

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составители
В. А. Хямяляйнен
М. А. Баёв

**МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
НА ПРИМЕРАХ ПРОЦЕССОВ
ГОРНО-СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

**Методические указания к самостоятельной работе
по дисциплине «Теоретическая механика»**

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового
производства в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2021

Рецензенты:

Богатырева А. С., доцент кафедры теоретической и геотехнической механики

Хямяляйнен Вениамин Анатольевич

Баёв Михаил Алексеевич

Малые колебания механической системы на примерах процессов горно-строительного производства : методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «**Теоретическая механика**» для обучающихся технических специальностей и направлений бакалавриата / сост. В. А. Хямяляйнен, М. А. Баёв ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2021. – Текст : электронный.

В предлагаемых указаниях представлены теоретические положения темы «Малые колебания механической системы», приведены примеры выполнения задания и задачи для самостоятельного решения.

© Кузбасский государственный
технический университет имени
Т. Ф. Горбачева, 2021

© Хямяляйнен В. А., Баёв М. А.,
составление, 2021

ВВЕДЕНИЕ

В «Методических указаниях» приведены основные положения раздела теоретической механики «Аналитическая механика», касающиеся линейных колебаний механических систем. На примерах динамики обобщенных механических систем и работы виброплощадок для формирования бетонной смеси (при изготовлении железобетонных изделий, например тубинговой крепи) исследованы малые колебания механической системы под действием силового и кинематического воздействия.

Для выполнения индивидуальных заданий необходимо уметь составлять уравнения Лагранжа II рода и решать дифференциальные уравнения.

Цель издания «Методических указаний» – выработать у студентов элементы навыков моделирования процессов горно-строительного производства. Вибрационные машины и процессы получили широкое применение в технологии строительства (подземных и наземных сооружений) и производства строительных материалов. Вибрационные процессы формирования железобетонных изделий и изделий из неармированного бетона используются повсеместно. Вибрационные грохоты эксплуатируются на многих шахтах, карьерах и других предприятий горного профиля. Значительное распространение получили вибрационные машины для уплотнения грунта, дорожных оснований и покрытий. Уплотнение и измельчение, смешение и сепарация, забивка свай и бурение скважин, разгрузка смерзшихся материалов из транспортных средств и разработка мерзлых грунтов, погрузка насыпных материалов и отмывка песка и гравия – это далеко не полный перечень технологических процессов, в которых использование вибрации приносит большую пользу. В настоящей работе не ставится цель моделирования всех вышеперечисленных колебательных процессов, каждый из которых, безусловно, обладает своими индивидуальными особенностями. Рассматриваются только общие подходы к моделированию и один из вариантов простейшей схемы виброформования железобетонных изделий. При этом не рассматриваются такие важные физические процессы, являющиеся следствием вибрации, как уменьшение видимого трения, псевдооживление, повышение текучести бетонной смеси и ее твердых компонентов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Рассматриваем колебательные движения механической системы около положения устойчивого равновесия, для описания которых удобно использовать дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах (уравнение Лагранжа II рода). Начало отсчета обобщенных координат принимаем в положении устойчивого равновесия. В большинстве случаев эти уравнения нелинейны и их интегрирование сопряжено с большими трудностями. При малых колебаниях системы, когда приращения обобщенных координат и скоростей незначительны, полученные уравнения можно линеаризовать.

В общем виде уравнения Лагранжа II рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия механической системы;

q_j – j -тая обобщенная координата;

\dot{q}_j – j -тая обобщенная скорость;

Q_j – j -тая обобщенная сила;

s – число степеней свободы механической системы.

Кинетическую энергию при малых отклонениях системы от положения равновесия можно представить в виде однородной квадратичной функции обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + a_{ss} \dot{q}_s^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2a_{s-1,s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2)$$

где a_{ij} – обобщенные коэффициенты инерции.

По определению обобщенную силу Q_j , соответствующую обобщенной координате q_j , можно определить по формуле

$$Q_j = \sum_k \delta A_{kj} / \delta q_j, \quad (3)$$

где $\sum_k \delta A_{kj}$ – сумма элементарных работ действующих на систему сил на ее возможном перемещении, вызванном приращением обобщенной координаты q_j ;

δq_j – вариация j -той обобщенной координаты.

Обобщенную силу Q_j удобно представить в виде суммы трех обобщенных сил

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^B, \quad (4)$$

где Q_j^{Π} – обобщенная сила от потенциальных сил;

Q_j^{Φ} – обобщенная диссипативная сила, получаемая от действия сил линейно-вязкого сопротивления;

Q_j^B – обобщенная сила от внешних возмущающихся воздействий.

Обобщенная сила от потенциальных сил Q_j^{Π} выражается через потенциальную энергию

$$Q_j^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (5)$$

Потенциальная энергия системы при малых колебаниях с точностью до величины второго порядка малости включительно является однородной квадратичной функцией обобщенных координат

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + c_{ss}q_s^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \dots + \\ 2c_{s-1,s}q_{s-1}q_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \cdot \sum_{j=1}^s c_{ij}q_iq_j, \end{aligned} \quad (6)$$

где c_{ij} – обобщенные коэффициенты жесткости.

Пусть на точки механической системы действуют линейные силы сопротивления \bar{F}_i^c , пропорциональные скорости точек \bar{V}_i , то есть

$$\bar{F}_i^c = -\alpha_i \bar{V}_i = -\alpha_i \dot{r}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где α_i – постоянные коэффициенты сопротивления.

Тогда в соответствии с определением, обобщенную силу Q_j^{Φ} от сил сопротивления можно представить в виде

$$Q_j^{\Phi} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad (8)$$

где $\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \dot{r}_i^2}{2}$ – диссипативная функция Рэлея.

По аналогии с кинетической и потенциальной энергиями разложим функцию Рэлея в окрестности положения равновесия в ряд Маклорена и, отбрасывая слагаемые третьего и более высокого порядка малости, получим следующее выражение:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\alpha_{11} \dot{q}_1^2 + \alpha_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + \alpha_{ss} \dot{q}_s^2 + 2\alpha_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2\alpha_{s-1,s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \cdot \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (9)$$

где α_{ij} – приведенные коэффициенты сопротивления.

Диссипативная функция Рэлея может быть выражена через полную энергию системы $T + \Pi$ в виде

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -2\Phi. \quad (10)$$

Откуда следует, что Φ характеризует скорость убывания полной механической энергии вследствие действия линейных сил сопротивления.

Возмущающую силу Q_j^B считаем зависящей явно только от времени. Рассматриваем только гармонические возмущения, то есть когда Q_j^B изменяется во времени по синусоидальному закону.

В соответствии с вышеизложенным уравнения Лагранжа II рода (1) преобразуются к системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которые в матричной форме запишутся в виде

$$A\ddot{q} + L\dot{q} + Cq = D, \quad (11)$$

где $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}$ – вектор – столбец обобщенных координат;

$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$ – вектор – столбец обобщенных скоростей;

$$\ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_s \end{pmatrix} - \text{вектор – столбец обобщенных ускорений};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} - \text{матрица обобщенных коэффициентов инерции};$$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{ss} \end{pmatrix} - \text{матрица приведенных коэффициентов сопротивления};$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix} - \text{матрица обобщенных коэффициентов жесткости};$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_s \end{pmatrix} - \text{вектор – столбец возмущающих сил}.$$

Рассмотрим частный случай малых колебаний механической системы с одной степенью свободы под действием возмущающей силы $Q^B(t) = H \sin(pt + \delta)$, где H – амплитуда обобщенной силы; p – частота возмущающего воздействия; δ – начальная фаза. Тогда выражения для кинетической энергии (2), потенциальной энергии (6) и диссипативной функции Рэлея (9) запишутся в виде

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2, \quad (12)$$

где a – обобщенный коэффициент инерции;

c – обобщенный коэффициент жесткости;

α – приведенный коэффициент сопротивления.

Уравнения Лагранжа II рода (1) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q^B(t), \quad (13)$$

а следующие из них уравнения (11) вырождаются в одно дифференциальное уравнение

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + n^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (14)$$

где $b = \alpha/2a$; $n^2 = c/a$; $h = H/a$.

Решение уравнения (14) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $q_1(t)$ и частного решения исходного неоднородного уравнения $q_2(t)$

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t). \quad (15)$$

При достаточно большом сопротивлении среды ($b > n$) уравнение $q_1(t)$ описывает аperiодическое движение следующим образом

$$q_1(t) = Ae^{-bt} \sin(\sqrt{b^2 - n^2} \cdot t + \beta).$$

Рассмотрим случай малого сопротивления среды ($b < n$), тогда $q_1(t)$ будет описывать затухающие колебания. С течением времени $q_1(t)$ стремится к нулю и колебания определяются уравнением $q_2(t)$ под действием возмущающей силы. Общее решение (15) запишется в виде

$$q = Ae^{-bt} \sin(\sqrt{n^2 - b^2} \cdot t + \beta) + \frac{h}{\sqrt{(n^2 - p^2) + 4b^2p^2}} \sin(pt + \delta + \gamma), \quad (16)$$

где величина γ определяется выражениями:

$$\cos \gamma = \frac{n^2 - p^2}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}; \quad \sin \gamma = \frac{-2bp}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}. \quad (17)$$

Величины A и β определяются из начальных условий: при $t = 0$, $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.

При отсутствии сопротивления среды имеем $b = 0 \Rightarrow \gamma = 0$.

Тогда общее решение (16) примет вид

$$q = A \sin(nt + \beta) + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

где Ae^{-bt} – амплитуда затухающих колебаний;

$h/\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}$ – амплитуда вынужденных колебаний;

$T = 2\pi/\sqrt{n^2 - b^2}$ – период затухающих колебаний;

$-bT$ – логарифмический декремент затухания;

$\sqrt{n^2 - b^2}$ – угловая частота затухающих колебаний;

p – угловая частота вынужденных колебаний.

Пример 1. Динамическое возбуждение вынужденных колебаний обобщенной механической системы.

Условия задачи

Механизм (рис. 1), расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного колеса 1 массой $m_1=4$ кг и радиусом $r_1 = 0,15$ м, имеющего неподвижную ось вращения. К колесу шарнирно прикреплен невесомый стержень, связанный шарнирно с ползуном 4 массой $m_4=1$ кг. Стержень 2 массой $m_2=3$ кг и длиной $l_2 = 0,6$ м одним концом закреплен на неподвижном шарнире, а другим концом шарнирно соединен посредством невесомого стержня также с колесом 1. Стержень 2 также шарнирно посредством невесомого стержня соединен с колесом 3. Колесо 3 радиуса $r_3 = 0,20$ м, массой $m_3=2$ кг, распределенной по его ободу, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Ось колеса 3 соединена с невесомой пружиной, коэффициент жесткости которой равен $c = 1000$ Н/м, и демпфером, коэффициент сопротивления которого равен $\alpha_3 = 40$ Н·м/с. На колесо 1 действует пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$ ($M_0 = 4$ Н·м, $p = 15$ с⁻¹). В состоянии покоя системы стержень 2 занимает вертикальное положение. В начальный момент времени $t = 0$ колесу 1 в положении равновесия была сообщена начальная угловая скорость $\omega_{10} = \dot{\varphi}_{10} = 0,2$ с⁻¹.

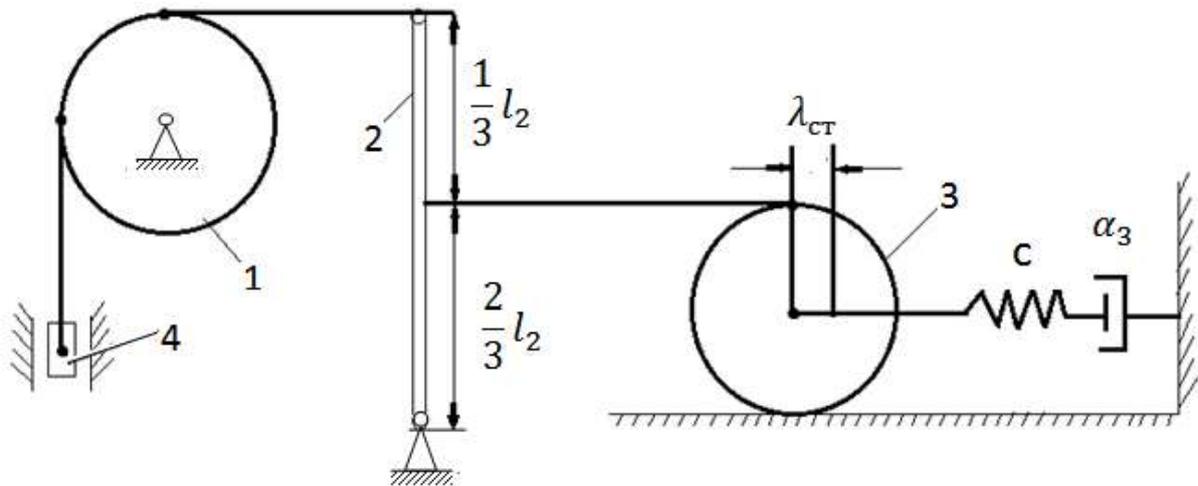


Рис. 1

Указания к решению

Число степеней свободы заданной механической системы равно единице. В качестве обобщенной координаты примем угол поворота φ_1 колеса 1, считая φ_1 положительным в направлении против хода часовой стрелки. Обобщенная скорость $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ – угловая скорость колеса 1.

В силу наложенных на систему связей

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{l_2}, \quad \varphi_3 = \varphi_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l_2}{2r_3} = \frac{1}{3} \varphi_1 \frac{r_1}{r_3},$$

$$S_3 = \varphi_3 r_3 = \frac{1}{3} \varphi_1 r_1, \quad S_4 = \varphi_1 r_1.$$

Уравнение Лагранжа II рода запишется в виде уравнения (13).

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$,

где

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{1z} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \left(\frac{r_1}{l_2} \right) \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{6} m_2 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \dot{S}_3^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \frac{1}{9} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \frac{1}{9} \left(\frac{r_1}{r_3} \right)^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{9} m_3 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \dot{S}_4^2 = \frac{1}{2} m_4 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2. T = \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{9} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

В соответствии с (12) $T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2$, где обобщенный коэффициент инерции $a = \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{3} m_2 + \frac{2}{9} m_3 + m_4 \right) r_1^2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Для определения обобщенной силы рассмотрим произвольное положение механической системы, определяемое углом поворота φ_1 (рис. 2)

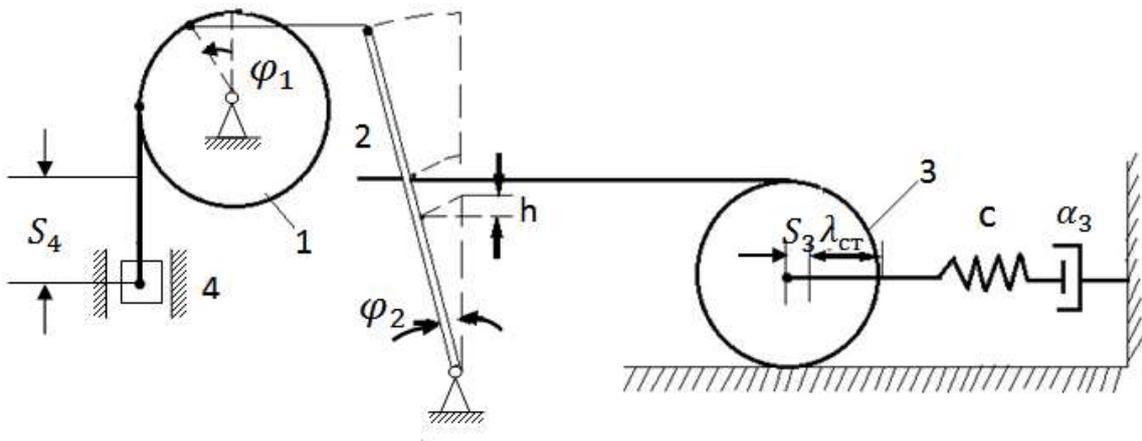


Рис. 2

Потенциальную энергию определили как работу потенциальных сил на перемещении системы из рассмотренного произвольного положения в положение равновесия, принимаемое за нуль потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_4 g S_4 - m_2 g h + \int_{\lambda_{\text{ст}}}^{S_3 + \lambda_{\text{ст}}} c S_3 dS_3 = \\ &= -m_4 g \varphi_1 r_1 - m_2 g h + \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{3} \varphi_1 r_1 + \lambda_{\text{ст}} \right)^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{\text{ст}}. \end{aligned}$$

Вертикальное смещение h центра тяжести стержня 2 вычисляем с точностью до величины второго порядка малости относительно обобщенной координаты φ_1

$$\begin{aligned} h &= \frac{l_2}{2} - \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 = \left(\frac{l_2}{2} \right) (1 - \cos \varphi_2); \\ \cos \varphi_2 &= 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Ограничиваясь в формуле разложения двумя первыми членами и учитывая, что $\varphi_2 = (r_1/l_2)\varphi_1$, получим

$$h = \left(\frac{l_2}{2}\right) \frac{\varphi_2^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{l_2} \varphi_1^2.$$

Статистическое удлинение $\lambda_{\text{ст}}$ пружины определим из условия равновесия системы в положении покоя (вертикальное положение стержня 2)

$$\begin{aligned} \sum_k \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k &= 0, \\ \text{или } m_4 g \delta S_4 - c \lambda_{\text{ст}} \delta S_3 &= 0, \\ \text{или } m_4 g r_1 \delta \varphi_1 - c \lambda_{\text{ст}} \frac{1}{r} r_1 \delta \varphi_1 &= 0, \\ \text{откуда } \lambda_{\text{ст}} &= \frac{3m_4 g}{c}. \end{aligned}$$

Тогда для потенциальной энергии окончательно получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_4 g r_1 \varphi_1 - \frac{1}{4} m_2 g \frac{r_1^2}{l_2} \varphi_1^2 + \frac{1}{18} c r_1^2 \varphi_1^2 + m_4 g r_1 \varphi_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} c r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g \frac{r_1^2}{l_2} \right) \varphi_1^2. \end{aligned}$$

В соответствии с (12) $\Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2$, где обобщенный коэффициент жесткости $c = \frac{1}{9} c r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g \frac{r_1^2}{l_2} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Отсюда обобщенная сила, соответствующая потенциальным силам, запишется в виде

$$Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c \varphi_1 = -2 \varphi_1.$$

Диссипативная функция Рэлея

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \alpha_3 \dot{S}_3^2 = \frac{1}{2} \alpha_3 \left(\frac{1}{3} r_1 \right)^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Откуда приведенный коэффициент сопротивления

$$\alpha = \frac{1}{9} r_1^2 \alpha_3 = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Тогда обобщенная диссипативная сила запишется в виде

$$Q^\Phi = \frac{-\partial\Phi}{\partial\dot{q}} = -\alpha\dot{\varphi}_1 = -0,1\dot{\varphi}_1.$$

Обобщенную возмущающую силу определим по формуле (3)

$$Q^B(t) = \frac{\delta A[M(t)]}{\delta q} = M_0 r_1 \sin pt = H \sin pt,$$

где $H = M_0 r_1 = 0,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Подставляя полученные величины в (13), запишем уравнение Лагранжа II рода в виде

$$0,1\ddot{\varphi}_1 + 0,1\dot{\varphi}_1 + 2\varphi_1 = 0,6 \sin 15t$$

или в канонической форме (14)

$$\ddot{\varphi}_1 + 2b\dot{\varphi}_1 + n^2\varphi_1 = h \sin 15t,$$

где $b = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $n = \sqrt{20} = 4,5 \text{ с}^{-1}$; $h = 6 \text{ с}^{-1}$.

Имеем случай малого сопротивления ($b < n$), поэтому общее решение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид (16)

$$\varphi_1 = Ae^{-0,5t} \sin(\sqrt{20 - 0,25}t + \beta) + \frac{6}{\sqrt{(20 - 225)^2 + 4 \cdot 0,5^2 \cdot 15^2}} \sin(15t + \gamma).$$

Сдвиг фазы вынужденного колебания γ определим используя формулы (17) из выражения

$$tg\gamma = -\frac{2bp}{n^2 - p^2} = -\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 15}{20 - 15^2} = \frac{15}{205} = 0,07;$$

$$\gamma = \text{arctg}0,07 \simeq 0,07 \text{ рад}.$$

Тогда $\varphi_1 = Ae^{-0,5t} \sin(4,6t + \beta) + 0,03 \sin(15t + 0,07)$.

Обобщенная скорость

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = -0,5Ae^{-0,5t} \sin(4,6t + \beta) + 4,6Ae^{-0,5t} \cos(4,6t + \beta) + 0,45 \cos(15t + 0,07).$$

Постоянные интегрирования A и β определяем из начальных условий: при $t = 0$, $\varphi_1(0) = \varphi_{10} = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10} = \omega_{10} = 0,2 \text{ с}^{-1}$.

$$\begin{cases} 0 = A \sin \beta + 0,03 \sin 0,07; \\ 0,2 = -0,5A \sin \beta + 4,6A \cos \beta + 0,45 \cos 0,07. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \sin \beta = -0,03 \cdot 0,07; \\ 0,2 = 0,5 \cdot 0,03 \cdot 0,07 + 4,6A \cos \beta + 0,45. \end{cases}$$

$$A = \sqrt{0,021^2 + 0,056^2} = 0,06; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{0,021}{0,056} = 0,375; \\ \beta = 0,36 \text{ рад.}$$

Окончательно уравнение колебания имеет вид

$$\varphi_1 = 0,06e^{-0,5t} \sin(4,6t + 0,36) + 0,03 \sin(15t + 0,07).$$

Амплитуда, период и частота затухающих и вынужденных колебаний, а также логарифмический декремент затухания определяются по формулам раздела «Теоретические предпосылки».

Пример 2. Колебания вибростола под действием силового возбуждения.

Условие задачи

Вибростол с формирующимся изделием (схема 2 второго задания) общей массой $m = 1000 \text{ кг}$ приводится в движение центробежным возбуждением посредством равномерно вращающихся дебалансов, расположенных под вибростолом. Дебалансы приводятся во вращение электродвигателем. Масса дебалансов $m_0 = 5 \text{ кг}$, эксцентриситет их массы относительно оси вращения $r = 0,05 \text{ м}$. Возмущающая сила F , возникающая от вращения дебалансов, пропорциональна массе дебалансов m_0 , их эксцентриситету r и квадрату частоты вынужденных колебаний

$F = m_0 r p^2 \sin pt$ ($p = 10 \text{ с}^{-1}$). Коэффициент сопротивления демпфера, гасящего собственные колебания вибростола, равен $\alpha = 100 \text{ Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}}$. Вибростол установлен на четырех параллельных пружинах, коэффициент жесткости каждой из которых равен $c^* = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Массой пружин можно пренебречь. В начальный момент времени $t = 0$ вибростол с формирующимся изделием находился в покое, то есть $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Указания к решению

Уравнение Лагранжа II рода запишется в виде уравнения (13), где в качестве обобщенной координаты возьмем линейное перемещение x .

Кинетическая энергия стола с изделием

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \dot{x}^2.$$

Потенциальную энергию определим как работу силы тяжести вибростола с изделием и силы упругости пружин при перемещении системы из произвольного положения в положение равновесия

$$\Pi = -mgx + \frac{1}{2} c(x + \lambda_{\text{ст}})^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{\text{ст}}^2.$$

В положении покоя, соответствующем статической деформации пружин, $(\partial\Pi/\partial x) = 0$ и $\dot{x} = 0$. Отсюда находим величину статического удлинения пружин $\lambda_{\text{ст}}$

$$\begin{aligned} -mg + c\lambda_{\text{ст}} &= 0, \\ \lambda_{\text{ст}} &= \frac{mg}{c} \simeq 0,025 \text{ м}. \end{aligned}$$

Тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2.$$

Отсюда обобщенная сила, соответствующая потенциальным силам, примет вид

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx = 4c^*x.$$

Обобщенная диссипативная сила

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = -\alpha \dot{x} = -100\dot{x}.$$

Тогда уравнение Лагранжа II рода примет вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2x = h \sin pt,$$

$$\text{где } b = \frac{\alpha}{2m} = \frac{100}{2 \cdot 1000} = 0,05 \text{ с}^{-1};$$

$$n = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5}{1000}} = 20 \text{ с}^{-1};$$

$$h = \frac{m_0 r p^2}{m} = \frac{5 \cdot 0,05 \cdot 10^2}{1000} = 0,025 \text{ м/с}^2.$$

Так как $b < n$, то общее решение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид (16), где постоянные интегрирования A и β определяется из заданных начальных условий.

Амплитуда, период, частота затухающих и вынужденных колебаний определяются по соответствующим формулам, приведенным в конце раздела «Теоретические предпосылки».

Пример 3. Колебания вибростола под действием кинематического возбуждения.

Условие задачи

Вибростол с формирующимся изделием (схема 3 третьего задания) общей массой $m = 1000$ кг приводится в движение с помощью поводка, которому сообщаются извне колебания по закону $z = z_a \sin pt$ ($z_a = 0,05$ м; $p = 10 \text{ с}^{-1}$), где z – координата поводка, отсчитываемая от его среднего положения. Поводок движется в направляющих и соединен пружиной и демпфером с телом, которое также движется в направляющих. С другой стороны тело соединено пружиной и демпфером с неподвижной стойкой. Коэффициенты сопротивления демпферов равны

$\alpha_1 = 50 \text{ Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}}, \alpha_2 = 100 \text{ Н} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}}$. Коэффициенты жесткости пружин равны $c_1 = 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, c_2 = 10^5 \text{ Н/м}$.

Указания к решению

Уравнение Лагранжа II рода для описания колебательных движений относительно неподвижной стойки примет следующий вид

$$m\ddot{x} + \alpha_1\dot{x} + \alpha_2(\dot{x} - \dot{z}) + c_1x + c_2(x - z) = 0,$$

где x – координата вибростола, отсчитываемая от его среднего положения.

С учетом данного закона движения поводка записанное уравнение можно привести к дифференциальному уравнению типа (14)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2x = h \sin(pt + \delta),$$

$$\text{где } b = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2m} = \frac{50 + 100}{2 \cdot 1000} = 0,15 \text{ с}^{-1};$$

$$n = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{10^3 + 10^5}{10^3}} = \sqrt{101} \approx 10 \text{ с}^{-1};$$

$$h = \frac{z_a}{m} \sqrt{c_2^2 + \alpha_2^2 p^2} = \frac{0,05}{1000} \sqrt{10^{10} + 10^4 \cdot 10^2} \approx 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\text{tg} \delta = \frac{\alpha_2 p}{c_2} = \frac{100 \cdot 10}{10^5} = 10^{-2}, \delta \approx 0.$$

Для описания колебательных движений вибростола относительно поводка введем координату $y = x - z$. Тогда дифференциальное уравнение Лагранжа II рода приведет к виду

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + n^2y = L \sin(pt + \varphi),$$

$$\text{где } L = \frac{z_a}{m} \sqrt{(mp^2 - c_1)^2 + \alpha_1^2 p^2}; \text{tg} \varphi = \frac{\alpha_1 p}{c_1 - mp^2}.$$

Введем безразмерные переменные $\tau = nt$, $\xi = x/z_a \cdot \eta = y/z_a$ и безразмерные параметры

$$\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2mn}; \quad \chi = \frac{P}{n} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}; \quad V = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Тогда полученные дифференциальные уравнения для определения колебательных движений относительно неподвижной стойки и подвижного поводка можно записать в безразмерных величинах следующим образом

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \xi = a_1 \sin(\chi\tau + \delta);$$

$$\ddot{\eta} + 2\beta\dot{\eta} + \eta = a_2 \sin(\chi\tau + \varphi),$$

где $a_1 = \sqrt{U^2 + 4V^2\beta^2\chi^2}$; $\delta = \arctg \frac{2V\beta\chi}{U}$;

$$a_2 = \sqrt{(1 - U - \chi^2)^2 + 4(1 - V)^2\beta^2\chi^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{2(1-V)\beta\chi}{1-U-\chi^2}.$$

Полученные уравнения аналогичны уравнению (14).

Таким образом, при кинетическом возбуждении механической системы ее поведение зависит от четырех безразмерных параметров β , χ , U , V . При силовом возбуждении (см. пример 2) – только от двух параметров β и χ . Этим определяется гораздо большее разнообразие частотных характеристик системы при кинематическом возбуждении, чем при силовом.

2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Для механизма (рис. 1.1 – 1.10), расположенного в вертикальной плоскости, определить уравнение колебаний, амплитуду, период и частоту затухающих (если они будут иметь место) и вынужденных колебаний. За обобщенную координату принять угол поворота колеса 1. Колеса 1, 2 – однородные тела, масса колеса 3 распределена по его ободу. Стержень 3 – однородное тело.

m_1 , m_2 , m_3 , m_4 – массы тел; α_1 – коэффициент сопротивления демпфера; c_1 , c_2 – коэффициенты жесткости пружин. На колесо 1 действует пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$. В состоя-

нии покоя стержень 3 (если он присутствует в механизме) занимает либо горизонтальное, либо вертикальное положение. В начальный момент времени ($t = 0$) колесу 1 в положении равновесия была сообщена начальная угловая скорость ω_{10} . Численные значения вышеуказанных величин, а также геометрических характеристик тел механической системы, приведены в таблице 1.

Задание 2. Определить уравнение колебаний, амплитуду, период и частоту затухающих и вынужденных колебаний вибростола при формовании железобетонного изделия с помощью равномерно вращающихся дебалансов (схема 2 второго задания). Масса вибростола с изделием равна m . Возмущающая сила $F = m_0 r p^2 \sin pt$, где m_0 – масса дебалансов; r – их эксцентриситет. Коэффициент сопротивления демпфера равен α . Вибростол установлен на четырех параллельных пружинах, коэффициент жесткости каждой из которых равен c^* . В начальный момент времени $t = 0$ вибростол с формуемым изделием находился в покое, то есть $\dot{x}_0 = 0$. Численные значения необходимых для расчета величин приведены в таблице 2.

Задание 3. Определить уравнения колебаний, амплитуду, период и частоту затухающих и вынужденных колебаний вибростола, приводимого в движение с помощью поводка, которому сообщаются извне колебания по закону $z = z_a \sin pt$ (схема 3 третьего задания). Масса вибростола с формуемым изделием равна m . Коэффициенты сопротивления демпферов равны α_1 и α_2 , коэффициенты жесткости пружин равны c_1 и c_2 . В начальный момент времени система находилась в покое. Рассмотреть колебание вибростола относительно неподвижной стойки и подвижного поводка. Численные значения необходимых для расчета величин приведены в таблице 3.

Таблица 1

Исходные данные к заданию 1

Номер варианта	r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	α_1 , Н·с/м	ω_{10} , с ⁻¹	M_0 , Н·м	p , с ⁻¹	Номер схемы
1	0,1	0,2	0,1	3	5	4	2	1000	500	30	0,1	3	10	1.1
2	0,1	0,2	0,1	2	4	6	5	1500	200	40	0,2	2	11	1.2
3	0,2	0,3	0,1	5	7	8	2	1300	100	50	0,3	1	13	1.3
4	0,4	0,5	0,3	4	5	4	3	1300	600	60	0,4	4	14	1.4
5	0,3	0,4	0,3	3	4	5	2	1400	900	70	0,5	5	15	1.5
6	0,1	0,2	0,2	2	4	6	3	1200	800	60	0,2	9	16	1.6
7	0,2	0,3	0,3	3	4	5	2	1500	900	80	0,4	8	18	1.7
8	0,2	0,4	0,3	4	6	8	2	1000	500	50	0,6	7	19	1.8
9	0,1	0,2	0,2	5	7	5	3	1200	400	40	0,3	6	20	1.9
10	0,2	0,3	0,2	6	8	4	4	1300	500	30	0,4	5	18	1.10
11	0,2	0,4	0,3	7	9	2	5	1400	600	20	0,5	4	16	1.1
12	0,1	0,2	0,2	4	6	5	4	1500	400	50	0,3	3	17	1.2
13	0,2	0,3	0,3	3	5	4	3	1600	200	40	0,2	2	19	1.3
14	0,1	0,2	0,1	4	3	2	1	1000	300	50	0,3	4	20	1.4
15	0,2	0,3	0,1	5	4	3	2	2000	900	40	0,4	5	10	1.5
16	0,3	0,4	0,2	5	3	2	1	1400	800	30	0,3	6	30	1.6
17	0,2	0,4	0,1	3	3	4	3	1300	500	20	0,2	7	20	1.7
18	0,3	0,5	0,3	5	5	3	2	1200	400	60	0,5	8	18	1.8
19	0,1	0,3	0,2	3	5	2	3	2000	300	80	0,4	9	25	1.9
20	0,2	0,4	0,3	4	5	4	2	1000	200	90	0,3	2	15	1.10

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	α_1 , Н·с/м	ω_{10} , с ⁻¹	M_0 , Н·м	p , с ⁻¹	Номер схемы
21	0,1	0,3	0,2	2	3	5	1	1000	300	60	0,2	3	10	1.1
22	0,2	0,4	0,3	4	5	2	3	1000	400	30	0,1	4	14	1.2
23	0,1	0,2	0,2	3	4	5	2	1000	500	50	0,3	5	18	1.3
24	0,1	0,2	0,1	4	5	3	1	1000	600	70	0,4	6	13	1.4
25	0,2	0,4	0,2	2	3	4	5	1000	700	20	0,5	7	15	1.5
26	0,3	0,4	0,2	5	6	7	2	1000	800	80	0,6	8	20	1.6
27	0,2	0,3	0,1	3	4	5	2	1000	900	40	0,3	9	25	1.7
28	0,2	0,3	0,2	4	6	5	3	2000	500	30	0,4	8	30	1.8
29	0,4	0,5	0,2	3	4	5	2	2000	800	50	0,5	7	20	1.9
30	0,1	0,3	0,2	2	3	4	5	2000	900	30	0,6	6	15	1.10

Таблица 2

Исходные данные к заданию 2

Номер варианта	m , кг	m_0 , кг	r , м	p , с ⁻¹	c^* , Н/м	α , Н·с/м
1	1000	10	0,05	10	10 ⁴	100
2	1500	5	0,03	15	10 ⁵	159
3	1200	8	0,04	12	10 ⁵	130
4	1300	10	0,04	20	10 ⁵	140
5	1800	5	0,03	15	10 ⁴	200
6	2000	10	0,05	30	10 ⁵	300
7	1500	5	0,04	25	10 ⁴	200
8	1900	8	0,05	10	10 ³	100
9	2000	10	0,03	22	10 ⁴	300
10	1500	7	0,02	25	10 ³	300
11	1600	10	0,05	10	10 ⁴	100
12	1000	15	0,04	15	10 ³	150
13	1300	16	0,03	20	10 ⁴	140
14	1500	10	0,05	15	10 ³	120
15	1800	12	0,04	18	10 ⁴	100
16	2000	10	0,05	15	10 ⁵	150
17	1500	5	0,03	20	10 ³	150
18	3000	20	0,05	30	10 ⁴	300
19	2000	10	0,06	15	10 ⁵	100
20	1300	5	0,04	10	10 ³	150
21	1400	10	0,05	15	10 ⁴	170
22	1800	30	0,04	10	10 ⁵	200
23	2000	20	0,05	25	10 ³	100
24	1800	25	0,03	15	10 ⁴	150
25	1300	10	0,04	20	10 ³	160
26	1200	15	0,05	25	10 ⁴	200
27	1300	10	0,06	10	10 ⁵	300
28	1700	5	0,03	15	10 ³	300
29	1900	15	0,04	18	10 ⁴	150
30	2000	20	0,05	15	10 ⁵	300

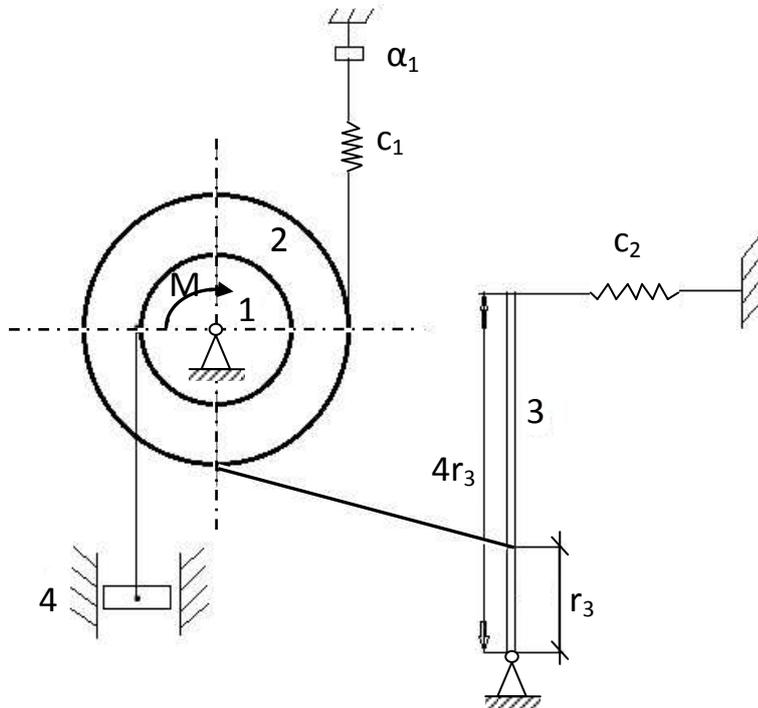
Таблица 3

Исходные данные к заданию 3

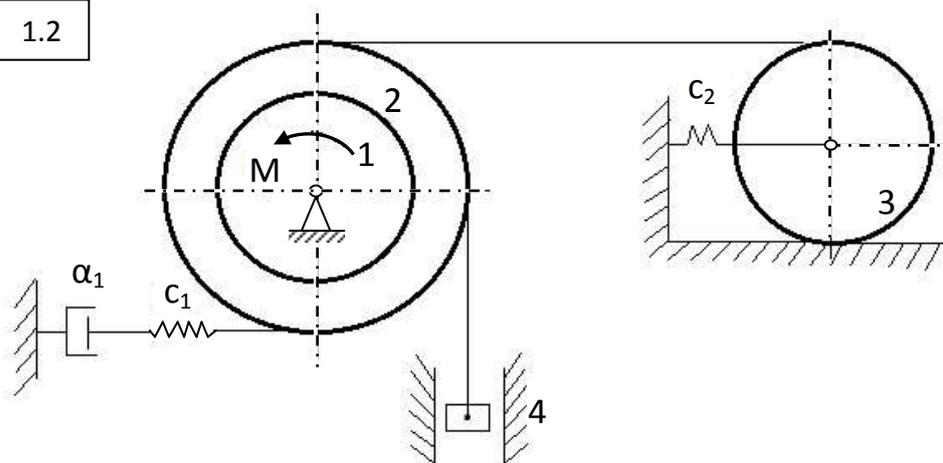
Номер варианта	m , кг	z_a , м	p , с ⁻¹	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	α_1 , Н·с/м	α_2 , Н·с/м
1	1000	0,05	10	10 ⁴	10 ⁵	100	150
2	1500	0,03	15	10 ⁵	10 ⁴	150	200
3	1200	0,04	12	10 ⁵	10 ⁴	130	100
4	1300	0,04	20	10 ³	10 ⁴	140	100
5	1800	0,03	15	10 ⁴	10 ⁵	200	150
6	2000	0,05	30	10 ⁵	10 ⁴	300	100
7	1500	0,04	25	10 ⁴	10 ⁵	200	100
8	1900	0,05	10	10 ³	10 ³	100	150
9	2000	0,03	22	10 ⁴	10 ⁴	300	120
10	1500	0,02	25	10 ³	10 ³	300	140
11	1600	0,05	10	10 ⁴	10 ⁵	100	200
12	1000	0,04	15	10 ³	10 ⁴	150	100
13	1300	0,03	20	10 ⁴	10 ³	140	130
14	1500	0,05	15	10 ³	10 ⁴	120	110
15	1800	0,04	18	10 ⁴	10 ³	100	200
16	2000	0,05	15	10 ⁵	10 ⁴	150	130
17	1500	0,03	20	10 ³	10 ⁴	150	160
18	3000	0,05	30	10 ⁴	10 ⁵	300	150
19	2000	0,06	15	10 ⁵	10 ⁴	100	150
20	1300	0,04	10	10 ³	10 ⁴	150	200
21	1400	0,05	15	10 ⁴	10 ³	170	100
22	1800	0,04	10	10 ⁵	10 ⁴	200	100
23	2000	0,05	25	10 ³	10 ⁴	100	200
24	1800	0,03	15	10 ⁴	10 ⁴	150	100
25	1300	0,04	20	10 ³	10 ⁴	160	100
26	1200	0,05	25	10 ⁴	10 ³	200	120
27	1300	0,06	10	10 ⁵	10 ⁴	300	100
28	1700	0,03	15	10 ³	10 ⁴	100	200
29	1900	0,04	18	10 ⁴	10 ⁴	150	100
30	2000	0,05	15	10 ⁵	10 ⁴	300	100

Схемы к заданию 1

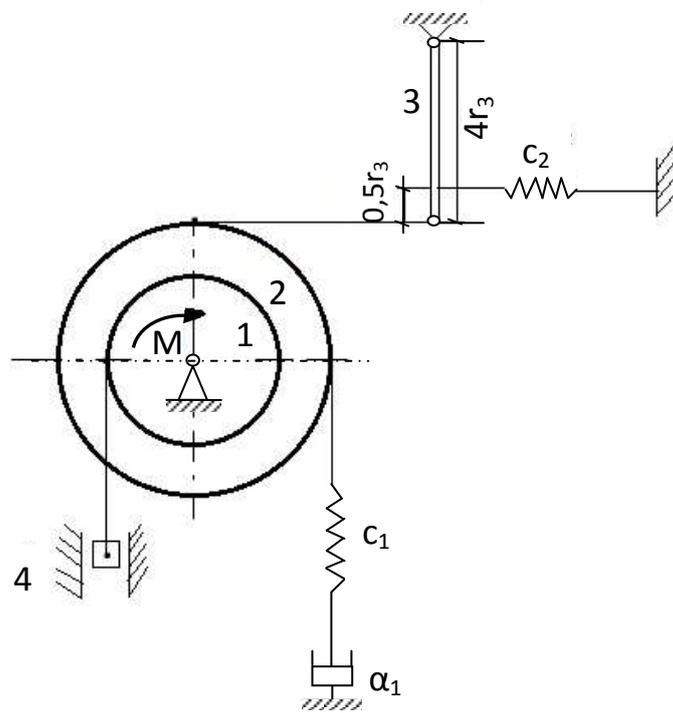
1.1



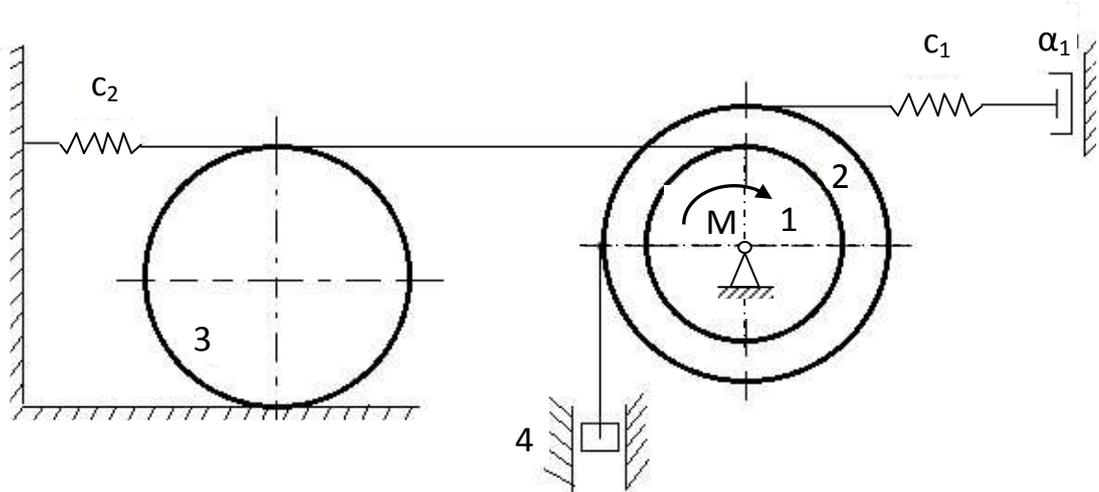
1.2



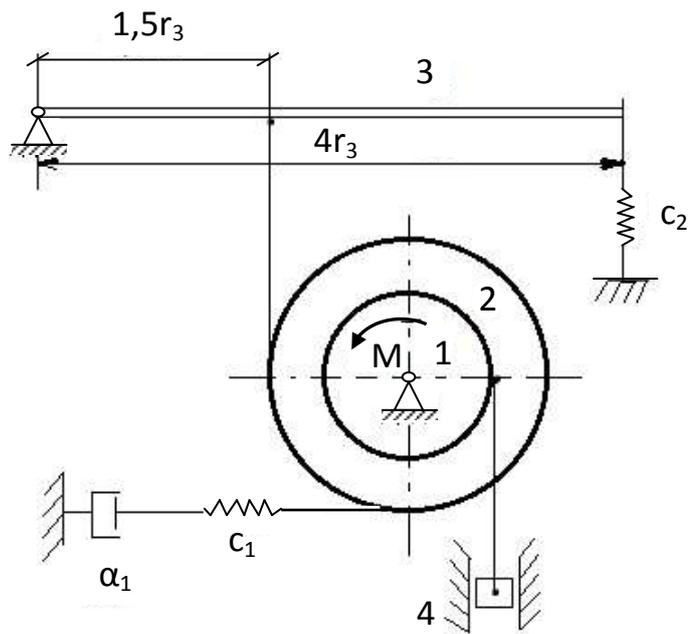
1.3



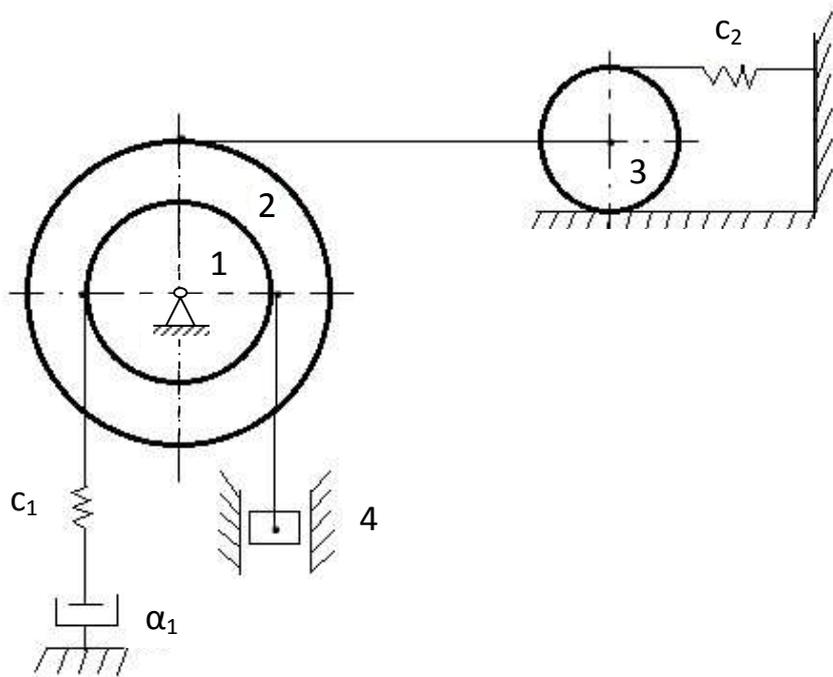
1.4



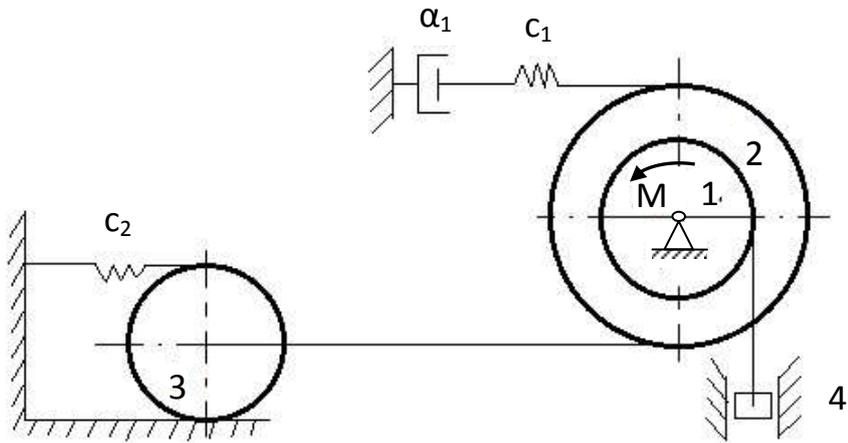
1.5



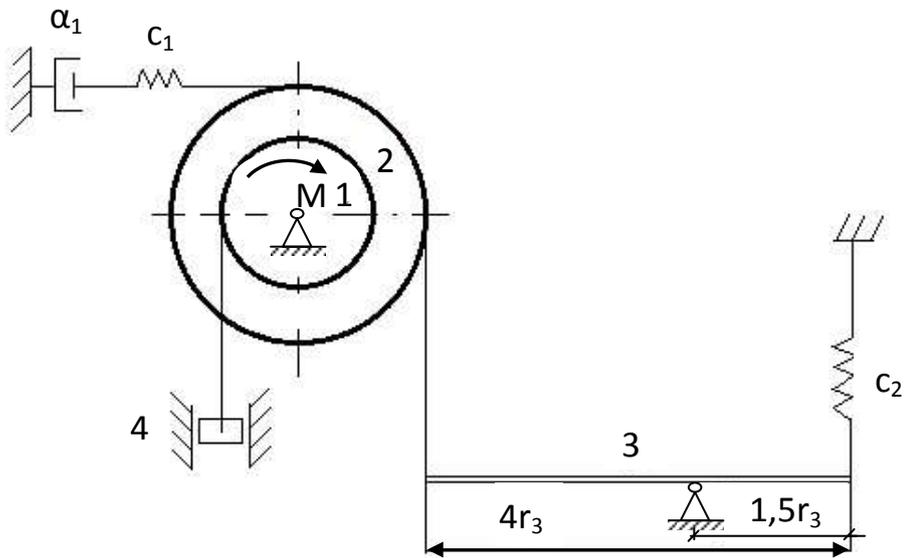
1.6



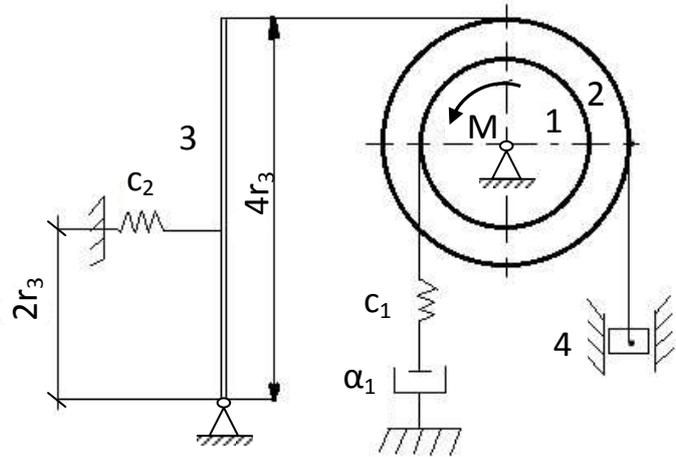
1.7



1.8



1.9



1.10

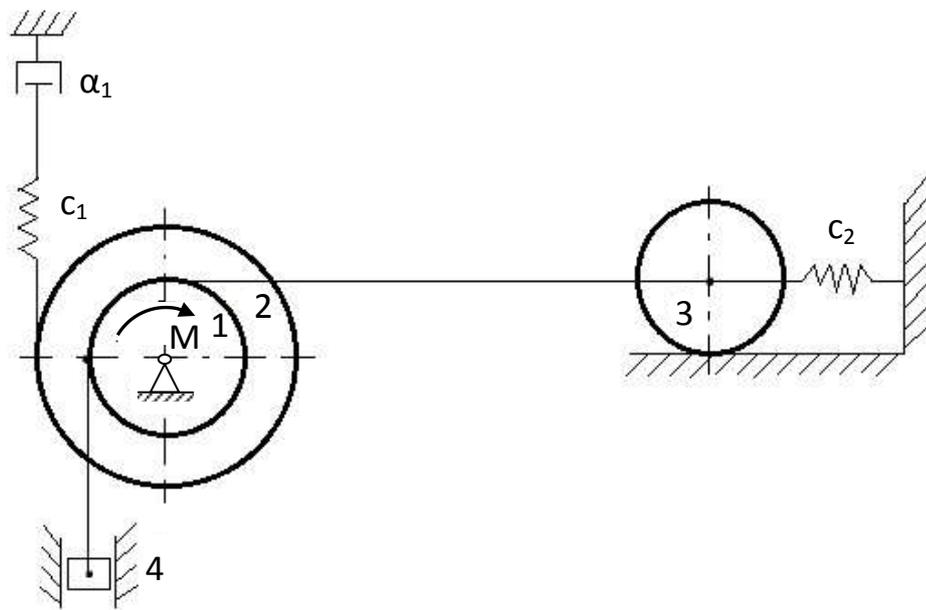


Схема к заданию 2

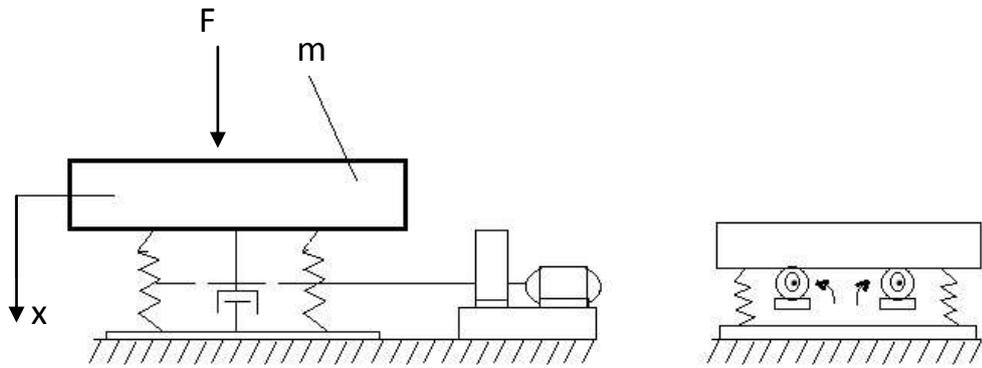
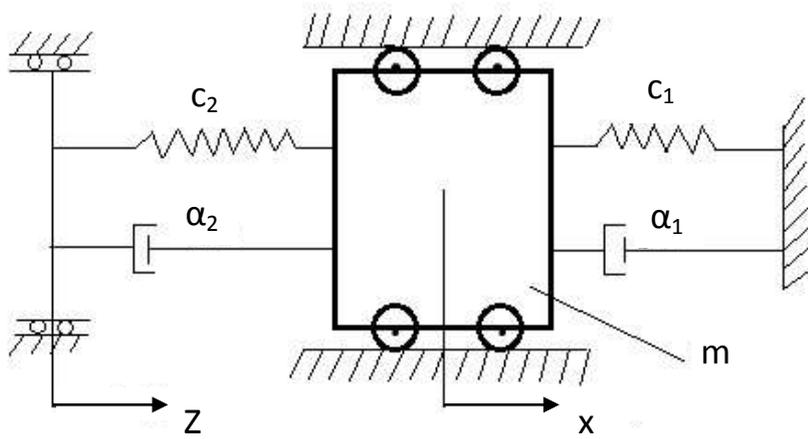


Схема к заданию 3



Рекомендуемая литература

1. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие для строительных специальностей вузов / ГОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т». – Томск: Издательство Томского университета, 2004. – 221 с. – Текст : непосредственный.

2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 1, Т. 2: Статика и кинематика; Динамика : учебное пособие для техн. специальностей вузов / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 736 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=29 – Текст : электронный.

3. Теоретическая механика : учебное пособие для студентов техн. вузов / В. А. Хямяляйнен, Р. Ф. Гордиенко, В. В. Иванов; ГОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т». – Томск: Издательство Томского университета, 2005. – 207 с.

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90337&type=utchposob:common> – Текст : электронный.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для вузов / А. А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А. А. Яблонского. – Москва : Высшая школа, 1985. – 367 с. – Текст : непосредственный.