F}$  называют скалярное произведение  $\bar{F}$  на вектор элементарного перемещения  $d\bar{s}$  ( $d\bar{s}$  совпадает с дифференциалом радиуса – вектора  $d\bar{r}$ ) (рис. 9.9):

$$dA_F = \bar{F} \cdot d\bar{s} = \bar{F} ds \cos \alpha.$$

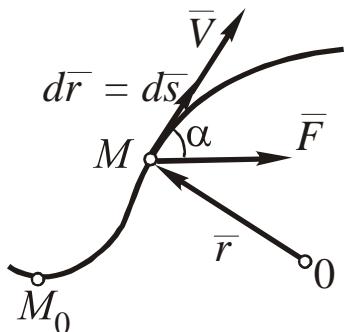


Рис. 9.9

*Полная работа*  $A_F$  равна сумме (интегралу) элементарных работ на произвольном интервале от  $M_0$  до  $M$ :

$$A_F = \int_{M_0}^M dA_F = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (9.9)$$

В аналитической форме (через проекции векторов ( $\bar{F}$  и  $d\bar{r}$ ) (9.9) имеет вид

$$A_F = \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz. \quad (9.10)$$

*Мощностью* силы называют отношение приращения работы к интервалу времени

$$N_F = \frac{dA_F}{dt} \text{ (мгновенная мощность);}$$

$$N_{F\text{ср}} = \frac{\Delta A_F}{\Delta t} \text{ (средняя мощность).}$$

Единицами размерности в СИ являются: работы –  $\text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}$  (Джоуль), мощности силы –  $\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$  (Ватт).

### *Примеры вычисления работ сил*

1. *Сила постоянна, точка движется прямолинейно.*

При  $\bar{F} = \text{const}$  из (9.9) следует

$$A_F = \bar{F} \cdot \Delta \bar{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha, \quad (9.11)$$

где  $\Delta \bar{s}$  – вектор конечного перемещения точки,  $\Delta s = \Delta x = M_0 M$ ,  $\alpha$  – угол между  $\bar{F}$  и траекторией (осью  $x$ ) (рис. 9.10).

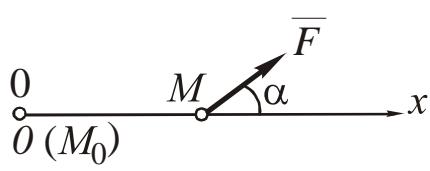


Рис. 9.10

При  $\alpha < \frac{\pi}{2}$   $A_F > 0$ ; при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$A_F = 0$ ; при  $\alpha > \frac{\pi}{2}$   $A_F < 0$ , т.е. знак работы силы совпадает со знаком ее проекции на направление перемещения.

2. *Работа силы тяжести.* Т.к.  $P_x = P_y = 0$ ,  $P_z = -P$ , из (9.10) следует:

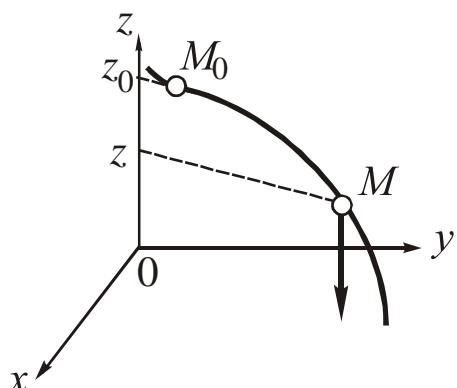


Рис. 9.11

$$A_p = - \int_{z_0}^z P dz = P(z_0 - z). \quad (9.12)$$

$A_p > 0$  при  $z_0 > z$  (спуск по траектории);  $A_p < 0$  при ( $z_0 < z$ ) (подъем);  $A_p = 0$  при  $z_0 = z$ .

3. *Работа силы трения.* Из (9.11) и рис. 9.12 следует:

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \Delta s = -f N \Delta s. \quad (9.13)$$

Т.к. сила  $\bar{F}_{\text{тр}}$  противоположна перемещению, ее работа всегда отрицательна.

*Примечание.* При движении точки по наклонной поверхно-

сти под углом  $\varphi$  к горизонту работы сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_{\text{тр}}$  выражают через  $\varphi$  (рис. 9.13):

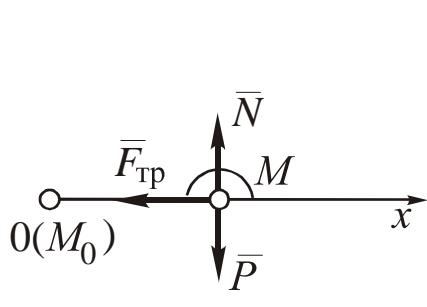


Рис. 9.12

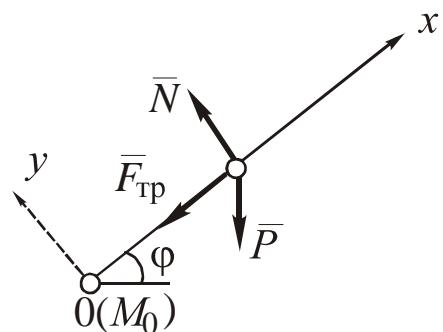


Рис. 9.13

$$A_p = P \cdot \Delta s \cos \alpha = -P \cdot \Delta x \cos (90 - \varphi) = -P \cdot \Delta x \sin \varphi; \quad (9.14)$$

$$A_N = P \cdot \Delta s \cos \pi/2 = 0;$$

$$A_{\text{тр}} = -f N \Delta s = -f P \cos \varphi \Delta x, \quad (9.15)$$

(т. к. проецируя уравнение  $m \bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}$  на ось  $y$ , получаем  $0 = -P \cos \varphi + N$  или  $N = P \cos \varphi$ ), т.е. работа силы тяжести содержит  $\sin \varphi$ , силы трения —  $\cos \varphi$ , реакции гладкой поверхности — нулевая.

4. Работа силы упругости. Считая  $M_H = 0$  положением, соответствующим недеформированной пружине, подставляя  $F_y = C x = C \lambda$ ,  $d s = d \lambda$ ,  $\cos \alpha = \cos \pi = -1$  в (9.9), получим:

$$A_{F_y} = - \int_{\lambda_0}^{\lambda} C \lambda d\lambda = \frac{C}{2} (\lambda_0^2 - \lambda^2). \quad (9.16)$$

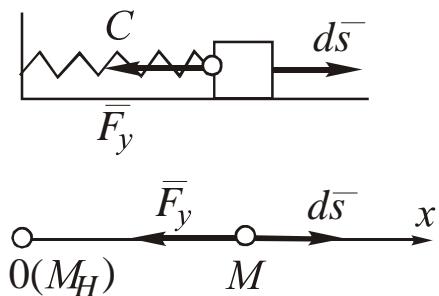


Рис. 9.14

При  $\lambda_0 < \lambda$  (увеличение деформации)  $A_{F_y} < 0$ , при  $\lambda_0 > \lambda$  (уменьшение деформации)  $A_{F_y} > 0$ , при  $\lambda_0 = \lambda$   $A_{F_y} = 0$  (рис. 9.14).

5. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу (рис. 9.15).

Из (9.9) с учетом  $ds = OM \cdot d\phi$ :

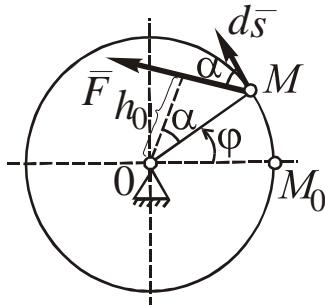


Рис. 9.15

$$A_F = \int_{M_0}^M F ds \cos \alpha = \int_0^\phi F O M \cos \alpha d\phi.$$

Т.к.  $OM \cos \alpha = h_0$ , а  $Fh_0 = |m_0(\bar{F})|$ ,

получим:

$$A_F = \pm \int_0^\phi |m_0(\bar{F})| d\phi. \quad (9.17)$$

При  $m_0(\bar{F}) = \text{const}$

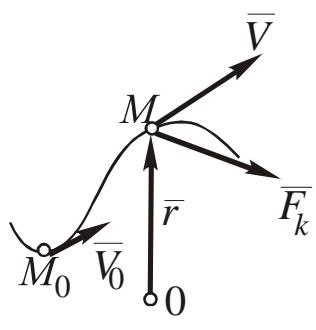
$$A_F = \pm m_0(\bar{F}) \Delta \phi, \quad (9.18)$$

где  $\Delta \phi$  – угловое перемещение тела; знак "+" выбирают, если поворот плеча силы  $\bar{F}$  совпадает с направлением  $\phi$  ( $\alpha < \pi/2$ ), "–" – в противном случае.

Работу пары сил с моментом  $m$  вычисляют аналогично (9.17) и (9.18)

$$A_m = \pm \int_0^\phi |m| d\phi; \quad A_m = \pm m \Delta \phi. \quad (9.19)$$

## 9.5. Теоремы динамики материальной точки



Данные теоремы определяют закономерности изменения мер движения материальной точки (см. п. 9.2): количества движения, кинетической энергии, кинетического момента. Все теоремы выводятся из основного закона динамики (рис. 9.16).

Рис. 9.16

Теорема об изменении количества движения МТ

$$\begin{aligned}
m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m d\bar{V} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k dt \Rightarrow \intop_{V_0}^V m d\bar{V} = \\
= \sum_{k=10}^t \int \bar{F}_k dt \Rightarrow m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{Fk},
\end{aligned} \tag{9.20}$$

т. е. изменение количества движения МТ за некоторый интервал времени равно векторной сумме импульсов всех действующих на нее сил за тот же интервал времени.

*Теорема об изменении кинетической энергии МТ*

$$\begin{aligned}
m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = m \frac{d\bar{V} \cdot d\bar{r}}{d\bar{s} \cdot dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{s} \Rightarrow \\
\Rightarrow \intop_{V_0}^V m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \sum_{k=1}^n \int \bar{F}_k \cdot d\bar{s} \Rightarrow \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{Fk},
\end{aligned} \tag{9.21}$$

т.е. изменение кинетической энергии МТ при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на нее сил на том же перемещении.

*Теорема об изменении кинетического момента МТ*

$$\begin{aligned}
m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow \bar{r} \times m\bar{a} = \sum_{k=1}^n (\bar{r} \times \bar{F}_k) \Rightarrow \bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k). \\
\text{Т.к. } \frac{d}{dt} [\bar{m}_0(m\bar{V})] = \frac{d}{dt} [\bar{r} \times m\bar{V}] = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} + \bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt},
\end{aligned}$$

получаем  $\frac{d}{dt} [\bar{m}_0(m\bar{V})] = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$ ,

в проекциях на любую ось  $z$ :

$$\frac{d}{dt} [m_z(m\bar{V})] = \sum m_z(\bar{F}_k), \tag{9.22}$$

т.е. производная по времени от кинетического момента МТ относительно центра (оси) равна векторной (алгебраической) сумме моментов всех действующих на нее сил относительно этого центра (оси).

Использование теорем (9.20)–(9.22) позволяет в ряде случаев сократить решение задач динамики МТ, поскольку они содержат результаты интегрирования дифференциального уравнения движения МТ.

## 9.6. Потенциальное силовое поле

*Потенциальной* называют силу  $\bar{F}$ , для которой существует *силовая функция*  $U(x, y, z)$ , при этом выполняется условие

$$dA_F = dU(x, y, z). \quad (9.23)$$

Вычисляя полную работу силы  $\bar{F}$  на перемещении из  $M_0$  в  $M_1$ , получаем:

$$A_F(M_0, M_1) = \int_{M_0}^{M_1} dU(x_1, y_1, z) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0, \quad (9.24)$$

т.е. работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции  $U$  в конечной  $M_1$  и начальной  $M_0$  точке и *не зависит от вида траектории*.

*Потенциальным силовым полем* называют физическое пространство, во всех точках которого существует силовая функция, т.е. действующая сила зависит только от положения (координат) точки.

Потенциальными являются силы тяжести и упругости. Определяем их силовые функции.

*Сила тяжести* (рис. 9.11).  $dA_F = -P dz$ ;

$$U = \int dA_F = -Pz + C_1.$$

Постоянную  $C_1$  можно определить для точки, соответствующей центру Земли ( $z = 0$ ,  $U = 0$ ) –  $C_1 = 0$ .

*Сила упругости* (рис. 9.14).  $dA_{F_y} = -c\lambda d\lambda$ ;

$$U = \int dA_{F_y} = -\frac{C\lambda^2}{2} + C_2.$$

Постоянную  $C_2$  можно определить для точки, соответствующей недеформированному состоянию пружины ( $\lambda = 0$ ,  $U = 0$ ) –  $C_2 = 0$ .

*Свойства потенциального силового поля.*

1. Определение силы  $\bar{F}$  по силовой функции  $U$ .

Воспользуемся аналитическим выражением элементарной работы  $dA_F$  и представим полный дифференциал  $dU$  через частные производные

$$\left. \begin{aligned} dA_F &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ dU &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (9.25)$$

выразим  $\bar{F}$  через проекции

$$\bar{F} = \bar{i} F_x + \bar{j} F_y + \bar{k} F_z = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U, \quad (9.26)$$

т.е. проекции  $\bar{F}$  равны частным производным от  $U$  по соответствующим координатам, а вектор  $\bar{F}$  – градиенту силовой функции.

2. Условие потенциальности силового поля.

Т.к. из (9.25)  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y}$  и  $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y}$ , то  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ .

Аналогично  $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$ . (9.27)

Используя операцию  $\text{rot } \bar{F}$ , получим с учетом (9.27):

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{F} &= \frac{\partial}{\partial r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \bar{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (9.28)$$

т.е. потенциально только *безвихревое* силовое поле.

3. Пусть существуют *поверхности равного уровня (потенциала)*, для которых  $U(x, y, z) = C = \text{const}$ . В соответствии с (9.26) вектор  $\bar{F}$  направлен по *нормали* к поверхности равного уровня в сторону возрастания функции  $U$ . Для точек  $A$  и  $B$  силового поля (рис. 9.17):

$$\left. \begin{aligned} U_2 - U_1 = C_2 - C_1 = A_{FA} = F_A \cdot \Delta h_A \\ U_2 - U_1 = C_2 - C_1 = A_{FB} = F_B \cdot \Delta h_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{\Delta h_B}{\Delta h_A},$$

т.е. величина  $\bar{F}$  пропорциональна густоте поверхности равного уровня.

4. Потенциальной энергией МТ в данной точке силового поля называют работу, которую совершают силы поля при перемещении МТ из этой точки в начальную (нулевую), в соответствии с (9.24):

$$\begin{aligned} P = A_F(M, M_0) &= U_0 - U = -U, \\ A_F(M_1, M_2) &= U_2 - U_1 = P_1 - P_2, \end{aligned} \quad (9.25)$$

т.е. потенциальная энергия МТ равна значению силовой функции

в данной точке с обратным знаком, а работа потенциальной силы равна разности потенциальных энергий МТ в ее начальном и конечном положениях.

Для силы тяжести  $P = -U = P_z$ .

Для силы упругости

$$P = -U = \frac{C\lambda^2}{2}.$$

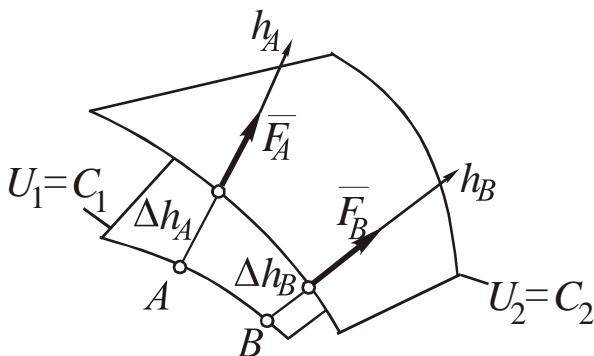


Рис. 9.17

## 9.7. Динамика относительного движения материальной точки

Пусть система отсчета  $Oxyz$ , в которой находится наблюдатель, не является инерциальной. Принимая ее за подвижную систему отсчета, инерциальную – за неподвижную, материальную точку  $M$  – за точку, используя понятия составного движения точки (п. 7.3), получим

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{к}}, \quad (9.30)$$

где  $\bar{a}$  – ускорение МТ относительно инерциальной системы от-

счета (абсолютное);  $\bar{a}_{\text{пер}}$  – ускорение МТ вместе с подвижной (неинерциальной) системой отсчета относительно инерциальной;  $\bar{a}_{\text{от}}$  – ускорение МТ относительно неинерциальной системы отсчета (относительное);  $\bar{a}_{\text{к}}$  – кориолисово ускорение.

Подставляя (1.30) в (1.2), получим:

$$\begin{aligned} m\bar{a} &= m\bar{a}_{\text{пер}} + m\bar{a}_{\text{от}} + m\bar{a}_{\text{к}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k ; \\ m\bar{a}_{\text{от}} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k - m\bar{a}_{\text{пер}} - m\bar{a}_{\text{к}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} + F_{\text{к}}^{\text{и}}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

где  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} = -m\bar{a}_{\text{пер}}$ ;  $F_{\text{к}}^{\text{и}} = -m\bar{a}_{\text{к}}$  – соответственно, переносная и кориолисова силы инерции.

Таким образом, основной закон динамики относительно неинерциальной системы отсчета *имеет тот же вид*, что и относительно инерциальной системы отсчета, если дополнительно ко всем действующим на МТ силам к ней приложить переносную и кориолисову силы инерции.

Частные случаи относительно движения МТ.

1. Переносное движение неинерциальной системы отсчета – *поступательное равномерное прямолинейное* ( $\omega_{\text{пер}} = 0$ ,  $a_{\text{пер}} = 0$ ):

Т.к.  $F_{\text{пер}}^{\text{и}} = ma_{\text{пер}} = 0$ ,  $\bar{F}_{\text{к}}^{\text{и}} = -m\bar{a}_{\text{к}} = -2m(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}}) = 0$ , то

$$m\bar{a}_{\text{от}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k ,$$

т.е. движение МТ относительно неинерциальной системы отсчета описывается тем же уравнением, что и относительно инерциальной.

Полученный результат представляет собой *принцип относительности* классической механики (открыт Г. Галилеем): никаким механическим опытом нельзя обнаружить, движется ли система отсчета поступательно равномерно прямолинейно или находится в покое. Другими словами, все системы отсчета, движущиеся поступательно равномерно прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, сами являются *инерциальными*.

2. *Относительный покой* ( $V_{\text{от}} = a_{\text{от}} = 0$ ).

Т.к.  $\bar{F}_k^{\text{и}} = -2m(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{от}}) = 0$ , уравнение (9.31) примет вид

$$0 = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}},$$

т.е. в уравнении относительно равновесия дополнительно по всем силам, приложенным к МТ, необходимо добавить переносную силу инерции.

## 10. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Механической системой* (МС) называют любую совокупность материальных точек (МТ), в которой положение и движение каждой из точек определенным образом связано с положением и движением остальных точек.

Реально механические системы состоят из твердых тел. Характерные примеры МС: механические часы (совокупность шестерен и стрелок), Солнечная система (совокупность Солнца и планет, связанных между собой силами притяжения).

### 10.1. Меры движения механической системы

Введем меры движения МС, аналогичные мерам движения МТ (п. 9.2): количество движения  $m\bar{V}$ , кинетическая энергия  $\frac{mV^2}{2}$ , кинетический момент  $m_0(m\bar{V})$ .

Пусть МС состоит из точек  $M_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), для которых известна масса  $m_k$  и положение, определяемое радиусом-вектором  $\bar{r}_k$  или координатами  $x_k, y_k, z_k$ .

Определим меры движения МС в зависимости от ее кинематического состояния.

1. В состоянии покоя инертность МС определяется ее массой и центром масс.

Масса МС равна сумме масс всех точек (тел), входящих в нее:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (10.1)$$

*Центр масс* МС – точка  $C$ , положение которой определяют аналогично положению центра тяжести тела (п. 2.6):

– радиус-вектор центра масс  $C$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M} \text{ или } M \bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k; \quad (10.2)$$

– координаты центра масс  $C$

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (10.3)$$

Беря первую и вторую производные по времени, из (10.2) можно получить:

$$M \frac{d\bar{r}_C}{dt} = M \bar{V}_C = \sum m_k \bar{V}_k \quad \text{и} \quad M \frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2} = M \bar{a}_C = \sum m_k \bar{a}_k. \quad (10.2')$$

*Примечание:* Понятие центра тяжести относится только к твердому телу, находящемуся в поле гравитации. Понятие центра масс значительно шире, т.к. его можно определить для любой механической системы, независимо от того, находится ли оно в каком-либо силовом поле.

2. При поступательном движении МС (тела), поскольку

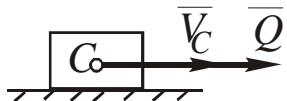


Рис. 10.1

движение всех точек одинаково,  $\bar{V}_k = \bar{V}_C$ , (п. 6.2), меры движения МС определяют путем суммирования соответствующих мер движения для МТ, входящих в МС (рис. 10.1):

– количество движения МС

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k = \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k) = \frac{d}{dt} (M \bar{r}_C) = M \bar{V}_C, \quad (10.4)$$

т.е.  $\bar{Q}$  при поступательном и других движениях МС (тела) равно произведению массы МС на скорость центра масс;

– кинетическая энергия МС

$$T = \sum m_k \frac{V_k^2}{2} = \frac{V_C^2}{2} (\sum m_k) = \frac{MV_C^2}{2}. \quad (10.5)$$

— кинетический момент (главный момент количества движения)

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0 (m_k \bar{V}_k) = \sum \bar{m}_0 (M \bar{V}_C) = \bar{r} \times M \bar{V}_C. \quad (10.6)$$

3. При вращательном движении МС (тела) параметров  $M$  и  $\bar{r}_k$  недостаточно для описания механической инертности тела. Это следует из мысленного опыта на рис. 10.2: для механических систем, состоящих из двух МТ (шариков) с массой  $m$ , находящихся на расстояниях  $h$  от оси вращения, в обоих случаях  $M = 2m$ , а  $\bar{x}_C = 0$ , в то же время установка справа более инертна, т.е. при приложении одинаковых врачающих сил она будет иметь меньшее угловое ускорение.

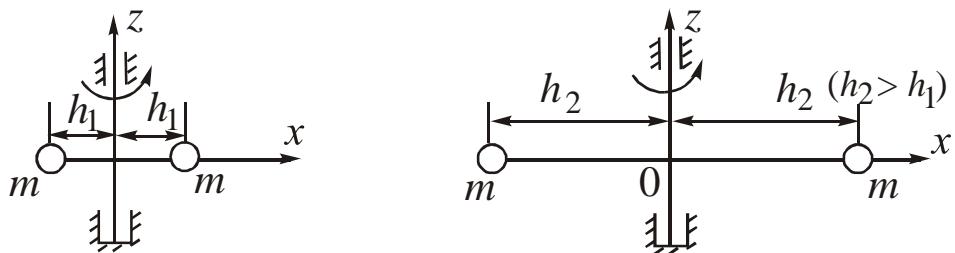


Рис. 10.2

Для учета распределения масс МТ, входящих в МС, относительно оси вращения  $z$  введено понятие *момента инерции* МС (тела) относительно оси:

– для МС, состоящей из  $n$  точек

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2, \quad (10.7)$$

где  $h_k$  – расстояние от  $k$ -й точки до оси  $z$ ;

– для тела, при  $n \rightarrow \infty$

$$J_z = \sum_{k=1}^{\infty} m_k h_k^2 = \int h^2 dm, \quad (10.7')$$

где  $M$  – масса тела.

Наряду с моментом инерции относительно оси  $J_z$  аналогично вводят моменты инерции относительно центра и плоскости (в настоящем пособии не рассматриваются).

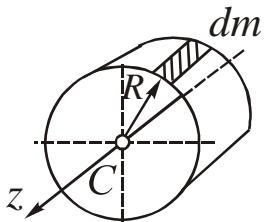


Рис. 10.3

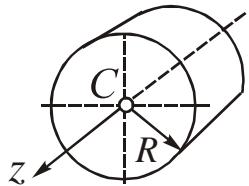
Момент инерции кольца (трубы) относительно оси симметрии (рис. 10.3)

$$J_{zC} = \int_M h^2 dm = R^2 \int_M dm = MR^2,$$

где  $R$  – радиус кольца (трубы).

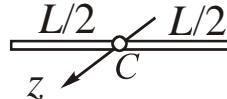
Ниже приведены без выводов моменты инерции некоторых симметричных тел, относительно осей, проходящих через центр масс  $C$  (рис. 10.4).

Круглая пластина  
(цилиндр, блок, колесо)



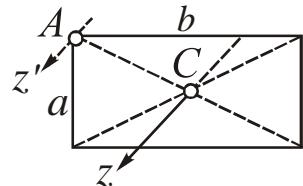
$$J_{zC} = \frac{1}{2}MR^2$$

Стержень



$$J_{zC} = \frac{1}{12}ML^2$$

Прямоугольная пластина



$$J_{zC} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

Рис. 10.4

Момент инерции тела относительно *произвольной оси*  $z'A$ , параллельной  $zC$  можно определить по теореме Штейнера (приводится без вывода):

$$J_{z'A} = J_{zC} + Md^2, \quad (10.8)$$

где  $d = AC$  – расстояние между осями  $z'A$  и  $zC$ .

Например, для прямоугольной пластины на рис. 10.4

$$J_{z'A} = J_{zC} + M \frac{(a^2 + b^2)}{4} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) + \frac{M}{4}(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2).$$

Для несимметричного тела момент инерции определяют экспериментально, а в условиях задач указывают величину *радиуса инерции*

$$i = \sqrt{\frac{J_z}{M}}, \quad (10.9)$$

т. е.  $i$  равно расстоянию от оси  $z$  до точки, в которой следует

сосредоточить массу  $M$  тела, чтобы получить момент инерции, равный  $J_z$ .

Единица размерности в СИ момента инерции  $J_z$  – кг·м<sup>2</sup>, радиуса инерции  $i$  – м.

Определим меры движения тела при вращательном движении (рис. 10.5):

$$\bar{Q} = M\bar{V}_C = 0;$$

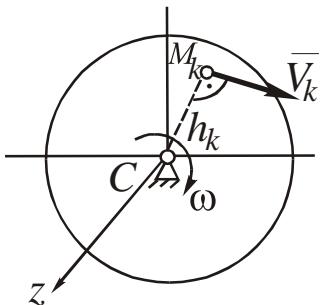


Рис. 10.5

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\omega h_k)^2 = \frac{1}{2} \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z C \omega^2. \quad (10.10)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k (m_k V_k) = \sum_{k=1}^n m_k (\omega h_k) h_k = \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = K_z C \omega. \quad (10.11)$$

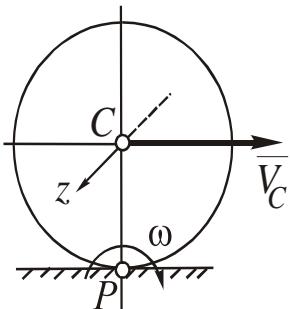


Рис. 10.6

4. При плоском движении МС (тела) меры движения определяют, учитывая, что это движение можно представить комбинацией поступательного движения со скоростью  $\bar{V}_c$  центра масс и вращательного с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 10.6):

$$\bar{Q}_{\text{пл}} = \bar{Q}_{\text{пост}} + \bar{Q}_{\text{вр}} = M\bar{V}_C.$$

$$T_{\text{пл}} = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_z C \omega^2. \quad (10.12)$$

## 10.2. Силы, действующие на механическую систему

Все силы, действующие на МС, разделяют на внешние и внутренние.

*Внешними*  $\bar{F}^e$  (от лат. *exterior*) называют силы, приложенные со стороны тел, не входящих в состав рассматриваемой МС, внутренними  $\bar{F}^i$  (от лат. *interior*) – силы взаимодействия между телами рассматриваемой МС.

Деление сил на внешние и внутренние условно, т.к. с изменением состава МС силы могут из внешних становиться внутрен-

ними и наоборот. Например, сила натяжения троса  $\bar{T}$ , соединяющего автомобиль А и прицеп П, будет внутренней для МС, состоящей из обоих тел, и внешней для МС, состоящей только из автомобиля или только из прицепа (рис. 10.7).

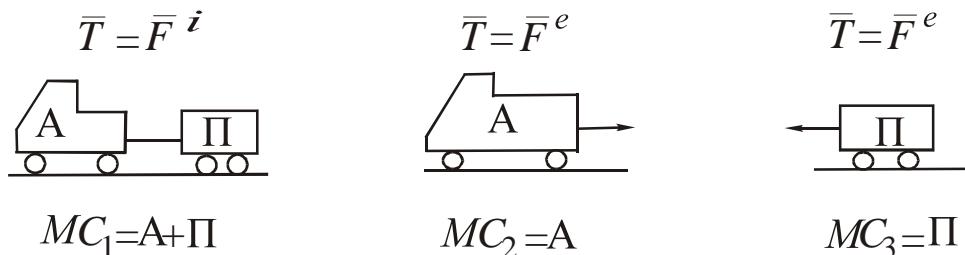


Рис. 10.7

Внутренние силы обладают весьма *важным свойством*: их векторная сумма (главный вектор) и сумма моментов (главный момент) относительно любого центра или оси равны нулю.

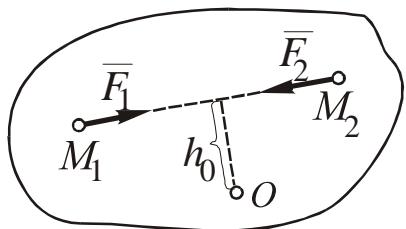


Рис. 10.8

Для доказательства этого свойства рассмотрим силы взаимодействия  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  точек  $M_1$  и  $M_2$  МС (рис. 10.8). Эти силы равны по модулю и противоположны. Их главный вектор и главный момент равны нулю.

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0; \quad \bar{m}_0(\bar{F}_1) + \bar{m}_0(\bar{F}_2) = 0.$$

Суммируя полученные выражения для всех  $n$  точек МС, получим выше сформулированное свойство:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = 0. \quad (10.13)$$

Все связи, действующие на МС, разделяют на *идеальные* и *реальные*.

*Идеальными* называют связи, работы реакций которых равны нулю при любом перемещении МС, *реальными* – остальные связи.\*

---

\*Общее понятие об идеальных связях определено в п. 12.3

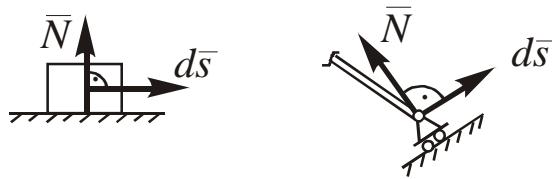


Рис. 10.9



Рис. 10.10

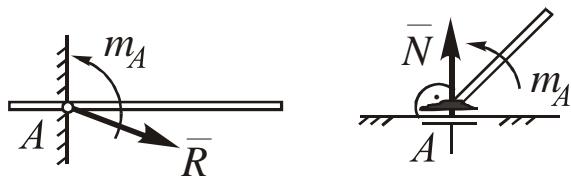


Рис. 10.11

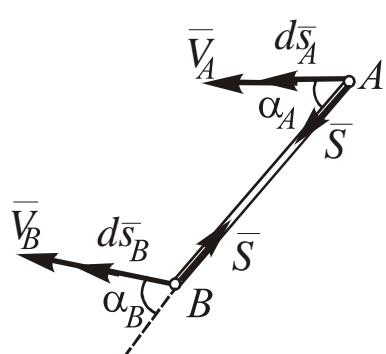


Рис. 10.12

Для оценки идеальности известных связей (п.1.3, 1.4) определим элементарные работы их реакций.

У гладких поверхностей и подвижных шарниров (рис. 10.9) реакция  $\bar{N}$  перпендикулярна элементарному перемещению  $d\bar{s}$ :

$$dA_N = \bar{N} \cdot d\bar{s} = 0.$$

У неподвижных шарниров (рис. 10.10) точка приложения реакции  $\bar{R}$  неподвижна ( $d\bar{s}_A = 0$ ):

$$dA_R = \bar{R} \cdot d\bar{s}_A = 0.$$

Заделки (рис. 10.11) не допускают угловых перемещений тел ( $d\phi = 0$ ):

$dA_m = m_A d\phi = 0$ , равенство нулю работ составляющих  $\bar{R}$  и  $\bar{N}$  показано выше.

У растянутой нити и стержня (рис. 10.12) проекции перемещений точек приложений реакций  $\bar{T}$  и  $\bar{S}$  на линию их действия равны (т.к. равны проекции соответствующих скоростей (п. 6.4, 3)).

$$dA_S = \bar{S} \cdot d\bar{s}_A + \bar{S} \cdot d\bar{s}_B =$$

$$= S ds_A \cos \alpha_A - S ds_B \cos \alpha_B = 0,$$

поскольку  $V_A \cos \alpha_A = V_B \cos \alpha_B$  и  $ds_A \cos \alpha_A = ds_B \cos \alpha_B$ .

По этой же причине нулю будет равна сумма элементарных работ внутренних сил в абсолютно твердых телах.

Системы, в которых расстояния между каждыми двумя

взаимодействующими точками постоянны, называют *неизменяемыми*. Для таких систем сумма работ внутренних сил равна нулю.

У связей с трением работы силы трения скольжения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и пары сил сопротивления качению  $M_C$  не нулевые (рис. 10.13, 10.14):

$$dA_{\text{тр}} = \bar{F}_{\text{тр}} \cdot d\bar{s} = -fmg \cos \alpha ds \neq 0;$$

$$dA_{MC} = M_C d\phi = -mg\delta d\phi \neq 0.$$

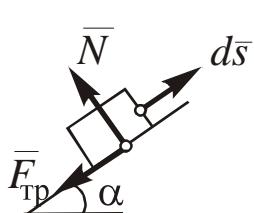


Рис. 10.13

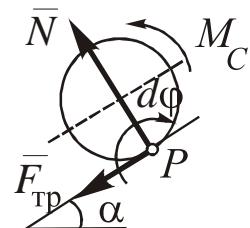


Рис. 10.14

При качении колеса без проскальзывания (рис. 10.14)  $ds_p = 0$ , т.к. точка  $P$  – мгновенный центр скоростей (п. 6.5.3),  $dA_{\text{тр}} = \bar{F}_{\text{тр}} d\bar{s}_p = 0$ , т.е. в данном единственном случае поверхность с трением скольжения является идеальной связью.

Таким образом, все известные связи *без трения идеальные*, а поверхности с трением – *реальные*, за исключением поверхности с трением скольжения при качении по ней колеса без проскальзывания.

### 10.3. Теоремы динамики механической системы

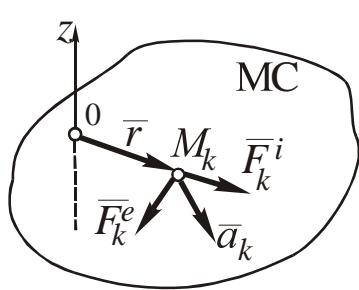


Рис. 10.15

Данные теоремы определяют закономерности изменения мер движения МС (см. п. 2.1): ускорения центра масс, количества движения, кинетической энергии, кинетического момента.

Рассмотрим МС, состоящую из  $n$  точек (рис. 10.15). Для произвольной точки  $M_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) известны

масса  $m_k$  и равнодействующие внешних  $\bar{F}_k^e$  и внутренних  $\bar{F}_k^i$  сил. Известны также начальные условия движения МС.

*Теорема о движении центра масс* МС. Для точки  $M_k$  основной закон динамики имеет вид

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

После суммирования уравнений для всех точек МС получим

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

С учетом того, что

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum m_k \bar{r}_k \right) = \frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = M \bar{a}_C,$$

а  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0$  по свойству (10.13), получим окончательно

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e, \quad (10.14)$$

т.е. произведение массы МС на вектор ускорения ее центра масс равно векторной сумме всех действующих на нее внешних сил.

*Примечания.* 1. Т.к. при поступательном движении МС (тела) ускорение  $\bar{a}_C$  является общим для всех точек, то из сравнения (10.14) с (10.2) следует, что движение МТ и тела описываются одинаковыми уравнениями, значит, данное тело можно заменить МТ (ранее в п. 9.2 это было принято без доказательства).

2. Закон сохранения движения центра масс МС следует из (10.14) в векторной форме или в проекциях на произвольную ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e &= 0 \Rightarrow M \bar{a}_C = 0 \Rightarrow \bar{V}_C = \text{const}; \\ \sum_{k=1}^n F_k^e_x &= 0 \Rightarrow M a_{Cx} = 0 \Rightarrow V_{Cx} = \text{const}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

т.е. если векторная сумма внешних сил (их проекций на ось) равна нулю, то скорость центра масс МС (ее проекция на ось) постоянна по величине и направлению (знаку).

3. Закон изменения количества движения МС получают путем интегрирования (10.14):

$$\begin{aligned} M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \int_{V_0}^V M d\bar{V}_C = \sum_{k=1}^n \int_0^t \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \\ \Rightarrow M\bar{V} - M\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{Fk}^e \Rightarrow \bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{Fk}^e, \end{aligned} \quad (10.16)$$

т.е. изменение количества движения МС за некоторый интервал времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил за этот интервал времени.

Теорема об изменении кинетической энергии МС. Для точки  $M_k$  теорема об изменении кинетической энергии имеет вид (9.21)

$$\frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{m_k V_{k0}^2}{2} = A_{Fk}^e + A_{Fk}^i,$$

после суммирования уравнений для всех точек МС получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{k0}^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{Fk}^e + \sum_{k=1}^n A_{Fk}^i \Rightarrow T - T_0 = \sum A_{Fk}, \quad (10.17)$$

т.е. изменение кинетической энергии МС при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех приложенных внешних и внутренних сил на этом перемещении.

*Примечания.* 1. При решении задач из уравнения (10.17) следует исключить работы реакций идеальных связей и внутренних сил неизменяемых систем (см. п. 10.2).

2. Закон сохранения механической энергии МС. Если все действующие на МС силы потенциальны (см. п. 9.6) в соответствии с (9.29) и (10.17)

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_{Fk} = \Pi_0 - \Pi \Rightarrow \Pi + T = \Pi_0 + T_0, \quad (10.18)$$

т.е. при движении МС (в частном случае, МТ) под действием потенциальных сил сумма потенциальной и кинетической энергии МС не изменяется.

МС, для которых выполняется закон (10.18) называют *консервативными*. При наличии в МС сил сопротивления (трения)

происходит уменьшение механической энергии МС на величину работ этих сил (механическая энергия переходит в тепловую, химическую и др. виды энергии), такие МС называют *диссипативными*.

Теорема *об изменении кинетического момента МС*. Для точки  $M_k$  теорема об изменении кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_0(m_k \bar{V}_k)] = \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_0(\bar{F}_k^i),$$

после суммирования уравнений для всех точек МС, приравнивая нуль главный момент внутренних сил, получим

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n m_0(m_k \bar{V}_k) \right] = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) \Rightarrow \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k^e), \quad (10.19)$$

в проекциях на произвольную ось  $z$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^e), \quad (10.19')$$

т.е. производная по времени от кинетического момента МС относительно центра (оси) равна векторной (алгебраической) сумме моментов всех действующих на МС внешних сил относительно этого центра (оси).

*Примечания.* 1. Закон *сохранения кинетического момента* МС следует из (10.19) или (10.19'):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) &= 0 \Rightarrow \bar{K}_0 = \text{const}; \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^e) &= 0 \Rightarrow K_z = \text{const}, \end{aligned} \quad (10.20)$$

т.е. если векторная (алгебраическая) сумма моментов внешних сил МС относительно центра (оси) равна нулю, то кинетический момент МС относительно этого центра (оси) постоянен по величине и направлению (знаку).

2. *Дифференциальное уравнение вращательного движения тела.* Для твердого тела в соответствии с (10.11)  $K_z = J_z \omega$ , где  $J_z = \text{const}$ . Из (10.19') получим

$$d \frac{J_z \omega}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (\bar{F}_k^e) \Rightarrow J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = \sum_{k=1}^n m_z (\bar{F}_k^e), \quad (10.21)$$

т.е. произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно алгебраической сумме моментов внешних сил относительно этой оси.

Уравнение (10.21) является аналогом основного закона динамики (9.2) для МТ.

#### 10.4. Проявление законов динамики механической системы в физических явлениях

Теоремы и законы динамики позволяют объяснить целый ряд механических процессов, происходящих в быту и технике. Ниже приведены несколько примеров.

*Ведущее и ведомое колесо.* Ведущим является колесо самодвижущегося транспортного средства, с которым механически соединен двигатель.

Для исследования движения автомобиля (рис. 10.16) при разгоне воспользуемся теоремой о движении центра масс (10.14):

$$M \bar{a}_{C1} = \bar{P}_1 + \bar{N}_1 + \bar{F}_{\text{тр1}}, \quad (10.22)$$

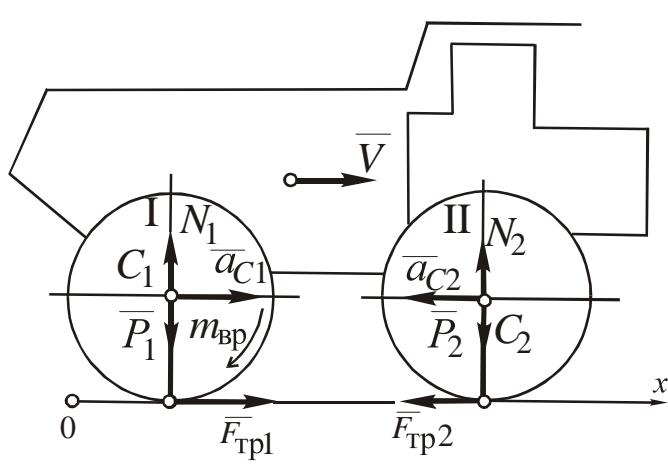


Рис. 10.16  
После проецирования (10.22) на ось  $x$ , параллельную траектории поступательного движения автомобиля, получим

$$M a_{C1} = F_{\text{тр1}} = f N_1. \quad (10.22')$$

где  $M$  – масса автомобиля,  $\bar{a}_{C1}$  – ускорение центра масс ведущего колеса I.

Пара сил  $\Pi(m_{\text{вр}})$ , передаваемая от двигателя, является внутренней силой данной МС, поэтому она не входит в (10.22).

После проецирования

При торможении для ведомого колеса II аналогично имеет место

$$M\bar{a}_{C2} = \bar{P}_2 + \bar{N}_2 + \bar{F}_{\text{тр}2} \text{ и } Ma_{C2} = F_{\text{тр}2} = f N_2. \quad (10.23)$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Эффективность разгона и торможения (величина ускорения или замедления  $\bar{a}_C$ ) пропорциональна реакции  $N$ , равной соответствующей части веса, приходящейся на ведущее или ведомое колесо. В железнодорожном транспорте "цепной вес" является основной тяговой характеристикой локомотива. В невесомости ( $P = N = 0$ ) колесный привод неработоспособен, т.к. невозможны ни разгон, ни торможение.

2. Величина  $\bar{a}_C$  пропорциональна  $f$ , ограничена его предельным значением и не зависит от  $m_{\text{вр}}$ , при  $f \rightarrow 0$  разгон и торможение невозможны (будет происходить соответственно "буксование" или "блокировка" колес).

*Вибрация.* Электродвигатель (рис. 10.17) состоит из двух основных элементов: статора 1 и ротора 2. Для исследования движения данной МС используем теорему о движении центра масс (10.14):

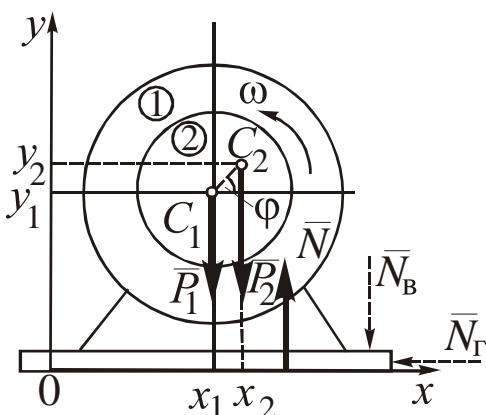


Рис. 10.17

$$M\bar{a}_C = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{N}, \quad (10.24)$$

где учтено, что электромагнитные силы, реакции шарниров и трение в них – внутренние силы МС, крепление и трение опорной поверхности отсутствует.

Проецируем (10.24) на оси  $x$  и  $y$ :

$$(x): Ma_{Cx} = 0; \quad (y): Ma_{Cy} = N - P_1 - P_2. \quad (10.25)$$

Из (10.25) следует

$$Ma_{Cx} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x}; \quad Ma_{Cy} = m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y}. \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} a_{1x} &= \ddot{x}_1; \quad a_{2x} = \ddot{x}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + C_1 C_2 \cdot \cos \alpha) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2}[x_1 + C_1 C_2 \cdot \cos(\omega t)] = \ddot{x}_1 - C_1 C_2 \omega^2 \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} a_{1y} &= \ddot{y}_1; \quad a_{2y} = \ddot{y}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(y_1 + C_1 C_2 \cdot \sin \alpha) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2}[y_1 + C_1 C_2 \cdot \sin(\omega t)] = \ddot{y}_1 - C_1 C_2 \omega^2 \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (10.28)$$

где  $\omega$  – угловая скорость ротора 2;  $C_1 C_2 = \delta$  – "дисбаланс" ротора, возникающий за счет неточностей при изготовлении или износа.

Подставляя (10.27) и (10.28) в (10.26), получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 - m_2 \delta \omega^2 \cos(\omega t) = 0; \quad (10.29)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_1 - m_2 \delta \omega^2 \sin(\omega t) = N - P_1 - P_2. \quad (10.30)$$

Из (10.29) следует  $\ddot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \delta \omega^2 \cos(\omega t)$ , после двойного

интегрирования при нулевых начальных условиях

$$x_1 = x_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \delta \cos(\omega t), \quad (10.31)$$

т.е. статор 1 будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega$ .

Из (10.30) при  $y = \text{const}$  следует

$$N = P_1 + P_2 - m_2 \delta \omega^2 \sin(\omega t), \quad (10.32)$$

т.е. при определенных условиях (значениях  $m_2$ ,  $\delta$  и  $\omega$ ) возможно достижение предельного состояния ( $N = 0$ ), за которым двигатель начнет подпрыгивать с частотой  $\omega$ .

При закреплении статора 1 болтами вибрация прекратиться ( $x_1, y_1 = \text{const} \Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$ ), в уравнения (10.25) следует добавить проекции сил  $\bar{N}_g$  и  $\bar{N}_v$  (составляющих реакций болтов). В частности, с учетом (10.29) получим величину срезающего усилия:

$$N_G = m_2 \delta \omega^2 \cos(\omega t). \quad (10.33)$$

Результаты расчетов позволяют сделать следующие практические выводы.

1. Согласно (10.33) снижение срезающего усилия  $\bar{N}_G$  при заданных конструктивных параметрах  $m_2$  и  $\omega$  возможно только за счет снижения дисбаланса ротора  $\delta$  (полное его устранение технически невозможно) балансировкой или заменой изношенных подшипников.

2. Согласно (10.31) уменьшение амплитуды вибрации можно обеспечить увеличением массы  $m_1$ , соединяя статор 1 с массивным фундаментом.

Рассмотрено явление вибрации имеет не только отрицательные последствия, на нем основан принцип действия разного рода вибраторов, питателей, отбойных молотков, перфораторов и пр.

*Вращение фигуриста* (рис. 10.18). Применяем теорему об изменении кинетического момента МС относительно оси (10.19') для случая твердого тела (10.21):

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = m_z(\bar{P}) + m_z(\bar{N}) + m_z(\bar{N}') = 0,$$

откуда  $J_z \omega = \text{const.}$

(10.34)

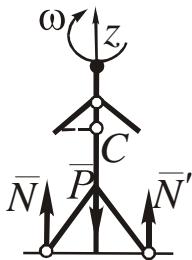


Рис. 10.18

При резком прижатии к телу рук и соединении ног момент инерции  $J_z$  фигуриста резко уменьшается, что приводит в силу (10.34) к пропорциональному увеличению  $\omega$ , т.е. скорость вращения резко возрастает при отсутствии внешнего воздействия.

## 10.5. Принцип Даламбера

Принцип *Даламбера* позволяет записать уравнения движения материальной точки и механической системы, аналогичные по форме уравнениям равновесия, полученным в статике (п. 3).

### 10.5.1. Принцип Даламбера для материальной точки

Преобразуем уравнение (9.2) в уравнение равновесия, учитывая силу инерции  $M\bar{a}$

$$\bar{F}^{\text{и}} = -m\bar{a}. \quad (10.35)$$

Сила  $\bar{F}^{\text{и}}$  имеет вполне определенные линию действия и направление, размерность соответствует размерности силы ( $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2 = \text{Н}$ ), следовательно проведенная замена правомерна. С учетом (10.35) получаем

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{F}^{\text{и}} = 0, \quad (10.36)$$

т.е. если к движущейся точке дополнительно ко всем действующим на нее силам приложить ее силу инерции, то полученная система сил будет уравновешена (рис. 10.19, а).

Применение полученного принципа Даламбера для решения задач динамики сводится к реализации условий равновесия системы сходящихся сил (п. 3.1):

в аналитической форме в виде уравнений равновесия

$$\sum F_{kx} + F_x^{\text{и}} = 0; \quad \sum F_{ky} + F_y^{\text{и}} = 0; \quad \sum F_{kz} + F_z^{\text{и}} = 0; \quad (10.37)$$

в графической форме построением замкнутого силового многоугольника (рис. 10.19, б).

Для выяснения физического смысла силы инерции рассмотрим силы взаимодействия точки  $M$  с телами 1 и 2.

Из рис. 10.20 следует  $\bar{F}^{\text{и}} = \bar{F}_1' + \bar{F}_2'$ , т.е. сила инерции МТ равна векторной сумме сил противодействия телам, вызывающим ее ускорение. Иными словами, сила  $\bar{F}^{\text{и}}$  не является физической силой (в некоторых учебниках ее называют "фиктив-

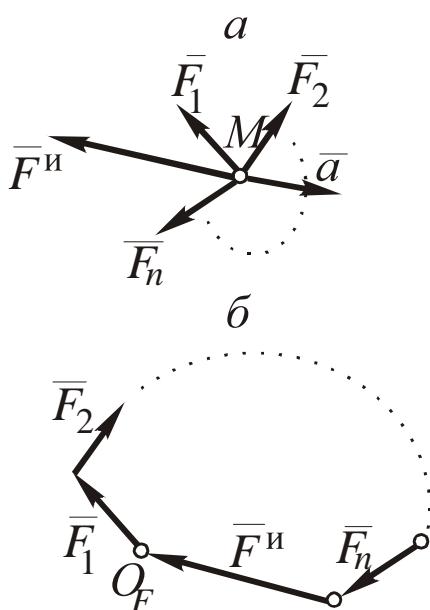


Рис. 10.19

ной"), т.к. силы  $\bar{F}_1'$  и  $\bar{F}_2'$  реально приложены соответственно к

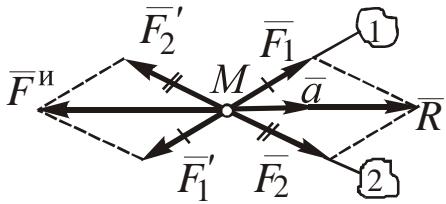


Рис. 10.20

приложением каких-либо дополнительных сил. Применение же (10.36) позволяет лишь удобнее производить необходимые динамические расчеты.

В частности, при движении мотоциклиста на вираже радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $\bar{V}$ , сила инерции (центробежная сила) определится из (10.35):

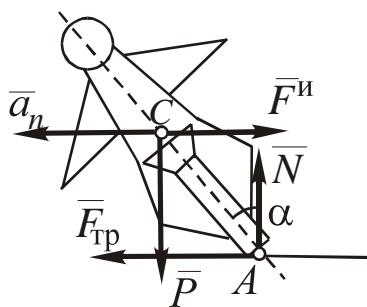


Рис. 10.21

$$\bar{F}^u = -m\bar{a} = -m\bar{a}_n; \quad F^u = ma_n = m \frac{\bar{V}^2}{R}.$$

Рассматривая равновесие системы сил, приложенных к мотоциклиstu (рис. 10.21) и составляя уравнение равновесия, получим

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = PAC \sin \alpha - F^u AC \cos \alpha = 0,$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{V^2}{Rg} \text{ или } \alpha = \arctg \frac{V^2}{Rg}, \text{ т.е.}$$

отклонение корпуса гонщика от вертикали, необходимое для удержания равновесия на вираже, пропорционально  $V^2$  и обратно пропорционально  $R$ .

### 10.5.2. Принцип Даламбера для механической системы

Применим принцип Даламбера (10.36) к  $k$ -й точке МС:

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u = 0. \quad (10.38)$$

Суммируя (10.38) для всех точек МС и учитывая свойство внутренних сил (10.13), получим

$$\sum_{k=1}^n F_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^u = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^u = 0, \quad (10.39)$$

т.е. если дополнительно ко всем действующим на МС внешним силам к ней приложить силы инерции всех ее точек, полученная система сил *будет уравновешенной*.

При решении задач полученный принцип Даламбера для МС реализуют в форме уравнений равновесия:

для произвольной плоской системы сил (п. 3.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n F_{kx}^u &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n F_{ky}^u &= 0; \\ \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k^u) &= 0; \end{aligned} \quad (10.40)$$

для произвольной пространственной системы сил (п. 3.4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_{kx}^e + F_{kx}^u) &= 0; \quad \sum_{k=1}^n [m_x(\bar{F}_k^e) + m_x(\bar{F}_k^u)] = 0; \\ \sum_{k=1}^n (F_{ky}^e + F_{ky}^u) &= 0; \quad \sum_{k=1}^n [m_y(\bar{F}_k^e) + m_y(\bar{F}_k^u)] = 0; \\ \sum_{k=1}^n (F_{kz}^e + F_{kz}^u) &= 0; \quad \sum_{k=1}^n [m_z(\bar{F}_k^e) + m_z(\bar{F}_k^u)] = 0. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Если МС состоит из твердых тел, для каждого из них путем приведения сил инерции к центру масс  $C$  (п. 3.3) получают главный вектор  $\bar{R}^u$  и пару сил с моментом, равным главному моменту  $M^u$  сил инерции:

$$\bar{R}^u = \sum_{k=1}^n F_k^u = - \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = -M \bar{a}_C; \quad (10.42)$$

$$M^u = \sum_{k=1}^n m_C (\bar{F}_k) = - \sum_{k=1}^n m_C (m_k \bar{a}_k)$$

Определим  $\bar{R}^u$  и  $M^u$  при простейших движениях тела:

– вращательное относительно оси, проходящей через центр масс  $C$  (рис. 10.22)

$$\bar{R}^u = -Ma_C = 0, \text{ т.к. } a_C = 0;$$

$$\begin{aligned} M^u &= - \sum_{k=1}^n m_C (m_k \bar{a}_k) = - \sum_{k=1}^n m_C (m_k \bar{a}_k^\tau) = \\ &= - \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon h_k h_k = -\varepsilon \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = -J_{zC} \varepsilon; \end{aligned} \quad (10.43)$$

– поступательное (рис. 10.23)

$$\bar{R}^u = M \bar{a}_C;$$

$$M^u = -J_{zC} \varepsilon = 0, \text{ т.к. } \varepsilon = 0; \quad (10.44)$$

– плоскопараллельное (рис. 10.24) рассматриваем его как комбинацию поступательного и вращательного движений вокруг полюса  $C$

$$\bar{R}^u = \bar{R}_{\text{пост}}^u + \bar{R}_{\text{вр}}^u = -M \bar{a}_C;$$

$$M^u = M_{\text{пост}}^u + M_{\text{вр}}^u = -J_{zC} \varepsilon. \quad (10.45)$$

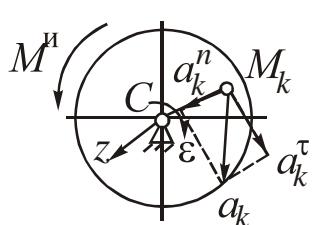


Рис.10.22

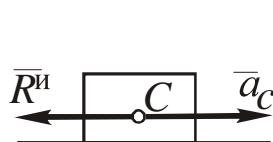


Рис.10.23

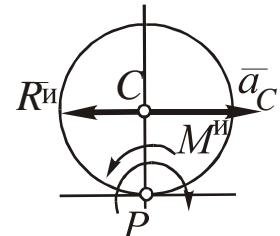


Рис.10.24

## 10.6. Элементы теории удара

### 10.6.1. Основное положение теории удара

*Ударом* называют механическое явление, при котором за скорости точек тела за близкий к нулю интервал времени изменяются на конечную величину.

Для материальной точки, участвующей в ударе (тела при поступательном движении) можно применить теорему об изменении количества движения (основное уравнение удара)

$$m(\bar{U} - \bar{V}) = \bar{S} = \bar{F}_y \tau,$$

где  $m$  – масса точки (тела);  $\bar{U}, \bar{V}$  – скорости точки (центра масс тела) соответственно после и до удара;  $\bar{S}$  – импульс ударной силы  $\bar{F}_y$ ;  $\tau$  – временный интервал удара.

Основные допущения теории удара состоят в следующем:

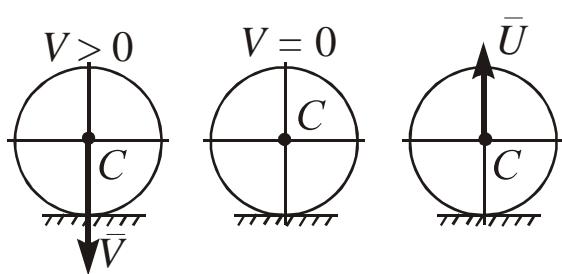


Рис. 10.25

- импульсы обычных (неударных) сил за бесконечно малый интервал времени пренебрежимо малы;
- перемещения точек тела (его деформирование) в процессе удара (рис. 10.25) можно не учитывать, а упругость тела (способность к восстановлению формы и размеров) количественно оценивается коэффициентом восстановления  $K = \frac{U}{V}$ ,  $K = 0 \dots 1$ .

Величина  $K$  может принимать следующие характерные значения:

- $K = 1$  – абсолютно упругий удар ( $U = V$ );
- $K = 0$  – абсолютно неупругий удар ( $U = 0$ );
- $K > 1$  – упругий удар, величина  $K$  зависит от материала соударяющихся тел, для дерева  $K = 0,5$ , для стали  $0,56$ , для стекла  $0,94$ ).

### 10.6.2. Удар тела о неподвижную поверхность

*Центральным* называют удар, при котором нормаль  $n$  к поверхности проходит через центр масс  $C$  тела.

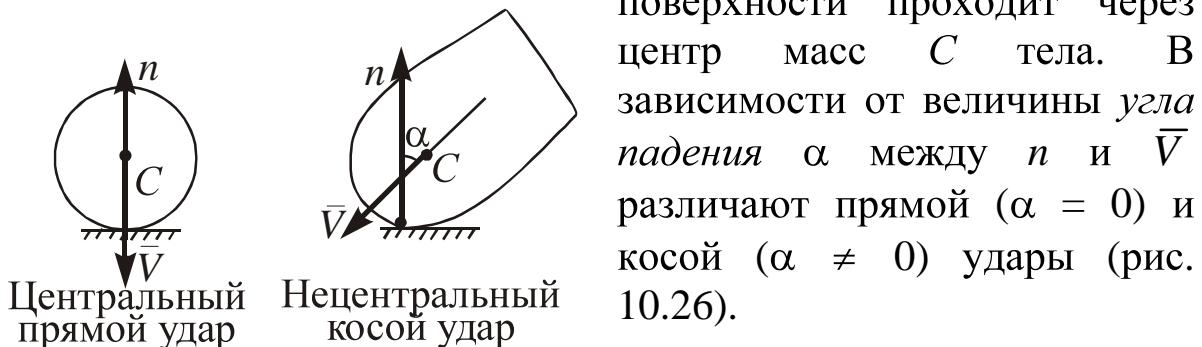


Рис. 10.26

При *прямом центральном* ударе (рис. 10.27) в проекциях на нормаль  $n$  из основного уравнения удара следует:

$$S = m(U + V) = mV(K + 1).$$

При *косом центральном* ударе (рис. 10.28) в проекциях на нормаль  $n$   $\div m(U_n - V_n) = S$ , на касательную  $\tau \div m(U_\tau - V_\tau) = 0$ ,  $U_n = KV_n$ ,  $U_\tau = V_\tau$ .

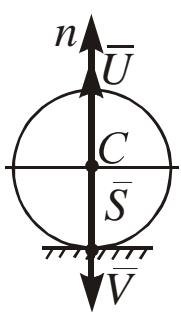


Рис. 10.27

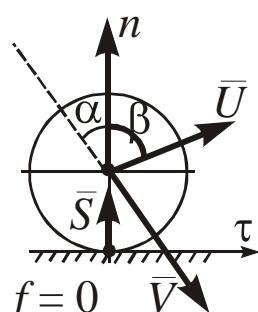


Рис. 10.28

Учитывая, что  $U_\tau = V_n \operatorname{tg} \alpha$  и  $V_\tau = V_n \operatorname{tg} \beta$ , можно получить:

$$S = mV_n(K + 1); \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{K},$$

где  $\beta$  – угол отражения.

При  $K = 1 \div \alpha = \beta$ , при  $K = 0$ :  $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \infty$ , т. е.  $\beta = \pi/2$

### 10.6.3. Соударение двух тел

Рассмотрим скорости тел до удара (в момент  $t_0$ ) и после удара ( $t_1$ ) (рис. 10.29)

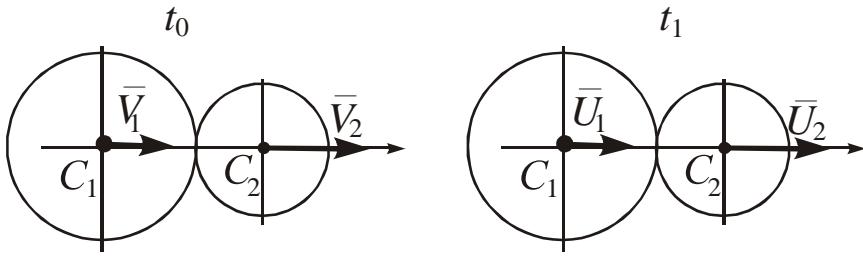


Рис. 10.29

Поскольку в системе, включающей 2 тела, отсутствуют внешние ударные силы, количество движения системы не изменяется:

$$Q_0 = Q_1, \text{ т. е. } m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2.$$

Коэффициент восстановления  $K$  можно определить через отношение разностей конечных и начальных скоростей:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2}$$

При *абсолютно неупругом* ударе ( $K = 0$ ):

$$U_2 = U_1 = \frac{m_1 V_1 - m_2 U_2}{m_1 + m_2}; \quad S_2 = S_1 = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2}.$$

$$\text{При } m_1 = m_2 = m: \quad U_2 = U_1 = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad S_2 = S_1 = \frac{m}{2} (V_1 - V_2).$$

При *абсолютно упругом* ударе ( $K = 1$ ):  $U_2 - U_1 = V_1 - V_2$ , после преобразований конечные скорости тел будут равны

$$U_1 = V_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \text{ (при } U_1 < V_1\text{);}$$

$$U_2 = V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \text{ (при } U_2 > V_2\text{).}$$

При  $m_1 = m_2 = m$ :  $U_2 = V_1$ ,  $U_1 = V_2$ , т. е. тела при соударении обмениваются скоростями:

$$S_2 = S_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2).$$

Таким образом, импульс ударной силы при  $K = 1$  вдвое больше, чем при  $K = 0$ .

Определим изменение кинетической энергии механической системы при абсолютно неупругом ударе ( $K = 0$ ).

$$2T_0 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2;$$

$$2T_1 = (m_1 + m_2)U^2 = (m_1 V_1 + m_2 V_2)U.$$

С учетом записанных уравнений можно вычислить изменение кинетической энергии системы после удара:

$$T_0 - T_1 = T_0 + T_1 - 2T_1 = \frac{1}{2}m_1(V_1 - U)^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2 - U)^2,$$

где  $V_1 - U$ ,  $V_2 - U$  – потерянные скорости тел.

Полученное выражение формулируется как *теорема Карно*: кинетическая энергия, потеряная при абсолютно неупругом ударе двух тел, равна кинетической энергии системы при движении ее тел с потерянными скоростями.

При  $K = 1$  потери энергии нет ( $T_0 - T_1 = 0$ ), при  $0 < K < 1$  эта величина имеет промежуточное значение.

При *абсолютно неупругом* ( $K = 0$ ) *ударе по неподвижному телу* ( $V_2 = 0$ ):

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)U^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 V_1^2}{m_1 + m_2};$$

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = T_0 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Частные случаи:

– молоток забивает гвоздь ( $m_1 \gg m_2$ ) –  $T_0 - T_1 = 0$ , т. е. потери энергии не происходит, хотя удар абсолютно неупругий;

– удар молотка по наковальне ( $m_1 \ll m_2$ ) –  $T_0 - T_1 = T_0$ , т. е. вся энергия молотка уходит на пластическую деформацию поковки, находящейся на наковальне.

## 11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

### 11.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Метод интегрирования дифференциальных уравнений движения МТ является универсальным, позволяющим решить любую обратную задачу динамики МТ.

Порядок решения следующий.

1. *Определить, можно ли считать рассматриваемое в задаче тело МТ.* Если это не оговорено специально в условии задачи, замена тела на МТ возможна только при его поступательном движении, в противном случае следует применять теоремы динамики МС (п. 11.3).

#### *2. Составление чертежа*

*При прямолинейном движении МТ* выбирают ось, совпадающую с траекторией МТ, на траектории указывают начальное  $M_0$  и фиксированные ( $M_1, M_2$  и т.д.) положения точки, в пояснениях к чертежу указывают данные об этих положениях (момент времени, координату, скорость МТ). При этом удобно, если это не противоречит условию, за начало движения принимать начало координатной оси. В заключение указывают промежуточное  $M$  положение МТ и действующие на нее силы, включая реакции связей (если действующие силы на различных интервалах изменяются, следует указать несколько промежуточных положений), в пояснениях указывают данные об этих силах.

*При криволинейном движении МТ* в плоскости или пространстве изображают соответствующую прямоугольную систему координат и произвольную траекторию МТ. В остальном правила составления чертежа не отличаются от случая прямолинейного движения.

#### *3. Составление расчетного уравнения (уравнений)*

Записывают основной закон динамики (9.2) в векторной форме и проецируют его на оси, выбранные в поз. 2. Получают расчетное уравнение (для прямолинейного движения) или их систему (для криволинейного движения).

#### *4. Интегрирование расчетных уравнений*

Заменяя в расчетных уравнениях проекции ускорения МТ на производные по времени от проекций скорости и подставляя функции сил, получают дифференциальные уравнения движения.

Решение дифференциальных уравнений обычно производят *методом разделения переменных*, для чего путем алгебраических преобразований добиваются того, чтобы переменные  $V$  и  $t$  находились в разных частях уравнения. Если в уравнении окажется три переменных  $V$ ,  $t$  и  $x$  (в случаях, когда сила – функция координаты  $x$ ) применяют следующее преобразование переменной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dV}{dx} = V \frac{dV}{dx}. \quad (11.1)$$

После разделения переменных устанавливают пределы интегрирования, которые соответствуют начальному  $M_0$  и конечно-му  $M_1$  значению переменной на соответствующем интервале интегрирования. Взяв интегралы, подставляют в полученную функцию пределы интегрирования. Если применяют неопределенное интегрирование, то для полученного общего решения находят постоянную интегрирования, подставляя в уравнение начальное или конечное значение времени (координаты) и соответствующие ему значение переменной.

Если для решения задачи требуется выразить скорость МТ как функцию  $t$ , в предыдущих интегралах следует заменить постоянные пределы интегрирования на переменные (т.е. перейти к интегрированию на интервале от начального положения  $M_0$  до промежуточного  $M$ ). Заменяя  $V$  на  $\frac{dx}{dt}$ , интегрирование повторя-  
ют.

В отдельных случаях (например, при гармонических колебаниях точки), удобно представить расчетное уравнение как *типовое дифференциальное уравнение* второго порядка и сразу записать его общее решение, составив характеристическое уравнение и определив его корни.

## 5. Нахождение неизвестных и анализ полученных результатов

Неизвестные находят из уравнений, полученных в результате интегрирования, или путем решения их системы.

В отдельных задачах для уяснения результата необходимо построение графиков полученных функций.

*Пример 1.* Поезд массы  $m$ , начав движение на подъем под углом  $\alpha$  с постоянной силой тяги  $F$  при приведенном коэффициенте трения  $f$ , прошел расстояние  $l$ . Определить время, через которое он остановится после выключения двигателя.

*Решение.* 1. Движение поезда поступательное, поэтому его можно принять за МТ.

2. Выбираем ось  $x$ , направленную по траектории МТ под углом  $\alpha$  к горизонту. Начало движения  $M_0$  совмещаем с началом 0 оси  $x$ . Указываем на оси  $x$  два фиксированных положения МТ:  $M_1$  – момент отключения двигателя,  $M_2$  – момент остановки. Об

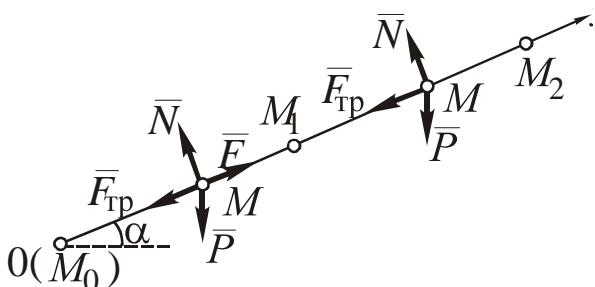


Рис. 11.1

этих положениях в условии есть следующая информация:  $t_0 = 0; x_0 = 0; V_0 = 0; x_1 = l; V_2 = 0; t_2 - t_1 = ?$  (интервал  $\Delta t = t_2 - t_1$  необходимо найти). Остальные данные неизвестны и их не надо искать  $\bar{P}$  (рис. 11.1).

На интервале  $M_0M_1$  к точке  $M$  приложены силы,  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и  $\bar{F}$ , на интервале  $M_1M_2$  –  $\bar{P}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$ . Все силы постоянны по направлению и величине:  $P = mg$ ,  $N = mg \cos \alpha$ ,  $F_{\text{тр}} = fN$ ,  $F = \text{const}$ .

3. Основной закон динамики в векторной форме имеет вид

$$\text{для участка } M_0M_1: m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{F};$$

$$\text{для участка } M_1M_2: m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}};$$

в проекциях на ось  $x$

$$M_0M_1: ma = -P \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) + F;$$

$$M_1M_2: ma = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

4. Поскольку в задаче необходимо отыскать интервал времени  $t_2 - t_1$ , рассмотрим движение МТ на участке  $M_1M_2$ .

$$ma = m \frac{dV}{dt} = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Для разделения переменных умножением обе части на  $dt$ :

$$dV = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)dt.$$

Пределы интегрирования соответствуют положениям  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \int_{t_1}^{t_2} dt.$$

После интегрирования и подстановки пределов ( $V_2 = 0$ ), получим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{V_1}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}. \quad (11.2)$$

Т.к.  $V_1$  неизвестно, необходимо интегрирование дифференциального уравнения на участке  $M_0M_1$ . Поскольку известен не момент  $t_1$ , а координата  $x_1$ , необходимо перейти в дифференциальном уравнении к переменной  $x$  в соответствии с (11.1):

$$ma = m \frac{dV}{dt} = mV \frac{dV}{dx} = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) + F; \\ \int_0^{V_1} V dV = \left[ \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right]_0^l dx, \quad (11.3)$$

откуда

$$\frac{V_1^2}{2} = l \left[ \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right] \text{ или } V_1 = \sqrt{2l \left[ \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right]}$$

5. Подставляя (11.3) в (11.2) получим решение задачи

$$t_2 - t_1 = \frac{\sqrt{2l \left[ \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right]}}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

*Пример 2.* Материальная точка с массой  $m$  движется по горизонтальной гладкой поверхности, испытывая при этом силу сопротивления, зависящую от времени  $R = ct + b \sin(\omega t)$ . Определить начальную скорость и закон движения точки, если через ин-

тервал времени  $\tau$  после начала движения она остановилась.

*Решение.* 1. Тело является МТ по условию задачи.

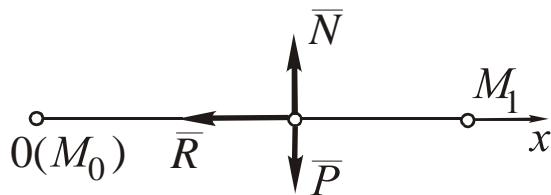


Рис. 11.2

2. Выбираем ось  $x$ , направленную по горизонтали, например, вправо. Начало движения  $M_0$  совместим с началом  $0$  оси  $x$ . Указываем фиксированное положение  $M_1$ , соответствующее остановке МТ. На интервале  $M_0 M_1$  указываем текущее положение  $M$ , изображаем  $\bar{P}$ ,  $\bar{N}$  и силу сопротивления  $\bar{R}$ . Информация о положениях точки и действующий силах:  $t_0 = 0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $V_1 = 0$ ;  $t_1 = \tau$ ;  $R = ct + b \sin(\omega t)$ ;  $V_0 - ?$ ;  $x(t) - ?$

3. Основной закон динамики для рис. 11.2 в векторной форме

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{R},$$

в проекции на ось  $x$

$$ma = -R = -ct - b \sin(\omega t).$$

4. Для определения  $V_0$  интегрируем дифференциальное уравнение на интервале  $M_0 M_1$ : заменяем  $a = \frac{dV}{dt}$ , разделяем переменные умножением на  $dt$  и берем интегралы, подставляя нижние значения переменных  $V$  и  $t$ , соответствующие положению  $M_0$ , а верхние —  $M_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -ct - b \sin(\omega t); \\ \int_{V_0}^0 dV &= -c \int_0^\tau t dt - b \int_0^\tau \sin(\omega t) dt; \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$0 - V_0 = -\frac{c\tau^2}{2} + \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) \Big|_0^\tau = -\frac{c\tau^2}{2} + \frac{b}{\omega} [\cos(\omega\tau) - 1].$$

Из последнего выражения

$$V_0 = \frac{c\tau^2}{2} - \frac{b}{\omega} [\cos(\omega\tau) - 1]. \quad (11.5)$$

Для получения закона движения  $x(t)$  необходимо иметь функцию  $V(t)$ . Для этого подставим в (11.4) верхние пределы переменных  $V$  и  $t$ , соответствующие переменному положению  $M$  (перейдем к интегрированию на интервале  $M_0M$ ):

$$\begin{aligned} V &= \int_{V_0}^V dV = -c \int_0^t dt - b \int_0^t \sin(\omega t) dt; \\ V - V_0 &= -c \frac{t^2}{2} + \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{b}{\omega}. \end{aligned}$$

Заменяя  $V$  на  $\frac{dx}{dt}$ , разделяем переменные умножением на  $dt$

и интегрируем на интервале  $M_0M$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{dx}{dt} = V_0 - \frac{b}{\omega} - c \frac{t^2}{2} + \frac{b}{\omega} \cos(\omega t); \\ \int_0^x dx &= \left( V_0 - \frac{b}{\omega} \right) \int_0^t dt - \frac{c}{2} \int_0^t t^2 dt + \frac{b}{\omega} \int_0^t \cos(\omega t) dt; \\ x &= \left( V_0 - \frac{b}{\omega} \right) t - \frac{ct^3}{6} + \frac{b}{\omega^2} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (11.6)$$

5. Ответами задачи являются выражения (11.5) и (11.6).

*Пример 3.* Тело массы  $m$  падает в воду вертикально со скоростью  $V_0$ . Определить, на какой глубине скорость тела уменьшится вдвое, а также максимальную скорость погружения тела, если сопротивление воды  $R = kV^2$ , где  $k$  – постоянная.

1. Решаем задачу, предполагая, что движение тела поступательное и заменяя его на МТ (рис. 11.3).

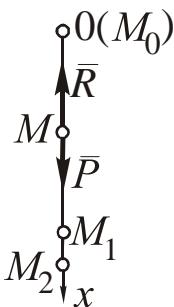


Рис. 11.3

2. Направляем ось  $x$  вертикально вниз. Указываем на оси начальное положение  $M_0$ , совпадающее с  $0$  оси, соответствующее касанию поверхности воды, и положение  $M_1$ , соответствующее скорости  $V_1 = V_0/2$ . К промежуточному положению  $M$  прикладываем силы  $\bar{P}$  и  $\bar{R}$  ( $\bar{P}$  – вертикально вниз,

$\bar{R}$  – противоположно оси  $x$ ). Информация о движении точки:  $t_0 = 0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $V_0$ ;  $V_1 = V_0/2$ ;  $x_1 - ?$

Определение максимальной скорости будет рассмотрено отдельно.

3. Закон движения МТ в векторной форме

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R};$$

в проекциях на ось  $x$

$$ma = P - R = mg - kV^2.$$

4. Поскольку в условии нет данных о значении  $t_1$ , переходим к переменной  $x$ , используя (11.1), и составляем дифференциальное уравнение:

$$ma = m \frac{dV}{dt} = mV \frac{dV}{dx} = mg - kV^2.$$

Для разделения переменных умножаем обе части уравнения на  $dx$  и делим на его правую часть.

Пределы интегрирования соответствуют интервалу  $M_0M_1$ .

$$\int_{V_0}^{V_0/2} \frac{V dV}{mg - kV^2} = \frac{1}{m} \int_0^{x_1} dx. \quad (11.7)$$

Интеграл в левой части табличный  $\int \frac{dU}{U} = \ln U$ , где  $U = mg - kV^2$ . Т.к.  $dU = -2kVdV$ , то для получения табличного интеграла следует умножить обе части уравнения на  $(-2k)$ :

$$\int_{V_0}^{V_0/2} \frac{(-2k)V dV}{mg - kV^2} = \frac{(-2k)}{m} \int_0^{x_1} dx.$$

После интегрирования и подстановки пределов получаем

$$\ln \left( \frac{mg - kV^2}{mg - V_0^2} \right) \Big|_{V_0}^{V_0/2} = \ln \frac{mg - \frac{V_0^2}{4}}{mg - V_0^2} = -\frac{2k}{m} x_1,$$

$$\text{откуда } x_1 = \frac{2k}{m} \ln \frac{mg - V_0^2}{mg - V_0^2/4}.$$

Максимальную скорость МТ  $V_{\max}$  можно определить двумя

путями. Первый путь основан на определении функции  $V(x)$  и ее анализе.

Проинтегрируем (11.7) на интервале  $M_0M$ :

$$\int_{V_0}^V \frac{VdV}{mg - kV^2} = \ln(mg - kV^2) \Big|_{V_0}^V = \ln \frac{mg - kV^2}{mg - kV_0^2} = -\frac{2k}{m}x.$$

Возведем  $e$  в степень, равную левой и правой частям, для выноса  $V$  из-под знака  $\ln$  и выразим  $V(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{mg - kV^2}{mg - kV_0^2} &= e^{-\frac{2k}{m}x}; \\ V &= \sqrt{\frac{mg}{k} - \frac{mg - kV_0^2}{k} e^{-\frac{2k}{m}x}}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Из (11.8) следует, что при  $x \rightarrow \infty$  правое слагаемое под корнем стремиться к нулю,  $V \rightarrow V_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ , т.е. не зависит от  $V_0$ .

Такой же результат может быть получен гораздо проще, исходя из следующих соображений. Т.к. при  $V \rightarrow V_{\max}$  изменением скорости можно пренебречь:  $a = \frac{dV}{dt} \rightarrow 0$ . Уравнение движения точки примет вид

$$0 = P - R = mg - kV_{\max}^2,$$

откуда  $V_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ .

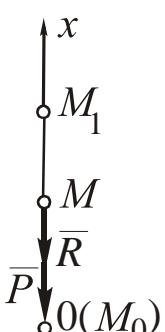


Рис. 11.4

*Пример 4.* Камень массы 2 кг брошен вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Определить максимальную высоту и время ее достижения, если сопротивление воздуха задано функцией  $R = 0,2V$ .

*Решение.* 1. Заменяем камень на МТ, предполагая его движение поступательным (рис. 11.4).

2. Направляем ось  $x$  вертикально вверх, указываем начальное положение  $M_0$ , совпадающее с

началом оси, и  $M_1$ , соответствующее остановке МТ. Информация о положениях МТ:  $x_0 = 0$ ;  $t_0 = 0$ ;  $V_0 = 10$  м/с;  $V_1 = 0$ ;  $x_1 -?$ ;  $t_1 -?$  На МТ действует две силы:  $\bar{P}$  и  $\bar{R}$  (сила, обеспечивающая разгон МТ до скорости  $V_0$ , прекращает свое действие в положении  $M_0$ ):  $\bar{P}$  – направлена вниз,  $\bar{R}$  – обратно оси  $x$ .

3. Уравнение движения: в векторной форме

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R},$$

в проекциях на ось  $x$

$$ma = -P - R = -mg - 0,2V.$$

4. Подставляем все числовые данные, заменяем  $a$  на  $\frac{dV}{dt}$ :

$$2a = -20 - 0,2V; \quad \frac{dV}{dt} = -10 - 0,1V.$$

Разделяем переменные, умножая обе части уравнения на  $dt$  и поделив на  $(10 + 0,1V)$ , выбираем пределы интегрирования на интервале  $M_0M_1$

$$\int_{10}^0 \frac{dV}{10 + 0,1V} = - \int_0^{t_1} dt. \quad (11.9)$$

Считая  $U = 10 + 0,1V$ , определяем  $dU = 0,1dV$ , домножаем обе части на 0,1 и получаем табличный интеграл  $\int \frac{dU}{U} = \ln U$ .

$$\ln(10 + 0,1V) \Big|_{10}^0 = \ln 10 - \ln 11 = \ln \frac{10}{11} = -0,1t_1,$$

откуда  $t_1 = -10 \ln \frac{10}{11} = 10 \ln 1,1 = 0,95$  (с).

Для получения нового дифференциального уравнения необходима функция  $V(t)$ , которую получаем интегрируя (11.9) на интервале  $M_0 M$

$$\int_{10}^V \frac{dV}{10 + 0,1V} = \ln(10 + 0,1V) \Big|_{10}^V = \ln \frac{10 + 0,1V}{11} = \ln(0,9 + 0,01V) = -0,1t.$$

Возводим  $e$  в степень, равную левой и правой частям, и выражаем  $V(t)$ :

$$0,9 + 0,01V = e^{-0,1t}; V = \frac{dx}{dt} = 100e^{-0,1t} - 90.$$

Умножаем на  $dt$ , разделяя переменные, выбираем пределы интегрирования на интервале  $M_0 M_1$ :

$$\int_0^{x_1} dx = 100 \int_0^{t_1} e^{-0,1t} dt - 90 \int_0^{t_1} dt;$$

$$x_1 = -\frac{100}{0,1} e^{-0,1t} \Big|_0^{t_1} - 90 t_1 = -1000e^{-0,1t_1} + 1000 - 90t_1.$$

Подставляя  $t_1 = 0,95$  с, получим  $x_1 \approx 10$  (м).

*Пример 5.* Поршень массы 2 кг соединен с пружинами, имеющими жесткости  $C_1 = 10$  Н/см и  $C_2 = 40$  Н/см. Начальные условия: отклонение от положения равновесия  $x_0 = 0,01$  м, скорость  $V_0 = 0,1$  м/с. Определить закон движения поршня, считая положительным направление по оси вниз, а также амплитуду и период колебаний (рис. 11.5).

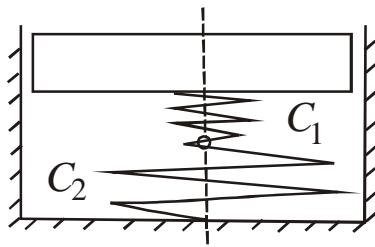


Рис. 11.5

*Решение.* 1. Т.к. движение поршня поступательное, считаем его МТ (рис. 11.6).

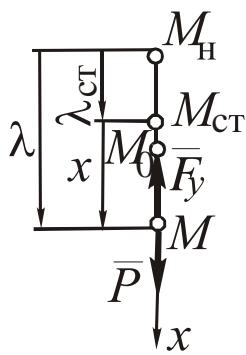


Рис. 11.6

локации  $M_h$  в  $M$ ).

2. Направляем ось  $x$  вертикально вниз, начало оси 0 совмещаем с положением статического равновесия  $M_{ст}$  (оно находится ниже положения  $M_h$ , соответствующего недеформированной пружине). Указываем текущее положение  $M$  и прикладываем силы тяжести  $\bar{P}$  (вертикально вниз) и упругости пружины  $\bar{F}_y$  (противоположно деформации  $\lambda$  при перемещении точки из по-

Указываем начальное положение  $M_0$  (оно не совпадает с 0).

### 3. Уравнение движения МТ: в векторной форме

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y;$$

в проекциях на ось  $x$

$$ma = P - F_y = mg - C\lambda = mg - C\lambda_{ct} - Cx. \quad (11.10)$$

Определим эквивалентную жесткость  $C$  пружин.

Т.к. пружины имеют общую точку, соединение последовательное (рис. 9.7):

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ Н/см} = 800 \text{ Н/м.}$$

Для положения статического равновесия в (11.10) следует подставить  $a = 0$  и  $x = 0$ . Получим  $0 = mg - c\lambda_{ct}$ , и, подставляя это соотношение в (11.10), получаем окончательно  $ma = -cx$ .

### 4. После подстановки числовых значений

$$2a = -800x \text{ или } \ddot{x} + 400x = 0.$$

Получено линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, вид общего решения которого зависит от вида корней характеристического уравнения  $n^2 + 400 = 0$ ;  $n = \pm 20i$ . Т.к. корни – мнимые, решение имеет вид

$$x = A \sin(20t + \alpha), \quad (11.11)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\alpha$  – начальная фаза колебаний.

Для определения постоянных  $A$  и  $\alpha$  найдем функцию скорости МТ

$$V = \dot{x} = 20A \cos(20t + \alpha) \quad (11.12)$$

и подставим в (11.11), (11.12) значения  $t_0 = 0$ ,  $x_0$  и  $V_0$ .

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad V_0 = \dot{x}_0 = 20A \cos \alpha.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x_0}{V_0} = \frac{1}{20} \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{20x_0}{V_0} \right) = \operatorname{arctg} \frac{20 \cdot 0,01}{0,1} = 1,1 \text{ (рад).}$$

Возводя в квадрат левые и правые части уравнений и сложив их почленно, получим (с учетом того, что  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ):

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{20^2} = A^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = A^2,$$

$$\text{откуда } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{20^2}} = \sqrt{0,01^2 + \left(\frac{0,1}{20}\right)^2} = 0,011 \text{ (м).}$$

Подставляя в (11.11)  $A$  и  $\alpha$ , получим закон движения МТ  
 $x = 0,011 \sin(20t + 1,1)$  (м).

5. Амплитуда колебаний  $A = 0,011$  м, период колебаний  $T = \frac{2\pi}{20} = 0,31$  с.

*Пример 6.* Материальная точка с массой 1 кг движется в плоскости  $XOY$  из положения с координатами  $x_0 = 1$  м и  $y_0 = 2$  м, скорость  $\bar{V}_0$ , равная 1 м/с, направлена вверх под углом  $30^\circ$  к оси  $x$ . К точке приложены силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , параллельные соответственно  $x$  и  $y$ , их проекции на оси составляют:  $F_{1x} = F_1 = 0,2V_x - 0,1$ ;  $F_{2y} = F_2 = -0,5y$ . Найти уравнения движения точки.

*Решение.* 1. Тело является МТ по условию задачи.

2. Изображаем координатную плоскость  $xOy$ , точку  $M_0$  с координатами  $x_0 = 1$  м,  $y_0 = 2$  м, скорость  $\bar{V}_0$ , траекторию произвольной формы, промежуточное положение  $M$  и приложенные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  (рис. 11.7).

3. Уравнение движения точки в векторной форме

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2;$$

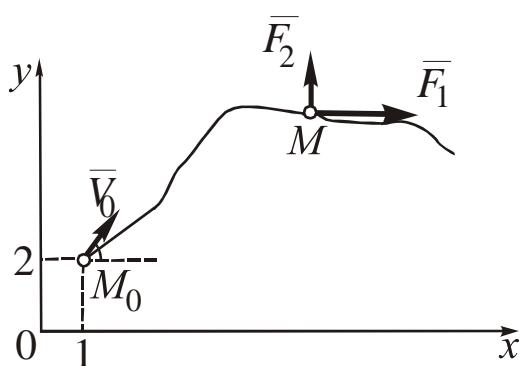


Рис. 11.7

$$\begin{aligned} &\text{в проекциях на ось } x: \\ &ma_x = F_{1x} = 0,2V_x - 0,1; \\ &\text{в проекциях на ось } y: \\ &ma_y = F_{2y} = -0,5y. \end{aligned}$$

интегрирования на интервале от  $M_0$  до  $M$

4. Подставляем значение  $m$ , заменяем  $a_x$  на  $\frac{dV_x}{dt}$ , разделяем переменные, умножив обе части на  $dt$  и разделив на  $(V_x - 0,5)$ , указываем пределы

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0,2V_x - 0,1; \quad \int_{V_0 \cos 30}^{V_x} \frac{dV_x}{V_x - 0,5} = 0,2 \int_0^t dt.$$

Взяв табличные интегралы и подставив пределы, выражаем функцию  $V_x(t)$ :

$$\ln(V_x - 0,5) \Big|_{0,87}^{V_x} = \ln(V_x - 0,5) - \ln(0,37) = \ln \frac{V_x - 0,5}{0,37} = \ln(2,7V_x - 1,35) = 0,2t;$$

$$2,7V_x - 1,35 = e^{0,2t} \text{ или } V_x = 0,5 + 0,37e^{0,2t}.$$

Заменяем  $V_x$  на  $\frac{dx}{dt}$ , умножаем на  $dt$ , указываем пределы интегрирования, интегрируем и подставляем пределы:

$$\frac{dx}{dt} = 0,5 + 0,37e^{0,2t}; \quad \int_{x_0}^x dx = 0,5 \int_0^t dt + 0,37 \int_0^t e^{0,2t} dt;$$

$$x - 1 = 0,5t + \frac{0,37}{0,2} e^{0,2t} \Big|_0^t = 0,5t + 1,85(e^{0,2t} - 1).$$

Окончательно:  $x = -0,85 + 0,5t + 1,85e^{0,2t}$  (м).

Заменяем  $a_y$  на  $\frac{dV_y}{dt} = V_y \frac{dV_y}{dy}$ , умножаем на  $dy$ , указываем

пределы интегрирования, берем интегралы и подставляем пределы:

$$V_y \frac{dV_y}{dy} = -0,5y; \quad \int_{V_0 \sin 30}^{V_y} V_y dV_y = -0,5 \int_{y_0}^y y dy;$$

$$\frac{1}{2} V_y^2 \Big|_{0,5}^{V_y} = \frac{1}{2} (V_y^2 - 0,25) = -\frac{1}{4} y^2 \Big|_2^y = -\frac{1}{4} (y^2 - 4),$$

$$\text{откуда } V_y = \sqrt{2,25 - 0,5y^2} = \sqrt{0,5} \cdot \sqrt{4,5 - y^2} = 0,7\sqrt{4,5 - y^2}.$$

Заменяем  $V_y$  на  $\frac{dy}{dt}$ , умножаем на  $dt$  и делим на  $\sqrt{4,5 - y^2}$ ,

указываем пределы интегрирования:

$$\frac{dy}{dt} = 0,7\sqrt{4,5 - y^2}; \quad \int_0^t \frac{dy}{2\sqrt{4,5 - y^2}} = 0,7 \int_0^t dt = 0,7t.$$

Интеграл в левой части – табличный:

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{4,5 - y^2}} &= \arcsin \frac{y}{\sqrt{4,5}} \Big|_0^y = \arcsin(0,47y) - \arcsin(0,94) = \\ &= \arcsin(0,47y) - 1,24 = 0,7t, \end{aligned}$$

откуда  $0,47y = \sin(0,7t + 1,24)$  или  $y = 2,1\sin(0,7t + 1,24)$  (м).

5. Уравнения движения точки в координатной форме имеют вид:

$$\begin{cases} x = -0,85 + 0,5t + 1,85e^{0,2t}, \text{ м;} \\ y = 2,1\sin(0,7t + 1,24), \text{ м.} \end{cases}$$

*Задание.* Задачи 11.1–11.21 решить самостоятельно.

*Задача 11.1.* Точка массой 2,2 кг движется согласно уравнениям:  $x = 2,5\sin(3t) + 1,3t$  (м);  $y = 2,5\cos(3t) - 0,4$  (м). Найти величину действующей на точку силы.

*Задача 11.2.* Парашютист с массой 100 кг, выпрыгнув из зависшего вертолета, раскрыл парашют, пролетев 200 м. Через 10 с от момента раскрытия парашюта его скорость уменьшилась до 5 м/с. Определить силу сопротивления парашюта, считая ее постоянной и пренебрегая сопротивлением воздуха до раскрытия парашюта.

*Задача 11.3.* Вследствие полученного толчка тело прошло по шероховатой горизонтальной поверхности за 10 с расстояние 30 м и остановилось. Определить коэффициент трения.

*Задача 11.4.* Камень весом 2 Н брошен вертикально вверх со скоростью 20 м/с. На какой высоте и через сколько секунд его скорость будет 10 м/с?

*Задача 11.5.* Лыжник скатывается с горы длиной 120 м под углом  $60^\circ$ . Определить скорость в конце горы и время спуска при коэффициенте трения 0,06.

*Задача 11.6.* При ударе молотка гвоздь углубляется в доску

на 5 мм. Какова скорость молотка массой 0,8 кг в момент удара о гвоздь, если считать силу сопротивления материала постоянной и равной 2 кН?

*Задача 11.7.* При подходе к станции поезд шел со скоростью 72 км/ч под уклон 0,005 рад. После начала торможения он остановился на расстоянии 1,2 км. Определить приведенный коэффициент трения и время торможения.

*Задача 11.8.* После удара хоккеистом по шайбе она, скользя по льду, ударила о борт, находящийся на расстоянии 20 м со скоростью 10 м/с. Определить начальную скорость шайбы и время ее движения, считая коэффициент трения равным 0,02.

*Задача 11.9.* Автомобиль массой 1 т двигался со скоростью 10 м/с. Для преодоления уклона  $30^\circ$  водитель равномерно увеличивал тягу двигателя с 0 на 200 Н ежесекундно. Найти скорость автомобиля через 5 с и пройденное за это время расстояние.

*Задача 11.10.* Тело массой 1,5 кг движется из состояния покоя под углом  $30^\circ$  на спуск по шероховатой плоскости с коэффициентом трения 0,1 под действием силы, изменяющейся по закону  $F = 2t$  ( $F$  – в Н,  $t$  – в с). Определить время, за которое точка пройдет 5 м.

*Задача 11.11.* Материальная точка массой 5 кг движется под действием силы, пропорциональной времени и равной 30 Н через 1 с. Начальная скорость точки 0,5 м/с. Определить уравнение движения точки.

*Задача 11.12.* Материальная точка массы  $m$  двигалась со скоростью  $V_0$ . Определить закон движения точки с момента приложения к ней силы, направленной по ее движению и изменяющейся по закону  $F = A \cos(\omega t)$ .

*Задача 11.13.* Материальная точка массы 2 кг движется из состояния покоя под действием силы, изменяющейся по закону  $F = 3,2 e^{2t}$  (Н). Определить скорость точки через 1 с после начала движения и его уравнение.

*Задача 11.14.* Материальная точка массой 2,2 кг при движении по горизонтальной плоскости испытывает сопротивление движению  $R = 0,4V$  ( $R$  – в Н,  $V$  – в м/с). Через сколько секунд ее скорость уменьшится в 3 раза?

*Задача 11.15.* Тело массы 30 кг движется по гладкой горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления  $R = 0,3V^2$  ( $R$  – в Н,  $V$  – в м/с). За сколько секунд и на каком расстоянии ее скорость упадет с 20 до 10 м/с?

*Задача 11.16.* Лодка весом 2 кН двигалась со скоростью 3 м/с. Сила сопротивления воды изменяется по закону  $R = 100V$  ( $R$  – в Н,  $V$  – в м/с). За какое время и на каком расстоянии скорость лодки уменьшится в 3 раза?

*Задача 11.17.* Лыжник массы 80 кг скользит по склону в  $45^\circ$ , коэффициент трения лыж о снег 0,08. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при 1 м/с равно 0,6 Н. Определить максимальную скорость лыжника. Насколько она увеличится, если, подобрав мазь он уменьшил коэффициент трения до 0,03?

*Задача 11.18.* Пуля имеет скорость  $V_0$ . Пробив доску толщиной  $h$ , она уменьшает скорость до  $V_1$ . Определить время движения пули в доске, считая, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

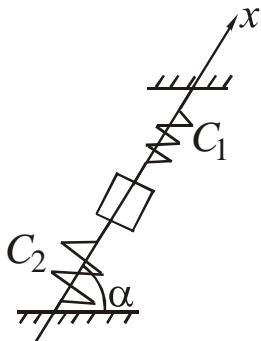


Рис. 11.8

*Задача 11.19.* Груз массы 1,5 кг подвешан на пружинах с жесткостями  $C_1 = 5$  Н/см и  $C_2 = 12$  Н/см под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонтали. Определить функцию  $x(t)$  при начальном отклонении от положения равновесия 2 см и начальной скорости 5 см/с (рис. 11.8).

*Задача 11.20.* Материальная точка с массой 0,5 кг движется в поле силы тяжести в плоскости  $xOy$  с начальными координатами  $x_0 = -2$  м и  $y_0 = 0,5$  м, начальная скорость направлена вертикально вверх и равна 5 м/с. Действующая сила  $\bar{F} = -0,1x\bar{i} + 2y\bar{j}$ . Найти уравнения движения точки.

*Задача 11.21.* Найти уравнение траектории и дальность полета снаряда массы 20 кг при начальной скорости 1 км/с, угол наклона ствола  $30^\circ$ , пренебрегая сопротивлением воздуха, стрельба ведется с возвышения высотой 50 м.

## 11.2. Применение теорем динамики материальной точки

Теоремы динамики материальной точки (п. 9.5) позволяют сократить решение задачи в случаях, когда действующие на МТ силы постоянны или потенциальны. В остальных случаях применение этих теорем включает определение импульсов или работ сил через интегралы и поэтому не дает заметных преимуществ по сравнению с методом интегрирования дифференциальных уравнений движения МТ.

При решении задач содержание поз. 1 (замена тела на МТ), 2 (составление чертежа) и 5 (нахождение неизвестных и анализ результатов) аналогично п. 11.1, отличие состоит в поз. 3 и 4.

### 3. Составление расчетного уравнения (уравнений)

В качестве расчетных применяют уравнения теорем динамики МТ (9.20), (9.21) или (9.22):

- если в условии задачи есть информация о времени  $t$  движения МТ, т.е. можно определить импульсы сил  $\bar{S}_{Fk}$  – применяют теорему об изменении количества движения МТ (9.20);
- если есть информация о перемещении  $s$  (координатах  $x, y$ ) МТ, т.е. можно определить работы сил  $A_{Fk}$  – применяют теорему об изменении кинетической энергии МТ (9.21);
- если есть информация, из которой можно определить моменты действующих сил, (в т.ч. установить, что они равны нулю)
- применяют теорему об изменении кинетического момента МТ (9.22).

Если выбрана теорема (9.20), уравнение проектируют на ось (оси).

### 4. Решение расчетных уравнений

В расчетные уравнения подставляют все известные величины (для определения импульсов и работ сил используют формулы п. 9.4), проверяют соответствие количества неизвестных числу уравнений. Решают уравнения относительно неизвестных.

*Пример 1.* (условие примера 1 п. 11.1).

Содержание пунктов 1 и 2 не изменилось.

3. Т.к. при движении на интервале  $M_0M_1$  есть информация о координате  $x_1$ , применяем теорему (9.21)

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{Fk} = A_P + A_N + A_F + A_{\text{тр}}; \quad (11.12)$$

т.к. на интервале  $M_1M_2$  есть информация об интервале времени  $t_1 - t_0 = t_1$ , применяем теорему (8.20)

$$m\bar{V}_2 - m\bar{V}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{Fk} = \bar{S}_P + \bar{S}_N + \bar{S}_{\text{тр}}.$$

проецируем уравнение на ось  $x$  (т.к. силы постоянны, векторы импульсов сил совпадают по направлению с векторами сил).

$$mV_2 - mV_1 = S_p \sin \alpha - S_{\text{тр}}. \quad (11.13)$$

4. Подставляем в (11.12) и (11.13) известные величины, при этом работы сил вычисляем по формулам (9.14), (9.15) п. 9.4, а величины импульсов сил – как произведения модулей сил на интервал времени:

$$\begin{aligned} \frac{mV_1^2}{2} - 0 &= Fl - mg \ell \sin \alpha - f mg \cos \alpha \ell = F\ell - mg \ell (\sin \alpha + f \cos \alpha); \\ 0 - mV_1 &= P \cdot t_1 \sin \alpha - F_{\text{тр}} t_1 = -mg t_1 \sin \alpha - f mg \cos \alpha t_1 = \\ &= -mg t_1 (\sin \alpha + f \cos \alpha). \end{aligned}$$

В уравнениях два неизвестных:  $V_1$  и  $t_1$ . Решаем уравнения:

$$V_1 = \sqrt{2l \left[ \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \right]}; \quad t_1 = V_1 / g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Результаты совпадают с ранее полученными, при этом объем решения сокращается за счет исключения операции интегрирования.

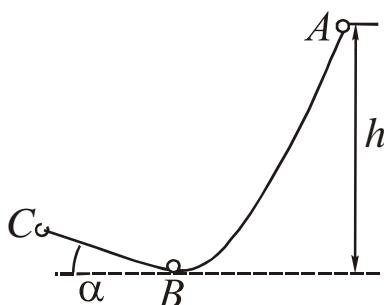


Рис. 11.9

*Пример 2.* Лыжник стартует в точке  $A$ , имея за счет отталкивания скорость 2 м/с. Высота горы  $h = 40$  м, длина трамплина  $BC = 10$  м, угол наклона  $\alpha = 30^\circ$ . Определить скорость лыжника в момент отрыва, считая его материальной точкой, пренебрегая трением и сопротивлением воз-

духа (рис. 11.9).

*Решение.* 1. Принимаем лыжника за МТ, т.к. это оговорено условием (рис. 11.10).

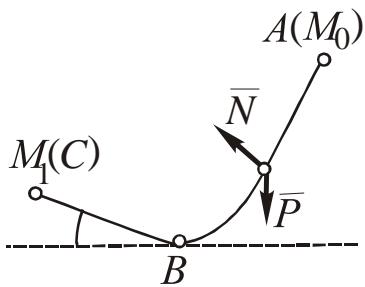


Рис. 11.10

2. На МТ действуют сила тяжести  $\bar{P}$  и реакция  $\bar{N}$  гладкой поверхности. Т.к.  $\bar{N}$  – реакция идеальной связи ( $A_N = 0$ ), а сила  $\bar{P}$  – потенциальная, т.е.  $A_P$  не зависит от траектории, в данной задаче нет необходимости указывать координатные оси. На траектории выбираем за начальное положение  $A$ , за конечное –  $C$ , в промежуточном положении  $M$  указываем действующие силы  $\bar{P}$  и  $\bar{N}$ .

3. Т.к. известны начальное и конечное положения точки относительно уровня отсчета, применяем теорему (9.21):

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{Fk} = A_P + A_N.$$

4. Определяем работы сил (п. 1.4)

$$A_N = 0; \quad A_P = P(z_0 - z_1) = mg(h - BC \sin 30).$$

Получаем  $mV_1^2 - mV_0^2 = 2mg(h - BC \sin 30)$ .

Сокращая на  $m$ , определяем  $V_1$  с учетом числовых данных:

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + 2g(h - BC \sin 30)} = 26,5 \text{ (м/с)}.$$

*Пример 3.* В пружинном пистолете в заряженном состоянии длина пружины  $l_0 = 2$  см, после выстрела –  $l_1 = 8$  см, длина недеформированной пружины  $\ell = 10$  см, жесткость пружины  $C = 0,4$  Н/см. Длина рабочей части ствола 20 см. Определить, пренебрегая трением, скорость вылета шарика массы 100 г, если

ствол наклонен под углом  $30^\circ$ .

*Решение.* 1. Считаем шарик МТ, предполагая его движение поступательным (рис. 11.11).

2. Выбираем ось  $x$ , направленную по траектории, указываем на ней положения:  $M_0$  – соответст-

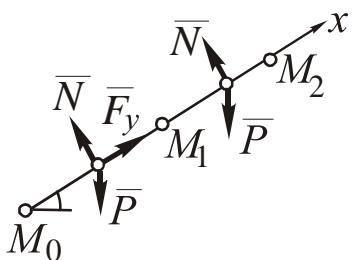


Рис. 11.11

вующее заряженной пружине,  $M_1$  – разряженной пружине,  $M_2$  – вылету МТ из ствола. Информация о движении точки:  $x_0 = 0$ ;  $t_0 = 0$ ;  $V_0 = 0$ ;  $x_1 = l_1 - l_0$ ;  $x_2 = 0,2\text{ м}$ ;  $V_2 = ?$

3. Т.к. в условии есть координаты точки, применяем теорему (9.21) для интервала  $M_0M_2$ .

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{Fk} = A_P + A_y + A_N.$$

4. Определяем работы сил (п. 1.4)

$$A_N = 0; \quad A_P = -mg \cdot M_0 M_2 \sin 30 = -0,1 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = -0,1 \text{ (Н}\cdot\text{м)};$$

$$A_y = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = \frac{40}{2} (0,08^2 - 0,02^2) = 0,1 \text{ (Н}\cdot\text{м)};$$

$$\lambda_0 = l - l_0 = 0,08 \text{ (м)}; \quad \lambda_1 = l - l_1 = 0,02 \text{ (м)}$$

После вычислений по расчетной формуле

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(0,12 - 0,1)}{m}} = 0,63 \text{ (м/c).}$$

*Задание.* Решить самостоятельно задачи 11.2–11.8 из п. 11.1, а также задачи 11.22–11.23.

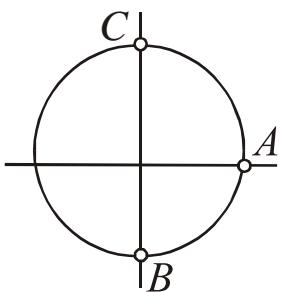


Рис. 11.12

*Задача 11.22.* Материальная точка движется по гладкой окружности радиуса  $R = 0,5$  м в вертикальной плоскости (рис. 11.12). Определить:

– какую скорость точка будет иметь, в положении  $B$ , если ее отпустить из положения  $A$  без начальной скорости?

– какую минимальную скорость точка должна иметь в положении  $A$ , чтобы достичь положения  $C$ ?

– какую скорость точка будет иметь в положении  $B$ , если ее толкнуть со скоростью 2 м/с из положения  $C$ ?

*Задача 11.23.* Вагон массы 10 т, имея скорость 1 м/с, наезжает на пружинный буфер с жесткостью 100 Н/см. Определить деформацию пружины буфера.

### 11.3. Применение теорем динамики механической системы

Общий порядок решения задач следующий

1. *Определить, какую теорему динамики МС целесообразно применить для решения задачи:*

- если в условии есть информация о законах движения тел МС или их перемещениях, времени действия сил и при этом можно отыскать проекции внешних сил на направления перемещений – применяют теорему о движении центра масс МС (10.14) (часто в форме (10.15) закона сохранения движения центра масс МС);

- если в условии есть информация о скоростях или ускорениях центров тел МС, их перемещениях и при этом можно определить работы действующих сил, применяют теорему об изменении кинетической энергии МС (10.17);

- если в заданном механизме имеет место неподвижная ось или центр и при этом можно определить моменты действующих внешних сил относительно этой оси (центра) применяют теорему об изменении кинетического момента МС (10.19) (часто в форме (10.20) закона сохранения кинетического момента МС).

2. *Составление чертежа.*

Составляют чертеж, на котором изображают тела МС в произвольном положении, отбрасывая тела, жестко связанные с Землей, указывают действующие силы МС, причем при применении теорем (10.14) и (10.19) исключают внутренние силы, а при применении (10.17) – реакции идеальных связей. Если выбрана теорема (10.14), выбирают координатную ось (оси). Формулируют математически информацию о движении тел МС, относя ее к выбранным осям и моментам времени.

3. *Составление расчетного уравнения.*

Выписывают уравнение выбранной теоремы. Если выбрано уравнение (10.14), его проецируют на ось (оси). Анализируют правые части уравнения (10.14) или (10.19) и, если имеют место законы сохранения – записывают их виде (10.15) или (10.20).

4. *Реализация расчетного уравнения*

Производят кинематический расчет необходимых параметров МС (скорости, ускорения, перемещения центров масс, угло-

вые скорости, ускорения и перемещения тел МС).

При необходимости составляют дополнительные чертежи, поясняющие расположение тел МС в заданные моменты времени.

Определяют необходимые меры движения МС и динамические характеристики сил, подставляют их в расчетное уравнение и решают его относительно неизвестной величины.

### 5. Нахождение неизвестных в задаче и анализ результатов

При необходимости производят интегрирование или дифференцирование результата, полученного из расчетного уравнения, отображают решение задачи на графиках.

В отдельных случаях, если условие задачи допускает неоднозначное толкование, уточняют изменится ли решение при других значениях принятых параметров.

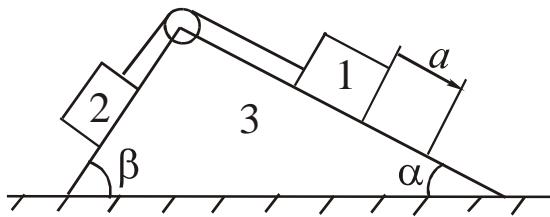


Рис. 11.13

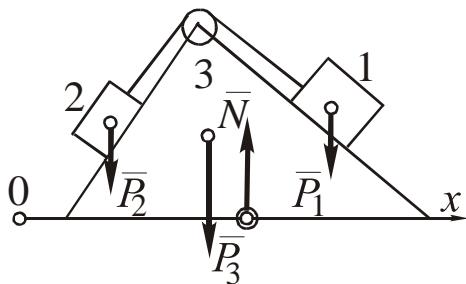


Рис. 11.14

брасывая опорную поверхность тела, жестко связанного с Землей (рис. 11.14). На чертеже указываем внешние силы МС:  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{N}$  (точка приложения  $\bar{N}$  неизвестна). Поскольку о трении ничего не говорится, считаем, что оно отсутствует (после решения задачи необходимо проверить, возможно, ли ее решение при наличии трения). Внутренними силами МС являются: реакции нитей,

*Пример 1.* Грузы 1 и 2, соединенные нитью, могут перемещаться по призме 3. Массы тел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , углы призмы  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 11.13). Определить, на какое расстояние и в какую сторону переместится призма 3 из состояния покоя при перемещении тела 1 вниз на величину  $a$ .

*Решение.* 1. Поскольку в задаче есть информация о перемещениях, применяем теорему о движении центра масс МС (10.14).

2. Рассматриваем МС, состоящую из тел 1, 2, 3, от-

шарнира блока, поверхностей боковых граней призмы 3 (в том числе, и при наличии трения).

Т.к. движение тела 3 поступательное горизонтальное, указываем ось  $0x$ . Информация о движении МС:  $V_{C(0)} = 0$ ;  $\Delta s_{1(1)} = a$ ;  $\Delta x_{3(1)}$  – ? (цифровой индекс в скобках соответствует моментам времени: начальному  $t_0$  и конечному  $t_1$ ).

3. Записываем уравнение (10.14):

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^n F_k^e = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{N}.$$

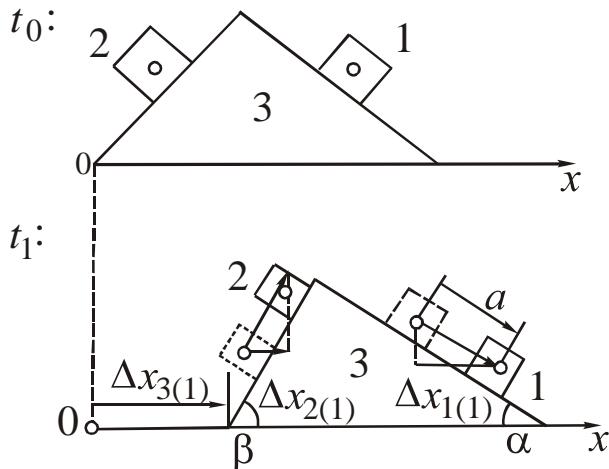
Проектируем уравнение на ось  $x$  и преобразуем в соответствии с начальным условием:

$$(x): M a_{Cx} = 0 \Rightarrow M V_{Cx} = \text{const} = M V_{Cx(0)} = 0 \Rightarrow M x_C = \text{const}, \quad (11.14).$$

таким образом, имеет место закон сохранения движения центра масс МС, который с учетом нулевой начальной скорости центра масс  $C$  приводит к случаю, когда координата  $x_C$  при движении МС не изменяется.

Последняя запись уравнения (11.14) – расчетное уравнение задачи.

4. Из (10.3) следует, что  $M x_C = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$ .



Для реализации расчетного уравнения рассмотрим положения тел МС в моменты  $t_0$  и  $t_1$  (рис. 11.15). В момент  $t_0$  координаты точек  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  принимаем произвольными (в ходе решения они уничтожаются):

Рис. 11.15

$$M x_{C(0)} = m_1 x_{1(0)} + m_2 x_{2(0)} + m_3 x_{3(0)}.$$

В момент  $t_1$  координата  $x_3$  увеличивается на  $\Delta x_{3(1)}$  (величину  $\Delta x_{3(1)}$  принимаем положительной), а координаты  $x_1$  и  $x_2$  увеличи-

ваются на  $\Delta x_{3(1)}$  за счет переносного перемещения, а также соответственно на величину относительных перемещений:

$$\Delta x_{1(1)} = a \cos \alpha; \Delta x_{2(1)} = a \cos \beta.$$

окончательно имеем:

$$\begin{aligned} M x_{C(1)} &= m_1(x_{1(0)} + \Delta x_{3(1)} + a \cos \alpha) + m_2 \times \\ &\times (x_{2(0)} + \Delta x_{3(1)} + a \cos \beta) + m_3(x_{3(0)} + \Delta x_{3(1)}). \end{aligned}$$

Из (11.14) следует:  $M x_{C(0)} = M x_{C(1)}$ .

Подставляя полученные выражения, раскрывая скобки, приводя подобные члены (при этом взаимно уничтожаются слагаемые, включающие начальные координаты), выражаем неизвестное:

$$\Delta x_{3(1)} = -\frac{a(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Знак "−" указывает на то, что фактическое перемещение тела 3 – обратное указанному на рис. 11.15.

5. При наличии трения скольжения силы трения на боковых гранях тела 3 остаются внутренними, а на нижней грани – станут дополнительной внешней силой, дающей ненулевую проекцию на ось  $x$ . Это приводит к изменению расчетного уравнения и конечного результата. Т.к. коэффициент трения скольжения не задан, этот вариант решения невозможен. Поэтому принятное допущение об отсутствии трения правомерно.

*Пример 2.* Призма 1 массы  $m_1 = 4$  кг с углом боковой грани

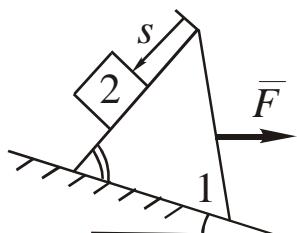


Рис. 11.16

$60^\circ$  движется под углом  $30^\circ$  к горизонту под действием горизонтальной силы  $F = 4t^2$  (Н). По поверхности призмы движется тело 2 массы  $m_2 = 2$  кг, закон относительного движения которого имеет вид  $s(t) = 2,3 \sin(3t) + 2$  (м) (рис. 11.16). Определить закон движения призмы, если в начальный момент ее скорость была нулевой.

*Решение.* 1. Т.к. движения тел МС поступательны, при этом можно отыскать проекции сил  $\bar{F}$ , тяжести, реакции поверхности,

выбираем теорему о движении центра масс МС (10.14).

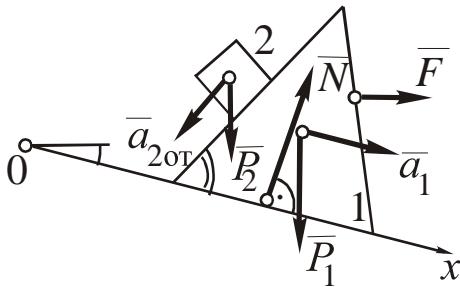


Рис. 11.17

ось  $Ox$  вдоль опорной поверхности (рис. 11.17).

Информация о движении тел МС:

$x_{1(0)} = 0$  (точка 0 выбрана в начале движения тела);

$V_{1(0)} = 0; s_{2\text{от}}(t) = 2,3 \sin(3t) + 2; x_1(t) - ?$

3. Расчетное уравнение в векторной форме

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{F} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{N}.$$

В проекциях на ось  $x$ :

$$Ma_{Cx} = F \cos 30 + (P_1 + P_2) \sin 30 = 3,5t^2 + 30. \quad (11.15)$$

4. Из (10.2') следует

$$Ma_{Cx} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x}.$$

Из рис. 11.17 определяем:  $a_{1x} = a_1 = \ddot{x}_1$ ; т.к. тело 1 является подвижной системой отсчета,

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_{2\text{от}}; \\ a_{2x} &= a_{1x} - a_{2\text{от}} \cos 60 = a_{1x} + \ddot{s}_{2\text{от}} \cos 60 = \\ &= \ddot{x}_1 - 20,7 \sin(3t) \cos 60 = \ddot{x}_1 - 10,35 \sin(3t). \end{aligned}$$

После подстановки найденных функций в (11.15), получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 - m_2 10,35 \sin(3t) = 3,5t^2 + 30.$$

Подставляя значения  $m_1, m_2$ , выражаем  $\ddot{x}_1$ :

$$6\ddot{x}_1 = 20,7 \sin(3t) + 3,5t^2 + 30; \quad \ddot{x}_1 = \frac{dV_1}{dt} = 3,45 \sin(3t) + 0,57t^2 + 5.$$

5. Разделяем переменные и интегрируем последнее уравнение

2. Отбрасывая опорную поверхность тела, связанного с Землей, рассматриваем МС, состоящую из тел 1 и 2. На чертеже указываем внешние силы:  $\bar{F}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{N}$ . Внутренними являются силы взаимодействия тел 1 и 2. Т.к. тело 1 движется поступательно прямолинейно, выбираем

ние при нулевых начальных условиях

$$\int_0^t dV_1 = 3,45 \int_0^t \sin(3t) dt + 0,57 \int_0^t t^2 dt + 5 \int_0^t dt,$$

откуда

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt} = -1,15 \cos(3t) \Big|_0^t + 0,19t^3 + 5t = 1,15 - 1,15 \cos(3t) + 0,19t^3 + 5t.$$

Повторяя интегрирование, получаем окончательно следующий закон движения тела 1:

$$x_1 = 1,15t + 2,5t^2 + 0,05t^4 - 0,38 \sin(3t) \text{ (м).}$$

*Пример 3.* Механизм состоит из основания 1 с массой  $m_1$  и круглой пластины 2 с массой  $m_2$  и радиусом  $a$ . Вращение пластины происходит равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . Определить закон движения тела 1 при отсутствии трения и его давление на опорную поверхность (рис. 11.18).

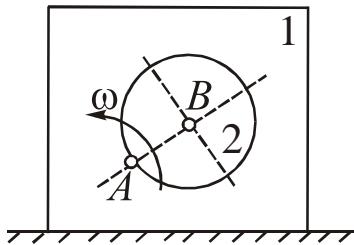


Рис. 11.18

Решение. 1. В условии фигурируют, законы поступательного движения тела 1 и вращательного движения

тела 2 (центра масс  $B$ ), при этом можно отыскать проекции сил тяжести и реакции поверхности, поэтому выбираем теорему о движении центра масс  $MC$  (10.14).

2. Отбрасывая опорную поверхность, рассматриваем  $MC$  состоящую из тел 1 и 2. На чертеже указываем внешние силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{N}$  (последняя сила равна по величине и противоположна давлению на опорную поверхность). Внутренней является сила взаимодействия тел 1 и 2 – реакция шарнира  $A$  (рис. 11.19).

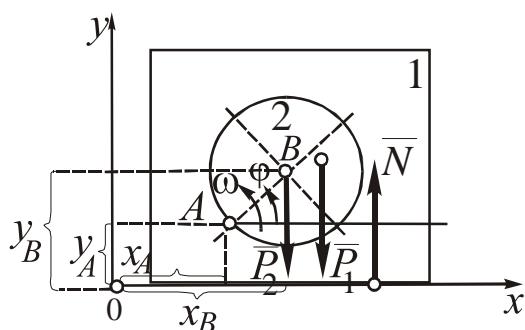


Рис. 11.19

3. Составляем расчетное уравнение:

в векторной форме

$$M\bar{a}_C = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{N};$$

в проекциях на оси

$$(x): Ma_{Cx} = 0; \quad (11.16)$$

$$(y): Ma_{Cy} = -P_1 - P_2 + N = -(m_1 + m_2)g + N. \quad (11.17)$$

4. Из (10.2') следует

$$Ma_{Cx} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x}; Ma_{Cy} = m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y}.$$

Используя координаты, указанные на рис. 11.9, определяем необходимые ускорения:

$a_{1x} = \ddot{x}_1$  – искомая функция (координата  $x_1$  может быть принята равной  $x_A$ );

$$x_2 = x_B = x_A + AB \cos \varphi = x_1 + a \cos(\omega t); a_{2x} = \ddot{x}_1 - a \omega^2 \cos(\omega t);$$

$$y_1 = y_A = \text{const}; a_{1y} = \ddot{y}_1 = 0;$$

$$y_2 = y_B = y_A + AB \sin \varphi = y_1 + a \sin(\omega t); a_{2y} = -a \omega^2 \sin(\omega t).$$

Подставляя полученные значения в (11.16) и (11.17), получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 - m_2 a \omega^2 \cos(\omega t) = 0;$$

$$-m_2 a \omega^2 \sin(\omega t) = -(m_1 + m_2)g + N,$$

откуда выражаем неизвестные

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \omega^2 \cos(\omega t); \quad (11.18)$$

$$N = (m_1 + m_2)g - m_2 a \omega^2 \sin(\omega t). \quad (11.19)$$

5. Уравнение (11.18) представляет собой закон поступательного движения тела 1, из него

можно получить интегрированием функции скорости и координаты. Это – уравнение гармонических колебаний.

График функции (11.19) представлен на рис. 11.20. Из него, в частности, следует, что

при  $m_2 a \omega^2 \geq (m_1 + m_2)g$  возникают условия для отделения тела

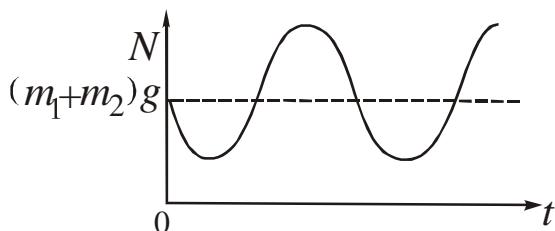


Рис. 11.20

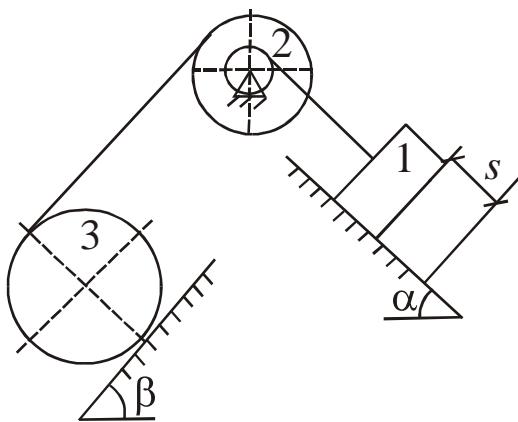


Рис. 11.21

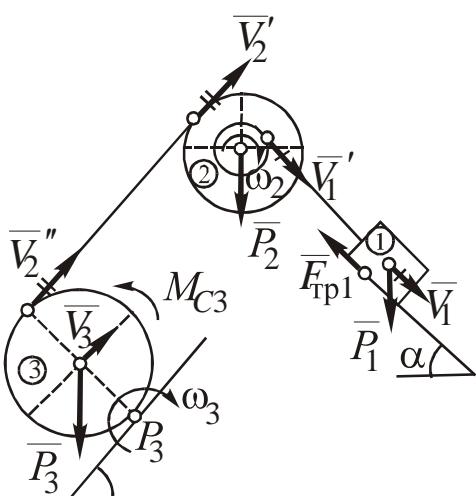


Рис. 11.22

указываем активные силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ , реакции реальных связей (п. 10.2):  $\bar{F}_{\text{тр}1}$  (сила трения скольжения),  $M_{C3}$  (пара сил сопротивления качению). Не указываются реакции идеальных связей (п. 10.2): нормальные реакции поверхностей  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_3$ , натяжения нитей  $\bar{T}_1$   $\bar{T}_3$ , реакция неподвижного шарнира  $R_2$ , сила трения скольжения  $\bar{F}_{\text{тр}2}$  при качении без проскальзывания.

Информация о движении МС:

$$T_{(0)} = 0; \quad s_{1(1)} = s; \quad V_{1(1)} - ?; \quad a_{1(1)} - ?$$

3. Расчетное уравнение имеет вид

от опорной поверхности.

**Пример 4.** Механизм состоит из тел с массами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  в соответствии с рис. 11.21 (тело 3, цилиндр радиуса  $R_3$ , катится без проскальзывания, нити параллельны опорным поверхностям). Тело 2 имеет радиусы  $R_2$ ,  $r_2$  и радиус инерции  $i_2$ . Известны углы  $\alpha$  и  $\beta$ , коэффициенты трения скольжения  $f$  и качения  $\delta$ . Определить скорости и ускорения тел механизма в момент, когда тело 1 из состояния покоя переместиться вниз на расстояние  $s$ .

**Решение.** 1. Т.к. в задаче требуется определить скорости и ускорения и при этом можно определить работы сил, применяем теорему об изменении кинетической энергии МС (10.17).

2. Рассматриваем механическую систему, состоящую из тел 1, 2, 3 (рис. 11.22). На чертеже

$$T_{(1)} - T_{(0)} = \sum_{k=1}^n A_{Fk} = A_{P1} + A_{P2} + A_{P3} + A_{\text{tp1}} + A_{M_{C3}}. \quad (11.20)$$

Т.к.  $T_{(0)} = 0$ , все кинематические характеристики уравнения относятся к моменту  $t_1$  (соответствующий временной индекс опускаем).

4. Для реализации уравнения (11.20) необходимы следующие кинематические данные: скорости центров масс и угловые скорости тел (для определения  $T$ ), перемещения центров масс и угловые перемещения тел (для определения  $A_{Fk}$ ).

Произведем кинематический расчет скоростей механизма, выражая их через скорость искомую  $V_1$  (рис. 11.22):

Тело 1 движется поступательно со скоростью  $\bar{V}_1$ .

Т.к. нити нерастяжимы,  $\bar{V}_1' = \bar{V}_1$ .

Тело 2 вращается,  $\omega_2$  согл.  $\bar{V}_1'$ ,  $\omega_2 = V_1 / r_2$ . Скорость центра масс  $V_2 = 0$ . Для перехода к телу 3 скорость на ободе:

$$\bar{V}_2' \text{ согл. } \omega_2; \quad V_2' = \omega_2 \cdot R_2 = V_1 \frac{R_2}{r_2}.$$

С учетом нерастяжимости нити  $\bar{V}_A = \bar{V}_2'$ .

Тело 3 движется плоско параллельно, МЦС находится в точке  $P_3$  соприкосновения с плоскостью.

$$\omega_3 \text{ согл. } \bar{V}_A; \quad \omega_3 = V_2'' / 2R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

Скорость центра масс  $\bar{V}_3$  согл.  $\omega_3$ ;  $V_3 = \omega_3 \cdot R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}$ .

Результаты расчета скоростей:

$$V_1; \quad \omega_2 = V_1 / r_2; \quad V_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \omega_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}, \quad (11.21)$$

остальные скорости нулевые.

Т.к. в соотношениях (11.21) радиусы  $r_2$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  постоянны, необходимые зависимости между перемещениями получают интегрированием при нулевых начальных условиях, заменяя значе-

ния скоростей на функции времени. Например,

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{ds_1}{dt}; \quad \int_0^{\varphi_2} d\varphi_2 = \frac{1}{r_2} \int_0^{s_1} ds_1; \quad \varphi_2 = \frac{s_1}{r_2}.$$

Преобразуя аналогично остальные соотношения (11.21), получаем результаты расчеты перемещений:

$$s_1; \quad \varphi_2 = s_1 / r_2; \quad s_3 = s_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \varphi_3 = s_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (11.22)$$

Зависимости между ускорениями могут быть получены путем дифференцирования уравнений (11.21). Например

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{dV_1}{dt}; \quad \varepsilon_2 = a_1 / r_2.$$

Результаты расчета ускорений:

$$a_1; \quad \varepsilon_2 = a_1 / r_2; \quad a_3 = a_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \varphi_3 = a_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (11.23)$$

Определяем кинетическую энергию МС как сумму значений для отдельных тел:  $T = T_1 + T_2 + T_3$ .

Находим  $T_1 \dots T_3$ , учитывая вид движения тела (п. 10.1) и используя скорости (11.21):

$$T_1 \text{ (пост.)} = \frac{m_1 V_1^2}{2};$$

$$T_2 \text{ (вр.)} = J_2 \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 i_2^2 \frac{V_1^2}{r_2^2};$$

< для нестандартного тела  $J_2 = m_2 i_2^2 >$ ;

$$T_3 \text{ (пл.)} = m_3 \frac{V_3^2}{2} + J_3 \frac{\omega_3^2}{2} = \frac{1}{2} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{4r_2^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \frac{V_1^2 R_2^2}{4r_2^2 R_3^2} = \frac{3}{16} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2};$$

< для цилиндра  $J_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 >$ ;

После суммирования получаем

$$T = \frac{V_1^2}{16} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right). \quad (11.24)$$

Определяем работы сил МС, используя перемещения (11.22):

$$\begin{aligned} A_{P1} &= P_1 \cdot s_1 \sin \alpha = m_1 g s_1 \sin \alpha; \\ A_{\text{тр}1} &= -f P_1 s_1 \cos \alpha = -f m_1 g s_1 \cos \alpha; \\ A_{P2} &= 0 (\text{т.к. } s_2 = 0); \\ A_{P3} &= -P_3 \cdot s_3 \sin \beta = -m_3 g s_1 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta; \\ A_{Mc3} &= -M_C \varphi_3 = -\delta m_3 g \cos \beta \cdot s_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}; \end{aligned}$$

После суммирования получаем

$$\sum_{k=1}^n A_{Fk} = g s_1 \left[ m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_3} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right]. \quad (11.25)$$

Подставляя (11.24) и (11.25) в (11.20), определяем  $V_1$ :

$$\begin{aligned} &\frac{V_1^2}{16} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) = \\ &= g s_1 \left[ m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_3} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right]; \quad (11.26) \\ V_1 &= 4 \sqrt{\frac{g s_1 \left[ m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_3} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right]}{8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2}}}. \end{aligned}$$

5. Для определения  $a_1$  продифференцируем (11.26), заменяя значения  $V_1$  и  $s_1$  на функции времени, поскольку выражения в скобках постоянны (для сокращения эти выражения обозначаем  $B$  и  $C$ ):

$$V_1^2 \cdot \frac{B}{16} = s_1 g C;$$

$$2V_1 \frac{dV_1}{dt} \frac{B}{16} = \frac{ds_1}{dt} gC \text{ или } V_1 \cdot a_1 \frac{B}{8} = V_1 gC,$$

откуда

$$a_1 = \frac{8gC}{\beta} = \frac{8g \left[ m_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right]}{8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2}}.$$

Остальные скорости и ускорения МС можно получить подстановкой  $V_1$  и  $a_1$  соответственно в (11.21) и (11.22). Из ответа следует, что ускорение  $a_1$  не зависит от перемещения  $s_1$ , поэтому, если в задаче требуется отыскать только ускорение, в пункте 4 задают не только  $V_1$ , но и  $s_1$ , в конце расчета они уничтожаются.

*Пример 5.* Материальная точка  $M_1$  с массой  $m_1$  движется по прямоугольной пластине по закону  $s(t) = O_1 M_1 = bt^2$ . Пластина имеет размеры  $a, b$  и массу  $m_2$ , в начальный момент она имела угловую скорость  $\omega_0$ . Найти ее угловую скорость в момент  $t_1 = 0,5$  с (рис. 11.23).

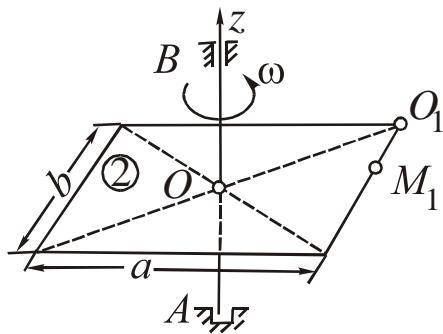


Рис. 11.23

*Решение.* 1. Т.к. основой механизма является ось  $z$ , при этом можно определить моменты сил относительно этой оси, применяя теорему об изменении кинетического момента МС относительно оси  $z$  (10.19').

2. Рассматриваем МС, состоящую из материальной точки  $M_1$  и пластины 2, отбрасывая связи  $A$  и  $B$  (рис. 11.24). На чертеже указываем внешние силы: силы

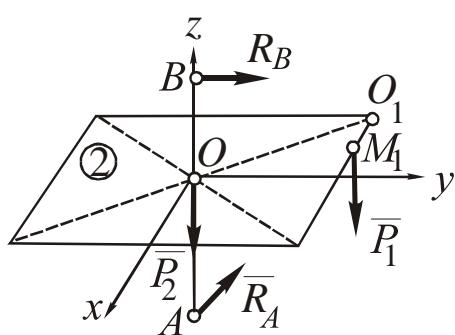


Рис. 11.24

тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ , реакции  $\bar{R}_A$  под пятника и  $\bar{R}_B$  осевого шарнира (моменты этих сил относительно оси  $z$  равны нулю, т.к. они пересекают ее, поэтому разложение их на составляющие нецелесообразно). Силы взаимодействия тел 1 и 2 – внутренние, трением в шарнирах пренебрегаем, т.к. это не противоречит условию задачи.

Информация о движении МС:

$$\omega_{2(0)} = \omega_0; t_1 = 0,5 \text{ с}; O_1 M_1(t) = b t^2; \omega_{2(1)} - ?$$

3. Расчетное уравнение:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^e) = m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{R}_A) + m_z(\bar{R}_B) = 0;$$

откуда следует  $K_z = \text{const.}$  (11.27)

4. Определяем кинетический момент  $K_z = K_{z1} + K_{z2}$  МС в моменты  $t_0$  и  $t_1$  (рис. 11.25), учитывая, что  $M_1$  участвует в составном движении:

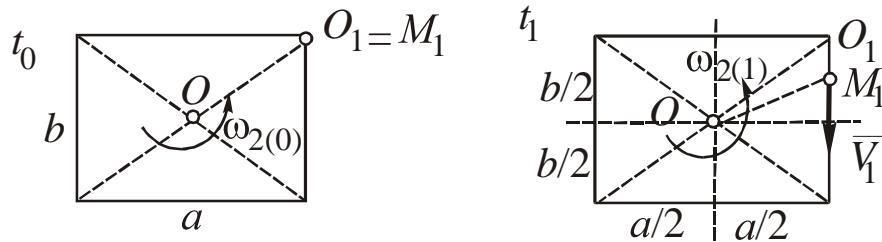


Рис. 11.25

$$t_0 = 0: O_1 M_1(t_0) = 0; V_1 = \dot{s}|_{t_0} = 2bt|_{t_0} = 0;$$

$$K_{z1(0)} = m_1(OO_1)^2 \cdot \omega_{2(0)} = m_1 0,25(a^2 + b^2)\omega_0;$$

$$K_{z2(0)} = J_2 \omega_{2(0)} = \frac{1}{12}m_2(a^2 + b^2)\omega_0;$$

$$t_1 = 0,5: O_1 M_1(t_1) = s|_{t_1} = \frac{b}{4}; V_1 = \dot{s}|_{t_1} = 2bt|_{t_1} = b;$$

$$K_{z1(1)} = K_{z1\text{пер}(1)} + K_{z1\text{от}(1)} = m_1(OM_1)^2 \omega_{2(1)} -$$

$$-|m_z(m_1 \bar{V}_1)| = \frac{m_1}{16}(4a^2 + b^2)\omega_{2(1)} - m_1 b \frac{a}{2};$$

$$K_{z2(1)} = J_2 \omega_{2(1)} = \frac{m_2}{12} (a^2 + b^2) \omega_{2(1)}.$$

Приравниваем кинетические моменты  $K_{z(0)}$  и  $K_{z(1)}$  в соответствии с (11.27):

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{4} (a^2 + b^2) \omega_0 + \frac{m_2}{12} m_2 (a^2 + b^2) \omega_0 = \\ \frac{m_1}{16} 4 (a^2 + b^2) \omega_{2(1)} - m_1 b \frac{a}{2} + \frac{m_2}{12} (a^2 + b^2) \omega_{2(1)}, \end{aligned}$$

откуда выражаем  $\omega_{2(1)}$ :

$$\omega_{2(1)} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{12} (3m_1 + m_2) \omega_0 + \frac{ab}{2} m_1}{\frac{m_1}{16} (4a^2 + b^2) + \frac{m_2}{12} (a^2 + b^2)}.$$

5. Т.к. при наличии трения в шарнирах в расчетном уравнении появится их момент, расчетное уравнение (11.27) изменится. Если момент сил трения неизвестен, решение невозможно, поэтому принятное допущение об отсутствии трения в шарнирах правомерно.

*Задание.* Решить самостоятельно задачи 11.24–11.36.

*Задача 11.24.* Механическая система (рис. 11.26) с массами тел  $m_1 = 2$  кг,  $m_2 = m_3 = 1$  кг,  $m_4 = 3$  кг находились в покое. Определить перемещение призмы 4 при опускании груза 1 на 1м.

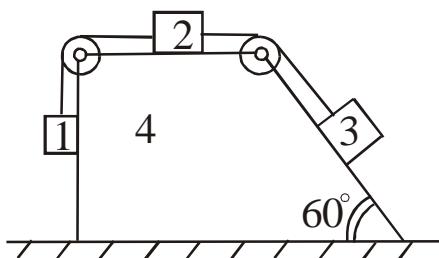


Рис. 11.26

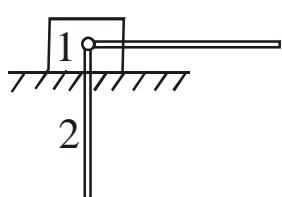


Рис. 11.27

*Задача 11.25.* Определить перемещение груза 1 массы 20 кг при опускании стержня 2 массы 10 кг и длины 1 м из горизонтального положения в вертикальное (рис. 11.27).

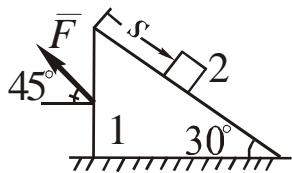


Рис. 11.28

*Задача 11.26.* Определить закон движения призмы 1 массы 10 кг, если величина силы  $\bar{F}$  изменяется по закону  $F = 6t$  (Н), а уравнение относительного движения тела 2 имеет вид:  $s(t) = 3t^3 - 1$  (м) (рис. 11.28).

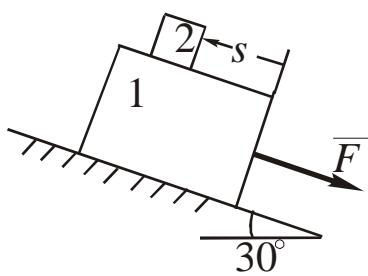


Рис. 11.29

*Задача 11.27.* Определить закон движения призмы 1 массы 5 кг, если  $F = 5$  Н, а уравнение относительного движения тела 2 имеет вид:  $s(t) = 2\cos(6t)$  (м) (рис. 11.29).

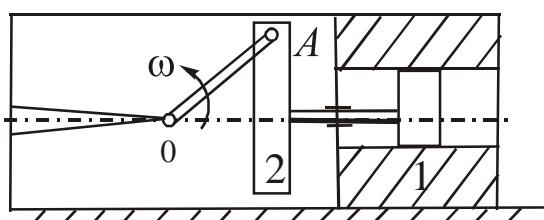


Рис. 11.30

*Задача 11.28.* Определить закон движения корпуса 1 поршневого насоса, если его масса  $m_1$ , масса кулисы с поршнем  $m_2$ , а кривошип  $OA$  (его масса мала) имеет длину  $a$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 11.30).

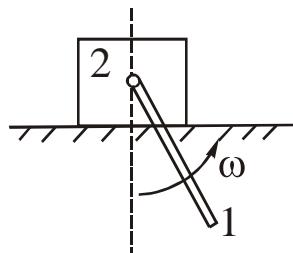


Рис. 11.31

*Задача 11.29.* Стержень 1 массы 1 кг вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . Определить максимальное давление корпуса 2 на основание, а также величину минимального коэффициента трения  $f$  при котором корпус останется неподвижным (рис. 11.31).

*Задача 11.30.* Определить, на какую высоту  $h$  закатится без проскальзывания цилиндр массы  $m$ , радиуса  $R$ , имея начальную

скорость центра масс  $V_0$  при коэффициентах трения, равных: скольжения  $f$ , качения  $\delta$ .

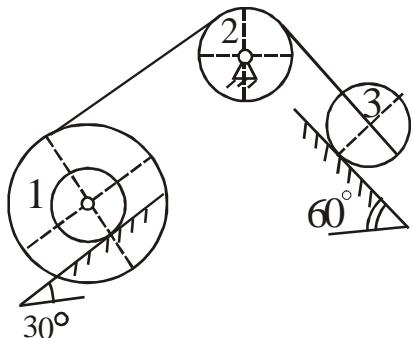


Рис. 11.32

*Задача 11.31.* Массы тел механизма:  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = m_3 = 1$  кг. Колесо 1 имеет радиусы  $R_1 = 0,3$  м  $r_1 = 0,1$  м, радиус инерции  $0,2$  м. Колеса катятся без проскальзывания. Тела 2 и 3 – цилиндры. Определить скорость и ускорение центра масс колеса 1 в момент, когда он переместится вниз из состояния покоя на расстояние  $0,2$  м (рис. 11.32).

*Задача 11.32.* Тела механизма имеют массы  $m_1 = 10$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = m_4 = 1$  кг (тела 2 и 3 – трубы). Определить скорость и ускорение груза 1 в момент, когда оно переместится из состояния покоя на расстояние  $0,5$  м (рис. 11.33).

*Задача 11.33.* Массы тел механизма:  $m_1 = 8$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $m_3 = 12$  кг (цилиндр). Радиусы блока 2:  $R_2 = 0,3$  м,  $r_2 = 0,1$  м,  $P_{i2} = 0,2$  м. Момент пары  $M = 1$  Н·м, коэффициент трения скольжения 0,1. Определить ускорение  $a_1$  (рис. 11.34).

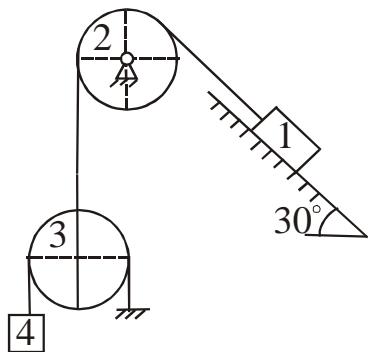


Рис. 11.33

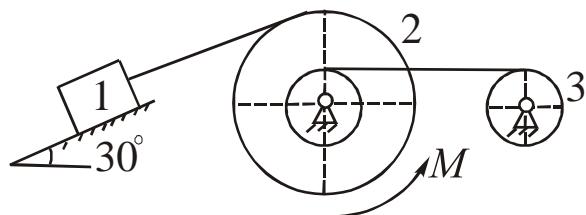


Рис. 11.34

*Задача 11.34.* Массы тел механизма:  $m_1 = 2$  кг,  $m_2 = m_3 = 1$  кг. Радиусы блока 1:  $R_1 = 0,2$  м,  $r_1 = 0,1$  м,  $i_1 = 0,15$  м. Момент пары  $M = 1$  Н·м. Определить угловое ускорение  $\varepsilon_1$ . Тело 3 – ци-

линдр (рис. 11.35).

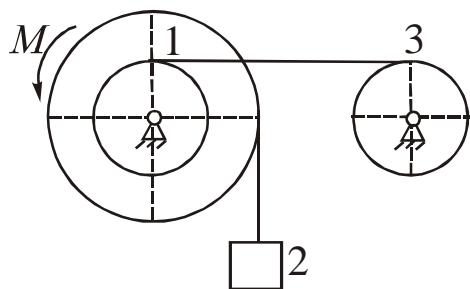


Рис. 11.35

*Задача 11.35.* Трубка 1 с моментом инерции  $J$  и длиной  $l$  вращалась с угловой скоростью  $\omega_0$ . При этом шарик с массой  $m$  (его следует принять за МТ) находился на расстоянии  $a$  от оси  $z$ . Определить угловую скорость трубки в момент, когда шарик достигнет ее конца (рис. 11.36).

*Задача 11.36.* Круглая пластина 2 веса 50 Н и радиуса 0,2 м вращалась с угловой скоростью  $1 \text{ с}^{-1}$  (рис. 11.37). Определить, какой будет угловая скорость через 1 с после начала перемещения материальной точки  $M_1$  с массой 1 кг, если закон ее относительного движения имеет вид:

$$O_1M_1 = s(t) = 6t^2 - 3t \text{ (м)}.$$

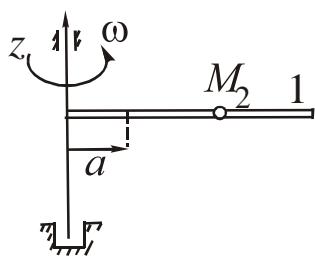


Рис. 11.36

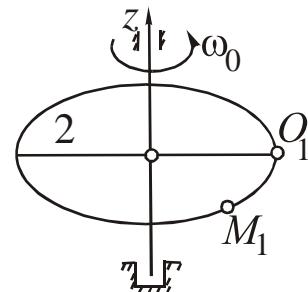


Рис. 11.37

#### 11.4. Применение принципа Даламбера

С помощью принципа Даламбера можно решить задачи динамики материальной точки и механической системы.

Общий порядок решения следующий.

1. Установить, какое тело или систему тел следует рассматривать для решения задачи.
2. Составление чертежа.

Изображают МТ или МС и указывают действующие на них силы, включая реакции связей (для МС – только внешние силы).

### 3. Определение сил инерции.

Вычисляют ускорения МТ, центров масс и угловые ускорения тел МС, для чего при необходимости делают кинематический расчет.

Вычисляют силы инерции и указывают их на чертеже:

- для МТ по формуле (10.35) (в ряде случаев вместо полного ускорения подставляют его составляющие  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{a}_n$ );

- для тел МС – главные векторы  $\bar{R}^u$  главные моменты  $M^u$  по формулам (10.42)–(10.45) в зависимости от вида движения тела.

### 4. Составление расчетного уравнения (уравнений):

- для МТ составляют уравнение (10.36) в векторной форме и проецируют его на подвижную или неподвижную ось (оси);

- для МС составляют уравнения равновесия для полученной системы сил (сходящейся, плоской или пространственной) соответственно в виде (10.37), (10.40) или (10.41).

### 5. Нахождение неизвестных и анализ результатов.

Решают расчетное уравнение (систему уравнений) относительно неизвестных. Если количество неизвестных больше числа уравнений, дополнительные уравнения равновесия составляют, рассматривая отдельные тела механизма.

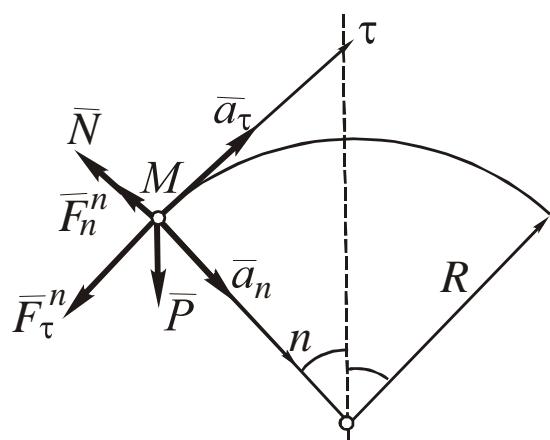


Рис. 11.38

Если условие задачи допускает неоднозначное толкование, уточняют, изменится ли решение при других значениях принятых параметров.

*Пример 1.* Определить давление автомобиля массой 1 т, въезжающего со скоростью 20 м/с на мост, имеющий форму дуги окружности радиуса 200 м с центральным углом  $60^\circ$ . Автомобиль считать материальной точкой.

*Решение.* 1. Рассматриваем движение автомобиля (МТ). Не-

известная сила равна по величине и противоположна реакции поверхности моста, приложенной к автомобилю.

2. Изображаем материальную точку  $M$ , прикладываем к ней активную силу  $\bar{P}$ , реакцию  $\bar{N}$  поверхности (рис. 11.38).

3. Определяем ускорение МТ:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a_n = V^2 / R = 20^2 / 200 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$a_\tau$  по условию неизвестна.

Определяем составляющие силы инерции

$$\text{МТ: } \bar{F}_n^I = -m\bar{a}_n; \quad F_n^I = ma_n = 2 \text{ (кН);}$$

$$\bar{F}_\tau^I = -m\bar{a}_\tau \text{ (величина } \bar{F}_\tau^I \text{ неизвестна).}$$

Изображаем на чертеже сначала вектора  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{a}_n$ , а затем –  $\bar{F}_\tau^I$  и  $\bar{F}_n^I$ .

4. Принцип Даламбера для МТ в векторной форме (10.36) имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{F}^I = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_n^I + \bar{F}_\tau^I = 0. \quad (11.28)$$

Для определения  $\bar{N}$  необходимо проецировать уравнение на нормаль  $n$ :

$$(n): \quad P \cos 30 - N - F_n^I = 0. \quad (11.29)$$

5. Из (11.29) определяем  $N$ :

$$N = P \cos 30 - F_n^I = mg \cdot \cos 30 - F_n^I = 1 \cdot 10 \cdot 0,87 - 2 = 6,7 \text{ (кН).}$$

Давление на мост равно  $N$  и направлено по нормали  $n$  вниз.

Величина  $N$  не зависит от силы инерции  $\bar{F}_\tau^I$  (ускорения  $\bar{a}_\tau$ ),

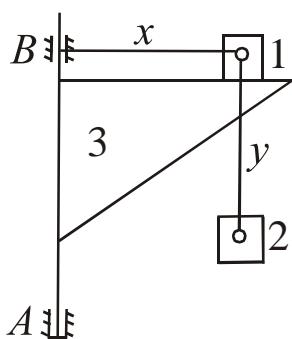


Рис. 11.39

а также трения скольжения, т.к. эти векторы направлены по оси  $\tau$ , следовательно, не повлияют на вид уравнения (11.29).

*Пример 2.* Определить реакции шарниров  $A$  и  $B$  крана в зависимости от расстояния  $x$  от тележки 1 с массой  $m_1$  до оси  $y$ , если тележка движется с ускорением  $a_1$  вправо, а груз 2 опускается на тросе длиной  $y$  с ускорением  $a_2$ .  $AB = d$ . Массой крана пренебречь (рис. 11.39).

*Решение.* 1. Рассматриваем равновесие МС, состоящий из тел 1, 2, 3, отбрасывая связи  $A$  и  $B$  (рис. 11.40).

2. Изображаем МС, прикладываем к ней силы тяжести  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ , реакции  $\bar{X}_B$  шарнира  $B$  и  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  подпятника  $A$  (составляющие, перпендикулярные чертежу, равны нулю, т.к. все силы лежат в одной плоскости). Внутренними являются силы взаимодействия между телами 1–3 (реакции нити и поверхностей).

3. Тела системы движутся поступательно, поэтому определяем главные векторы сил инерции по формулам (10.44) (главные моменты равны нулю).

$$\bar{R}_1^u = -m_1 \bar{a}_1.$$

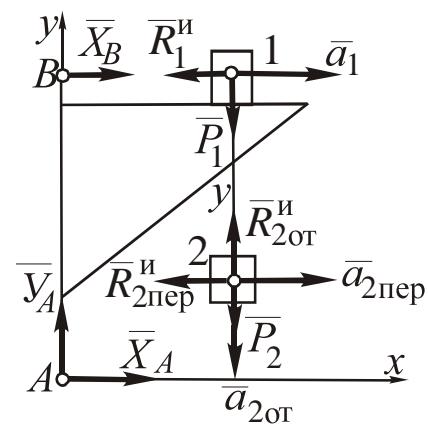


Рис. 11.40

Т.к. тело 2 участвует в составном движении (переносное – вместе с телом 1 и относительно него):  $\bar{a}_{2a} = \bar{a}_{2\text{пер}} + \bar{a}_{2\text{от}} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ ;

$$\bar{R}_{2\text{пер}}^u = -m_2 \bar{a}_{2\text{пер}} = -m_2 \bar{a}_1;$$

$$\bar{R}_{2\text{от}}^u = -m_2 \bar{a}_{2\text{от}} = -m_2 \bar{a}_2.$$

4. Т.к. система сил на рис. 11.40 – произвольная плоская, составляем систему уравнений равновесия в виде (10.40):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^u = X_A + X_B - R_1^u - R_{2\text{пер}}^u = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^u = Y_A - P_1 - P_2 + R_{2\text{от}}^u = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k^u) &= -X_B d - (P_1 + P_2 - R_{2\text{от}}^u)x + \\ &+ R_1^u d + R_{2\text{пер}}^u(d - y) = 0. \end{aligned}$$

Подставляем в систему расчетных уравнений значения сил инерции:

$$\begin{cases} X_A + X_B - a_1(m_1 + m_2) = 0; \\ Y_A - g(m_1 + m_2) + m_2 a_2 = 0; \\ -X_B d - [(m_1 + m_2)g - m_2 a_2]x + m_1 a_1 d + m_2 a_1(d - y) = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем значения реакций  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$  (ввиду громоздкости не приводятся).

*Пример 3.* Определить натяжения нитей и реакцию шарнира, используя условие и результаты расчета примера 4 п. 11.3.

*Решение.* 1. Т.к. все требуемые реакции приложены к блоку 2, применяем принцип Даламбера к этому телу.

2. Изображаем блок 2, прикладываем к нему активную силу  $P_2$ , реакции нитей  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_3$ , составляющие реакции осевого шарнира  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{Y}_2$ .

3. Т.к. движение тела вращательное

$$R_2^u = 0; \quad M_2^u = -J_2 \varepsilon_2; \quad M_2^u = m_2 i_2^2 \frac{a_1}{r_2}.$$

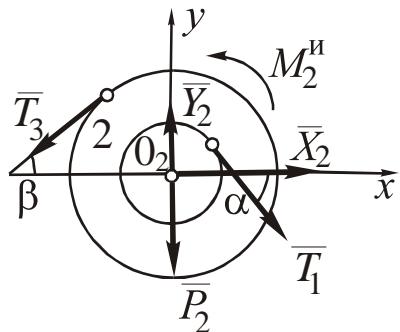


Рис. 11.41

$$< J_2 = m_2 i_2^2; \quad \varepsilon_2 = a_1 / r_2 >.$$

Пару с моментом  $M_2^u$  направляем в сторону, обратную  $\varepsilon_2$  ( $\omega_2$  на рис. 11.22).

4. Составляем уравнения равновесия для плоской системы сил на рис. 11.41:

$$\sum F_{kx} + \sum F_{kx}^u = X_2 - T_3 \cos \beta + T_1 \cos \alpha = 0 \\ ;$$

$$\sum F_{ky} + \sum F_{ky}^u = Y_2 - P_2 - T_3 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum m_{02}(F_k) + \sum m_{02}(F_k^u) = T_3 R_2 - T_1 r_2 + M_2^u = 0.$$

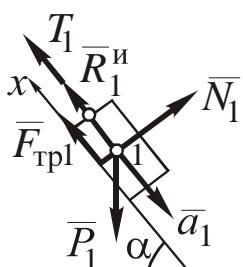


Рис. 11.42

Т.к. в системе из 3 уравнений 4 неизвестных, рассмотрим дополнительно движение тела 1. К телу приложены активная сила  $\bar{P}_1$ , реакция связей  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}1}$ ,  $\bar{T}_1$ . Т.к. движение тела

поступательное,  $\bar{R}_1^u = -m_1 \bar{a}_1$ ;  $M_1^u = 0$  (рис. 11.42).

Для системы сходящихся сил на рис. 11.42 составляем уравнение проекций на ось  $x$ :

$$\sum F_{kx} + \sum F_k^u_x = -P_1 \sin \alpha + F_{\text{тр}1} + T_1 + R_1^u = 0.$$

Подставляя в уравнения значения сил инерции, получаем систему из 4 уравнений с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} X_2 - T_3 \cos \beta + T_1 \cos \alpha = 0; \\ Y_2 - m_2 g - T_3 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = 0; \\ T_3 R_2 - T_1 r_2 + m_2 i_2^2 \frac{a_1}{r_2} = 0; \\ m_1 g (f \cos \alpha - \sin \alpha) + T_1 + m_1 a_1 = 0. \end{cases}$$

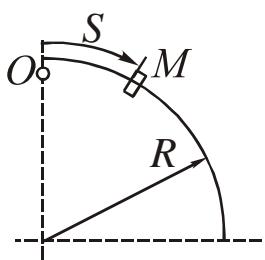
Решая систему, определяем неизвестные  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $T_1$ ,  $T_3$  (ввиду громоздкости не приводятся).

*Задание.* Решить самостоятельно задачи 11.37–11.46.

*Задача 11.37.* Определить натяжение сцепного троса, соединяющего автомобиль с прицепом массы  $m$  при движении на подъем под углом  $\alpha$  с ускорением  $a$ , если приведенный коэффициент трения равен  $f$ .

*Задача 11.38.* Самолет, имея скорость 200 м/с, выходит из пика в вертикальной плоскости по дуге радиуса 1000 м. Определить перегрузку, которую испытывает летчик в начальной и нижней точке дуги.

*Задача 11.39.* Камень массы 0,1 кг привязан к нити длиной 0,5 м, имеющей прочность 5Н. Определить, при какой угловой скорости нити при раскручивании в вертикальной плоскости она разорвется.



*Задача 11.40.* Кольцо массы  $m = 1$  кг скользит по гладкой дуге радиуса  $R = 3$  м. Закон движения кольца  $OM = s(t) = \pi t^3$  (м). Определить давление коль-

Рис. 11.43

ца на дугу в момент 1 с (рис. 11.43).

*Задача 3.41.* По галерее 1 козлового крана влево движется тележка 2 с ускорением  $\bar{a}_2$ , при этом груз 3 поднимается с ускорением  $\bar{a}_3$ . Массы тел  $m_1, m_2, m_3$ . Считая известными координаты центров масс всех тел, составить уравнения для определения реакций шарниров  $A$  и  $B$  (рис. 11.44).

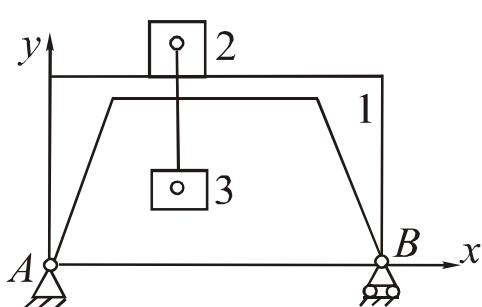


Рис. 11.44

*Задача 11.42.* В задаче 11.24 определить натяжение нити, ускорение грузов 1, 2, 3 и давление призмы 4 на основание, пренебрегая трением.

*Задачи 11.43–11.46.* В задачах 11.31–11.34 составить уравнения для определения натяжений нитей и реакций шарниров, используя необходимые результаты предыдущих решений.

## 12. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Аналитическая механика* – раздел теоретической механики, в котором уравнения равновесия и движения механической системы представляются в аналитической форме. Это дает возможность избежать применения векторных уравнений статики и динамики, получить общие методы ("принципы") решения задач. В основу этих принципов положено понятие "возможного перемещения" механической системы.

### 12.1. Классификация связей в аналитической механике

В предыдущих разделах под связью понималось любое устройство, препятствующее перемещению тела. Как правило, этого достаточно для решения задач статики и динамики. Для выработки общих методов решения задач механики необходимо ввести более широкое понятие связи.

*Связь* – любое условие, накладываемое на движение точек

МС, зависящее от них положения, кинематических характеристик и времени. В общем случае *действие связей*, наложенных на МС, состоящую из  $n$  точек, математически выражается следующим уравнениями вида

$$f(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n, \bar{V}_1 \dots \bar{V}_n, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n, t) = 0. \quad (12.1)$$

В зависимости от конкретного вида уравнения (12.1) различают следующие виды связей: геометрические и кинематические; стационарные и нестационарные; голономные и неголономные; удерживающие и неудерживающие.

*Кинематическими* называют связи, уравнение которых содержит и координаты точек и производные от них, уравнения *геометрических* связей содержат только координаты точек:

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad k = 1 \dots n.$$

Так, при упругой связи (пружина)  $F_y = -cx$ , т.е. связь – геометрическая, при комбинации упругой связи с вязким трением (пружина с амортизатором)  $R = -cx - \mu\dot{x}$  – кинематическая.

*Нестационарными* называют связи, в уравнение которых

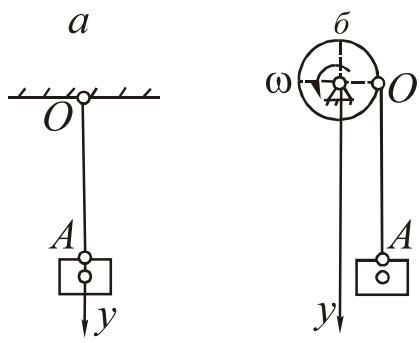


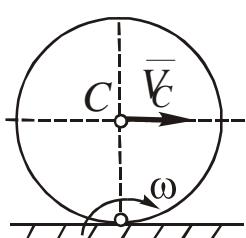
Рис. 12.1

явно входит время  $t$ , *стационарными* – те, в уравнение которых  $t$  не входит. Обычная растянутая нить (рис. 12.1, *a*) – стационарная связь.

$y_A = OA = \text{const}$ ,  
нить лебедки (рис. 12.1, *b*) – нестационарная.

$$y_A = OA - \omega rt, \quad \text{при } \omega = \text{const}.$$

*Голономными* – являются все геометрические связи, а также те кинематические, которые путем интегрирования можно свести к геометрическим, *неголономными* – неинтегрируемые связи.



Шероховая поверхность при качении колеса без проскальзывания (рис. 12.2) является *интегрируемой кинематической*, т.е. голономной связью, т.к. из кинематического уравнения  $V_C = \omega R$  или  $\dot{x}_C = \dot{\phi}R$

Рис. 12.2

интегрированием при нулевых начальных условиях следует уравнение координат  $x_C = \varphi R$ .

При качении шара по той же поверхности кинематическое уравнение сохраняется, однако уравнение связи координат из него получить невозможно, т.к. траектория точки  $C$  в общем случае произвольна.

*Удерживающими* называют связи, от которых МС не может освободиться, *неудерживающими* – для которых это возможно при определенных условиях.

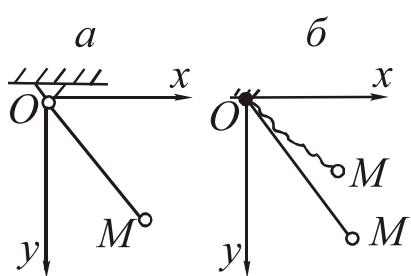


Рис. 12.3

Например, стержень (рис. 12.3, а) – удерживающая связь:

$$OM(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)},$$

а нить (рис. 12.3, б) – неудерживающая, т.к. возможно ее смятие:

$$OM(t) \leq \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

В дальнейшем рассматривают только МС с *голономными, стационарными и удерживающими связями*.

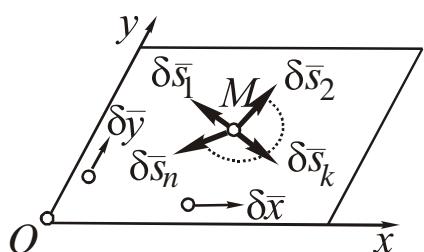
Кроме указанных признаков и видов связей сохраняется их деление на идеальные и реальные, рассмотренное ранее в п. 10.2.

## 12.2. Возможные перемещения и число степеней свободы механической системы

*Возможным перемещением* называют совокупность перемещений точек МС, удовлетворяющих двум требованиям:

- 1) бесконечно малые;
- 2) допускаемые наложенными на МС связями.

Рассмотрим перемещения в плоскости МС, состоящей из одной МТ (рис. 12.4). Любое из перемещений  $\delta\bar{s}_k$  ( $k = 1 \dots n$ )



удовлетворяет данному выше определению, следовательно, все они являются возможными. Действительное перемещение точки  $d\bar{s}$ , направленное по вектору скорости  $\bar{V}$  точки, единст-

Рис. 12.4

венно, и совпадает с одним из возможных, если связь, удерживающая и стационарная (у нестационарной связи абсолютное перемещение зависит от переносного перемещения вместе со связью).

*Числом степеней свободы* МС называют число независимых между собой возможных перемещений, которое максимально можно задать МС. Например, на рис. 12.4, любое перемещение  $\delta\bar{b}_k$  может быть выражено через независимые перемещения  $\delta\bar{x}$  и  $\delta\bar{y}$ , следовательно, МТ в плоскости имеет 2 степени свободы ( $S = 2$ ). Свободная точка  $M$  имеет 3 независимых координаты ( $S = 3$ ).

Положение вращающегося тела определяется координатой  $\varphi$ , а поступательное –  $x$ . Данные МС имеют по 1 степени свободы ( $S = 1$ ) (рис. 12.5).

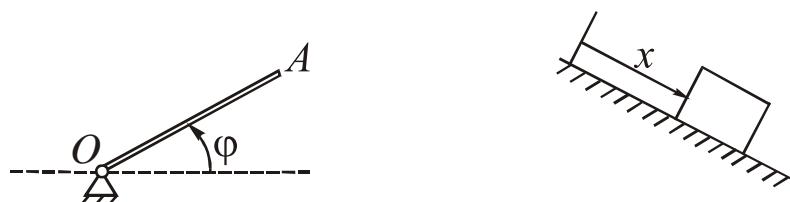


Рис. 12.5

При плоском и сферическом движении тела можно задать 3 независимых возможных перемещения ( $S = 3$ ), при свободном – 6 ( $S = 6$ ) (рис. 12.6).

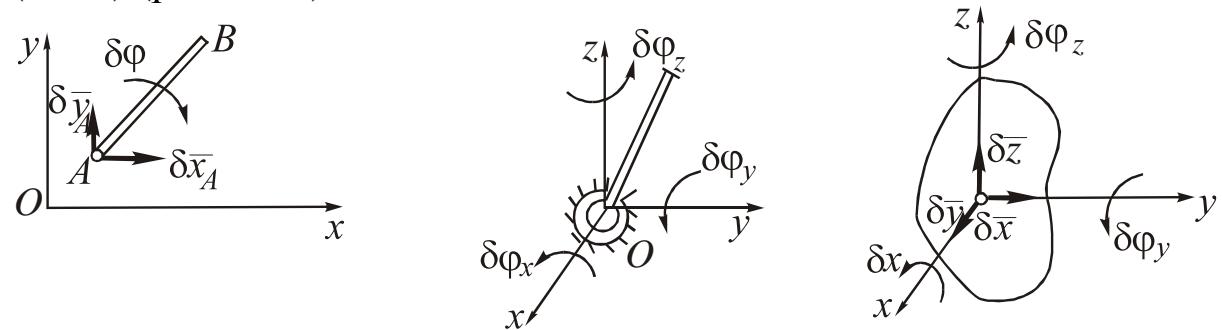


Рис. 12.6

Механизмы, имеющие большое количество элементов, часто имеют лишь одну степень свободы ( $S = 1$ ). Например, из кинематики следует, что в кривошипо-шатунном механизме при задан-

ном конечном перемещении кривошипа  $OA$  – угловой скорости  $\omega_{OA}$  величины и направления остальных скоростей  $\bar{V}_A$ ,  $\omega_{AB}$ ,  $\bar{V}_B$  однозначно связаны с  $\omega_{OA}$ . Следовательно, данная МС в случае стационарных связей имеет  $S = 1$ , действительные и возможные перемещения ее точек совпадают. Совокупность возможных перемещений  $\delta\phi_{OA}$ ,  $\delta\bar{s}_A$ ,  $\delta\phi_{AB}$  и  $\delta\bar{s}_B$  называют возможным перемещением механизма (рис. 12.7).

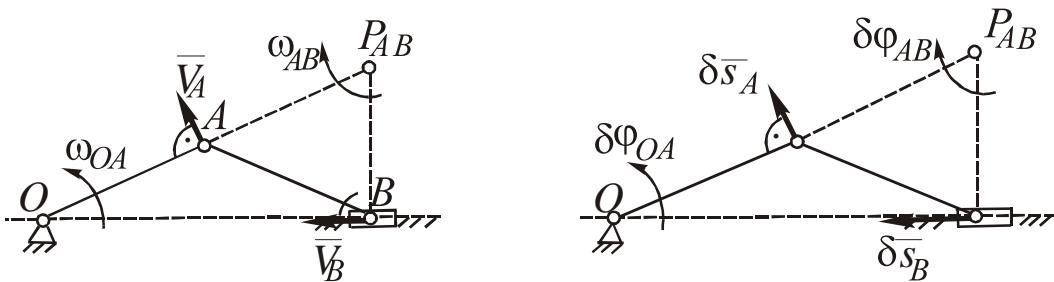
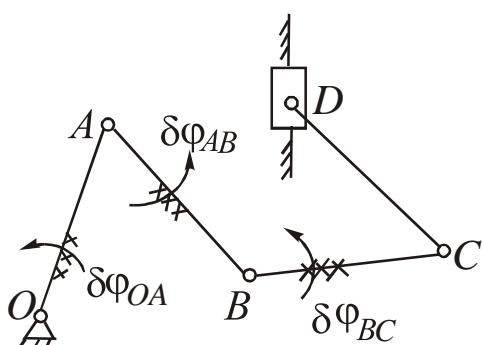


Рис. 12.7

Перемещения на рис. 12.7 должны удовлетворять признакам возможных перемещений:

- 1) после перемещения все точки и звенья механизма должны оказаться в начальном положении, т.е., углы, определяющие положения звеньев, не должны измениться;
- 2) размеры всех тел и наложенные связи должны сохраняться, например, точка  $B$  должна перемещаться только по вертикали, а  $O$  – оставаться неподвижной.

В более сложных механизмах для определения числа степеней свободы применяют *метод остановок*: число степеней свободы равно числу "лишенных" независимых перемещений ("остановок") тел механизма, достаточных для его полной остановки.



Например, на рис. 12.7 достаточно применить одну "остановку" – "лишить"  $OA$  углового перемещения  $\delta\phi_{OA}$ , и весь механизм остановится.

В механизме на рис. 12.8 достаточно трех остановок ("лишения" возможных угловых переме-

Рис. 12.8

щений  $\delta\varphi_{OA}$ ,  $\delta\varphi_{AB}$  и  $\delta\varphi_{BC}$ ), следовательно,  $S = 3$ .

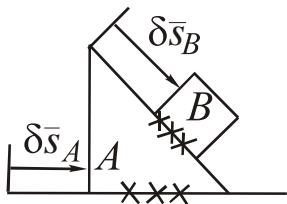


Рис. 12.9

В механизме на рис. 12.9  $S = 2$  (достаточно устранения перемещений  $\delta s_A$  и  $\delta s_B$  при поступательном движении тел).

Реальные механизмы могут иметь очень большие значения  $S$ , а также  $S = 0$  (если связи не допускают ни одного перемещения).

### 12.3. Принцип возможных перемещений

Рассмотрим условия равновесия МС, состоящей из точек  $M_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) и имеющей  $S$  степеней свободы.

Зададим, МС одно из возможных перемещений, при котором точка  $M_k$  получит возможное перемещение  $\delta s_k$ , которое совпадает с элементарным приращением  $\delta \bar{r}_k$  радиуса-вектора точки  $\bar{r}_k$  (рис. 12.10).

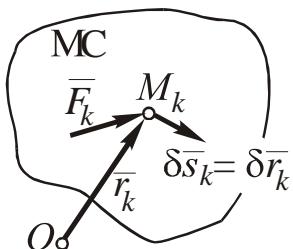


Рис. 12.10

Определим сумму элементарных работ всех сил, приложенных к МС:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k, \quad (12.2)$$

где  $\bar{F}_k$  – равнодействующая всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке  $M_k$ .

*Принцип возможных перемещений* состоит в том что, для равновесия МС с голономными, стационарными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил равнялось нулю на любом возможном перемещении.

Докажем, что условие  $\sum_{k=1}^n \delta A_k = 0$  необходимо для равновесия МС. При равновесии МС каждая из ее точек также находится

в равновесии, т.е.  $\bar{F}_k = 0$  ( $k = 1 \dots n$ ). Вычисляя сумму элементарных работ в соответствии с (12.2), получим

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k = 0. \quad (12.3)$$

Доказательство *достаточности* признака. Предположим *противное*, т.е. при выполнении условия  $\sum_{k=1}^n \delta A_k = 0$  МС не находится в равновесии. Тогда для одной или нескольких точек будет иметь место  $\bar{F}_k \neq 0$  и эти точки совершают действительные перемещения в направлении  $\bar{F}_k$ . Задавая возможные перемещения, совпадающие с действительными, получим

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k \neq 0, \text{ что противоречит условию.}$$

Математически принцип возможных перемещений выражается уравнением (12.3). Элементарные работы сил могут быть определены также аналитически:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0 \quad (12.4)$$

или через моменты сил и возможные угловые перемещения  $\delta \varphi_k$  (при непоступательном перемещении тел МС)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) \delta \varphi_k = 0, \quad (12.5)$$

где 0 – неподвижная точка звена (при плоском движении это будет МЦС звена).

*Примечания.* 1. Принцип возможных перемещений справедлив и для неудерживающих связей (поверхности, нити), если возможность освобождения МС от этих связей не реализуется.

2. Ранее в п. 10.2 было рассмотрено понятие идеальных связей. В общем смысле под идеальными понимают связи, элементарные работы реакций которых равны нулю на любом возможном перемещении системы. Т.к. действительное перемещение систем со стационарными связями совпадает с одним из возможных, то связи, отнесенные ранее к идеальным, остаются такими и

при задании возможного перемещения. Поэтому при решении задач из (12.3)–(12.5) следует исключить реакции идеальных связей (п. 10.2). Если все связи идеальны, в расчетные уравнения входят лишь активные силы, действующие на МС.

3. При делении (12.3) на возможный интервал времени  $\delta t$  получим

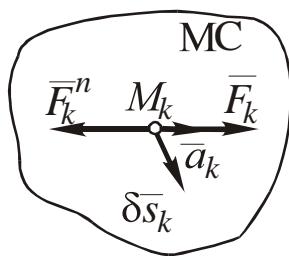
$$\sum_{k=1}^n \frac{\delta A_k}{\delta t} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\delta \bar{s}_k}{\delta t} = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^n N_{Fk} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \bar{V}_k = 0, \quad (12.6)$$

или уравнение *возможных мощностей*, при использовании которого производят расчет не возможных перемещений, а скоростей точек.

#### 12.4. Общее уравнение динамики

*Общее уравнение динамики* позволяет получить общий метод решения задач динамики путем последовательного применения к движущейся МС принципов Даламбера и возможных перемещений.

Рассмотрим движущуюся МС, состоящую из материальных точек  $M_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) и имеющую  $S$  степеней свободы.



Применим к МС принцип Даламбера, тогда для точки  $M_k$  (п. 10.5):

$$\bar{F}_k + \bar{F}_k^u = 0, \quad (12.7)$$

где  $\bar{F}_k$  – равнодействующая всех активных сил и реакций связей, приложенных к  $M_k$ ;  $\bar{F}_k^u = -m_k \bar{a}_k$  – сила инерции  $M_k$ .

Применим к МС принцип возможных перемещений – зададим одно из возможных перемещений, при этом точка  $M_k$  получит возможное перемещение  $\delta \bar{s}_k$ , определим суммы элементарных работ для  $M_k$  и МС, приравняем их нулю:

$$(M_k): \quad \delta A_k + \delta A_k^u = \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k + \bar{F}_k^u \cdot \delta \bar{s}_k$$

$$(MC): \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^u \cdot \delta \bar{s}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = 0, \quad (12.8)$$

т.е. при движении механической системы в любой момент времени сумма элементарных работ всех приложенных сил и сил инерции всех точек равна нулю на любом возможном перемещении МС.

Математически общее уравнение динамики выражается уравнением (12.8), а также в аналитической форме

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[ (F_{kx} + F_{kx}^u) \delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^u) \delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^u) \delta z_k \right] = 0, \quad (12.9) \end{aligned}$$

или через моменты сил и возможные угловые перемещения  $\delta\varphi_k$  (при непоступательном перемещении тел МС)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = \sum_{k=1}^n \left[ m_0(\bar{F}_k) + m_0(\bar{F}_k^u) \right] \delta\varphi_k = 0. \quad (12.10)$$

*Примечания.* 1. При решении задач из (12.8)–(12.10) следует исключать реакции идеальных связей. Если все связи идеальны, то в расчетные уравнения входят лишь активные силы и силы инерции материальных точек МС.

2. При подстановке (12.7) в (12.9) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[ (F_{kx} - m_k a_{kx}) \delta x_k + (F_{ky} - m_k a_{ky}) \delta y_k + (F_{kz} - m_k a_{kz}) \delta z_k \right] = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[ (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k \right] = 0. \quad (12.1) \end{aligned}$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением движения МС*.

3. При делении (12.8) на элементарный интервал времени  $\delta t$ , получим уравнение возможных мощностей

$$\sum_{k=1}^n \frac{\delta A_k}{\delta t} + \sum_{k=1}^n \frac{\delta A_k^u}{\delta t} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\delta \bar{s}_k}{\delta t} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^u \cdot \frac{\delta \bar{s}_k}{\delta t} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^n \delta N_k + \sum_{k=1}^n \delta N_k^u = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \bar{V}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^u \cdot \bar{V}_k = 0. \quad (12.12)$$

## 12.5. Обобщенные координаты

### 12.5.1. Понятие обобщенных координат

*Обобщенными координатами* называют независимые скалярные параметры, имеющие физический смысл, однозначно определяющие положение МС, число которых равно числу степеней свободы МС. Обобщенные координаты принято обозначать символом  $q$ .

Например, стержень с неподвижным осевым шарниром (рис. 12.12) имеет одну степень свободы ( $S = 1$ ). Для такой МС в качестве обобщенной координаты могут быть выбраны хорошо известные угловая координата  $\varphi$  или дуговая координата точки  $A$   $s = A_0A$ :  $q = \varphi$ ,  $q = s$ , а также необычные параметры – площадь сектора  $\sigma$  или объем  $V$ :  $q = \sigma$ ,  $q = V$ . Выбор этих обобщенных координат соответствует данному определению, при этом единицами размерности  $q$  могут являться, соответственно,

Рис. 12.12

рад, м, м<sup>2</sup> или м<sup>3</sup>.

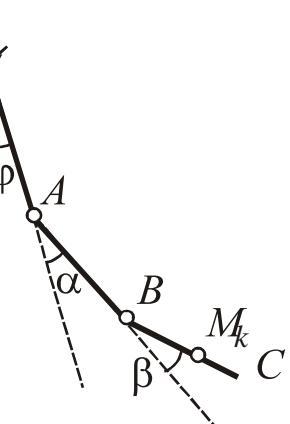


Рис. 12.13

Для 3-степенного физического маятника ( $S = 3$ ) на рис. 12.13 выберем за обобщенные угловые координаты, причем удобно указывать относительные координаты, используя в качестве подвижной оси отсчета ось движущегося стержня:

$$q_1 = \varphi; \quad q_2 = \alpha; \quad q_3 = \beta.$$

В общем случае положение (радиус-вектор) произвольной точки  $M_k$  является функцией всех обобщенных координат, т.е. *нескольких переменных*.

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (12.13)$$

Например, для рис. 12.13  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(\varphi, \alpha, \beta)$ .

*Уравнениями движениями* МС в обобщенных координатах называют систему уравнений вида

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_s = q_s(t). \quad (12.14)$$

Элементарные (бесконечно малые) приращения обобщенных координат обозначают  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ .

Обобщенными скоростями и ускорениями называют соответственно первые и вторые производные по времени от функций (12.14):

$$\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t) \text{ и } \ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_s(t).$$

### 12.5.2. Обобщенная сила

Рассмотрим МС, состоящую из точек  $M_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), имеющую  $s$  степеней свободы, движение которой задано обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (рис. 12.14).

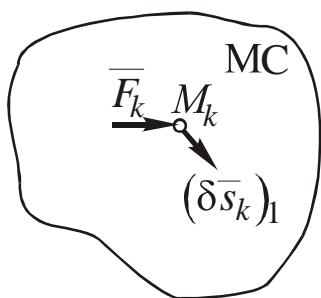


Рис. 12.14

Зададим элементарное приращение  $\delta q_1$  первой обобщенной координате. При этом точка  $M_k$  совершил возможное перемещение  $\delta \bar{s}_k$ . Определим сумму элементарных работ всех сил  $\bar{F}_k$ , приложенных к точкам на заданном возможном перемещении:

$$\text{МС: } \left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1 = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot (\delta \bar{s}_k)_1. \quad (12.15)$$

Т.к.  $\delta \bar{s}_k = \delta \bar{r}_k$ , этот вектор можно вычислить как частный дифференциал функции (12.13):

$$(\delta \bar{s}_k)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1. \quad (12.16)$$

Предположим, что существует сила  $Q_1$ , которая при умножении на элементарное приращение координаты  $\delta q_1$  дает величину  $\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1$ . Эту силу назовем *обобщенной*:

$$Q_1 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1}{\delta q_1} = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot (\delta \bar{s}_k)_1}{\delta q_1} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}. \quad (12.17)$$

Аналогично, задавая элементарные приращения обобщенным координатам  $q_2 \dots q_s$ , получим соответствующие обобщенные силы

$$Q_2 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_2}{\delta q_2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}; \dots Q_S = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_S}{\delta q_S} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S}. \quad (12.17')$$

Таким образом, *обобщенная сила* равна отношению суммы элементарных работ, совершаемых всеми силами МС при задании элементарного приращения соответствующей обобщенной координате, к величине этого приращения.

Размерность  $Q$  зависит от размерности обобщенной координаты. Для примера на рис. 12.12 единицами размерности  $Q$  будут соответственно: Дж/рад = Дж; Дж/м = Н; Дж/м<sup>2</sup> = Н/м; Дж/м<sup>3</sup> = Н/м<sup>2</sup>.

*Примечания.* 1. При вычислениях обобщенных сил для гольономных систем из выражений (12.17), (12.17') исключают реакции идеальных связей (п. 10.2).

2. Для потенциальных сил (п. 9.6) обобщенную силу можно вычислить через силовую функцию  $U$  или потенциальную энергию П. Т.к.  $\sum_{k=1}^n \delta A_k = \delta U = -\delta \Pi$ , заменяя в (12.17), (12.17') элементарные работы на частные дифференциалы функций  $U$  и  $\Pi$ , получим

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \dots Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (12.18)$$

### 12.5.3. Условия равновесия механической системы в обобщенных координатах

Рассмотрим МС из п. 12.5.2 (рис. 12.14), находящуюся в равновесии.

Применим к МС принцип возможных перемещений (п. 12.3): зададим МС возможное перемещение, задав элементарное приращение  $\delta q_1$  обобщенной координате  $q_1$ , вычислим сумму элементарных работ всех сил МС, используя обобщенную силу  $Q_1$ , и приравняем эту сумму нулю:

$$\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1 = Q_1 \delta q_1 = 0, \text{ откуда } Q_1 = 0. \quad (12.19)$$

Аналогично, задавая элементарные приращения  $\delta q_2 \dots \delta q_s$  обобщенным координатам  $q_2 \dots q_s$ , получим:

$$\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_2 = Q_2 \delta q_2 = 0; Q_2 = 0; \\ \dots \dots \dots \quad (12.19')$$

$$\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_2 = Q_s \delta q_s = 0; Q_s = 0.$$

Таким образом, для равновесия МС необходимо и достаточно, чтобы все ее обобщенные силы равнялись нулю.

Уравнения (12.19), (12.19') представляют собой принцип возможных перемещений в терминах обобщенных координат.

*Примечание.* Для потенциальных сил (п. 9.6) система уравнений (12.19), (12.19') с учетом (12.18) будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0; \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0; \dots \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \quad (12.20)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0; \dots \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (12.21)$$

### 12.5.4. Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах

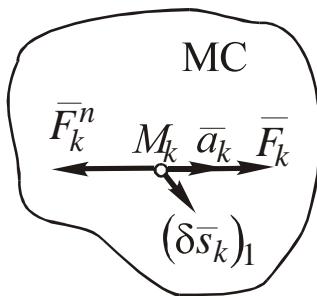


Рис. 12.15

Рассмотрим МС из п. 12.5.2, находящуюся в движении (рис. 12.15). Применим к МС общее уравнение динамики (п. 12.4): зададим МС возможное перемещение, задав элементарное приращение  $\delta q_1$  обобщенной координате  $q_1$ , вычислим суммы элементарных работ всех сил МС  $\bar{F}_k$  и сил инерции  $\bar{F}_k^{\text{и}}$  всех точек МС, используя соответствующие обобщенные силы, и приравняем их нулю:

$$\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1 + \left( \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{и}} \right)_1 = Q_1 \delta q_1 + Q_1^{\text{и}} \delta q_1 = 0,$$

откуда

$$Q_1 + Q_1^{\text{и}} = 0, \quad (12.22)$$

где  $Q_1^{\text{и}}$  – обобщенная сила инерции, вычисленная аналогично (12.17)

$$Q_1^{\text{и}} = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{и}} \right)_1}{\delta q_1} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{\text{и}} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}. \quad (12.23)$$

Аналогично, задавая элементарные приращения  $\delta q_2 \dots \delta q_s$  обобщенным координатам  $q_2 \dots q_s$ , получим:

$$Q_2 + Q_2^{\text{и}} = 0; \dots Q_s + Q_s^{\text{и}} = 0. \quad (12.22')$$

Уравнения (12.22), (12.22') называют *уравнениями движения МС* или общим уравнением динамики в обобщенных координатах.

Применение полученных уравнений для решения задач затруднено необходимостью определения сил инерции  $\bar{F}_k^{\text{и}}$  и обобщенных сил инерции  $Q_1^{\text{и}} \dots Q_s^{\text{и}}$ . Последние могут быть выражены

через кинетическую энергию МС (п. 10.1):  $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}$ .

Рассмотрим обобщенную силы инерции  $Q_1^{\text{и}}$ .

$$-Q_1^{\text{и}} = -\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{\text{и}} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}. \quad (12.23)$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) &= \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} + \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right), \\ \text{откуда следует } \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left( \bar{V}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) - \bar{V}_k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right). \end{aligned} \quad (12.24)$$

По правилу Лопиталя

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \left( \frac{d\bar{r}_k}{dt} \right)}{\partial \left( \frac{dq_1}{dt} \right)} = \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_1}. \quad (12.25)$$

По свойству производных

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{d\bar{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_1}. \quad (12.26)$$

Подставляя (12.24)–(12.26) в (12.23), получим

$$\begin{aligned} -Q_1^{\text{и}} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_1} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

После подстановки (12.27) в (12.22):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1. \quad (12.28)$$

Аналогично, преобразуя  $Q_2^{\text{и}} \dots Q_s^{\text{и}}$  и подставляя полученные выражения в (12.22'), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2;$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_S} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_S} = Q_S. \quad (12.28')$$

Систему уравнений (12.28), (12.28') называют уравнениями Лагранжа II рода.

1. Для потенциальных сил с учетом (12.18) можно ввести функцию Лагранжа  $L = T - \Pi$ , уравнение (12.28) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_1} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0. \end{aligned} \quad (12.29)$$

В (12.29) учтено, что  $\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ , т.к. потенциальная

энергия МС  $\Pi$  не зависит от обобщенных скоростей.

Аналогично для остальных обобщенных координат:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0;$$

—  
—

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_S} = 0. \quad (12.29')$$

## **13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

## 13.1. Применение принципа возможных перемещений

С помощью принципа возможных перемещений можно решить задачи статики на равновесие механических систем.

Порядок решения задач следующий.

*1. Анализ условия задач и преобразование механизма.*

Различают задачи двух типов:

– механизм имеет 1 степень свободы, требуется определить одну действующую силу (момент пары сил) или соотношение двух сил (моментов пар сил) при равновесии механизма;

– механизм имеет 0 степеней свободы (т.е. невозможно задать ни одного возможного перемещения без нарушения связей), требуется определить одну или несколько реакций связей.

В последнем случае следует для расчета соответствующей реакции, отбросив связь, рассматривать реакцию как активную силу. Если реакция имеет несколько составляющих, их определяют по отдельности. Для этого изменяют функцию связи таким образом, что она не препятствовала перемещению точки ее приложения в направлении искомой реакции (угловому перемещению тела в направлении искомой пары с реактивным моментом). При этом исходная связь превращается в новую: неподвижный осевой шарнир заменяют на ползун, направляющая которого является линией действия искомой реакции; жесткую заделку – на неподвижный осевой шарнир при определении реактивного момента или на скользящую заделку, направляющая которой является линией действия искомого вектора реакции (табл. 13.1).

Таким образом, в задачах второго типа механизм после преобразования связи приобретает одну степень свободы. При этом определение каждой составляющей реакции приводит к новому механизму и представляет собой самостоятельную задачу.

*2. Расчет возможного перемещения механизма.*

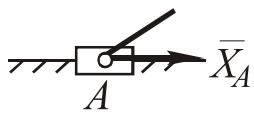
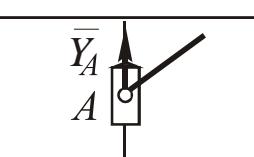
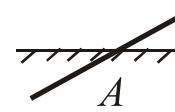
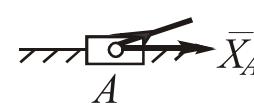
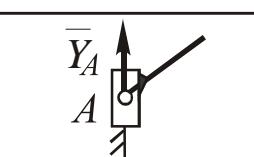
Т.к. механизм имеет 1 степень свободы, направления возможных перемещений и соотношения между их величинами совпадают с направлениями и соотношениями для действительных перемещений (скоростей). Расчет возможных перемещений производят методами, рассмотренными в п. 8.3: чаще всего, с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС), значительно реже – построением плана скоростей или применением теоремы о проекциях скоростей точек.

Расчет начинают со звена, к которому приложена неизвестная сила (пара сил), если требуется отыскать соотношение сил

(моментов пар) за неизвестное принимают любую величину, входящую в него. В зависимости от вида движения звена *ему задают возможное угловое перемещение* (при вращательном или плоскопараллельном движении) или общее возможное перемещение его точек (при поступательном движении). Расчет производят до тех пор, пока не будет рассчитаны все звенья, к которым приложены известные силы (пары сил), причем все перемещения выражают через заданное.

В отдельных задачах для кинематического расчета применяют зависимость между скоростями точки в составном движении (п. 7.2).

Таблица 13.1.

Исходная связь	Искомая реакция	Результат замены связи
	$\bar{X}_A$	
	$\bar{Y}_A$	
	$\bar{X}_A$	
	$\bar{Y}_A$	
	$m_A$	

### 3. Составление расчетного уравнения.

Определяют элементарные работы сил и получают уравнение (12.3) принципа возможных перемещений, причем при по-

ступательном перемещении звена работу силы определяют как скалярное произведение модулей силы и возможного перемещения на косинус угла между их векторами, при вращательном или плоскопараллельном движении – через момент силы относительно неподвижной точки по формуле (12.5). В последнем случае для определения моментов наклонных сил применяют теорему Вариньона (п. 2.2).

#### 4. Определение неизвестных.

В расчетное уравнение подставляют величины возможных перемещений, выраженные через *заданное перемещение* и производят сокращение на эту величину. Таким образом, в уравнении должно оставаться одно неизвестное (при отыскании соотношения – два неизвестных).

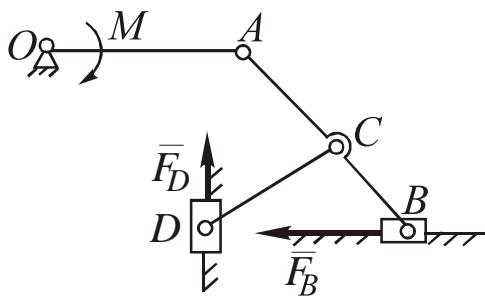


Рис. 13.1

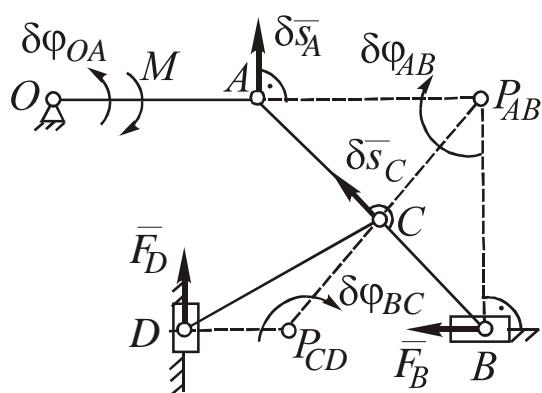


Рис. 13.2

Задаем возможное угловое перемещение  $\delta\varphi_{AB}$  (рекомендуется в сторону, согласованную с  $\bar{F}_B$ ) (рис. 13.2).

Определяем перемещения точек  $A$  и  $C$ :

Решают уравнение относительно неизвестного.

*Пример 1.* Считая  $M$  и  $\bar{F}_D$ , а также все необходимые размеры и углы неизвестными, составить уравнение для определения силы  $\bar{F}_B$  (рис. 13.1).

*Решение.* 1. Задача относится к 1 типу – механизм имеет 1 степень свободы, требуется найти активную силу.

2. Начинаем расчет со звена  $AB$ , т.к. к нему приложена неизвестная сила  $\bar{F}_B$ . Т.к. движение  $AB$  – плоское, определяем его МЦС (линия  $\delta\bar{s}_A \perp AO$ ):

$$\left. \begin{aligned} &\perp (\delta\bar{s}_B) \\ &\perp (\delta\bar{s}_A) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{AB}.$$

Задаем возможное угловое

перемещение  $\delta\varphi_{AB}$  (рекомендуется в сторону, согласованную с

$\bar{F}_B$ ) (рис. 13.2).

$$\delta s_A = \delta\varphi_{AB} AP_{AB}, \quad \delta\bar{s}_A \text{ согл. } \delta\varphi_{AB};$$

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AB} CP_{AB}, \quad \delta\bar{s}_C \perp CP_{AB} \text{ согл. } \delta\varphi_{AB}.$$

Рассматриваем звено  $OA$  (движение вращательное):

$$\delta\varphi_{OA} = \delta s_A / OA = \delta\varphi_{AB} \frac{AP_{AB}}{OA}, \quad \delta\varphi_{OA} \text{ согл. } \delta\bar{s}_A.$$

Рассматриваем звено  $CD$  (движение плоское):

$$\left. \begin{array}{l} \perp \delta\bar{s}_C \\ \perp \delta s_B \end{array} \right\} \rightarrow P_{CD}; \quad \delta\varphi_{CD} = \delta s_C / CP_{CD} = \delta\varphi_{AB} \frac{CP_{AB}}{CP_{CD}}, \quad \delta\varphi_{CD} \text{ согл. } \delta\bar{s}_C.$$

3. Т.к. все звенья механизма движутся непоступательно, элементарные работы определяем через моменты сил (все связи идеальны, работы их реакций равны нулю):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = F_B BP_{AB} \delta\varphi_{AB} + F_D DP_{CD} \delta\varphi_{CD} - M \delta\varphi_{OA} = 0.$$

4. Подставляем величины  $\delta\varphi_{CD}$ ,  $\delta\varphi_{OA}$  и производим сокращение на заданное перемещение  $\delta\varphi_{AB}$ :

$$F_B BP_{AB} \delta\varphi_{AB} + F_D DP_{CD} \delta\varphi_{AB} \frac{CP_{AB}}{CP_{CD}} - M \delta\varphi_{AB} \frac{AP_{AB}}{AO} = 0.$$

В полученном выражении одно неизвестное –  $F_B$ .

*Пример 2.* Считая известными все размеры, углы и силы  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ , составить уравнения для определения реакций связей (рис. 13.3).

*Решение.* Задача относится ко второму типу. Для дальнейшего решения преобразуем механизм, решаем 4 отдельные задачи.

I. 1. Определяем реакцию  $\bar{X}_A$ .

Заменяем шарнир  $A$  на ползун с горизонтальной направляющей (табл. 13.1), считая  $\bar{X}_A$  активной силой (рис. 13.4).

2. Движение  $AC$  плоское ( $\delta\bar{s}_C \perp CB$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \perp (\delta\bar{s}_C) \\ \perp (\delta\bar{s}_A) \end{array} \right\} \rightarrow P_{AC} = C.$$

Задаем перемещение  $\delta\varphi_{AC}$ .

Т.к.  $\delta\bar{s}_C = 0$ , звено  $CB$  неподвижно.

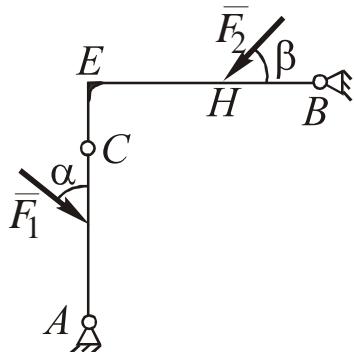


Рис. 13.3

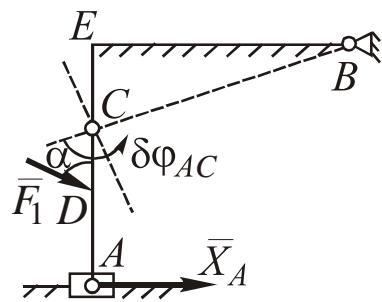


Рис. 13.4

3. Все связи механизма – идеальные, поэтому в дальнейшем определяем работы только активных сил.

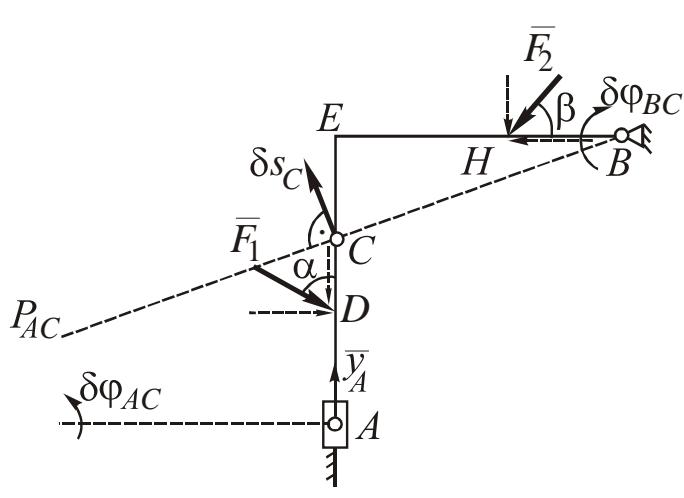


Рис. 13.5

направляющей (табл. 13.1), считая  $\bar{Y}_A$  активной силой (рис. 13.5).

2. Движение  $AC$  плоское ( $\delta\bar{s}_C \perp CB$ ):

$$\left. \begin{aligned} &\perp (\delta\bar{s}_C) \\ &\perp (\delta\bar{s}_A) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{AC}.$$

Задаем  $\delta\phi_{AC}$ .  $\delta s_C = \delta\phi_{AC} CP_{AC}$ ;  $\delta\bar{s}_C$  согл.  $\delta\phi_{AC}$ .

Движение  $BC$  – вращательное вокруг  $B$ :

$$\delta\phi_{BC} = \delta s_C / CB = \delta\phi_{AC} \frac{CP_{AC}}{CB}, \quad \delta\phi_{BC} \text{ согл. } \delta\bar{s}_C.$$

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = X_A AC \delta\phi_{AC} + \\ + F_1 \sin \alpha CD \delta\phi_{AC} = 0.$$

4. Сокращаем на  $\delta\phi_{AC}$ , в уравнении остается одно неизвестное  $X_A$ :  
 $X_A AC + F_1 \sin \alpha CD = 0$ ,

II. 1. Определяем реакцию  $\bar{Y}_A$ .

Заменяем шарнир  $A$  на ползун с вертикальной

3. Составляем уравнение элементарных работ, используя для определения моментов сил теорему Вариньона (разлагаем силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  на составляющие, параллельные осям и определяем суммы моментов составляющих):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Y_A AP_{AC} \delta\varphi_{AC} - F_1 \sin \alpha AD \delta\varphi_{AC} - F_2 \cos \alpha AP_{AC} \delta\varphi_{AC} - F_2 \sin \beta BH \cdot \delta\varphi_{BC} = 0.$$

4. Подставляем  $\delta\varphi_{BC}$  и сокращаем на  $\delta\varphi_{AC}$ :

$$y_A AP_{AC} - F_1 \sin \alpha AD - F_2 \cos \alpha AP_{AC} - F_2 \sin \beta BH \frac{CB}{CP_{AC}} = 0,$$

в уравнении одно неизвестное  $Y_A$ .

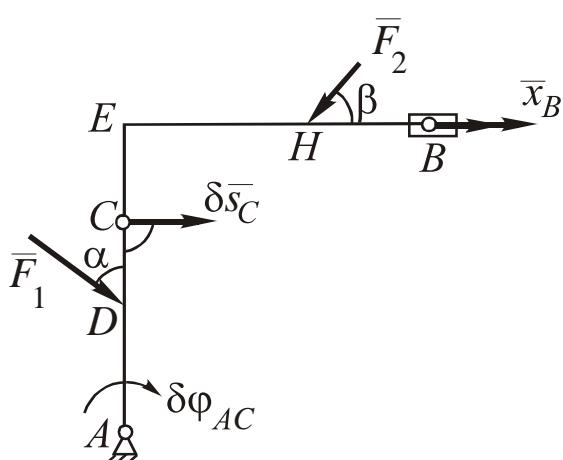


Рис. 13.6

III. 1. Определяем  $\bar{x}_B$ .

Заменяем шарнир  $B$  на ползун с горизонтальной направляющей, считая  $\bar{X}_B$  активной силой (рис. 13.6).

2. Движение  $BC$  плоское ( $\delta\bar{s}_C \perp CA$ ):

$$\left. \begin{aligned} &\perp (\delta\bar{s}_B) \\ &\perp (\delta\bar{s}_C) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{BC} \rightarrow \infty,$$

т.е. движение  $BC$  – мгновенное поступательное,  $\delta\varphi_{BC} = 0$ , за-

даем  $\delta\bar{s}_C$ .

Движение  $AC$  – вращательное вокруг  $A$ :

$$\delta\varphi_{AC} = \delta s_C / AC = \delta s_A / AC; \quad \delta\varphi_{AC} \text{ согл. } \delta\bar{s}_C.$$

3. Составляем уравнение элементарных работ, в т.ч. для силы  $\bar{F}_2$  – через произведение на  $\delta s_C$  и  $\cos\beta$ :

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = x_B \delta s_C - F_2 \delta s_C \cos \beta + F_1 \sin \alpha AD \delta\varphi_{AC} = 0.$$

4. Подставляем  $\delta\varphi_{AC}$  и сокращаем на  $\delta\bar{s}_A$ :

$$X_B - F_2 \cos \beta + F_1 \sin \alpha \frac{AD}{AC} = 0,$$

в уравнении одно неизвестное  $X_B$ .

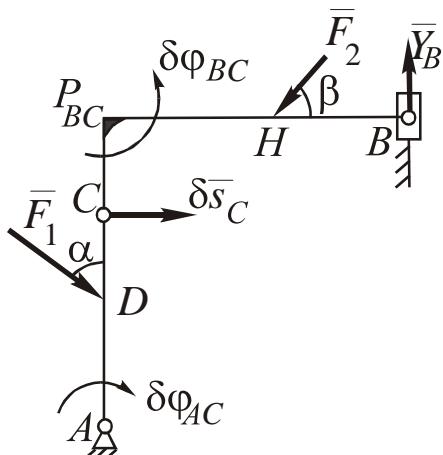


Рис. 13.7

IV. 1. Определяем  $\bar{Y}_B$ . Заменяем шарнир  $B$  на ползун с вертикальной составляющей, считая  $\bar{Y}_B$  активной силой (рис. 13.7).

2. Движение  $BC$  плоское ( $\delta s_C \perp CA$ ):

$$\left. \begin{aligned} &\perp (\delta s_B) \\ &\perp (\delta s_C) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{BC}.$$

Задаем  $\delta\phi_{BC}$ .

$$\delta s_C = \delta\phi_{BC} CP_{BC}, \quad \delta s_C \text{ согл. } \delta\phi_{BC}.$$

Движение  $AC$  вращательное

вокруг  $A$ :

$$\delta\phi_{AC} = \delta s_C / AC = \delta\phi_{BC} \frac{CP_{BC}}{AC}, \quad \delta\phi_{AC} \text{ согл. } \delta s_C.$$

$$3. \sum_{k=1}^n \delta A_k = Y_B BP_{BC} \delta\phi_{BC} - F_2 \sin \beta HP_{BC} \delta\phi_{BC} + F_1 \sin \alpha DA \delta\phi_{AC} = 0.$$

4. Подставим  $\delta\phi_{AC}$ , сокращаем на  $\delta\phi_{BC}$ , получаем уравнение с одним неизвестным  $Y_B$ :

$$Y_B BP_{BC} - F_2 \sin \beta HP_{BC} + F_1 \sin \alpha \frac{DA \cdot CP_{BC}}{AC} = 0.$$

*Пример 3.* Считая известными все размеры, углы и силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , составить уравнение для определения реакций связей (рис. 13.8).

*Решение.* Задача относится ко второму типу. Преобразуя механизм, решаем 3 отдельные задачи (решение для  $\bar{Y}_B$  не приводится).

I. 1. Определяем  $m_A$ . Заменяем жесткую заделку в точке  $A$  на неподвижный шарнир (табл. 13.1), считая  $m_A$  моментом активной пары. Все связи иде-

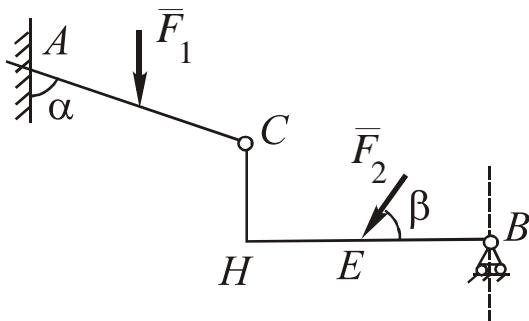


Рис. 13.8

альные (рис. 13.9).

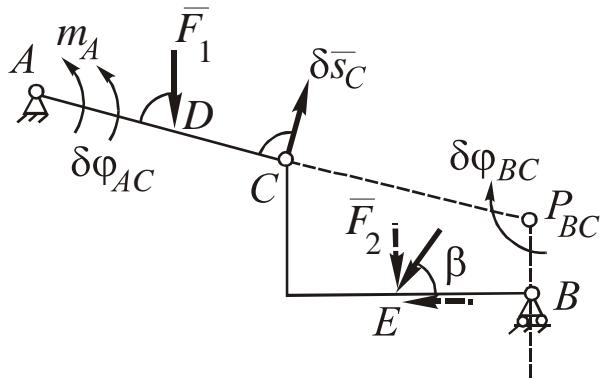


Рис. 13.9

2. Движение  $AC$  вращательное вокруг  $A$ .

Задаем  $\delta\varphi_{AC}$ .

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AC} CA, \quad \delta\bar{s}_C \perp CA \text{ согл. } \delta\varphi_{AC}.$$

Движение  $BC$  плоское:

$$\left. \begin{aligned} &\perp \delta\bar{s}_C \\ &\perp (\delta\bar{s}_B) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{BC}.$$

$$\delta\varphi_{BC} = \delta s_C / CP_{BC} = \delta\varphi_{BC} \frac{CA}{CP_{BC}}, \quad \delta\varphi_{BC} \text{ согл. } \delta\bar{s}_C.$$

$$3. \sum_{k=1}^n \delta A_k = m_A \delta\varphi_{AC} - F_1 AD \sin \alpha \delta\varphi_{AC} +$$

$$+ F_2 \cos \beta BP_{BC} \delta\varphi_{BC} - F_2 \sin \beta BE \delta\varphi_{BC} = 0.$$

4. Заменяя  $\delta\varphi_{BC}$  и сокращая на  $\delta\varphi_{AC}$ , получаем уравнение с неизвестным  $m_A$ :

$$m_A - F_1 AD \sin \alpha + F_2 \cos \beta \frac{BP_{BC} CA}{CP_{BC}} - F_2 \sin \beta \frac{BE \cdot CA}{CP_{BC}} = 0.$$

II. 1. Определяем  $\bar{X}_A$ . Заменяем жесткую заделку в точке  $A$  на скользящую с горизонтальной направляющей (табл. 13.1), считая  $\bar{X}_A$  активной силой (рис. 13.10).

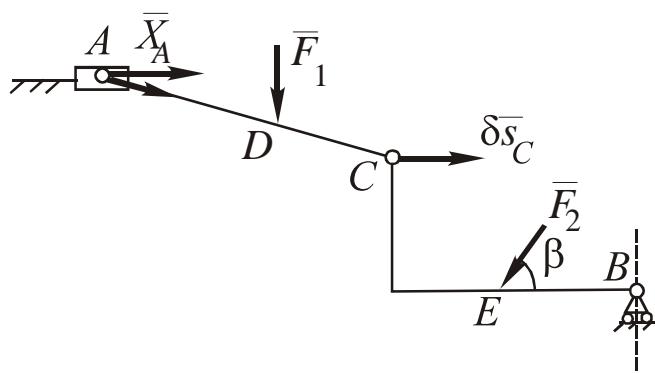


Рис. 13.10

2. Движение  $AC$  поступательное.

Задаем  $\delta\bar{s}_C$ . Движение  $BC$  плоское.

$$\left. \begin{aligned} &\perp \delta\bar{s}_C \\ &\perp (\delta\bar{s}_B) \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{BC} \rightarrow \infty,$$

движение мгновенное по-

ступательное, перемещения всех точек механизма равны  $\delta\bar{s}_C$ .

3. Т.к. движение звеньев поступательное, работы сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  определяем через перемещение  $\delta\bar{s}_C$ , в частности  $\delta A_{F_1} = 0$  (т.к.  $\delta\bar{s}_C \perp \bar{F}_1$ ):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = X_A \delta s_C - F_2 \delta s_C \cos \beta = 0.$$

4. Сокращаем на  $\delta s_A$  и определяем  $X_A$ :

$$X_A = F_2 \cos \beta.$$

III. 1. Определяем  $\bar{N}_B$ . Отбрасываем подвижный шарнир в точке  $B$ , считая  $\bar{N}_B$  активной силой (рис. 13.11).

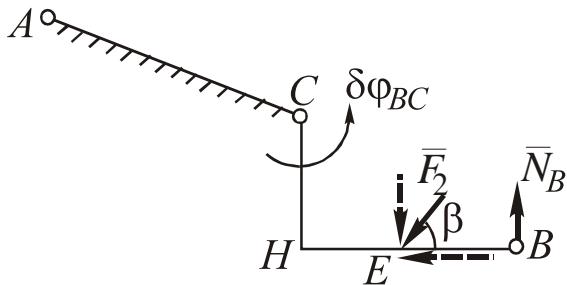


Рис. 13.11

2.  $AC$  неподвижно, т.к. жесткая заделка  $A$  препятствует любому перемещению звена.

Движение  $BC$  вращательное вокруг  $C$ .

Задаем  $\delta\phi_{BC}$ .

$$3. \sum_{k=1}^n \delta A_k = N_B BH \delta\phi_{BC} - F_2 \cos \beta CH \delta\phi_{BC} - F_2 \sin \beta EH \delta\phi_{BC} = 0.$$

4. Сокращаем на  $\delta\phi_{BC}$ , получаем уравнение с одним неизвестным  $N_B$ .

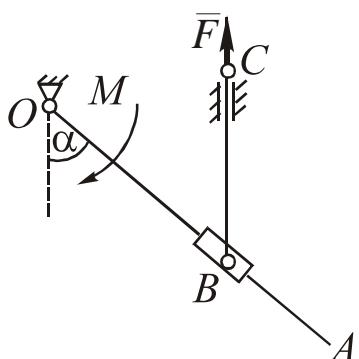


Рис. 13.12

*Пример 4.* Считая известными все размеры и углы, найти, при каком соотношении  $M$  и  $F$  механизм будет в равновесии (рис. 13.12).

*Решение.* 1. Задача относится к первому типу, считаем неизвестным момент  $M$  пары.

2. Движение  $OA$  вращательное вокруг  $O$ . Задаем  $\delta\phi_{OA}$ .

$$\delta s_B = \delta\varphi_{OA} \cdot BO, \quad \delta\bar{s}_B \perp BO \text{ согл. } \delta\varphi_{OA}.$$

Звено  $BC$  движется поступательно. Представим движение

точки  $B$  как составное: абсолютным будет движение  $B$  по вертикали (параллельно неподвижным направляющим); переносным — вместе со стержнем  $OA$  ( $\delta\bar{s}_{B\text{пер}} = \delta\bar{s}_B$ ), относительным — вдоль стержня  $OA$  (рис. 13.13).

Согласно свойству составного движения точки (п. 7.2):

$$\delta\bar{s}_{Ba} = \delta\bar{s}_{B\text{пер}} + \delta\bar{s}_{B\text{от}}.$$

Из рис. 13.13 следует

$$\delta s_C = \delta s_{Ba} = \frac{\delta s_{B\text{пер}}}{\sin \alpha} = \frac{\delta s_B}{\sin \alpha} = \delta\varphi_{OA} \frac{BO}{\sin \alpha}.$$

3. Т.к. все связи идеальные, определяем элементарные работы пары с моментом  $M$  и силы  $\bar{F}$ :

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = M\delta\varphi_{OA} - F\delta s_C = 0.$$

4. Подставляем  $\delta s_C$ , сокращая на  $\delta\varphi_{OA}$ , выражаем отношение  $M/F$ :

$$M\delta\varphi_{OA} - F\delta\varphi_{OA} \frac{BO}{\sin \alpha} = 0; \quad \frac{M}{F} = \frac{BO}{\sin \alpha}.$$

*Пример 5.* Решить с помощью принципа возможных перемещений пример 1 п. 4.3 (рис. 13.14).

Вес однородного стержня равен  $P$ . Найти реакции связей.

*Решение.* 1. Задача относится ко второму типу. Преобразуя механизм, решаем 3 отдельных задачи.

I. 1. Определяем  $\bar{N}$ . Отбрасываем главную поверхность в точке  $B$ , считая  $\bar{N}$  активной силой (рис. 13.15).

2. Движение  $AB$  вращательное вокруг  $A$ . Задаем  $\delta\varphi_{AB}$ .

3. Т.к. все связи идеальные, находим элементарные работы активных сил.

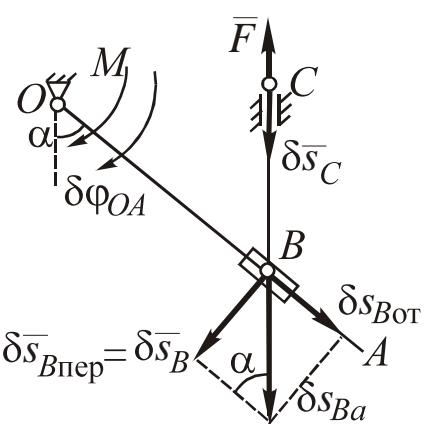


Рис. 13.13

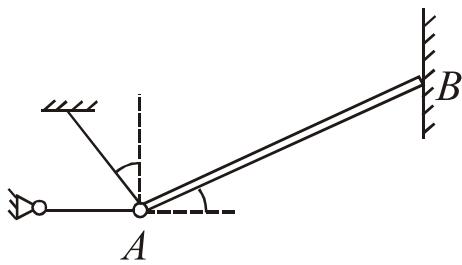


Рис. 13.14

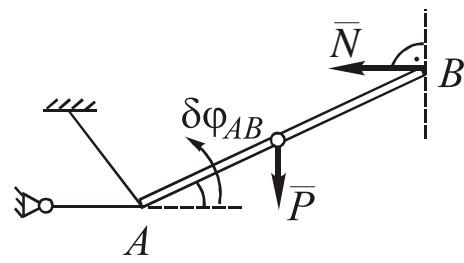


Рис. 13.15

$$\sum_{k=1}^n A_k = -P \frac{AB}{2} \cos 30^\circ \delta\varphi_{AB} + N AB \sin 30^\circ \delta\varphi_{AB} = 0.$$

4. После сокращения на  $\delta\varphi_{AB}$  и  $AB$ , получим  $N$ :

$$N = P \cos 30^\circ = 0,87P.$$

II. 1. Определяем  $\bar{T}$ . Отбрасываем нить в точке  $A$ , считая  $\bar{T}$  активной силой (рис. 3.16).

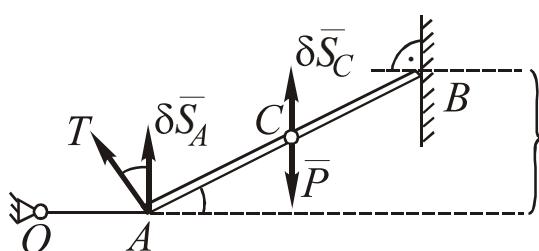


Рис. 13.16

2. Движение  $AB$  плоское ( $\delta\bar{s}_B$  вертикально,  $\delta\bar{s}_A \perp AO$ ).  
 $\perp (\delta\bar{s}_A)$   
 $\perp (\delta\bar{s}_B)$  }  $\rightarrow P_{AB} \rightarrow \infty$ .

Задаем  $\delta\bar{s}_A$ ,  $\delta\varphi_{AB} = 0$   
(мгновенное поступательное движение).

$$3. \sum_{k=1}^n \delta A_k = T \delta s_A \cos 30^\circ - P \delta s_A = 0.$$

4. Сокращая на  $\delta s_A$ , получим  $T$ :

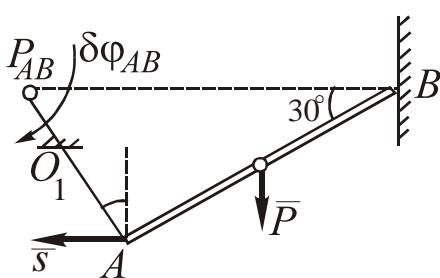


Рис. 13.17

$$T = \frac{P}{\cos 30^\circ} = 1,15P.$$

III. 1. Определяем  $\bar{S}$ . Отбрасываем стержень в точке  $A$ , считая  $\bar{S}$  активной силой (рис. 13.17).

2. Движение  $AB$  плоское ( $\delta\bar{s}_B$  вертикально,  $\delta\bar{s}_A \perp AO_1$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \perp (\delta \bar{s}_A) \\ \perp (\delta \bar{s}_B) \end{array} \right\} \rightarrow P_{AB}.$$

Задаем  $\delta\varphi_{AB}$ .

$$3. \sum_{k=1}^n A_k = S AB \sin 30 \delta\varphi_{AB} + P \left( AP_{AB} \sin 30 + \frac{AB}{2} \cos 30 \right) \delta\varphi_{AB} = 0.$$

4. Подставляем  $AP_{AB} = AB \operatorname{tg} 30$ , сокращаем на  $\delta\varphi_{AB}$  и  $AB$ , получим  $S$ :

$$S \cdot AB \sin 30 \delta\varphi_{AB} + P \left( AB \operatorname{tg} 30 \sin 30 + \frac{AB}{2} \cos 30 \right) \delta\varphi_{AB} = 0;$$

$$S = -1,43P.$$

*Задание.* Самостоятельно составить уравнения для расчета указанных неизвестных сил (моментов пар) в задачах 13.1–13.15, считая известными все обозначенные размеры, углы и остальные силы (моменты пар).

Составить уравнения для расчета реакций связей в примерах и задачах п. 4.3.

### 13.2. Применение общего уравнения динамики

Общее уравнение динамики применяют для определения ускорений тел МС.

Общий порядок решения следующий.

#### 1. Кинематический расчет.

Определяют скорости центров масс и угловые скорости тел механизма, задавая величину и направление одной из скоростей. Путем дифференцирования находят соотношение между ускорениями, путем интегрирования – между возможными перемещениями.

Если действующие силы постоянны и движение МС начинается из состояния покоя, направления соответствующих скоростей, ускорений и возможных перемещений совпадают.

Рекомендуется составить отдельный чертеж механизма, на котором указать направления скоростей.

<p>13.1</p> <p><math>P - ?</math></p>	<p>13.2</p> <p><math>Q - ?</math></p>	<p>13.3</p> <p><math>M - ?</math></p>
<p>13.4</p> <p><math>M - ?</math></p>	<p>13.5</p> <p><math>M_1 - ?</math></p>	<p>13.6</p> <p><math>M - ?</math></p>
<p>13.7</p> <p><math>\frac{M}{F} - ?</math></p>	<p>13.8</p> <p><math>\frac{M_1}{M_2} - ?</math></p>	<p>13.9</p> <p><math>M_2 - ?</math></p>
<p>13.10</p> <p><math>m_A, y_A, x_B - ?</math></p>	<p>13.11</p> <p><math>x_A, y_A, y_B - ?</math></p>	<p>13.12</p> <p><math>X_A, m_A, N_B - ?</math></p>
<p>13.13</p> <p><math>X_A, m_A, N_B - ?</math></p>	<p>13.14</p> <p><math>N_A, S_H, X_B, Y_B - ?</math></p>	<p>13.15</p> <p><math>N_A, N_B, Y_D, m_D - ?</math></p>

## 2. Определение сил инерции

В зависимости от вида движения определяют главные векторы и главные моменты сил инерции отдельных тел МС (п. 10.5.2), указывают их направления на чертеже.

## 3. Составление и реализация расчетного уравнения

Записывают уравнение (12.8).

На чертеже указывают активные силы и реакции связей, исключая реакции идеальных связей. Определяют элементарные работы активных сил, реакций связей и сил инерции, приравнивают их сумму нулю.

## 4. Определение неизвестных и анализ результатов

Подставляют в расчетное уравнение величины сил инерции и возможных перемещений, производят сокращение и выражают неизвестное ускорение.

Если условие задачи допускало неоднозначное толкование, уточняют, изменится ли решение при других значениях принятых параметров.

*Пример.* Определить ускорения в механизме на рис. 11.21, сохранив условие примера 4 п. 11.3.

*Решение.* 1. Используем результаты ранее проведенного кинематического расчета скоростей (3.21):

$$V_1; \quad \omega_2 = V_1 / r_2; \quad V_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \omega_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3},$$

а также ускорений (11.23):

$$a_1; \quad \varepsilon_2 = a_1 / r_2; \quad a_3 = a_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \varepsilon_3 = a_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

Поскольку МС имеет одну степень свободы, возможные перемещения совпадают с действительными, и соотношения между ними аналогичны (11.22):

$$\delta\bar{s}_1; \quad \delta\phi_2 = \delta s_1 / r_2; \quad \delta s_3 = \delta s_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad \delta\phi_3 = \delta s_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

Направления скоростей, совпадающие с направлениями ускорений и возможных перемещений, указаны на рис. 11.22.

2. Определяем силы инерции тел МС (п. 10.5.2), используя соотношения между ускорениями.

Тело 1 движется поступательно:

$$M_1^u = 0; \quad \bar{R}_1^u = -m_1 \bar{a}_1.$$

Тело 2 движется вращательно:

$$R_2^u = 0; \quad M_2^u = -I_2 \varepsilon_2; \quad M_2^u = m_2 i_2^2 \frac{a_1}{r_2}.$$

Тело 3 движется плоскопараллельно:

$$\bar{R}_3^u = -m_3 \bar{a}_3; \quad R_2^u = m_3 a_1 \frac{R_2}{2r_2}; \quad M_3^u = -I_3 \varepsilon_3; \quad M_3^u = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 a_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

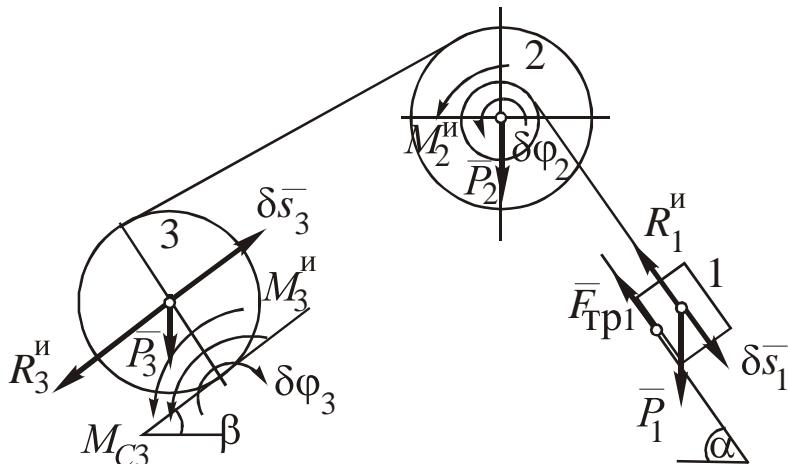


Рис. 13.18

Принимая направления ускорений и угловых ускорений из рис. 3.22 совпадающими с соответствующими скоростями, указываем на рис. 13.18 направления найденных сил и пар.

3. Общее уравнение динамики записывается в виде (12.8):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = 0.$$

На рис. 13.18 указываем активные силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ , реакции реальных связей  $\bar{F}_{\text{тр}1}$  и  $M_{C3}$  (реакций идеальных связей  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_3$ ,  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_3$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}2}$  в расчете не учитываем).

Указываем также направления возможных перемещений тел МС (они совпадают с направлениями скоростей на рис. 11.22).

Определяем, используя рис. 13.18, элементарные работы всех сил, рассматривая по очереди тела 1–3 МС (работы сил  $\bar{P}_1$ – $\bar{P}_3$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и  $M_{C3}$  определены в предыдущем расчете) и приравниваем сумму нулю:

$$\begin{aligned} P_1 \delta s_1 \sin \alpha - f P_1 \cos \alpha \delta s_1 - R_1^u \delta s_1 - M_2^u \delta \varphi_2 - \\ - P_3 \cdot \delta s_3 \sin \beta - M_C \cdot \delta \varphi_3 - R_3^u \delta s_3 - M_3^u \delta \varphi_3 = 0. \end{aligned} \quad (13.1)$$

4. Подставляем в (13.1) величины главных векторов, главных моментов сил инерции и возможных перемещений из предыдущего расчета, производим сокращение на  $\delta s_1$ :

$$\begin{aligned} m_1 g \delta s_1 \sin \alpha - f m_1 g \cos \alpha \delta s_1 - m_1 a_1 \delta s_1 - m_2 i_2^2 \frac{a_1}{r_2} \cdot \frac{\delta s_1}{r_2} - \\ - m_3 g \delta s_1 \sin \beta \frac{R_2}{2r_2} - \delta m_3 g \delta s_1 \cos \beta \frac{R_2}{2r_2 R_3} - m_3 a_1 \frac{R_2}{2r_2} \delta s_1 \frac{R_2}{2r_2} - \\ - \frac{1}{2} m_3 R_3 a_1 \frac{R_2}{2r_2} \delta s_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3} = 0. \end{aligned}$$

Определяем  $a_1$ :

$$a_1 = 8g \frac{m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right)}{8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2}}.$$

Ответ совпал с полученным ранее другим способом. Остальные ускорения можно получить подстановкой выражения  $a_1$  в уравнение (11.22).

*Задание.* Самостоятельно определить ускорения в задачах 11.31–11.34.

### 13.3. Применение уравнения Лагранжа II рода

Уравнения Лагранжа II рода применяют для расчета скоростей, ускорений или законов движения тел механической системы.

Порядок решения задач следующий.

1. *Определение числа степеней свободы МС и выбор обобщенных координат.*

Число  $S$  степеней свободы МС равно числу независимых возможных перемещений, которое можно задать МС или мини-

мальному числу "остановок", достаточных для полной остановки механизма (п. 12.2).

Необходимо отметить, что при  $S = 1$  применение уравнений Лагранжа II рода не имеет заметных преимуществ перед применением теоремы об изменении кинетической энергии МС (п. 10.3) или общего уравнения динамики (п. 13.2), т.к. приводит к тем же расчетным уравнениям.

Выбирают обобщенные координаты МС  $q_1 \dots q_s$  (их число равно  $S$ ), причем, если неизвестными в задаче являются координаты (уравнения движения), то они должны совпадать с обобщенными координатами, если неизвестными являются скорости или ускорения – они должны быть равны обобщенным скоростям и ускорениям.

### *2. Кинематический расчет.*

Рассчитывают скорости МС, необходимые для определения ее кинетической энергии и выражают их через обобщенные скорости. Интегрированием определяют соотношения между возможными перемещениями МС.

### *3. Составление расчетного уравнения.*

Выписывают систему уравнений (12.28), (12.28'). Определяют кинетическую энергию МС и выражают ее через обобщенные скорости и координаты.

Берут все необходимые производные, входящие в расчетные уравнения (при взятии частных производных по какой-либо переменной, остальные переменные считают постоянными).

Определяют обобщенные силы  $Q_1 \dots Q_s$ , задавая по очереди положительные элементарные приращения каждой из обобщенных координат (остальные обобщенные координаты при этом остаются без изменений), определяют сумму элементарных работ всех сил, приложенных к МС (кроме реакций идеальных связей), полученную сумму делят на заданное приращение. Если все силы МС потенциальные,  $Q_1 \dots Q_s$  определяют через потенциальную энергию П по формулам (12.18).

### *4. Реализация расчетных уравнений.*

Подставляют полученные в пункте 3 все компоненты расчетных уравнений и, проведя необходимые преобразования, по-

лучают дифференциальные уравнения движения МС.

### 5. Определение неизвестных и анализ результатов.

Для определения ускорений МС решают систему уравнений относительно этих неизвестных, для определения скоростей и уравнений движения интегрируют дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях.

Если условие допускает неоднозначное толкование, уточняют, как изменится решение при других значениях принятых параметров.

*Пример 1.* Материальная точка с массой  $m$  подвешена на нити, намотанной на неподвижный цилиндр радиуса  $R$ . В вертикальном положении длина нити равна  $L$ . Найти закон движения точки при отклонении из положения равновесия (рис. 13.19).

*Решение.* 1. Положение точки  $M$  определяется угловой координатой  $\varphi$ , отсчитываемой от исходного вертикального положения. МС имеет одну степень свободы ( $S = 1$ ). За обобщенную примем координату  $\varphi$ :  $q = \varphi$  (рис. 13.20).

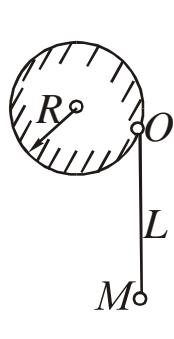


Рис. 13.19

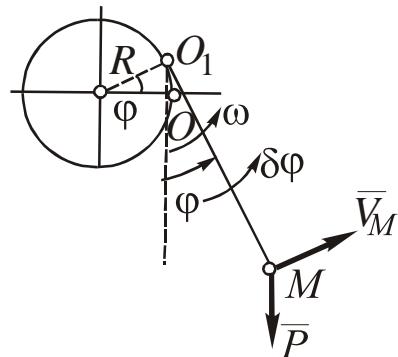


Рис. 13.20

2. Т.к. МС состоит из одной МТ, для расчета ее кинетической энергии достаточно найти скорость  $\bar{V}_M$ . Т.к. при повороте нити ее длина увеличивается на величину дуги  $OO_1$ :

$$V_M = \omega O_1 M = \omega(L + OO_1) = \omega(L + R\varphi) = \dot{\varphi}(L + R\varphi), \quad (13.2)$$

где  $\omega = \dot{\varphi}$  – угловая скорость нити, равная обобщенной скорости.

3. Уравнение (12.28) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q. \quad (13.3)$$

Кинетическая энергия МС с учетом (13.2):

$$T = \frac{mV_M^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 (L + R\phi)^2.$$

Определяем производные от  $T$ , входящие в (13.3).

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{\phi}(L + R\phi)^2, \text{ (переменная } \phi \text{ считается постоянной);}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = m\ddot{\phi}(L + R\phi)^2 + 2mR\dot{\phi}^2(L + R\phi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = mR\dot{\phi}^2(L + R\phi) \text{ (переменная } \phi \text{ считается постоянной).}$$

Для определения обобщенной силы  $Q$  задаем приращение  $\delta\phi$  координате  $\phi$ , при этом МС получит возможное перемещение, элементарную работу совершил сила  $\bar{P}$  (реакция нити  $\bar{T}$  идеальна):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \delta A_P = M_{O_1}(\bar{P})\delta\phi = -mgO_1M \sin\phi \delta\phi = -mg(L + R\phi)\sin\phi \delta\phi.$$

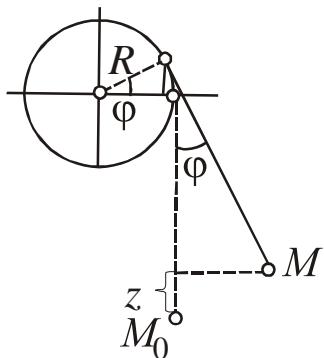


Рис. 13.21

Для получения  $Q$  делим данную сумму на  $\delta\phi$ :

$$Q = \sum_{k=1}^n \delta A_k / \delta\phi = -mg(L + R\phi)\sin\phi.$$

Т.к. сила  $\bar{P}$  потенциальна, можно определить  $Q$  через потенциальную энергию (рис. 13.21):

$$\Pi = -Pz = -mg[L + R \sin\phi - (L + R\phi)\cos\phi];$$

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = mgR \cos\phi - mgR \cos\phi -$$

$$-mg(L + R\phi)\sin\phi = -mg(L + R\phi)\sin\phi.$$

4. Подставляем в (13.3) найденные производные и обобщенную силу  $Q$ :

$$m\ddot{\phi}(L + R\phi)^2 + 2mR\dot{\phi}^2(L + R\phi) - mR\dot{\phi}^2(L + R\phi) = -mg(L + R\phi)\sin\phi.$$

После приведения подобных членов, сокращая на  $m$  и  $(L + R\dot{\varphi})$  получим:

$$\ddot{\varphi}(L + R\dot{\varphi})^2 + \dot{\varphi}^2 R + g \sin \varphi = 0. \quad (13.4)$$

5. Уравнение (13.4) является решением задачи, т.к. является уравнением движения МТ в дифференциальной форме.

*Пример 2.* Определить ускорения в механизме на рис. 11.21, сохранив условие примера 4 п. 11.3.

*Решение.* 1. Механизм имеет одну степень свободы ( $S = 1$ ), т.к. при остановке тела 1 (устранение одной степени свободы, обеспечивающей поступательное прямолинейное движение тела 1, при сохранении действия связей тела 2 и 3 тоже останавливаются).

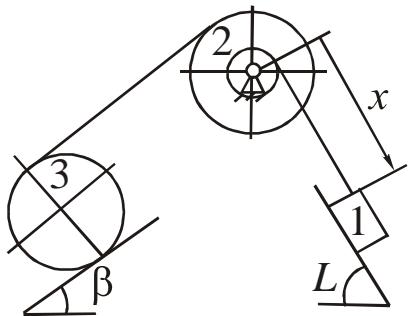


Рис. 13.22

В качестве обобщенной координаты выбираем прямолинейную координату  $x$  (рис. 13.22),  $q = x$ . Скорость  $V_1$  центра масс тела 1 равна обобщенной скорости, ускорение – обобщенному ускорению. Направление отсчета  $x$  выбрано в направлении реального перемещения тела,  $V_1 = \dot{x}$ ,  $a_1 = \ddot{x}$ .

2. Используем результаты кинематического расчета зависимости (11.21), выражаем их через обобщенную скорость  $\dot{x}$  (направления скоростей указаны на рис. 11.22):

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2}; \quad V_3 = \dot{x} \frac{R_2}{2r_2}; \quad \omega_3 = \dot{x} \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

Используем также результаты интегрирования (11.22), заменяя конечное перемещение  $s_1$  на приращение  $\delta x$  обобщенной координаты:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r_2}; \quad \delta s_3 = \delta x \frac{R_2}{2r_2}; \quad \delta\varphi_3 = \delta x \frac{R_2}{2r_2 R_3}.$$

3. Уравнение (12.28) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q. \quad (13.5)$$

Для получения функции  $T(\dot{x}, x)$  воспользуемся зависимостью (11.24), заменяя в ней  $V_1$  на  $\dot{x}$ :

$$T = \frac{1}{16} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) \dot{x}^2.$$

Определяем производные от функции  $T$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{8} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) \dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{8} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) \ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ (т.к. величина } T \text{ от } x \text{ не зависит).}$$

Для определения  $Q$  воспользуемся выражением (11.25), заменяя в нем  $s_1$  на  $\delta x$ :

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^n \delta A_k}{\delta x} = g \left[ m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right].$$

4. Подставляя в (5.5) найденные компоненты, выражаем  $a_1$ :

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{8g \left[ m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \left( \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta + \delta \frac{R_2}{2r_2 R_3} \cos \beta \right) \right]}{\left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_2^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right)},$$

что совпадает с ранее полученным ответом.

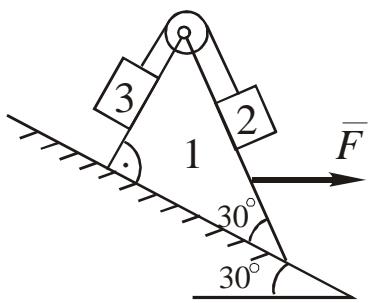


Рис. 13.23

Остальные ускорения можно получить из (11.22).

*Пример 3.* Массы тел механизма:  $m_1 = 20$  кг;  $m_2 = 15$  кг;  $m_3 = 10$  кг,  $F = 20$  Н. Определить ускорения центров масс всех тел (рис. 13.23).

*Решение.* 1. Механизм имеет две

степени свободы ( $S = 2$ ), т.к. его движение описывается двумя независимыми координатами:  $x_1$  определяет движение тела 1;  $x_2$  – относительное движение тел 2 и 3 относительно тела 1.

Принимаем их за обобщенные координаты:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ . Направления отсчета координат выбраны произвольно. Скорости и ускорения тел равны соответственным обобщенным скоростям и ускорениям:

$$V_1 = \dot{x}_1; \quad a_1 = \ddot{x}_1; \quad V_{2\text{от}} = V_{3\text{от}} = \dot{x}_2; \quad a_{2\text{от}} = a_{3\text{от}} = \ddot{x}_2.$$

2. Определяем скорости центров масс тел МС, все тела движутся поступательно (рис. 13.24),

при этом учитываем, что при движении тел 2 и 3, движение тела 1 является переносным:  $V_1 = \dot{x}_1$  (вектор  $\bar{V}_1$  направляем в сторону увеличения координаты  $x_1$ );  $\bar{V}_2 = \bar{V}_1 + \bar{V}_{2\text{от}}$ ;  $\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_{3\text{от}}$ ; (векторы  $\bar{V}_{2\text{от}}$  и  $\bar{V}_{3\text{от}}$  направляем в сторону увеличения координаты  $x_2$ ).

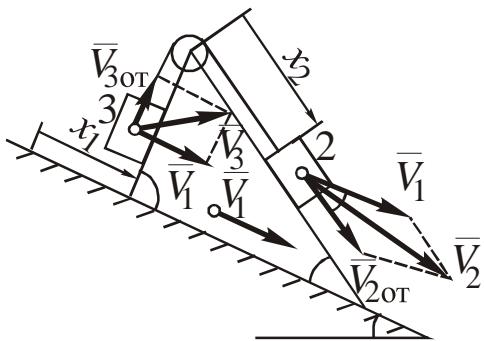


Рис. 13.24

Величины  $V_2$  и  $V_3$  определяем, рассчитывая соответствующие треугольники:

$$V_2^2 = V_1^2 + V_{2\text{от}}^2 + 2V_1V_{2\text{от}} \cos 30 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 1,73\dot{x}_1\dot{x}_2;$$

$$V_3^2 = V_1^2 + V_{3\text{от}}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2.$$

3. Уравнения Лагранжа II рода в данном случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2. \quad (13.6)$$

Кинетическая энергия  $T$  МС равна сумме значений для отдельных тел:  $T = T_1 + T_2 + T_3$ .

$$T_1(\text{пост}) = \frac{m_1}{2} V_1^2 = 0,5 \cdot 20 \dot{x}_1^2 = 10 \dot{x}_1^2;$$

$$T_2(\text{пост}) = \frac{m_2}{2} \cdot V_2^2 = 0,5 \cdot 15 \left( \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 1,73\dot{x}_1\dot{x}_2 \right) = 7,5 \dot{x}_1^2 + 7,5 \dot{x}_2^2 + 13\dot{x}_1\dot{x}_2;$$

$$T_3(\text{пост}) = \frac{m_3}{2} V_3^2 = 0,5 \cdot 10 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = 5\dot{x}_1^2 + 5\dot{x}_2^2;$$

$$T = 22,5\dot{x}_1^2 + 12,5\dot{x}_2^2 + 13\dot{x}_1\dot{x}_2.$$

Определяем производные от  $T$ , входящие в (13.6):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 45\dot{x}_1 + 13\dot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = 45\ddot{x}_1 + 13\ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 25\dot{x}_2 + 13\dot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = 25\ddot{x}_2 + 13\ddot{x}_1;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \text{ (функция } T \text{ не зависит от } x_1 \text{ и } x_2).$$

Определяем обобщенные силы.

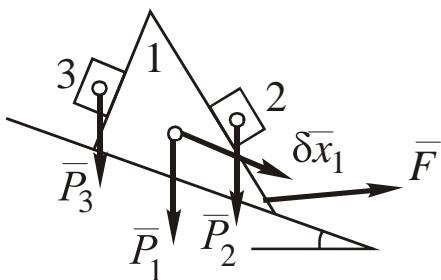


Рис. 13.25  
альна, трением  $\bar{F}_{\text{тр}1}$  пренебрегаем, т.к. это не противоречит условию задачи) и делим ее на  $\delta x_1$  (рис. 13.25):

$$Q_1 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1}{\delta x_1} = \frac{[g(m_1 + m_2 + m_3) \sin 30 + F \cos 30] \delta x_1}{\delta x_1} = 242 \text{ (Н).}$$

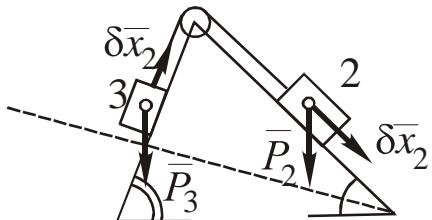


Рис. 13.26  
, считая поверхности гладкими (рис. 13.26):

Задаем положительное приращение  $\delta \bar{x}_1$  координате  $x_1$ . При этом, т.к.  $\delta x_2 = 0$ , тела 2 и 3 не перемещаются относительно тела 1. Определяем сумму элементарных работ активных сил  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{F}$  (реакция  $\bar{N}_1$  гладкой поверхности иде-

ального приращение  $\delta \bar{x}_2$  координате  $x_2$ . При этом, т.к.  $\delta x_1 = 0$ , тела 2 и 3 перемещаются по неподвижной поверхности тела 2. Определяем сумму элементарных работ  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$

$$Q_2 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_2}{\delta x_2} = \frac{g(m_2 \sin 60 - m_3 \sin 60) \delta x_2}{\delta x_2} = 4,3 \text{ (H).}$$

4. Подставим компоненты (13.6)

$$45\ddot{x}_1 + 13\ddot{x}_2 = 242; \quad 13\ddot{x}_1 + 25\ddot{x}_2 = 4,3. \quad (13.7)$$

5. Решаем систему уравнений (13.7) относительно  $\ddot{x}_1$  и  $\ddot{x}_2$ :

$$\ddot{x}_1 = a_1 = 6,3 \text{ м/с}^2; \quad \ddot{x}_2 = a_2 = -3,1 \text{ м/с}^2.$$

Из полученного результата следует, что  $\bar{a}_1$  направлено в направлении отсчета  $x_1$ , а  $\bar{a}_2$  – обратно направлению отсчета  $x_2$ .

В ходе расчета были сделаны предположения об отсутствии трения и невесомости блока. При наличии трения скольжения изменяются величины обобщенных сил  $Q_1$  и  $Q_2$ , а учет весомости блока изменил бы вид функции  $T(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ , что привело бы к изменению результата. Т.к. в условии отсутствует необходимая информация, принятые допущенные правомерны.

Отметим, что выбор направления отсчета координат  $x_1$  и  $x_2$  также влияет на ход расчета, т.к. приводит не только к изменению знаков, но и значений промежуточных величин.

*Пример 4.* Кран состоит из стрелы 1 с моментом инерции  $J_1$  и тележки с массой  $m_2$ . Составить дифференциальные уравнения движения механизма при подъеме груза 3 массой  $m_3$ , если сила тяги тележки  $\bar{F}$ , а натяжение троса  $\bar{T}$ . Размерами тел 2 и 3 пренебречь (рис. 13.27).

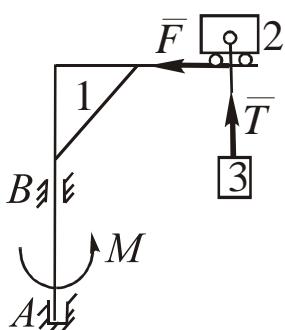


Рис. 13.27

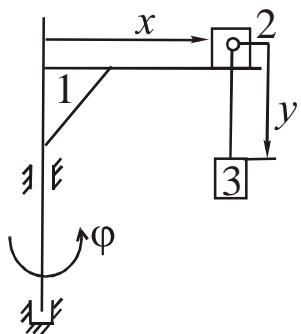


Рис. 13.28

*Решение.* 1. Механизм имеет 3 степени свободы, т.к. его движение описывается тремя координатами  $\phi$ ,  $x$  и  $y$ . Выбираем их за обобщенные координаты:  $q_1 = \phi$ ;  $q_2 = x$ ;  $q_3 = y$  (направления отсчета координат выбраны произвольно) (рис. 13.28).

2. Определяем скорости, необходимые для расчета кинетической энергии МС:

$$\omega_1 = \dot{\phi}; \quad \bar{V}_2 = \bar{V}_{2\text{ от}} + \bar{V}_{2\text{ пер}} \quad (\text{движение тела 2 составное}),$$

$$\text{где } V_{2\text{ от}} = \dot{x}; \quad V_{2\text{ пер}} = \dot{\phi}x;$$

$$V_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{\phi}^2 x^2; \quad \bar{V}_3 = \bar{V}_{3\text{ от}} + \bar{V}_{3\text{ пер}} \quad (\text{движение тела 3 составное}),$$

$$\text{где } V_{3\text{ от}} = \dot{y}; \quad V_{3\text{ пер}} = V_2.$$

$$V_3^2 = \dot{y}^2 + V_2^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{\phi}^2 x^2.$$

3. Уравнения Лагранжа II рода для данной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_\phi; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Определяем кинетическую энергию МС:

$$T_1(\text{вр}) = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} = 0,5 J_1 \dot{\phi}^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = 0,5 m_2 (\dot{\phi}^2 x^2 + \dot{x}^2);$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 = 0,5 m_3 (\dot{\phi}^2 x^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = 0,5 J_1 \dot{\phi}^2 + 0,5 m_2 (\dot{\phi}^2 x^2 + \dot{x}^2) + \\ &+ 0,5 m_3 (\dot{\phi}^2 x^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2). \end{aligned}$$

Производные от  $T$ , входящие в (13.8):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = [J_1 + x^2(m_2 + m_3)]\dot{\phi};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = [J_1 + x^2(m_2 + m_3)]\ddot{\phi} + 2x\dot{x}\dot{\phi}(m_2 + m_3);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_2 + m_3)\dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (m_2 + m_3) \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = (m_2 + m_3) \dot{\phi}^2 x;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_3 \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m_3 \ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Определяем обобщенные силы.

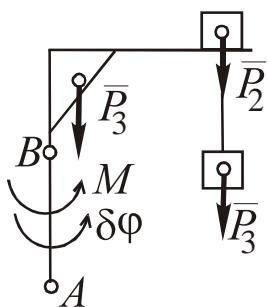


Рис. 13.29

Задаем положительное приращение  $\delta\phi$  координате  $\phi$ . Работу совершил только пара с моментом  $M$ , работы сил  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$  равны нулю, т.к. перемещения точек приложения сил перпендикулярны к силам, связи  $A$  и  $B$  идеальны, а силы  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  – внутренние в твердом теле (рис. 13.29).

$$Q_y = \frac{M \delta\phi}{\delta\phi} = M.$$

Задаем приращение  $\delta\bar{x}$  координате  $x$ . Работы сил  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  – нулевые, связи идеальны, работу совершил только сила  $\bar{F}$  (рис. 13.30).

$$Q_x = \frac{-F \delta x}{\delta x} = -F.$$

Задаем приращение  $\delta\bar{y}$  координате  $y$  (рис. 13.31):

$$Q_y = \frac{P_3 \delta y - T \delta y}{\delta y} = P - T = m_3 g - T.$$

4. Подставляем найденные компоненты в (13.8):

$$\dot{\phi} [J_1 + x^2(m_2 + m_3)] + 2x\dot{x}\dot{\phi}(m_2 + m_3) = M;$$

$$\ddot{x}(m_2 + m_3) + \dot{\phi}^2 x(m_2 + m_3) = -F;$$

$$\dot{y}m_3 = m_3 q - T.$$

Рис. 13.30



Рис. 13.31

Полученные уравнения являются решением задачи.

*Задание.* Самостоятельно решить задачи 11.31–11.34, а так-

же задачи 13.16–13.23.

*Задача 13.16.* Составить уравнение колебаний маятника  $OM$ , начальной длины  $l$ , если масса точки  $M$  равна  $m$ , нить невесома, а барабан имеет радиус  $a$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 13.32).

*Задача 13.17.* Составить уравнение движения точки  $M$  с массой  $m$  по круглому желобу радиуса  $R$ , вращающемуся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 13.33).

*Задача 13.18.* Составить уравнение колебаний маятника  $OM$  (масса точки  $m$ , длина нити  $l$ ), если тележка катится вверх по наклонной поверхности под углом  $\alpha$  с постоянным ускорением  $\bar{a}$  из состояния покоя (рис. 13.34).

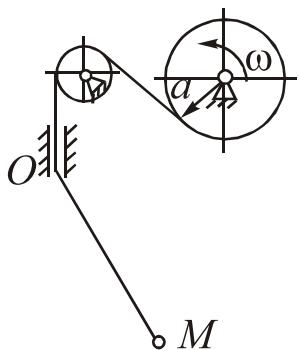


Рис. 13.32

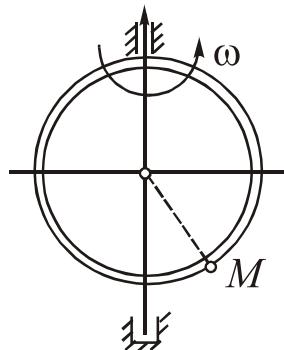


Рис. 13.33

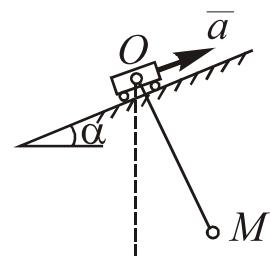


Рис. 13.34

*Задача 13.19.* Массы тел механизма:  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 1$  кг,  $F_1 = 3$  Н,  $F_2 = 5$  Н. Определить ускорения тел 1, 2, 3 (рис. 13.35).

*Задача 13.20.* Массы тел механизма:  $m_1 = 12$  кг,  $m_2 = 5$  кг,  $m_3 = 10$  кг,  $F = 3$  Н. Определить ускорения тел 1, 2, 3 (рис. 13.36).

*Задача 13.21.* Механизм состоит из тележки 1 массы  $m_1$  и однородного стержня 2 длины  $l$  и массы  $m_2$ . Составить дифференциальные уравнения движения механизма (рис. 13.37).

*Задача 13.22.* Трубка с массой  $m_1$  и длиной  $L$  вращается под действием пары с моментом  $M_{\text{вр}}$ , масса шарика  $M$  равна  $m_2$ . Пренебрегая трением, составить дифференциальные уравнения дви-

жения механизма (рис. 13.38).

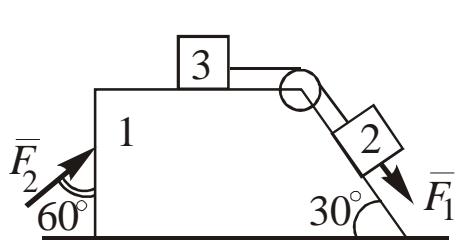


Рис. 13.35

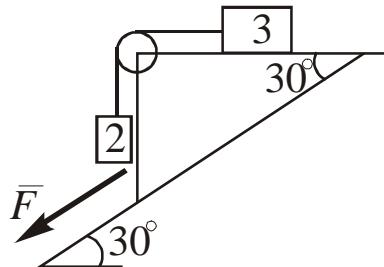


Рис. 13.36

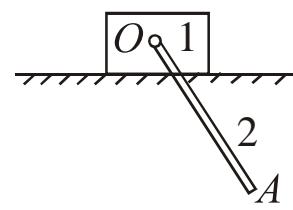


Рис. 13.37

*Задача 13.23.* Манипулятор состоит из стержней  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , с массами соответственно  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , перемещающихся поступательно по направляющим, параллельным координатным осям. Усилия, создаваемые в приводах направляющих, равны  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Составить уравнения движения манипулятора (рис. 13.39).

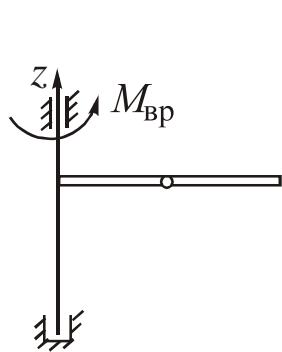


Рис. 13.38

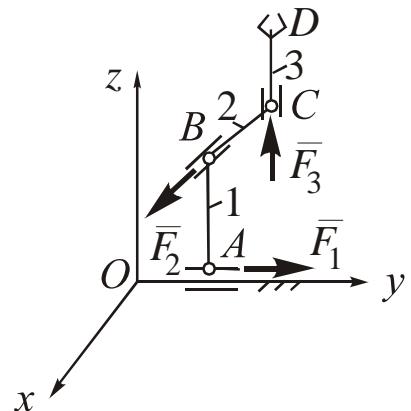


Рис. 13.39

## 14. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕНЕНИЕ ГИРОСКОПОВ

*Гироскопом* называют устройство, основным элементом которого является быстро вращающийся ротор (маховик, волчок). С помощью шарниров и рамок ось ротора может изменять свое положение в пространстве. Гироскопы – одни из самых распространенных в технике механизмов, применяющиеся в конструкциях

от простейших детских игрушек до сложнейших приборов военной и космической техники.

Точный расчет движения гироскопа весьма сложен, поэтому в данном пособии рассматривается элементарная теория гироскопа, позволяющая сформулировать его основные свойства и получить необходимые расчетные соотношения.

#### 14.1. Виды гироскопов, допущения элементарной теории гироскопов

В зависимости от числа степеней свободы ротора различают одно-, двух- и трехстепенные гироскопы (рис. 14.1).

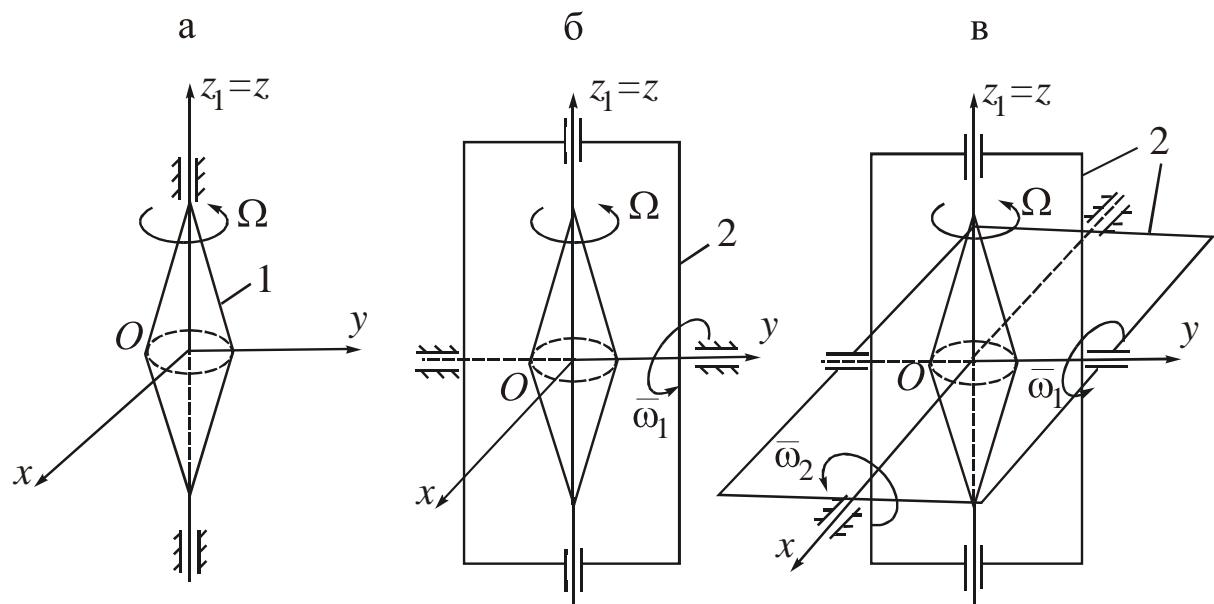


Рис. 14.1. Одностепенной (а), двухстепенной (б) и трехстепенной (в) гироскопы:

1 – ротор; 2 – рамка;  $\Omega$  – угловая скорость собственного вращения ротора;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – угловые скорости прецессии и нутации;  $O$  – точка подвеса

Ось вращения ротора 1 называют осью собственного вращения (на рис. 14.1 ось  $z_1$  совпадает с вертикальной осью  $z$ ). Оси вращений подвижных рамок 2 изображены совпадающими с осями  $x$  и  $y$ . Соответствующие осям  $z_1$ ,  $y$ ,  $x$  угловые скорости назы-

вают угловыми скоростями собственного вращения  $\Omega$ , прецессии  $\omega_1$  и нутации  $\omega_2$ . Точка  $O$  остается неподвижной при любом числе степеней свободы ротора. Ее называют точкой подвеса. В дальнейшем рамки 2 гироскопа на чертежах изображаться не будут.

В зависимости от расположения центра тяжести  $C$  ротора различают астатические (уравновешенные) ( $C$  совпадает с точкой подвеса  $O$ ) и тяжелые (маятниковые) гироскопы (рис. 14.2).

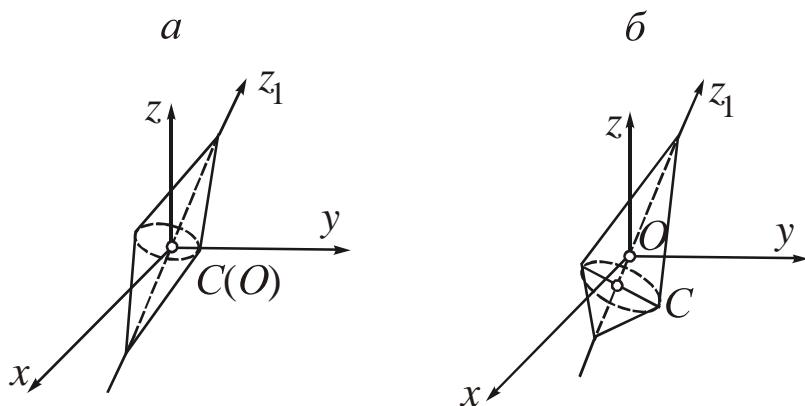


Рис. 14.2. Астатический (*a*) и тяжелый (*б*) гироскопы

В элементарной теории гироскопа принимают следующие допущения.

1. Угловая скорость собственного вращения  $\Omega$  ротора значительно превышает  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , поэтому последними в расчетах можно пренебречь:

$$\Omega \gg \omega_1, \omega_2.$$

Вектор абсолютной угловой скорости ротора  $\bar{\omega}$  будет совпадать с вектором  $\bar{\Omega}$  (рис. 14.3):

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\Omega} = \bar{\Omega}. \quad (14.1)$$

Выражение (14.1) является основным допущением элементарной теории. Оно является вполне реальным, т.к. в современных гироскопах значение  $\Omega$  очень велико и составляет от  $10^3$  до  $10^5$  с<sup>-1</sup>.

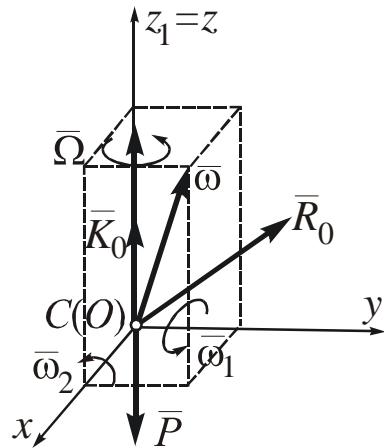


Рис. 14.3. Кинетический момент  $\bar{K}_0$  ротора и реакция  $\bar{R}_0$  точки подвеса

С учетом (14.1) выразим кинетический момент  $K_0$  ротора:

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} \approx K_z = J_z \omega_z = J_z \Omega; \\ \bar{K}_0 \approx J_z \bar{\Omega}, \quad (14.2)$$

где  $J_z$  – момент инерции ротора относительно оси собственного вращения  $z_1$ .

Согласно (14.2) вектор  $\bar{K}_0$  совпадает по направлению с  $\bar{\Omega}$  (направлен по оси  $z_1$ ).

2. Движение ротора с точкой подвеса  $O$  не отличается от движения тела с одной закрепленной точкой. Поэтому действие подвеса на ротор сводится к реакции  $\bar{R}_0$ , приложенной в точке подвеса  $O$  (рис. 14.3). Трением в шарнирах подвеса пренебрегают ввиду его незначительности. Это достигается особой конструкцией подвеса (жидкостный, торсионный, воздушный, магнитный).

## 14.2. Свойства гироскопов

1. Устойчивость оси вращения астатического трехстепенного гироскопа (рис. 14.2, а).

Применяя теорему об изменении кинетического момента механической системы, с учетом сделанных допущений, получим:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{P}) + \bar{m}_0(\bar{R}_0) = 0 \Rightarrow \bar{K}_0 = \text{const.} \quad (14.3)$$

Вектор  $\bar{K}_0$  и ось вращения ротора астатического трехстепенного гироскопа *не меняют своего положения* по отношению к инерциальной системе отсчета. Это – основное свойство гироскопа, определяющее его название. Изобретатель его Ж. Фуко имел цель экспериментально доказать вращение Земли относительно звезд, гироскоп (греч.) – "прибор для наблюдения вращения".

2. *Прецессия* – движение оси ротора гироскопа под действием внешней силы.

При приложении к оси ротора силы  $\bar{F}$ , не проходящей через  $O$  (рис. 14.4, *a*), выражение (14.3) примет вид:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (14.3')$$

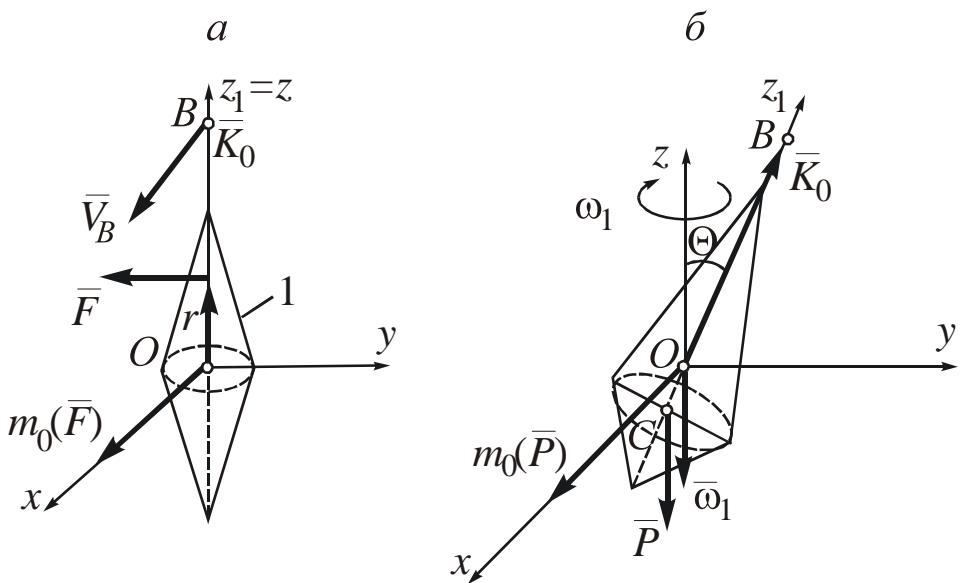


Рис. 14.4. Прецессия оси гироскопа:  
*а* – действие силы  $\bar{F}$ ; *б* – прецессия тяжелого гироскопа

Если отложить вектор  $\bar{K}_0$  в масштабе ( $|\bar{K}_0| = OB$ ), то выражение (14.3') можно представить в следующем виде (теорема А. Резаля):

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{d(\bar{OB})}{dt} = \bar{V}_B = \bar{m}_0(\bar{F}), \quad (14.3'')$$

т.е. отклонение оси гироскопа параллельно вектору момента вынуждающей силы (пары сил).

У тяжелого гироскопа вынуждающая сила  $\bar{P}$  приведет к прецессии (вращению) оси ротора  $z_1$  вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$  (рис. 14.4, б):

$$\bar{V}_B = (\bar{\omega}_1 \times \bar{OB}) = \bar{\omega}_1 \times \bar{K}_0 = \bar{m}_0(\bar{P}). \quad (14.4)$$

Учитывая, что

$$|\bar{\omega}_1 \times \bar{K}_0| = \omega_1 J_z \Omega \sin \theta \quad \text{и} \quad |\bar{m}_0(\bar{P})| = P \cdot OC \sin \theta,$$

получим

$$\omega_1 = \frac{P \cdot OC}{J_z \Omega}.$$

Если угол  $\theta$  при движении не меняется, то прецессия называется *регулярной*.

3. Гироскопический эффект при вынужденной прецессии оси ротора гироскопа.

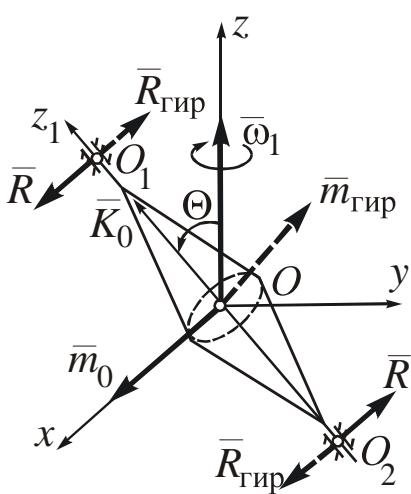


Рис. 14.5. Гироскопический эффект при вынужденной прецессии одностепенного гироскопа

Вынужденная прецессия возникает при повороте основания одно- или двухстепенного гироскопа (рис. 14.1, а, б). Рассмотрим вынужденную регулярную прецессию оси одностепенного гироскопа (рис. 14.5).

Вынуждающий прецессию момент пары давлений шарниров  $\bar{m}_0(\bar{R}, \bar{R}')$  на ось ротора определим из (14.3' и 14.4):

$$\bar{m}_0(\bar{R}; \bar{R}') = \bar{\omega}_1 \times \bar{K}_0.$$

Противодействующий  $\bar{m}_0$  момент пары  $\bar{m}_{\text{гир}}(\bar{R}_{\text{гир}}; \bar{R}'_{\text{гир}})$  будет приложен к шарнирам основания со стороны ротора. Его

называют гироскопическим моментом, а реакции  $\bar{R}_{\text{гир}}$  и  $\bar{R}'_{\text{гир}}$  – гироскопическими давлениями:

$$\begin{aligned}\bar{m}_{\text{гир}}(\bar{R}_{\text{гир}}; \bar{R}'_{\text{гир}}) &= -\bar{m}_0(\bar{R}; \bar{R}') = \bar{K}_0 \times \bar{\omega}_1; \\ m_{\text{гир}}(\bar{R}_{\text{гир}}; \bar{R}'_{\text{гир}}) &= K_0 \omega_1 \sin \theta = J_z \Omega \omega_1 \sin \theta; \\ R_{\text{гир}} = R'_{\text{гир}} &= \frac{m_{\text{гир}}(\bar{R}_{\text{гир}}; \bar{R}'_{\text{гир}})}{O_1 O_2} = \frac{J_z \Omega \omega_1 \sin \theta}{O_1 O_2}.\end{aligned}\quad (14.5)$$

Гироскопический эффект заключается в возникновении при вынужденной прецессии давления со стороны ротора гироскопа на шарниры основания. Направление момента пары давления  $m_{\text{гир}}$  соответствует совмещению  $\bar{K}_0$  (оси ротора) с  $\bar{\omega}_1$  (осью прецессии).

Физической причиной возникновения гироскопического момента  $\bar{m}_{\text{гир}}$  являются кориолисовы силы инерции масс ротора гироскопа, возникающие при относительном их вращении вместе с ротором и переносном вращении основания.

### 14.3. Применение гироскопов, гироскопическое ориентирование

Ориентация с помощью гироскопа становится возможной за счет переносного вращения Земли.

Суточное вращение Земли происходит вокруг оси, образующей угол  $23^\circ$  с нормалью к плоскости эклиптики (плоскости, в которой расположены Солнце и планеты), с запада на восток с угловой скоростью  $1 \text{ об/сут} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Разложим вектор угловой скорости Земли  $\bar{\omega}_3$  в плоскости меридиана на две составляющие: горизонтальную, направленную по касательной к меридиану в сторону Северного полюса  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$ , и вертикальную, направленную от центра  $O$  Земли,  $\bar{\omega}_{\text{вер}}$  (рис. 14.6):

$$\omega_{\text{гор}} = \omega_3 \cos \phi; \quad \omega_{\text{вер}} = \omega_3 \sin \phi,$$

где  $\phi$  – географическая широта точки наблюдения  $M$ .

В плоскости горизонта вектор  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$ , направленный на север, в общем случае будет составлять угол  $\theta$  с осью  $z_1$  ротора гироскопа. Разложим  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$  на взаимно перпендикулярные составляющие  $\bar{\omega}'_{\text{гор}}$  и  $\bar{\omega}''_{\text{гор}}$ .

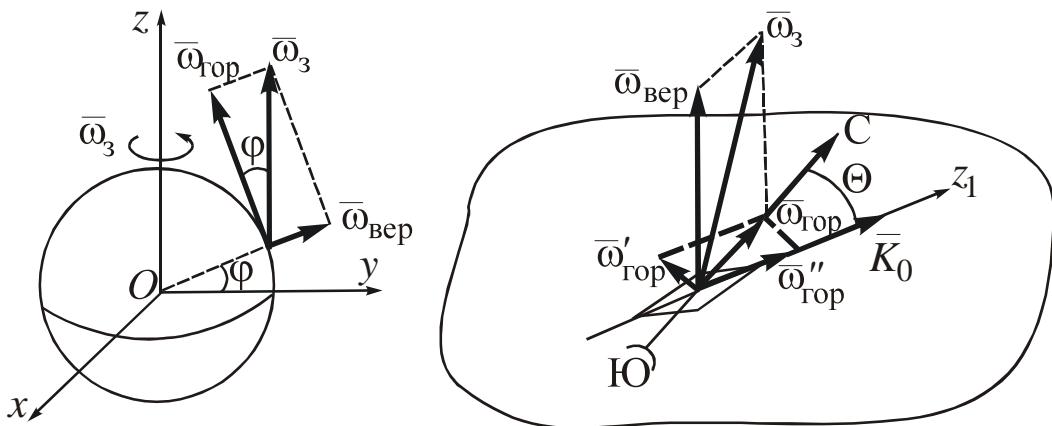


Рис. 14.6. Составляющие угловой скорости Земли

Рассмотрим влияние каждой из составляющих  $\bar{\omega}_3$ :

$\bar{\omega}_{\text{гор}}$  – является основной причиной ориентации по меридиану оси ротора двухстепенного и маятникового гироскопов;

$\bar{\omega}''_{\text{гор}}$  – совпадает с вектором  $\bar{\Omega}$  вращения ротора гироскопа; ввиду того, что  $\omega''_{\text{гор}} \ll \Omega$ , ею можно пренебречь;

$\bar{\omega}_{\text{вер}}$ ,  $\bar{\omega}'_{\text{гор}}$  – обусловливают "видимый уход" на запад и вниз под горизонт земной поверхности из-под оси трехстепенного гироскопа; вызывают необходимость коррекции гироскопа направления (гираполукомпаса).

Практически принципиально возможными являются три основных вида конструкций гирокомпасов (гиротеодолитов).

### *Гиротеодолит с двухстепенным гироскопом*

Если обеспечить перемещение оси  $z_1$  ротора двухстепенного

гироскопа строго в горизонтальной плоскости, то гироскопический момент от вынужденной прецессии с угловой скоростью  $\bar{\omega}_{\text{вер}}$  будет полностью уравновешиваться реакциями неподвижных шарниров гироскопа, а гироскопический момент от  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$  будет стремиться совместить ось  $z_1$  ротора с меридианом (направлением С–Ю) (рис. 14.6).

Из (14.5) следует, что при малых углах прецессии  $\theta$  величина  $m_{\text{тир}}$  пропорциональна  $\theta$ . Дифференциальное уравнение вращательного движения оси ротора относительно неподвижной вертикальной оси  $y$  будет иметь следующий вид:

$$J_y \ddot{\theta} + K_0 \omega_{\text{гор}} \theta = 0, \quad (14.6)$$

где  $J_y$  – момент инерции ротора относительно оси  $y$ .

Из (14.6) следует, что конец оси  $z_1$  будет совершать гармонические колебания в горизонтальной плоскости вокруг положения меридиана с круговой частотой  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{K_0 \omega_{\text{гор}}}{J_y}}. \quad (14.7)$$

Схемы устройства гироэванскопа с двухступенным гироскопом представлены на рис. 14.7. Они различаются способом фиксирования положения меридиана. Корпус прибора 1 до измерений устанавливают строго в горизонтальной плоскости, обеспечивая вертикальность оси  $y$ . При применении оптического угломера (рис. 14.7, *a*) чувствительный элемент 5 (гироскоп) подвешивают на торсионе (плоской нити) 3 с укрепленным на ней зеркалом. С помощью оптической системы 2 фиксируют положение зеркала торсиона (а значит, и оси  $z_1$  гироскопа). После разгона гиромотора 5 ось  $z_1$  начинает совершать колебания вокруг положения меридиана согласно уравнению (14.6) (период колебаний составляет 0,2–1,0 мин). По шкале корпуса устанавливают направление меридиана.

При применении датчика гироскопического момента (рис. 14.7, *б*) на оси чувствительного элемента поплавкового типа устанавливают датчик рассогласования 6 и датчик момента 7.

При произвольном положении корпуса 1 и оси гироскопа 5 возникает гироскопический момент  $m_{\text{гир}}$ , определяемый выражением (14.5). Ось ротора поворачивается относительно корпуса, и возникает сигнал рассогласования, фиксируемый датчиком 6. Этот сигнал усиливается усилителем 8, а датчик момента вырабатывает тормозящий момент  $m_{\text{топ}}$ , такой, чтобы угол рассогласования был равен нулю.

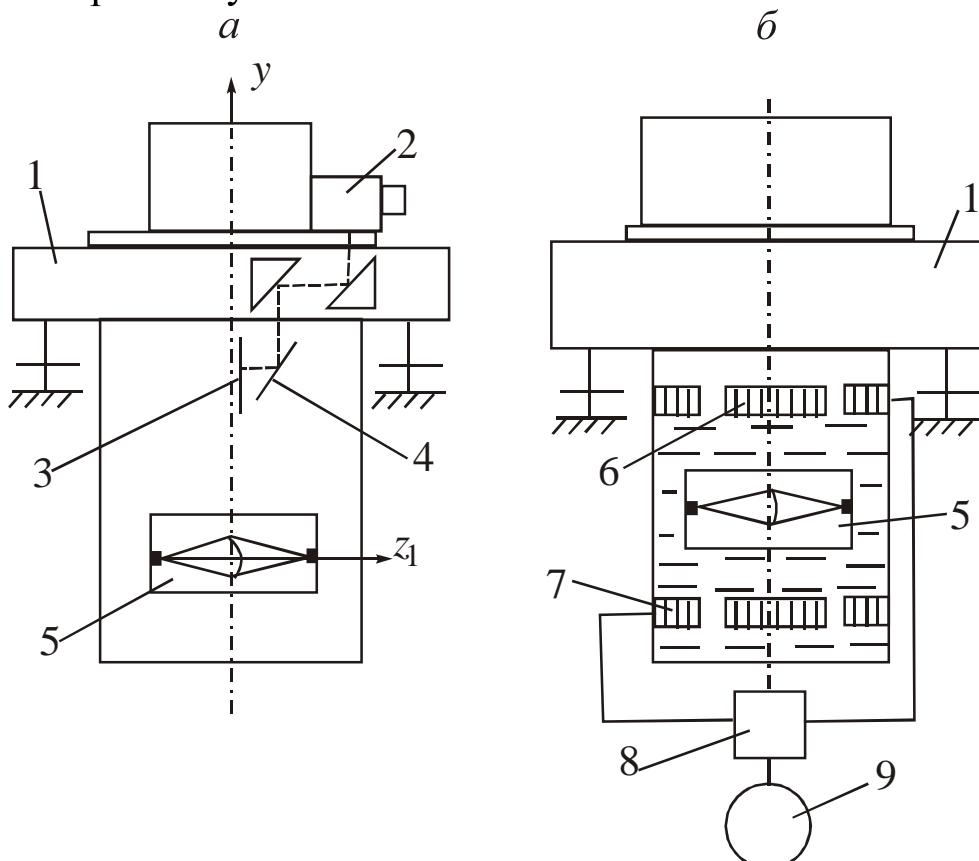


Рис. 14.7. Устройство гироэодолита с двухстепенным гироскопом, с оптическим угломером (а); с датчиком гироскопического момента (б):

1 – корпус; 2 – оптическая система; 3 – торсион с зеркалом; 4 – неподвижное зеркало; 5 – чувствительный элемент; 6 – датчик рассогласования; 7 – датчик момента; 8 – усилитель; 9 – индикатор

В положении равновесия:

$$m_{\text{топ}} = m_{\text{гир}} = K_0 \omega_{\text{гор}} \sin \theta.$$

Величину  $m_{\text{топ}}$  фиксируют индикатором 9. Поворачивая

корпус 1, фиксируют его положение, соответствующее нулевому или максимальному значению  $m_{\text{топ}}$ : при  $m_{\text{топ}}=0 \quad \theta=0$  (ось ротора сориентирована в направлении С–Ю); при  $m_{\text{топ}}=\max \quad \theta=\frac{\pi}{2}$  (направление В–З).

Основным источником погрешности данного типа гирокомпасов является неточность горизонтальности установки корпуса. При этом ротор гироскопа начинает реагировать на составляющую  $\bar{\omega}_{\text{вер}}$ .

### *Гиротеодолит с маятниковым гироскопом*

У маятникового гироскопа центр тяжести чувствительного элемента  $C$  расположен ниже точки подвеса О. Фактически трехстепенной маятниковой гироскоп имеет 2,5 степени свободы, т.к. сила тяжести  $\bar{P}$  стремится в любом положении повернуть ось ротора (вектор  $\bar{K}_0$ ) в горизонтальную плоскость. Такой гироскоп будет испытывать одновременно 2 вида прецессии: в горизонтальной плоскости за счет вынужденной прецессии с угловой скоростью  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$  и в вертикальной за счет вынуждающей силы  $\bar{P}$ . Это приведет к тому, что вектор  $\bar{K}_0$  будет отклоняться от направления меридиана на угол  $\pm\beta$  по горизонтали и  $\pm\alpha$  по вертикали (рис. 14.8), т.е. будет описывать эллипс с полуосами  $a$  и  $b$ .

Соотношение полуосей эллипса можно оценить, исходя из величины вынуждающих моментов:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{P \cdot OC}{K_0 \cdot \omega_{\text{гор}}}}.$$

Практически величина отношения,  $a/b$  составляет 100–200.

Отсчет углов  $\alpha$  и  $\beta$  и определение направления С–Ю осуществляют с помощью оптической или электронной следящей системы.

### *Гироскоп направления (гирополукомпас)*

Гироскоп данного типа не указывает направление меридиа-

на (т.е. не является компасом), а позволяет сохранять любое заданное направление.

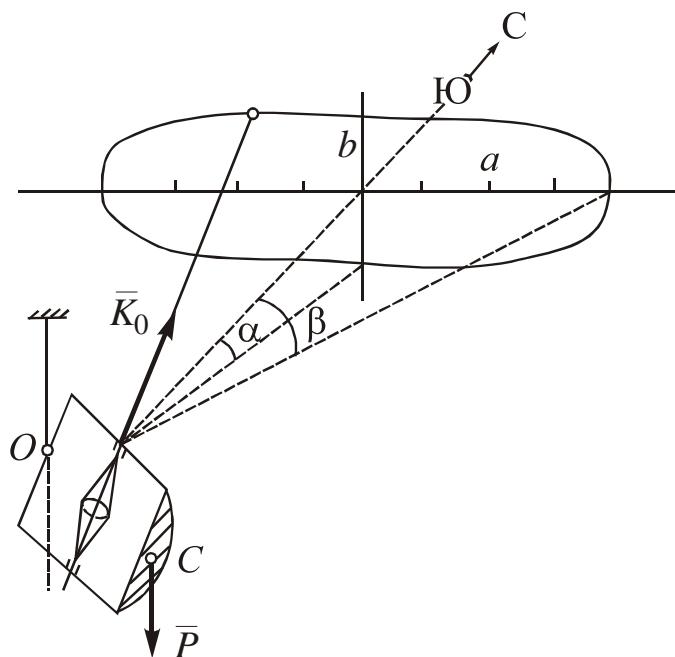


Рис. 14.8. Схема гиротеодолита с маятниковым гироскопом

Ось ротора астатического трехстепенного гироскопа, согласно (14.3) не изменяет своего положения относительно инерциальной системы отсчета. Однако вследствие "видимого ухода" земной поверхности, обусловленного действием составляющих  $\bar{\omega}_{\text{вер}}$  и  $\bar{\omega}_{\text{гор}}$  (рис. 14.6), ориентация оси ротора относительно поверхности Земли будет непрерывно меняться. Поэтому гироскоп направления включает астатический трехстепенный гироскоп и устройства компенсации ухода плоскостей меридиана и горизонта. Схема данного гироскопа представлена на рис. 14.9.

Устройство компенсации включает индикатор вертикали 1, датчик момента горизонтальной плоскости 2, задающее корректирующее устройство 3 и датчик корректирующего момента 4. Индикатор вертикали 1 содержит маятниковый или ртутный переключатель, замыкающий цепь датчика момента 2 при негоризонтальности  $\bar{K}_0$ . Датчик момента 2 создает корректирующий момент, направленный по оси  $z$ , до тех пор, пока вектор  $\bar{K}_0$  не окажется в горизонтальной плоскости. Таким образом, компенси-

руется "уход" с угловой скоростью  $\bar{\omega}'_{\text{гор}}$ .

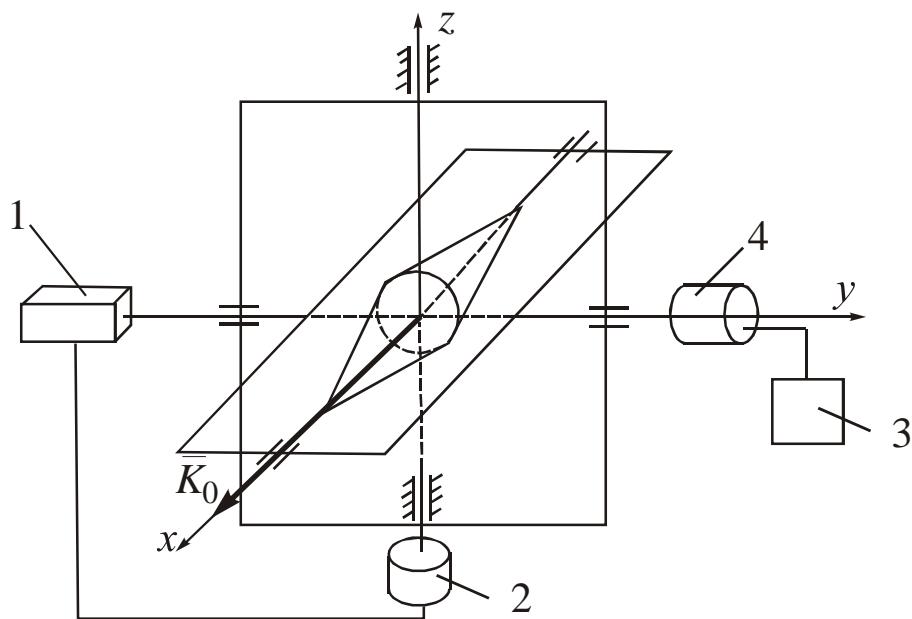


Рис. 14.9. Схема гироскопа направления (гирополукомпаса):  
1 – индикатор вертикали; 2 – датчик момента горизонтальной плоскости; 3 – задающее корректирующее устройство; 4 – датчик корректирующего момента

Корректирующее устройство 3 вырабатывает сигнал, управляющий датчиком 4, который вырабатывает корректирующий момент, направленный по оси  $y$ :

$$M_{\text{кор}}^y = K_0 \omega_{\text{вер}} = K_0 \omega_3 \sin \varphi.$$

Таким образом, компенсируется "уход" с угловой скоростью  $\bar{\omega}_{\text{вер}}$ .

Точность сохранения ориентации гироскопа направления зависит от точности работы компенсирующих устройств, влияния трения в подвесе, небаланса и т.п. Ввиду относительно высокого уровня погрешности гирополукомпасы не применяются непосредственно для маркшейдерских измерений, однако данный принцип используется в двухрежимных теодолитах, в которых гироскоп может работать сначала в режиме гироскопа направления, а затем – двухступенного гироскопа с горизонтальной осью ротора.

#### 14.4. Некоторые направления применения гироскопов в технике

*Устройство задания направления (рис. 14.10)*

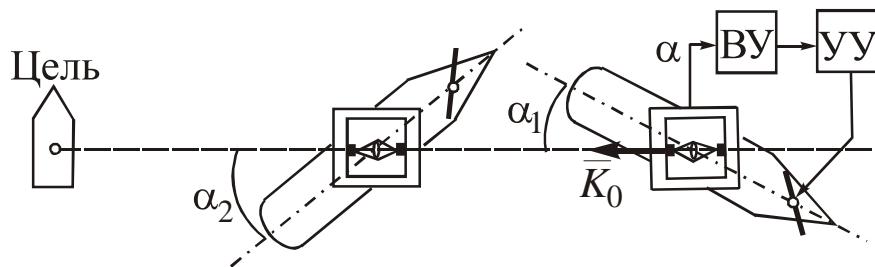


Рис. 14.10. Гироскопическое устройство задания направления

При наведении ось трехстепенного астатического гироскопа (вектор  $\bar{K}_0$ ) направляют на цель (ориентир). В процессе перемещения объекта управления в соответствии со свойством устойчивости (14.3) ось гироскопа не изменит своего направления. Под воздействием, возмущающих факторов (ветер, течение и т.п.) корпус объекта может отклониться от цели. При этом между осями ротора гироскопа и объекта возникает угол рассогласования  $\alpha$ , который с помощью вычислительного ВУ и управляющего УУ устройств преобразуют в поворот рулей, возвращая объект на требуемый курс.

На данном принципе основаны устройства стабилизации курса торпеды неуправляемого снаряда, ракеты, корабля, космических аппаратов, автопилота самолета, а также узлов наводки приборов для астрономических наблюдений небесных тел, специальных приборов для контроля угла наклона и искривлений буровых скважин, горных выработок и тоннелей.

При необходимости длительной стабилизации курса необходимо применять компенсацию "видимого ухода" земной поверхности, т.е. гироскоп направления (п. 14.3).

*Датчик угловой скорости (гиромахометр) (рис. 14.11)*

При установке рамки двухстепенного гироскопа в плоско-

сти, перпендикулярной оси вращения объекта  $z$ , величина гирокинетического момента, стремящегося совместить вектор кинетического момента  $\bar{K}_0$  с вектором угловой скорости прецессии  $\bar{\omega}_l$ , согласно (14.5), будет зависеть от величины  $\omega_l$ . Величину  $m_{\text{гир}}$  измеряют с помощью пружинных динамометров с жесткостью  $C$ .

При равенстве моментов гирокинетических сил и сил упругости пружин динамометра величина показания динамометра составит:

$$c\lambda k_1 = J_z \Omega \omega_l \sin \theta,$$

где  $\lambda$  – деформация пружины динамометра;  $k_1$  – коэффициент, учитывающий геометрические параметры рамки гироскопа.

При малых деформациях  $\lambda$  величина  $\theta$  изменится незначительно ( $\theta = \pi/2 = \text{const}$ ), и изменения  $F_{\text{упр}}$  будут пропорциональны изменениям  $\omega_l$ .

Гирокинетическими датчиками угловой скорости оснащают самолеты, вертолеты, ракеты, космические аппараты.

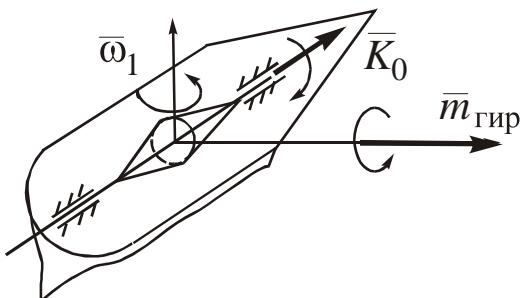


Рис. 14.11. Датчик угловой скорости (гиrotахометр)

вынуждает прецессию оси ротора и приводит в соответствии с (14.5) к появлению гирокинетических давлений на шарниры рото-

Нарушение управления объектами за счет действия гирокинетических сил (рис. 14.12)

Быстро врачающийся ротор (турбина) двигателя корабля, самолета и т.п. объектов обладает свойствами гироскопа. Поворот оси  $\bar{\omega}_l$  объекта

ра, которые передаются корпусу объекта, что вызывает нарушение управления объектах. У корабля на рис. 14.12 при повороте влево вследствие действия  $\bar{m}_{\text{тир}}$  произойдет подъем носовой части, а при повороте вправо – ее опускание, что может привести к аварийной ситуации.

Описанное явление требует установки специальных устройств, компенсирующих изменение положения корпуса при поворотах и виражах на легких судах и винтовых самолетах.

### *Гирокопический успокоитель колебаний (рис. 14.13)*

Гирокопический момент  $\bar{m}_{\text{тир}}$  противоположен моменту вынуждающих сил  $\bar{m}_0$ . При качке вынуждающими силами являются подъемные силы волн, поворачивающие корабль вокруг горизонтальной оси. Установка силового одноступенного гирокопа (с массой ротора порядка сотен килограмм), ось ротора которого перпендикулярна оси корабля, позволяет за счет возникновения  $\bar{m}_{\text{тир}}$  в значительной мере компенсировать вынуждающий момент  $\bar{m}_0$  и уменьшить амплитуду качки (рис. 14.13, *a*).

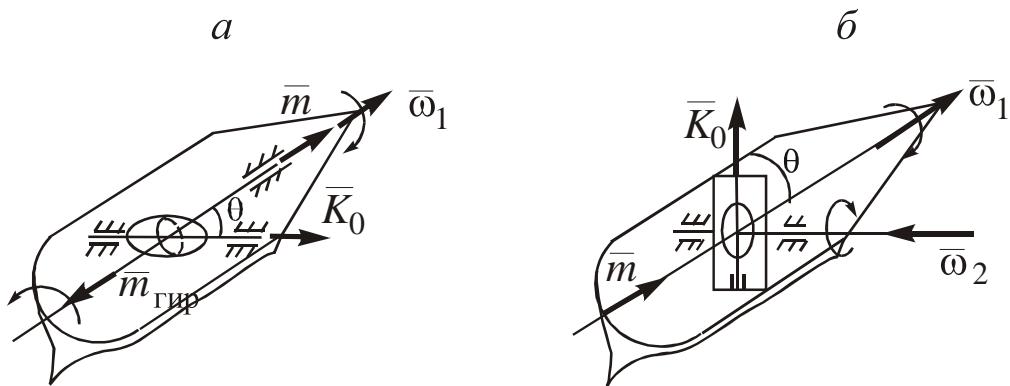


Рис. 14.13. Схема гирокопического успокоителя качки корабля:  
*а* – силовой гирокоп; *б* – двухстепенной гирокоп-датчик качки

На больших кораблях применение силовых гирокопов становится неэффективным, т.к. приходится значительно увеличить массу гирокопа. На таких кораблях стабилизируют отдельные площадки, на которых установлены орудия, радиолокаторы или

которые служат местом приема и старта самолетов и вертолетов. Данные площадки устанавливают на подвесе, так что они могут поворачиваться относительно корпуса корабля специальными электродвигателями. При качке с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$  ось ротора двухступенчатого гироскопа (вектор  $\bar{K}_0$ ) начнет поворачиваться с угловой скоростью  $\bar{\omega}_2$  в направлении совмещения с  $\bar{\omega}_1$ . Величина и направление  $\bar{\omega}_2$  являются информацией о характере колебаний корпуса корабля. Этот сигнал усиливается, преобразуется и подается на электродвигатели стабилизации, которые, поворачивая площадку относительно корпуса с необходимой скоростью, обеспечивает ее горизонтальность при любой качке.

#### **14.5. Вопросы для самопроверки**

1. Назовите основные элементы гироскопа.
2. По каким признакам различают гироскопы? Назовите виды гироскопов.
3. Сформулируйте допущения элементарной теории гироскопа. Насколько реальны эти допущения?
4. В чем состоит основное свойство гироскопа?
5. Объясните с позиций теории гироскопа, почему быстро движущийся велосипед (мотоцикл) более устойчив, чем неподвижный.
6. С какой целью жонглер раскручивает подбрасываемые предметы?
7. Почему ось ротора гироскопа отклоняется не в ту сторону, в которую действует вынуждающая сила?
8. Объясните, почему прецессирует детский волчок. Почему перед остановкой скорость прецессии возрастает?
9. Ось Земного шара прецессирует с периодом 26 тыс. лет. Объясните это явление, считая вынуждающей силой притяжение Луны и учитывая, что Земля сплюснута полюсами, а плоскость экватора наклонена под углом  $23^\circ$  к плоскости эклиптики.
10. Объясните причину возникновения гироскопического момента при вынужденной прецессии гироскопа.
11. На какие составляющие можно разложить вектор угло-

вой скорости Земли в плоскостях меридиана и горизонта?

12. Чем вызван "видимый уход" земной поверхности от оси стабилизированного трехстепенного гироскопа?

13. Чем принципиально отличаются конструкции гирокомпасов?

14. Почему ось двухстепенного гироскопа совершает колебания вокруг положения меридиана?

15. Как конструктивно осуществляют фиксирование положения меридиана в теодолитах с двухстепенным гироскопом?

16. В чем принципиальный недостаток гиротеодолита с двухстепенным гироскопом?

17. Почему ось маятникового гироскопа совершает колебания в горизонтальной и вертикальной плоскостях?

18. Как осуществляется компенсация "видимого ухода" земной поверхности в гирокомпасе направления?

19. Каковы достоинства и недостатки каждого из трех основных видов гиротеодолитов?

20. Назовите основные направления применения гироскопов в технике.

21. Как функционирует гироскопическое устройство задания направления?

22. На чем основан принцип действия гиротахометра?

23. Какими путями можно уменьшить влияние гироскопического эффекта при поворотах судна с массивным ротором?

24. В чем заключается принцип действия силового гироскопа?

25. Какими путями можно уменьшить влияние качки корабля, используя свойства гироскопа?

#### **14.6. Задачи для самостоятельного решения**

14.1. Ось турбины расположена параллельно оси корпуса судна, масса ротора 2500 кг, его радиус инерции 0,9 м, угловая скорость 1200 об/мин, расстояние между подшипниками 1,9 м. Наибольшее значение угловой скорости судна при килевой качке  $0,11 \text{ c}^{-1}$ . Составить чертеж и определить максимальные гироскопические усилия в подшипниках. (14,7 кН).

14.2. Определить величину гироскопического момента, который действует на корабль при движении его по дуге окружности радиуса 200 м со скоростью 10 м/с, если винт судна вращается с угловой скоростью  $70 \text{ с}^{-1}$ , а его момент инерции  $1400 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Составить чертеж. (4900 Н).

14.3. Волчок имеет форму диска диаметром 0,3 м и вращается с угловой скоростью  $80 \text{ с}^{-1}$  вокруг оси симметрии, длина оси 0,2 м. Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка. Составить чертеж ( $2,18 \text{ с}^{-1}$ ).

14.4. Невесомый стержень длиной  $2l$  подвешен без трения горизонтально. На одном из его концов закреплен соосно однородный сплошной диск радиуса  $r$ . Диск вращается о большой угловой скоростью  $\Omega$ . Составить чертеж и определить угловую скорость прецессии стержня с диском ( $2lg/r^2\theta$ ).

14.5. Турбовинтовой самолет, летящий со скоростью 540 км/ч, совершает поворот в горизонтальной плоскости по окружности радиуса 100 м. Для компенсации гироскопических сил пилот отклоняет горизонтальные рули и за счет аэродинамических сил удерживает самолет в горизонтальном положении. Определить момент аэродинамической пары, если вес ротора турбины 1500 Н 200 Н, их радиусы инерции соответственно 0,4 м и 1,0 м, а угловая скорость 2400 об/мин. Составить чертеж. (1700 Н·м).

14.6. Волчок состоит из однородного диска радиуса 4 см и оси длиной 4 см. Найти период прецессии волчка при угловой скорости  $80\pi \text{ с}^{-1}$ . Составить чертеж. (3,25 с).

14.7. Волчок имеет вес 1 Н и момент инерции  $0,002 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , расстояние от центра масс до неподвижной точки 0,1 м. Определить собственную угловую скорость волчка при угловой скорости прецессии  $0,1 \text{ с}^{-1}$ . Составить чертеж. ( $500 \text{ с}^{-1}$ ).

14.8. Артиллерийский снаряд в полете вращается вокруг собственной оси, а его ось прецессирует вокруг касательной к траектории вследствие аэродинамического сопротивления среды. Определить период прецессии, считая, что сопротивление воздуха величиной 21400 Н приложено сосредоточенно к оси снаряда параллельно касательной на расстоянии 0,2 м от его центра тяже-

сти, а кинетический момент снаряда относительно его оси симметрии  $5900 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Составить чертеж. (8,66 с).

14.9. Артиллерийский снаряд движется аналогично п. 8, причем угол между собственной осью и касательной к траектории (угол регулярной прецессии) составляет  $10^\circ$ . Определить момент аэродинамических сил относительно центра масс снаряда, если его масса 15 кг, радиус инерции 4 см, собственная угловая скорость  $30 \text{ с}^{-1}$ , а угловая скорость прецессии  $0,8 \text{ с}^{-1}$ . Составить чертеж. (0,1 Н·м).

14.10. Ротор тяжелого трехступенчатого гироскопа, имея массу 0,1 кг, момент инерции  $0,001 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  и собственную угловую скорость  $30 \text{ с}^{-1}$  совершает прецессию у поверхности неизвестной планеты с угловой скоростью  $0,054 \text{ с}^{-1}$ . Определить ускорение свободного падения у поверхности планеты, если расстояние от центра масс ротора до неподвижной точки 0,01 м. Составить чертеж. ( $1,62 \text{ м}/\text{с}^2$ ).

14.11. Волчок, имея момент инерции  $0,001 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  и собственную угловую скорость  $150 \text{ с}^{-1}$ , совершает регулярную прецессию вокруг вертикальной оси с углом прецессии  $5^\circ$ . Определить момент силы тяжести волчка относительно неподвижной точки. Составить чертеж. ( $1,96 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$ ).

14.12. Переднее колесо велосипеда с моментом инерции  $0,16 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  катится с угловой скоростью  $20 \text{ с}^{-1}$ . При повороте руль отклоняется с угловой скоростью  $2 \text{ с}^{-1}$ . Определить гироскопический момент. Составить чертеж (6,4 Н·м).

14.13. Центр колеса автомобиля с радиусом 0,33 м перемещается со скоростью 10 м/с. Определить гироскопический момент пары, приложенной к колесу на повороте радиуса 50 м, если момент инерции колеса  $1,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Составить чертеж. (10,8 Н·м).

14.14. Найти гироскопический момент, приложенный к мотоциклу о стороны колеса коляски при скорости 54 км/ч на вираже радиуса 20 м, если радиус колеса 0,5 м, масса 6 кг, а его масса распределена по ободу. Составить чертеж. (33,75 Н).

14.15. Ротор турбины с моментом инерции  $7500 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью  $1000 \text{ с}^{-1}$ . Определить гироскопический момент ротора при его установке

на широте  $60^\circ$  (г. Санкт-Петербург) так, что вектор угловой скорости ротора направленно на север. Составить чертеж. ( $472 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ).

14.16. Ротор гироскопа вращается с угловой скоростью  $40 \text{ с}^{-1}$ . Угловая скорость прецессии  $0,25 \text{ с}^{-1}$ . Определить расстояние от неподвижной точки до центра тяжести ротора, если его масса  $1 \text{ кг}$ , а момент инерции  $0,004 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Составить чертеж. ( $4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ).

14.17. Волчок с весом  $5 \text{ Н}$  и расстоянием от центра масс до неподвижной точки  $0,1 \text{ м}$  вращается с угловой скоростью  $200 \text{ с}^{-1}$ . Определить момент инерции волчка, если угловая скорость регулярной прецессии  $2 \text{ с}^{-1}$ . Составить чертеж. ( $1,25 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ).

14.18. Гироудолит с двухстепенным гироскопом, установленным в горизонтальной плоскости (рис. 7 а), расположен на широте  $60^\circ$ . Моменты инерции ротора относительно оси вращения –  $10 \text{ г}\cdot\text{см}^2$ , относительно вертикальной оси –  $36,5 \text{ г}\cdot\text{см}^2$ . Записать дифференциальное уравнение колебаний оси ротора и найти период колебаний, если угловая скорость вращения ротора  $10^4 \text{ с}^{-1}$ . ( $20 \text{ с}$ ).

14.19. Ось ротора двухстепенного гироскопа теодолита (рис. 14.7, а) совершает колебания вокруг положения меридiana с периодом  $30 \text{ с}$ . Отношение моментов инерции ротора относительно оси вращения и относительно вертикальной оси составляет  $0,2$ . Угловая скорость вращения ротора  $8600 \text{ с}^{-1}$ . Определить широту местности. ( $45^\circ$ ).

14.20. Ось ротора двухстепенного гироскопа гироудолита (рис. 14.7, а) совершает колебания вокруг положения меридiana с периодом  $45 \text{ с}$ . Широта местности  $60^\circ$ , угловая скорость вращения ротора  $1770 \text{ с}^{-1}$ . Найти соотношение моментов инерции ротора относительно оси вращения и вертикальной оси. Составить дифференциальное уравнение колебаний ротора ( $0,3$ ).

14.21. Ротор гироудолита с датчиком гирокопического момента двухстепенного гироскопа (рис. 14.7, б) имеет момент инерции относительно оси вращения  $200 \text{ г}\cdot\text{см}^2$  и угловую скорость  $10^4 \text{ с}^{-1}$ . Определить величину тормозящего момента датчика в положениях оси ротора С–Ю и В–З на широта  $60^\circ$ . ( $0; 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{м}$ ).

14.22. Максимальный гироскопический момент ротора двухстепенного гироскопа (рис. 14.7, б), компенсируемый датчиком момента, составляет  $10^{-5}$  Н·м. Кинетический момент ротора относительно оси вращения  $0,19 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Определить широту местности. ( $45^\circ$ ).

14.23. Ротор маятникового гироскопа теодолита (рис. 14.8) имеет массу 100 г и кинетический момент  $0,055 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \text{ с}^{-1}$ . Определить соотношение полуосей эллипса, описываемого концом оси ротора на широте  $60^\circ$ , если центр тяжести ротора смещен относительно точки подвеса на 2 см. Составить чертеж. (100).

14.24. Конец оси ротора маятникового гироскопа теодолита (рис. 14.6) описывает на широте  $60^\circ$  эллипс с соотношением полуосей 120. Масса ротора 200 г, момент инерции относительно оси вращения  $600 \text{ г}\cdot\text{см}^2$  угловая скорость  $1900 \text{ с}^{-1}$ . Определить смещение центра тяжести ротора относительно точки подвеса. Составить чертеж. (3,0 см).

14.25. Ротор гирокомпаса направления (рис. 14.9) имеет момент инерции относительно оси вращения  $500 \text{ г}\cdot\text{см}^2$ , угловую скорость  $10^4 \text{ с}^{-1}$ . Определить, какой корректирующий момент необходимо выработать датчику для компенсации "видимого ухода" Земли на широте  $60^\circ$ . ( $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}$ ).

## 15. ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

При решении задач динамики систему отсчета, жестко связанную с планетой Земля, чаще всего считают инерциальной. Действительно, угловые скорости нашей планеты в ее суточном и годовом непоступательных движениях достаточно малы, чтобы вносить погрешность в расчеты из-за неинерциальности системы отсчета. Однако при рассмотрении ряда геомеханических явлений, атмосферных и океанических течений, характеризующихся высокими скоростями или длительностью протекания, именно разного рода силы инерции, возникающие за счет вращения Земли, приводят к колossalным последствиям в виде формирования

климатических поясов, дрейфа материалов, катастрофических землетрясений, горных ударов и др.

В данном разделе поставлена цель проиллюстрировать применение законов статики, кинематики и динамики для объяснения этих явлений.

В п. 9.7 было установлено, что основной закон динамики при относительном движении материальной точки имеет вид

$$m\bar{a}_{\text{от}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k - m\bar{a}_{\text{пер}} - m\bar{a}_{\text{к}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} + \bar{F}_{\text{к}}^{\text{и}}, \quad (15.1)$$

где  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} = -m\bar{a}_{\text{пер}}$ ;  $\bar{F}_{\text{к}}^{\text{и}} = -m\bar{a}_{\text{к}}$  – соответственно, переносная и кориолисова силы инерции.

Таким образом, при относительном движении материальной точки основной закон динамики будет иметь тот же вид, что и при абсолютном движении, если дополнительно к действующим на точку силам к ней приложить переносную и кориолисову силы инерции.

### **15.1. Влияние вращения Земли на равновесие тел**

Угловая скорость Земли в ее суточном вращении составляет:

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0,73 \cdot 10^{-4} (\text{с}^{-1}).$$

Рассмотрим равновесие материальной точки на гладкой земной поверхности. Согласно (15.1) уравнение равновесия будет иметь вид

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} = 0,$$

где  $\bar{F}$  – сила гравитации;  $\bar{N}$  – нормальная реакция гладкой поверхности.

$$F_{\text{пер}}^{\text{и}} = ma_{\text{пер}}^{\text{и}} = m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi, \quad (15.2)$$

где  $R_3$  – радиус Земли,  $6,37 \cdot 10^6$  м;  $\varphi$  – широта точки наблюдения (рис. 15.1).

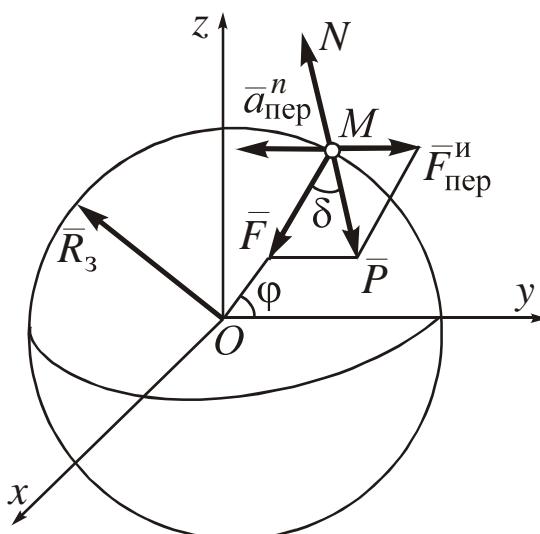


Рис. 15.1

Фактическая сила тяжести будет равна сумме  $\bar{F} + \bar{F}_{\text{пер}}^{\text{i}} = \bar{P}$  и отклонена от вертикали на угол  $\delta$ .

Оценим величины  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{i}}$  и  $\delta$ .

$$\frac{F_{\text{пер}}^n}{P} = \frac{\omega_3^2 R_3 \cos \varphi}{g}. \quad (15.3)$$

На полюсе ( $\varphi = 90^\circ$ )

$F_{\text{пер}}^{\text{i}} = 0$ , на широте  $\varphi = 60^\circ$   $-0,17 \% P$ , на экваторе ( $\varphi = 0$ )  $-0,34 \% P$ .

$$\delta \approx \sin \delta = \frac{F_{\text{пер}}^{\text{i}} \sin \varphi}{P} = \frac{\omega_3^2 R_3 \sin 2\varphi}{2g}. \quad (15.4)$$

На полюсах и экваторе  $\delta = 0$ , на остальных широтах  $\delta \neq 0$ , максимальное значение  $\delta_{\max} \approx 0,1^\circ$  при  $\varphi = 45^\circ$ .

Из проведенного анализа следует, что величина силы тяжести  $\bar{P}$  и ее отклонение от истинной вертикали зависят от широты местности. На этот же угол  $\delta$  будет отклоняться от истинной горизонтали водная поверхность. Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении геодезических измерений.

## 15.2. Связь вращения Земли с геомеханическими процессами

Из предыдущего параграфа ясно, что из-за влияния силы  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{i}}$  поле фактической силы тяжести  $\bar{P}$  не является однородным: на экваторе эта сила на 0,34 % меньше чем на полюсе. Это является причиной отличия формы Земли от шарообразной. С увеличением массы планет увеличиваются напряжения в горных передах, и, начиная с некоторых критических значений, когда напряжения превышают объемную прочность породы, пластиче-

ское течение в твердых породах делает их подобными вязким жидкостям. Все планеты Солнечной системы имеют массу, большую критической, поэтому они имеют шароподобную форму. Отдельные малые планеты – спутники, астероиды, кометы, с массой ниже критической, имеют неправильную форму.

При отсутствии вращения поле тяготения было бы однородным, и Земля имела идеальную сферическую форму. Реально притяжение на экваторе ниже, чем на полюсе, поэтому планета имеет форму шара сплюснутого с полюсов (геоида). Соотношение максимального и минимального радиусов обратно пропорционально соотношению соответствующих экстремальных значений  $P$  на полюсе и экваторе  $P_{\text{экв}}$ :

$$\frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}} = \frac{P_{\text{пол}} - P_{\text{экв}}}{P_{\text{экв}}} \approx \frac{\omega_3^2 R_3}{g}. \quad (15.5)$$

Данные закономерности справедливы для любой планеты. В табл. 15.1 приведены данные о периодах вращения и соотношениях радиусов для четырех планет.

Для Земли  $R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}$  составляет около 20 км, а сжатие – 0,34 %. Близкие значения для Марса, а у планет-гигантов, где массы и угловые скорости намного выше, сжатие из-за центробежных сил выражено значительно больше.

Таблица 15.1

Планета	Радиус, $R$ , м	Период вращения $T$ , сут	$\frac{\omega^2 R}{g} 100\%$	$\frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}} 100\%$
Земля	$6,37 \cdot 10^6$	1,06	0,345	0,336
Марс	$3,39 \cdot 10^6$	1,03	0,465	0,526
Юпитер	$7,14 \cdot 10^7$	0,41	9,09	6,67
Сатурн	$6,03 \cdot 10^7$	0,43	16,66	10,05

Неидеальность формы Земли прямо не влияет на геомеханические процессы, гораздо большее значение имеет то, что ее форма нестабильна ввиду изменения угловой скорости  $\omega_3$ . По данным точных измерений за 10 млн. лет она уменьшилась на

0,2 %. Это изменение можно объяснить с позиций законов механики, рассматривая взаимодействие Земли и Луны.

Наиболее заметным результатом этого взаимодействия являются приливы. Точка Земли, ближайшая к Луне, испытывает наибольшее притяжение. Это вызывает приливную волну в океане и волну деформации  $\Delta R_3$  Земной коры, среднее значение которой можно определить из закона тяготения, зная массу Луны  $M_L$  и расстояние до нее  $L$ :

$$\Delta R_3 = R_3 \frac{M_L}{M_3} \left( \frac{R_3}{L} \right)^3 \approx 0,36 \text{ (м).} \quad (15.8)$$

Поскольку внешними силами в системе Земля-Луна можно пренебречь, за счет действия закона сохранения движения центра масс появляется второй горб прилива на обратной стороне Земли (рис. 15.2). При повороте Земли деформации восстановления твердой оболочки происходят с запаздыванием, поэтому ось горбов оказывается смещенной относительно оси, соединяющей центры планет на угол около  $2^\circ$ . Ближайший горб притягивается Луной сильнее ( $F > F'$ ), что аналогично возникновению пары с моментом сопротивления вращению  $M_c$ .

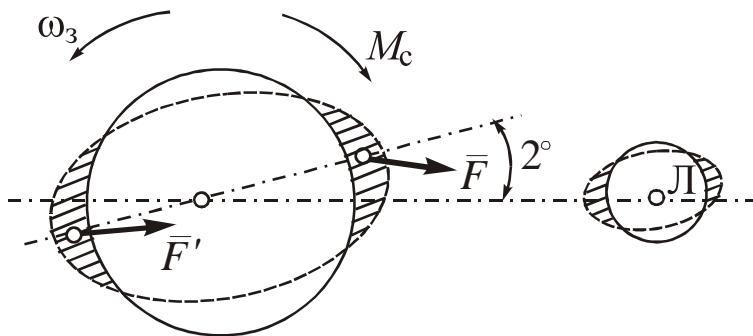


Рис. 15.2

Величина  $M_c$  мала по отношению к моменту инерции Земли, поэтому изменение  $\omega_3$  очень медленное, но оно происходит постоянно. Аналогично Земля тормозит Луну, только с гораздо большим эффектом, что, в частности, привело к тому, что период ее собственного вращения уменьшаясь, стал равен периоду обо-

рота вокруг Земли (27,3 сут.), т.е. Луна обращена к Земле всегда одной стороной. При этом уменьшение кинетической энергии Земли дает приращение кинетической энергии Луны, что выражается в увеличении скорости ее центра масс и удалении от Земли на расстояние около 3 см в год.

Изменение формы Земли является одной из основных причин накопления напряжений в Земной коре на стыках слагающих ее плит. Эти напряжения (их называют тектоническими) могут ориентироваться в любом направлении, а по величине значительно превышать гравитационные силы. При достижении предельных значений происходит разрушение пород, смещение плит и блоков, приводящее к катастрофическим явлениям в форме землетрясений и извержений.

В шахтных условиях высокие концентрации напряжений приводят к разрушению выработок, а также микроземлетрясениям – горным ударам. Например, на апатитовых рудниках Кольского полуострова высокий уровень тектонических напряжений приводит к интенсивному разрушению рудоспусков. Вертикальная выработка, пройденная первоначально диаметром 2–4 м, после разрушения приобретает вид щели шириной 50–80 м, перпендикулярной направлению тектонических напряжений, причем происходит это на глубине всего нескольких десятков метров. Горный удар представляет собой внезапное лавинообразное разрушение участка массива горных пород, находящегося в предельном напряженном состоянии. В Кузбассе горные удары и землетрясения небольшой силы наблюдаются на рудниках Горной Шории. Они чаще всего инициируются массовыми взрывами в рудных блоках, однако главной их причиной является высокий уровень тектонических напряжений.

Тектонические процессы являются наиболее вероятной причиной дрейфа материков со скоростями порядка сантиметров в год. Повторение береговых линий свидетельствует о том, что миллионы лет назад Африка и Южная Америка, Австралия и Антарктида были частями более крупных материков.

Затухание тектонических процессов возможно только при уменьшении угловой скорости  $\omega_3$  до тех пор, пока Земля не будет

стабильно обращена к Луне одной своей стороной, однако это может произойти через десятки миллиардов лет.

### 15.3. Влияние вращения Земли на движение тел относительно ее поверхности

Из уравнения (15.1) следует, что при движении относительно поверхности Земли неинерциальность системы отсчета может быть учтена введением сил инерции  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$  и  $\bar{F}_{\text{k}}^{\text{и}}$ . Физический смысл уравнения (15.1) состоит в том, что материальная точка будет двигаться таким образом, как если бы к ней дополнительно к идеальным силам были приложены активные силы  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{i}}$  и  $\bar{F}_{\text{k}}^{\text{i}}$ .

Сила  $\bar{F}_{\text{пер}}^{\text{i}}$  зависит только от расстояния точки до оси вращения Земли, она рассмотрена в п. 15.2. Рассмотрим силу инерции  $\bar{F}_{\text{k}}^{\text{i}}$ :

$$\bar{F}_{\text{k}}^{\text{i}} = 2m(\bar{\omega}_3 \times \bar{V}_{\text{от}}), \quad (15.7)$$

где  $\bar{\omega}_3$  – вектор угловой скорости Земли направленный по оси вращения.

Оценим относительную величину  $\bar{F}_{\text{k}}^{\text{i}}$ :

$$\frac{(F_{\text{k}}^{\text{i}})_{\text{max}}}{P} = \frac{2\omega_3 V_{\text{от}}}{g} = 1,46 \cdot 10^{-5} V_{\text{от}}. \quad (15.8)$$

Из (15.10) следует, что влияние рассматриваемой силы инерции на движение тела будет существенным в следующих случаях:

а) при  $V_{\text{от}} > 10^3$  м/с – на любых, в том числе кратковременных, интервалах движения (полет ракеты, снаряда, пули и т.д.);

б) при  $V_{\text{от}} < 10^2$  м/с – только при длительных интервалах движения (воздушные, водные потоки, многократное движение транспорта по рельсам, шоссе и т.п.).

Рассмотрим направление  $\bar{F}_{\text{k}}^{\text{i}}$ . Разложим вектор  $\bar{V}_{\text{от}}$  на три характерные составляющие:

$$\bar{V}_{\text{от}} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3,$$

где  $\bar{V}_1$  – вертикальная;  $\bar{V}_2$  – горизонтальная, параллельная меридиану;  $\bar{V}_3$  – горизонтальная, параллельная экватору.

Составляющие  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{V}_2$  и  $\bar{V}_3$  обуславливают возникновение составляющих кориолисовой силы инерции:  $\bar{F}_k^i = \bar{F}_{k1}^i + \bar{F}_{k2}^i + \bar{F}_{k3}^i$  (рис. 15.3).

Из схем расположения векторов, построенных в соответствии с (15.7), можно сделать следующие выводы:

- при падении тела на земную поверхность сила  $\bar{F}_{k1}^i$  отклоняет его к востоку,  $\bar{F}_{k1}^i = 2m\omega_3 V_1 \cos\varphi$  (рис. 15.3, а);
- при движении тела по меридиану сила  $\bar{F}_{k2}^i$  отклоняет его вправо от направления движения в северном полушарии и влево – в южном (рис. 15.3, б):

$$\bar{F}_{k2}^i = 2m\omega_3 V_2 \sin\varphi,$$

на экваторе  $\bar{F}_{k2}^i = 0$ , на полюсах она имеет максимальные значения;

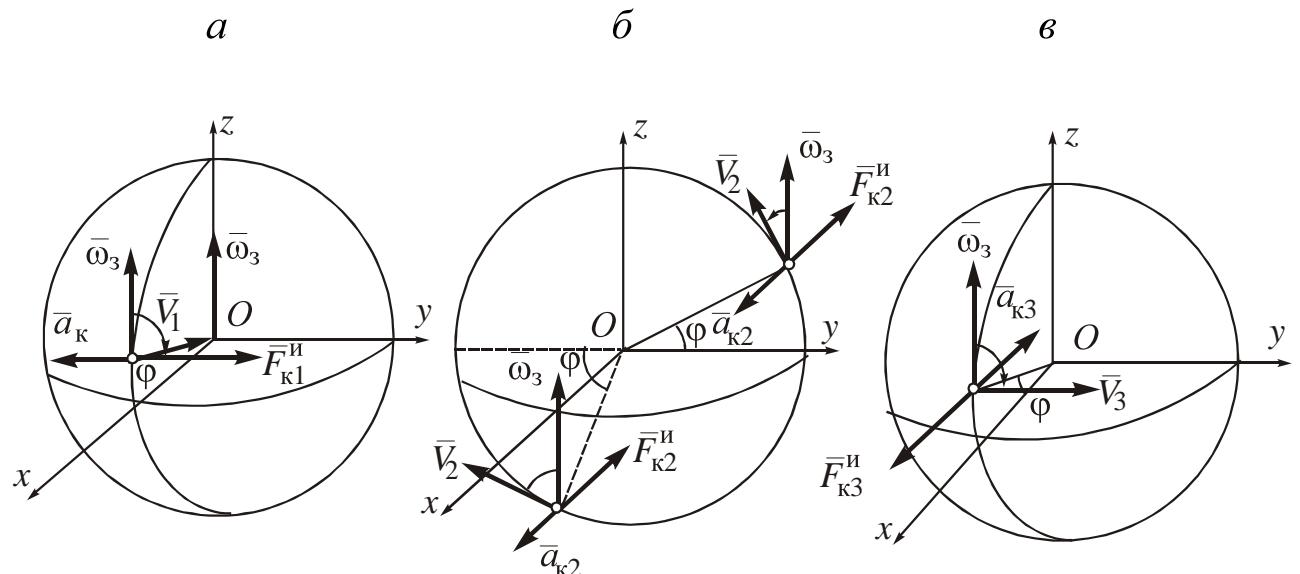


Рис. 15.3

- при движении тела по параллели сила  $\bar{F}_{k3}^i$  направлена к оси Земли, при движении в направлении "восток-запад" она уве-

личивает гравитационную силу  $\bar{F}$ , а в направлении, "запад-восток" – уменьшает ее на величину (рис. 15.3, *в*):

$$\bar{F}_{\text{k}3}^{\text{и}} = 2m\omega_3 V_3 \cos\varphi.$$

При движении параллельно земной поверхности ( $V_1 = 0$ ) действием составляющей  $\bar{F}_{\text{k}3}^{\text{и}}$  чаще всего можно пренебречь, т.к.  $\bar{F}_{\text{k}3}^{\text{и}} \ll F$ , поэтому определяющим является действие составляющей  $\bar{F}_{\text{k}2}^{\text{и}}$ . При  $\varphi > 30^\circ$  горизонтальная составляющая  $\bar{F}_{\text{k}3}^{\text{и}}$ , направленная при движении с востока на запад к полюсу, а при обратном движении – к экватору, равная  $2m\omega_3 V_3 \sin\varphi$  будет соизмеримой с величиной  $\bar{F}_{\text{k}2}^{\text{и}}$ .

#### **15.4. Проявление кориолисовой силы инерции в геомеханических процессах**

Проявление кориолисовой силы инерции  $\bar{F}_{\text{k}2}^{\text{и}}$  весьма разнообразно: формирование локальных, региональных и глобальных географических, климатических явлений, учет и использование ее действия в весьма сложных технических устройствах. Рассмотрим наиболее характерные из них.

На частицы водных и воздушных потоков, транспортные средства сила  $\bar{F}_{\text{k}2}^{\text{и}}$  действует в соответствии с рис. 15.3, *б*, отклоняет их от траектории право в северном полушарии и влево – в южном. Таким образом, водный поток реки в северном полушарии будет сильнее прижиматься к праву берегу и подмывать его (рис. 15.4, *а*). По этой же причине при прочих равных условиях река будет огибать препятствие с правой стороны. Железнодорожный состав на прямолинейном участке будет прижиматься к правому рельсу, и он будет изнашиваться интенсивнее.

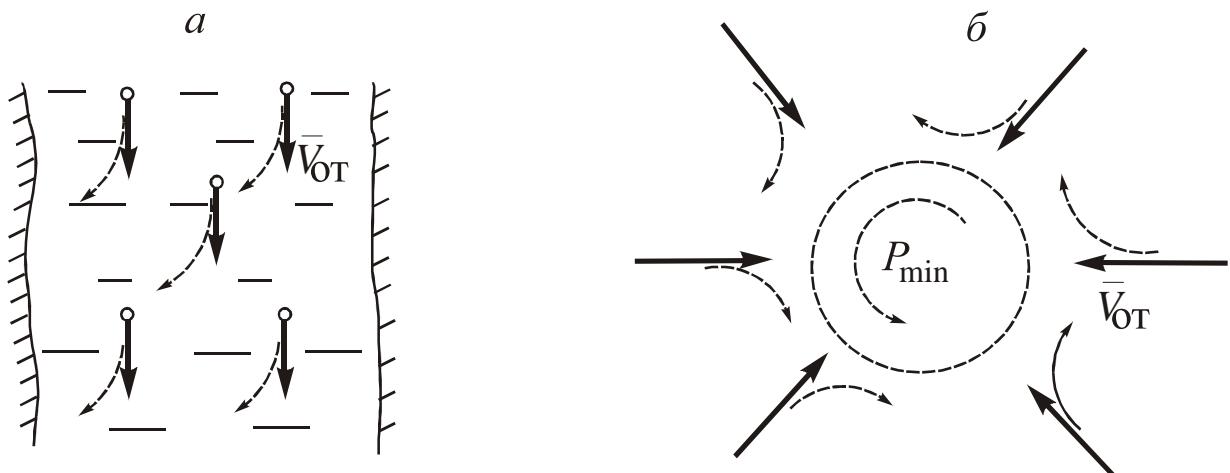


Рис. 15.4

Описанные процессы весьма слабо выражены, но они продолжаются длительное время, поэтому их результат становится заметным. При образовании зоны пониженного давления воздушные потоки, устремляясь к ней с соседних областей, отклоняются от прямолинейного движения, причем, проходя сотни километров за десятки часов, они отклоняются на десятки градусов, образуя кольцевые завихрения облаков, носящие названия циклонов (рис 15.4, *б*).

При движении объекта с большой скоростью отклонения от прямолинейного поступательного движения за счет кориолисовой силы становятся существенными и на малых расстояниях, временных интервалах. Это обстоятельство учитывается при конструировании стрелкового оружия. При артиллерийской стрельбе существуют специальные таблицы поправок при наведении орудия в зависимости от широты местности. Например, при сверх дальней стрельбе из суперпушки по Парижу во время второй мировой войны при дальности около 100 км данная поправка составляла порядка 1 км.

Кориолисова сила инерции является основной причиной возникновения гирокопического момента, проворачивающего ось быстрорращающегося волчка. Этот эффект положен в основу принципа действия весьма сложных устройств (п. 14.3): гирокомпасов различного типа, "гировертикали", "гирогоризонта" и т.п. По этой же причине поворачивается плоскость колебаний маят-

ника Фуко. При наблюдении за космическими спутниками с Земли их траектории имеют вид синусоиды, хотя в абсолютном движении (относительно звезд) они совершенно плоские. Действительно, находясь на северном полушарии, путник движется так, как если бы на него действовала активная сила, отклоняющая его вправо, а после перехода через экватор – в противоположную сторону.

В заключение поясним, каким образом незначительная по величине кориолисова сила инерции формирует атмосферные процессы, определяющие климатические пояса и зоны нашей планеты.

Всем известно, что Земля в районе экватора прогревается Солнцем наиболее интенсивно, поэтому над экваториальными морями и океанами воздух горячий и влажный (более легкий), а над полюсами – холодный (более тяжелый). На первый взгляд тепловая машина Земли должна была бы работать следующим образом; холодный воздух с полюсов перемещался бы к экватору по поверхности, а теплый, вытесняясь холодным, двигался бы к полюсам в верхних слоях атмосферы на высоте 10–20 км (тропосфере). Иными словами, в северном полушарии постоянно бы дули северные ветры, а в южном – южные. Действительная картина совершенно иная, и решающую роль в этом играет сила  $\bar{F}_{k2}^u$ .

Легкий влажный и теплый экваториальный воздух поднимается в тропосферу причем, благодаря разряжению, его плотность резко снижается, а скорость возрастает до 100 м/с и более. Эта масса устремляется к полюсу, но за счет действия кориолисовой силы инерции она отклоняется вправо в северном полушарии и плево – в южном. На широте 30° в обоих полушариях отклонение достигает 90°, а воздушный поток начинает двигаться с запада на восток, он носит название "циркумполярного" ветра. Воздух к этому времени теряет над тропиками большую часть влаги в виде дождей, становится более тяжелым и опускается. После обратного сжатия температура его практически восстанавливается, т.к., ввиду большой скорости, процесс занимает менее суток. Таким образом, атмосферный воздух в районах 30-х параллелей сухой и теплый, поэтому здесь находится зона пустынь: Сахара и Калаха-

ри в Африке, Аравийская и Тар в Азии, Атакама в Америке, пустыни Австралии. Опустившийся сухой воздух опять направляется к экватору, но при движении отклоняется, образуя ветры постоянного направления – пассаты. Описанный замкнутый контур циркуляции тропического воздуха носит название ячейки Хэдли (рис. 15.5).

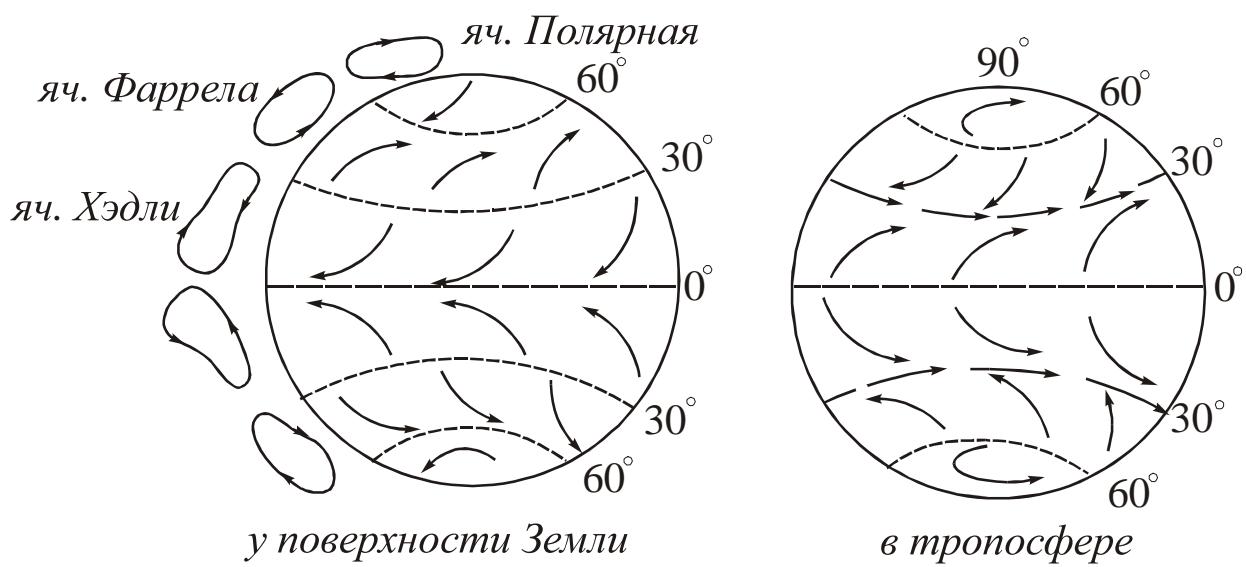


Рис. 15.5

Зона экватора – зона пониженного давления, а граница тропиков – повышенного. Аналогичные экватору зоны конвекции влажного воздуха образуются в районах  $60^{\circ}$  широты в обоих полушариях вследствие расположения теплых морских течений. Описанные выше атмосферные процессы повторяются, но с меньшей интенсивностью образуя между  $30^{\circ}$  и  $60^{\circ}$  параллелями ячейку Фаррела, а выше полярного круга – полярную ячейку (см. рис. 15.5). В средних широтах России ( $40^{\circ}$ – $50^{\circ}$ ) преобладают западные и юго-западные ветры, выше полярного круга – восточные.

С похожих позиций можно объяснить и формирование главных течений мирового океана. У полюсов вода холодная и пресная, у экватора – теплая и соленая. Соленая вода тяжелее пресной, а холодная – тяжелее теплой. Холодная вода с полюсов, постепенно насыщаясь солью, опускается в нижние слои океана и достигает тропиков на глубине 1000 м. Теплые тропические воды

перемещаются в верхних слоях к полярным кругам и образуют известные теплые течения (Гольфстрим, Куросио). На движение поверхностных слоев определяющее влияние оказывают воздушные потоки. Более глубокие слои, увлекаясь верхними слоями, дополнительно отклоняются кориолисовой силой. Ввиду вязкости воды в среднем поверхностный слой океанского течения отклонен от направления ветра на  $45^\circ$  в направлении действия  $\bar{F}_{k2}^i$ , а на глубине около 100 м направление водного потока оказывается обратным поверхностным.

При внимательном изучении карты морских течений и ее сопоставлении со схемой воздушных потоков можно убедиться, что направления теплых течений в среднем отклонены от направления ветров на указанный угол в указанном направлении, при встрече с преградой (материком), течение отклоняется вправо в северном полушарии и влево – в южном. Холодные противотечения ориентированы по линии экватора, поскольку из глубины поднимаются, потеряв энергию, холодные полярные воды.

### **15.5. Вопросы для самопроверки**

1. Выведите и сформулируйте основной закон динамики при относительном движении материальной точки. Поясните физическую сущность переносной и кориолисовой сил инерции.

2. Запишите уравнения относительного движения материальной точки для случаев переносного непоступательного, поступательного непрямолинейного, поступательного прямолинейного равномерного движений, относительного равновесия.

3. Поясните чертежом и расчетом, почему вектор силы тяжести изменяет свое направление и величину в зависимости от широты точки наблюдения.

4. Вычислите угол отклонения силы тяжести от истинной вертикали и относительную величину переносной силы инерции на широте г. Кемерово ( $\phi = 55^\circ$ ).

5. Объясните причину сплюснутости с полюсов Земли и других планет, как она связана количественно с угловой скоростью?

6. Объясните причину замедления вращения Земли.
7. Каковы причины тектонических процессов в земной коре, опишите формы их проявлений.
8. Поясните расчетом, в каких диапазонах скоростей тел и временных интервалах действие кориолисовой силы инерции будет заметным.
9. Составьте чертеж, поясняющий направление кориолисовой силы инерции при падении тела на поверхность Земли. Будет ли эта сила, ее горизонтальная и вертикальная составляющие зависеть от широты?
10. Отвес подвешен в летательном аппарате. Отклонится ли отвес от истинной вертикали, и в какую сторону будет направлено отклонение при зависании и вертикальном падении, если аппарат находится над экватором? Ответ обоснуйте.
11. Задача по п. 10, если аппарат находится над полюсом.
12. Задача по п. 10, если аппарат находится над г. Кемерово ( $\phi = 55^\circ$ ).
13. Задача по п. 10, если аппарат находится над Австралией ( $\phi = 30^\circ$ ).
14. Составьте чертеж, поясняющий направление кориолисовой силы инерции при движении материальной точки по меридиану. Как ориентирована эта сила в Северном и Южном полушариях, зависит ли ее величина от широты?
15. Приведите примеры проявления кориолисовой силы инерции. Ответ обоснуйте.
16. Составьте чертеж, поясняющий направление кориолисовой силы инерции при движении материальной точки по параллели. Как зависят ее направление и величина от широты?
17. На какие составляющие можно разложить кориолисову силу инерции, какими из них можно пренебречь и почему?
18. Определите величину и направление отклонения снаряда от цели за счет кориолисовой силы инерции при скорости полета 1000 м/с на расстоянии 10 км, если стрельба ведется горизонтально на широте г. Грозный ( $\phi = 45^\circ$ ) в направлении меридиана.
19. Зависит ли поправка на действие кориолисовой силы инерции при горизонтальной артиллерийской стрельбе от широты и направления наводки. Ответ обоснуйте.

20. Рассмотрите составляющие кориолисовой силы инерции при движении груза маятника Фуко. Каково их действие? Будет ли поворот плоскости колебаний равномерным?

21. Зенитная пушка нацелена вертикально вверх. Будет ли происходить отклонение снаряда от расчетной траектории за счет кориолисовой силы инерции, каково направление отклонения, будет ли зависеть его величина от широты?

22. Искусственный спутник Земли летит по плоской орбите с запада на восток. Изобразите плоскую карту земной поверхности и траекторию спутника при наблюдении с Земли. В каком идеальном случае траектория спутника и в относительном движении будет плоской?

23. Объясните действием кориолисовой силы инерции образование циркумполярного ветра в тропосфере в районе 30-й параллели в обоих полушариях. Почему под этой зоной находится пояс пустынь?

24. Объясните действием кориолисовой силы инерции, почему в Кузбассе преобладает юго-западные ветры.

25. Объясните действием кориолисовой силы инерции связь направлений морских течений и преобладающих ветров.

## Список рекомендуемой литературы

1. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика: Учеб. пособие / В. А. Хямяляйнен, В. В. Иванов, С. М. Простов : Кузбасс. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1998. – 252 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – 15-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 416 с.
3. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
4. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Ч. I. Статика. Кинематика. – СПб : Лань, 1998. – 343 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Ч. II. Динамика. – СПб : Лань, 2001. – 423 с.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.