

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составители А. С. Богатырева М. А. Баев В. В. Иванов

## **ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ**

**Методические материалы к индивидуальным заданиям  
по дисциплине «Теоретическая механика»**

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности  
21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового производства в  
качестве электронного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2021

Рецензенты:

Сирота Д. Ю., доцент кафедры теоретической и геотехнической механики

Хямяляйнен В. А., председатель учебно-методической комиссии специальности 21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового производства

**Богатырева Альбина Сергеевна**

**Баев Михаил Алексеевич**

**Иванов Вадим Васильевич**

**Общее уравнение динамики:** методические материалы к индивидуальным заданиям по дисциплине «**Теоретическая механика**» для обучающихся технических специальностей и направлений / сост. А. С. Богатырева, М. А. Баев, В. В. Иванов ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2021. – Текст : электронный.

В предлагаемых материалах представлены теоретические положения раздела «Аналитическая механика» курса «Теоретической механики», задания для самостоятельной работы студентов, пример выполнения и оформления этих заданий.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика», организация и контроль самостоятельной работы.

© Кузбасский государственный  
технический университет имени  
Т. Ф. Горбачева, 2021

© Богатырева А. С., Баев М. А.,  
Иванов В. В., составление, 2021

## ВВЕДЕНИЕ

При создании новых и совершенствовании существующих конструкций экскаваторов, подъемных кранов, горных машин и механизмов важно, чтобы их рабочие и несущие элементы работали в заданном режиме и обладали необходимым запасом прочности.

Решение этих задач связано с изучением законов движения материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами.

В механизмах множество звеньев совершают поступательное, вращательное и плоскопараллельное движения, поэтому кинематические и динамические исследования этих видов движения составляют основу значительной части дисциплины «Теоретическая механика»

Настоящие методические указания включают 30 вариантов заданий, предназначенных для самостоятельной работы по теме «Общее уравнение динамики».

Для механической системы, состоящей из трех или четырех тел, совершающих различные виды движения, определяется ускорение движения одного из тел системы, а также определяются натяжения нитей в ветвях, соединяющих тела.

## ЗАДАНИЕ

### Применение общего уравнения динамики к изучению движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорение движения груза 1 и натяжения нитей в ветвях, соединяющих тела.

Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать.

Варианты механических систем показаны на рис. 1–5, а необходимые для решения данные приведены в таблице.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

**Дано:** схема механической системы (рис. 6),

$$P_1 = 40 \text{ Н}, P_2 = 30 \text{ Н}, P_3 = 20 \text{ Н}, R_2 = 0,6 \text{ м},$$

$$R_3 = 0,4 \text{ м}, \alpha = 60^\circ, f = 0,1.$$

Определить ускорение  $a_1$  груза 1 и натяжения  $T_{1-2}$  и  $T_{2-3}$  ветвей нити, соединяющей тела 1, 2, 3.

К изучению движения механической системы применяем общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ин}} = 0. \quad (1)$$

Для определения ускорения движения груза 1 рассмотрим движение всей механической системы.

На механическую систему действуют силы тяжести  $\vec{P}_1$  – груза 1,  $\vec{P}_2$  – блока 2 и  $\vec{P}_3$  – катка 3, а также сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – груза 1 по наклонной плоскости и сила нормального давления  $\vec{N}$  со стороны этой плоскости на груз 1, сила реакции связи цилиндрического шарнира в неподвижной опоре  $O$  на тело 2, представленная двумя составляющими  $\vec{y}_0$ ,  $\vec{z}_0$ .

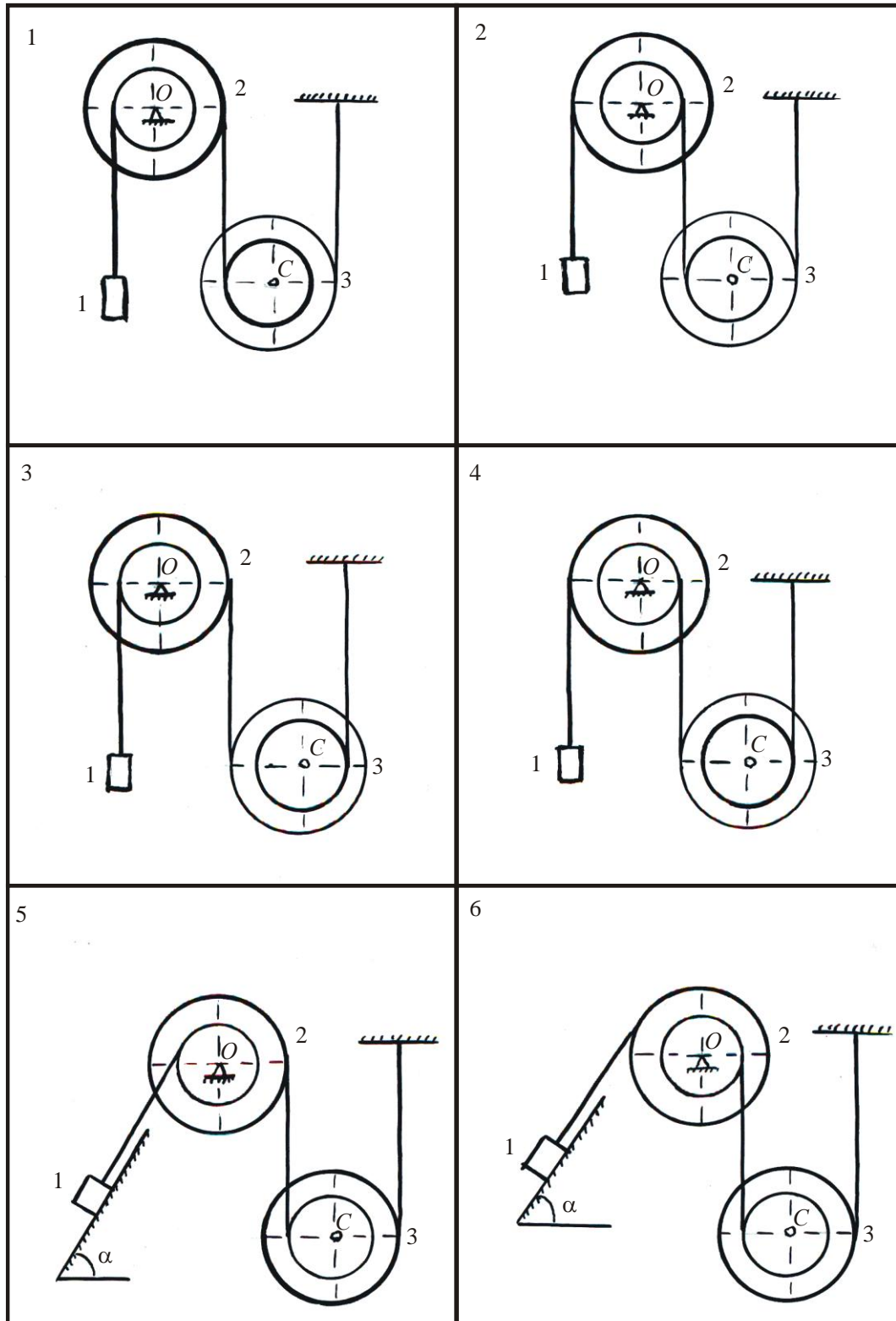


Рис. 1

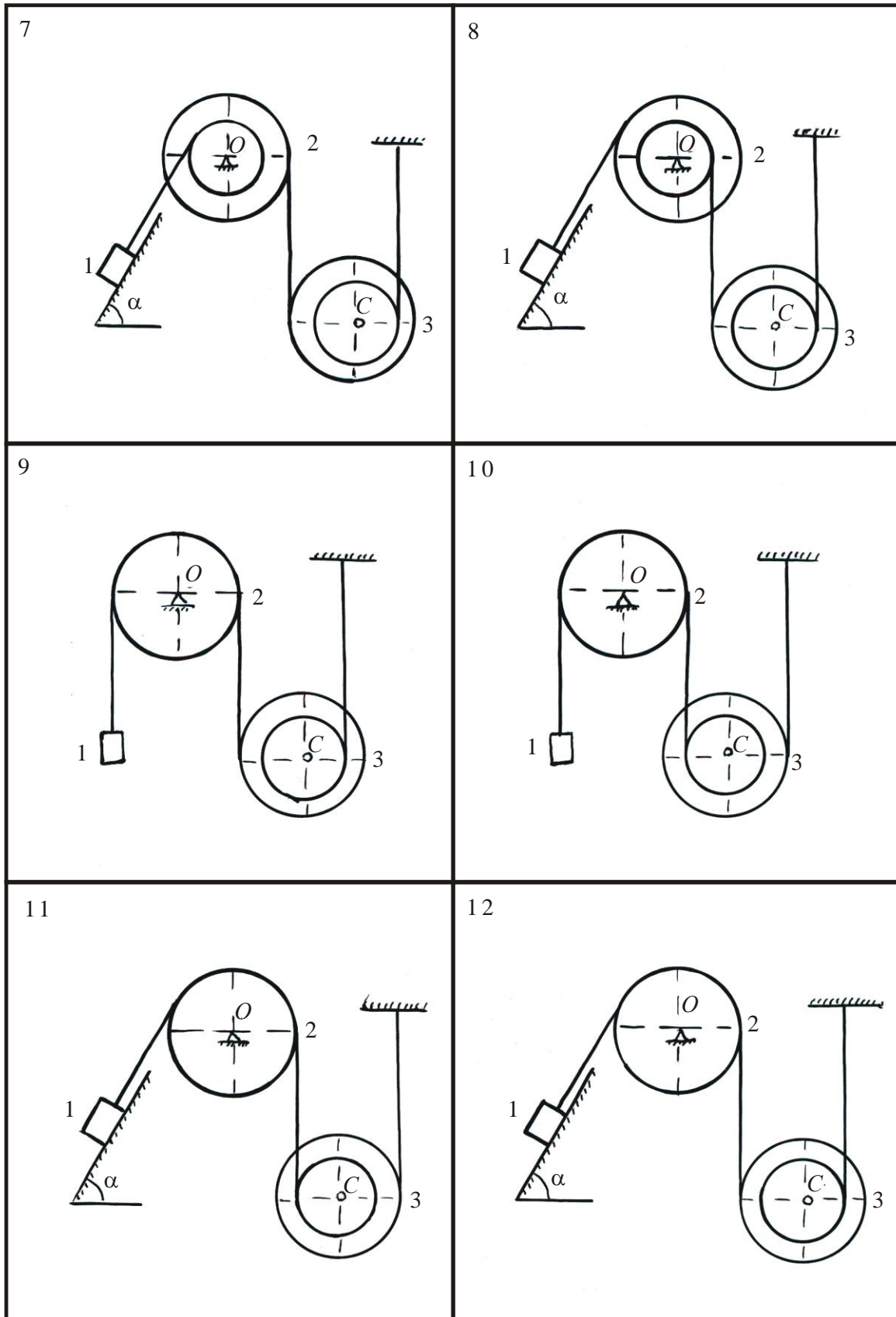


Рис. 2

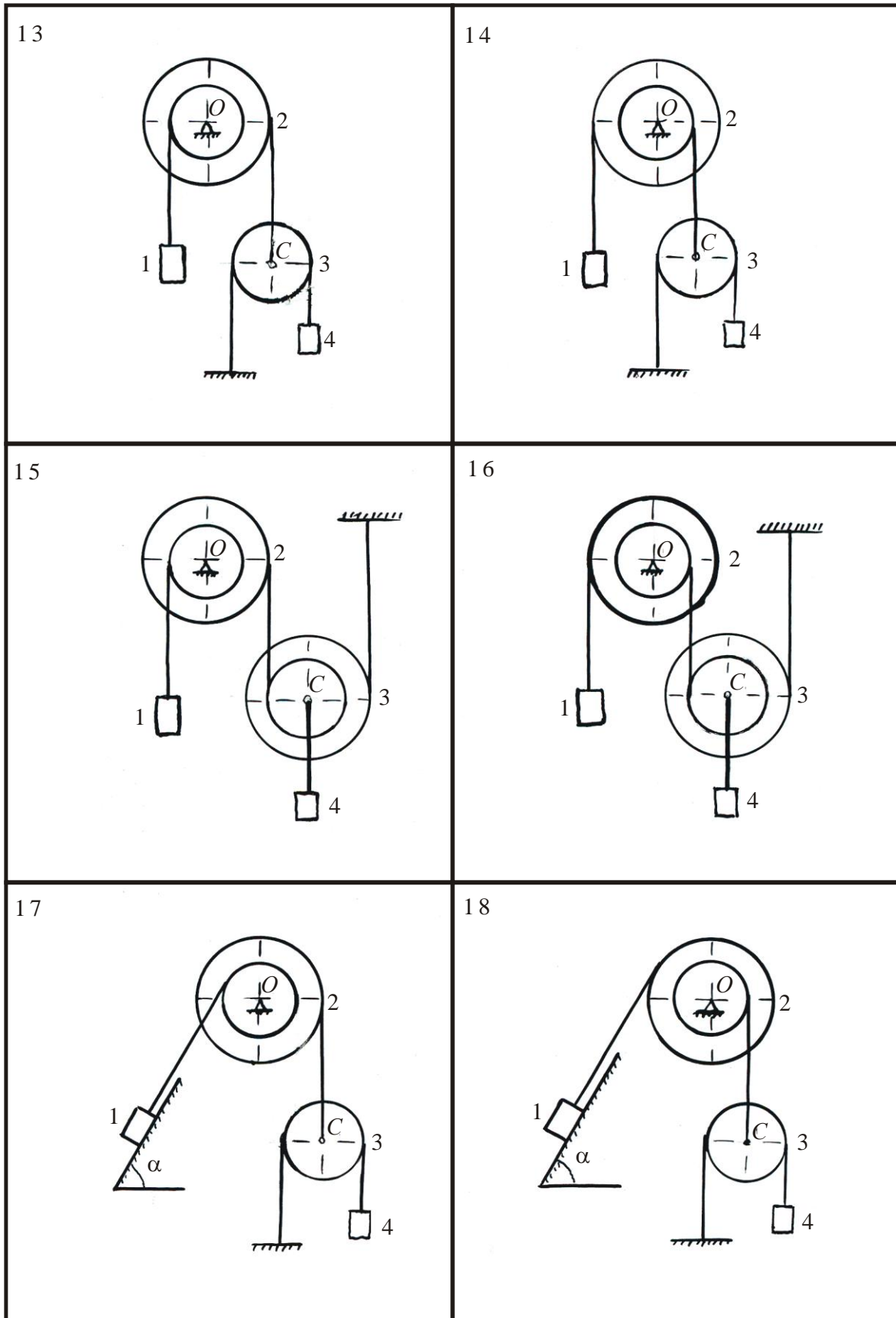


Рис. 3

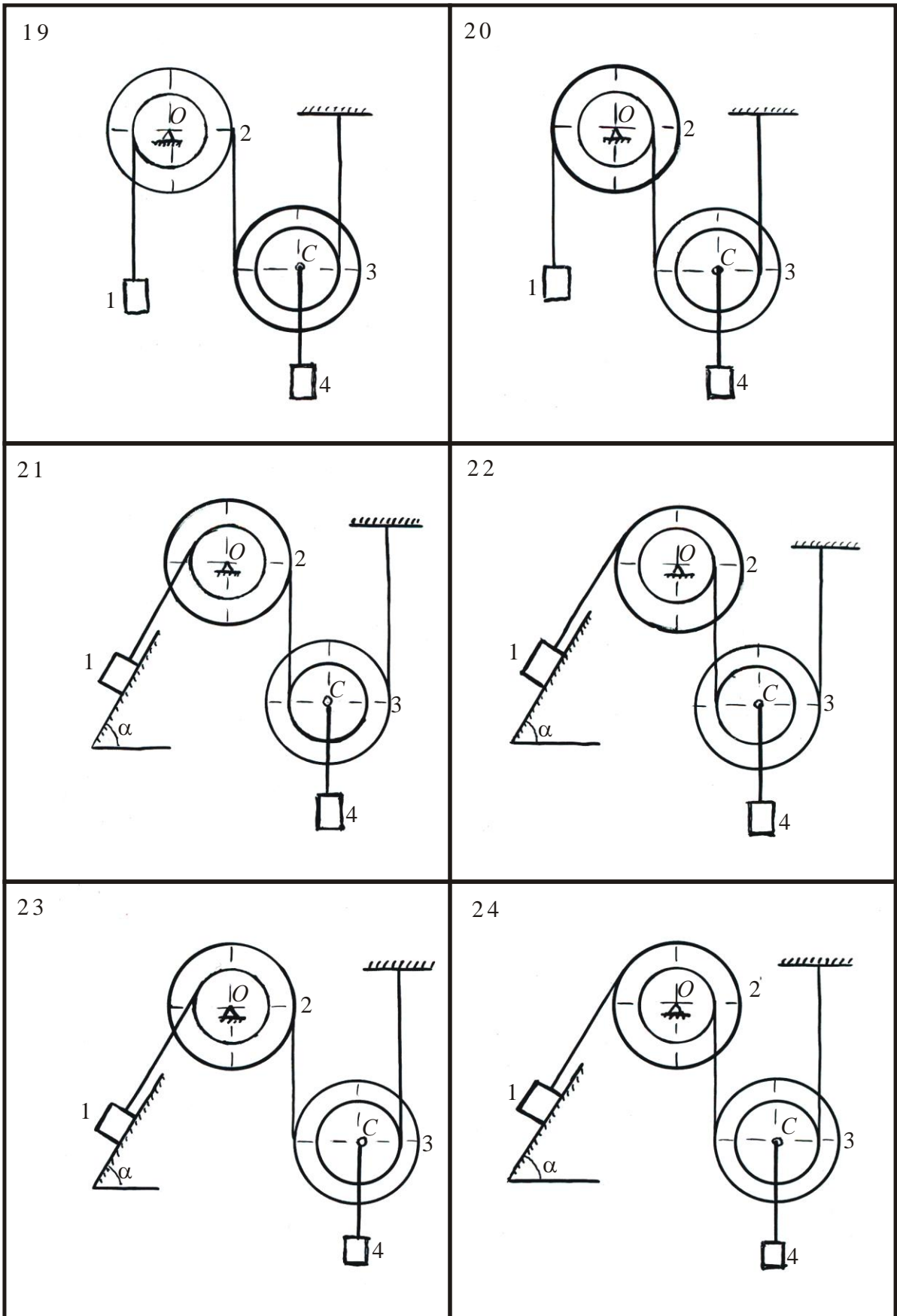


Рис. 4



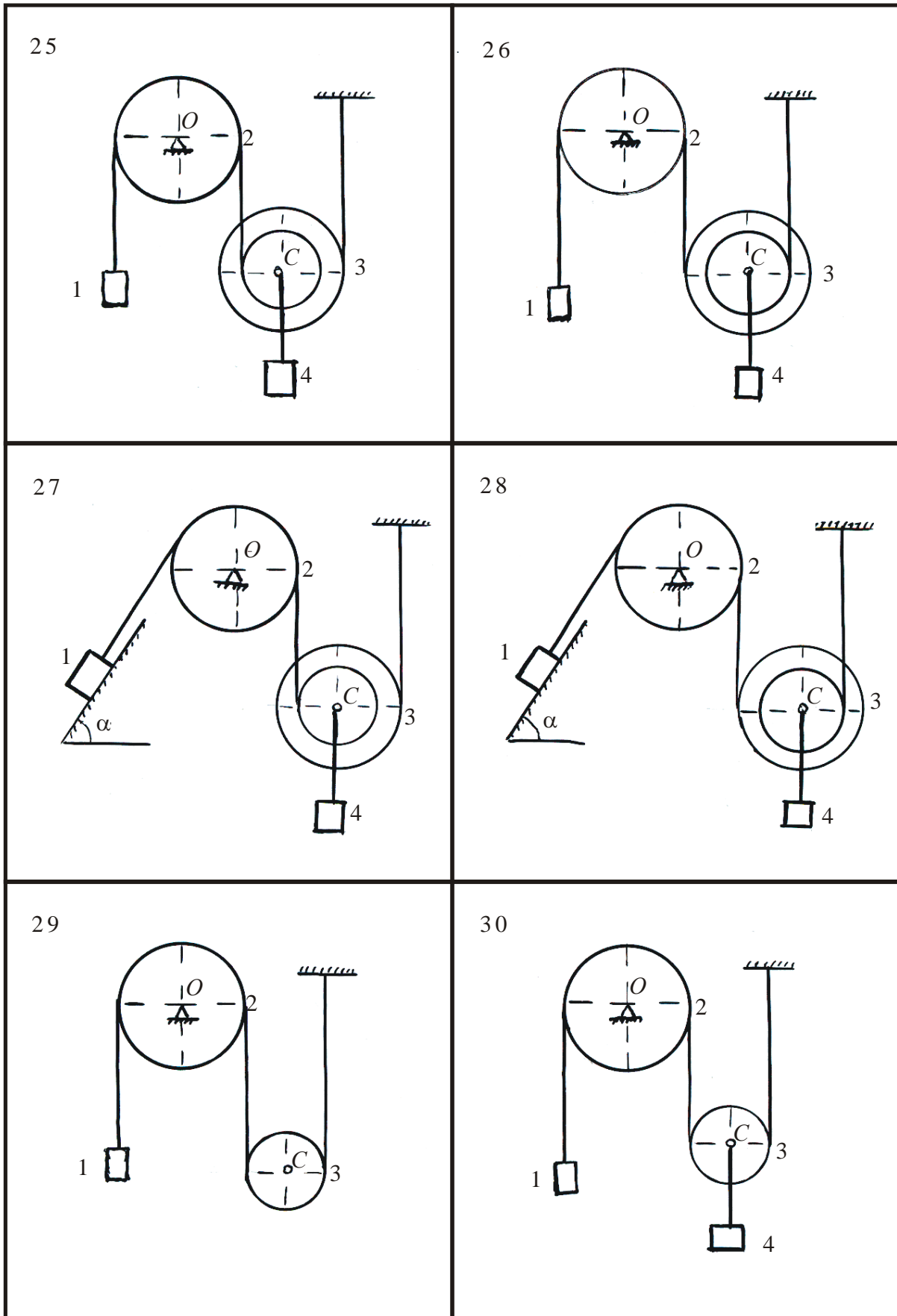


Рис. 5

Таблица

## Расчетные данные

Номер варианта (рис.1–5)	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$R_2$	$r_2$	$i_2$	$R_3$	$r_3$	$i_3$	$\alpha$ , град	$f$
	Н				М							
1	60	50	30		0,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,2		
2	80	60	40		0,6	0,4	0,5	0,4	0,2	0,3		
3	50	40	20		0,5	0,3	0,4	0,3	0,1	0,2		
4	60	40	30		0,8	0,4	0,6	0,6	0,2	0,4		
5	40	30	10		0,7	0,3	0,5	0,5	0,3	0,4	60	0,2
6	50	20	10		0,5	0,1	0,3	0,4	0,2	0,3	30	0,1
7	80	40	20		0,6	0,2	0,4	0,5	0,3	0,4	60	0,2
8	70	50	30		0,8	0,2	0,5	0,6	0,2	0,4	45	0,1
9	40	30	20		0,6			0,6	0,4	0,5		
10	60	30	20		0,4			0,5	0,3	0,4		
11	50	40	10		0,5			0,4	0,2	0,3	30	0,2
12	30	20	10		0,7			0,5	0,3	0,4	60	0,1
13	70	40	20	10	0,8	0,4	0,6	0,4				
14	80	50	30	10	0,6	0,4	0,5	0,4				
15	60	40	20	10	0,5	0,3	0,4	0,4	0,2	0,3		
16	90	50	30	20	0,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,2		
17	60	30	20	10	0,8	0,4	0,6	0,4			60	0,1
18	80	40	20	20	0,6	0,2	0,4	0,3			45	0,2
19	50	30	20	10	0,7	0,5	0,6	0,6	0,2	0,4		
20	70	40	30	10	0,5	0,3	0,4	0,4	0,2	0,3		
21	80	50	20	10	0,8	0,6	0,7	0,6	0,4	0,5	45	0,1
22	90	40	30	10	0,6	0,4	0,5	0,4	0,2	0,3	60	0,2
23	70	30	20	10	0,5	0,3	0,4	0,6	0,2	0,4	60	0,1
24	80	50	30	10	0,8	0,4	0,6	0,6	0,4	0,5	45	0,1
25	60	40	20	10	0,6			0,4	0,2	0,3		
26	90	60	20	20	0,5			0,5	0,3	0,4		
27	90	40	30	10	0,7			0,6	0,4	0,5	60	0,2
28	80	50	20	10	0,6			0,4	0,2	0,3	45	0,1
29	50	40	30		0,8			0,6				
30	60	50	20	10	0,5			0,4				

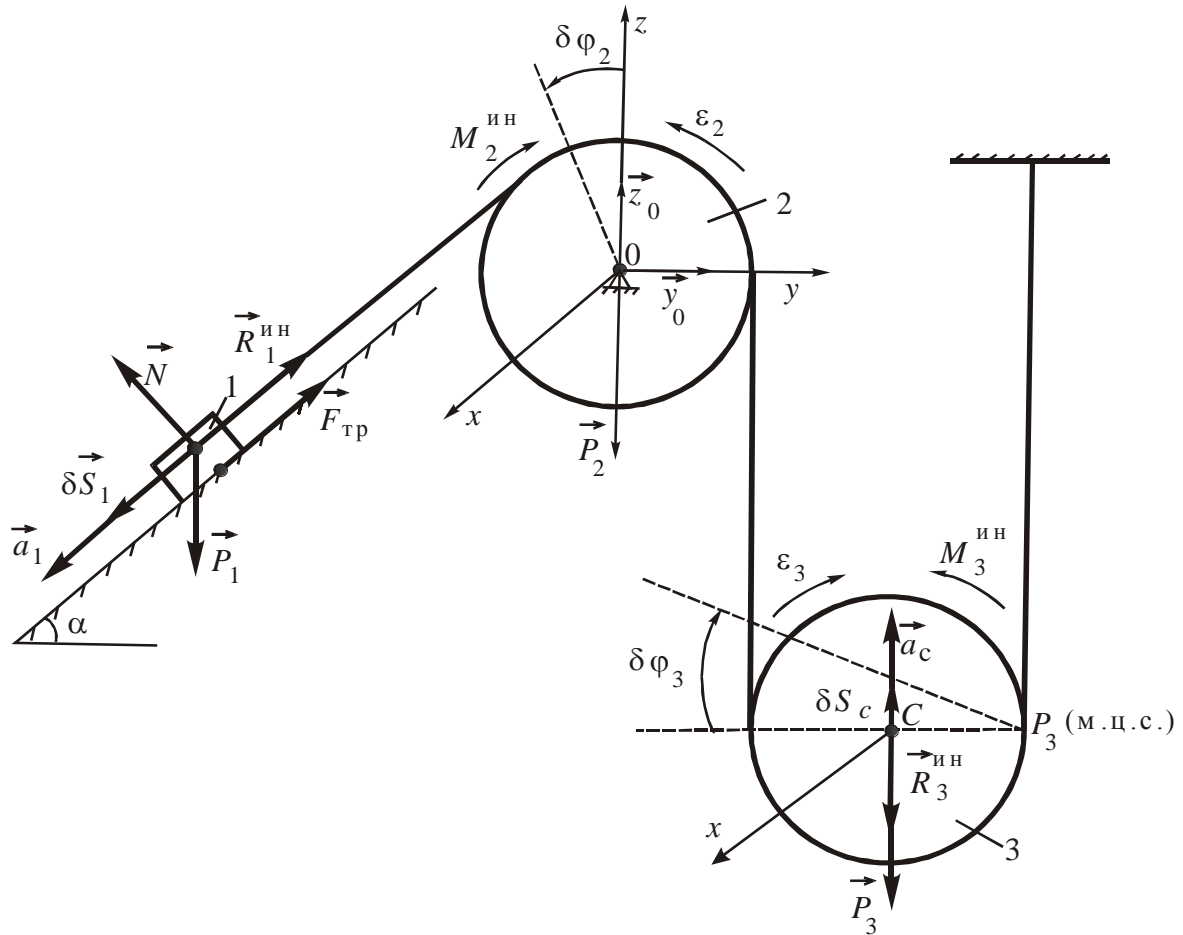


Рис. 6

При решении задачи с использованием общего уравнения динамики применяется принцип Даламбера и принцип возможных перемещений.

Согласно принципу Даламбера ко всем действующим на механическую систему активным силам и силам реакций связей прибавляем соответствующие силы инерции.

Силы инерции груза 1, массой  $m_1$ , движущегося поступательно с ускорением  $a_1$ , представляются главным вектором сил инерции

$$\vec{R}_1^{\text{ин}} = -m_1 \vec{a}_1. \quad (2)$$

Силы инерции тела 2, массой  $m_2$ , вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр массы тела, представляются главным моментом сил инерции

$$M_2^{\text{ин}} = -I_{2x} \varepsilon_2, \quad (3)$$

где  $I_{2x}$  – момент инерции тела 2 относительно оси вращения

$$\left( I_{2x} = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P_2 R_2^2}{2g} \right);$$

$\varepsilon_2$  – угловое ускорение вращения тела 2  $\left( \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} \right)$ .

Силы инерции тела 3, массой  $m_3$ , совершающего плоскопараллельное движение, представляются главным вектором и главным моментом сил инерции

$$\vec{R}_3^{\text{ин}} = -m_3 \vec{a}_c, \quad M_3^{\text{ин}} = -I_{cx} \cdot \varepsilon_3, \quad (4)$$

где  $a_c$  – ускорение центра массы тела 3  $\left( a_c = \frac{a_1}{2} \right)$ ;

$I_{cx}$  – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через

центр массы тела  $\left( I_{cx} = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{P_3 R_3^2}{2g} \right)$ ;

$\varepsilon_3$  – угловое ускорение вращения тела 3  $\left( \varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R_3} \right)$ .

Применив принцип Даламбера, сообщаем механической системе возможное перемещение и составляем общее уравнение динамики

$$\begin{aligned} P_1 \sin \alpha \cdot \delta s_1 - F_{\text{тр}} \delta s_1 - R_1^{\text{ин}} \cdot \delta s_1 - M_2^{\text{ин}} \cdot \delta \varphi_2 - \\ - P_3 \cdot \delta s_c - R_3^{\text{ин}} \cdot \delta s_c - M_3^{\text{ин}} \cdot \delta \varphi_3 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta s_1$  – возможное перемещение тела 1;

$\delta \varphi_2$  – возможное перемещение тела 2  $\left( \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R_2} \right)$ ;

$\delta \varphi_3$  – возможное перемещение тела 3  $\left( \delta \varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2R_3} \right)$ ;

$\delta s_c$  – возможное перемещение центра массы тела 3

$$\left( \delta s_c = \delta \varphi_3 \cdot R_3 = \frac{\delta s_1}{2} \right).$$

В уравнении (5) значение

$$F_{\text{тр}} = fN = fP_1 \cos \alpha ;$$

$$R_1^{\text{ин}} = m_1 \cdot a_1 = \frac{P_1}{g} \cdot a_1; \quad M_2^{\text{ин}} = I_{2x} \cdot \varepsilon_2 = \frac{P_2 R_2}{2g} \cdot a_1;$$

$$R_3^{\text{ин}} = m_3 \cdot a_c = \frac{P_3}{2g} \cdot a_1; \quad M_3^{\text{ин}} = I_{cx} \cdot \varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{4g} \cdot a_1.$$

С учетом значений параметров  $\delta\varphi_2$ ,  $\delta s_c$ ,  $\delta\varphi_3$ ,  $F_{\text{тр}}$ ,  $R_1^{\text{ин}}$ ,  $M_2^{\text{ин}}$ ,  $R_3^{\text{ин}}$ ,  $M_3^{\text{ин}}$  уравнение (5) приводится к следующему виду

$$P_1 \sin \alpha \cdot \delta s_1 - fP_1 \cos \alpha \cdot \delta s_1 - \frac{P_1}{g} a_1 \cdot \delta s_1 - \frac{P_2}{2g} a_1 \cdot \delta s_1 -$$

$$- \frac{P_3}{2} \delta s_1 - \frac{P_3}{4g} a_1 \cdot \delta s_1 - \frac{P_3}{8g} a_1 \cdot \delta s_1 = 0. \quad (6)$$

Разделив каждое слагаемое в этом уравнении на  $\delta s_1$  и группируя слагаемые с  $a_1$ , получаем следующее выражение для определения значения параметра  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{g [8 P_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - 4 P_3]}{8 P_1 + 4 P_2 + 3 P_3}. \quad (7)$$

Подставляя в это уравнение значение заданных параметров по условию, получаем:

$$a_1 = \frac{9,81 [8 \cdot 40 (0,86 - 0,1 \cdot 0,5) - 4 \cdot 20]}{8 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 20} = 3,5 \text{ м/с}^2.$$

### Определение натяжений ветвей нити, соединяющей тела 1, 2, 3

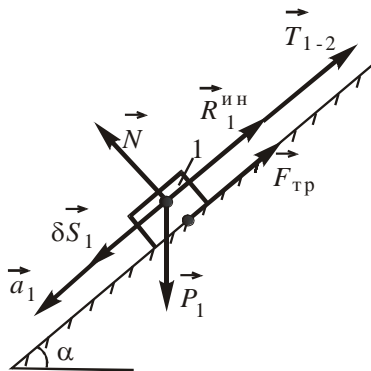


Рис. 7

Для определения натяжения ветви нити, соединяющей тела 1, 2, рассмотрим отдельно движение груза 1. Для этого мысленно разрежем эту нить, заменяя ее действие на груз 1 реакцией  $\vec{T}_{1-2}$  (рис. 7).

В этом случае на груз 1 действуют сила тяжести груза  $\vec{P}_1$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  груза по наклонной плоскости, сила нормального давления  $\vec{N}$  со стороны этой плоскости на груз и сила реакции  $\vec{T}_{1-2}$  гибкой нити. Для решения задачи используем общее уравнение динамики (1).

Прибавив ко всем действующим на груз активным силам и силам реакций связей главный вектор сил инерции  $\vec{R}_1^{\text{ин}}$  и сообщив грузу возможное перемещение  $\delta \vec{s}_1$ , составим общее уравнение динамики

$$P_1 \sin \alpha \cdot \delta s_1 - F_{\text{тр}} \cdot \delta s_1 - R_1^{\text{ин}} \cdot \delta s_1 - T_{1-2} \cdot \delta s_1 = 0. \quad (8)$$

С учетом значения  $F_{\text{тр}}$  и  $R_1^{\text{ин}}$  из этого уравнения получаем следующее выражение для определения  $T_{1-2}$ :

$$T_{1-2} = P_1 \left( \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{a_1}{g} \right). \quad (9)$$

Подставляя в это уравнение значение заданных параметров по условию задания и найденных в процессе выполнения задания, получаем

$$T_{1-2} = 40 \left( 0,86 - 0,1 \cdot 0,5 - \frac{3,5}{9,81} \right) = 18,1 \text{ Н.}$$

Для определения натяжения ветви нити, соединяющей тела 2, 3, рассмотрим отдельно движение тела 2. Для этого мысленно разрежем нити, соединяющие тело 2 с грузом 1 и телом 3, заменяя их действие на тело 2 их реакциями  $\vec{T}_{1-2}$ ;  $\vec{T}_{2-3}$  (рис. 8).

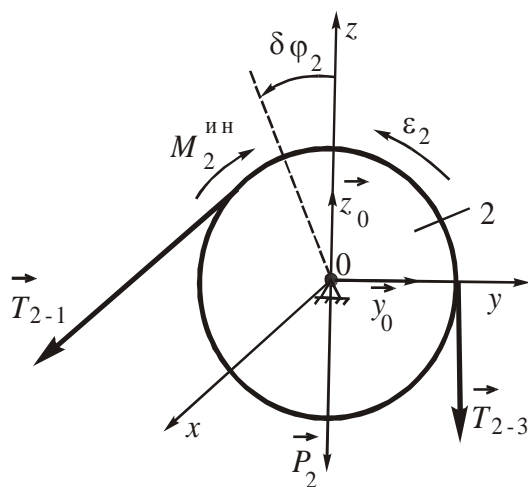


Рис. 8

8).

$$T_{2-1} = T_{1-2} = 18,1 \text{ Н.}$$

На тело 2 действуют сила тяжести тела  $\vec{P}_2$ , сила реакции цилиндрического шарнира в опоре O, представленная двумя составляющими  $\vec{Y}_0$ ,  $\vec{Z}_0$  и силы ре-

акций гибких нитей  $\vec{T}_{1-2}$ ,  $\vec{T}_{2-3}$ .

Прибавив ко всем действующим на тело 2 активным силам и силам реакций связей, главный момент сил инерции  $M_2^{\text{ин}}$  и со-общив возможное перемещение тела путем поворота его вокруг неподвижной оси на угол  $\delta\varphi_2$ , составим общее уравнение динамики

$$T_{2-1} \cdot R_2 \cdot \delta\varphi_2 - M_2^{\text{ин}} \cdot \delta\varphi_2 - T_{2-3} \cdot R_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0. \quad (10)$$

С учетом значения  $M_2^{\text{ин}}$  из этого уравнения получаем следующее выражение для определения  $T_{2-3}$ :

$$T_{2-3} = T_{2-1} - \frac{P_2 \cdot a_1}{2g}.$$

Подставляя в это уравнение значение, заданных параметров по условию задания и найденных в процессе выполнения задания получаем

$$T_{2-3} = 12,8 \text{ Н}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что изучают в разделе «Аналитическая механика»?
2. Дайте определение связи, применяемые в аналитической механике.
3. Дайте определение возможных перемещений, их обозначения.
4. Запишите выражение работы силы на возможных перемещениях.
5. Сформулируйте определение обобщенных координат.
6. Назовите варианты обобщенных координат, применяемых в механике, их обозначение и размерность.
7. Чему равно число степеней свободы механической системы?
8. Дайте определение обобщенной силы.
9. Запишите выражение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате, укажите размерность обобщенной силы.
10. Сформулируйте и запишите общее уравнение динамики.

## Список рекомендуемой литературы

1. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика : учебное пособие для студентов технических вузов и колледжей / В. А. Хямяляйнен ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – 3-е изд. – Кемерово : КузГТУ, 2020. – 227 с. –

URL: <http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=91800&type=utchposob:common>. – Текст : непосредственный + электронный.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2: Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 640 с. – ISBN 978-5-8114-1021-7. – URL:

<https://e.lanbook.com/book/168475> (дата обращения: 06.06.2021). – Текст : электронный.