

В. В. Дырдин С. А. Шепелева Т. Л. Ким

Физика

***Механика. Молекулярная физика
и термодинамика***

Кемерово 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

В. В. Дырдин С. А. Шепелева Т. Л. Ким

Физика
Механика. Молекулярная физика
и термодинамика

Учебное пособие

Кемерово 2022

УДК 531(075.8)+539.1(075.8)

Рецензенты:

Заведующий кафедрой теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» профессор, доктор физико-математических наук А. Б. Гордиенко

Профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет», доктор физико-математических наук А. В. Ханефт

Дырдин, В. В. ФИЗИКА. Механика. Молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие / В. В. Дырдин, С. А. Шепелева, Т. Л. Ким ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2022. – 244 с. – ISBN 978-5-00137-294-3. – Текст : непосредственный.

В пособии каждый раздел содержит теоретический материал, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также включает задачи и тестовые задания по основным темам механики, молекулярной физики и термодинамики.

Пособие предназначено для студентов всех технических специальностей и направлений.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева.

УДК 531(075.8)+539.1(075.8)

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2022

© Дырдин В. В., Шепелева С. А.,
Ким Т. Л., 2022

ISBN 978-5-00137-294-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ..... | 7 |
| ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ..... | 9 |
| ВВЕДЕНИЕ..... | 11 |
| ГЛАВА I. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА | |
| § 1.1. Основные величины | 12 |
| § 1.2. Общие понятия механики | 12 |
| § 1.3. Кинематические характеристики движения..... | 15 |
| § 1.4. Основное уравнение динамики поступательного движения..... | 22 |
| § 1.5. Закон сохранения импульса | 27 |
| § 1.6. Энергия, работа, мощность | 29 |
| § 1.7. Энергия кинетическая | 33 |
| § 1.8. Энергия потенциальная | 34 |
| § 1.9. Закон сохранения энергии в механике | 39 |
| § 1.10. Трение..... | 40 |
| § 1.11. Вопросы для самоподготовки | 42 |
| § 1.12. Примеры решения задач..... | 43 |
| § 1.13. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения..... | 52 |
| ГЛАВА II. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА | |
| § 2.1. Кинематические характеристики вращательного движения..... | 61 |
| § 2.2. Динамика вращательного движения..... | 66 |
| § 2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела | 68 |
| § 2.4. Момент инерции твердого тела | 70 |
| § 2.5. Работа и кинетическая энергия вращающихся твердых тел | 75 |
| § 2.6. Скатывание тел с наклонной плоскости..... | 76 |
| § 2.7. Вопросы для самоподготовки | 79 |
| § 2.8. Примеры решения задач..... | 79 |
| § 2.9. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения | 86 |
| ГЛАВА III. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ | |
| | 93 |

| | |
|--|-----|
| § 3.1. Основные понятия..... | 93 |
| § 3.2. Свойства поля центральных сил..... | 93 |
| § 3.3. Закономерности движения материальной точки в поле центральных сил (на примере планет Солнечной системы)..... | 94 |
| § 3.4. Космические скорости..... | 99 |
| § 3.5. Вопросы для самоподготовки..... | 100 |
| § 3.6. Примеры решения задач..... | 100 |
| § 3.7. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения..... | 102 |
| ГЛАВА IV. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА..... | 105 |
| § 4.1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета..... | 105 |
| § 4.2. Силы инерции при ускоренном произвольном движении системы отсчета..... | 107 |
| § 4.3. Вопросы для самоподготовки..... | 110 |
| § 4.4. Пример решения задачи..... | 110 |
| § 4.5. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения..... | 111 |
| ГЛАВА V. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД..... | 115 |
| § 5.1. Механика жидкости и газа..... | 115 |
| § 5.1.1. Основные понятия гидроаэромеханики..... | 115 |
| § 5.1.2. Теорема о неразрывности струй жидкости..... | 119 |
| § 5.1.3. Теорема Бернулли..... | 120 |
| § 5.1.4. Измерение давления в текущей жидкости..... | 121 |
| § 5.1.5. Истечение идеальной жидкости из отверстия..... | 123 |
| § 5.1.6. Вязкость..... | 124 |
| § 5.1.7. Закон изменения скорости при ламинарном и турбулентном течении..... | 125 |
| § 5.1.8. Законы гидродинамического подобия..... | 127 |
| § 5.2. Движение тел в жидкостях и газах..... | 129 |
| § 5.3. Упругие тела..... | 130 |
| § 5.3.1. Типы деформаций..... | 130 |
| § 5.3.2. Упругие напряжения..... | 131 |
| § 5.3.3. Закон Гука..... | 133 |
| § 5.3.4. Сдвиг, кручение, изгиб..... | 134 |
| § 5.4. Вопросы для самоподготовки..... | 136 |
| § 5.5. Примеры решения задач..... | 136 |

| | |
|--|------------|
| § 5.6. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения | 138 |
| ГЛАВА VI. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ | |
| ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ | 141 |
| § 6.1. Постулаты специальной теории относительности..... | 141 |
| § 6.2. Преобразования Лоренца | 142 |
| § 6.3. Следствия из преобразований Лоренца..... | 144 |
| § 6.4. Релятивистский импульс | 147 |
| § 6.5. Релятивистское выражение для энергии | 148 |
| § 6.6. Вопросы для самоподготовки | 150 |
| § 6.7. Примеры решения задач..... | 150 |
| § 6.8. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения | 151 |
| ГЛАВА VII. ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН | |
| 153 | |
| § 7.1. Основные понятия | 153 |
| § 7.1.1. Свободные колебания без трения | 155 |
| § 7.1.2. Способы изображений гармонических колебаний | 158 |
| § 7.2. Сложение гармонических колебаний одного направления..... | 160 |
| § 7.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний..... | 163 |
| § 7.4. Затухающие колебания..... | 164 |
| § 7.5. Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы..... | 167 |
| § 7.6. Волны в упругой среде | 170 |
| § 7.6.1. Основные понятия | 171 |
| § 7.6.2. Уравнение плоской волны..... | 173 |
| § 7.6.3. Стоячие волны | 175 |
| § 7.7. Плотность и поток энергии | 177 |
| § 7.8. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость | 178 |
| § 7.9. Эффект Доплера..... | 180 |
| § 7.10. Ультразвук | 182 |
| § 7.11. Скорость распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде..... | 183 |
| § 7.12. Скорость распространения звуковых волн в жидкостях и газах | 185 |
| § 7.13. Вопросы для самоподготовки | 186 |
| § 7.14. Примеры решения задач..... | 187 |
| § 7.15. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения..... | 189 |
| ГЛАВА VIII. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА | |
| 195 | |

| | |
|---|-----|
| § 8.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа | 195 |
| § 8.2. Закон распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла) | 198 |
| § 8.3. Барометрическая формула. Распределение Больцмана | 202 |
| § 8.4. Средняя длина свободного пробега молекул. Среднее число столкновений | 203 |
| § 8.5. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории | 204 |
| § 8.6. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах | 205 |
| § 8.7. Внутренняя энергия системы | 207 |
| § 8.8. Теплота и работа | 208 |
| § 8.9. Первый закон термодинамики | 208 |
| § 8.10. Теплоемкость вещества | 208 |
| § 8.11. Энтропия. Второй закон термодинамики | 211 |
| § 8.12. Цикл Карно..... | 214 |
| § 8.13. Реальные газы, жидкости и твердые тела..... | 216 |
| § 8.14. Поверхностное натяжение в жидкостях | 219 |
| § 8.15. Смачивание | 221 |
| § 8.16. Давление в жидкости под искривленной поверхностью | 223 |
| § 8.17. Капиллярные явления..... | 225 |
| § 8.18. Фазовое равновесие и фазовые превращения | 226 |
| § 8.19. Тройная точка. Диаграмма состояния | 227 |
| § 8.20. Испарение и конденсация. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса..... | 228 |
| § 8.21. Вопросы для самоподготовки | 230 |
| § 8.22. Примеры решения задач..... | 231 |
| § 8.23. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения..... | 233 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ | 242 |
| 1. Основные физические постоянные..... | 242 |
| 2. Тепловые свойства твердых тел | 243 |
| 3. Тепловые свойства жидкостей..... | 243 |
| 4. Тепловые свойства газов | 243 |
| 5. Численные значения коэффициента температуропроводности α | 243 |
| СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 244 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие подготовлено на основе прочитанных авторами лекций и проведенных в Кузбасском государственном техническом университете практических занятий. Оно предназначено для студентов всех направлений и специальностей технических университетов.

Изучение курса физики позволит студентам выработать основы естественнонаучного мировоззрения, познакомиться с историей развития физики как науки, и ее основными законами, что особенно необходимо при дальнейшем изучении дисциплин общепрофессионального цикла, а также дисциплин специализации.

В пособии изложены физические законы механических видов движений и взаимодействий твердых тел, механики сплошных твердых и жидких сред, основ молекулярно-кинетической теории газов и термодинамики. При этом обращается внимание студентов на условия и границы применения изучаемых законов.

В пособии каждая тема начинается с теоретических положений, выводов основных формул, необходимых для последующих расчетов. Для понимания теоретических положений процессов приведены графические схемы и рисунки.

С целью освоения студентами методов расчета параметров систем при протекании физического процесса в пособии даны примеры решения различных задач, подобраны вопросы для самостоятельной подготовки, позволяющие студентам самостоятельно оценить степень познания сущности тех или других процессов и методик расчета их параметров.

Для закрепления изученного материала приводятся тщательно подобранные задачи и тестовые задания, которые можно использовать в качестве домашних и аудиторных заданий при изучении определенных тем.

Книга состоит из восьми глав. В первой и второй главах рассматривается механика поступательного и вращательного движения материальной точки и твердого тела, фундаментальные законы сохранения. В третьей главе описаны законы движения материальной точки в поле центральных сил на примере гравитационного поля Солнечной системы. Четвертая глава посвящена описанию законов движения тел в неинерциальных системах отсчета, движущихся по-

ступательно и вращательно. В пятой главе рассматривается физика деформации среды, составляются уравнения движения. С позиций механики сплошных сред даны характеристики течений идеальной жидкости, определены понятия ламинарного и турбулентного течения, ударных волн. Шестая глава посвящена элементам специальной теории относительности. В седьмой главе рассматриваются механические колебания и волны, а также описаны физические процессы, происходящие в колебательных системах. В восьмой главе излагаются основы молекулярной физики и термодинамики.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам доктору физико-математических наук, профессору А. Б. Гордиенко и доктору физико-математических наук, профессору А. В. Ханефту, чьи замечания и пожелания способствовали улучшению учебного пособия.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

| Обозначение | Наименование |
|------------------|--|
| x, y, z | координаты прямоугольной декартовой системы координат, м |
| r, φ, z | координаты цилиндрической системы координат |
| t, τ | время, с |
| S | путь, м |
| $\Delta\vec{r}$ | вектор перемещения, м |
| \vec{v} | вектор скорости, м/с |
| $v_{\text{ф}}$ | фазовая скорость волны, м/с |
| ν | частота, с ⁻¹ |
| ω | угловая скорость, с ⁻¹ |
| \vec{a} | вектор ускорения, м/с ² |
| $\vec{\epsilon}$ | вектор углового ускорения, с ⁻² |
| m | масса, кг |
| \vec{p} | импульс материальной точки, (кг·м)/с |
| \vec{F} | сила, Н |
| A | работа, Дж |
| E | энергия, Дж |
| $W_{\text{к}}$ | кинетическая энергия, Дж |
| U | потенциальная энергия, Дж |
| I | момент инерции, кг·м ² |
| \vec{L} | вектор момента импульса, (кг·м ²)/с |
| M | момент силы, Н·м |
| P | давление, Па |
| V | объем, м ³ |
| t | температура по шкале Цельсия, °С |
| T | термодинамическая температура по шкале Кельвина, К |
| M | молярная масса, кг/моль |
| Q | количество теплоты, Дж |
| \vec{q} | удельный тепловой поток (тепловой поток, приходящийся на единицу площади), Вт/м ² |

| Обозначения | Наименование |
|-------------|--|
| C | удельная теплоемкость, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ |
| c_V, c_P | удельная теплоемкость при постоянном объеме и давлении, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ |
| C_m | молярная теплоемкость, $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ |
| G | расход жидкости и газа, кг/с и м ³ /с |
| ν | коэффициент кинематической вязкости, м ² /с |
| η | коэффициент внутреннего трения, Па·с |
| α | коэффициент температуропроводности среды, м ² /с |
| λ | коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ |
| β | температурный коэффициент объемного расширения, К ⁻¹ |
| R | удельная теплота фазового перехода, Дж/кг |
| σ | поверхностное натяжение, Н/м |

ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука, изучающая наиболее общие закономерности и явления природы, строение и свойства материи и законы ее движения. В настоящее время известны два вида материи: вещество и поле. Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Материя находится в непрерывном движении, под которым понимают всякое изменение вообще. Пространство и время являются формами бытия материи. В основе физики лежат физические законы, которые устанавливаются на основании опытных данных. Для проверки экспериментальных данных используются гипотезы. Гипотеза, прошедшая проверку, превращается в научную теорию или закон.

Физику подразделяют на классическую и квантовую. Начало классической физики было положено Ньютоном. Ее развитие было завершено А. Эйнштейном созданием в 1905 г. специальной теории относительности. Начало квантовой физики было положено М. Планком в 1900 г., выдвинувшим гипотезу о существовании квантов. В 1897 г. был открыт электрон, что положило начало коренной ломке представлений в физике. Кризис был связан с «исчезновением» материи, но материя является объективной реальностью, следовательно, исчезать не может, может исчезать лишь наш предел знаний о ней.

Физика – это экспериментальная и теоретическая наука об окружающем нас мире.

Критерием истинности любой теории является эксперимент, соответствие научной теории экспериментальным фактам является необходимым, но недостаточным условием. Это обстоятельство всегда учитывается при корректном сопоставлении теоретических и экспериментальных результатов.

Преподавание физики является моделью процесса научного познания, что определяет место и значение эксперимента в курсе физики. Основателем экспериментального метода следует считать Галилея. Мы обязаны Галилею методологической концепцией, которой следует современный физик-исследователь.

ГЛАВА I. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1.1. Основные величины

В международной системе единиц (СИ – SI) в качестве основных приняты 7 единиц: метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела и две дополнительные: радиан и стерadian.

Эталоны этих величин выбираются следующим образом.

Метр – длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299\,792\,458$ с.

Килограмм – единица массы, равная массе цилиндра из сплава платины (90 %) и иридия (10 %) диаметром около 39 мм и такой же высоты. Плотность сплава $21,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Прототип находится в Международном бюро мер и весов в Севре под Парижем.

Секунда – единица времени, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома ¹³³Cs.

Ампер – единица силы тока, равная силе неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого круглого сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызывает между проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин – единица температуры, равная $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль – единица количества вещества, равная такому его количеству, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа ¹²C.

Кандела – единица силы света, равная силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

§ 1.2. Общие понятия механики

1. Механическое движение – это простейший вид движения, состоящий в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Раздел физики, изучающий движение, называется

механикой. Классическая механика подразделяется на статику, кинематику и динамику.

В статике рассматриваются законы сложения сил и условия равновесия. В кинematике дается математическое описание видов механического движения. В динамике исследуется влияние взаимодействия тел на параметры их механического движения.

В кинематике пользуются понятиями материальной точки, абсолютно твердого тела и абсолютно упругого и неупругого тела. Материальной точкой называют тело, формы и размеры которого несущественны в условиях данной задачи. Механическая система – система материальных точек. Абсолютно твердое тело – тело, деформациями которого в условиях данной задачи пренебрегают. Абсолютно упругое тело – тело, деформации которого подчиняются закону Гука, а тело восстанавливает свои размеры и форму после прекращения силового воздействия. Абсолютно неупругое тело – тело, сохраняющее свое деформированное состояние после прекращения воздействия силы.

2. Системы отсчета

Положение тела в пространстве можно определить только по отношению к другим телам. Система координат, используемая для определения положения тела в пространстве, плюс время образуют систему отсчета. Наиболее часто используемой является прямоугольная декартова система координат. Положение точки M в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x, y, z – декартовы координаты точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль положительного направления осей. Движение материальной точки определено, если заданы функции: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Эти функции описывают изменение координат во времени. Эти уравнения называют кинематическими уравнениями движения материальной точки. Уравнение движения можно представить по-другому в виде: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

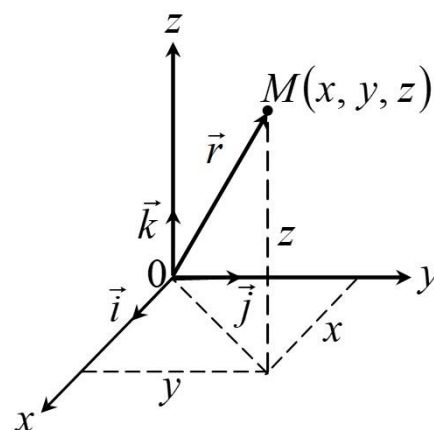


Рис. 1.1. Декартова система координат

Следует отметить, что единичные векторы ортогональны, то есть $[\vec{i}, \vec{j}] = [\vec{j}, \vec{k}] = [\vec{k}, \vec{i}] = 1, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$.

Цилиндрическая система координат

Координатами точки M в цилиндрической системе являются ρ, φ, z , а на рисунках это обозначается как $M(\rho, \varphi, z)$, где

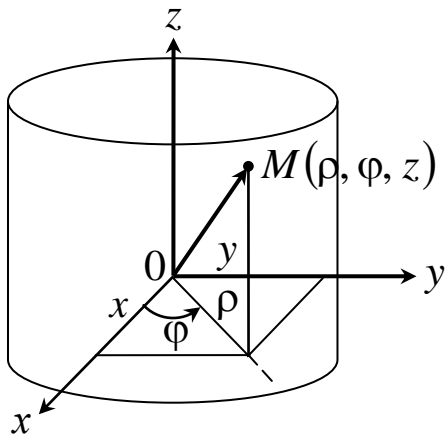


Рис. 1.2. Цилиндрическая система координат

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Координаты точки M в прямоугольной декартовой системе координат через координаты в цилиндрической системе выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi; \\ z &= z; \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (1.1a)$$

Формулы (1.1) и (1.1a) позволяют осуществить переход от цилиндрической системы координат к декартовой и обратно.

Сферическая система координат

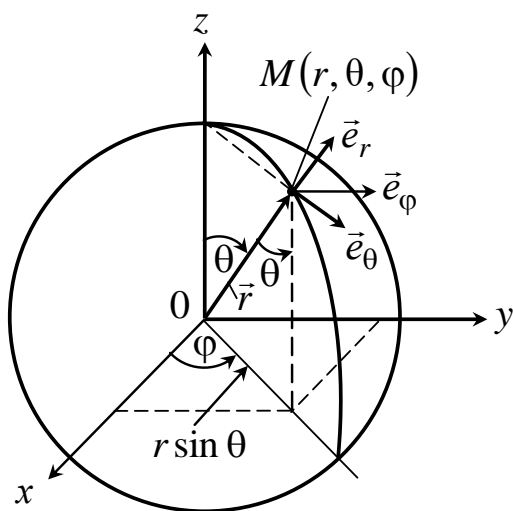


Рис. 1.3. Сферическая система координат

Точка M имеет координаты r, θ, φ , а на рисунках это обозначается как $M(r, \theta, \varphi)$, где

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= r \cos \theta; \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Формулы (1.2) позволяют рассчитать декартовы координаты по известным сферическим, а формулы (1.2а) определить сферические координаты по известным декартовым:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \\ \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2a)$$

§ 1.3. Кинематические характеристики движения

Траектория – это линия, описываемая в пространстве движущейся материальной точкой. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение. Если траектория лежит в плоскости, то движение называют *плоским*.

Длина пути S – сумма длин отрезков траектории, пройденных точкой за рассматриваемый промежуток времени. Будем считать, что t_0 – начальный момент времени, которому соответствует начальное положение точки. В силу произвольного выбора обычно принимают $t_0 = 0$.

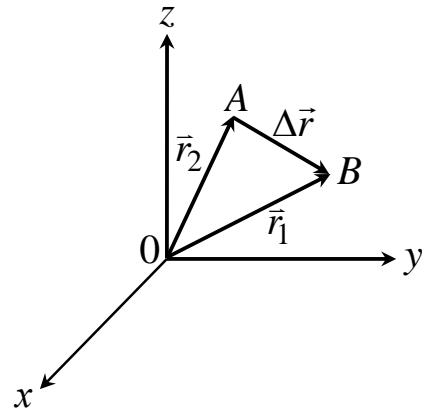


Рис. 1.4. Вектор перемещения

Вектор перемещения – вектор, проведенный из положения точки в момент времени t_1 в положение точки в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 1.4):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1) = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k},$$

где Δx , Δy , Δz – приращение координат рассматриваемой точки. Материальная точка может двигаться вдоль трех осей.

Число независимых движений называют числом степеней свободы.

Быстрота движения характеризуется скоростью. Средняя скорость перемещения движущейся точки в интервале от t до $t + \Delta t$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{r}$ – вектор перемещения за время Δt . Вектор средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ направлен так же, как и вектор $\Delta \vec{r}$, то есть вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок.

Мгновенная скорость – это первая производная от вектора перемещения по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки в момент времени t – это предел средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ при неограниченном уменьшении продолжительности интервала времени Δt :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau}.$$

Вектор \vec{v} направлен по касательной (рис. 1.5) к траектории в сторону движения.

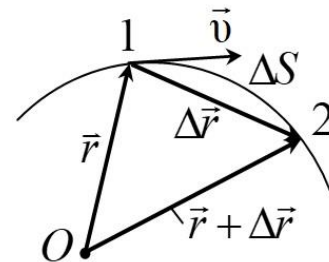


Рис. 1.5. Путь ΔS , перемещение $\Delta \vec{r}$, мгновенная скорость \vec{v}

Средняя путевая скорость – это отношение пути, пройденного точкой, ко времени:

$$\langle v_S \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

В прямоугольной декартовой системе координат вектор мгновенной скорости определяется выражением

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции мгновенной скорости на оси x, y, z , которые определяются следующими выражениями:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль вектора мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

В сферических координатах вектор мгновенной скорости равен

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta,$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ – единичные векторы по соответствующим осям.

$$\text{Учитывая, что } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i,$$

где q_i – обобщенная координата, получим

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t} = \dot{r}; \quad v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}; \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad \text{где } \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

тогда
$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)}.$$

Равномерное движение – это движение, при котором модуль скорости не изменяется со временем: $v = \frac{dS}{dt} = v_0 = \text{const}$, а путь можно при этом подсчитать по формуле $S = v_0(t_1 - t_2)$.

Если модуль скорости увеличивается со временем $\left(\frac{dv}{dt} > 0\right)$, то движение *ускоренное*. И если $\left(\frac{dv}{dt} < 0\right)$, то *замедленное*.

Средняя путевая скорость неравномерного движения точки

$$\langle v_S \rangle = \frac{\sum_i \Delta S_i}{\sum_i \Delta t_i}.$$

В случае плоского движения можно пользоваться полярными координатами \vec{r}, φ , скоростями:

- *радиальной* $\vec{v}_r = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \vec{r}$, которая направлена по радиус-вектору

и характеризует изменение полярного радиуса со временем;

- *трансверсальной* $\vec{v}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} [\vec{k} \vec{r}]$, где \vec{k} – единичный вектор,

направленный перпендикулярно плоскости движения точки, из его конца вращение вектора \vec{r} происходит против часовой стрелки.

Трансверсальная скорость направлена перпендикулярно радиус-вектору и характеризует изменение угла (рис. 1.6). Модуль вектора скорости \vec{v} точки M , совершающей плоское движение, равен

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Если за время dt полярный радиус-вектор \vec{r} очерчивает круговой сектор площадью

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

то *секторная скорость* v_σ будет равна

$$v_\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r v_\varphi.$$

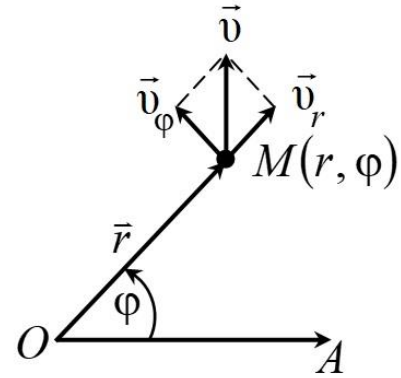


Рис. 1.6. Трансверсальная и радиальная скорости

Для характеристики быстроты изменения вектора скорости точки в механике вводится понятие *ускорения*.

Среднее ускорение точки в интервале времени от t до $t + \Delta t$

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{v}$ – приращение вектора скорости за промежуток времени Δt .

Ускорение в данный момент времени – это предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle.$$

Мгновенное ускорение равно

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Разложение вектора ускорения \vec{a} в прямоугольных декартовых координатах:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$; a_x, a_y, a_z –

проекции вектора ускорения на координатные оси.

Модуль вектора ускорения запишется в следующем виде:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}.$$

При криволинейном движении ускорение можно разложить на

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad - \text{ нормальное ускорение и}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad - \text{ тангенциальное (касательное) ускорение (рис. 1.7):}$$

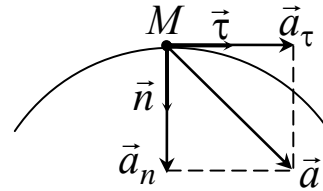


Рис. 1.7. Нормальное и тангенциальное ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенциальное (касательное) ускорение \vec{a}_τ направлено по мгновенной скорости, характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости.

Если \vec{a}_τ и \vec{v} совпадают по направлению, то $\vec{a}_\tau > 0$ и движение равноускоренное. Если \vec{a}_τ и \vec{v} противоположны по направлению, то $\vec{a}_\tau < 0$ и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение направлено по главной нормали к центру кривизны траектории, характеризует быстроту изменения направления вектора скорости точки. Полное ускорение равно

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

При прямолинейном движении точки $R \rightarrow \infty$ и $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

Модуль скорости равен

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad (1.3)$$

а координата определяется выражением

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.4)$$

Примеры движения твердых тел

1. Падение тел

Это движение без начальной скорости $v_0 = 0$. Ускорение будет

равно $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, при этом

$$v_t = gt = \sqrt{2gh}; \quad h = \frac{gt^2}{2} = \frac{V_t t}{2}.$$

2. Движение тела, брошенного вертикально вверх

На первом этапе тело движется равнозамедленно, ускорение $g = -9,81 \text{ м/с}^2$ (против оси Oy).

$$\begin{cases} h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ v = v_0 - gt \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{При этом } t_{\max} = \frac{v_0}{g} \text{ — время, за которое тело до-} \\ \text{стигает максимальной высоты;} \\ h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \text{ — максимальная высота.} \end{array}$$

3. Движение тела, брошенного горизонтально

Это движение можно представить как векторную сумму двух независимых движений: равномерного горизонтального с начальной скоростью \vec{v}_0 и равноускоренного вертикального с ускорением \vec{g} (рис. 1.8).

Следовательно, дальность полета по оси x :

$$x = S = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

так как время движения по горизонтали равно времени падения тела на землю и находится из формул

$$h = \frac{gt^2}{2};$$

$$t = \frac{S}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

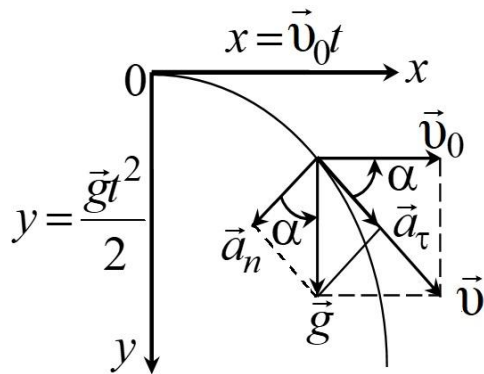


Рис. 1.8. Движение тела, брошенного горизонтально

Радиус-вектор $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$, мгновенная скорость $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gt}{v_0}$. Уравнение траектории $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$ — парабола.

4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Это движение можно представить как векторную сумму двух независимых движений (рис. 1.9): равномерного со скоростью $v_0 \cos \alpha$ в горизонтальном направлении и равнопеременного в вертикальном. Тогда до максимальной высоты подъема координата y определяется по формуле

$$y = h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнение траектории – парабола: $y = xt \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

Горизонтальная составляющая вектора мгновенной скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha.$$

Вертикальная составляющая вектора мгновенной скорости при подъеме:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt,$$

следовательно, в максимальной точке подъема она равна 0:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt_{\max} = 0,$$

где t_{\max} – время подъема на максимальную высоту.

Время подъема на максимальную высоту h_{\max} можно рассчитать по формуле

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Общее время движения

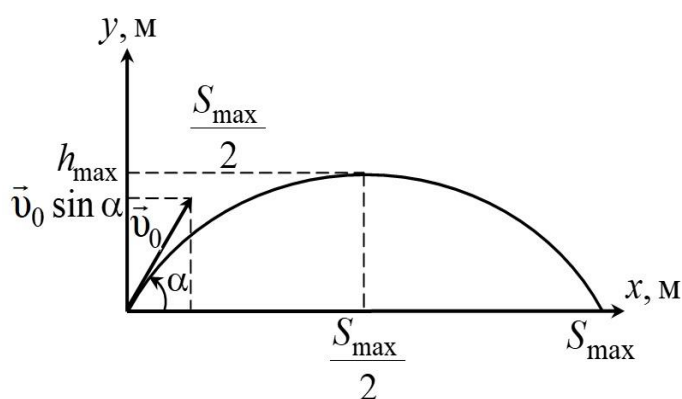


Рис. 1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

$$t = 2t_{\max} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Максимальная дальность полета

$$S_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

§ 1.4. Основное уравнение динамики поступательного движения

Динамика – это основной раздел механики, в котором изучаются законы движения тел под действием приложенных к ним сил.

Одно и то же движение относительно разных систем отсчета имеет неодинаковый характер. Например, с точки зрения наблюдателя, находящегося на карусели, мир кружится; из окна вагона – все предметы движутся поступательно, и т. д. В этой связи целесообразно рассмотреть системы отсчета.

Существуют такие системы отсчета, относительно которых движение тел оказывается особенно простым. Тела, не подверженные воздействию других тел, относительно таких систем движутся прямолинейно и равномерно. Эти системы отсчета называют инерциальными.

Их существует бесчисленное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы поступательно с постоянной скоростью, является также инерциальной.

Рассмотрим принцип относительности Галилея. Пусть система отсчета k' движется относительно k поступательно со скоростью \vec{v}_0 (рис. 1.10). Тогда координаты точки M в системах k и k' связаны преобразованиями Галилея:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t. \quad (1.5)$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих

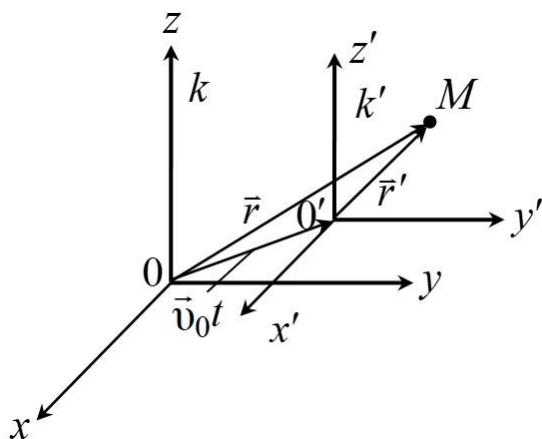


Рис. 1.10. Две инерциальные системы k и k'

системах отсчета, то есть постулируется $t = t'$.

Уравнение (1.5) для неподвижной декартовой системы координат k представим следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= x' + v_{0_x} t; & y &= y' + v_{0_y} t; \\z &= z' + v_{0_z} t; & t &= t',\end{aligned}$$

где $v_{0_x}, v_{0_y}, v_{0_z}$ – проекции скорости v_0 на координатные оси.

Следствия из преобразований Галилея:

а) закон сложения скоростей (нерелятивистский):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (1.6)$$

где $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $v' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$; $\vec{v}_0 = \text{const}$;

б) равенство ускорений, которое следует из того, что после взятия производной по времени от обеих частей равенства (1.6)

с учетом $\frac{d}{dt}(\vec{v}_0) = 0$:

$$\vec{a} = \vec{a}';$$

в) равенство сил взаимодействующих материальных точек в инерциальных системах отсчета. Если сила \vec{F} взаимодействия двух материальных точек зависит только от разности координат и разности скоростей этих точек, то она одинакова в любых инерциальных системах отсчета, то есть

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) позволяет сформулировать принцип относительности Галилея: *уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея, то есть они остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, если при переходе использовать формулы преобразований Галилея.*

На этом основании Ньютон сформулировал закон инерции, который называют **первым законом Ньютона**: *всякое тело (материальная точка) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.*

Свойство тел сохранять свою скорость в отсутствии взаимо-

действия с другими телами называется инертностью.

Мерой инертности в поступательном движении является физическая величина, называемая *инертной массой* или просто *массой тела*. Наличие у тела массы подтверждается опытами, которые показывают, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения.

Масса тела, содержащаяся в единице объема, называется плотностью. Единица массы в СИ – килограмм.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \rightarrow \langle \rho \rangle = \frac{m}{V}, [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело других тел.

Модуль этой величины определяет интенсивность воздействия, а направление совпадает с направлением ускорения, сообщаемого телу данным воздействием.

Произведение массы тела на его скорость называется количеством движения тела или импульсом тела (векторная величина):

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.8)$$

Это выражение справедливо, если скорость тела много меньше скорости света в вакууме, то есть $v \ll c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В специальной теории относительности

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Второй закон Ньютона утверждает, что скорость изменения импульса частицы (материальной точки) равна действующей на эту частицу силе \vec{F} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Если масса частицы неизменна, то

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Если на частицу (материальную точку) действуют несколько

сил (n штук) и они действуют независимо друг от друга, второй закон Ньютона можно записать уравнением

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m \vec{a}_i = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i = m \vec{a}, \quad (1.9)$$

где полное ускорение тела определяется векторной (геометрической) суммой всех действующих сил. Единица измерения силы в СИ – ньютон: $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$, то есть это сила, которая телу массой $m = 1 \text{ кг}$ сообщает ускорение $a = 1 \text{ м}/\text{с}^2$.

Изменение импульса частицы равно импульсу силы. Если сила зависит от времени, то есть $\vec{F} = \vec{f}(t)$, то изменение импульса частицы будет равно

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'.$$

Третий закон Ньютона: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 1.11):*

$$|\vec{F}_{ik}| = |\vec{F}_{ki}|; \quad \vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki},$$

где \vec{F}_{ik} – сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны k -й, а \vec{F}_{ki} – это сила, действующая на k -ю материальную точку со стороны i -й.

Силы \vec{F}_{ik} и \vec{F}_{ki} приложены к разным материальным точкам, поэтому не могут уравниваться. Отсюда понятно, что если лошадь тянет телегу с силой 2000 Н, то телега тянет лошадь также с силой 2000 Н, но в другую сторону. Из третьего закона Ньютона следует, что *в любой механической системе геометрическая сумма всех внутренних сил равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0,$$

где n – число материальных точек, входящих в систему, а $\vec{F}_{ii} = 0$.



Рис. 1.11. Схема сил к третьему закону Ньютона

Действие внешних сил на тело можно характеризовать *главным вектором внешних сил*, который равен их геометрической сумме, то есть $\vec{F}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}$, где $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – это внешняя сила, приложенная к телу.

Из второго и третьего законов Ньютона следует:

1) для твердого тела $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$ – закон изменения импульса;

2) $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m\vec{v}_i \right) = \vec{F}^{\text{внеш}}$ – закон изменения импульса для системы материальных точек;

мы материальных точек;

3) $\frac{d}{dt} (m\vec{v}_c) = \vec{F}^{\text{внеш}}$ или $m\vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внеш}}$ – закон движения центра

(масс) инерции механической системы, где \vec{v}_c и \vec{a}_c – скорость и ускорение центра масс механической системы.

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, а действующая сила равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

Если рассматриваемая система – абсолютно твердое тело, которое движется поступательно, то скорости \vec{v}_i его всех точек и центра масс \vec{v}_c одинаковы. То же можно сказать и относительно ускорения точек тела. Таким образом, уравнение

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}_c) = \vec{F}^{\text{внеш}} \quad \text{или} \quad m\vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внеш}} \quad (1.10)$$

является основным уравнением динамики поступательного движения твердого тела.

Если m – суммарная масса системы, то есть

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i,$$

то радиус-вектор центра масс \vec{r}_c , задающий его положение в выбранной системе отсчета, определяется следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}, \quad (1.11)$$

а скорость центра масс определяется выражением

$$\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}. \quad (1.12)$$

Проекция \vec{r}_c на ось x определяется выражением

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Для замкнутых систем, то есть для систем, на которые не действуют внешние силы, будем иметь

$$\vec{p} = m\vec{v}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots = \text{const}, \quad (1.13)$$

то есть центр масс движется равномерно и прямолинейно.

§ 1.5. Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы. Импульс \vec{p} тела или системы материальных точек не изменяется с течением времени:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_i = \text{const}, \quad (1.14)$$

1) если система замкнутая, то внешние силы на систему не действуют;

2) если система открытая, но главный вектор внешних сил равен нулю, $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$;

3) если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция на ту же ось вектора импульса системы не изменяется со временем. Например, проекция вектора силы тяжести $m\vec{g}$ на ось x равна нулю (рис. 1.12), следовательно, проекция импульса тела на эту ось есть величина постоянная.

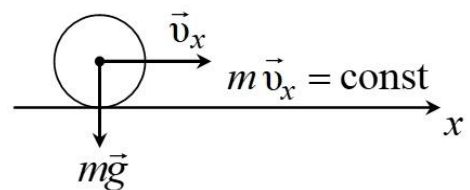


Рис. 1.12. Закон сохранения проекции импульса

Движение тела переменной массы

Обычно считается, что $m = \text{const}$, то есть масса тела не зависит от скорости. Но масса тела может изменяться за счет обмена веществом между телом и внешней средой. Примером движения тела переменной массы является полет ракеты на активном участке траектории. Продукты сгорания топлива выбрасываются через сопло

двигателя, а масса ракеты постепенно уменьшается.

Изменение импульса \vec{p} системы при этом составляет

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} - \vec{v}_1 dm,$$

где m , \vec{v} – масса и скорость тела в момент времени t ; dm , $d\vec{v}$ – их изменение за dt ; \vec{v}_1 – скорость отделяющихся частиц.

Приведем подобные и отбросив бесконечно малую величину второго порядка $dmd\vec{v}$, получим выражение

$$d\vec{p} = md\vec{v} + (\vec{v} - \vec{v}_1)dm = md\vec{v} - \vec{u}dm,$$

где $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ – скорость отделяющихся частиц по отношению к телу переменной массы.

Разделим правую и левую часть этого выражения на dt и, учитывая основное уравнение динамики поступательного движения твердого тела

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}},$$

получим уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{u} \frac{dm}{dt}, \quad (1.15)$$

которое определяет закон динамики движения тела переменной массы.

Векторная величина $\vec{F}_p = \vec{u} \frac{dm}{dt}$ называется реактивной силой.

Она характеризует механическое воздействие на ракету отделяющихся от нее частиц.

Если в уравнении Мещерского не учитывать действие внешних сил, то есть $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$, то $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt}$. Если начальная скорость ракеты равна нулю (на старте), а траектория – прямая линия, то \vec{v} и \vec{u} направлены в противоположные стороны.

Тогда

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}.$$

Откуда получаем

$$dv = -u \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя данное выражение $\int_0^{v_{\max}} dv = - \int_{m_0}^{m_1} u \frac{dm}{m}$, находим,

$$\text{что } v_{\max} = - \int_{m_0}^{m_1} u \frac{dm}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_1} \text{ или } v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m'}, \quad (1.16)$$

где $m_1 = m_0 - m'$ – конечная масса ракеты; m' – масса отделяющихся частиц топлива и ступеней ракеты; v_{\max} – максимальная скорость ракеты.

Выражение (1.16) называется уравнением Циолковского. Учитывая, что максимальная скорость газов не превышает 5 км/с, для достижения ракетой первой и второй космических скоростей необходимо, чтобы $\ln \frac{m_0}{m_1} > 1$, то есть изменение массы ракеты должно быть существенным.

§ 1.6. Энергия, работа, мощность

Импульс тела является динамической характеристикой тела, но не может служить универсальной мерой простых и сложных видов движения. Например, если цилиндр равномерно вращается вокруг неподвижной оси симметрии, то векторная сумма импульсов всех его материальных точек равна нулю при любой угловой скорости ω , следовательно, импульс тела не может быть мерой вращательного движения.

Единой мерой различных форм движения может служить *энергия*. Она характеризует систему с точки зрения количественных и качественных превращений движения. Для оценки различных форм движения вводятся энергии: *механическая, внутренняя, электромагнитная*. Механическая энергия разделяется на *кинетическую и потенциальную*.

Изменение энергии тела под действием силы называется работой. Работу, совершенную постоянной силой \vec{F} при перемещении тела на расстояние S (рис. 1.13), можно рассчитать по формуле

$$A = FS \cos \alpha = F_{\tau} S, \quad (1.17)$$

где $F_\tau = F \cos \alpha$.

При малом перемещении путь $dS = dr$ равен модулю перемещения, а элементарную работу можно рассчитать:

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = F dS \cos \alpha,$$

где \vec{F} – сила; $d\vec{r}$ – перемещение; dS – элементарный путь; $(\vec{F} d\vec{r})$ – скалярное произведение векторов \vec{F} и $d\vec{r}$.

Полная работа силы \vec{F} на пути S равна

$$A = \int_0^r F \cos \alpha dr = \int_0^r F_\tau dr, \quad (1.18)$$

где $F_\tau = F \cos \alpha$.

Если угол $\alpha = 90^\circ$, то сила F лишь искривляет траекторию, как, например, центростремительная сила, а работа ее равна нулю.

Если $\alpha < 90^\circ$, то работа силы $A > 0$ и F – движущая сила тела; если $\alpha > 90^\circ$, то работа силы $A < 0$, F есть сила сопротивления (сила трения).

Если на тело, движущееся поступательно, одновременно действует несколько сил, то при двух будем иметь следующее выражение для элементарной работы:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = F_1 \cos \alpha_1 dS + F_2 \cos \alpha_2 dS.$$

Сила \vec{F} , действующая на материальную точку или поступательно движущееся тело, называется *консервативной* или *потенциальной*, если работа, совершаемая этой силой при перемещении точки (тела) из одного произвольного положения 1 в другое 2 (рис. 1.14), не зависит от формы траектории. Например, работа консервативной силы при перемещении материальной точки по пути 1–a–2 равна работе перемещения по пути 1–b–2, а также по любому другому пути: $A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}$.

Тогда элементарную работу консервативной силы можно вы-

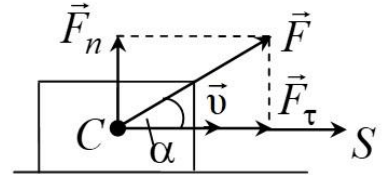


Рис. 1.13. Схема действия силы \vec{F} на тело

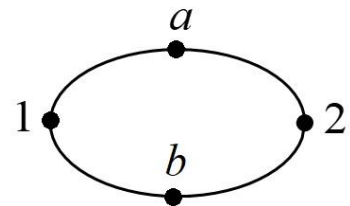


Рис. 1.14. Схема перемещения материальной точки по замкнутой траектории

числить по формуле $\delta A = (\vec{F}d\vec{r}) = Fdr \cos \alpha$.

При перемещении по замкнутой траектории работа консервативной силы всегда равна нулю:

$$\oint_L (\vec{F}d\vec{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = 0. \quad (1.19)$$

Пример консервативных сил – это центральные силы, тяжести, электростатические, упругости.

Действительно, работа силы тяжести не зависит от формы пути, по которому движется тело, а определяется только разностью высот начального и конечного положения тела.

Центральная сила – это такая сила, которая всегда направлена к одной и той же точке, называемой центром, и зависит только от расстояния до этой точки. Примером такой силы служит гравитационная сила, с которой Солнце действует на планеты солнечной системы, в результате чего они вращаются вокруг него по своим орбитам. Работа центральной силы при перемещении планеты по орбите из положения 1 в положение 2 равна

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{M_c m}{r^2} \cos \alpha dr, \quad (1.20)$$

где $d\vec{r}$ – перемещение планеты, а $\vec{F}(r)$ – центральная сила, зависящая от расстояния до планеты.

Из выражения (1.20) следует, что работа центральной силы не зависит от формы пути, а только от расстояний r_1 и r_2 , на которые удалена планета в положениях 1 и 2 от центра.

Необходимо также иметь в виду, что работа, вычисленная по формуле (1.20), учитывает только относительное перемещение точки (планеты) относительно центра Солнца и не зависит от перемещения самого центра. В случае движения и центра, и точки при вычислении работы центр можно считать неподвижным.

Все силы, не удовлетворяющие соотношению (1.19), называются неконсервативными. К ним относятся диссипативные силы. Это силы трения, наблюдающиеся при скольжении или качении одного тела по поверхности другого. К диссипативным силам следует отнести также силы сопротивления, возникающие при движении твердых тел в жидкости или газе. Эти силы всегда направлены

в противоположную сторону относительно скорости движения тела, поэтому работа этих сил отрицательна и составляет часть работы движущей силы.

Необходимо отметить, что в ряде случаев сила трения может быть положительной.

Рассмотрим рис. 1.15. Тело B движется со скоростью \vec{v} . А тело C при этом скользит по телу B со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ в обратную сторону относительно направления движения тела B . Если $|\vec{v}| > |\vec{v}_{\text{отн}}|$, то тело C будет перемещаться с телом B в том же направлении со скоростью $(v - v_{\text{отн}})$, то есть в том же направлении, в котором действует и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

В этом случае сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ совершает положительную работу. Но надо учитывать, что для замкнутой системы полная работа силы трения всегда отрицательна.

По третьему закону Ньютона на тело B также действует сила трения, работа которой отрицательна и она больше работы силы трения, приложенной к телу C .

К *неконсервативным силам* относятся также гироскопические силы, возникающие при вращательном движении, зависящие от скорости тела и направленные перпендикулярно ей. Поскольку угол равен 90° , то работа этих сил всегда равна нулю при любом перемещении тела. Примером гироскопической силы является сила Лоренца, которая действует на заряд, движущийся перпендикулярно вектору магнитной индукции. В механике условно к гироскопическим силам можно отнести силу Кориолиса, которая появляется в уравнении движения, записанном относительно движущегося центра неинерциальной системы отсчета.

Мощность характеризует скорость совершения работы силой, а для произвольной силы вычисляется по формуле

$$N = \frac{\delta A}{dt} = F \cos \alpha \frac{dr}{dt} = Fv \cos \alpha = F_{\tau} v = (\vec{F} \vec{v}). \quad (1.21)$$

Средняя мощность может быть вычислена:

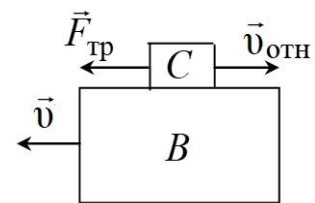


Рис. 1.15. Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ между двумя телами B и C

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}, \quad (1.22)$$

где A – работа, совершенная силой за время t .

§ 1.7. Энергия кинетическая

Энергия кинетическая – это энергия движущегося тела, она измеряется работой при его полной остановке.

Например: пусть тело 1 движется со скоростью \vec{v} и начинает взаимодействовать с телом 2 и при этом тормозится. Следовательно, тело 1 действует на тело 2 с некоторой силой \vec{F} и на малом перемещении $d\vec{r}$ совершает элементарную работу:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}.$$

По третьему закону Ньютона на тело 1 действует сила $(-\vec{F})$, которая по второму закону Ньютона равна $-\vec{F}_\tau = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. Следовательно, элементарная работа δA , совершаемая силой $(-\vec{F})$, определяется выражением

$$\delta A = -m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r},$$

а полная работа при остановке тела 1 равна

$$A = -\int_v^0 m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_0^v m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = \int_0^v m \vec{v} d\vec{v} = \int_0^v m v dv = \frac{mv^2}{2} = W_k. \quad (1.23)$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему.

Теорема Кёнига: *кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий движения ее центра масс и кинетической энергии движения материальных точек относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы:*

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (1.24)$$

где m – масса всей системы; v_c – скорость поступательного движе-

ния центра масс. При выводе данных формул предполагалось, что движение происходит в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы пользоваться законами Ньютона. Необходимо иметь в виду, что скорость v_i , а следовательно, и кинетическая энергия W_k в разных инерциальных системах отсчета будут неодинаковы и отличаются на постоянную величину.

§ 1.8. Энергия потенциальная

Если на систему материальных точек или тело действуют консервативные силы, то можно ввести понятие потенциальной энергии системы. Какое-либо положение системы примем за нулевое. Тогда работу, совершаемую консервативными силами при переходе системы из положения 1 в нулевое, называют потенциальной энергией системы в положении 1. А сама работа, совершаемая этими силами, равна уменьшению энергии системы:

$$A_{1-0} = -\Delta U = U_1 - U_0. \quad (1.25)$$

Следовательно, потенциальная энергия зависит только от координат исходного и конечного положений и не зависит от пути перехода. Это следует из свойства консервативных сил. Она не зависит от того, какое положение принято за нулевое. Величина ее при разных нулевых положениях изменяется на постоянную величину. В принципе вместо абсолютных значений потенциальной энергии системы нужно иметь в виду ее разность в двух положениях. Следовательно, потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. При переходе системы из положения 1 в положение 2 работа A_{1-2} называется *потенциальной энергией* (U). Таким образом, потенциальная энергия обусловлена консервативными силами и зависит только от расположения частей системы.

В качестве примера рассчитаем потенциальную энергию тела в однородном поле силы тяжести (рис. 1.16). Пусть тело находится на высоте h и перемещается на уровень, принятый нами за нулевой, то

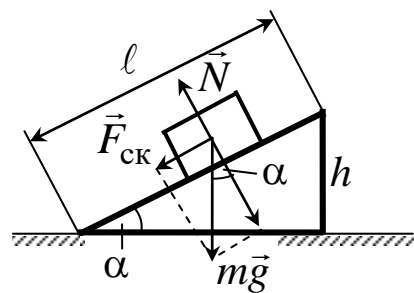


Рис. 1.16. Схема действия сил на тело, находящееся на наклонной плоскости

есть $h = 0$. Тогда потенциальная энергия U равна $U = mgh$.

При перемещении тела по наклонной плоскости к ее основанию потенциальная энергия равна работе проекции силы тяжести $\vec{F}_{\text{ск}}$:

$$U = mgl \sin \alpha = mgh, \quad (1.26)$$

то есть совпадает с предыдущим выражением.

Рассчитаем потенциальную энергию растянутой пружины. При растяжении возникают упругие силы, являющиеся центральными, а энергию называют потенциальной энергией растянутой пружины. Растяжение обозначим $x = x_1 - x_0$, где x_1 и x_0 – координаты начала пружины в конечном и исходном состояниях. Тогда упругая сила $F = -kx$, при возвращении в исходное состояние сила F совершает работу:

$$A = \int_{x_1}^{x_0} F dx = - \int_{x_1}^{x_0} kx dx = \int_{x_0}^{x_1} kx dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Если потенциальная энергия пружины в исходном состоянии равна нулю, то при растяжении ее на $(x_1 - x_0)$, то есть в конечном состоянии, она определяется выражением

$$U = A = \frac{kx^2}{2}. \quad (1.27)$$

Относительно разных точек отсчета $U = mgh + U_0$, то есть потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. Практически мы определяем изменение потенциальной энергии системы.

Рассмотрим потенциальную энергию гравитационного притяжения двух материальных точек. Сила притяжения

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.28)$$

где G – гравитационная постоянная; M и m – массы материальных точек; r – расстояние между их центрами масс (для тел).

Сила гравитационного притяжения является центральной, следовательно, консервативной.

Если точка M неподвижна, а m перемещается в ее поле, то

работа перемещения массы m из бесконечности в данную точку на расстояние r может быть определена по формуле

$$A = \int_r^{\infty} G \frac{Mm}{r^2} dr = G \frac{Mm}{r}. \quad (1.29)$$

Если работа совершается гравитационными силами, то эта работа численно равна убыли потенциальной энергии, то есть

$$A = U_{\infty} - U_r.$$

Примем потенциальную энергию на бесконечности равной нулю, тогда в любом другом положении она будет меньше, то есть

$$U = -G \frac{Mm}{r}. \quad (1.30)$$

Поле действующих сил называется потенциальным, если его можно описать некоторой функцией $U = U(x, y, z, t)$, то есть зависящей от координат и времени. При этом ее частные производные по координатам определяют проекции силы $\vec{F} : F_x, F_y, F_z$ на декартовые оси:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad F_y = -\frac{dU}{dy}; \quad F_z = -\frac{dU}{dz}. \quad (1.31)$$

Функция U называется потенциалом, а $\vec{i} \frac{dU}{dx}, \vec{j} \frac{dU}{dy}, \vec{k} \frac{dU}{dz}$ – проекции градиента потенциала по координатам x, y и z . Градиент потенциала является вектором, направленным от меньшего потенциала к большему, а проекции сил F_x, F_y, F_z направлены в обратном направлении, поэтому в этих формулах стоит знак «минус». В случае потенциального силового поля сила

$$\vec{F} = -\nabla U = -\text{grad}U, \quad (1.32)$$

где ∇ – оператор Гамильтона, равный $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

Это выражение справедливо для стационарных полей $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z)$, то есть когда их параметры не зависят от времени. Потенциал U имеет размерность работы

$$[U] = \text{Дж} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Формулируя закон тяготения (1.28), мы предполагали, что масса тела, входящая в этот закон, есть та же масса, которая является мерой инерции, но без дополнительных исследований это предположение совершенно не обоснованно.

Правильнее считать, что тело обладает свойством тяготения, в соответствии с результатами опытов. Мерой этого свойства является масса *тяготения* тела, или *гравитационная* масса, которая отличается от *инертной* массы, но исследования убеждают нас в том, что эти величины пропорциональны друг другу и специальным выбором единиц всегда можно сделать их равными друг другу, как обычно и делается в физике.

Вывод о пропорциональности инертной массы и массы тяготения тела можно сделать на основании опыта, показывающего, что ускорение свободного падения для всех тел различной массы одинаково (в данном месте). Тело обладает свойством инертности, которое измеряется величиной инертной массы $m_{\text{и}}$, и свойством тяготения, которое измеряется величиной гравитационной массы $m_{\text{г}}$. Тогда силу тяготения можно записать так:

$$P = km_{\text{г}}, \quad (1.33)$$

где k – некоторая размерная постоянная величина (сила тяготения к Земле пропорциональна массе тяготения этого тела).

С другой стороны, свободное падение тела есть не что иное, как движение тела под действием силы тяготения. Поэтому по второму закону динамики можно записать

$$P = m_{\text{и}}g, \quad (1.34)$$

где g – ускорение в поле силы тяжести, или, приравнивая формулы (1.33) и (1.34), получаем

$$g = k \frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}. \quad (1.35)$$

Так как ускорение g одинаково для всех тел, не зависит от материала тела и его размеров, то, следовательно, инертная масса $m_{\text{и}}$ пропорциональна массе тяготения $m_{\text{г}}$. Если за единицу инертной массы принять килограмм (кг), то можно так выбрать величину единицы массы тяготения, чтобы величина k равнялась $9,81 \text{ м/с}^2$.

При таком выборе единиц величина гравитационной массы будет в точности равна величине инертной массы одного и того же тела.

Ньютон для проверки пропорциональности между инертной массой и массой тяготения произвел опыты с маятниками из различного материала. Он определял период колебаний маятников одинаковой длины, но из различных материалов. Из теории известно, что период колебаний математического маятника зависит от его длины l , постоянной k (в формуле (1.33)) и от отношения масс инертной и гравитационной следующим образом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{lm_{\text{и}}}{km_{\text{г}}}}. \quad (1.36)$$

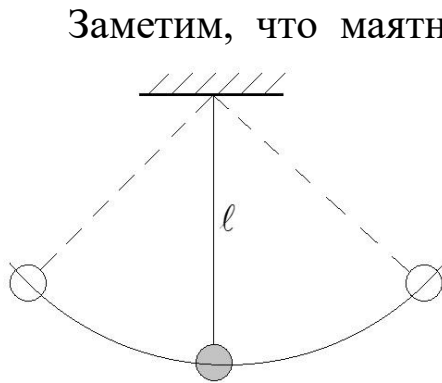


Рис. 1.17. Схема колебаний математического маятника

Заметим, что маятник называют математическим, когда линейные размеры тела, подвешенного на нити, очень малы по сравнению с длиной нити, а масса нити ничтожно мала по сравнению с массой подвешенного тела (рис. 1.17). Опыт показывает, что для любых математических маятников период колебаний пропорционален только квадратному корню из его длины \sqrt{l} .

Следовательно, величина $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}$ остается постоянной: $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = \text{const.}$

При указанном ранее выборе единиц величина $k = g$, а отношение $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = 1$, поэтому формула (1.36) может быть записана:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.37)$$

Опыты Ньютона с большей точностью были повторены Бесселем. В начале прошлого столетия они были проверены еще раз с применением более точных методов и более совершенных приборов академиком Крыловым.

Очевидно, что на основании результатов измерения периода колебаний маятника определенной длины можно найти величину ускорения свободного падения или величину силы тяготения

в данном месте. Большая точность при измерении периода колебаний маятника обеспечивает значительную точность измерения силы тяготения в данном месте.

Замечая различие в периоде колебаний одного и того же маятника в различных местах земной поверхности, можно отметить изменения силы тяготения от места к месту. Оказывается, вследствие неоднородности поверхности земной коры сила тяготения изменяется от места к месту даже на одной и той же широте. По изменению силы тяготения на определенной площади геологи судят об изменениях плотности поверхности земной коры и на основании этих данных выводят заключение о наличии полезных ископаемых. Это и есть так называемая гравитационная разведка полезных ископаемых.

Значение в физике закона пропорциональности гравитационной и инертной масс было оценено только в теории относительности, где он носит название закона эквивалентности гравитационной и инертной масс данного тела, и из него сделаны важные выводы о том, что в любом достаточно малом участке пространства всегда можно указать такую ускоренную систему отсчета, для которой поле сил тяжести отсутствует.

§ 1.9. Закон сохранения энергии в механике

Если на систему материальных точек действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы $E = W_k + U$ сохраняется, то есть

$$E = E_1 = E_2 = \text{const}, \quad (1.38)$$

где E_1 и E_2 – полные значения механической энергии системы материальных точек в положениях 1 и 2, то есть в системе с консервативными силами полная механическая энергия остается неизменной. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, но полный запас механической энергии остается постоянным. Это положение называется законом сохранения энергии в механике.

Суммарная работа всех приложенных к материальной точке сил затрачивается на приращение кинетической энергии этой точки, а работа консервативных сил идет на убыль ее потенциальной энергии.

Пусть в системе наряду с консервативными силами действуют

диссипативные силы. Работа всех сил при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 будет равна

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}}.$$

Эта работа идет на увеличение кинетической энергии системы, то есть

$$W_{к2} - W_{к1} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}}.$$

Откуда

$$(W_{к2} + U_2) - (W_{к1} + U_1) = A_{12}^{\text{дис}},$$

то есть

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дис}}, \quad (1.39)$$

где $E = W_{к} + U$ – полная механическая энергия системы.

Изменение механической энергии системы равно работе диссипативных сил. Следовательно, при наличии диссипативных сил механическая энергия системы не постоянна. К диссипативным силам относятся: силы трения, силы сопротивления среды. Работа этих сил отрицательна. Механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их нагреву. Такой процесс называется диссипацией энергии.

Закон сохранения энергии имеет всеобщий характер. Он применим ко всем без исключения процессам, происходящим в природе. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда постоянно, энергия может только переходить из одной формы в другую.

В состоянии устойчивого равновесия замкнутой системы ее потенциальная энергия имеет минимум, а в состоянии неустойчивого равновесия – максимум.

§ 1.10. Трение

Трение подразделяется на внешнее и внутреннее. Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения) или при попытках вызвать такое перемещение (трение покоя). Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа).

Различают также сухое и жидкое (или вязкое) трение. Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки (то есть жидкой или газообразной прослойки) между ними. Жидким называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды.

Сухое трение подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Поддействуем на тело (например, брусок), лежащее на неподвижной опоре, внешней силой \vec{F} , постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным. Это указывает на то, что внешняя сила \vec{F} уравнивается некоторой силой $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к трущимся поверхностям противоположно силе \vec{F} . Сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ и есть *сила трения покоя*. Она обусловлена действием опоры, на которой лежит тело, и принимает значение, равное модулю силы \vec{F} . Когда модуль внешней силы (а следовательно, и модуль силы трения покоя) превысит значение \vec{F}_0 , тело начнет скользить по опоре – трение покоя сменяется трением скольжения.

Величина \vec{F}_0 представляет собой максимальное значение силы трения покоя. Сама эта сила, в зависимости от модуля внешней силы, принимает одно из значений в интервале от нуля до \vec{F}_0 .

Модуль силы трения скольжения приблизительно равен \vec{F}_0 и обычно зависит от скорости скольжения. С увеличением скорости сила трения скольжения вначале немного убывает, а затем начинает возрастать.

Опытным путем установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления F_n , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_0 = \mu_0 F_n.$$

Безразмерный множитель μ_0 называется *коэффициентом трения покоя*. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Аналогичная зависимость имеет место и для силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n. \quad (1.40)$$

Здесь μ – коэффициент трения скольжения, который является функцией скорости.

Трение качения возникает между шарообразным или цилиндрическим телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения также подчиняется закону (1.40), но коэффициент трения в этом случае бывает значительно меньшим, чем при скольжении.

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует сила, тормозящая его движение. Эта сила складывается из силы вязкого трения и силы сопротивления среды. Слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, движутся вместе с телом как одно целое. Сила вязкого трения возникает между этими и внешними относительно них слоями среды. Давление на различные участки движущегося тела оказывается неодинаковым. Результирующая сил давления имеет составляющую, направленную противоположно скорости. Эта составляющая и есть сила сопротивления среды. При больших скоростях сила сопротивления среды может во много раз превосходить силу вязкого трения. Суммарную силу, обусловленную вязким трением и сопротивлением среды, принято условно называть *силой трения*.

Для определенной таким образом силы трения характерно то, что она обращается в ноль вместе со скоростью. При небольших скоростях сила трения растет пропорционально скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k_1 \vec{v}. \quad (1.41)$$

Знак «минус» указывает на то, что сила направлена противоположно скорости. Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от вязкости среды.

При достижении скорости тела определенной величины линейная зависимость (1.41) переходит в квадратичную:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k_2 \vec{v}^2 \vec{e}_v, \quad (1.42)$$

где \vec{e}_v – орт скорости.

§ 1.11. Вопросы для самоподготовки

1. Как связаны компоненты скорости и ускорения материаль-

ной точки с производными ее координат по времени?

2. Какое движение называется равномерным?
3. Может ли криволинейное движение быть равномерным?
4. В каких системах отсчета справедливы законы Ньютона?
5. Какие формулировки второго закона Ньютона вы знаете?
6. Сформулируйте законы сохранения импульса и механической энергии. Каковы условия выполнимости этих законов?
7. Какой удар называют упругим? Какие законы сохранения выполняются для абсолютно упругого удара?
8. Какие силы называются консервативными? Диссипативными?
9. Назовите виды механической энергии. Принимают ли кинетическая и потенциальная энергии абсолютное значение?
10. Являются ли силы трения консервативными?

§ 1.12. Примеры решения задач

Пример 1.1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Для момента $t_1 = 2$ с определите координату точки x , мгновенные скорость v_x и ускорение a_x . Определите среднюю скорость $\langle v_x \rangle$ за первые две секунды движения и среднее ускорение $\langle a_x \rangle$ за это время.

Решение. Необходимо определить параметры движения по кинематическому уравнению (прямая задача кинематики). Подставляя в уравнение движения время, получаем координаты в начальный момент времени x_0 и x_1 (при $t_1 = 2$ с):

$$x_0 = A = 4 \text{ м};$$

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^3 = (4 + 2 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) = 4 \text{ м}.$$

Мгновенная скорость точки равна

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Подставляя в уравнение скорости время, получаем мгновенные скорости в начальный момент времени v_{x_0} и v_{x_1} (при $t_1 = 2$ с):

$$v_{x_0} = B = 2 \text{ м/с};$$

$$v_{x_1} = B + 3Ct_1^2 = 2 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = -4 \text{ м/с.}$$

Знак «минус» показывает, что в момент времени $t_1 = 2$ с направление вектора скорости не совпадает с положительным направлением оси x .

Ускорение

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct.$$

Подставляя в уравнение ускорения время, получаем мгновенное ускорение при $t_1 = 2$ с:

$$a_{x_1} = 6Ct_1 = 6(-0,5)2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» в этом случае указывает на то, что в заданный момент времени ускорение имеет противоположное направление оси x .

Средняя скорость перемещения за две секунды

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = 0.$$

Среднее ускорение за две секунды

$$\langle a_x \rangle = \frac{v_{x_1} - v_{x_0}}{t_1 - t_0} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти среднюю путевую скорость $\langle v_S \rangle$, необходимо найти путь за две секунды. Для этого нужно найти точку поворота (то есть координату в момент времени, когда скорость равна нулю):

$$v_{x_{\text{пов}}} = B + 3Ct_{\text{пов}}^2 = 0;$$

$$t_{\text{пов}} = \sqrt{-\frac{B}{3C}} = \sqrt{-\frac{2}{3(-0,5)}} = 1,155 \text{ с};$$

$$x_{\text{пов}} = A + Bt_{\text{пов}} + Ct_{\text{пов}}^3 = 5,540 \text{ м};$$

$$S = |x_{\text{пов}} - x_0| + |x_1 - x_{\text{пов}}| = 1,540 + 1,540 = 3,080 \text{ м};$$

$$\langle v_S \rangle = \frac{S}{t_1 - t_0} = 1,540 \text{ м/с.}$$

Пример 1.2. Ускорение материальной точки, движущейся вдоль оси x , изменяется по закону: $a_x(t) = A + Bt$, где $A = 1 \text{ м/с}^2$, $B = -4 \text{ м/с}^3$. Начальная скорость $v_{x0} = 6 \text{ м/с}$, начальная координата $x_0 = 4 \text{ м}$. Запишите уравнение движения точки, определите ее координату, скорость, перемещение и пройденный точкой путь через $t_1 = 3 \text{ с}$ после начала движения.

Решение. Определение вида кинематического уравнения движения по известному параметру (в данном случае это ускорение) является обратной задачей кинематики. Находим вид зависимости скорости точки от времени:

$$v_x(t_1) = v_{x0} + \int_0^{t_1} a_x(t) dt = v_{x0} + At_1 + \frac{Bt_1^2}{2}$$

и вид зависимости координаты точки от времени (кинематическое уравнение движения):

$$x_1 = x_0 + \int_0^{t_1} v_x(t) dt = x_0 + v_{x0}t_1 + \frac{At_1^2}{2} + \frac{Bt_1^3}{6}.$$

Подставляя в записанные уравнения значение времени $t = 3 \text{ с}$, получаем значения скорости и координаты:

$$v_{x1} = 6 + 1 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 9}{2} = -9 \text{ (м/с);}$$

$$x_1 = 4 + 6 \cdot 3 + \frac{1 \cdot 9}{2} - \frac{4 \cdot 27}{6} = 8,5 \text{ (м).}$$

Модуль вектора перемещения $|\Delta \vec{r}| = \Delta x = x_1 - x_0 = 4,5 \text{ м}$.

Поскольку начальная скорость точки положительна, а конечная – отрицательна, это значит, что скорость в процессе движения меняет знак и путь не равен модулю вектора перемещения. Решая

уравнение $v_x(t) = v_{x0} + At_{\text{пов}} + \frac{Bt_{\text{пов}}^2}{2} = 0$ относительно времени

и учитывая, что время положительно, определяем его значение: $t_{\text{пов}} = 2 \text{ с}$, при котором скорость обращается в ноль.

Тогда *пройденный путь* равен

$$S = |x_{\text{пов}} - x_0| + |x_1 - x_{\text{пов}}| = 12,84 \text{ м.}$$

Пример 1.3. Для случая, представленного на рис. 1.18, записать:

1) кинематическое уравнение движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки A ;

2) ее уравнения движения в проекциях на оси x и y : $x = x(t)$ и $y = y(t)$;

3) уравнение траектории $y = y(x)$.

На рисунке изображены координатные оси, указано начальное положение точки A , начальная скорость \vec{v}_0 и ускорение \vec{g} , равное ускорению свободного падения.

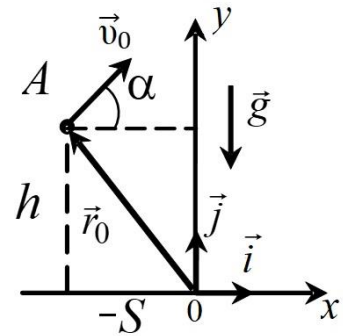


Рис. 1.18. Схема к примеру 1.3

Решение. Поскольку ускорение свободного падения постоянно по величине и направлению, движение является равноускоренным и описывается уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0 = -S\vec{i} + h\vec{j}$ – радиус-вектор начального положения точки.

В проекциях на оси x и y получаем

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{g_x t^2}{2};$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$

В данной задаче $g_x = 0$ (ускорение свободного падения направлено перпендикулярно оси x), $g_y = -g$ (знак «минус» показывает, что направление вектора ускорения свободного падения не совпадает с положительным направлением оси y), $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$, $x_0 = -S$, $y_0 = h$.

Таким образом, уравнения движения в проекциях на оси x и y имеют вид

$$x = -S + v_0 \cos \alpha t; \quad y = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2}.$$

Исключая время из двух последних уравнений, получаем уравнение траектории:

$$y = h + (x + S) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(x + S)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Пример 1.4. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через промежуток времени $t = 2$ с камень упал на землю на расстоянии $S = 40$ м от основания вышки. Определите высоту вышки h , начальную v_0 и конечную v скорости камня, нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня, а также радиус кривизны R траектории в начальный момент времени и в момент падения камня на землю.

Решение. Ситуация, описанная в условии, представлена на рис. 1.19.

Выбирая систему координат так, как показано на рисунке, и используя метод составления уравнений движения, представленный в предыдущей задаче, получаем уравнения движения:

$$x = v_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на землю его координаты $x = S$, $y = 0$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$S = v_0 t; \quad 0 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этих уравнений определяем начальную скорость камня $v_0 = \frac{S}{t} = 20$ м/с и высоту башни $h = \frac{gt^2}{2} = 20$ м.

Для расчета проекций v_x , v_y скорости на координатные оси и ее значения v дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, \text{ в момент падения } v_x = v_0 = 20 \text{ м/с};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt, \text{ в момент падения } v_y = -20 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \text{ в момент падения } v \approx 28,2 \text{ м/с}.$$

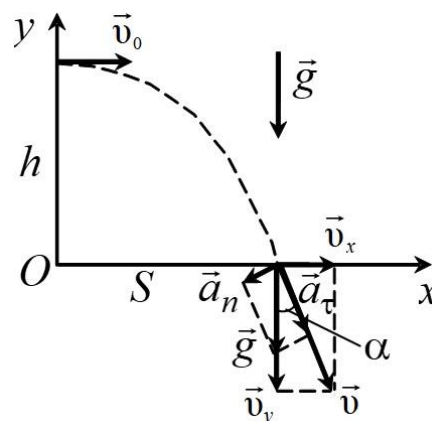


Рис. 1.19. Схема к примеру 1.4

В начальный момент времени полное ускорение \vec{g} перпендикулярно скорости \vec{v}_0 , поэтому $a_\tau = 0$, $a_n = g$. Чтобы найти нормальное и тангенциальное ускорение в момент падения, воспользуемся рис. 1.19, на котором изображены компоненты скорости \vec{v}_x и \vec{v}_y , полная скорость \vec{v} , тангенциальное \vec{a}_τ , нормальное \vec{a}_n и полное ускорение \vec{g} в момент падения камня на землю. Из рисунка видно, что

$$\frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g} = \cos \alpha,$$

где α – угол между \vec{v}_y и \vec{v} (или соответственно между \vec{a}_τ и \vec{g}). Поэтому значения тангенциального и нормального ускорения

$$a_\tau = g \cos \alpha = g \frac{v_y}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \approx 7,11 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = g \sin \alpha = g \frac{v_x}{v} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \approx 7,11 \text{ м/с}^2.$$

В начальный момент времени

$$v = v_0, a_n = g \text{ и } R = \frac{v_0^2}{g} = 40 \text{ м.}$$

В момент падения камня на землю

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}, a_n = g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \text{ и } R = 56 \text{ м.}$$

Начало координат и направления координатных осей можно было бы выбрать иным образом. Например, поместить начало координат в точку бросания и направить ось y вниз. Уравнения движения в этом случае изменятся, но результаты, естественно, останутся прежними.

Пример 1.5. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, находится груз массой $m_2 = 2$ кг. К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К концу шнура подвешена гиря массой $m_1 = 2,5$ кг. Предоставленная самой себе система приходит в равноускоренное движение. Определите ускорение грузов при условии, что коэффициент трения между грузом и плоскостью равен $\mu = 0,1$.

Массу блока не учитывать.

| | |
|------------------------|---|
| Дано: | Решение. В данном примере гиря будет опускаться, а груз подниматься по наклонной плоскости (рис. 1.20). На гирю действуют: сила тяжести $m_1 \vec{g}$ и сила натяжения \vec{T}_1 , на груз действуют: сила натяжения шнура \vec{T}_2 , реакция опоры \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила тяжести $m_2 \vec{g}$. |
| $\alpha = 30^\circ$ | |
| $m_2 = 2 \text{ кг}$ | |
| $m_1 = 2,5 \text{ кг}$ | |
| $\mu = 0,1$ | |
| $a = ?$ | |

Второй закон Ньютона для каждого тела в векторной форме:

$$m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m_2 \vec{a}_2; \quad m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m_2 \vec{a}_2,$$

в проекциях на оси x и y с учетом того, что нить невесомая, $T_1 = T_2 = T$, и нерастяжимая, $a_1 = a_2 = a$,

$$m_1 g - T = m_1 a;$$

$$-m_2 g \sin \alpha + T - F_{\text{тр}} = m_2 a;$$

$$-m_2 g \cos \alpha + N = 0.$$

Сила трения с учетом последнего уравнения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_2 g \cos \alpha.$$

После простых преобразований находим ускорение:

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Произведем вычисления:

$$a = \frac{2,5 - 2 \cdot \sin 30^\circ - 0,1 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ}{2,5 + 2} \cdot 10 = 3,0 \text{ м/с}^2.$$

Пример 1.6. Два свинцовых шара массами $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 3 \text{ кг}$ подвешены на одинаковых нитях длиной $\ell = 1 \text{ м}$. Нить с меньшим шаром отклонили на угол $\alpha = 60^\circ$ от вертикали и отпустили (рис. 1.21). Считая удар центральным и неупругим, определите энергию, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

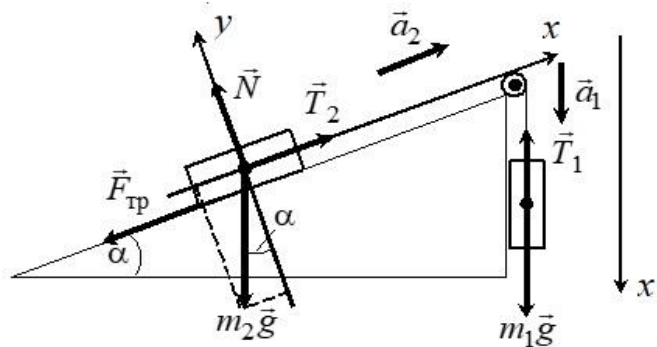


Рис. 1.20. Схема к примеру 1.5

| | |
|----------------------|---|
| Дано: | Решение. При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса: |
| $m_1 = 1$ кг | |
| $m_2 = 3$ кг | |
| $\ell = 1$ м | |
| $\alpha = 60^\circ$ | где \vec{v}_1 – скорость первого шара до удара; $\vec{v}_2 = 0$ – скорость второго шара до удара; \vec{u} – общая скорость шаров после удара. |
| $W_{\text{деф}} - ?$ | |

Проектируем данное уравнение на ось x :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u.$$

Скорость первого шара до удара v_1 определим из закона сохранения механической энергии. Для системы «шар – Земля» действуют только консервативные силы (сила тяжести, сила упругости). Силой сопротивления среды пренебрегаем. В начальном положении I полная механическая энергия равна потенциальной $m_1 g h$ (отсчет высоты ведется от уровня $h_0 = 0$, соответствующего положению равновесия шаров). В положении II перед ударом шаров полная механическая энергия системы равна кинетической энергии шара.

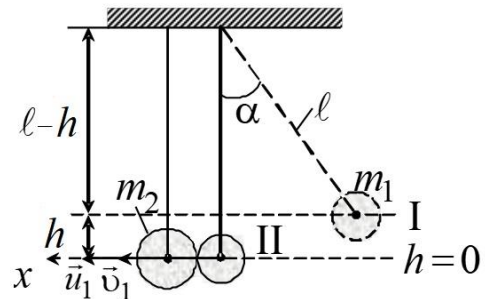


Рис. 1.21. Схема к примеру 1.6

Следовательно, $m_1 g h = \frac{m_1 v_1^2}{2}$.

Откуда скорость первого шара до удара $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Высоту h определяем из тригонометрического соотношения $l - h = l \cos \alpha$, тогда $v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha)}$.

Общая скорость шаров после неупругого удара

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha)}.$$

Энергия деформации при неупругом ударе $W_{\text{деф}}$ определяется разностью кинетических энергий шаров W_1 и W_2 до и после удара:

$$W_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g \ell (1 - \cos \alpha);$$

$$W_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} g \ell (1 - \cos \alpha).$$

Следовательно,

$$W_{\text{деф}} = W_1 - W_2 = m_1 g \ell (1 - \cos \alpha) \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2 g \ell (1 - \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Произведем вычисления:

$$W_{\text{деф}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 60^\circ)}{1 + 3} = 3,75 \text{ Дж.}$$

Пример 1.7. Тело массой 1 кг движется прямолинейно под действием постоянной силы, направленной вдоль оси x . Зависимость координаты тела от времени задана уравнением $x = A' + Bt + Ct^2$, где $A' = 1$ м, $B = 4$ м/с, $C = 2$ м/с². Определите зависимость кинетической энергии тела от времени и работу силы за 10 с от начала ее действия.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$x = A' + Bt + Ct^2$$

$$t_0 = 0$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$A' = 1 \text{ м}$$

$$B = 4 \text{ м/с}$$

$$C = 2 \text{ м/с}^2$$

$$E_k(t) - ? \quad A - ?$$

Решение. Кинетическая энергия равна $W_k = \frac{mv_x^2}{2}$.

Мгновенная скорость находится как первая производная от координаты по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct;$$

$$W_k = \frac{m}{2} (B + 2Ct)^2.$$

Работа силы может быть найдена двумя способами:

а) учитывая, что $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $F = \text{const}$, работа силы будет равна

$$A = \int_0^S F dS \cos \alpha = FS;$$

а пройденный путь $S = x_2 - x_1 = A' + Bt + Ct^2 - A' = Bt + Ct^2$.

Сила по второму закону Ньютона равна $F = ma_x$. Ускорение есть вторая производная от скорости по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2C.$$

Выражение для работы принимает вид

$$A = m2CS = m2C(Bt + Ct^2),$$

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 2(4 \cdot 10 + 2 \cdot 100) = 960 \text{ Дж};$$

б) работу можно найти через изменение кинетической энергии системы:

$$A = \Delta W_{\text{к}} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

$$A = \frac{m}{2}[(B + 2Ct)^2 - (B + 2Ct_0)^2] = \frac{m}{2}(4BCt + 4C^2t^2) = 960 \text{ Дж}.$$

§ 1.13. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

1.1–1.10. Прямолинейное движение тела вдоль оси x описывается уравнением вида $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$. Для момента времени t_1 определите координату, мгновенную скорость и мгновенное ускорение тела. Найдите среднюю скорость тела (путевую и перемещения) и среднее ускорение за первые четыре секунды движения.

| Задача | A | B | C | D | t_1 |
|--------|-----|-----|------------------|------------------|-------|
| | М | м/с | м/с ² | м/с ³ | с |
| 1.1 | 1 | -2 | 1 | 3 | 2 |
| 1.2 | -2 | 3 | 2 | -4 | 3 |
| 1.3 | 3 | -4 | 3 | 5 | 1,5 |
| 1.4 | -4 | 5 | 4 | -2 | 2 |
| 1.5 | 5 | -6 | 5 | 3 | 3 |
| 1.6 | -1 | 4 | 1 | -2 | 2,5 |
| 1.7 | 2 | -5 | 2 | 6 | 3,5 |
| 1.8 | -3 | 6 | 3 | 5 | 2 |
| 1.9 | 4 | -2 | 4 | 4 | 3 |
| 1.10 | -5 | 3 | 2 | 2 | 2 |

1.11. Самолет, летевший на высоте 2940 м со скоростью 360 км/ч, сбросил бомбу. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии S от нее по горизонтали должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель?

1.12. Камень брошен горизонтально со скоростью 15 м/с. Через какое время скорость камня будет в 1,5 раза больше его начальной скорости?

1.13. Из пушки, стоящей на холме, составляющем 30° с горизонтом, производят выстрел в горизонтальном направлении. Начальная скорость снаряда 100 м/с . Снаряд приземляется на склон того же холма. Найдите время полета снаряда и расстояние от пушки до точки приземления.

1.14. За время движения скорость частицы изменилась от $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ до $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Определите модуль приращения скорости.

1.15. Материальная точка движется согласно уравнению $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$. Напишите зависимости $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$.

1.16. Движение материальной точки задано уравнением $A(\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t)$. Определите модуль скорости и модуль нормального ускорения, если $A = 0,5 \text{ м}$, $\omega = 5 \text{ рад/с}$, $t = 2 \text{ с}$. Зависят ли модуль скорости и модуль нормального ускорения от времени?

1.17. Прямолинейное движение точки задано уравнением $x = 20t - 5t^2$. Совпадают ли модуль вектора перемещения и пройденный точкой путь за время: а) $t = 1 \text{ с}$; б) $t = 3 \text{ с}$?

1.18. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,5 \text{ м/с}^2$. Определите полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3 \text{ м}$, если скорость точки на этом участке $\vec{v} = 2 \text{ м/с}$.

1.19. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $R = 10 \text{ м}$, равно $a_n = 10 \text{ м/с}^2$. Угол между векторами нормального и полного ускорений в этот момент равен $\alpha = 60^\circ$. Определите тангенциальное ускорение и скорость точки.

1.20. Первую половину пути тело прошло со скоростью 20 м/с , а вторую – со скоростью 30 м/с . Определите среднюю скорость тела.

1.21. Тело бросают под углом α к наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол β . Начальная скорость тела равна \vec{v}_0 . Определите время полета и расстояние от точки бросания до точки падения тела.

1.22. Мальчик ростом $1,5 \text{ м}$, стоя на расстоянии 15 м от забора, бросает камень под углом 45° к горизонту. С какой скоростью надо бросить камень, чтобы он перелетел через забор?

1.23. Скорость точки, движущейся прямолинейно вдоль оси x ,

увеличивается по линейному закону: $v = v_0 + kt$. Как при этом изменяется ускорение?

1.24. Электрон движется в некоторой системе отсчета из начального положения, определяемого радиус-вектором: $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + z_0\vec{k}$, где $x_0 = 3$ м, $z_0 = 1$ м, с начальной скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$, где $v_0 = 2,0$ м/с, и ускорением $\vec{a} = \vec{j}At + \vec{k}B$, где $A = 12,0$ м/с³, $B = 8,0$ м/с². Чему равна координата x электрона в момент времени $t = 0,5$ с? Какова скорость электрона в момент времени $t = 1$ с? Каков угол между радиус-вектором и вектором скорости в начальный момент времени?

1.25. Разработан аппарат для изучения поведения насекомых при ускорении $100g$. Этот аппарат представляет собой десятисантиметровый стержень, на обоих концах которого имеются контейнеры с насекомыми. Стержень вращается вокруг своего центра. С какой скоростью движутся насекомые, когда их ускорение достигает $100g$? Чему равна угловая скорость стержня?

1.26. Точка движется по плоской траектории так, что ее тангенциальное ускорение $a_\tau = a_0$, а нормальное ускорение $a_n = bt^4$, где a_0 и b – положительные постоянные. Начальная скорость точки в момент $t = 0$ равна нулю. Найдите радиус кривизны траектории и полное ускорение точки в зависимости: а) от времени; б) от пройденного пути.

1.27. При горизонтальном полете со скоростью $v = 250$ м/с снаряд массой $m = 8$ кг разорвался на две части. Большая часть массой $m_1 = 6$ кг получила скорость $u_1 = 400$ м/с в направлении полета снаряда. Определите модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда.

1.28. С тележки, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью $v_1 = 3$ м/с, в сторону, противоположную движению тележки, прыгает человек, после чего скорость тележки изменилась и стала равной $v_2 = 4$ м/с. Определите горизонтальную составляющую скорости человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки $m_1 = 210$ кг, масса человека $m_2 = 70$ кг.

1.29. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги

под углом $\alpha = 30^\circ$ к линии горизонта. Определите скорость v_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью $v_1 = 480$ м/с. Масса платформы с орудием и снарядами $m_2 = 18$ т, масса снаряда $m_1 = 60$ кг.

1.30. Человек массой $m_1 = 70$ кг, бегущий со скоростью $v_1 = 9$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 190$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 3,6$ км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек бежал до прыжка навстречу тележке?

1.31. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой $m_1 = 2,5$ кг под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 10$ м/с. Какова будет начальная скорость \vec{v}_0 движения конькобежца, если масса его $m_2 = 60$ кг? Перемещением конькобежца во время движения пренебречь.

1.32. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его $m_1 = 60$ кг, масса доски $m_2 = 20$ кг. С какой скоростью (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) $v = 1$ м/с? Массой колес и трением пренебречь.

1.33. Снаряд, летевший со скоростью $v_1 = 400$ м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью $v_1 = 150$ м/с. Определите скорость v_2 большего осколка.

1.34. Две одинаковые лодки массами $m = 200$ кг каждая (вместе с человеком и грузами, находящимися в лодках) движутся параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с. Когда лодки поравнялись, то с первой лодки на вторую и со второй на первую одновременно перебрасывают грузы массами $m_1 = 200$ кг. Определите скорости v_1 и v_2 лодок после перебрасывания грузов.

1.35. На сколько переместится относительно берега лодка длиной $L = 3,5$ м и массой $m_1 = 200$ кг, если стоящий на корме чело-

век массой $m_2 = 80$ кг переместится на нос лодки? Считать лодку расположенной перпендикулярно берегу.

1.36. Лодка длиной $L = 3$ м и массой $m = 120$ кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами $m_1 = 60$ кг и $m_2 = 90$ кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами?

1.37. В деревянный шар массой $m_1 = 8$ кг, подвешенный на нити длиной $L = 1,8$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m_2 = 4$ г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол 3° ? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.

1.38. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой $m_1 = 300$ кг, ударяет молот массой $m_2 = 8$ кг. Определите КПД удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа.

1.39. Шар массой $m_1 = 1$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 2$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $v_2 = 3$ м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым и центральным.

1.40. Шар массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 2$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 5$ кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.

1.41. Определите КПД неупругого удара бойка массой $m_1 = 0,5$ т, падающего на сваю массой $m_2 = 120$ кг. Полезной считать энергию, затраченную на вбивание сваи.

1.42. Шар массой $m_1 = 4$ кг движется со скоростью $v_1 = 5$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 6$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Определите скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, центральным.

1.43. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой $m_1 = 10$ г со скоростью $v = 300$ м/с. Затвор пистолета массой $m_2 = 200$ г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой $k = 25$ кН/м. На какое расстояние отойдет затвор после выстрела?

1.44. Шар массой $m_1 = 5$ кг движется со скоростью $v_1 = 1$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2$ кг. Определите скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

1.45. Из орудия, не имеющего противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда орудие было неподвижно закреплено, снаряд вылетал со скоростью $v_1 = 600$ м/с, а когда орудию дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью $v_2 = 580$ м/с. С какой скоростью при этом откатилось орудие?

1.46. Шар массой $m_1 = 2$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40 % кинетической энергии. Определите массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

1.47. Определите работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостями $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $L = 2$ см.

1.48. Из шахты глубиной $h = 600$ м поднимают клеть массой $m_1 = 3,0$ т на канате, каждый метр которого имеет массу $m = 1,5$ кг. Какая работа A совершается при поднятии клетки на поверхность Земли? Каков КПД подъемного устройства?

1.49. Пружина жесткостью $k = 500$ Н/м сжата силой $F = 100$ Н. Определите работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta x = 2$ см.

1.50. Две пружины жесткостью $k_1 = 0,5$ кН/м и $k_2 = 1$ кН/м скреплены параллельно. Определите потенциальную энергию данной системы при абсолютной деформации $\Delta L = 4$ см.

1.51. Какую нужно совершить работу A , чтобы пружину жесткостью $k = 800$ Н/м, сжатую на $x = 6$ см, дополнительно сжать на $\Delta x = 8$ см?

1.52. Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta x = 3$ мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты $h = 8$ см?

1.53. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью $k = 150$ Н/м был произведен выстрел пулей массой $m = 8$ г. Опреде-

лите скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на $\Delta x = 4$ см.

1.54. Налетев на пружинный буфер, вагон массой $m = 16$ т, двигавшийся со скоростью $v = 0,6$ м/с, остановился, сжав пружину на $\Delta x = 8$ см. Найдите общую жесткость k пружин буфера.

1.55. Цепь длиной $L = 2$ м лежит на столе, одним концом свисая со стола. Если длина свешивающейся части превышает $1/3 L$, то цепь соскальзывает со стола. Определите скорость \vec{v} цепи в момент ее отрыва от стола.

1.56. Какая работа A должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой $h = 40$ м, наружным диаметром $D = 3,0$ м и внутренним диаметром $d = 2,0$ м? Плотность материала $\rho = 2,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.57. Тело массой 1 кг под действием постоянной силы движется прямолинейно. Зависимость координаты тела от времени выражается уравнением $x = t^2 + 2t^3$. Определите работу за первые 5 с действия силы.

1.58. Тело движется прямолинейно под действием постоянной силы 15 Н. Зависимость координаты от времени имеет вид $x = 10t^2 - 3t + 5$. Найдите массу тела и изменение его импульса за 4 с после начала движения.

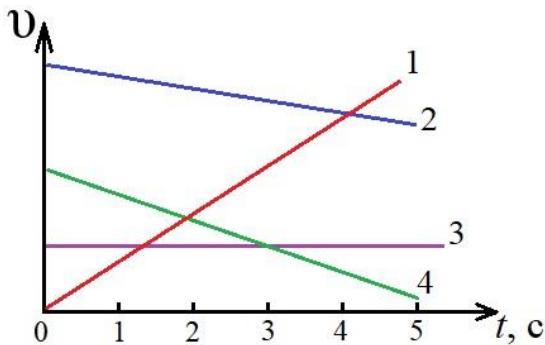


Рис. 1.22. Графики скорости различных тел в зависимости от времени (к задаче 1.60)

1.59. Найдите зависимость скорости от времени и силу, действующую на тело массой 0,1 кг в конце третьей секунды, если координата тела со временем меняется по уравнению $x = 2t^2 + 3t^4$. Какую работу совершит данная сила за 3 с ее действия?

1.60. На рис. 1.22 изображены графики зависимости скорости тел от времени. Какое тело пройдет больший путь в интервале времени от 0 до 5 с:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4?

1.61. Система состоит из трех шаров с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, которые движутся так, как показано на рис. 1.23.

Если скорости шаров равны $v_1 = 3 \text{ м/с}$, $v_2 = 2 \text{ м/с}$, $v_3 = 1 \text{ м/с}$, то вектор импульса центра масс этой системы направлен ...

- 1) вдоль оси $+Ox$;
- 2) вдоль оси $+Oy$;
- 3) вдоль оси $-Oy$;
- 4) вдоль оси $-Ox$.

1.62. Для пассажира поезд можно считать инерциальной системой отсчета в случае, когда ...

- 1) поезд движется с постоянной скоростью по прямому участку пути;
- 2) поезд трогается с места;
- 3) поезд движется с постоянной скоростью по закруглению;
- 4) поезд движется с постоянным ускорением по прямому участку пути.

1.63. Теннисный мяч летел с импульсом \vec{p}_1 (масштаб и направление указаны на рис. 1.24). В перпендикулярном направлении на короткое время $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ на мяч подействовал порыв ветра с постоянной силой $|\vec{F}| = 40 \text{ Н}$. В результате действия силы величина импульса стала равна:

- 1) $5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$;
- 2) $43 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$;
- 3) $50 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$;
- 4) $7 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$.

1.64. Система отсчета, связанная с Землей, является инерциальной. В каком случае можно считать инерциальной систему отсчета, связанную с автомобилем:

- 1) автомобиль движется равномерно по прямолинейному участку шоссе;
- 2) автомобиль разгоняется по прямолинейному участку шоссе;
- 3) автомобиль движется равномерно по извилистой дороге;
- 4) автомобиль по инерции вкатывается на гору?

1.65. К телу приложена постоянная по модулю и направлению сила 10 Н . За время 10 с приращение модуля импульса тела составит:

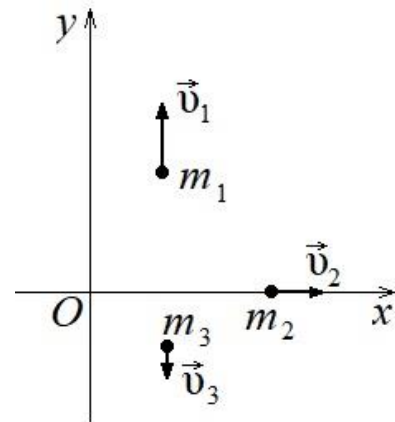


Рис. 1.23. Схема к расчету импульса системы материальных точек (к задаче 1.61)

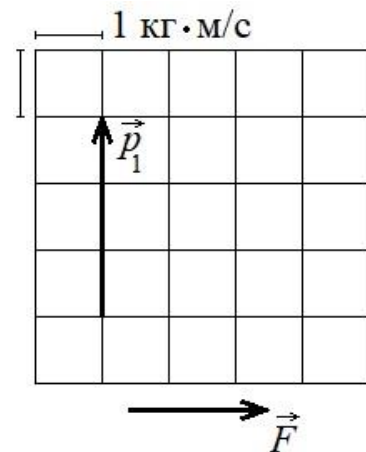


Рис. 1.24. Импульс мяча и внешняя постоянная сила (к задаче 1.63)

- 1) 100 кг·м/с; 2) 1 кг·м/с; 3) 10 кг·м/с; 4) 0 кг·м/с.

1.66. Шарик падает вертикально вниз в жидкости. Если на него действуют: mg – сила тяжести; F_A – сила Архимеда и F_c – сила сопротивления, то при равномерном движении шарика:

- 1) $-mg + F_A + F_c = 0$;
- 2) $mg + F_A - F_c = 0$;
- 3) $mg + F_A + F_c = 0$;
- 4) $mg - F_A + F_c = 0$.

1.67. Зависимость перемещения тела массой 4 кг от времени представлена на рис. 1.25. Кинетическая энергия тела в момент времени $t = 3$ с равна:

- 1) 50 Дж;
- 2) 25 Дж;
- 3) 40 Дж;
- 4) 15 Дж;
- 5) 20 Дж.

1.68. Изменение силы тяги на различных участках пути представлено на рис. 1.26. Работа максимальна на участке:

- 1) 0–1 км; 2) 1–2 км;
- 3) 2–3 км; 4) 3–4 км;
- 5) 4–5 км.

1.69. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Если зависимость скорости тела от времени имеет вид $\vec{v} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$, то мощность, развиваемая силой в момент времени t , равна:

- 1) $2t^3 + 3t^5$;
- 2) $(t^2 + 2t)\vec{i} + (t^3 + 3t^2)\vec{j}$;
- 3) $(t^2 - 2t)\vec{i} + (t^3 - 3t^2)\vec{j}$;
- 4) $5t / 6$.

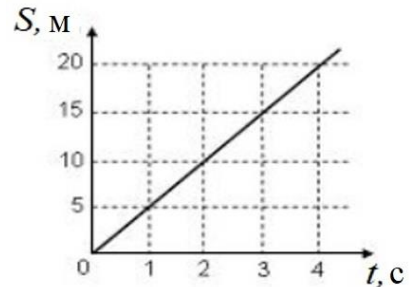


Рис. 1.25. Зависимость перемещения тела от времени (к задаче 1.67)

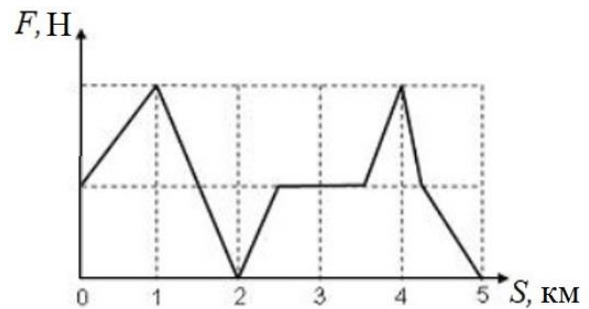


Рис. 1.26. Изменение силы тяги на различных участках пути (к задаче 1.68)

ГЛАВА II. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 2.1. Кинематические характеристики вращательного движения

Всякое сложное движение твердого тела можно разложить на два простых: *поступательное* со скоростью \vec{v}_A некоторой точки A и *вращательное* вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки A , а линейная скорость произвольной точки M может быть определена по формуле

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, (\vec{r}_M - \vec{r}_A)],$$

где \vec{r}_M, \vec{r}_A – радиус-векторы точек M и A .

Поступательным называют такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается в пространстве, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению, например, AB параллельна A_1B_1 (рис. 2.1).

За время dt все точки абсолютно твердого тела при поступательном движении перемещаются на одинаковую величину $d\vec{r}$.

Следовательно, в каждый момент времени скорости всех точек тела

одинаковы. Также одинаковы их ускорения.

Твердое тело имеет три поступательных степени свободы.

Движение твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называют *вращением* тела вокруг оси AB , проходящей через данные точки. При этом положение тела в пространстве определяется значением угла поворота φ относительно начального положения.

Угловой скоростью называют вектор $\vec{\omega}$, который численно равен первой производной от угла поворота φ по времени t . Этот век-

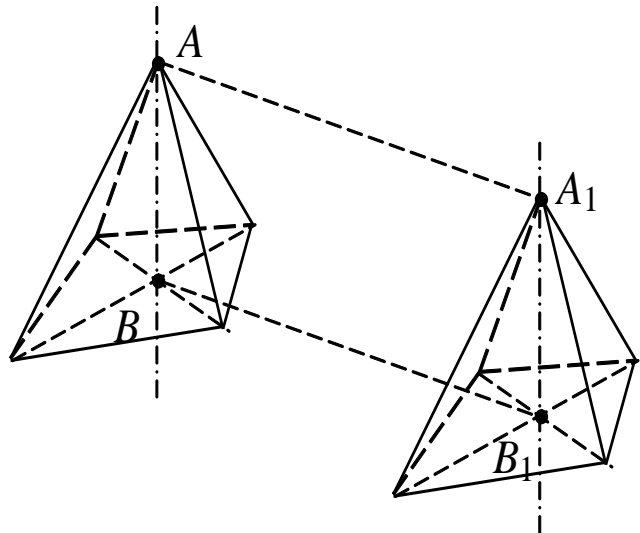


Рис. 2.1. Поступательное движение
твердого тела

тор направлен вдоль неподвижной оси, вокруг которой вращается тело в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 2.2). Согласно этому правилу, направление вектора должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него, мы видели поворот совершающимся против часовой стрелки.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (2.1)$$

где $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота.

Вращение тела называется равномерным, если $|\vec{\omega}| = \text{const}$. Тогда $\varphi = \omega t$. Скорость \vec{v} точки M линейная. Она направлена перпендикулярно оси вращения и равна (рис. 2.3)

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{\rho}$ – расстояние до оси вращения; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный в точку M из начала координат.

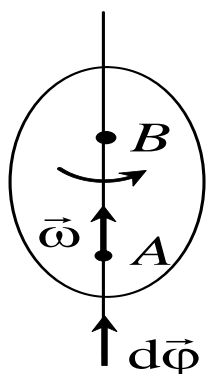


Рис. 2.2. Угловая скорость $\vec{\omega}$ и вектор элементарного поворота $d\vec{\varphi}$

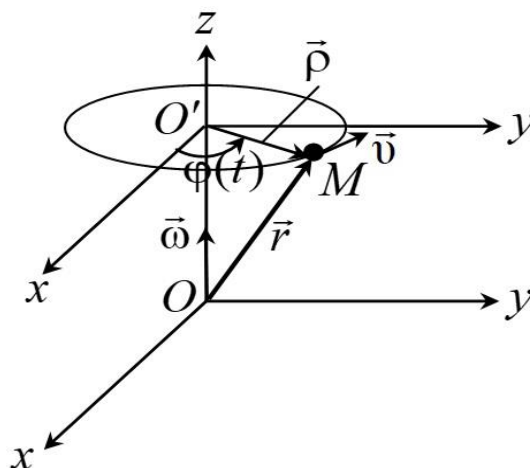


Рис. 2.3. Вращательное движение

Угловая скорость есть псевдовектор. Над вектором угловой скорости можно выполнять все математические операции, как и над всякими векторами. Например, можно ввести сложение $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ по правилу параллелограмма.

Введем понятие *сложение вращений*. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси OA с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, а сама ось OA вращается вокруг другой оси OB с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ (рис. 2.4).

Первое вращение рассматриваем в системе отсчета, в которой

ось OA неподвижна. Второе вращение рассматриваем в другой системе, где неподвижна уже ось OB . В задаче требуется ответить на вопрос: какое движение возникнет в результате наложения этих двух вращений?

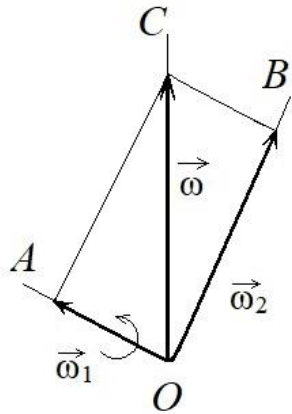


Рис. 2.4. Сложение вращений

Вопрос сводится к сложению линейных скоростей. Пусть произвольная точка M в результате вращения твердого тела вокруг оси OA приобретает линейную скорость $\vec{v}_1 = [\vec{\omega}_1, \vec{r}]$, а в результате второго вращения (вокруг оси OB) – линейную скорость $\vec{v}_2 = [\vec{\omega}_2, \vec{r}]$. Очевидно, результирующая линейная скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2), \vec{r}] = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Если точка M лежит на оси вектора $\vec{\omega}$, то $\vec{v} = 0$. Таким образом, все точки этой оси находятся в покое. Это возможно, если $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$, то есть точки движутся в разные стороны с одинаковыми скоростями. Все прочие точки твердого тела вращаются вокруг оси вектора $\vec{\omega}$ с угловой скоростью ω . При этом мгновенное результирующее движение твердого тела есть вращение вокруг мгновенной оси OC . Сложение подчиняется в этом случае правилу параллелограмма. Но мгновенная ось при этом перемещается не только в теле, но и в пространстве.

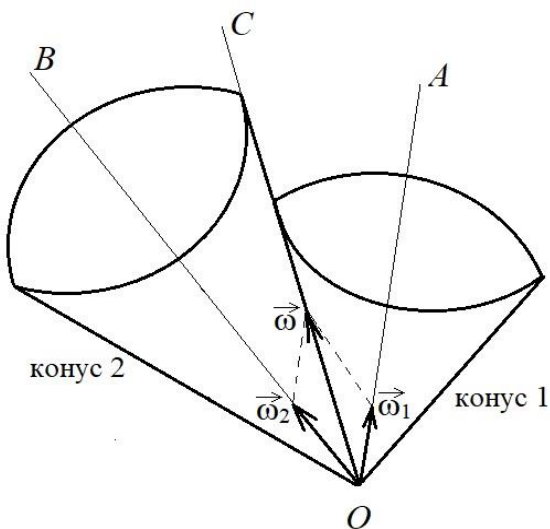


Рис. 2.5. Конус 1 катится по поверхности неподвижного конуса 2

Например, пусть по поверхности неподвижного кругового конуса 2 (рис. 2.5) катится без скольжения другой круговой конус 1. Вершины их все время находятся в точке O . Конус 1 вращается вокруг OA с $\vec{\omega}_1$, которая описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг OB с $\vec{\omega}_2$. Так как скольжения нет, то все точки конуса, лежащие на OC , неподвижны. OC является мгновенной осью вращения конуса 1, которая перемещается в теле, то есть

в конусе 1, двигаясь по его поверхности. Она перемещается в пространстве, то есть по поверхности конуса 2.

Вращение вокруг пересекающихся осей (рис. 2.6) нужно рассматривать как предельный случай вращения вокруг параллельных осей (рис. 2.7). Устремим точку O в бесконечность, получим вращение вокруг параллельных осей.

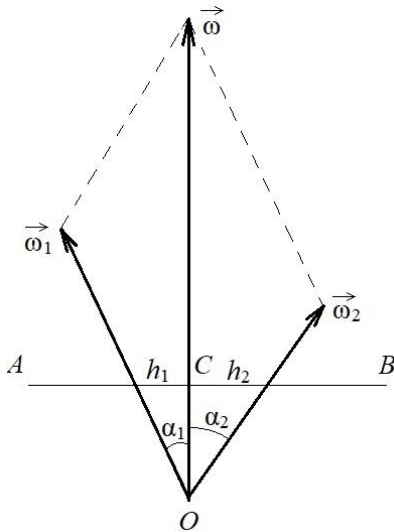


Рис. 2.6. Вращение вокруг пересекающихся осей

Мгновенная ось проходит между первой и второй осями и делит расстояние между ними обратно пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_2 .

Аналогичный случай, когда векторы ω_1 и ω_2 противоположны по направлению. Если $|\vec{\omega}_1| > |\vec{\omega}_2|$, то $\omega = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$.

Аналогичный случай, когда векторы ω_1 и ω_2 противоположны по направлению.

Если $|\vec{\omega}_1| > |\vec{\omega}_2|$, то $\omega = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$.

Мгновенная ось проходит вне отрезка AB со стороны большей угловой скорости и делит отрезок AB пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_2 .

Рассмотрим сложение поступательного и вращательного движений. Если посту-

пательное движение направлено параллельно оси вращения, то получится винтовое движение. Если поступательное движение пер-

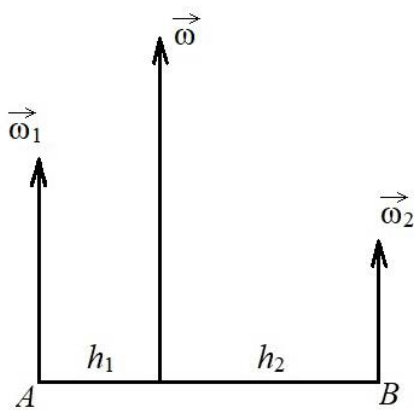


Рис. 2.7. Вращение вокруг параллельных осей

пендикулярно оси вращения, то в этом случае все точки тела будут двигаться параллельно одной плоскости, перпендикулярной

к той же оси. Такое движение называется плоским.

Поступательное движение можно представить как вращение вокруг бесконечно удаленной оси O_1 . В результате сложения возникнет вращение вокруг какой-то мгновенной оси. Следовательно, задача сводится к определению положения

мгновенной оси и угловой скорости мгновенного вращения.

Рассмотрим плоское движение твердого тела. Можно считать само тело плоским, а движение – происходящим в плоскости тела. Положение плоского тела однозначно задается прямой. Пусть прямая AB перешла в положение A_1B_1 . Из середины отрезков AA_1 и BB_1

восстановим перпендикуляры, пересекающиеся в точке O .

Можно доказать, что прямую AB можно перевести в положение A_1B_1 путем поворота вокруг точки O . Действительно, точка O равноудалена от точек A и A_1 , а также B и B_1 . Следовательно, эти точки лежат на своих дугах окружностей. Таким образом, при плоском движении твердое тело может быть переведено из любого положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг некоторой оси (это частный случай теоремы Эйлера).

Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Выберем в теле произвольную точку O . Всякое движение твердого тела можно разложить на поступательное со скоростью \vec{v}_0 , равной скорости точки O , и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Если $\vec{\omega}$ – вектор мгновенного вращения, то для линейной скорости произвольной точки A можно записать

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A .

Скорость поступательного движения зависит от выбора точки O , следовательно, можно говорить об угловой скорости вращения, не указывая эту точку.

Период вращения – это время, за которое тело, вращаясь равномерно с угловой скоростью ω , совершит один оборот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.2)$$

Частота вращения – число оборотов за единицу времени:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.3)$$

При неравномерном вращении вводится вектор $\vec{\varepsilon}$ углового ускорения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.4)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}$ при уско-

ренном движении $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) > 0$, и в противоположную – при замедленном $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) < 0$.

§ 2.2. Динамика вращательного движения

Моментом силы \vec{F} относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу \vec{F} , то есть

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

где \vec{M} – вектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от вектора \vec{r} к вектору \vec{F} кратчайшим путем (рис. 2.8). Вектор \vec{M} перпендикулярен плоскости (заштриховано), в которой лежат векторы \vec{r} и \vec{F} .

Модуль момента силы $M = rF \sin \alpha = Fl$, где $l = r \sin \alpha$ – плечо силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки, выбранной на оси z (рис. 2.9).

Значение $M_z = M \cos \alpha$ не зависит от выбора положения точки O на оси z . Если ось z совпадает с направлением вектора \vec{M} , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью z .

Моментом импульса материальной точки или частицы относи-

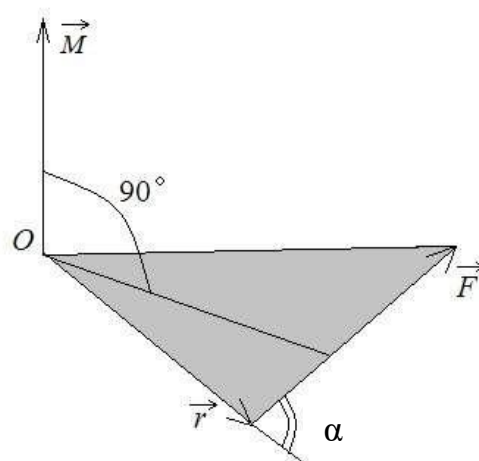


Рис. 2.8. Момент силы относительно точки O

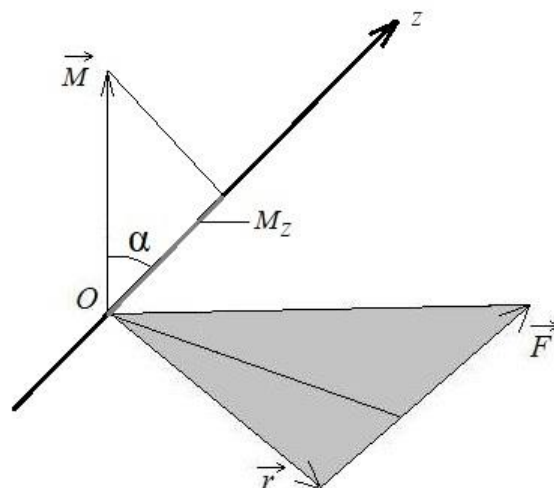


Рис. 2.9. Момент силы относительно неподвижной оси z

тельно точки O (рис. 2.10) называется векторная величина:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}], \quad |\vec{L}| = rp \sin \alpha.$$

Материальная точка обладает моментом импульса независимо от формы траектории, по которой она движется.

Изменяется ли момент импульса частицы, от чего зависит изменение момента импульса частицы?

Рассмотрим производную от момента импульса частицы по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] + \left[\vec{r}, m \frac{d\vec{v}}{dt} \right].$$

По второму закону Ньютона $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$,

$$\text{а } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \text{то } \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0.$$

Следовательно, $\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}]$. Выражение $[\vec{r}, \vec{F}]$ представляет собой момент силы \vec{M} относительно той же точки, относительно которой взят момент импульса \vec{L} . Следовательно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2.5)$$

то есть скорость изменения момента импульса частицы со временем равна суммарному моменту сил, действующих на нее.

Далее рассмотрим систему частиц, на которые действуют как внутренние, так и внешние силы. Чему будет равен момент импульса данной системы относительно точки O ? Его можно рассчитать по формуле

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Возьмем производную:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt}.$$

С учетом соотношения (2.5) получаем

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i_{\text{внутр}}} + \vec{M}_{i_{\text{внеш}}},$$

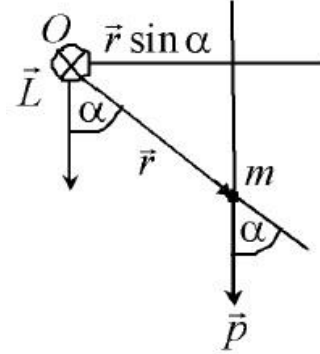


Рис. 2.10. Момент импульса движущейся материальной точки

то есть скорость изменения момента импульса i -й точки равна сумме моментов внутренних и внешних сил.

Окончательно получим для системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{\text{внутр}}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{\text{внеш}}}.$$

Но так как для любой системы сумма моментов внутренних сил равна нулю: $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{\text{внутр}}} = 0$, тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{\text{внеш}}}.$$

Изменение момента импульса системы материальных точек по времени равно сумме моментов внешних сил. Это выражение является основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела (системы материальных точек).

Если система материальных точек замкнута, то есть внешние силы на нее не действуют, то

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{\text{внеш}}} = 0; \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Закон сохранения момента импульса: момент импульса твердого тела и замкнутой системы материальных точек, для которых суммарный момент внешних сил равен нулю, есть величина постоянная.

Момент импульса остается постоянным и для незамкнутой системы, если сумма моментов внешних сил равна нулю.

Необходимо отметить, что в основе закона сохранения момента импульса лежит изотропность пространства, то есть одинаковость свойств по всем направлениям. Действительно, поворот замкнутой системы частиц без изменения их взаимного расположения и относительных скоростей не изменяет механических свойств системы.

§ 2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Уравнения движения твердого тела, рассматриваемого как система материальных точек, имеют вид

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}; \quad (2.6)$$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) описывает поступательное движение со скоростью \vec{v}_c центра масс (инерции) твердого тела массой m ; уравнение (2.7) описывает вращение тела вокруг неподвижной оси.

Момент импульса \vec{L} и момент внешних сил $\vec{M}_{\text{внеш}}$ можно брать относительно произвольной неподвижной точки или относительно центра масс твердого тела.

Момент импульса твердого тела относительно начала координат равен сумме моментов импульса всех материальных точек, составляющих это тело, относительно начала координат и может быть рассчитан следующим образом:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^n [\overline{OO_1}, m_i \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{\rho}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Здесь произведена замена:

$$\vec{r}_i = \overline{OO_1} + \vec{\rho}_i.$$

Вектор $[\overline{OO_1}, m_i \vec{v}_i]$ перпендикулярен оси вращения, а вектор $[\vec{\rho}_i, m_i \vec{v}_i]$ направлен вдоль оси вращения (рис. 2.11). Кроме того, после раскрытия двойного векторного произведения получим

$$[\vec{\rho}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{\rho}_i, m_i [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]] = m_i \rho_i^2 \vec{\omega}.$$

Следовательно, составляющая момента импульса твердого тела, параллельная оси вращения, будет равна

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 \vec{\omega}_z.$$

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси вращения называют величину I , равную сумме произведений масс материальных точек, составляющих тело, на квадрат их расстояний

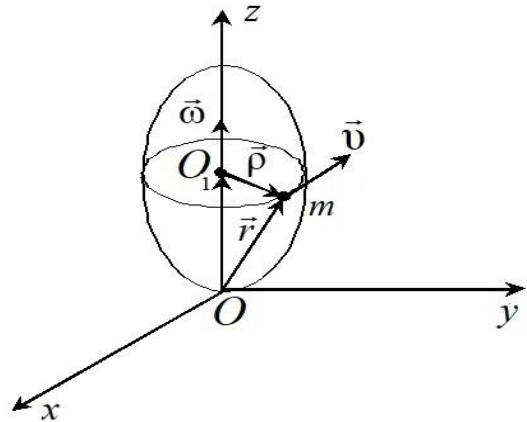


Рис. 2.11. Схема к расчету момента импульса твердого тела относительно начала координат

до оси вращения ρ_i (см. рис. 2.11):

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2. \quad (2.8)$$

Момент инерции – величина аддитивная.

Тогда момент импульса однородного твердого тела относительно оси z , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг данной оси, определяется следующим выражением:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно оси z запишется

$$I_z \frac{d\vec{\omega}_z}{dt} = \vec{M}_z^{\text{внеш}}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) называется основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела относительно оси z .

Если твердое тело произвольной формы вращается вокруг оси z , то

$$I_z \vec{\varepsilon}_z = \vec{M}_z, \quad \vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z, \quad (2.11)$$

где $\vec{\varepsilon}_z = \frac{d\vec{\omega}_z}{dt}$ – это угловое ускорение; \vec{M}_z , \vec{L}_z – проекции момента внешних сил и момента импульса относительно оси z ; I_z – момент инерции твердого тела также относительно оси z .

§ 2.4. Момент инерции твердого тела

Из соотношений (2.11) следует, что момент инерции I_z относительно оси вращения z является мерой инертности тела в его вращении вокруг этой оси, то есть I_z в механике вращательного движения играет роль, аналогичную роли массы в механике поступательного движения. Каждое тело, независимо от того, вращается оно или нет, обладает определенным моментом инерции относительно какой-то оси. Тело нужно рассматривать как механическую систему, масса которой m непрерывно распределена по объему V тела так, что

$$I_z = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (2.12)$$

где dm – малый элемент массы твердого тела; ρ – объемная плотность твердого тела; V – объем твердого тела.

Момент инерции тела зависит от материала, формы и размеров тела, а также от расположения относительно оси вращения. Тело будет иметь разные моменты инерции относительно разных осей, например I_x , I_y , I_z . Для подсчета момента инерции тела I относительно произвольной оси пользуются **теоремой Штейнера** (рис. 2.12).

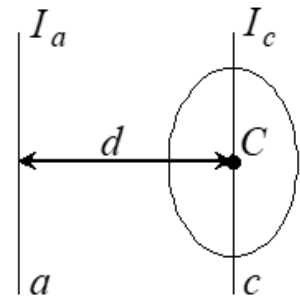


Рис. 2.12. Теорема Штейнера

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси a (I_a) равен сумме момента инерции тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно оси a , и произведения массы тела на квадрат расстояния d между этими осями: $I_a = I_c + md^2$.

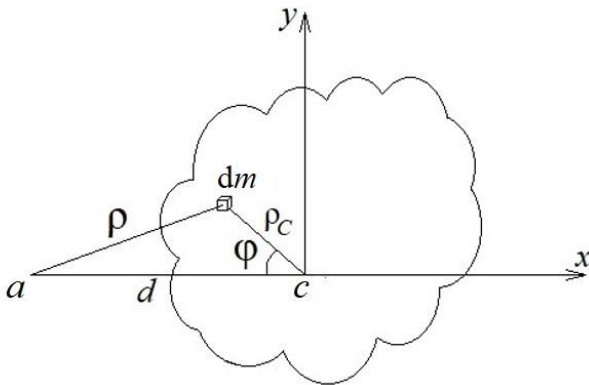


Рис. 2.13. К выводу теоремы Штейнера

На рис. 2.13 оси a и c направлены перпендикулярно плоскости чертежа. Внутри твердого тела выберем произвольно элементарную массу dm , тогда ρ_c – это расстояние от выбранного элемента массы до центра масс, а ρ – до оси вращения a .

По теореме косинусов

$$\rho^2 = \rho_c^2 + d^2 + 2d\rho_c \cos\varphi.$$

По теореме Штейнера будем иметь

$$I_a = \int_m \rho^2 dm = \int_m \rho_c^2 dm + md^2 + 2d \int_m \rho_c \cos\varphi dm,$$

при этом учтем, что $\int_m \rho_c^2 dm = I_c$. Поскольку $\rho_c \cos\varphi = x$ – абсцисса элемента dm в системе координат с началом в центре масс, а начало координат и центр масс совпадают, то $\int_m \rho_c \cos\varphi dm = 0$.

Следовательно, $I_a = I_c + md^2$. Моменты инерции тела относительно выбранных осей x , y , z можно рассчитать, воспользовавшись формулой (с учетом $dV = dx dy dz$)

$$I = \int_m r^2 dm,$$

где $dm = \rho(x, y, z)dV$, предварительно задав форму тела и распределение массы.

Вычисление момента инерции

1. Момент инерции I_y относительно оси y плоской фигуры (рис. 2.14):

$$I_y = \int_a^b x^2 \tau(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

где $\tau(x)$ – линейная плотность.

2. Моменты инерции I_x, I_y относительно осей x, y плоского тела, занимающего область S с массой, распределенной с **плотностью** $\sigma(x, y)$:

$$I_x = \int_S \sigma(x, y) y^2 dS; \quad I_y = \int_S \sigma(x, y) x^2 dS,$$

где dS – элемент площади.

Момент инерции *плоского тела* относительно начала координат: $I_0 = \int_S \sigma(x, y) (x^2 + y^2) dS$.

3. Моменты инерции твердого тела относительно осей I_x, I_y, I_z , имеющего объем V с плотностью $\rho(x, y, z)$:

$$I_x = \int_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV; \quad I_y = \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dV;$$

$$I_z = \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dV. \quad (2.13)$$

В качестве примера рассмотрим вычисление момента инерции цилиндра, конуса, стержня, кольца и диска.

1. Момент инерции однородного цилиндра (рис. 2.15) высотой h и основанием радиусом R (учтем $dS = r d\varphi dr$ и $m = (\pi R^2 h)\rho$) относительно оси z будет равен

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dV = \rho \iiint_V r^2 dz dS = \\ &= \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho h 2\pi R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}. \end{aligned}$$

2. Момент инерции однородного конуса высотой h и радиусом R основания (рис. 2.16) рассчитаем следующим образом:

$$I_z = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{Rz/h} r^3 dr = \rho \frac{\pi R^4 h}{10} = \frac{3}{10} m R^2.$$

При расчете учтено, что $y^2 + x^2 = r^2$, а также уравнение конуса

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2); \quad z^2 = \frac{h^2 r^2}{R^2}; \quad r = \frac{Rz}{h}.$$

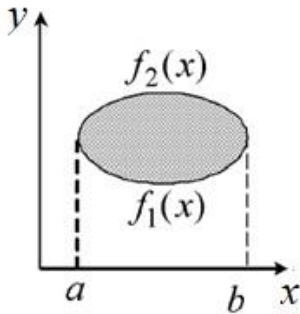


Рис. 2.14. Схема к расчету момента инерции плоской фигуры

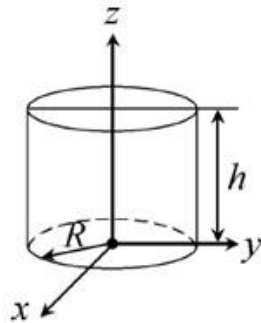


Рис. 2.15. Схема к расчету момента инерции цилиндра относительно оси z

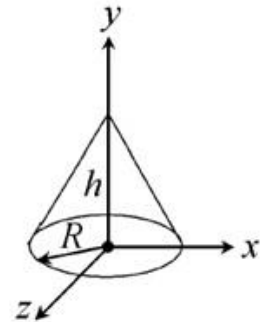


Рис. 2.16. Схема к расчету момента инерции конуса относительно оси y

3. Момент инерции однородного стержня массой m и длиной ℓ относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс (рис. 2.17, а), равен

$$I_z = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{m}{\ell} r^2 dr = \frac{m}{\ell} \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{m\ell^2}{12}, \quad (2.14)$$

где $dm = \frac{m}{\ell} dr$. Момент инерции стержня относительно оси a , перпендикулярной стержню и проходящей через его край (рис. 2.17, б), равен

$$I_a = I_c + md^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}.$$

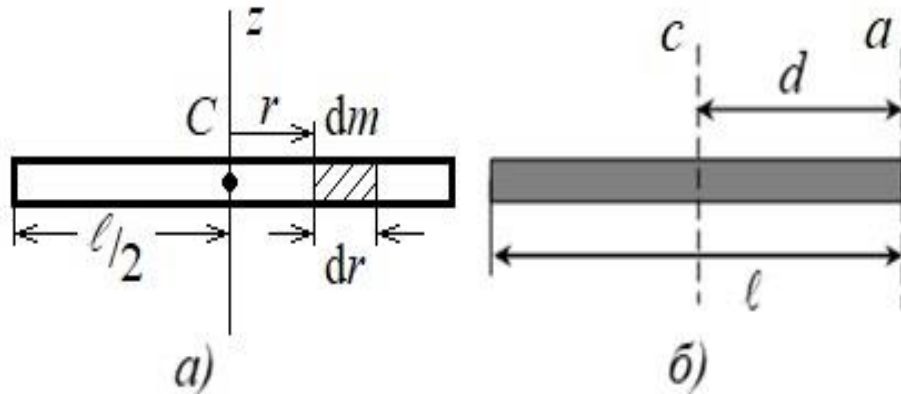


Рис. 2.17. Схема к расчету момента инерции однородного стержня: а – относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс; б – относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через край стержня

4. Момент инерции кольца радиусом R относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс:

$$I_{\text{кольца}} = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^N m_i = mR^2.$$

5. Момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр масс (рис. 2.18), вычислим следующим образом.

Масса диска m . Выделим элементарное кольцо. Его площадь равна $dS = 2\pi r dr$.

Тогда масса выделенного элемента dm равна

$$dm_i = \frac{m}{\pi R^2} (2\pi r dr).$$

А его момент инерции $dI_i = dm_i r_i^2$.

Момент инерции всего диска равен

$$I_{\text{диска}} = \sum_{i=1}^N I_i = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} (2\pi r) r^2 dr = \frac{mR^2}{2}. \quad (2.15)$$

Если тело является однородным и имеет ось симметрии, то

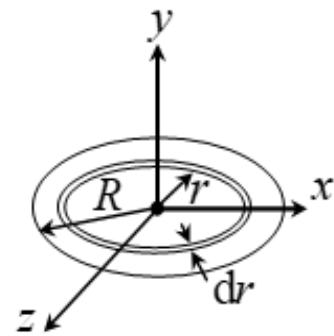


Рис. 2.18. Схема к расчету момента инерции однородного диска относительно оси y , перпендикулярной плоскости диска

связь между моментом импульса и угловой скоростью имеет вид

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Для тела произвольной формы и с произвольным распределением массы эта связь может быть представлена так:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z; \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z; \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{cases}$$

где L_x, L_y, L_z и $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции векторов \vec{L} и $\vec{\omega}$ на оси координат. Коэффициенты пропорциональности являются константами.

Тензором инерции тела I называют величину

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Данный тензор характеризует инертные свойства тела при его вращении:

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – осевые моменты инерции;

I_{xy}, I_{yx}, I_{yz} и т. д. – центробежные моменты инерции.

Для любой точки твердого тела существует декартова система координат, в которой тензор инерции будет представлен только моментами инерции относительно главных осей:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Оси такой системы координат называются главными осями инерции, а I_x, I_y, I_z – главными моментами инерции.

§ 2.5. Работа и кинетическая энергия вращающихся твердых тел

Внутренние силы работу не совершают. Элементарная работа δA при повороте тела внешними силами на угол $d\varphi$ за время dt равна

$$\delta A = \vec{\omega} \vec{M}^{\text{внеш}} dt = \omega M_z dt = M_z d\varphi,$$

где M_z – проекция вектора $\vec{M}^{\text{внеш}}$ на ось вращения z ; $d\varphi = \omega dt$ – угол элементарного поворота.

Тогда полная работа при повороте тела на угол $(\varphi_2 - \varphi_1)$ будет равна

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi.$$

Мгновенная мощность $P = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega$.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$W_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (2.16)$$

Данная формула следует из выражения

$$A = \int M_z d\varphi = \int I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \int I_z \omega d\omega.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси момент силы относительно этой оси создает только касательная составляющая этой силы к траектории точки ее приложения.

При произвольном движении тела его кинетическая энергия определяется выражением

$$W_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2, \quad (2.17)$$

где $\frac{1}{2} m v_c^2$ – кинетическая энергия поступательного движения центра масс; $\frac{1}{2} I_c \omega^2$ – кинетическая энергия вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс.

§ 2.6. Скатывание тел с наклонной плоскости

Нужно найти ускорение центра масс (точка C) в конце наклонной плоскости (рис. 2.19).

Будем предполагать, что: 1) тело обладает симметрией вращения, то есть это цилиндр или шар; 2) при движении тела не возникает скольжения.

Следовательно, в точке касания A скорость тела относительно наклонной плоскости равна нулю. Отсутствие скольжения объясняется действием силы нормального давления на плоскость \vec{F}_n и касательной силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая может принимать любое значение от 0 до kF_n , где k – коэффициент трения. При качении она устанавливается в этом диапазоне именно такой, чтобы не было скольжения. Решим задачу тремя способами.

Способ 1. Применим основное уравнение динамики вращательного движения относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку A (перпендикулярно плоскости чертежа):

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A.$$

Внешними силами здесь являются сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры \vec{N} . Но сила реакции опоры проходит через точку A , поэтому ее момент относительно точки A равен нулю.

Следовательно,

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin \alpha,$$

где $mgr \sin \alpha$ – момент силы тяжести относительно точки A .

Пусть v_C – линейная скорость точки C .

Очевидно, что $\vec{v}_C = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{r}]$, следовательно, $v_C = \omega r$, так как $v_A = 0$, а $[\vec{\omega}, \vec{r}] = \omega r \sin 90^\circ = \omega r$. Линейное ускорение точки C

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Поэтому будем иметь

$$I_A a_C = mgr^2 \sin \alpha;$$

$$a_C = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{I_A}.$$

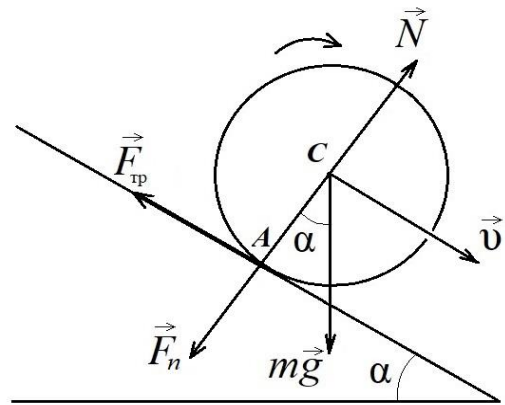


Рис. 2.19. Скатывание тела с наклонной плоскости

Момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа, найдем по теореме Штейнера:

$$I_A = I_C + mr^2.$$

Числитель и знаменатель разделим на mr^2 и получим для шара

$$a_C = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{mr^2}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

Достоинство способа: в искомое уравнение не входит реакция опоры.

Способ 2. Применим уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости чертежа:

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = M_C.$$

Момент силы тяжести будет равен нулю, так как сила тяжести проходит через точку C , следовательно, ее плечо равно нулю. Момент, создаваемый силой реакции опоры, также равен нулю, поэтому играет роль только сила трения $F_{\text{тр}}$. Ее момент $M_C = rF_{\text{тр}}$, следовательно,

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = rF_{\text{тр}}.$$

Второе уравнение получим из теоремы о движении центра масс

$$m \frac{dv_C}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}.$$

Ускорение центра масс (точка C) равно

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

После подстановки и преобразований получим тот же результат для a_C . Кроме того, данный способ позволяет рассчитать силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{I_C}{I_C + mr^2} mg \sin \alpha.$$

Способ 3. Применим закон сохранения механической энергии. Это возможно сделать, так как работа силы трения равна нулю, потому что отсутствует скольжение. Кинетическая энергия вращения тела относительно оси, проходящей через точку A , равна $W_k = \frac{I_A \omega^2}{2}$. Следовательно, $\frac{I_A \omega^2}{2} = mgh$. То есть потенциальная энергия тела переходит в кинетическую энергию вращательного движения относительно оси, проходящей через точку A . Но $h = x \sin \alpha$, где x – путь, пройденный по наклонной плоскости.

Получаем, что $\frac{I_A \omega^2}{2} = mgx \sin \alpha$ или $\frac{I_A v^2}{2r^2} = mgx \sin \alpha$. Диффе-

ренцируя это выражение по времени и замечая, что $\frac{dx}{dt} = v$, снова получим ту же формулу для a_C .

§ 2.7. Вопросы для самоподготовки

1. От каких величин зависит угловое ускорение тела?
2. Что называется угловой скоростью? Как определяется направление угловой скорости и углового ускорения?
3. Может ли обладать моментом импульса материальная точка, движущаяся по прямолинейной траектории?
4. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
5. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
6. Как получить формулу для расчета кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
7. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? Относительно неподвижной оси?
8. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется?
9. Сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
10. Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

§ 2.8. Примеры решения задач

Пример 2.1. Определите угловое ускорение ε тела, если после $N = 50$ полных оборотов частота его вращения изменилась от $n_1 = 4$ об/с до $n_2 = 6$ об/с.

Решение. Полное число оборотов N и частота n вращения связаны с полным углом φ поворота и угловой скоростью ω соотношениями

$$\varphi = 2\pi N; \quad \omega = 2\pi n.$$

Считая, что начальный угол $\varphi_0 = 0$, и учитывая, что по условию задачи $n_2 > n_1$, запишем уравнения движения равноускоренно вращающегося тела:

$$\varphi = \omega_1 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 2\pi n_1 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t; \quad 2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \varepsilon t.$$

Решая совместно эти уравнения и учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, получаем

$$\varepsilon = \frac{\pi(n_2^2 - n_1^2)}{N} = 1,26 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Пример 2.2. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной ℓ и массой m , расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки (рис. 2.20). Скамья с человеком вращается с частотой n_1 . С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение так, что центр масс системы будет находиться на оси вращения? Момент инерции человека и скамьи J_{z0} .

| | |
|-------------------------------------|---|
| Дано: ℓ, m n_1, J_{z0} | Решение. На систему «скамья с человеком – стержень» действуют внешние силы: сила тяжести и реакция опоры, линия действия которых совпадает с осью вращения. Следовательно, моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Силой трения для скамьи Жуковского можно пренебречь. |
| $n_2 - ?$ | |

Момент импульса системы остается постоянным по величине и направлению:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2, \quad J_{z1} \vec{\omega}_1 = J_{z2} \vec{\omega}_2,$$

где $J_{z1} \vec{\omega}_1$ и $J_{z2} \vec{\omega}_2$ – моменты импульса системы для двух положений стержня; $J_{z1} = J_{z0}$ – момент инерции системы, когда стержень находится в вертикальном положении (рис. 2.20, а); $J_{z2} = J_{z0} + J_{ст}$ – момент инерции системы, когда стержень расположен горизонтально (рис. 2.20, б). Момент инерции $J_{ст}$ стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно его длине, равен $J_{ст} = \frac{1}{12} m \ell^2$.

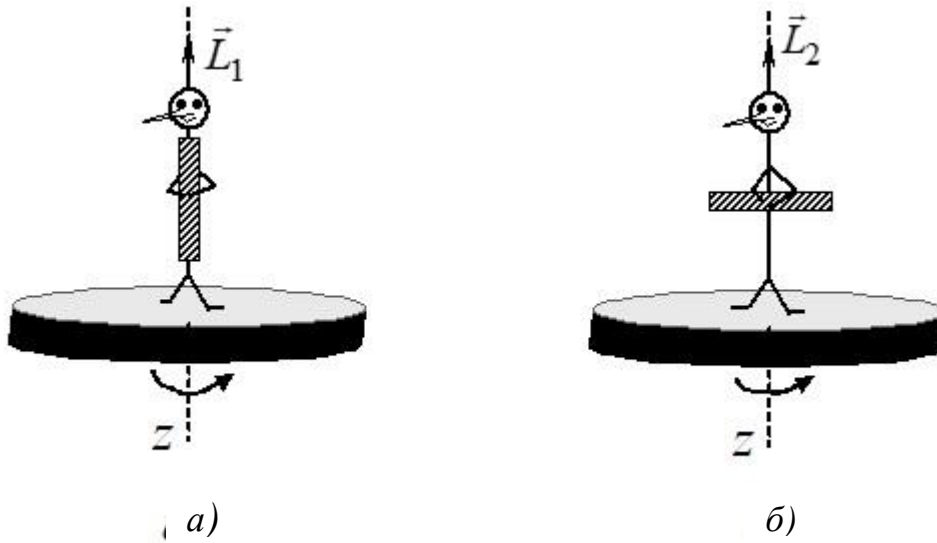


Рис. 2.20. Схема к расчету момента импульса системы относительно вертикальной оси

Учитывая связь угловой скорости и частоты вращения $\omega = 2\pi n$, получаем

$$J_{z0} 2\pi n_1 = \left(J_{z0} + \frac{1}{12} m \ell^2 \right) 2\pi n_2.$$

Отсюда

$$n_2 = \frac{J_{z0} n_1}{J_{z0} + \frac{1}{12} m \ell^2}.$$

Пример 2.3. Стержень длиной ℓ и массой $m_{ст}$ может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис. 2.21). На расстоянии $r = 0,75\ell$ от оси вращения стержня ударяет пуля массой m , летящая в горизонтальном направлении со скоростью V_0 , и застревает в стержне. При этом стержень

отклоняется на угол φ . Определите скорость пули.

| | |
|-----------------|---|
| Дано: | Решение. Взаимодействие пули и стержня неупругое, поэтому после удара пули и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковой скоростью. В момент удара на пулю и стержень действуют силы тяжести и сила упругости, линия действия которых проходит через ось вращения. Моменты этих сил относительно оси вращения z равны нулю. |
| ℓ | |
| $m_{\text{ст}}$ | |
| $r = 0,75\ell$ | |
| m | |
| φ | |
| $v_0 - ?$ | |

Поэтому для системы «стержень – пуля» справедлив закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2.$$

Момент импульса системы до удара равен моменту импульса пули:

$$L_1 = mv_0 r,$$

где r – расстояние от оси вращения до точки попадания пули на стержень.

Момент импульса системы после удара

$$L_2 = mvr + J_z \omega,$$

где mvr – момент импульса пули относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса; v – линейная скорость пули, равная линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения; $J_z \omega$ – момент импульса стержня относительно указанной оси; ω – угловая скорость вращения стержня.

Учитывая, что $v = \omega r$, момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его конец, определяется по формуле

$$J_{\text{ст}} = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

Получим
$$mv_0 r = mr^2 \omega + \frac{m_{\text{ст}} \ell^2}{3} \omega.$$

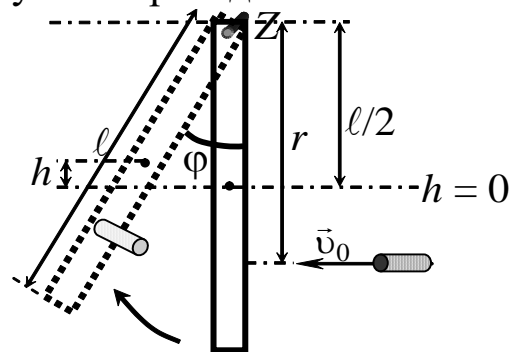


Рис. 2.21. Схема к расчету взаимодействия пули и стержня

Отсюда
$$v_0 = \frac{\left(0,75^2 ml + \frac{m_{\text{ст}} \ell^2}{3}\right) \omega}{0,75 ml}.$$

Для определения скорости v_0 пули необходимо найти угловую скорость вращения стержня. Пуля, ударившись о стержень, приводит его в движение с угловой скоростью ω , сообщая ему кинетическую энергию:

$$W_{\text{к}} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции стержня (моментом инерции пули можно пренебречь, так как масса $m \ll m_{\text{ст}}$).

При повороте стержня на угол φ его центр масс поднимается на высоту h относительно нулевого уровня:

$$h = \frac{\ell}{2}(1 - \cos \varphi).$$

В отклоненном положении стержень обладает потенциальной энергией:

$$U = m_{\text{ст}} g h = m_{\text{ст}} g \frac{\ell}{2}(1 - \cos \varphi).$$

На основании закона сохранения механической энергии записываем

$$\frac{J_{\text{ст}} \omega^2}{2} = m_{\text{ст}} g \frac{\ell}{2}(1 - \cos \varphi).$$

Откуда
$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{ст}} g \ell (1 - \cos \varphi)}{J_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \varphi)}{\ell}}.$$

Следовательно,
$$v_0 = \frac{\left(0,75^2 ml + \frac{m_{\text{ст}} \ell^2}{3}\right)}{0,75 ml} \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \varphi)}{\ell}}.$$

Пример 2.4. Через блок в виде диска массой 200 г перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами

300 и 400 г (рис. 2.22). С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебечь.

Дано:
 $m = 0,2$ кг
 $m_1 = 0,3$ кг
 $m_2 = 0,4$ кг
 $a = ?$

Решение. Запишем второй закон Ньютона для грузов, движущихся поступательно:

$$m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1, \quad m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2.$$

Выбираем положительное направление оси x . Записываем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a_1; \\ -m_2 g + T_2 &= -m_2 a_2. \end{aligned}$$

Так как $a_1 = a_2 = a$, то

$$T_1 = m_1 a + m_1 g; \quad (2.18)$$

$$T_2 = -m_2 a + m_2 g. \quad (2.19)$$

Записываем основной закон динамики вращательного движения для блока $\vec{M} = I_O \vec{\epsilon}$.

Векторы момента силы и углового ускорения направлены вдоль оси вращения блока от нас, поэтому в проекции на ось O

$$M = I_O \epsilon. \quad (2.20)$$

При движении грузов $T_2' > T_1'$, поэтому блок вращается по часовой стрелке. Вращающий момент, приложенный к блоку:

$$M = R(T_2' - T_1').$$

Поскольку нить невесомая и нерастяжимая и согласно третьему закону Ньютона, $a_1 = a_2$, $T_2' = T_2$ и $T_1' = T_1$, поэтому

$$M = R(T_2 - T_1).$$

Момент инерции блока в виде диска относительно оси O

$$I_O = \frac{1}{2} m R^2.$$

Угловое ускорение связано с линейным соотношением

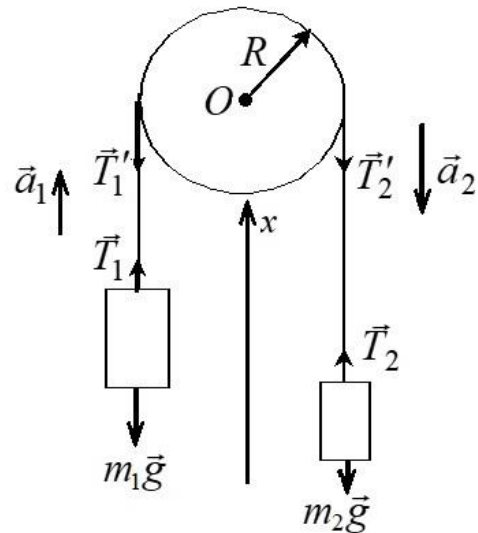


Рис. 2.22. Схема к расчету ускорения грузов на блоке

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Подставим в формулу (2.20) выражения для M , I_O , ε и получим

$$M = R(T_2 - T_1) = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R}.$$

Откуда
$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}.$$

Заменяем T_1 из (2.18) и T_2 из (2.19), тогда получим

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{ma}{2}.$$

Выразим ускорение $a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + 0,5m}$, вычисляя получим

$$a = 10 \frac{0,4 - 0,3}{0,4 + 0,3 + 0,1} = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2.6. Платформа радиусом 1 м вращается с частотой 6 мин⁻¹. На краю платформы стоит человек массой 80 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек приблизится к центру платформы и остановится на расстоянии 0,5 м от него? Момент инерции платформы 100 кг·м². Трением пренебречь.

Дано:

$$R = 1 \text{ м}$$

$$n_1 = 6 \text{ мин}^{-1}$$

$$m = 80 \text{ кг}$$

$$r = 0,5 \text{ м}$$

$$I = 100 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$n_2 = ?$$

Решение. На систему «платформа – человек» действуют сила тяжести и сила реакции опоры, направления которых противоположны и совпадают с осью вращения. Силой трения пренебрегаем. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю. Система замкнута. Выполняется закон сохранения момента импульса

$$\vec{L}_2 = \vec{L}_1.$$

Момент импульса системы до взаимодействия

$$L_1 = I_1 \omega_1 = (I + mR^2) 2\pi n_1,$$

где mR^2 – момент инерции человека, который в данной задаче рассматривается как материальная точка, а $\omega_1 = 2\pi n_1$.

Момент импульса системы после взаимодействия

$$L_2 = I_2 \omega_2 = (I + mr^2) 2\pi n_2.$$

Тогда из закона сохранения момента импульса следует

$$(I + mR^2) 2\pi n_1 = (I + mr^2) 2\pi n_2;$$

$$n_2 = n_1 \frac{I + mR^2}{I + mr^2};$$

$$n_2 = 6 \frac{100 + 80 \cdot 1}{100 + 80 \cdot 0,25} = 9 \text{ мин}^{-1}.$$

§ 2.9. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

2.1–2.10. Колесо радиусом R вращается вокруг оси так, что зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$. Определите угловую скорость, угловое ускорение, линейную скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорения точки, лежащей на ободу колеса, через t_1 после начала движения. На рисунке покажите направление всех векторов.

| Задача | R | A | B | C | D | t_1 |
|--------|------|-----|-------|--------------------|--------------------|-------|
| | м | рад | рад/с | рад/с ² | рад/с ³ | с |
| 2.1 | 0,6 | 1 | -2 | 1 | 3 | 2 |
| 2.2 | 0,25 | -2 | 3 | 2 | -4 | 3 |
| 2.3 | 0,5 | 3 | -4 | 3 | 5 | 1,5 |
| 2.4 | 2,5 | -4 | 5 | 4 | -2 | 2 |
| 2.5 | 0,8 | 5 | -6 | 5 | 3 | 3 |
| 2.6 | 0,9 | -1 | 4 | 1 | -2 | 2,5 |
| 2.7 | 0,75 | 2 | -5 | 2 | 6 | 3,5 |
| 2.8 | 0,5 | -3 | -6 | 3 | 5 | 2 |
| 2.9 | 0,35 | 4 | -2 | 4 | 4 | 3 |
| 2.10 | 0,7 | -5 | 3 | 2 | -2 | 2 |

2.11–2.20. Колесо, вращаясь с постоянным угловым ускорением, изменило частоту вращения от n_1 до n_2 , совершив N оборотов. Определите угловое ускорение колеса. За какое время частота вращения изменилась от n_1 до n_2 и от n_2 до n_3 , если угловое ускорение колеса останется неизменным?

| Задача | n_1 | n_2 | n_3 | N |
|--------|-------|-------|-------|-----|
| | 1/с | 1/с | 1/с | |
| 2.11 | 2 | 4 | 8 | 10 |
| 2.12 | 10 | 6 | 4 | 7 |
| 2.13 | 3 | 8 | 5 | 6 |
| 2.14 | 2 | 5 | 7 | 14 |
| 2.15 | 4 | 8 | 5 | 9 |
| 2.16 | 5 | 9 | 7 | 10 |
| 2.17 | 6 | 8 | 10 | 11 |
| 2.18 | 7 | 3 | 1 | 12 |
| 2.19 | 8 | 4 | 2 | 6 |
| 2.20 | 9 | 4 | 6 | 12 |

2.21. Стержень длиной $\ell = 1,5$ м и массой $m = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середине стержня застревает пуля массой $m_1 = 10$ г, летевшая в горизонтальном направлении со скоростью $V_1 = 500$ м/с. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

2.22. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой $m = 0,4$ кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с (траектория мяча проходит на расстоянии $\ell = 0,8$ м от вертикальной оси z вращения скамьи). С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч? Считать, что суммарный момент инерции человека и скамьи $I_z = 6$ кг \cdot м².

2.23. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м, стоит человек. Масса платформы 200 кг, масса человека 80 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найдите угловую скорость ω вращения платформы, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно Земли? Трением пренебречь.

2.24. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m = 60$ кг. На какой угол φ повернется платформа массой 240 кг, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку на платформе?

2.25. Тонкий прямой стержень длиной $\ell = 1$ м может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стерж-

ня. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60^\circ$ от положения равновесия и отпустили. Определите линейную скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения его через положение равновесия.

2.26. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 0,8 м и массой 6 кг стоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него со скоростью 10 м/с мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 м от оси скамьи. Скамью считать диском, а человека – материальной точкой.

2.27. Пластичный шар массой 2 кг и радиусом 5 см раскрутили до угловой скорости 50 рад/с. В процессе вращения шар деформировался в эллипсоид с моментом инерции $1,6 \cdot 10^{-2}$ кг/м². Определите изменение кинетической энергии системы.

2.28. Однородный стержень длиной 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

2.29. Сплошной цилиндр массой 2 кг, катящийся без скольжения со скоростью 0,09 м/с, ударяется о массивную стенку и откатывается от нее со скоростью 0,05 м/с. Найдите количество теплоты, выделившейся при ударе.

2.30. На верхней поверхности горизонтального диска массой 8 кг и радиусом 50 см, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси симметрии, проложены по окружности радиусом 40 см рельсы игрушечной железной дороги. В некоторый момент по рельсам начинает двигаться электропоезд массой 0,5 кг со скоростью 1 м/с. Определите изменение кинетической энергии диска.

2.31. Горизонтальная платформа массой 200 кг, имеющая форму диска, может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. Определите кинетическую энергию платформы после того, как человек спрыгнет с нее со скоростью 2 м/с, направленной по касательной к краю платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

2.32. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью 2 м/с. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет своей кинетической энергии? Синус угла наклона горки равен 0,01.

2.33. Покоящийся стержень длиной 1 м и массой 8 кг подвешен шарнирно за верхний конец. В середину стержня ударяет пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится стержень после удара?

2.34. Маховик в виде диска массой 80 кг и радиусом 30 см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту вращения 10 об/с?

2.35. Шарик массой 50 г, находящийся на горизонтальной плоскости, привязан к нити длиной 80 см. Шарик вращается по окружности, скользя без трения по горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через другой конец нити. Частота вращения шарика 2 об/с. Нить постепенно укорачивается, и шарик приближается к оси вращения до расстояния 40 см. Какую работу совершит сила натяжения укорачивая нить?

2.36. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой 30 кг. Определите работу A , которая при этом будет совершена силами гравитационного поля Земли. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R_3 считать известными.

2.37. По круговой орбите вокруг Земли обращается спутник с периодом 90 мин. Определите высоту спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R_3 считать известными.

2.38. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу 2 кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью 5 м/с. Найдите кинетические энергии этих тел.

2.39. Шарик массой $m = 60$ г, привязанный к концу нити длиной $L_1 = 1,2$ м, вращается с частотой $n_1 = 2$ (1/с), опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси до расстояния $L_2 = 0,6$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

2.40. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 620$ км. Определите период обращения спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R_3 считать известными.

2.41. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром $D = 75$ см и массой $m = 40$ кг приложена сила $F = 1$ кН. Определите угловое ускорение ε и частоту вращения n маховика через

время $t = 10$ с после начала действия силы. Силой трения пренебречь.

2.42. Определите линейную и угловую скорости спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на высоте $h = 1200$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R_3 считать известными.

2.43. На обод маховика диаметром $D = 60$ см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Определите момент инерции I маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время $t = 3$ с приобрел угловую скорость $\omega = 9$ рад/с.

2.44. Какова масса Земли, если известно, что Луна в течение года совершает 13 обращений вокруг Земли и расстояние от Земли до Луны равно $3,84 \cdot 10^8$ м?

2.45. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 60$ г перекинута через блок диаметром $D = 4$ см. Определите момент инерции I блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $1,5$ рад/с². Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

2.46. По горизонтальной плоскости катится диск со скоростью 3 м/с. Определите коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь 9 м.

2.47. Определите момент силы M , который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой $n = 12$ (1/с), чтобы он остановился в течение времени $\Delta t = 8$ с. Диаметр блока $D = 30$ см. Массу блока $m = 4$ кг считать равномерно распределенной по ободу.

2.48. На конце тонкого стержня длиной 60 см укреплен шарик массой 55 г. Пренебрегая размерами шарика, определите момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Масса распределена вдоль стержня равномерно с линейной плотностью $\tau = 0,15$ кг/м.

2.49. Длина тонкого стержня 1 м. Определите момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к его длине и проходящей через точку стержня, удаленную на $0,25$ м от одного из концов. Масса распределена равномерно с линейной плотностью $\tau = 0,2$ кг/м.

2.50. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены

грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определите коэффициент f трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и масса блока одинаковы и грузы движутся с ускорением $a = 6,2 \text{ м/с}^2$. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения, действующей на блок, пренебречь.

2.51. К концам легкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами $m_1 = 0,25 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,35 \text{ кг}$. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока $m = 0,40 \text{ кг}$, а его ось движется вертикально вверх с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$? Силами трения и проскальзывания нити по блоку пренебречь.

2.52. На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири массой $m = 5 \text{ кг}$ каждая. Расстояние от каждой гири до оси скамьи $L_1 = 70 \text{ см}$. Скамья вращается с частотой $n_1 = 1,5 \text{ (1/с)}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу A произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $L_2 = 20 \text{ см}$? Момент инерции человека и скамьи (вместе) относительно оси $I = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

2.53. Маховик в виде диска массой 35 кг и радиусом 20 см был раскручен до угловой скорости 480 об/мин и затем предоставлен самому себе. Под влиянием трения маховик остановился. Найдите момент сил трения, считая его постоянным, если маховик остановился через 50 с .

2.54. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью $6,5 \text{ км/с}$. На какую высоту она поднимается?

2.55. Определите момент импульса спутника Земли массой $1,2 \text{ т}$, движущегося по круговой орбите радиусом 7200 км , относительно центра Земли.

2.56. Определите линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1 \text{ м}$.

2.57. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 520 \text{ км}$. Определите период обращения спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.

2.58. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50 \text{ г}$ и $m_2 = 60 \text{ г}$ перекинута через блок диаметром $D = 7 \text{ см}$.

Определите момент инерции I блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1,4 \text{ рад/с}^2$. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

ГЛАВА III. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

§ 3.1. Основные понятия

Силы, действующие на материальную точку, называются центральными, если они зависят только от расстояния между материальной точкой и некоторой неподвижной точкой – центром силы – и направлены всюду либо от центра, либо к центру сил. Если центр сил принять за начало координат, то центральная сила

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из центра сил в рассматриваемую точку поля; $F_r(r)$ – проекции силы F на радиус-вектор \vec{r} .

§ 3.2. Свойства поля центральных сил

1. Элементарная работа центральных сил определяется выражением $\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = F_r(r) dr$, так как скалярное произведение $\vec{r}\vec{r} = r^2$, $\vec{r}d\vec{r} = r dr$, а работа по замкнутому пути

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_L F_r(r) dr = 0,$$

поэтому поле центральных сил потенциально.

2. В поле центральных сил проекция силы обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра сил:

$$F_r(r) = \frac{\beta}{r^2},$$

где β – const, зависящая от природы центральных сил.

Примерами таких полей являются гравитационные поля материальной точки и однородного шара, а также электростатическое поле точечного электрического заряда, равномерно заряженной сферы или шара.

3. Для центральных полей потенциальная энергия будет равна

$$U = -\int_{\infty}^r F_r(r) dr = \int_r^{\infty} F_r(r) dr = \int_r^{\infty} \frac{\beta dr}{r^2} = \frac{\beta}{r}.$$

Например:

1. По закону всемирного тяготения Ньютона

$$F_r(r) = -G \frac{Mm}{r^2},$$

где $G = 6,62 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная; M – масса материальной точки, создающей гравитационное поле; m – масса точки, движущейся в поле. Таким образом, постоянная $\beta = -GMm$, а потенциальная энергия материальной точки

$$U = -G \frac{Mm}{r}.$$

2. По закону Кулона

$$F_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2};$$

$$\beta = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0};$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

§ 3.3. Закономерности движения материальной точки в поле центральных сил (на примере планет Солнечной системы)

В центре системы находится Солнце. Поле его центральных сил

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

1. Рассчитаем момент центральной силы \vec{F} относительно центра сил:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{F_r(r)}{r} [\vec{r}, \vec{r}] = 0,$$

то есть он всегда равен нулю, так как угол между векторами \vec{r} и \vec{F} равен нулю. Из закона сохранения момента импульса будем иметь

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} = 0; \quad \vec{L} = \text{const};$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const.}$$

Вектор \vec{L} всегда перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы \vec{r} и $m\vec{v}$, следовательно, такое движение называется плоским. Скорость точки можно разложить на две составляющие: радиальную и трансверсальную (в полярной системе координат).

$$\text{Тогда} \quad \vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}_r] + m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi] = m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi] = mr v_\varphi,$$

так как $m[\vec{r}, \vec{v}_r] = 0$. Подставляя в полученную формулу выражение для трансверсальной скорости, будем иметь, что момент импульса материальной точки равен

$$L = mr \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2m\sigma;$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\sigma = \frac{L}{2m}$ – секторная скорость.

Но $L = \text{const}$, поэтому и секторная скорость также постоянная величина.

Определение: при движении материальной точки в поле центральных сил секторная скорость точки остается постоянной. Это второй закон Кеплера (1609 г.)

2. Найдем траекторию движения материальной точки в поле центральных сил. Будем исходить из того, что данная система консервативна, следовательно,

$$E = W_k + U = \text{const.} \quad (3.1)$$

Кинетическую энергию движущейся материальной точки представим как

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right].$$

Данное выражение подставим в формулу (3.1) и разрешим его относительно $\frac{dr}{dt}$. Тогда получим

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Но $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$. Отсюда выразим $d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt$.

Из выражения (3.2) выразим dt и подставим в полученную формулу:

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2}} = \frac{\frac{L}{r^2} dr}{m\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2}}.$$

Внесем m под знак корня, тогда будем иметь

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m(E-U) - \left(\frac{L}{r}\right)^2}} dr.$$

Отсюда получим выражение для φ

$$\varphi = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2m(E-U) - \left(\frac{L}{r}\right)^2}}. \quad (3.3)$$

Зададим вид функции $U(r)$. Ранее мы получили $U = \frac{\beta}{r}$.

Подставляя в формулу (3.3), получим

$$\varphi = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mE - 2m\frac{\beta}{r} - \left(\frac{L}{r}\right)^2}}.$$

Проведем алгебраическую операцию в знаменателе: дополним до суммы квадратов двух чисел, а в числителе введем под знак дифференциала константу, это сути не изменит.

Тогда $\varphi = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right)}{\sqrt{\left[2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2\right] - \left[\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right]^2}}$.

Введем обозначения

$$\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L} = \varepsilon; \quad 2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2 = a^2.$$

Тогда $\varphi = - \int \frac{d\varepsilon}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2}} = \arccos\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$.

При $\varepsilon = a$ $\varphi = 0$. Окончательно будем иметь

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}.$$

Отсюда будем иметь

$$\cos \varphi = \frac{\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}.$$

Выразим

$$\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L} = \cos \varphi \sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}.$$

Из последнего выражения получим

$$r = \frac{L}{-\frac{m\beta}{L} + \cos \varphi \sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}.$$

Если материальная точка притягивается к центру сил, то $\beta < 0$ и уравнение траектории запишется

$$r = \frac{P}{1 + l \cos \varphi}, \quad (3.4)$$

где $P = \frac{L^2}{m|\beta|}$; $l = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\beta^2} + 1}$.

Из формулы (3.4) следует, что траектория материальной точки – кривая второго порядка: P – ее фокальный параметр; l – эксцентриситет.

При $E < 0$ ($l < 1$) – эллиптическая орбита; при $E = 0$ ($l = 1$) – параболическая орбита; при $E > 0$ ($l > 1$) – гиперболическая орбита; при $L = 0$ ($P = 0, l = 0$) – прямолинейная траектория, проходящая через центр сил.

В первых трех случаях центр сил совпадает с одним из фокусов орбиты. Для планет, движущихся в поле сил тяготения Солнца, $E < 0$, поэтому все планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

3. Рассчитаем период обращения. Исходя из того, что секторная скорость постоянна, период обращения планеты найдем как отношение площади, ограниченной орбитой, к секторной скорости:

$$T = \frac{S}{\sigma}.$$

Площадь эллипса $S = \pi ab$. Учитывая, что $b = a\sqrt{1-l^2}$, $P = a(1-l^2)$ и $\sigma = \frac{L}{2m}$, получим

$$T^2 = \frac{\pi^2 Pa^3}{\frac{L^2}{4m^2}}.$$

Учитывая, что $P = \frac{L^2}{m|\beta|}$, где $\beta = GmM$, сформулируем III закон

Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца прямо пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

§ 3.4. Космические скорости

4 октября 1987 г. запущен первый спутник Земли.

12 апреля 1961 г. Ю. А. Гагарин совершил полет на корабле «Восток» вокруг Земли.

Июль 1969 г. – полет американского корабля «Аполлон-11» и высадка на Луну двух космонавтов Нила Армстронга и Эдвина Олдрина.

1970 г. – аппарат «Луна-16» осуществил мягкую посадку на Луну.

Искусственный спутник Земли осуществляет связь и решает прочие задачи.

Первая космическая скорость – это минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно могло стать искусственным спутником Земли. Это скорость движения по круговой траектории

$$\frac{mv_1^2}{R_3} = G \frac{mM_3}{R_3^2};$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3}} = 7,9 \text{ км/с},$$

где R_3 – радиус Земли.

Вторая космическая скорость – это минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно могло без дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца.

Это параболическая скорость, найдем ее из условия

$$W_K + U = E = \text{const.}$$

Вдали от Земли кинетическая энергия тела обращается в ноль, так же как и потенциальная. Следовательно,

$$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM_3}{r} = 0;$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_3}{r}} = \sqrt{2}v_1,$$

где r – расстояние от центра Земли до места запуска.

При запуске с поверхности Земли $v_2 = 11,2 \text{ км/с}$.

Третья космическая скорость – это минимальная скорость, ко-

тору нужно сообщить телу, чтобы оно могло удалиться за пределы Солнечной системы. Если вектор \vec{v}_3 совпадает по направлению с $\vec{v}_{орб}$, то эта скорость равна 16,7 км/с. При этом тело уходит из Солнечной системы по параболе, касающейся орбиты Земли.

Скорость ракеты при старте с поверхности Земли можно рассчитать по формуле Циолковского:

$$v_{\max} = v \ln \frac{m_0}{m_0 - \Delta m},$$

где v – скорость истечения газов, которая для жидкого топлива не превышает $v \leq 5$ км/с, поэтому используют многоступенчатую ракету-носитель; m_0 – исходная масса ракеты; Δm – изменение массы ракеты за счет сгоревшего топлива и отделения ступеней.

§ 3.5. Вопросы для самоподготовки

1. Какую силу называют центральной? Приведите пример центральной силы.
2. Можно ли в случае центрального взаимодействия задачу о движении двух тел свести к задаче о движении одного тела? Как?
3. Докажите, что движение тела приведенной массы в центральном поле является плоским.
4. По каким траекториям может двигаться тело в гравитационном поле?
5. Сформулируйте законы Кеплера.
6. Как период обращения по эллиптической орбите зависит от большой полуоси эллипса? От полной энергии системы?
7. Как зависит площадь эллиптической орбиты от физических констант взаимодействия?
8. Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?
9. Как вычисляются первая и вторая космические скорости?

§ 3.6. Примеры решения задач

Пример 3.1. Средний радиус земной орбиты $R = 1,496 \cdot 10^{11}$ м, период обращения Земли вокруг Солнца $T = 365,25$ сут. Воспользовавшись этими данными, определите массу Солнца M . Орбиту Земли считать окружностью.

| | |
|---|---|
| Дано: $R = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$ $T = 365,25 \text{ сут}$ <hr/> $M - ?$ | <u>Решение.</u> Скорость движения Земли по орбите $v = \frac{2\pi R}{T}.$ Нормальное ускорение Земли |
|---|---|

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Умножим a_n на массу Земли m и приравняем получившееся выражение к силе, с которой Солнце притягивает Землю:

$$m \frac{4\pi^2 R}{T^2} = G \frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

Подставим числовые данные:

$$M = \frac{4\pi^2 (1,496 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Пример 3.2. Какова первая космическая скорость на поверхности Луны? Каково ускорение свободного падения?

| | |
|--|--|
| Дано: $M = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ кг}$ $R = 1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$ <hr/> $v_{1Л} - ? \quad g_{Л} - ?$ | <u>Решение.</u> Первая космическая скорость у поверхности планеты определяется по формуле $v_{1Л} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$ |
|--|--|

Ускорение свободного падения на Луне можно найти из соотношения $\sqrt{\frac{GM_{Л}}{R_{Л}}} = \sqrt{g_{Л} R_{Л}}$. Откуда $g = \frac{GM_{Л}}{R_{Л}^2}$.

Рассчитаем:

$$v_{1Л} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,3 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6}} = 1,67 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,3 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,61 \text{ м/с.}$$

Пример 3.3. Звездный период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет около 12 лет. Каково среднее расстояние Юпитера от Солнца?

Дано:
 $T_1 = 12$ лет
 $T_2 = 1$ год
 $a_2 = 1$ а. е.

$a_1 = ?$

Решение. Среднее расстояние планеты от Солнца равно большой полуоси эллиптической орбиты a . Из третьего закона Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Сравнивая движение планеты с Землей, для которой, приняв звездный период обращения $T_2 = 1$ год, а большую полуось орбиты $a_2 = 1$ а. е., получим простое выражение

$$a_1 = \sqrt[3]{T_1^2}$$

для определения среднего расстояния планеты от Солнца в астрономических единицах по известному звездному (сидерическому) периоду обращения, выраженному в годах. Подставив численные значения, окончательно найдем

$$a_1 = \sqrt[3]{12^2} \text{ а. е.}$$

§ 3.7. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

3.1. Период обращения малой планеты Шагал вокруг Солнца $T = 5,6$ года. Определите большую полуось ее орбиты.

3.2. Уран совершает полный оборот вокруг Солнца за 84 земных года. Во сколько раз (в среднем) он дальше от Солнца, чем Земля?

3.3. Расстояние от астероида Веста до Солнца изменяется в пределах от 2,2 до 2,6 а. е. Найдите период обращения астероида.

3.4. Радиолокационными методами установлено, что кратчайшее расстояние между Землей и Венерой равно 0,28 а. е. Каков период обращения Венеры вокруг Солнца? Орбиты обеих планет считать окружностями, лежащими в одной плоскости.

3.5. Астероид Икар проходит перигелий своей орбиты каждые

409 сут, приближаясь к Солнцу на расстояние 0,187 а. е. Как далеко может удаляться от Солнца Икар?

3.6. Комета Галлея обращается вокруг Солнца за 76 лет, планета Нептун – за 165 лет. Кто из них более удален от Солнца в точке афелия своей орбиты?

3.7. В романе Жюль Верна «Гектор Сервадак» описана комета Галлея с расстоянием от Солнца в афелии 820 млн км и периодом обращения 2 года. Могла ли быть такая комета в действительности?

3.8. Определите массу планеты Уран (в массах Земли), если известно, что спутник Урана Титания обращается вокруг него с периодом 8,7 сут на среднем расстоянии 438 тыс. км. Для Луны эти величины равны соответственно 27,3 сут и 384 тыс. км.

3.9. Чему равна большая полуось орбиты Урана, если звездный период обращения этой планеты вокруг Солнца составляет 84 года? Период обращения Земли вокруг Солнца 1 год, а большая полуось орбиты Земли 1 а. е.

1) 18 а. е.; 2) 18,6 а. е.;

3) 19,2 а. е.; 4) 19 а. е.

3.10. Что такое перигелий орбиты планеты?

1) наиболее удаленная от Солнца точка орбиты планеты;

2) центр орбиты планеты;

3) ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты;

4) нет верного варианта ответа.

3.11. Большая полуось орбиты Земли – это расстояние, принятое за:

1) астрономическую единицу; 2) звездную величину;

3) астрологическую единицу; 4) астрофизическую единицу.

3.12. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце:

1) это первый закон Кеплера; 2) это второй закон Кеплера;

3) это третий закон Кеплера.

3.13. Как далеко от Солнца находится планета, если ее орбитальный период составляет 8 лет?

1) 3 а. е.; 2) 2 а. е.;

3) 4 а. е.; 4) 8 а. е.

3.14. Большая полуось орбиты Марса 1,5 а. е. Чему равен звездный период его обращения вокруг Солнца?

1) 29,3 года; 2) 18,65 года;

3) 1,86 года; 4) 18 лет.

3.15. Что удерживает планеты на их орбитах вокруг Солнца?

1) на орбитах вокруг Солнца планета удерживается вследствие сложения двух движений – прямолинейного движения по инерции и движения к планете, вызываемого ее притяжением;

2) на орбитах вокруг Солнца планета удерживается вследствие сложения прямолинейного движения по инерции и движения по направлению к Солнцу под действием силы солнечного притяжения;

3) на своей орбите около Солнца планета удерживается вследствие прямолинейного движения по инерции;

4) все варианты верны.

3.16. Как зависят периоды обращения спутников от массы планет?

1) чем меньше масса, тем меньше периоды спутников;

2) чем больше масса, тем больше периоды спутников;

3) чем больше масса, тем меньше периоды спутников.

3.17. При каких условиях движение небесных тел будет происходить в точности по законам Кеплера?

1) если в Солнечной системе одна планета;

2) если в Солнечной системе не одна планета, а много, и каждая из них испытывает со стороны других возмущения;

3) в случае, если существуют два взаимно притягивающихся тела.

3.18. Почему движение планет происходит не в точности по законам Кеплера?

1) в Солнечной системе не одна планета, а много, и каждая из них практически имеет несколько спутников;

2) в Солнечной системе не одна планета, а много, и каждая из них движется петлеобразно;

3) в Солнечной системе не одна планета, а много, и каждая из них испытывает со стороны других возмущения.

ГЛАВА IV. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

§ 4.1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

Ранее мы рассматривали уравнения механики относительно инерциальных систем отсчета. Если система отсчета движется ускоренно относительно инерциальной, то она называется *неинерциальной*. Ставится задача найти уравнения механики в неинерциальных системах отсчета. Для этого необходимо знать законы преобразования сил и ускорений.

Будем считать какую-нибудь инерциальную систему неподвижной, а движение относительно нее – *абсолютным*.

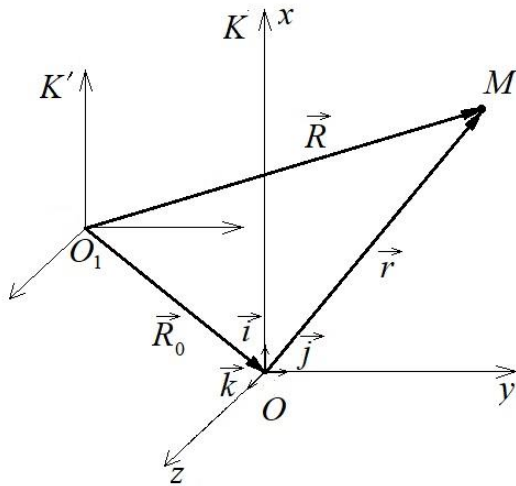


Рис. 4.1. Радиус-векторы точки M в неподвижной K' и подвижной K системах отсчета

Тело, находящееся в движущейся системе отсчета, может также двигаться. Его движение называют *относительным*, а движение самой движущейся системы – *переносным*.

Абсолютное движение тела складывается из его относительного и переносного движений.

Рассмотрим случай, когда система отсчета K движется поступательно относительно неподвижной системы отсчета

K' с ускорением (рис. 4.1). Система K' с началом отсчета в точке O_1 неподвижна, а система K с началом в точке O движется поступательно. Тогда $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки M в движущейся системе отсчета. В каждый момент времени радиус-векторы связаны соотношением

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}.$$

Если дважды продифференцировать данное соотношение, то получим после первого дифференцирования

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}, \quad (4.1)$$

где $\dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_a$ – абсолютная скорость материальной точки относительно неподвижной системы K' , а $\dot{\vec{R}}_0 = \frac{d\vec{R}_0}{dt} = \vec{v}_0$ – это переносная скорость, то есть скорость движения начала подвижной системы отсчета относительно неподвижной; $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – это относительная скорость движения точки, то есть скорость точки относительно начала подвижной системы K .

После второго дифференцирования будем иметь

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}. \quad (4.2)$$

Вектор $\ddot{\vec{R}} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{a}_a$ – абсолютное ускорение; $\ddot{\vec{R}}_0 = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} = \vec{a}_0$ – относительное ускорение; $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ – относительное ускорение точки. Итак, при поступательном движении

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}; \\ \vec{a}_a = \vec{a}_0 + \vec{a}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчета записывается как $m\vec{a}_a = \vec{F}$. Если подставить в данное выражение величину абсолютного ускорения из формулы (4.3), тогда получим

$$\begin{aligned} m\vec{a}_0 + m\vec{a} &= \vec{F}; \\ m\vec{a} &= \vec{F} - m\vec{a}_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) есть уравнение относительного движения материальной точки. При этом правая часть формально является силой, действующей на материальную точку, но \vec{F} – реальная сила (результат взаимодействия тел). Она инвариантна относительно перехода к другой инерциальной системе отсчета. Слагаемое $-m\vec{a}_0$ возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения системы отсчета.

Оно называется *силой инерции* при поступательном движении, которая изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, то есть не является инвариантом. Этим силы инерции отличаются от «настоящих» сил.

Кроме того, силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся системе.

Реальны или фиктивны силы инерции? Силы инерции особенно заметны при разгоне самолета, поезда, автомобиля и т. д. и их торможении. Если в центре салона подвесить маятник, то он будет отклоняться вперед или назад при ускорениях. Особенно больших величин достигают силы инерции при запуске космических кораблей, а также при катапультировании летчиков. Таким образом, силы инерции можно рассматривать как действие на тело реальных силовых полей.

§ 4.2. Силы инерции при ускоренном произвольном движении системы отсчета

Пусть система отсчета K движется совершенно произвольно относительно неподвижной системы отсчета K' . Это движение можно разложить на поступательное со скоростью \vec{v}_0 (скорость движения точки O) и вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O . Угловую скорость вращения обозначим $\vec{\omega}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы системы K . Их направления с течением времени могут изменяться. Каждый из них вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда их производные по времени

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}]; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}]; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}].$$

Пусть x, y, z – координаты точки M в движущейся системе K , то есть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Дифференцируя это выражение, получаем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right).$$

В этом выражении первая скобка есть $\vec{v}_{\text{отн}}$, так как $\vec{v}_{\text{отн}} = \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right)$.

Далее во вторую скобку подставим вместо производных их значения:

$$\begin{aligned} x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} &= x[\vec{\omega}, \vec{i}] + y[\vec{\omega}, \vec{j}] + z[\vec{\omega}, \vec{k}] = \\ &= [\vec{\omega}, (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Учитывая, что $\vec{v}_a = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$ и что переносная скорость складывается из скорости поступательного движения начала координат O и скорости $[\vec{\omega}, \vec{r}]$, возникающей из-за вращения, получим, что $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]$. В этом выражении переносная скорость есть абсолютная скорость, которую имела бы точка M , если бы она покоилась в движущейся системе K . Для вычисления абсолютного ускорения продифференцируем выражение $\vec{v}_a = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}$. Тогда, с учетом соотношения $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]$, получим

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right];$$

$$\frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) = \vec{a}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}],$$

где $\vec{a}_{\text{отн}} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$.

Преобразуем выражение

$$\left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \left[\vec{\omega}, (\vec{v}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}, \vec{r}]) \right] = [\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

Окончательно будем иметь

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\text{отн}} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + \frac{d\vec{v}_0}{dt} + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{Кор}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}$ зависит только от движения системы K относительно K' . Слагаемое $\vec{a}_{\text{Кор}}$ – ускорение Кориолиса.

Исследуем переносное ускорение. Слагаемое $\frac{d\vec{v}_0}{dt}$ вызвано поступательным движением системы, а остальные – вращательным, причем слагаемое $\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right]$ отражает неравномерность вращения;

слагаемое $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$ – центростремительное ускорение, направленное к мгновенной оси вращения. Действительно, $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$, то есть через компонент, перпендикулярный и параллельный оси вращения. Но $[\vec{\omega}, \vec{r}_\parallel] = 0$, следовательно, $\vec{a}_ц = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]]$. Раскрывая двойное векторное произведение и учитывая, что $(\vec{\omega}, r_\perp) = 0$, получим $\vec{a}_ц = -\omega^2 \vec{r}_\perp$.

Запишем уравнение относительного движения в виде

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{Кор} - m\vec{a}_{пер};$$

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} + 2m[\vec{v}_{отн}, \vec{\omega}] - m\frac{d\vec{v}_0}{dt} + m\vec{\omega}^2 \vec{r}_\perp - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right].$$

К настоящей силе \vec{F} добавились сила Кориолиса $2m[\vec{v}_{отн}, \vec{\omega}]$ и переносная сила инерции, состоящая из трех слагаемых. Два из них уже известны, а слагаемое $m\vec{\omega}^2 \vec{r}_\perp = \vec{F}_ц$ называется центробежной силой инерции (центробежной силой). Ее действию подвергаются пассажиры в автомобиле на поворотах, летчики при исполнении фигур высшего пилотажа. Центробежные силы используются в регуляторах, сушилках белья, циклонах, сепараторах.

Центробежные силы существуют лишь в ускоренно движущихся (вращающихся) системах отсчета и исчезают при переходе к инерциальным системам отсчета.

Парадокс. Пусть тело движется по окружности. На него действуют две силы: центростремительная \vec{F}_1 , направленная к центру, и центробежная \vec{F}_2 , направленная от него. Эти силы равны по модулю и уравновешивают друг друга: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. По закону инерции тело должно двигаться прямолинейно и равномерно. Противоречие возникло потому, что движение было рассмотрено относительно инерциальной системы отсчета, в которой никаких центробежных сил нет, а есть только центростремительная сила \vec{F}_1 , которая сообщает телу центростремительное ускорение. Это, например, натяжение шнура, к которому привязано тело.

Вводить центробежную силу можно лишь тогда, когда движение рассматривают относительно вращающейся системы отсчета.

Сила Кориолиса возникает только тогда, когда система отсчета K вращается, а материальная точка движется относительно этой си-

стемы. Она зависит от $\vec{v}_{\text{отн}}$. Когда пассажир стоит в движущемся автобусе, то на поворотах он испытывает действие центробежной силы инерции. Если во время поворота пассажир будет еще дополнительно перемещаться внутри автобуса, то на него будет действовать и сила Кориолиса, которая перпендикулярна $\vec{v}_{\text{отн}}$.

Указание. При решении задач на динамику криволинейного движения необходимо рассматривать тело во вращающейся системе отсчета, где оно покоится. Тогда задачи сводятся к нахождению условия равновесия тела под действием силы тяжести и центробежной силы инерции.

§ 4.3. Вопросы для самоподготовки

1. Как и почему необходимо рассматривать силы инерции?
2. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
3. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Как они проявляются?
4. Автомобиль делает резкий поворот. Пассажир, сидящий у правой стенки, оказался прижатым к ней. В какую сторону сделал поворот автомобиль?
5. В какую сторону будет смещаться относительно Земли реактивный снаряд, пущенный вдоль меридиана?

§ 4.4. Пример решения задачи

Пример. С какой скоростью движется автомобиль по выпуклому мосту с радиусом кривизны $R = 80$ м, если в верхней точке сила его давления на мост уменьшается вдвое по сравнению с движением по горизонтальному участку пути?

Дано:

$$R = 80 \text{ м}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 2$$

$$v - ?$$

Решение. Подвижную систему отсчета свяжем с автомобилем и рассмотрим его в верхней точке траектории. Относительно выбранной системы отсчета автомобиль покоится. На него действуют при этом: сила тяжести $m\vec{g}$ и центробежная сила инерции $F_{\text{ц/беж}} = \frac{mv^2}{R}$ (рис. 4.2).

Сила давления автомобиля на мост в верхней точке равна половине его силы тяжести, следовательно, вторая половина силы тяжести компенсируется за счет центробежной силы инерции, то есть

$$\frac{mg}{2} = \frac{mv^2}{R};$$

$$v = \sqrt{\frac{gR}{2}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 80}{2}} = 19,8 \text{ м/с.}$$

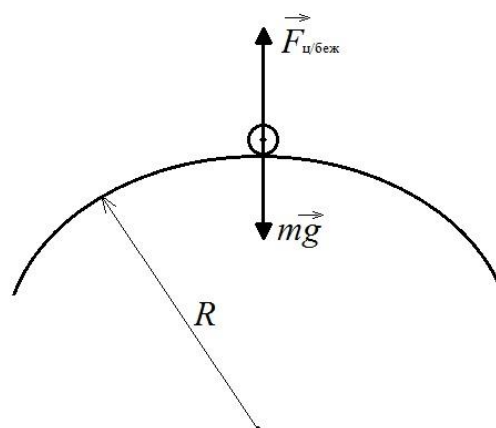


Рис. 4.2. Схема сил к примеру решения задачи

§ 4.5. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

4.1. Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиусом R . Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение a_0 , и тело начало скользить вниз. Найдите скорость тела относительно шара в момент отрыва.

4.2. Какова сила инерции, действующая на материальную точку массой m , подвешенную на нити к потолку вагона, движущегося с ускорением a_0 ?

4.3. Из центра вращающейся карусели радиусом R по мишени, установленной на краю карусели в точке A , производится выстрел. Найдите отклонение пули от мишени, если угловая скорость вращения карусели равна ω , скорость пули — v . При расчете принять $\omega R \ll v$.

4.4. Вагон катится вдоль горизонтального участка дороги. Сила трения составляет 20 % от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой 10 г. Определите силу, действующую на нить и угол отклонения нити от вертикали.

4.5. Тело массой 1,5 кг, падая свободно в течение 5 с, попадает на Землю в точку с географической широтой 45° . Учитывая вращение Земли, нарисуйте и определите все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю.

4.6. Тело находится у основания абсолютно гладкого клина с углом $\alpha = 20^\circ$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением $a = 4 \text{ м/с}$. За какое время тело достигнет верхнего края клина?

Длина наклонной грани 1 м.

4.7. На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 40\pi \text{ с}^{-2}$, около оси находится закрепленная неподвижно муфта массы $m = 100 \text{ г}$. В некоторый момент муфту отпускают, и она скользит без трения вдоль стержня. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Найдите расстояние x муфты от оси в любой момент времени t . В начальный момент центр тяжести муфты находится на расстоянии $x_0 = 2 \text{ см}$ от оси.

4.8. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения μ между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом $R = 200 \text{ м}$ при скорости $v = 100 \text{ км/ч}$?

4.9. Автомобиль с шириной колеи $2b$ и высотой h центра масс над землей проходит горизонтальное закругление дороги радиусом

R . 1. Покажите, что при скорости автомобиля $v > \frac{bRg}{h}$ он опрокинется,

если не возникнет скольжения колес в направлении, перпендикулярном движению автомобиля. 2. Предполагая, что скорость автомобиля достаточна для того, чтобы он мог опрокинуться, найдите, при каком минимальном значении коэффициента трения μ между колесами автомобиля и покрытием дороги это может произойти.

4.10. Велосипедное колесо радиусом R вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени шарик находится у обода колеса. Какую начальную скорость v_0 следует сообщить шарiku в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть центра? Угловая скорость вращения ω поддерживается постоянной.

4.11. Рассчитайте величину поперечного смещения снаряда, выпущенного в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду полета. Выстрел произведен на широте $\varphi = 60^\circ$. Начальная скорость снаряда 500 м/с . В момент выстрела ствол орудия был направлен: а) на юг; б) на север. Сопротивление воздуха не учитывать.

4.12. Из ружья произведен выстрел строго вертикально вверх (то есть параллельно линии отвеса на данной широте). Начальная

скорость пули $v_{0y} = 100$ м/с. Географическая широта местности $\varphi = 60^\circ$. Определите приблизительно, на каком расстоянии и в каком направлении от места выстрела упадет пуля на Землю.

4.13. На полюсе установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально вдоль меридиана и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением a . Масса пушки ($M = 1000$ кг) значительно больше массы снаряда ($m = 10$ кг). Длина ствола значительно больше его диаметра.

4.14. Один из маятников Фуко установлен в Санкт-Петербурге в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (то есть наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определите боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Санкт-Петербурга $\varphi = 60^\circ$.

4.15. Движение тела в неинерциальных системах отсчета

- 1) нельзя описать, используя законы Ньютона;
- 2) нельзя описать, используя уравнения движения;
- 3) можно описать, используя преобразования системы отсчета;
- 4) можно описать, используя фиктивную силу инерции.

4.16. Сила инерции – это ...

- 1) фиктивная сила, которую вводят для того, чтобы исследовать движение тела в неинерциальной системе отсчета;
- 2) сила, действующая на тело после прекращения внешнего воздействия;
- 3) сила, заставляющая тело двигаться в инерциальной системе отсчета;
- 4) сила, сообщающая телу вращательное движение.

4.17. Центробежная сила – это ...

- 1) сила инерции, во вращающейся системе отсчета;
- 2) часть силы инерции, во вращающейся системе отсчета, обусловленная движением тела в этой системе отсчета;
- 3) сила, действующая на тело во вращающейся системе отсчета;

4) сила, действующая на тело, неподвижное во вращающейся системе отсчета.

4.18. Сила Кориолиса – это ...

1) сила, действующая на тело неподвижное во вращающейся системе отсчета;

2) сила инерции, во вращающейся системе отсчета;

3) часть силы инерции, действующей на тело во вращающейся системе отсчета, обусловленная движением тела в этой системе отсчета;

4) сила, действующая на тело во вращающейся системе отсчета.

4.19. Сила Кориолиса направлена ...

1) параллельно вектору угловой скорости;

2) параллельно вектору линейной скорости;

3) вдоль радиуса, проведенного от оси вращения к телу;

4) перпендикулярно векторам угловой и линейной скорости.

4.20. Центробежная сила, действующая на материальную точку массой 2 кг, двигающуюся по окружности радиусом 0,5 м со скоростью 4 м/с, равна ...

1) 16 Н; 2) 64 Н; 3) 32 Н; 4) 20 Н.

4.21. При угловой скорости вращения планеты 10^{-4} рад/с сила Кориолиса, действующая на космический аппарат массой 80 кг, двигающийся по поверхности планеты вдоль ее экватора со скоростью 2 м/с, равна ...

1) $1,6 \cdot 10^{-3}$ Н; 2) $4,0 \cdot 10^{-3}$ Н; 3) 0 Н; 4) $3,2 \cdot 10^{-2}$ Н.

4.22. Сила Кориолиса, действующая на человека массой 70 кг, пересекающего земной экватор в направлении с севера на юг со скоростью 5 км/ч, равна ...

1) 0 Н; 2) $3,5 \cdot 10^{-3}$ Н; 3) $1,4 \cdot 10^{-3}$ Н; 4) $7,0 \cdot 10^{-3}$ Н.

ГЛАВА V. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 5.1. Механика жидкости и газа

§ 5.1.1. Основные понятия гидроаэромеханики

Механика жидкости и газа или гидроаэромеханика – это раздел механики, в котором изучают равновесие и движение жидких и газообразных сред, а также их взаимодействие между собой и с погруженными в них телами.

Основные задачи гидроаэромеханики:

1. Определение сил, действующих на твердое тело, движущееся в жидкости или газе.
2. Определение параметров жидкости или газа вблизи поверхности твердых тел.
3. Исследование движения жидкости и газа внутри каналов различной формы.

Гидроаэромеханику делят на гидростатику и аэростатику, а также гидродинамику и аэродинамику.

Жидкость – это агрегатное состояние вещества, промежуточное между твердым и газообразным.

Характеризуется следующими свойствами:

1. Сохраняет объем;
2. Образует поверхность;
3. Обладает прочностью на разрыв;
4. Принимает форму сосуда;
5. Обладает текучестью.

Пункты 1–3 аналогичны свойствам твердых тел, а пункт 4 – газам. Главное отличительное свойство жидкости – текучесть.

Жидкости, имеющие одно жидкое состояние, называются **нормальными**. Существуют также **квантовые** жидкости, у которых одна нормальная фаза и одна или две сверхтекучие; **жидкие кристаллы** – жидкокристаллические вещества, имеющие нормальную и одну или несколько анизотропных фаз.

Газом называют агрегатное состояние вещества, в котором все его частицы слабо взаимодействуют между собой и заполняют весь предоставленный объем.

Рассмотрим основные законы гидро- и аэростатики.

Закон Паскаля. Жидкости и газы передают оказываемое на

них давление равномерно по всем направлениям. Следовательно, давление P не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

На произвольной глубине $P = P_0 + \rho gh$, где P_0 – внешнее давление на поверхность жидкости; ρgh – давление столба жидкости (гидростатическое давление).

Если несжимаемая жидкость находится в сосуде, который равномерно вращается вокруг некоторой вертикальной оси с угловой скоростью ω , то давление на площадку, находящуюся на глубине h , определяется формулой

$$P = P_0 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2,$$

где r – расстояние от точки до оси вращения.

Следствия:

а) действие гидравлического пресса: выигрыш в силе равен отношению площадей: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$;

б) давление на дно сосуда не зависит от формы сосуда и определяется высотой столба жидкости;

в) однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается на одном и том же уровне, а разнородная на высотах:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Упругие свойства жидкости по отношению к малым изменениям объема характеризуются **коэффициентом изотермической сжимаемости**. Например:

вода $\beta = 0,47 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$;

спирт $\beta = 1,17 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$;

эфир $\beta = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$.

Коэффициент изотермической сжимаемости (при термодинамической температуре $T = \text{const}$) определяется выражением

$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right),$$

где V – объем.

Но поскольку увеличение P сопровождается уменьшением объема жидкости, то коэффициент $\beta > 0$.

Жидкости обладают очень малой сжимаемостью.

Закон Архимеда (200 г. до н. э.) – на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила (подъемная), равная (численно) весу жидкости (газа) в объеме, вытесненном телом:
 $F_B = V\rho_{\text{ж}}g$.

В этом выражении $V\rho_{\text{ж}} = m_{\text{ж}}$, где $\rho_{\text{ж}}$ и $m_{\text{ж}}$ – это плотность и масса жидкости.

Выталкивающая сила направлена вверх и проходит через центр масс. Центр масс вытесненной жидкости называется **центром плавучести тела**. Положение центра масс тела, погруженного в жидкость, определяет условия равновесия и устойчивости плавающего тела:

а) плавающее тело будет находиться в равновесии, если его вес равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести и центр масс тела лежат на одной вертикали, при этом тело полностью погружено в жидкость: $G = F_B$, где G – вес тела; F_B – выталкивающая сила;

б) если $G < F_B$, то тело плавает частично погрузившись;

в) если $G > F_B$, тело утонет.

Плотность твердых тел неправильной формы можно определить по следующей формуле, если предварительно определить вес тела в воздухе и жидкости:

$$\rho_{\text{тв.т}} = \rho \frac{G_{\text{т}}}{G_{\text{т}} - G},$$

где ρ – плотность жидкости; $G_{\text{т}}$ – вес тела в воздухе; G – вес тела в жидкости.

Плотность неизвестной жидкости можно определить по следующей формуле, если предварительно определить вес тела в воздухе, а также в известной и неизвестной жидкостях:

$$\rho_1 = \rho_2 \frac{G_{\text{т}} - G_1}{G_{\text{т}} - G_2},$$

где ρ_1 – неизвестная плотность жидкости; ρ_2 – известная плотность жидкости; $G_{\text{т}}$ – вес тела в воздухе; G_1 и G_2 – вес тела в жидкости 1 и 2.

Закон Бойля – Мариотта

При постоянной температуре T произведение давления газа P

на занимаемый им объем V есть величина постоянная: $PV = \text{const}$.

Следствия:

а) при $T = \text{const}$ давление газа P , находящегося в замкнутом сосуде, пропорционально его плотности ρ , то есть $P \sim \rho$;

б) при $T = \text{const}$ $P_1V_1 = P_2V_2$, где P_1V_1 – начальное состояние газа; P_2V_2 – конечное состояние.

Если считать, что атмосфера является **изотермической**, то есть находится в механическом и тепловом равновесии, то давление атмосферы с высотой уменьшается по экспоненциальному закону:

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}}, \quad (5.1)$$

где P_0 – атмосферное давление у поверхности Земли, определяемое уравнением Менделеева – Клапейрона.

$$P_0 = \frac{RT}{M} \rho_0,$$

где $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ – молярная универсальная газовая постоянная;

M – молярная масса воздуха, равна $28,8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; ρ_0 – плотность воздуха у поверхности Земли, кг/м³.

А плотность воздуха на высоте h определяется формулой

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}}. \quad (5.2)$$

Формулы (5.1) и (5.2) называются барометрическими формулами.

Основное уравнение гидростатики устанавливает связь между силой \vec{F} , действующей в жидкости (газе) и приходящейся на единицу ее объема, и изменением давления P в состоянии равновесия:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}P}. \quad (5.3)$$

$$F_x = \frac{dP}{dx}; \quad F_y = \frac{dP}{dy}; \quad F_z = \frac{dP}{dz} \quad - \text{проекции силы } \vec{F} \text{ на оси декартовой системы координат.}$$

Из формулы (5.3) следует, что равновесие жидкости (газа) возможно только в том случае, если сила \vec{F} является консервативной.

Из формулы (5.3) следует, что равновесие жидкости (газа) возможно только в том случае, если сила \vec{F} является консервативной.

§ 5.1.2. Теорема о неразрывности струй жидкости

Для описания движения жидкости будем отмечать скорость, с которой проходят через каждую точку пространства отдельные частицы жидкости. Тогда совокупность векторов $\vec{v}(t)$, заданных для всех точек пространства, называется **полем вектора скорости**. Это поле можно наглядно изобразить с помощью **линий тока** (рис. 5.1).

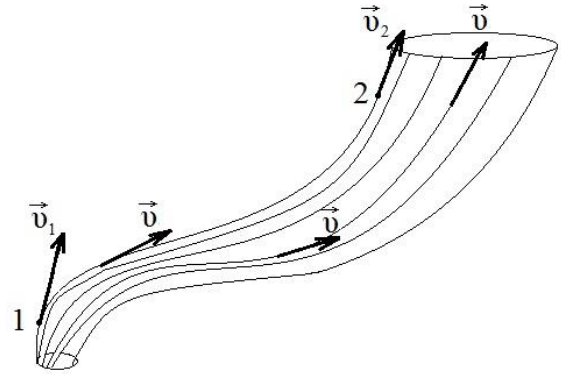


Рис. 5.1. Линии тока

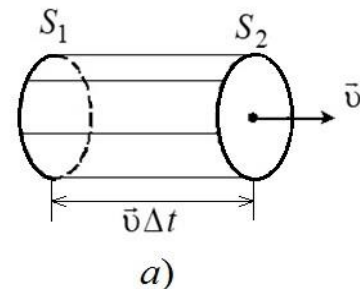
Для наглядности построения густоту линий тока выбирают численно равной модулю скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле вектора \vec{v} в разных точках пространства.

Например, в точке 1 густота линий и \vec{v} больше, чем в точке 2.

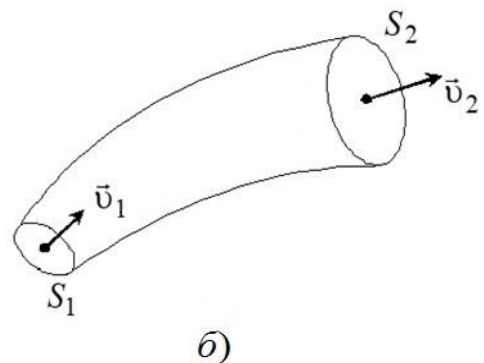
Если скорость в каждой точке пространства остается постоянной ($\vec{v} = \text{const}$), то течение жидкости называется **стационарным** (установившимся).

Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, то образуется поверхность, которую называют **трубкой тока** (рис. 5.2). Векторы \vec{v} касательны к поверхности трубки тока в каждой точке. Следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенку трубки тока.

Изобразим трубку тока в виде тонкой прямолинейной трубы (см. рис. 5.2, а): $S_1 = S_2$.



а)



б)

Рис. 5.2. Трубка тока

За время Δt через любое сечение S пройдет объем жидкости $V = Sv\Delta t$, а за единицу времени $V = Sv$.

Поскольку коэффициент сжимаемости жидкостей очень мал, то их можно считать практически несжимаемыми. Тогда для произвольной трубки тока количество жидкости между сечениями остается постоянным.

Следовательно, объемы жидкости, протекающие в единицу времени через S_1 и S_2 , должны быть одинаковыми: $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Поскольку данное равенство справедливо для любой пары сечений, то для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение Sv в любом сечении трубки тока имеет одинаковое значение: $Sv = \text{const}$.

Это **сущность теоремы о неразрывности струй жидкости**. Из данной теоремы следует, что при изменяющемся сечении трубки частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением.

Для реальной жидкости и газа эта теорема имеет вид

$$\rho Sv = \text{const}.$$

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение (то есть вязкость), называется **идеальной**.

§ 5.1.3. Теорема Бернулли

Согласно теореме неразрывности $\Delta V_1 = \Delta V_2$, то есть за время Δt жидкость, заключенная между сечениями 1 и 2, перемещается вдоль трубки тока в положение, определяемое сечениями 1' и 2'.

Возьмем сечения S_1 и S_2 , а также перемещение $\Delta \ell$ такими малыми, чтобы все точки заштрихованных участков имели одинаковые скорости, давление и высоту (рис. 5.3).

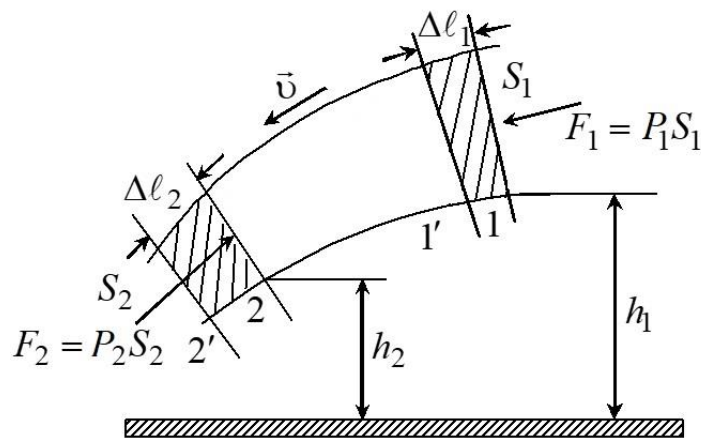


Рис. 5.3. Схема к выводу уравнения Бернулли

Тогда работа приложенных сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 будет равна, с учетом их взаимного направления:

$$A = F_1 \Delta \ell_1 - F_2 \Delta \ell_2 = P_1 S_1 \Delta \ell_1 - P_2 S_2 \Delta \ell_2 = (P_1 - P_2) \Delta V.$$

Это следует из того, что $S_1 \Delta \ell_1 = S_2 \Delta \ell_2 = \Delta V$.

Эта работа будет численно равна приращению механической энергии элемента объема ΔV при перемещении его в новое положение:

$$\Delta E = A = (W_{к2} + U_2) - (W_{к1} + U_1);$$

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \left(\frac{\rho\Delta V v_2^2}{2} - \frac{\rho\Delta V v_1^2}{2} \right) + (\rho\Delta V g h_2 - \rho\Delta V g h_1).$$

В данном выражении учтено, что $\rho\Delta V = m$.

После сокращения на ΔV получим

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Следовательно, $P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}$. Это соотношение носит название уравнения Бернулли, то есть сумма внешнего давления P , гидростатического давления $\rho g h$ и скоростного напора $\frac{\rho v^2}{2}$ есть величина постоянная для любого сечения.

Размерность выражения:

$$\left[\frac{\rho v^2}{2} \right] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Если высота не изменяется, то есть $h = \text{const}$ (трубка горизонтальная), то уравнение Бернулли записывается так:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2.$$

§ 5.1.4. Измерение давления в текущей жидкости

1. Для измерения давления в *текущей* жидкости применяется трубка Пито (французский ученый).

Трубка, изображенная на рис. 5.4, *а*, измеряет сумму давлений: скоростной напор и статическое давление. Трубка в данном случае имеет открытый вход.

Действительно, давление в точке 1 равно $P_{(1)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$, а в точке 2 $P_{(2)} = P_2$, но так как $P_{(1)} = P_{(2)}$, то $P_2 = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$, что и пока-

зывает манометр; здесь P_1 – статическое давление, а $\frac{\rho v_1^2}{2}$ – динамический напор.

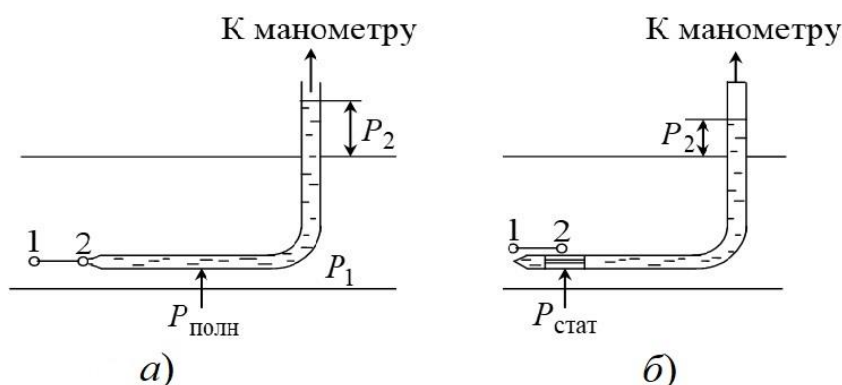


Рис. 5.4. Измерение давления трубкой Пито

2. Трубка, изображенная на рис. 5.4, б, имеет закрытый вход, но на боковой поверхности горизонтального участка у нее имеется прорезь, поэтому она измеряет только статическое давление, так как $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, следовательно, $P_{(1)} = P_{(2)}$, а $P_1 = P_2$, и манометр показывает только статическое давление.

3. Для измерения скоростного напора служит трубка Пито – Прандтля, которая представляет собой комбинацию трубок, изображенных на рис. 5.4, а, б, то есть это две коаксиальные цилиндрические трубки. Внешняя цилиндрическая трубка имеет запаянный вход и прорезь на боковой поверхности горизонтального участка, а у внутренней трубки вход открыт. Обе трубки подключаются к дифференциальному манометру, который показывает разность двух давлений. В качестве такого манометра может служить U-образная трубка (рис. 5.5). В точке (1) будем иметь полное давление, а в точке (2) – статическое давление, поэтому их разность равна динамическому давлению, то есть скоростному напору.



Рис. 5.5. Измерение скоростного напора с помощью трубки Пито – Прандтля

Так как $P_{(1)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$, а $P_{(2)} = P_2$, следовательно,

$$P_{(1)} - P_{(2)} = (P_1 - P_2) + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2}{2}, \text{ так как } P_1 = P_2.$$

Таким образом, если шкалу дифференциального манометра проградуировать в единицах скорости, то трубку Пито – Прандтля можно использовать для измерения скорости течения жидкости.

§ 5.1.5. Истечение идеальной жидкости из отверстия

Идеальная жидкость – это такая жидкость, у которой отсутствует внутреннее трение.

Рассмотрим бак с жидкостью, имеющий на высоте h_2 отверстие с сечением S_2 , из которого вытекает жидкость, скорость которой необходимо рассчитать. Для всех точек каждого из сечений S_1 и S_2 скорость v и высоту h можно считать одинаковыми (рис. 5.6).

Применим теорему Бернулли, но учтем, что скорость перемещения основного уровня жидкости незначительна, то есть $v_1 = 0$. По те-

реме Бернулли $P_0 + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_0$, где

v_2 – скорость течения жидкости в сечении S_2 . Откуда получим $|\vec{v}_2| = \sqrt{2gh}$, то есть совпадает с формулой расчета скорости свободного падения тела с высоты h .

Данный расчет применим для идеальной жидкости. Для реальных жидкостей скорость будет тем меньше, чем больше внутреннее трение. Вязкие жидкости нефть, мазут, глицерин будут вытекать медленнее.

Объем вытекающей жидкости в единицу времени: $\Delta V = S|\vec{v}_2|$, а массу вытекающей жидкости в единицу времени рассчитаем по формуле $m = \rho S|\vec{v}_2|$.

Импульс вытекающей струи $m\vec{v}_2 = \rho S|\vec{v}_2|\vec{v}_2$. Импульс силы

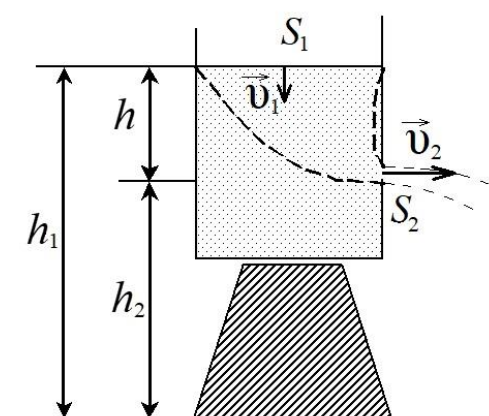


Рис. 5.6. Истечение жидкости из отверстия бака

$\vec{F}\Delta t$, действующей на противоположную стенку сосуда, равен изменению импульса струи. Импульс силы в единицу времени равен силе, действующей на стенку: $\vec{F}_r = -\rho S|\vec{v}_2|\vec{v}_2$.

Модуль этой силы $|\vec{F}_r| = \rho S v_2^2$. Подставим в данную формулу величину $|\vec{v}_2| = \sqrt{2gh}$, тогда получим $|\vec{F}_r| = 2S\rho gh$, но ρgh – гидростатическое давление в жидкости на глубине h . Следовательно, сила \vec{F}_r давления на противоположную стенку (по отношению к направлению скорости \vec{v}_2) при истечении жидкости из отверстия превосходит силу гидростатического давления на этой глубине в два раза. Это связано с тем, что движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления. На противоположную стенку (относительно отверстия) давление оказывается большим, чем на стенку с отверстием.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Основателем теории полета ракет и межпланетных сообщений является русский ученый К. Э. Циолковский (1857–1935 гг.).

§ 5.1.6. Вязкость

Течение жидкости, при котором частицы движутся вдоль прямолинейной траектории не перемешиваясь, называют **ламинарным** (слоистым). При ламинарном течении жидкость может быть представлена в виде слоев, которые скользят один относительно другого с разными скоростями. Такое течение **стационарно**. Например, при течении жидкости в трубе скорость частиц изменяется от нуля (у стенки) до максимума на оси. При движении слоев жидкости с разными скоростями между ними возникают касательные силы, называемые **силами внутреннего трения** $\vec{F}_{тр}$ или **силами вязкости**. Экспериментально установлено, что модуль силы трения равен

$|\vec{F}| = \eta \left| \frac{d\vec{v}}{dz} \right| S$, где η – **коэффициент внутреннего трения** или дина-

мической вязкости; S – площадь соприкасающихся слоев; $\frac{d\vec{v}}{dz}$ – градиент скорости в направлении, перпендикулярном скорости движения слоев жидкости.

Размерность коэффициента внутреннего трения:

$$[\eta] = \frac{\frac{\text{Н}}{\frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{М}}}}{\frac{\text{М}}{\text{М}^2}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}^2} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Физический смысл динамической вязкости: она численно равна импульсу, переносимому от слоя к слою в единицу времени через единичную площадку соприкасающихся слоев при градиенте их скорости, равном единице.

§ 5.1.7. Закон изменения скорости при ламинарном и турбулентном течении

Рассмотрим цилиндрический объем жидкости в трубе. На основании цилиндрического объема жидкости действует результирующая сила $\vec{F}_1 = (P_1 - P_2)\pi r^2$, под действием которой он перемещается в трубе (рис. 5.7).

На боковую поверхность цилиндрического объема действует сила внутреннего трения, направленная против скорости \vec{v} :

$$\vec{F}_2 = -\eta \frac{d\vec{v}}{dr} 2\pi r \ell,$$

где $2\pi r \ell$ – боковая поверхность рассматриваемого цилиндра.

Поскольку данный цилиндрический объем жидкости движется без ускорения, то внешние силы, движущие рассматриваемый объем, равны по модулю силе трения, то есть $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$.

Тогда

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 - \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r \ell = 0,$$

откуда получаем $dv = \frac{(P_1 - P_2)r dr}{2\eta \ell}$, а $v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta \ell} r^2 + C$.

Постоянную интегрирования C можно найти из граничных условий: при $r = R$ скорость жидкости $|\vec{v}| = 0$. Следовательно,

$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta \ell} R^2$, тогда скорость жидкости в сечении трубы в зависи-

мости от радиуса r выражается формулой

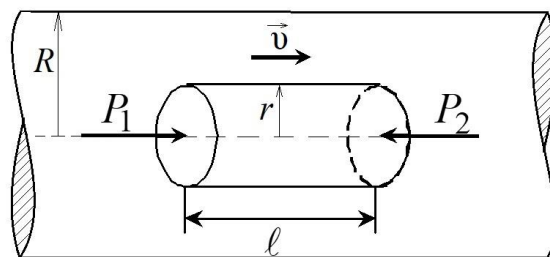


Рис. 5.7. Течение жидкости в трубе

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} (R^2 - r^2).$$

Скорость на оси трубы, то есть при $r = 0$, равна

$$v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} R^2, \text{ тогда } v(r) = v(0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (5.4)$$

Следовательно, при ламинарном течении скорость жидкости изменяется с удалением от оси трубы по **параболическому закону** (рис. 5.8). С помощью формулы (5.4) вычислим объем жидкости, протекающей через поперечное сечение площадью S за единицу времени.

За единицу времени через кольцо радиусом r и толщиной dr пройдет объем

$$dQ = v(0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr, \text{ при этом } r \text{ изменится от нуля до } R.$$

Тогда после интегрирования получим, что объем жидкости (м^3), проходящей через поперечное сечение трубы за одну секунду ($\text{м}^3/\text{с}$):

$$Q = \int_0^R \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4\eta\ell} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4\eta\ell} 2\pi r dr - \int_0^R \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta\ell} r^2 2\pi r dr = \frac{(P_1 - P_2) \pi R^4}{8\eta\ell}. \quad (5.5)$$

Формула (5.5) носит имя Пуазейля. Эту формулу можно использовать для определения вязкости жидкости. Для этого необходимо экспериментально определить объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы за единицу времени (рис. 5.9), а из формулы (5.5) рассчитать коэффициент вязкости жидкости.

Масса жидкости, протекающей

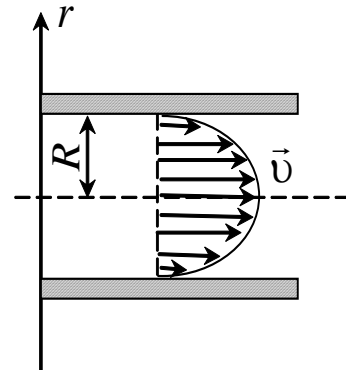


Рис. 5.8. Распределение скорости слоев жидкости по сечению трубы

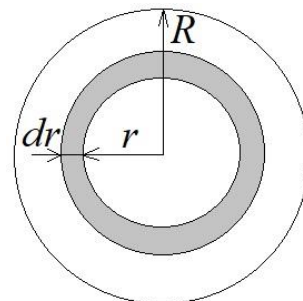


Рис. 5.9. К расчету расхода жидкости через поперечное сечение за единицу времени

через поперечное сечение трубы площадью сечения S за единицу времени (кг/с), рассчитывается по формуле $m = \rho Q$.

Турбулентным называется такое течение жидкости (газа), при котором ее (его) скорость и давление быстро и нерегулярно изменяются со временем. При турбулентном течении газа нерегулярным образом изменяются также его плотность и температура. Течение становится нестационарным.

Ламинарное течение переходит в турбулентное при увеличении скорости движения жидкости (газа). Характер течения (ламинарное или турбулентное) можно определить по значению безразмерной величины, которую называют **числом Рейнольдса Re** , ко-

торое рассчитывается по формуле $Re = \frac{\rho |\vec{v}| \ell}{\eta} = \frac{|\vec{v}| \ell}{\nu}$, где η , ν – динамическая и кинематическая вязкость жидкости соответственно; ℓ – характерный размер; ρ – плотность жидкости.

Кинематическая вязкость жидкости ν равна динамической, поделенной на плотность жидкости, то есть $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

При малых Re течение является ламинарным, а при больших – турбулентным. Значение Re , при котором течение переходит из ламинарного в турбулентное, называется **критическим**. Для круглого сечения имеем: $\ell = R$, $Re \cong 1000$.

Профиль средних скоростей при турбулентном течении изображен на рис. 5.10. Наибольшее изменение скорости наблюдается около стенки трубы.

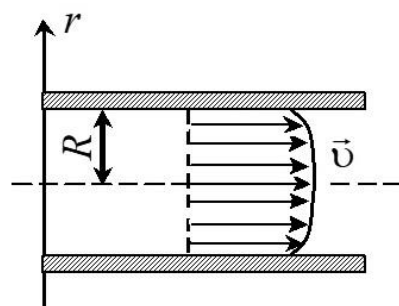


Рис. 5.10. Профиль средних скоростей при турбулентном течении жидкости в цилиндрической трубе

§ 5.1.8. Законы гидродинамического подобия

Законы подобия позволяют осуществлять моделирование, то есть из одного течения получать другое путем изменения масштаба скоростей и координат. Существует три закона подобия: закон подобия для скорости потока, закон подобия для давления в жидкости, закон подобия для силы сопротивления.

Закон подобия для скорости имеет вид $\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{r}{\ell}, \text{Re}\right)$,

где \vec{r} – радиус-вектор заданной точки; ℓ – характерный размер; v_0 – характерная скорость.

При одинаковых Re отношение $\frac{v}{v_0}$ является функцией только отношения $\frac{\vec{r}}{\ell}$.

Закон подобия для давления в жидкости имеет вид

$$p = \rho v_0^2 f\left(\frac{r}{\ell}, \text{Re}\right).$$

Закон подобия для силы сопротивления действует на обтекаемое тело с характерным размером ℓ :

$$F = \rho v_0^2 \ell^2 f(\text{Re}).$$

Данные формулы справедливы, если влиянием силы тяжести можно пренебречь. В противном случае:

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{r}{\ell}, \text{Re}, \text{Fr}\right); \quad \frac{p}{\rho v_0^2} = f\left(\frac{r}{\ell}, \text{Re}, \text{Fr}\right); \quad \frac{F}{\rho v_0^2 \ell^2} = f(\text{Re}, \text{Fr}),$$

где Fr – безразмерная величина, равная $\text{Fr} = \frac{v_0^2}{g\ell}$, называется **числом Фруда**.

Фруда.

Число Re (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости к потере этой энергии, равной работе сил вязкости на характерной длине:

$$\text{Re} \sim \frac{W_{\text{к}}}{A} \sim \frac{\frac{1}{2} \rho v_0^2 \ell^3}{\eta v_0 \ell^2} \cong \frac{\rho v_0 \ell}{\eta}. \quad (5.6)$$

Число Fr (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости $W_{\text{к}}$ к ее приращению, равному работе сил тяжести на характерной длине:

$$\text{Fr} \sim \frac{W_{\text{к}}}{A'} = \frac{\frac{1}{2} \rho v_0^2 \ell^3}{\rho g \ell^4} \cong \frac{v_0^2}{g\ell}. \quad (5.7)$$

Согласно формуле (5.6), при больших числах Re главную роль

играет инерция, а при малых – вязкость. Согласно формуле (5.7), при больших числах Fr главную роль играет инерция, а при малых – тяготение. Если число Re велико, а число Fr мало, то движение жидкости в основном определяется инерцией и тяготением.

При малых числах Re и больших числах Fr движение жидкости в основном определяется инерцией и вязкостью.

§ 5.2. Движение тел в жидкостях и газах

Силу \vec{F} , с которой набегающий поток действует на тело, можно разложить на две составляющие: в направлении потока \vec{F}_{II} и перпендикулярно потоку \vec{F}_I . Сила \vec{F}_{II} называется лобовым сопротивлением, а сила \vec{F}_I – подъемной силой (рис. 5.11).

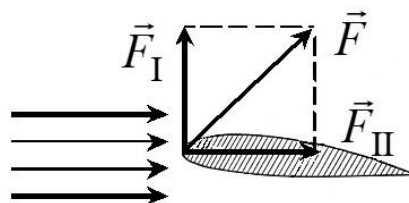


Рис. 5.11. Сила \vec{F} , с которой набегающий поток действует на тело

Лобовое сопротивление складывается из сил давления и сил внутреннего трения. На тело, симметричное относительно направления скорости потока \vec{v} , действует только лобовое сопротивление, подъемная сила в этом случае отсутствует (рис. 5.12).

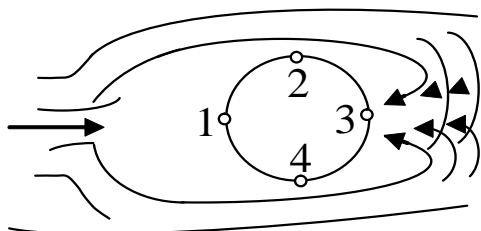


Рис. 5.12. Лобовое сопротивление

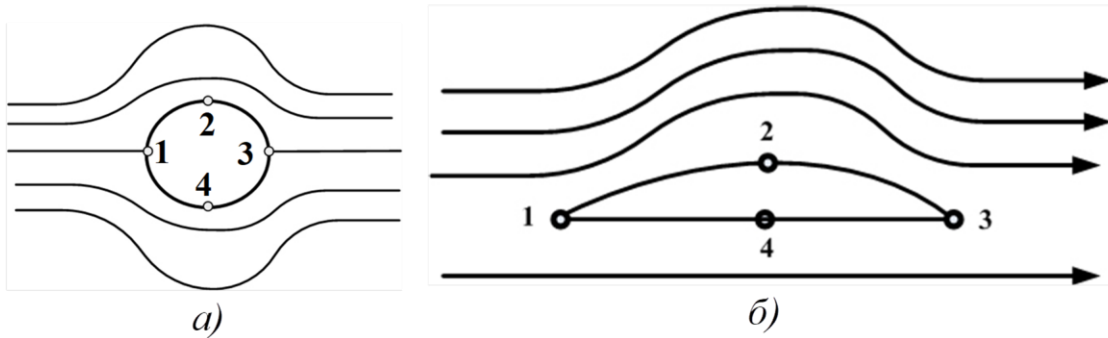
При равномерном движении тела в идеальной несжимаемой жидкости лобовое сопротивление равно нулю: $\vec{F}_{II} = 0$ (принцип Даламбера). Это справедливо только для идеальной жидкости, в реальных жидкостях $\vec{F}_{II} \neq 0$, так как движущееся тело всегда увлекает за собой часть жидкости.

Идеальная жидкость не обладает вязкостью.

В случае обтекания симметричного тела (рис. 5.13, а) в точках 1, 3 давление одинаково и больше, чем при $\vec{v} = 0$.

В точках 2, 4 давление также одинаково и меньше, чем при $\vec{v} = 0$. В случае обтекания несимметричного тела (рис. 5.13, б) ламинарным потоком в точке 2 давление меньше, чем в точке 4, поэтому возникает подъемная сила.

Тело оказывается окруженным пограничным слоем с быстро



5.13. Обтекание ламинарным потоком симметричного и несимметричного тела

изменяющейся внутри него скоростью. Следовательно, возникают силы вязкого трения, которые приложены к телу и вызывают лобовое сопротивление.

$P_{(1)} > P_{(3)}$, то есть давление в точке 1 больше, чем в точке 3 (см. рис. 5.13).

$S = \frac{\ell}{\sqrt{Re}}$ – толщина пограничного слоя.

Сила \vec{F}_{II} , определяющая лобовое сопротивление, равна $F_{II} = C \frac{\rho S}{2} v_0^2$, где ρ – плотность жидкости; S – поперечное сечение тела; C – коэффициент лобового сопротивления.

$C = f(Re)$, то есть коэффициент лобового сопротивления является функцией числа Re и зависит от формы тела и от его ориентации по отношению к потоку, а его числовые значения определяются экспериментально.

При больших числах Re лобовое сопротивление обусловлено главным образом **разностью давлений** перед телом и за ним.

При малых числах Re лобовое сопротивление определяется в основном вязкостью.

§ 5.3. Упругие тела

§ 5.3.1. Типы деформаций

Реальные твердые тела под действием внешних сил изменяют свои линейные размеры и объем. Эти изменения называют **деформацией твердого тела**. Различают *упругие* и *пластические* деформации. **Упругими** называют деформации, которые исчезают после

прекращения действия сил; пластическими – сохраняющиеся. Физика процесса заключается в том, что под действием внешней силы происходит смещение частиц или атомов, составляющих тело, из положения равновесия. Возникающие при этом внутренние силы препятствуют деформации тела. Эти внутренние силы называются **силами упругости** (рис. 5.14). Если внешние силы не превосходят некоторой величины, называемой **пределом упругости** твердого тела, то деформации будут **упругими**. Для абсолютно упругих тел существует однозначная зависимость между внешними силами и вызываемыми ими деформациями.

Если упругие свойства тела по всем направлениям одинаковы, то тело называют **изотропным**, в противном случае – **анизотропным**. Если деформации тела не изменяются от точки к точке, то они называются **однородными**, в противном случае – **неоднородными**.

§ 5.3.2. Упругие напряжения

Упругие деформации характеризуются напряжениями. **Напряжением** σ в заданной точке твердого тела называют силу упругости $dF_{\text{упр}}$ (см. рис. 5.14), с которой действуют одна на другую две части A и B этого тела на бесконечно малом участке dS поверхности их соприкосновения с центром в точке O , отнесенной к величине площадки dS :

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS}.$$

Проекция силы на нормаль \vec{n} задает нормальное напряжение, а на плоскость – тангенциальное (касательное) напряжение. Если на некоторую поверхность тела S действует сила \vec{F} , то напряжение σ определяется формулой $\sigma = \frac{F}{S}$.

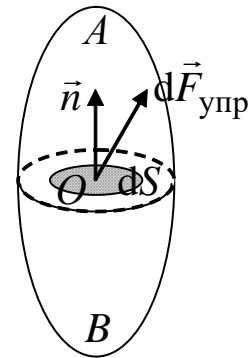


Рис. 5.14. Сила упругости

Размерность напряжения: $[\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.

Для однозначного определения напряжения σ в твердом теле на произвольно ориентированной площадке S в точке O достаточно задать напряжения σ_x , σ_y и σ_z на трех взаимно перпендикуляр-

ных площадках, проходящих через точку O :

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z,$$

где n_x, n_y, n_z – проекции внешней нормали \vec{n} к площадке S на оси декартовой системы координат с центром в точке O .

Совокупность девяти величин, являющихся проекциями векторов $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на три координатные оси x, y, z , называют **тензором упругих напряжений** и записывают следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензор упругих напряжений симметричен, то есть:

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i, j = x, y, z$) или $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, тогда будем иметь

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \sigma_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

В этом случае независимых только 6 компонент (рис. 5.15). Для любой точки в неоднородной среде можно выбрать такую ориентацию декартовой системы координат, в которой тензор упругих напряжений является диагональным:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае σ_1, σ_2 и σ_3 называются главными напряжениями, из которых σ_1 – максимальные напряжения, а σ_3 – минимальные.

Координатные оси такой декартовой системы называют **главными осями тензора упругих напряжений**.

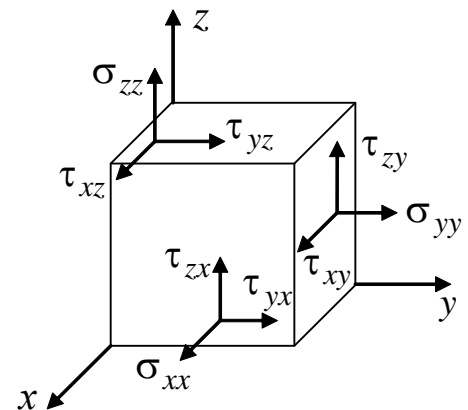


Рис. 5.15. Тензор упругих напряжений

§ 5.3.3. Закон Гука

Напряжение σ при упругой деформации тела пропорциональ-

но относительной деформации:

$$\varepsilon : \sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль упругости, равный напряжению при относительной деформации, равной единице.

Закон Гука справедлив для малых упругих деформаций.

В случае линейного растяжения или сжатия стержня относительная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, а длина стержня при растяжении или

сжатии равна $l = l_0 \pm \Delta l$. Изменение длины стержня при деформации рассчитывается следующим образом: $\Delta l = \frac{\sigma}{E} l_0$.

При одноосном сжатии или растяжении стержня модуль упругости $K = E$ называют модулем Юнга.

Единица измерения модуля упругости: $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.

При объемном растяжении или сжатии модуль упругости рассчитывается по формуле

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона, определяемый из соотношения

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0},$$

где Δd – изменение поперечных размеров тела.

Для твердых тел $\mu < 0,5$.

При одностороннем сжатии твердого тела в цилиндре (рис. 5.16), который не позволяет ему деформироваться по осям y и z , будем иметь

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right); \quad (5.8)$$

ε_z и ε_y в общем случае также выражаются подобными уравнениями, но учитывая, что $\varepsilon_z = \varepsilon_y = 0$, получаем

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x.$$

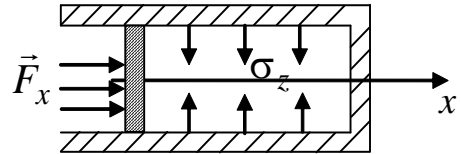


Рис. 5.16. Схема одностороннего сжатия

Подставляя это выражение в формулу (5.8), получим

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E(1 - \mu)} \sigma_x = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)} \sigma_x,$$

где $\frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$ – модуль одностороннего сжатия, а уравнение для ε_x характеризует процесс упругого продольного сжатия твердого тела при наличии бокового отпора по другим осям.

Упругая энергия

Деформированное тело обладает запасом потенциальной энергии, которую называют **упругой**. За ее счет может совершаться работа. Упругая энергия равна работе силы, затраченной на деформацию тела, при условии, что его кинетическая энергия не изменяется.

Упругая энергия растянутого стержня может быть рассчитана по формуле

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} k (\Delta l^2),$$

где $F = k \Delta l$; k – коэффициент упругости.

Плотность упругой энергии – это энергия единицы объема, рассчитывается следующим образом:

$$[w] = \frac{[U]}{[V]} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

§ 5.3.4. Сдвиг, кручение, изгиб

Примером однородной деформации твердого тела является **сдвиг**. **Сдвигом** называется деформация, при которой все слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости, называемой **плоскостью сдвига**, перемещаются в одном и том же направлении, параллельном плоскости сдвига (рис. 5.17). Основание AD куба есть плоскость сдвига.

Внешняя сила \vec{F} , вызывающая деформацию, направлена по касательной к

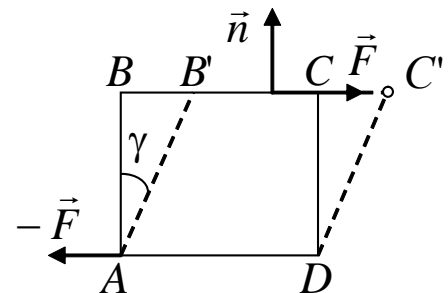


Рис. 5.17. Схема деформации сдвига

грани BC . По закону Гука касательное напряжение $\tau = \frac{F}{S} = G\gamma$, где

S – площадь грани AB , перпендикулярно которой действует сила F ; γ – угол; G – модуль сдвига. Он зависит от материала тела.

Существует соотношение, связывающее модуль упругости (Юнга) и модуль сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Примером неоднородных деформаций являются кручение и изгиб.

Кручением называют деформацию твердого тела, при которой под действием внешней силы происходит относительный поворот параллельных сечений тела вокруг некоторой оси.

Внешняя сила при кручении цилиндрического тела создает вращающий момент:

$$\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}],$$

где R – радиус тела.

С другой стороны, при деформации кручения возникает противодействующий момент $M = f\varphi$, где f – постоянная, называемая модулем кручения, зависит от свойства тела и его геометрических размеров; φ – угол поворота.

Изгибом называют деформацию твердого тела, при которой одни части тела претерпевают деформации сжатия, а другие – растяжения в параллельных направлениях (рис. 5.18).

Напряжение любого волокна, находящегося на расстоянии x от средней линии NN' , определяется формулой

$$\sigma = E \frac{x}{R}.$$

Выше NN' – напряжения растяжения – $\sigma > 0$, а ниже – $\sigma < 0$, то есть сжатия.

Напряжение действует вдоль волокна.

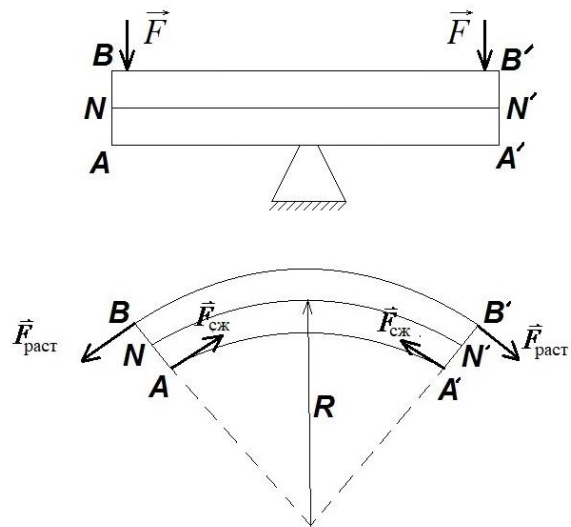


Рис. 5.18. Деформация твердого тела при изгибе

§ 5.4. Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?

2. Что такое предел упругости, прочности?
3. Каков физический смысл модуля Юнга?
4. Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
5. Что называют линией тока? Трубкой тока?
6. Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
7. Как получить уравнение Бернулли и в чем заключается его смысл?
8. Как в потоке жидкости измерить статическое давление? Динамическое давление? Полное давление?
9. Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?
10. Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?
11. Как объяснить возникновение подъемной силы?

§ 5.5. Примеры решения задач

Пример 5.1. К закрепленной медной проволоке ($E = 98$ ГПа) длиной $\ell = 2$ м и площадью поперечного сечения $S = 0,5$ см² подвешен груз массой $m = 8$ кг. Определите относительное ε и абсолютное $\Delta \ell$ удлинение стержня.

| | |
|---|---|
| Дано: $m = 8$ кг $S = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м ² $\ell = 2$ м $E = 9,8 \cdot 10^{10}$ Па $\varepsilon, \Delta \ell - ?$ | Решение. Относительное удлинение ε проволоки определяется по закону Гука: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, где $\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = \frac{mg}{S}$ – нормальное напряжение; E – модуль Юнга. |
|---|---|

Рассчитаем относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{mg}{SE} = \frac{8 \cdot 9,8}{0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8 \cdot 10^{10}} = 1,6 \cdot 10^{-5}.$$

Проверим размерность: $[\varepsilon] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{Па}}{\text{Па}}$.

Определим абсолютное $\Delta \ell$ удлинение проволоки:

$$\Delta \ell = \varepsilon \ell = 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \text{ м} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Пример 5.2. Латунный шарик диаметром $d = 0,5$ мм падает в глицерине. Определите скорость v установившегося движения. Является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным? Ко-

коэффициент динамической вязкости глицерина $\eta = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Дано:

$$d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\rho_1 = 8,55 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_2 = 1,26 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\eta = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$v - ?$

Решение. При установившемся движении на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила сопротивления \vec{F}_C , сила Архимеда \vec{F}_A , векторная сумма которых равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{F}_C + \vec{F}_A = 0.$$

В проекции на ось x , совпадающую с направлением движения, получим

$$mg - F_C - F_A = 0.$$

Сила тяжести, действующая на шарик (рис. 5.19):

$$F = mg = \rho_1 V g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g,$$

где ρ_1 – плотность материала шарика. Сила тяжести направлена вниз (в направлении движения шарика).

Выталкивающая сила (сила Архимеда) направлена вверх и равна

$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_2 g,$$

где ρ_2 – плотность глицерина.

Сила сопротивления среды, обусловленная вязкостью жидкости, согласно формуле Стокса зависит от скорости v шарика, его геометрических размеров, коэффициента вязкости:

$$F_C = 6\pi\eta v,$$

где v – скорость установившегося движения шарика; η – коэффициент вязкости (внутреннего трения) жидкости.

Сила сопротивления направлена вверх, то есть противоположна скорости движения шарика v . Эта формула справедлива для твердого шарика, движущегося в жидкости, при условии, что скорость его невелика, а расстояние до границ жидкости значительно больше диаметра шарика.

Решая уравнение движения шарика относительно скорости установившегося движения с учетом $d = 2r$, получим

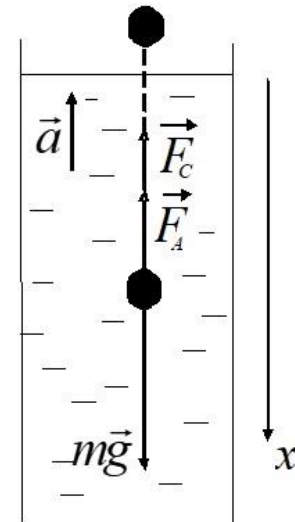


Рис. 5.19. Схема сил, действующих на движущийся в жидкости шарик

$$v = \frac{(\rho_1 - \rho_2)4\pi r^3 g}{18\pi\eta r} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)d^2 g}{18\eta}.$$

Рассчитаем скорость движения шарика в глицерине:

$$v = \frac{(8,55 - 1,26) \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-8} \cdot 9,8}{18 \cdot 1,48} = 6,7 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Число Рейнольдса определим из соотношения

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = 0,285 \cdot 10^{-3}.$$

При данных условиях число Рейнольдса меньше его критического значения $\text{Re}_{\text{кр}} = 0,5$. Следовательно, движение жидкости является ламинарным.

§ 5.6. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

5.1. К стальному стержню длиной 3 м и диаметром $d = 2$ см подвешен груз массой $m = 2,5 \cdot 10^3$ кг. Определите напряжение в стержне, относительное и абсолютное удлинение стержня. Модуль Юнга для стали $E = 200$ ГПа.

5.2. Какой наибольший груз может выдержать стальная проволока диаметром 1 мм, если предел упругости 294 МПа? Какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе?

5.3. Пружина жесткостью $k = 500$ Н/м сжата силой 100 Н. Определите работу внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на 2 см.

5.4. Какую работу A нужно совершить, чтобы пружину жесткостью $k = 800$ Н/м, сжатую на 6 см, дополнительно сжать на 8 см?

5.5. К вертикальной проволоке длиной 5 м и площадью поперечного сечения $S = 2$ мм² подвешен груз массой $m = 5,1$ кг. В результате проволока удлинилась на 0,6 мм. Найдите модуль Юнга E материала проволоки.

5.6. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость воды в широкой части трубы равна 20 см/с. Определите скорость течения в узкой части трубы, диаметр d_2 которой в 1,5 раза меньше диаметра d_1 широкой части.

5.7. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течет со скоростью 2 м/с. Определите скорость течения нефти в узкой части трубы, если разность давлений в широкой и узкой частях ее равна 6,65 кПа.

5.8. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром 5 см со средней по сечению скоростью 10 см/с. Определите число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе. Укажите характер течения жидкости. Динамическую вязкость воды принять равной 1 мПа·с.

5.9. В трубе с внутренним диаметром 3 см течет вода. Определите максимальный массовый Q_{\max} расход воды при ламинарном течении.

5.10. Медный шарик диаметром 1 см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением шарика, ламинарным? При данной температуре касторовое масло имеет динамическую вязкость 987 мПа·с. Критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр} = 0,5$.

5.11. Явление внутреннего трения характеризует перенос ...

- 1) импульса направленного движения;
- 2) массы;
- 3) энергии;
- 4) электрического заряда.

5.12. Явление внутреннего трения имеет место при наличии градиента ...

- 1) скорости слоев жидкости или газа;
- 2) концентрации;
- 3) температуры;
- 4) электрического заряда.

5.13. По какой причине возникает сила упругости?

- 1) частицы тел отталкиваются друг от друга;
- 2) частицы тел притягиваются друг к другу;
- 3) частицы тел притягиваются друг к другу или отталкиваются друг от друга.

5.14. Сила упругости включает в себя ...

- 1) силу реакции опоры;
- 2) силу трения;
- 3) силу тяжести.

5.15. Резиновый шнур в первый раз растянули на 2 см, а во второй – на 4 см. Сила упругости во втором случае ...

- 1) такая же, как и в первом;
- 2) больше, чем в первом, в 4 раза;
- 3) больше, чем в первом, в 2 раза.

5.16. Где скорость движения жидкости максимальна при турбулентном режиме?

- 1) у стенок трубы;
- 2) может быть максимальна в любом месте;
- 3) в центре трубы;
- 4) все частицы движутся с одинаковой скоростью.

ГЛАВА VI. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 6.1. Постулаты специальной теории относительности

Специальную теорию относительности (СТО) А. Эйнштейн создал в 1905 г. Она представляет собой физическую теорию пространства и времени для слабых гравитационных полей. В ее основе лежат два постулата:

1. Принцип относительности Эйнштейна;
2. Принцип постоянства скорости света ($c = \text{const}$).

Эйнштейн утверждал, что все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета, то есть распространил механический принцип относительности Галилея на все физические явления. Но при этом он показал, что преобразования Галилея должны быть заменены преобразованиями Лоренца. Тогда принцип относительности Эйнштейна формулируется следующим образом: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

Принцип постоянства скорости света в вакууме: скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и, следовательно, скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Справедливость этого принципа была доказана опытом Майкельсона и Морли в 1887 г. В ходе эксперимента определялась разность времени $\Delta t = t_1 - t_2$ прохождения светом одного и того же пути в направлении скорости орбитального движения Земли и перпендикулярно ей.

Было установлено, что $\Delta t = 0$. При этом скорость света в вакууме является *предельной величиной*.

Из этого следует, что понятие одновременности становится относительным; пространство и время утрачивают независимость друг от друга, оказываются взаимосвязанными, образуя единое четырехмерное пространство – время.

Из опыта следует: пусть из середины равномерно движущегося поезда испускается свет в направлении головы и хвоста. Поскольку $c = \text{const}$, то для пассажира окажется, что световой сигнал достигнет хвоста и головы одновременно, а для дежурного по станции – нет, то есть свет достигнет хвоста раньше, чем головы. Следовательно,

событие в пространстве должно описываться четырьмя координатами, и его можно изобразить *мировой точкой* (мировая линия).

§ 6.2. Преобразования Лоренца

Пусть имеются инерциальные системы отсчета K и K' . K' движется относительно K с постоянной скоростью V .

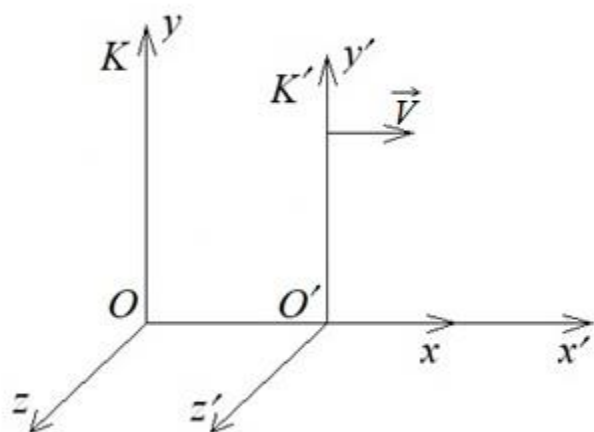


Рис. 6.1. Неподвижная система K и подвижная система K'

Событие в системе K характеризуется координатами x, y, z, t . Это же событие в системе K' характеризуется координатами x', y', z', t' . Найдем формулы, связывающие x и x' , y и y' и т. д.

Из рис. 6.1 следует, что плоскость $y' = 0$ совпадает с плоскостью $y = 0$ и $z' = 0$ совпадает с плоскостью $z = 0$. Отсюда следует, что, например,

координаты y и y' должны обращаться в ноль одновременно, а это возможно при условии $y = \alpha y'$. Получаем $\alpha^2 = 1$, следовательно, $\alpha = \pm 1$.

Тогда $y = y', z = z'$.

Из рис. 6.1 следует, что точка O имеет координату $x = 0$ в системе K и $x' = -Vt'$ в системе K' . Следовательно, выражение $x' + vt'$ должно обращаться в ноль одновременно с координатой x , то есть

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad (6.1)$$

где $\gamma = \text{const}$.

Аналогично можно показать для системы K' , что

$$x' = \gamma(x - Vt). \quad (6.2)$$

Так как системы равноправны, то коэффициент γ один и тот же.

Пусть начала координат O и O' совпадают. В момент времени $t = t' = 0$ в направлении осей x и x' посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране. Вспышка характеризуется в системе K координатой x и временем t , в системе K' — координатой x' и временем t' , причем

$$x = ct, \quad \text{а } x' = ct'. \quad (6.3)$$

Формулы (6.3) подставим в (6.1) и (6.2), получим

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t; \\ ct' &= \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t. \end{aligned}$$

Перемножим эти соотношения и, сократив на tt' , получим

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - V^2).$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.4)$$

Подставим (6.4) в (6.1) и (6.2), получим

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.5)$$

Найдем формулы преобразования времени: исключим из формул (6.5) координату x и решим уравнение относительно t . Потом исключим координату x' и решим уравнение относительно t' . В результате получим

$$t = \frac{t' + \left(\frac{V}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.6)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & y &= y'; & z &= z'; & t &= \frac{t' + \left(\frac{V}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & y' &= y; & z' &= z; & t' &= \frac{t - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Эти формулы называются *преобразованиями Лоренца*. По ним осуществляется переход от системы K' к K и обратно. В преобра-

зованиях Лоренца перемешаны координаты и время. В этом проявляется взаимосвязь пространства и времени.

При $V \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. При $V > c$ подкоренное выражение становится отрицательным.

§ 6.3. Следствия из преобразований Лоренца

1. Относительность понятия одновременности

Пусть имеется две системы. Предположим, что в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 одновременно в момент времени t происходят два определенных события (рис. 6.2). Можно показать, что разность моментов времени t'_1 и t'_2 будет равна

$$t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} < 0.$$

Если система K' движется влево относительно системы K , то будем иметь

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 0.$$

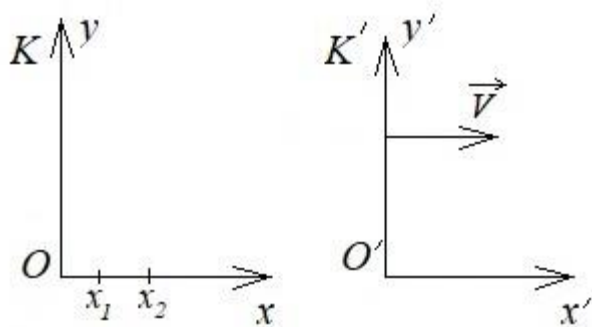


Рис. 6.2. Схема к установлению понятия одновременности событий в разных системах отсчета

В первом случае событие в точке с координатой x_2 воспринимается наблюдателем, находящимся в подвижной системе, раньше, чем в точке x_1 . Во втором случае, когда подвижная система движется со скоростью $-V$ относительно неподвижной системы, событие в точке с координатой x_2 воспринимается наблюдателем

в подвижной системе происходящим позже, чем событие с координатой в точке x_1 .

2. Эффект сокращения длины

Пусть стержень покоится в системе K' . Его длина, измеренная в системе K' : $l_0 = x'_2 - x'_1$ (рис. 6.3).

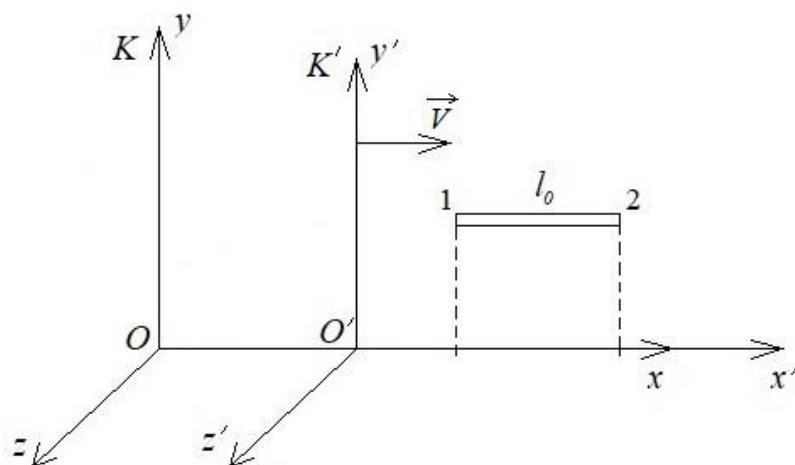


Рис. 6.3. Схема к установлению длины стержня, движущегося со скоростью V , в неподвижной системе отсчета

Относительно системы K стержень движется со скоростью V , тогда длина стержня в неподвижной системе K будет равна $l = x_2 - x_1$.

Сравним l_0 и l . Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца, из которых следует, что

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Длина движущегося стержня оказывается меньше той, которой он обладал в состоянии покоя.

3. Промежуток времени между событиями

Пусть в системе K' в точке с координатой x' в моменты времени t'_1 и t'_2 происходят два события. Тогда оно промежуток времени

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Найдем промежуток времени между данными событиями в системе K , относительно которой система K' движется со скоростью V .

Тогда $\Delta t = t_2 - t_1$.

Из преобразований Лоренца будем иметь

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где $\Delta\tau$ – это время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с системой K' . Это *собственное время*.

С точки зрения наблюдателя, живущего в системе K , Δt есть промежуток времени, измеренный по неподвижным часам, а $\Delta\tau$ – по часам, движущимся со скоростью V . Так как $\Delta\tau < \Delta t$, то можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся.

4. Закон сложения скоростей

Пусть \vec{v} – скорость движения частицы в системе K , тогда

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

В системе K'

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'}\vec{i} + \frac{dy'}{dt'}\vec{j} + \frac{dz'}{dt'}\vec{k} = v'_x\vec{i} + v'_y\vec{j} + v'_z\vec{k}.$$

Найдем формулы, связывающие компоненты скорости \vec{v}' с компонентами скорости \vec{v} . Воспользуемся преобразованиями Лоренца, из которых получим

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}. \quad (6.7)$$

Пусть скорости v_x, v'_x, V коллинеарны и направлены в одну сторону, а $v'_x = c$, то

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2}c} = c.$$

Аналогично получим

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_{x'}}; \quad (6.8)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_{x'}}. \quad (6.9)$$

По формулам (6.7), (6.8), (6.9) осуществляется преобразование скоростей при переходе из системы K' в систему K . Обратный переход из системы K в систему K' можно осуществить по следующим формулам:

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}; \quad v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}; \quad v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}.$$

§ 6.4. Релятивистский импульс

Согласно принципу относительности Эйнштейна законы природы инвариантны, то есть сохраняют свой вид в различных инерциальных системах отсчета, если при переходе от неподвижной к подвижной системе координат использовать преобразования Лоренца.

Получим выражение для импульса в подвижной системе отсчета:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Выражение, обеспечивающее инвариантность закона сохранения импульса, получается, если заменить в нем время dt собственным временем частицы $d\tau$. Тогда получим

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau},$$

где $d\vec{r}$ – перемещение частицы в той системе, где определяется импульс; $d\tau$ – промежуток времени, измеренный по движущимся часам; m_0 – масса материальной точки в неподвижной системе отсчета; \vec{v} – скорость движения частицы, где определяется импульс.

Тогда релятивистский импульс

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При $v \ll c$ $\vec{p} = m_0 \vec{v}$. Выражение $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ носит название

релятивистской массы.

§ 6.5. Релятивистское выражение для энергии

В релятивистской механике справедлив второй закон Ньютона в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}. \quad (6.10)$$

Будем исходить из положения: элементарная работа, совершаемая над телом, равна приращению его кинетической энергии:

$$dW_k = \delta A. \quad (6.11)$$

Умножив левую часть формулы (6.10) на $\vec{v} dt$, а правую – на $d\vec{r}$ ($d\vec{r} = \vec{v} dt$), получим

$$\vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) dt = \vec{F} d\vec{r}.$$

Так как элементарная работа $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$, то равенство представляет собой приращение кинетической энергии частицы:

$$dW_k = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Берем дифференциал и после некоторых преобразований полученного выражения будем иметь

$$dW_{\text{к}} = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right); \quad W_{\text{к}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{const.}$$

Если $v = 0$, то $W_{\text{к}} = 0$, поэтому $\text{const} = -m_0 c^2$.

Тогда

$$W_{\text{к}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Выражение $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ называют полной энергией свободной

релятивистской частицы, выражение $E_0 = m_0 c^2$ – энергией покоя (это внутренняя энергия частицы).

В релятивистской механике $E_{\text{полн}} = W_{\text{к}} + E_{\text{покоя}}$, а в ньютоновской механике $E_{\text{полн}} = W_{\text{к}} + U$.

Из сопоставления формул

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.12)$$

следует, что $\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}$. Выразим скорость $v = \frac{pc^2}{E}$ и подставим ее в выражение (6.12). После упрощения получим

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2};$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}.$$

Из данных выражений следует

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 - \text{это inv.}$$

Это выражение имеет одинаковые числовые значения во всех инерциальных системах отсчета, хотя численные значения E и p и изменяются.

§ 6.6. Вопросы для самоподготовки

1. Какие постулаты лежат в основе специальной теории относительности?
2. Как связаны друг с другом преобразования Галилея и преобразования Лоренца?
3. Какие вы знаете инвариантные величины?
4. Напишите формулу, выражающую импульс частицы через ее энергию и скорость.
5. Напишите формулу, выражающую энергию частицы через ее импульс.

§ 6.7. Примеры решения задач

Пример 6.1. Импульс частицы массы m равен $p = mc$. Найдите кинетическую энергию частицы W_k .

| | |
|--------------------------------|--|
| Дано: $p = mc$ $W_k = ?$ | <u>Решение.</u> Кинетическая энергия равна разности полной энергии W и энергии покоя W_0 : $W_k = E - E_0.$ |
|--------------------------------|--|

Выразив полную энергию через импульс и подставив выражение для энергии покоя, получим

$$W_k = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - mc^2 = c\sqrt{m^2 c^2 + m^2 c^2} - mc^2 = 0,414mc^2.$$

Пример 6.2. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы с массой $m = 0,4M$ каждая. Найдите скорость v , с которой движется каждая из этих частиц.

| | |
|--------------------------------|--|
| Дано: $m = 0,4M$ $v = ?$ | <u>Решение.</u> В силу закона сохранения импульса скорость образовавшихся частиц одинакова. Из закона сохранения энергии следует, что суммарная полная энергия образовавшихся частиц должна быть равна энергии покоя исходной частицы: |
|--------------------------------|--|

$$2 \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Mc^2.$$

Подстановка $m = 0,4M$ дает $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,8$, откуда $v = 0,6c$.

§ 6.8. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

6.1. Чему равна длина космического корабля, движущегося со скоростью $0,9c$? Длина покоящегося корабля 100 м.

6.2. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $0,4c$ ($0,4$ от скорости света в вакууме). В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β -частицу со скоростью $0,75c$ относительно ускорителя. Определите скорость частицы относительно ядра.

6.3. На сколько процентов полная энергия протона, вылетающего из ускорителя со скоростью $0,8c$, больше его энергии покоя?

6.4. Чему равна будет масса космонавта, движущегося в космическом корабле со скоростью $0,8c$? Масса покоящегося космонавта 90 кг.

6.5. С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $0,7c$, стартует ракета в направлении движения корабля. Скорость ракеты относительно Земли $0,96c$. Чему равна скорость ракеты относительно Земли?

6.6. В ИСО K из пунктов A и B , расстояние между которыми l_0 , одновременно стартуют два космических корабля навстречу друг другу со скоростями, соответственно равными u и $2u$. Определите, сколько времени пройдет до их встречи с точки зрения земного наблюдателя.

6.7. Как должна зависеть скорость ракеты и параметр скорости от времени, чтобы наблюдатель в ракете все время испытывал ускорение g ? Через какое время ракета разгонится до $0,9$ скорости света? А что предсказывает ньютоновская механика?

6.8. Близнецы A и B расстались в тот день, когда им было по 21 году. A двигался от Земли со скоростью $0,96$ скорости света в течение 7 лет (своего времени) в одну сторону и столько же обратно. На сколько моложе он будет своего брата B по возвращении?

6.9. С какой скоростью движется тело, если его продольные размеры уменьшились на 30 %?

6.10. Собственное время жизни частицы равно 15 мкс. Какой должна быть скорость частицы, чтобы неподвижный наблюдатель мог следить за ней в течение одной миллисекунды?

6.11. Физические явления в одинаковых условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета – это принцип ...

- 1) инвариантности;
- 2) относительности;
- 3) дополнителности;
- 4) соответствия.

6.12. Предмет движется со скоростью $0,6c$ (c – скорость света в вакууме). Тогда его длина ...

- 1) уменьшается на 20 %;
- 2) увеличивается на 20 %;
- 3) увеличивается на 10 %;
- 4) уменьшается на 10 %.

6.13. Полная энергия релятивистской частицы, движущейся со скоростью v , определяется соотношением ...

$$1) E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad 2) E = m_0 c^2; \quad 3) E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2.$$

6.14. Космический корабль с двумя космонавтами летит со скоростью $v = 0,8c$ (c – скорость света в вакууме). Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное этому направлению. Тогда длина стержня с точки зрения другого космонавта ...

- 1) равна 1,0 м при любой его ориентации;
- 2) изменится от 1,0 м в положении 1 до 1,67 м в положении 2;
- 3) изменится от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2;
- 4) изменится от 0,6 м в положении 1 до 1 м в положении 2.

ГЛАВА VII. ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

§ 7.1. Основные понятия

Окружающий нас мир полон движущихся объектов. Их движение можно разделить на два класса в зависимости от того, остается ли объект вблизи некоторого среднего положения или такого положения нет.

Возможны различные движения: колебания маятника, вибрация струны гитары, скрипки, движение электронов в атомах, скольжение фигуриста, хоккейной шайбы, пучок света или электронов в телевизионной трубке.

Иногда одно и то же движение можно отнести к любому классу в зависимости от точки зрения на объект. Например, волна движется к берегу, но утка, сидящая на поверхности, совершает движение вверх и вниз, а также вперед назад относительно среднего положения.

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости (качание маятника часов, колебания струны, изменение напряжения между обкладками конденсатора).

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают *свободные* или *собственные* колебания, *вынужденные* колебания, *автоколебания* и *параметрические* колебания.

Свободными или *собственными* называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Пример – шарик, подвешенный на нити.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Пример – колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием. Пример – часы, в которых маятник получает толчки

за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При *параметрических* колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити, на которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Рассмотрим примеры свободного колебательного движения замкнутых систем, вызванного первоначальным внешним возбуждением. Такие колебания называются свободными или собственными.

Любая система, которую мы будем изучать, описывается некоторой физической величиной, чье отклонение от равновесного значения зависит от координат и времени. В случае механических систем такой физической величиной является смещение массы в точке с координатами x, y, z от положения равновесия. Смещение описывается векторной функцией $\vec{\psi} = (x, y, z, t)$, которую будем называть волновой функцией. В случае электрических систем это может быть ток в катушке I_L или заряд на конденсаторе Q_c . В других примерах это может быть электрическое поле $\vec{E}(x, y, z)$ или магнитное поле $\vec{B}(x, y, z)$.

Если значения колеблющихся величин (смещения, скорости, силы тока и т. д.) повторяются через равные промежутки времени, то колебания называются периодическими (качание маятника часов, движение поршня в цилиндре и др.). Один законченный цикл колебательного процесса, после которого он повторяется в том же порядке, называется *полным колебанием*.

Для механических колебаний материальной точки (тела) характерно существование положения устойчивого равновесия, в котором материальная точка (тело) находится до тех пор, пока внешняя сила не выведет ее из этого состояния. За счет работы внешних сил материальная точка получает избыточную энергию и, представленная самой себе, совершает *собственные* или *свободные* колебания при последующем отсутствии внешних воздействий.

Максимальное значение колеблющейся величины называется амплитудой A колебания. Колебания осциллятора, происходящие с постоянной амплитудой, называются *незатухающими*, а с умень-

шающейся амплитудой – *затухающими*.

Время одного полного колебания называется *периодом* T .

Число полных колебаний за единицу времени называется *частотой* ν периодических колебаний. Очевидна связь между периодом и частотой:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (7.1)$$

Размерность частоты $[\nu] = \text{с}^{-1}$. Эта единица носит название герц (Гц).

Физическая величина $\omega = 2\pi\nu$ носит название *циклической* или *круговой* частоты:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.2)$$

Размерность циклической частоты $[\omega] = 1 \text{ рад/с} = \text{с}^{-1}$.

§ 7.1.1. Свободные колебания без трения

Рассмотрим систему с одной степенью свободы. Потенциальная энергия такой системы

$$U = U(q),$$

где q – обобщенная координата, отсчитываемая от положения устойчивого равновесия, в котором $U = U_{\min}$.

Разложим U в ряд по степеням q в малой окрестности точки $q = 0$. Ограничимся первыми членами (ввиду малости):

$$U(q) = U(0) + U'(0)q + \frac{1}{2}U''(0)q^2.$$

Потенциальную энергию U отсчитываем от положения равновесия $U(0) = 0$. $U'(0)$ также равно нулю, что следует из геометрического смысла производной.

Обозначим U'' через постоянную χ , характеризующую упругие свойства системы, причем в точке минимума $U'' > 0$, поэтому $\chi > 0$; тогда $U(q) = \frac{\chi q^2}{2}$.

Кинетическая энергия описывается выражением $W_{\text{к}} = \gamma(q)\dot{q}^2$. При прохождении через положение равновесия $W_{\text{к}} \neq 0$, следовательно, $\gamma(0) \neq 0$. Разложим $\gamma(q)$ в ряд и, сохранив ввиду малости

q только нулевой член разложения, запишем $W_k = \frac{\mu \dot{q}^2}{2}$, где $\mu = 2\gamma(0)$.

Составим функцию Лагранжа $L = W_k - U$; $L = \frac{\mu \dot{q}^2}{2} - \frac{\chi q^2}{2}$.

Уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

После дифференцирования получаем $\mu \ddot{q} + \chi q = 0$. Откуда следует $\ddot{q} + \frac{\chi}{\mu} q = 0$ или $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, где $\omega_0^2 = \frac{\chi}{\mu}$ – квадрат циклической частоты собственных колебаний системы.

Данные колебания системы описываются линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения данного уравнения применим подстановку $q = e^{\lambda t}$, после чего получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. Решения этого уравнения: $\lambda_1 = i\omega_0$; $\lambda_2 = -i\omega_0$.

Общее решение:

$$q = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (7.3)$$

где c_1, c_2 – комплексные постоянные величины.

Значения q должны быть вещественными, следовательно, $q = q^*$ (* – комплексно-сопряженная величина).

Подставив это выражение в формулу (7.3), получим

$$c_1^* e^{-i\omega_0 t} + c_2^* e^{i\omega_0 t} = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Данное соотношение выполняется, если $c_1^* = c_2$ и $c_2^* = c_1$.

Тогда $c_1 = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$; $c_2 = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$, где A, φ – произвольные вещественные постоянные.

Подставляя эти значения в формулу (7.3), получим

$$q = \frac{A}{2} \left(e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.4)$$

Из формулы (7.4) следует, что свободное движение системы вблизи положения устойчивого равновесия является гармониче-

ским колебанием, если q – мало.

Уравнение (7.4) относительно волновой функции можно записать в виде

$$\psi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Колебания, описываемые уравнением (7.3), являются результатом проявления таких свойств физической системы, как *возвращающая сила*, которая стремится вернуть «движущийся элемент» в положение равновесия ($\psi = 0$), в результате чего в положении равновесия он приобретает скорость, отличную от нуля: $\frac{d\psi}{dt} \neq 0$, и дальше движется по инерции.

В электрических колебательных системах также имеется возвращающая сила, которая возникает из-за явления электромагнитной индукции.

Инерция системы противодействует любому изменению $\frac{d\psi}{dt}$. В электрических цепях инерция определяется I_L или Q_c . Угловая частота ω_0 связана с физическими свойствами системы, а ω_0^2 имеет физический смысл как удельная (на единицу массы) возвращающая сила на единицу смещения.

Если колебания некоторой системы описываются уравнением

$$\psi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } \psi(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

и на систему не действуют никакие внешние силы, то она может совершать колебания бесконечно долго. В действительности же всегда имеется трение, которое вызывает затухание колебаний. Поэтому реальные колебания являются затухающими:

$$\psi(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где β – коэффициент затухания.

Примеры гармонических колебаний

Если тело подвешено на оси в точке O (рис. 7.1), не совпадающей с центром масс тела C , то под действием силы тяжести $m\vec{g}$ оно может вращаться (качаться) вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O , называемую точкой подвеса маятника.

Точка C – центр тяжести маятника. Такая система называется *физическим маятником*.

Основное уравнение для вращательного движения тела:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -M,$$

где $M = dmg \sin \alpha$. При малых колебаниях $\sin \alpha = \alpha$.

Тогда

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgd\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что α удовлетворяет уравнению гармонических колебаний, и получаем решение:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ – циклическая частота гармонических колебаний;

φ_0 – начальная фаза колебаний.

Период колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \quad (7.5)$$

где $l_{\text{пр}} = \frac{I}{md}$ – приведенная длина маятника.

Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, когда вся масса маятника сосредоточена в его центре. Поэтому $d = l$, а $I = ml^2$. Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7.6)$$

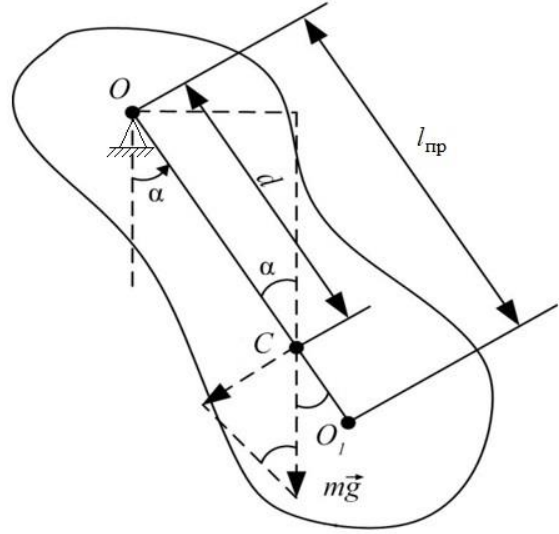


Рис. 7.1. Схема к расчету параметров колебаний физического маятника

§ 7.1.2. Способы изображения гармонических колебаний

Синусоидальные величины можно изображать с помощью волновых диаграмм, представляющих собой мгновенные значения синусоидальных величин в зависимости от времени t или фазы ωt .

Операции с волновыми диаграммами затруднены, поэтому чаще используют метод векторных диаграмм.

Синусоидально изменяющуюся величину можно представить как проекцию вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , на вертикальную ось. Если частота (угловая скорость) для всех синусоидальных величин одинакова, то они друг относительно друга неподвижны, то есть их можно расположить на плоскости с учетом только начальных фаз.

Например, если токи определяются выражениями $i_1 = I_{\max 1} \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $i_2 = I_{\max 2} \sin(\omega t + \varphi_2)$, а $\varphi_2 > \varphi_1$, то их векторную диаграмму можно представить, как на рис. 7.2, для момента времени $t = 0$. Следовательно, операции с синусоидальными величинами можно заменить операциями над амплитудами векторов, изображенными на плоскости для момента времени $t = 0$.

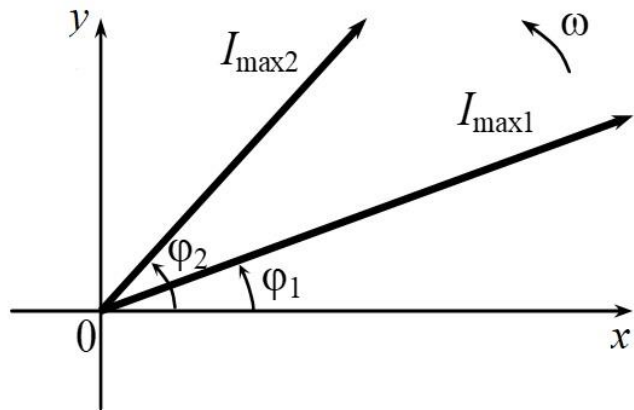


Рис. 7.2. Геометрический способ изображения колебаний

Наибольшее распространение получил для изображения синусоидальных (косинусоидальных) величин метод комплексных чисел, при этом сама функция равна либо действительной, либо мнимой части комплекса, ее изображающего. Действительно, пусть

$$\dot{I}_{\max} = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi) + i I_{\max} \sin(\omega t + \varphi),$$

где $i = \sqrt{-1}$, то есть мнимая единица.

Это можно представить на комплексной плоскости (рис. 7.3), где \dot{I}_{\max} – комплекс амплитудного значения тока. Данный метод позволяет операции сложения, вычитания, умножения и деления синусоидальных величин заменить операциями над соответствующими комплексными числами.

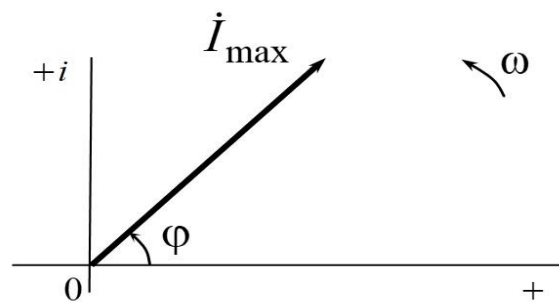


Рис. 7.3. Изображение синусоидальных величин на комплексной плоскости

§ 7.2. Сложение гармонических колебаний одного направления

Пусть имеются два одинаково направленных гармонических колебания. Это, например, когда имеются два грузика на пружинах, один из которых висит на пружине 1 и колеблется с циклической частотой ω_1 , а второй грузик, прикрепленный к первому, колеблется с частотой ω_2 :

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \\ \psi_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Результат сложения колебаний с частотами ω_1 и ω_2 зависит от ряда условий.

1. Два колебания называются *когерентными*, если разность их фаз остается постоянной (не зависит от времени):

$$\Delta = (\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2) = (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2),$$

что возможно только при условии равенства частот, то есть $\omega_1 - \omega_2 = 0$ или $\omega_1 = \omega_2$.

Для когерентных колебаний разность фаз равна разности начальных фаз.

Если разность фаз кратна 2π , то есть $\Delta = \pm 2\pi m$, где m – целое число, то колебания совпадают по фазе (*синфазны*) и $A = A_1 + A_2$.

А если $\Delta = \pm(2m+1)\pi$, то колебания находятся в *противофазе*. Когерентные колебания можно изобразить в виде векторной диаграммы (рис. 7.4) и рассчитать с помощью теоремы косинусов амплитуду и фазу результирующего колебания:

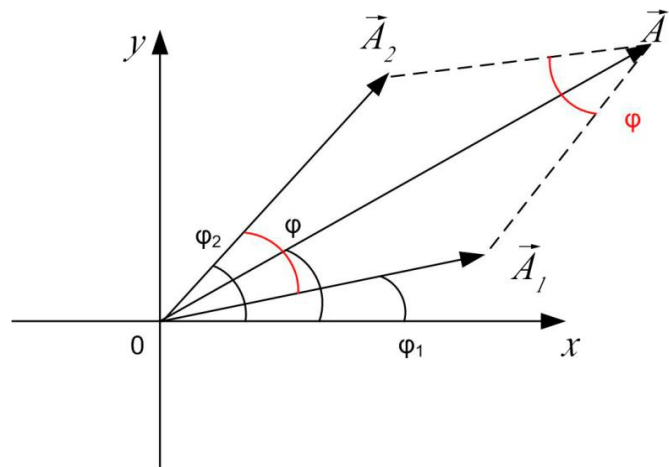


Рис. 7.4. Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2};$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

2. Если частоты гармонических колебаний различны, то они

некогерентны. При их сложении получаются негармонические колебания.

Если частоты близки, то получаются в итоге *биения* (рис. 7.5). Математически это записывается условием $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1$.

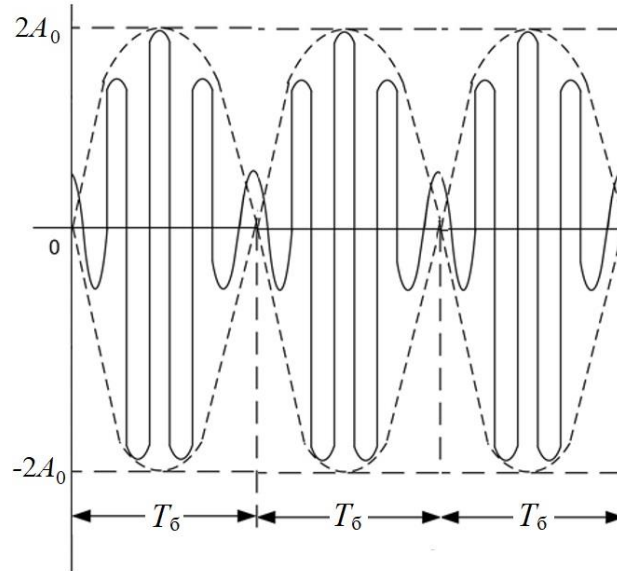


Рис. 7.5. Биения

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$, в этом случае

$$\psi_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0);$$

$$\psi_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) = A_2 \sin[\omega_1 t + \varphi_0 + \varphi(t)],$$

где $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t$.

Результирующее колебание $\psi = \psi_1 + \psi_2$ удовлетворяет соотношению

$$\psi = A(t) \sin[\omega_1 t + \varphi_0 + \varphi(t)],$$

где $A(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi(t)$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2 \sin \varphi(t)}{A_1 + A_2 \cos \varphi(t)}$.

Если $A_1 = A_2 = A_0$, тогда $A(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$,

$$\text{а } \psi = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right).$$

В этом выражении амплитуда биений $A(t)$ изменяется с частотой $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$ от $|A_1 - A_2|$ до $|A_1 + A_2|$.

Период и частота биений:

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}; \quad \nu_6 = \frac{1}{T_6} = |\nu_2 - \nu_1|.$$

3. Если колебания имеют кратные циклические частоты $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т. д., то при сложении получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Любую периодическую несинусоидальную функцию можно разложить в ряд Фурье, то есть по гармоническим составляющим (гармоникам), имеющим частоты $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т. д. Совокупность гармоник образует спектр колебания:

$$\psi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)).$$

Периодические несинусоидальные колебания имеют дискретный (линейчатый) спектр частот. Непериодические несинусоидальные колебания имеют непрерывный (сплошной) спектр частот.

Если один из параметров (амплитуда, частота) гармонических колебаний изменяется по какому-либо закону за время, значительно большее периода колебаний, то это носит название модуляции колебаний: амплитудная модуляция, частотная модуляция.

Например, при амплитудной модуляции основное колебание

$$\psi = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а модулированное

$$\psi = A_0 [1 + b(t)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $|b(t)| < 1$.

Если амплитудная модуляция осуществляется по гармоническому закону, $b(t) = b_0 \cos \Omega t$, где $b_0 = \text{const}$; если $\Omega \ll \omega_0$, тогда

$$\psi = A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Данное модулированное колебание имеет линейчатый спектр, состоящий из трех гармоник: $\omega_0, \omega_0 - \Omega, \omega_0 + \Omega$, амплитуды которых равны $A_0, \frac{A_0 b_0}{2}$ и $\frac{A_0 b_0}{2}$ соответственно.

$$A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \sin(\omega_0 + \varphi_0) +$$

$$+\frac{1}{2}A_0b_0\left\{\sin\left[(\omega_0+\Omega)t+\varphi_0\right]+\sin\left[(\omega_0-\Omega)t+\varphi_0\right]\right\}.$$

Модуляция используется при передаче сигналов в телевидении и радиосвязи.

§ 7.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Пусть точка M колеблется вдоль осей координат Ox и Oy :

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \\ y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \end{cases} \text{ то есть } \omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости xOy можно найти, если из системы уравнений исключить время. Для этого запишем уравнения в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{x}{A_1} = \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1; \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} \frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (7.8)$$

После преобразований получим

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Траектория имеет форму эллипса (эллиптически поляризованные колебания). Ориентация осей эллипса, а также его размеры зависят от A_1 , A_2 и $(\varphi_2 - \varphi_1)$ (рис. 7.6, а). Если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, то оси эллипса совпадают с Ox и Oy , а размеры полуосей равны A_1 и A_2 .

Если $A_1 = A_2$, то колебания *поляризованы по кругу*. Если $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$, где m – целое число, то эллипс вырождается в отрезок прямой: $y = \pm \left(\frac{A_2}{A_1}\right)x$ (линейно-поляризованные колебания).

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с циклическими частотами $p\omega$ и $q\omega$, где p и q – целые числа, формой ко-

лебаний являются фигуры Лиссажу, которые вписываются в прямоугольник со сторонами $2A_1$ и $2A_2$. На рис. 7.6, б представлено сложение колебаний для $\frac{q}{p} = \frac{2}{1}$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

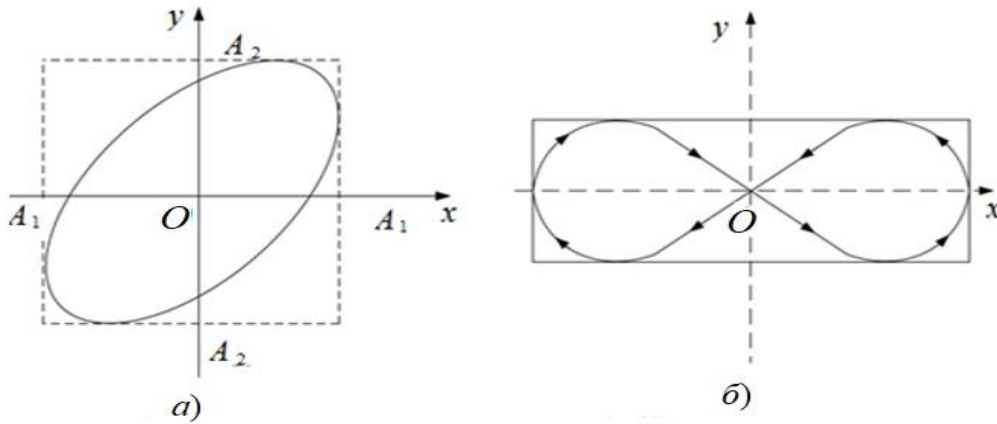


Рис. 7.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

§ 7.4. Затухающие колебания

В реальных условиях свободные колебания систем всегда затухают. Это связано с трением, сопротивлением воздушной среды или с другими силами. Рассмотрим линейную колебательную систему, то есть систему, параметры которой не изменяются в процессе колебаний. Такие системы описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Введем коэффициент затухания $\beta = \frac{b}{2m}$ и циклическую частоту собственных колебаний $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.9)$$

Характеристическое уравнение записывается в виде

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

а его решения в виде $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega'$, где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Общее решение (7.9) имеет вид

$$x = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}).$$

$$\text{Из начальных условий: } \begin{cases} C_1 + C_2 = A_0 \sin \varphi_0 \\ C_1 - C_2 = A_0 \cos \varphi_0 \end{cases}, \quad (7.10)$$

где A_0 – начальная амплитуда затухающих колебаний.

Тогда уравнение затухающих колебаний примет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \text{ – период затухающих колебаний; } \tau = \frac{1}{\beta} \text{ –}$$

время релаксации, то есть это время, в течение которого амплитуда убывает в « $e = 2,718$ » раз (рис. 7.7).

Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau}.$$

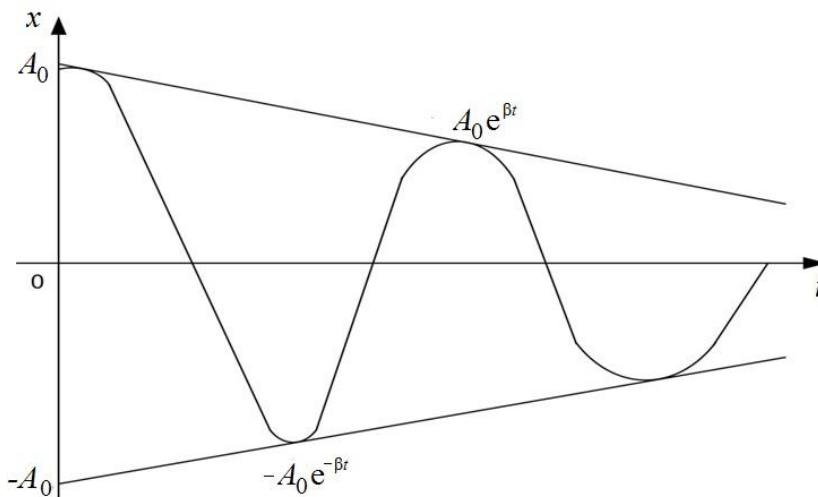


Рис. 7.7. Затухающие колебания

Установим связь частот ω' и ω_0 из уравнения $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - (\omega')^2}$,

$$\text{с учетом } \delta = \beta T = \frac{2\pi}{\omega'} \omega' \sqrt{\frac{\omega_0^2}{(\omega')^2} - 1} \text{ получим } \omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left[\frac{\delta}{2\pi}\right]^2}}.$$

Добротность колебательного контура пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за время релаксации τ :

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)},$$

где $W(t)$ – энергия колебательной системы в произвольный момент времени t .

В механической системе (пружинный маятник)

$$Q = \frac{\sqrt{Km}}{b}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}; \quad \beta = \frac{b}{2m}.$$

При сильном затухании $\beta^2 > \omega_0^2$ колебательный процесс не возникает. Система, выведенная из положения равновесия, возвращается в него асимптотически (рис. 7.8, кривая 1). При меньшем коэффициенте затухания (рис. 7.8, кривая 2) система проходит через положение равновесия и только потом к нему возвращается асимптотически. Это аperiodическое затухание. Оно наблюдается при $\beta^2 > \omega_0^2$.

Действительно,

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2};$$

$$\lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

А решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий при $t = 0$, $x = x_0$, а $v = \dot{x} = v_0$.

Тогда

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2; \\ v_0 = -\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2. \end{cases}$$

Аperiodические колебания (см. рис. 7.8, кривые 1 или 2) получаются в зависимости от начальных условий и от величины коэффициента затухания.

Если характеристическое уравнение имеет кратные корни решения $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$, то

$$x = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}.$$

Это предельный случай аperiodических колебаний.

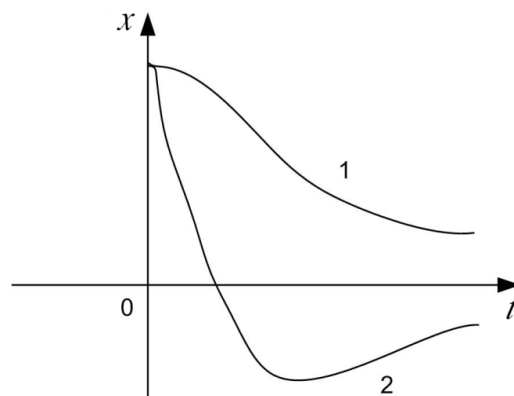


Рис. 7.8. Изменение величин при аperiodических затухающих колебаниях

§ 7.5. Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы

Если на систему действует внешняя гармоническая сила

$$F = F_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

то уравнение колебаний будет иметь следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (7.11)$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение равно сумме общего решения линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Для нахождения частного решения прибавим к правой части (7.11) мнимую функцию $if_0 \sin(\omega t + \alpha)$ и будем искать в виде функции комплексного переменного решение получившегося уравнения, после чего возьмем от него вещественную часть (Re), которая и будет представлять собой частное решение уравнения (7.11).

Итак, решаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 [\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)].$$

Его правую часть представим с помощью формулы Эйлера:

$$f_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \hat{f}_0 e^{i\omega t};$$

$$\hat{f}_0 = f_0 e^{i\alpha},$$

где $\hat{f}_0 = f_0 e^{i\alpha}$ – комплексная амплитуда вынуждающей силы.

Тогда уравнение запишется:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \hat{f}_0 e^{i\omega t}. \quad (7.12)$$

Частное решение уравнения (7.12) будем искать в виде $\hat{x} = \hat{a} e^{i\omega t}$, где \hat{a} – комплексная амплитуда колебания. Дифференцируя по времени t , получим $\dot{x} = i\omega \hat{a} e^{i\omega t}$, $\ddot{x} = (i\omega)^2 \hat{a} e^{i\omega t} = -\omega^2 \hat{a} e^{i\omega t}$.

Подставляя в формулу (7.12), получим соотношение

$$-\omega^2 \hat{a} + 2i\beta\omega \hat{a} + \omega_0^2 \hat{a} = \hat{f}_0,$$

из которого находим комплексную амплитуду колебаний:

$$\hat{a} = \frac{\hat{f}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega}.$$

Число, стоящее в знаменателе, является комплексным, поэтому его можно представить в виде

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega = \rho e^{i\varphi}.$$

Тогда комплексная амплитуда

$$\hat{a} = \frac{\hat{f}_0}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{\hat{f}_0}{\rho} e^{-i\varphi}, \quad (7.13)$$

где $\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Подставим в уравнение (7.13) значения ρ и \hat{f}_0 , получим

$$\hat{a} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i(\alpha - \varphi)}, \quad (7.14)$$

а $\hat{x} = \hat{a}e^{i\omega t} = ae^{i(\omega t + \alpha - \varphi)}$.

Для получения частного решения возьмем действительную часть комплекса \hat{x} , тогда

$$x = \operatorname{Re}\{\hat{x}\} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha - \varphi). \quad (7.15)$$

Это частное решение. Общее решение получим, если сложим решение (7.10) и (7.15), то есть

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha - \varphi). \quad (7.16)$$

Первый член уравнения (7.16) соответствует затухающим колебаниям с циклической частотой $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а второй член — незатухающим периодическим колебаниям маятника с частотой, равной частоте возмущающей силы ω . Амплитудное значение первого члена достаточно быстро уменьшается, следовательно, через время τ затухающие колебания практически прекращаются и система переходит в состояние установившихся вынужденных колебаний, совершающихся с частотой возмущающей силы. Амплитуда

А и угол φ фазы вынужденных колебаний являются, как это следует и из аналитических выражений (7.13), (7.14), функциями частоты возмущающей силы ω .

Из этих выражений следует, что:

если $\omega = 0$, то $\varphi(0) = 0$

$$\text{и } A(0) = A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2};$$

если $\omega = \infty$, то

$$\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ и } A(\infty) \rightarrow 0;$$

если $\omega = \omega_0$, то наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний, это явление называется резонансом (рис. 7.9).

Резонансную частоту ω_p найдем из следующих соображений. Из уравнения (7.16) следует, что при резонансе амплитуда достигает максимума, а знаменатель принимает минимальное значение.

$$\text{Тогда } \frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]_{\omega=\omega_p} = 0. \text{ После дифференциро-}$$

вания получаем $4\omega_p(\omega_0^2 - \omega_p^2) + 8\beta^2 \omega_p = 0$, а после преобразований для резонансной частоты – выражение $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Скорость при установившихся вынужденных колебаниях найдем как $v_x = \frac{dx}{dt}$. Скорость максимальна при $\omega = \omega_0$. Амплитуда

ускорения максимальна при $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}$.

При установившихся вынужденных колебаниях потери энергии, обусловленные диссипативными силами, полностью компенси-

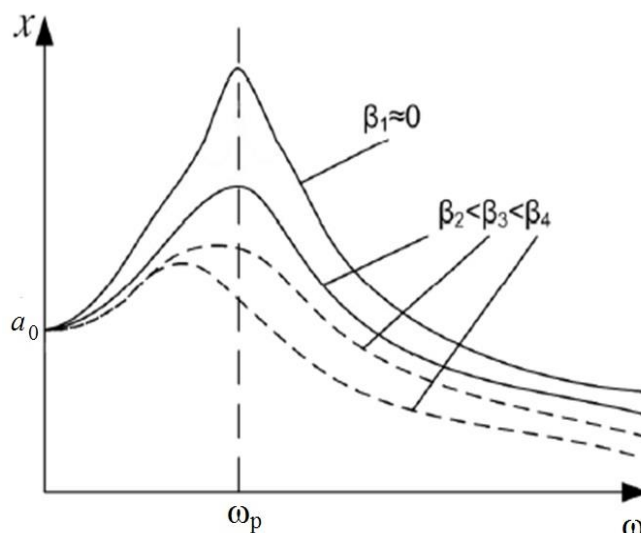


Рис. 7.9. Изменение амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от циклической частоты вынуждающей силы и коэффициента затухания

руются за счет работы возмущающей силы. Если возмущающая сила изменяется периодически по произвольному закону, то ее нужно разложить в ряд Фурье на гармоники, каждая из которых действует независимо друг от друга. Наибольшее влияние будут оказывать гармоники, частоты которых близки к резонансным.

Мы рассмотрели механический резонанс. Он используется в акустике для анализа и усиления звуков. В сооружениях и машинах резонанс может быть опасен.

§ 7.6. Волны в упругой среде

Волнами называются возмущения, распространяющиеся в среде (или в вакууме) и несущие энергию. Современный мир наполнен волнами: волны звука, распространяющиеся в воздухе и других веществах; волны механических колебаний в струнах или кристаллах; волны на поверхности воды в озерах, морях и океанах; волны землетрясений (сейсмические); электромагнитные волны с очень широким диапазоном длин волн от 10^3 м (радиоволны) до 10^{-12} м (гамма-излучение); волны де Бройля (волны вероятности), являющиеся порождением микрочастиц; гравитационные волны (пока гипотетические). Наше ухо способно слышать колебания с частотой 50–12000 Гц. Свет – поперечные электромагнитные колебания. Наши органы зрения способны воспринимать электромагнитные колебания с частотой 10^{14} – 10^{16} Гц. Частота переменного тока в электросети составляет 50 Гц.

Многие привычные нам процессы являются преобразованием одного вида волн в другие: запись музыки на магнитную ленту – преобразование звуковых колебаний в электромагнитные с последующей их фиксацией при помощи явления намагничивания; воспроизведение музыки с магнитного носителя – обратный процесс.

Не менее часто нам приходится сталкиваться с преобразованием волн одной частоты в волны другой частоты. В приборах ночного видения излучение инфракрасной области спектра (10^{12} Гц) преобразуется в излучение видимой области (10^{14} – 10^{16} Гц). Для передачи радиосигнала используется амплитудно-частотная модуляция, то есть колебания с частотой, которую способно воспринимать человеческое ухо, передаются при помощи частот 10^6 – 10^8 Гц, что представляет средние и короткие волны соответственно. При приеме радиосигнала происходит обратное преобразование.

Разные по природе волны имеют некоторые общие свойства:

1) все волны обладают импульсом и, следовательно, оказывают давление на вещество;

2) все волны переносят энергию. Морские волны могут обладать огромной разрушительной силой. Мощность электромагнитных волн, приходящих на один метр квадратный Земли от Солнца, составляет порядка 10^3 кВт/м²;

3) волновые процессы могут быть выражены общим уравнением, применимым к любым типам волн.

§ 7.6.1. Основные понятия

Источниками волн являются колебательные процессы. Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), передаются частицам среды. Процесс распространения колебаний в среде называется упругой волной. Электромагнитные волны могут распространяться и в вакууме. Составной частью всех колебаний является простое *гармоническое* колебание. Любое повторяющееся движение можно рассматривать как результат наложения простых гармонических колебаний, а любой волновой процесс – как сумму простых гармонических волн. Этот тезис, доказанный впервые в виде теоремы в 1822 г. французским физиком и математиком Ж. Б. Фурье, является и в настоящее время основным для изучения периодических движений в самых разных областях.

В упругой среде под действием внешних сил могут возникать колебательные процессы вследствие взаимодействия между частицами. Это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v , то есть возникает механическая волна. Если направление колебаний частиц в упругой среде происходит в направлении распространения волны, то такая волна называется *продольной*. При поперечном направлении колебаний по отношению к направлению распространения волны последняя называется *поперечной*. Продольные волны возникают в твердых, жидких и газообразных средах *при деформациях сжатия и растяжения*. Поперечные волны возникают *при деформациях сдвига*, то есть только в твердых телах.

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называ-

ется *фронтом волны*. Фронт волны отделяет часть пространства, уже колеблющегося, от области (рис. 7.10), в которой колебания еще не возникли. По форме фронта волны бывают *сферическими*, *плоскими*, *цилиндрическими* и т. д.

По характеру распространения различают линейные (в одном измерении), поверхностные (в двух измерениях) и пространственные (в трех измерениях) волны. Направление распространения называют *лучом*. Волновой поверхностью называют геометрическое место всех частиц, колеблющихся с одинаковой фазой. Волновая поверхность перпендикулярна лучу.

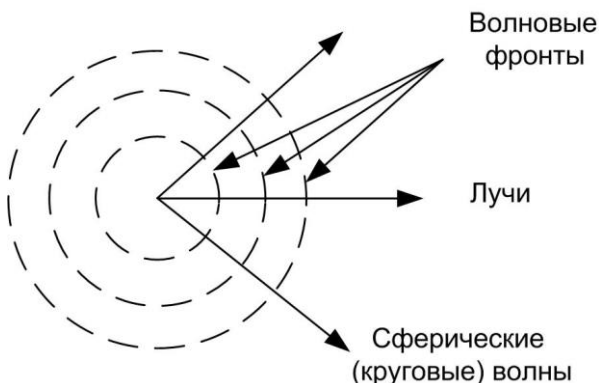


Рис. 7.10. Изображение фронта сферической волны в разные моменты времени

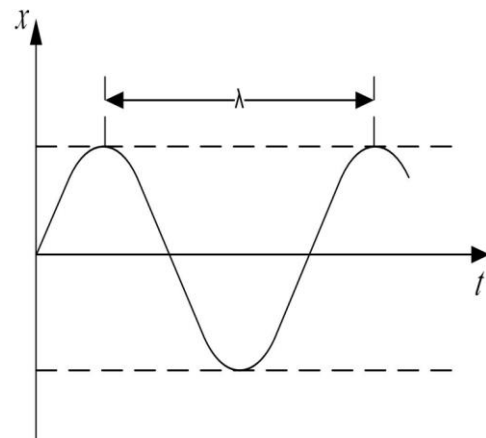


Рис. 7.11. Длина волны

Расстояние λ (рис. 7.11), на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется *длиной волны*:

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{v_{\phi}}{\nu}, \quad (7.17)$$

где v_{ϕ} – фазовая скорость; T – период колебаний; ν – частота колебаний.

Длина волны λ – это расстояние между частицами, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π .

Фазовая скорость зависит от механических свойств среды. В натянутой струне скорость поперечной волны

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (7.18)$$

где F – сила натяжения; ρ – плотность; S – поперечное сечение.

Для упругой продольной волны в твердом теле фазовая скорость определяется по формуле

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (7.19)$$

где E – модуль упругости.

В жидкостях для продольной волны фазовая скорость равна

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}}, \quad (7.20)$$

где $K = \frac{1}{\chi}$ – модуль всестороннего сжатия.

В газе с плотностью ρ и давлением P продольные волны имеют фазовую скорость

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (7.21)$$

где γ – показатель адиабаты; R – универсальная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

7.6.2. Уравнение плоской волны

Уравнением волны называют выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функции ее координат x, y, z и времени t :

$$\psi = \psi(x, y, z, t).$$

Эта функция является периодической по времени и координатам. Найдем вид функции ψ , предполагая, что колебания носят гармонический характер. Пусть ось x совпадает с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности (фронт) будут перпендикулярны к оси Ox . Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеют вид

$$\psi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем вид колебания в плоскости, соответствующей произвольному значению x . Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до произвольной плоскости x , волне потребуется время $\tau = \frac{x}{v_{\phi}}$.

Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x , будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости

$x = 0$, то есть будут иметь вид

$$\psi(x, t) = A \cos \left[\omega(t - \tau) + \alpha \right] = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) + \alpha \right].$$

Следовательно, уравнение плоской волны (продольные и поперечные), распространяющейся в направлении оси x , имеет вид

$$\psi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) + \alpha \right],$$

где A – амплитуда; α – начальная фаза, определяется выбором начала отсчета x и t .

Для какого-то момента времени t фаза остается постоянной:

$$\omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) + a = \text{const.}$$

Отсюда $dt - \frac{1}{v_\phi} dx = 0$, следовательно, $\frac{dx}{dt} = v_\phi$ – фазовая скорость.

Зависимость фазовой скорости волн в среде от их частоты или длины волны называется *дисперсией волн*.

Волна, распространяющаяся в противоположном направлении оси Ox , описывается выражением

$$\psi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v_\phi} \right) + a \right]; \quad \frac{dx}{dt} = -v_\phi. \quad (7.22)$$

Введем величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Его можно найти по формуле

$$k = \frac{2\pi v}{\lambda v} = \frac{\omega}{v_\phi}. \quad (7.23)$$

Учитывая данное выражение, получаем

$$\psi = A \cos \left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{Tv_\phi} + \alpha \right] = A \cos [\omega t - kx + \alpha]. \quad (7.24)$$

Если уравнение (7.24) дважды продифференцировать по аргументам t и x , то получаем

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi; \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi = -\frac{\omega^2}{v_\phi^2}\psi.$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем так называемое волновое уравнение плоской бегущей волны вдоль оси Ox :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v_\phi^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}. \quad (7.25)$$

Считается, что амплитуда волны не зависит от x , то есть энергия волны не поглощается средой. В поглощающей среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний постоянно уменьшается, а уравнение волны в такой среде

$$\psi = A_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (7.26)$$

где A_0 – амплитуда в точке $x = 0$; β – коэффициент затухания, характеризующий среду.

Рассмотрим сферическую волну. Уравнение сферической волны отличается от уравнения плоской волны тем, что вместо x нужно взять радиус r и учесть, что если среда не поглощает энергию, то амплитуда волны убывает с расстоянием от источника по закону $\frac{1}{r}$ (так как все большая часть пространства начинает колебаться):

$$\psi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (7.27)$$

7.6.3. Стоячие волны

Принципом суперпозиции волн является процесс простого наложения волн без их взаимного возмущения.

Например, звучание оркестра. Но волны могут быть *когерентными*, если для них в каждой точке среды сохраняется разность фаз, то есть она не зависит от времени. При их сложении могут возникать особые явления, называемые интерференцией.

Интерференция – явление устойчивого во времени перераспределения колебаний в пространстве, в результате которого в одних местах колебания усиливаются, а в других ослабляются. Наиболее ярко интерференция проявляется в оптике. Обсудим только один интерференционный эффект, который заключается в образовании стоячих волн. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бе-

гущая ей навстречу отраженная волна, накладываясь друг на друга, дают стоячую волну.

Уравнения плоских волн, распространяющихся вдоль оси Ox в противоположных направлениях (рис. 7.12):

$$\psi_1 = A \cos(\omega t - kx + a_1); \quad \psi_2 = A \cos(\omega t + kx + a_2).$$

Тогда при сложении волн получаем

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{a_2 - a_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{a_2 + a_1}{2}\right). \quad (7.28)$$

Уравнение (7.28) есть уравнение стоячей волны. Амплитуда колебаний изменяется в диапазоне $0-2A$.

Упростим выражение (7.28). Для этого начало отсчета Ox выберем так, чтобы $a_2 - a_1 = 0$. А начало отсчета времени t выберем так, чтобы $a_2 + a_1 = 0$, кроме того учтем, что волновое число равно

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогда уравнение (7.28) примет вид

$$\psi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos \omega t. \quad (7.29)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (7.30)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, амплитуда колебаний обращается в ноль.

Координаты узлов:

$$x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2.$$

Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются пучностями. Из расчетов следует, что расстояние между соседними пучностями, как и между соседними узлами, равно половине длины волны $\frac{\lambda}{2}$ (рис. 7.13).

Пучности и узлы, следовательно, сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны $\frac{\lambda}{4}$.

Интересно то, что при колебаниях в стоячей волне переноса энергии нет, так как происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. А средний по времени по-

ток энергии $\Phi = 0$.

Рассмотрим колебания струны (см. рис. 7.13). Струна закреплена с двух сторон. При возбуждении в ней поперечных колебаний в ней устанавливаются стоячие волны. При этом в точках закрепления располагаются узлы. Поэтому в струне возбуждаются только такие колебания, для которых на длине струны укладывается целое число полуволен $\frac{\lambda}{2}$. Следовательно, $L = n \frac{\lambda}{2}$, где L – длина струны,

или длина стоячей волны равна $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, а частоты определяются формулой

$$v_n = \frac{v_\phi}{\lambda_n} = \frac{v_\phi n}{2L}, \quad (7.31)$$

где v_ϕ – фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины (линейной плотностью струны).

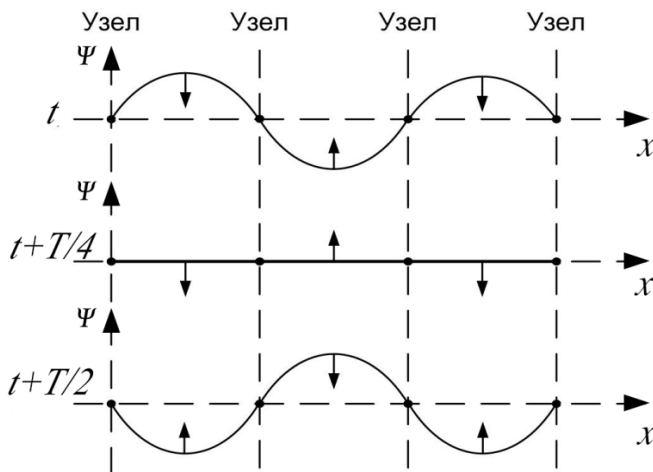


Рис. 7.12. Стоячая волна

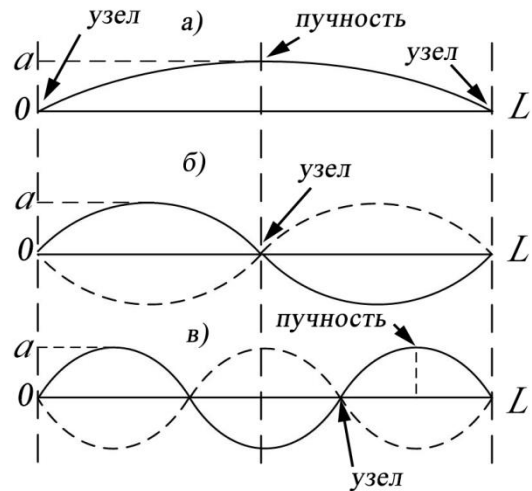


Рис. 7.13. Колебания струны

7.7. Плотность и поток энергии

При колебательном движении частиц среды происходит перенос энергии за счет передачи ее от одной частицы к другой. Количество энергии E , приходящееся на единицу объема среды dV , называется объемной плотностью энергии:

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{dm}{dV} \frac{A^2 \omega^2}{2} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}; \quad dE = w dV = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} dV,$$

$$\begin{aligned} \text{где } E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \frac{m}{4}A^2\omega^2 \left[1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] + \frac{kA^2}{4} \left[1 + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \text{const}, \end{aligned}$$

то есть полная энергия сохраняется, так как квазиупругая сила является силой консервативной, а максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии:

$$(W_k)_{\max} = U_{\max} \quad \text{или} \quad \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Поток энергии – энергия, проходящая через площадь S , перпендикулярную вектору скорости \vec{v} , за единицу времени:

$$E = wStv = \frac{\rho}{2}\omega^2 A^2 S w v,$$

где v – скорость волны; t – время.

$\Phi = \frac{dE}{dt}$ – поток энергии (это скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности).

Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина \vec{j} , называемая вектором плотности потока энергии, вектор Умова:

$$\vec{j} = w\vec{v}; \quad \vec{j} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (7.32)$$

Зная \vec{j} во всех точках произвольной поверхности S , можно вычислить поток энергии через эту поверхность:

$$d\Phi = \vec{j}d\vec{S}; \quad \Phi = \int_S \vec{j}d\vec{S} \cos(\vec{j}, \hat{d}\vec{S}).$$

7.8. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость

В случае распространения нескольких волн в *линейной* среде они накладываются друг на друга в соответствии с *принципом суперпозиции*: результирующее смещение частицы в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получает частица, участвуя в каждом волновом процессе. Этот процесс можно рассмотреть на примере биений. Ранее было установлено, что биения возникают при сложении двух волн с близкими частотами. Получается некоторая результирующая волна, квадрат амплитуды

которой определяется следующим выражением:

$$A^2(x, t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\omega t - \Delta kx),$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, а $\Delta k = k_1 - k_2$.

Из данной формулы следует, что квадрат амплитуды изменяется с малой частотой, равной разности частот отдельных колебаний, следовательно, с такой же частотой будут происходить и колебания энергии. Но поскольку в данном случае энергия колебаний зависит от времени и координаты, то это значит, что она перемещается в пространстве. Скорость перемещения энергии в пространстве называют групповой скоростью и обозначают ее через $v_{\text{гр}}$. Найдем групповую скорость из соотношения

$$\Delta\omega dt - \Delta k dx = 0, \quad \text{откуда } v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Скорость распространения волн зависит от физических свойств среды. При отсутствии дисперсии $\frac{dv_{\text{ф}}}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dk} = 0$, групповая скорость совпадает с фазовой, то есть волны различной формы и интенсивности распространяются с одинаковой скоростью $v_{\text{ф}}$; например: для электромагнитных волн в вакууме $v_{\text{ф}} = c = 3 \cdot 10^8$ м/с, для акустических волн в воздухе $v_{\text{ф}} = 337$ м/с. Волновые пакеты в таких средах не изменяют своей формы.

Если среда обладает дисперсией ($dv_{\text{ф}} / d\lambda \neq 0$), фазовые скорости разных волн неодинаковы и зависят от частоты. Форма волнового пакета в этом случае в разные моменты времени различна. Групповую скорость в этом случае можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{\text{гр}} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_{\text{ф}}) = v_{\text{ф}} + k \frac{dv_{\text{ф}}}{dk} = \\ &= v_{\text{ф}} + k \frac{dv_{\text{ф}}}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{ф}} + k \frac{dv_{\text{ф}}}{d\omega} v_{\text{гр}}. \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$v_{\text{гр}} = \frac{v_{\phi}}{1 - k \frac{dv_{\phi}}{d\omega}} = \frac{v_{\phi}}{1 - \frac{v_{\phi}}{\omega} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}.$$

Зависимость между фазовой и групповой скоростями и длиной волны также была получена Рэлеем:

$$v_{\text{гр}} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}. \quad (7.33)$$

Из формулы (7.33) видно, что групповая скорость может быть меньше фазовой, если $\frac{dv_{\phi}}{d\lambda} > 0$ (*нормальная дисперсия*), и больше фазовой при $\frac{dv_{\phi}}{d\lambda} < 0$ (*аномальная дисперсия*). При отсутствии дисперсии $\frac{dv_{\phi}}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость равна фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими аппаратами и т. д.

7.9. Эффект Доплера

Частота волны не является инвариантной характеристикой волны, а изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой. Это явление называется эффектом Доплера.

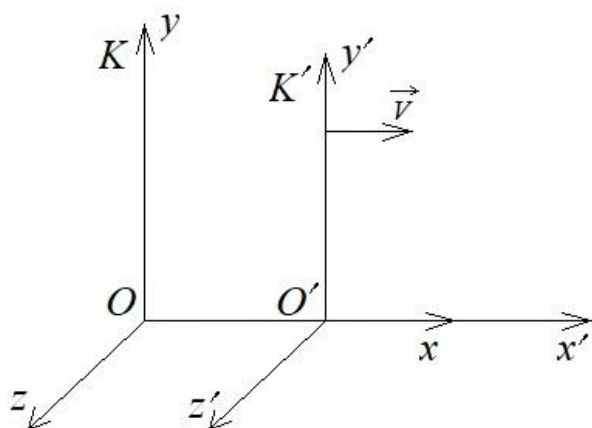


Рис. 7.14. Неподвижная система K и подвижная система K' , движущаяся со скоростью V

Как это происходит? При рассмотрении ограничимся областью звуковых частот. Пусть в покоящейся системе K , циклическая частота плоской волны, бегущей в направлении x , равна ω . Определим, какую частоту будет воспринимать наблюдатель, находящийся в движущейся системе K' . Эту частоту обозначим ω' .

Скорость системы K' равна V , ориентация осей K

и K' одинакова, а движение K' происходит в направлении оси x , то есть

$$\psi(x, t) = a \sin(\omega t - kx).$$

Изображение данной волновой функции на комплексной плоскости запишется следующим образом:

$$\dot{\psi}(x, t) = a e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Воспользуемся преобразованиями Галилея и перейдем в систему K' . Тогда получим закон движения: $x' = x - Vt'$.

$$\dot{\psi}(x', t') = a e^{-i\omega t' + ik(x' + Vt')} = a e^{-i[(\omega - kV)t' - kx']},$$

где $\omega' = \omega - kV$ — это частота, которую воспринимает наблюдатель, находящийся в подвижной системе отсчета.

Следовательно, наблюдатель системы K' будет регистрировать волновой процесс с частотой $\omega' = \omega - kV$. Учитывая, что $k = \frac{\omega}{v_\phi}$,

где v_ϕ — скорость волны, получим $\omega' = \omega \left(1 - \frac{V}{v_\phi} \right)$.

$$\text{А волновое число } k' = \frac{\omega'}{v'_\phi} = \frac{\omega'}{v_\phi - V} = \frac{\omega \left(1 - \frac{V}{v_\phi} \right)}{v_\phi - V} = \frac{\omega}{v_\phi} = k,$$

где $v'_\phi = v_\phi - V$, то есть $k' = k$.

Рассмотрим два примера. В первом источник сигнала неподвижен, а приемник перемещается относительно источника со скоростью $\pm \vec{V}$ (рис. 7.15):

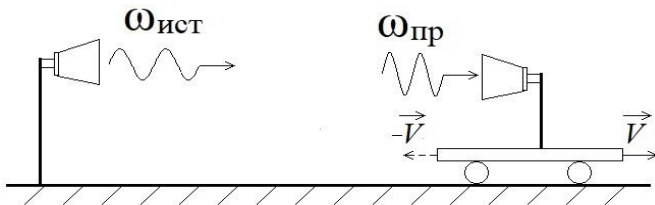


Рис. 7.15. Изменение частоты сигнала источника для приемника, перемещающегося со скоростью $\pm \vec{V}$ относительно источника

а) при $+\vec{V}$ (приемник уезжает от источника):

а) при $+\vec{V}$ (приемник уезжает от источника):

$$\omega_{пр} = \omega_{ист} \left(1 - \frac{V}{v_\phi} \right) < \omega_{ист},$$

то есть частота сигнала приемника меньше, чем у источника;

б) при $-\vec{V}$ (приемник

приближается к источнику) $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}} \left(1 + \frac{V}{v_{\text{ф}}} \right) > \omega_{\text{ист}}$, то есть во втором случае частота сигнала, воспринимаемого приемником, увеличивается.

Во втором примере (рис. 7.16) приемник неподвижен, а источник сигнала перемещается относительно приемника со скоростью $\pm V$:

а) при $+\vec{V}$ (источник перемещается ближе к приемнику) будем

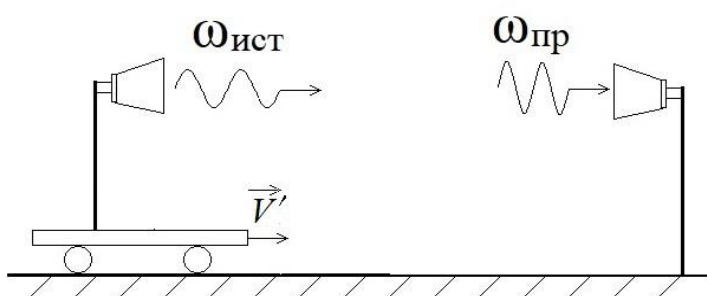


Рис. 7.16. Изменение частоты сигнала для приемника при перемещении источника сигнала со скоростью $\pm \vec{V}$

иметь $\omega_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{ист}}}{1 - \frac{V}{v_{\text{ф}}}} > \omega_{\text{ист}}$, то

есть приемник принимает сигнал большей частоты;

б) при $-\vec{V}$ (источник уезжает от приемника) будем иметь $\omega_{\text{пр}} < \omega_{\text{ист}}$, то есть приемник принимает сигнал меньшей частоты.

Таким образом, в обоих случаях получили, что при удалении источника от приемника частота сигнала, воспринимаемого приемником, уменьшается, а при их сближении – увеличивается.

7.10. Ультразвук

Ультразвук – это колебания, распространяющиеся в твердых телах, жидкости или газе и имеющие частоту, превышающую 20 кГц.

В горном деле ультразвук и соответствующие методы, основанные на регистрации скорости и амплитуды ультразвуковых импульсов, могут применяться:

1) для определения упругих физико-механических характеристик горных пород: модуля Юнга E , модуля сдвига G и коэффициента Пуассона μ ; и неупругих: коэффициента вязкости, пластичности, внутреннего трения; прочностных параметров и дефектов структуры, а также их изменений во времени;

2) при исследовании массива горных пород: при определении размеров зон повышенных напряжений, трещиноватости, естественного напряженного состояния.

7.11. Скорость распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде

Известно, что продольные деформации сжатия и растяжения стержней сопровождаются их поперечным растяжением и сжатием. Для количественного описания этих явлений был введен коэффициент Пуассона. Поэтому при продольных колебаниях в стержне частицы движутся не совсем параллельно его оси, а имеют также и поперечную составляющую скорости.

Чтобы колебания были чисто продольными, нужно закрепить боковую поверхность стержня, то есть лишить ее возможности перемещаться в поперечном направлении. Это возможно, если возбудить продольные колебания в неограниченной среде. В этом случае нужно иметь в виду, что модуль Юнга должен быть заменен модулем одностороннего сжатия E' . В результате для скорости распространения продольных возмущений в неограниченной среде получим формулу

$$C_{II} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}, \quad (7.34)$$

где K – модуль всестороннего сжатия, $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$.

Первая часть формулы, то есть $C_{II} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$, может быть получена из следующих представлений. Пусть на свободном конце стержня действует постоянная сила. Момент начала ее действия $t = 0$.

В возмущенной области стержня вещество движется с постоянной скоростью v , а стержень деформируется одинаково. Пусть m – масса деформированной части стержня. Тогда ее импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Приращение импульса определяется по второму закону Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (7.35)$$

то есть внешняя сила равна изменению импульса за промежуток времени dt .

За время t возмущение проходит путь $l = Ct$. Нужно различать скорость движения вещества v и скорость движения возмущения C . Всегда $v < C$. Учитывая, что масса возмущенной части стержня

$m = \rho S C t$, а $F = P S$, где P – давление в возмущенной области. Из первой формулы выразим S , а из второй P и с учетом (7.35) получим

$$P = \rho C v. \quad (7.36)$$

Но давление связано с относительным сжатием стержня соотношением $\sigma = \varepsilon E$, а относительную деформацию ε можно определить:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v t}{C t} = \frac{v}{C}.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{v}{C} E. \quad (7.37)$$

Учитывая, что $\sigma = P$, а из (7.36) следует, что $P = S C v$, из уравнения (7.37) получим

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.38)$$

Эта формула и определяет скорость распространения упругих продольных возмущений в стержне.

В неограниченной среде наряду с продольными также могут распространяться и поперечные возмущения, когда частицы среды смещаются перпендикулярно направлению распространения возмущения. Скорость распространения поперечных возмущений может быть найдена аналогично предыдущему случаю. Мысленно «вырезают» в неограниченной среде стержень с осью, параллельной направлению распространения возмущений. Если к основанию стержня при $t = 0$ приложить касательное напряжение τ , то в стержне возникнет деформация сдвига, распространяющаяся по стержню со скоростью C_{\perp} .

Можно показать, что $\tau = \rho C_{\perp} v$, где $\tau = G \gamma$, а γ – угол сдвига, который можно определить как $\gamma = \frac{v}{C_{\perp}}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \rho C_{\perp} v &= G \frac{v}{C_{\perp}}; \\ C_{\perp} &= \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Поперечные возмущения, если они малы, подчиняются принципу суперпозиции. Сравнивая (7.38) и (7.39), а также учитывая, что $K > 0$, получим $C_{\parallel} > C_{\perp}$.

В общем случае, если в неограниченной среде возникло какое-либо возмущение, то оно разделится на продольное и поперечное, которые распространяются независимо друг от друга. В качестве примера можно показать, что для горных пород, так же как и для металлов, выполняется соотношение $C_{\parallel} > C > C_{\perp}$, где $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

7.12. Скорость распространения звуковых волн в жидкостях и газах

Данные среды обладают объемной упругостью, модуль сдвига для них равен нулю, поэтому в них не могут распространяться поперечные колебания. Скорость продольных колебаний может быть рассчитана по формуле $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Определим физический смысл величины E применительно к жидким и газообразным средам. Поскольку газ занимает весь предоставленный ему объем, поэтому будем считать, что в исходном состоянии давление газа отлично от нуля, обозначим его P_0 . Если есть приращение давления, то $P = P_0 + \Delta P$. Будем предполагать, что $\Delta P \ll P_0$. А газ заключен в трубе, один из концов которой закрыт неподвижным поршнем. Тогда при изменении давления на ΔP длина газового столба изменится на Δl .

$$\text{Для стержня } \Delta P = -E \frac{\Delta l}{l}.$$

$$\text{Для газового столба можно записать } E = \rho \frac{dP}{d\rho}.$$

Тогда для скорости звука в газах

$$C = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (7.40)$$

$$\text{При изотермическом процессе } \frac{dP}{d\rho} = \frac{P}{\rho}.$$

Тогда

$$C' = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

где C' – скорость распространения возмущения в газе.

Расчет по этой формуле при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ дает $C' = 280\text{ м/с}$, а из опыта известно, что $C = 330\text{ м/с}$. Расхождение объясняется тем, что температура T не остается постоянной. Лапласом установлено, что распространение звука является адиабатическим процессом. Поэтому надо использовать его уравнение

$$\gamma P d\rho - \rho dP = 0.$$

Откуда получаем

$$\frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{ад}} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T.$$

Следовательно, получаем формулу для расчета скорости звука в воздухе:

$$C = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = C' \sqrt{\gamma}.$$

Тогда $C = 280\sqrt{1,4} = 330\text{ м/с}$.

7.13. Вопросы для самоподготовки

1. Какие колебания называются вынужденными? Затухающими?
2. Как вычислить сдвиг фаз с помощью фигур Лиссажу?
3. Что называется резонансом? При каких условиях он возникает?
4. Что называется добротностью колебательного контура?
5. Приведите решение дифференциального уравнения собственных колебаний. Назовите основные параметры механических колебаний.
6. Когда возникают биения? Объясните картину биений с энергетической точки зрения.
7. Что называется периодом биений? Частотой биений?
8. Что называется амплитудно-модулированным колебанием?
9. Что называется длиной волны?
10. Каков механизм образования стоячих волн? Приведите

уравнение стоячей волны.

11. Как будет направлен вектор смещения при образовании стоячей волны?

12. Какая сила вызывает поперечные колебания струны?

13. Чем определяется частота колебаний струны?

14. Что такое собственные частоты струны?

15. Что называется интерференцией? Назовите условия возникновения явления интерференции.

16. Какие волны называются поперечными, продольными?

17. От чего зависит скорость продольных и поперечных волн в среде?

18. В чем особенность распространения упругих волн в различных средах?

19. Как определить скорость продольных волн в жидкости и газе?

20. Какой термодинамический процесс определяет распространение упругих волн в газе?

21. Какими являются ультразвуковые волны: продольными или поперечными? В каких средах они могут распространяться?

22. Можно ли наблюдать дифракцию на звуковых волнах в жидкости?

23. Почему стоячие волны образуют решетку с периодом $d = \lambda / 2$?

7.14. Примеры решения задач

Пример 7.1. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня длиной 120 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на расстояние 30 см от его конца. Определите период колебаний этого стержня.

Дано:

$$l = 1,2 \text{ м}$$

$$l_1 = 0,3 \text{ м}$$

$$T = ?$$

Решение. Период T колебаний физического маятника определяется выражением $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$, где I_O – момент

инерции стержня относительно оси колебаний, которая проходит через точку O ; m – масса стержня; g – ускорение свободного падения; d – расстояние от центра масс (точка C) до оси колебаний.

Согласно теореме Штейнера

$$I_O = I_C + md^2,$$

где $I_C = \frac{1}{12}ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс этого стержня; d – расстояние между осями. Расстояние d между осями в данной задаче $d = \frac{l}{2} - l_1 = \frac{1,2}{2} - 0,3 = 0,3$ м.

Тогда период колебаний данного физического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \left[\frac{l^2}{12} + d^2 \right]}{mgd}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,12 + 0,09}{9,81 \cdot 0,3}} = 1,7 \text{ с.}$$

Пример 7.2. Логарифмический декремент затухания осциллятора, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Найдите время и число полных колебаний, за которое амплитуда колебаний осциллятора уменьшится в 20 раз.

Дано:

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$\delta = 0,01$$

$$A = 0,05A_0$$

$$t, N - ?$$

Решение. Осциллятор – система, совершающая колебания. Колебания со временем затухают, следовательно, их амплитуда экспоненциально уменьшается: $A = A_0 e^{-\beta t}$, где A_0 – амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$; β – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания связан с коэффициентом затухания и условным периодом затухающих колебаний соотношением $\delta = \beta T = \frac{\beta}{\nu}$, из которого коэффициент затухания запишется в виде $\beta = \delta \nu$.

Получим искомое значение времени

$$t = \frac{1}{\delta \nu} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{1}{0,01 \cdot 50} \ln \frac{A_0}{0,05A_0} = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ с.}$$

Число полных колебаний $N = \frac{t}{T} = t\nu = 5,92 \cdot 50 = 296$.

Пример 7.3. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x , в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $\nu = 15$ м/с. Две точки, находящиеся на расстояниях $x_1 = 5$ м и $x_2 = 5,5$ м от источ-

ника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/5$ и амплитудой $y_m = 4$ см. Определите длину волны λ , циклическую частоту ω , запишите уравнение волны ($\varphi_0 = 0$), определите смещение y_2 точек в момент времени $t = 3$ с.

Дано:

$$v = 15 \text{ м/с}$$

$$x_1 = 5 \text{ м}$$

$$x_2 = 5,5 \text{ м}$$

$$\Delta\varphi = \pi/5$$

$$y_m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$t = 3 \text{ с}; \varphi_0 = 0$$

$$\lambda; \omega; y(x, t);$$

$$y_1; y_2 - ?$$

Решение. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны, расстояние $\Delta x = x_2 - x_1$ между ними и длина волны λ связаны соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}, \quad \text{из которого следует:}$$

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \quad \text{Рассчитаем длину волны:}$$

$$\lambda = \frac{2\pi(5,5 - 5) \cdot 5}{\pi} = 5 \text{ м} \quad \text{и волновое число:}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5} \text{ м}^{-1}.$$

Циклическая частота ω колебаний частиц в волне определяется из соотношения $\omega = \frac{2\pi}{T}$ с учетом выражения $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = kv$:

$$\omega = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 15}{5} = 6\pi = 18,84 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для определения смещения y_1 и y_2 точек с координатами x_1 и x_2 в указанный момент времени необходимо записать уравнение плоской упругой волны, распространяющейся вдоль оси x для заданного условия задачи:

$$y(x, t) = 0,04 \sin\left(6\pi t - \frac{2\pi}{5}x\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(3t - \frac{x}{5}\right).$$

Результаты расчета смещения указанных точек:

$$y_1 = 0,04 \sin 2\pi(3 \cdot 3 - 1) = 0 \quad \text{и} \quad y_2 = 0,04 \sin 2\pi(3 \cdot 3 - 1,1) \approx -0,01 \text{ м}.$$

7.15. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

7.1–7.10. Материальная точка массой m совершает гармонические колебания по закону синуса с периодом T , начальной фазой φ_0 , амплитудой колебаний A . Определите в момент времени, когда

смещение равно Δx : скорость v , ускорение a , силу F , кинетическую W_k и полную энергию E материальной точки.

| Задача | m | v | A | φ_0 | Δx |
|--------|-----|-------|-----|-------------|------------|
| | г | Гц | см | рад | См |
| 7.1 | 200 | 1 | 5 | $\pi/6$ | 2 |
| 7.2 | 300 | 0,75 | 3 | $\pi/5$ | 1 |
| 7.3 | 80 | 0,5 | 2 | $\pi/8$ | 1 |
| 7.4 | 100 | 0,25 | 4 | $\pi/6$ | 0,5 |
| 7.5 | 150 | 0,2 | 6 | $3\pi/4$ | 1 |
| 7.6 | 125 | 1 | 8 | $\pi/3$ | 1 |
| 7.7 | 200 | 0,05 | 7 | $3\pi/4$ | 2 |
| 7.8 | 300 | 0,025 | 10 | $\pi/6$ | 2 |
| 7.9 | 80 | 0,25 | 15 | $\pi/6$ | 5 |
| 7.10 | 100 | 0,025 | 3 | $\pi/6$ | 1 |

7.11–7.20. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin(\omega(t + \tau))$. Определите амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте с соблюдением масштаба векторную диаграмму для момента времени t_1 .

| Задача | A_1 | A_2 | T | τ | t_1 |
|--------|-------|-------|-----|--------|-------|
| | см | см | мс | мс | мс |
| 7.11 | 10 | 7 | 7 | 2 | 2 |
| 7.12 | 10 | 8 | 10 | 2 | 1 |
| 7.13 | 10 | 6 | 15 | 4 | 1 |
| 7.14 | 10 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 7.15 | 10 | 4 | 6 | 2,5 | 1 |
| 7.16 | 10 | 9 | 8 | 2 | 1 |
| 7.17 | 10 | 11 | 7 | 4 | 3 |
| 7.18 | 10 | 8 | 8 | 4 | 2 |
| 7.19 | 10 | 7 | 15 | 4 | 5 |
| 7.20 | 10 | 6 | 3 | 5 | 2 |

7.21. Груз массой 400 г совершает колебания на пружине с жесткостью 250 Н/м. Определите максимальную скорость груза, если амплитуда колебаний равна 15 см.

7.22. Из двух математических маятников один совершил 10 колебаний, другой за то же время 6 колебаний. Найдите длину каждого маятника, если разница в их длине составляет 20 см.

7.23. Определите частоту простых гармонических колебаний диска радиусом $R = 20$ см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

7.24. Определите период T простых гармонических колебаний диска радиусом $R = 40$ см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

7.25. Ракета поднимается вверх с ускорением 30 м/с^2 . Сколько полных колебаний совершит помещенный в ракету маятник длиной 1 м за время, в течение которого ракета поднимется на высоту 1500 м? Ускорение свободного падения считать постоянным.

7.26. Определите период T колебаний математического маятника, если модуль его максимального перемещения $\Delta r = 18$ см и максимальная скорость $v_{\max} = 16$ см/с.

7.27. На Земле маятник колеблется с периодом в 1 с. Каков будет период колебания этого маятника на Марсе, где ускорение свободного падения примерно в $2,6$ раза меньше, чем на Земле?

7.28. На стержне длиной $l = 30$ см укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с грузами колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определите приведенную длину L и период T простых гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь.

7.29. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 2 минуты уменьшилась в 2 раза. Определите коэффициент затухания.

7.30. Логарифмический декремент затухания колебаний δ маятника равен $0,01$. Определите число полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в 3 раза.

7.31–7.40. Задано уравнение волны $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$. Определите частоту ν и период T колебаний, фазовую скорость $v_{\text{ф}}$, максимальные значения скорости $\dot{\xi}_{\max}$ и ускорения $\ddot{\xi}_{\max}$ колебаний частиц среды. Найдите смещение частиц среды в точке x_1 в момент времени t_1 .

| Задача | A | ω | k | x_1 | t_1 |
|--------|------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| | см | с^{-1} | м^{-1} | м | с |
| 7.31 | 1 | 628 | 2 | 2 | 3 |
| 7.32 | 0,75 | 314 | 1 | 1 | 1 |
| 7.33 | 0,5 | 157 | 3 | 3 | 3 |
| 7.34 | 0,25 | 628 | 4 | 4 | 1 |
| 7.35 | 1 | 314 | 5 | 5 | 2 |
| 7.36 | 0,75 | 157 | 2 | 2 | 4 |
| 7.37 | 0,5 | 628 | 1 | 1 | 3 |
| 7.38 | 0,25 | 314 | 3 | 3 | 1 |
| 7.39 | 0,5 | 157 | 4 | 4 | 2 |
| 7.40 | 0,75 | 628 | 5 | 5 | 4 |

7.41–7.50. Стоячая волна образуется при наложении бегущей волны и волны, отраженной от границы раздела сред, перпендикулярной направлению распространения волны. Найдите положения (расстояния от границы раздела сред) узлов и пучностей стоячей волны, если отражение происходит от среды более или менее плотной. Скорость распространения звуковых волн $v_{\text{зв}}$, частота ν .

| Задача | Среда | $v_{\text{зв}}$ | ν |
|--------|---------------|-----------------|-------|
| | | м/с | кГц |
| 7.41 | более плотная | 340 | 3,0 |
| 7.42 | менее плотная | 340 | 3,1 |
| 7.43 | более плотная | 340 | 3,2 |
| 7.44 | менее плотная | 340 | 4,3 |
| 7.45 | более плотная | 340 | 5,0 |
| 7.46 | менее плотная | 1000 | 2,5 |
| 7.47 | более плотная | 1000 | 1,2 |
| 7.48 | менее плотная | 1000 | 3,3 |
| 7.49 | более плотная | 1000 | 4,4 |
| 7.50 | менее плотная | 1000 | 5,2 |

7.51. Для определения температуры верхних слоев атмосферы нельзя пользоваться термометром, так как вследствие малой плотности газа термометр не придет в тепловое равновесие с окружаю-

щей средой. Для этой цели пускают ракету с гранатами, взрывающимися при достижении определенной высоты. Найдите температуру t на высоте $h = 20$ км от поверхности Земли, если известно, что звук взрыва, произведенного на высоте $h = 21$ км, пришел позже на $\Delta t = 6,75$ с звука от взрыва, произведенного на высоте $h = 19$ км.

7.52. Найдите предельный угол α полного внутреннего отражения звуковых волн на границе воздух – стекло. Воспользуйтесь необходимыми данными: модуль Юнга для стекла $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м, температура воздуха 20 °С.

7.53. При гармонических колебаниях вдоль оси Ox координата тела изменяется по закону $x = 0,9 \cos 5t$ (м). Амплитуда колебаний равна ...

- 1) 0,9 м; 2) 5 м;
3) 4,5 м; 4) 0,18 м.

7.54. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. Результирующее колебание имеет максимальную амплитуду при разности фаз, равной ...

- 1) 0; 2) π ;
3) $\pi/2$; 4) $\pi/4$.

7.55. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 .

При разности фаз $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$ амплитуда результирующего колебания равна...

- 1) $A_0\sqrt{2}$; 2) 0;
3) $A_0\sqrt{3}$; 4) $2A_0$.

7.56. На рис. 7.17 представлена зависимость амплитуды колебаний математического маятника от частоты внешней силы. Длина нити маятника равна ...

- 1) 0,1 м; 2) 0,02 м;
3) 1 м; 4) 0,2 м.

7.57. Уравнение движения пружинного маятника

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ является дифференциаль-

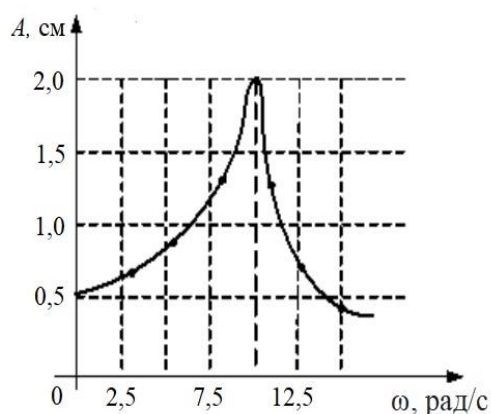


Рис. 7.17. Зависимость амплитуды колебаний математического маятника от частоты внешней силы

ным уравнением ...

- 1) затухающих колебаний; 2) вынужденных колебаний;
- 3) незатухающих колебаний.

7.58. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Максимальное значение ускорения

точки равно ...

- 1) $0,4\pi^2$ м/с²; 2) $4\pi^2$ м/с²;
- 3) $0,6\pi^2$ м/с²; 4) $\frac{2\pi}{3}$ м/с².

7.59. Для плоской бегущей волны справедливо утверждение, что ...

- 1) амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь);
- 2) нет переноса энергии;
- 3) амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь);
- 4) волновые поверхности имеют вид концентрических сфер.

7.60. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси Ox со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - kx)$. Волновое число k равно ...

- 1) 2 м⁻¹; 2) 5 м⁻¹;
- 3) $0,5$ м⁻¹; 4) 1 м⁻¹.

7.61. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси Ox , имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Период равен ...

- 1) 6,28 мс; 2) 1,5 мс;
- 3) 2 мс; 4) 1 мс.

7.62. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси Ox , имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Длина волны равна ...

- 1) 3,14 м; 2) 2 м;
- 3) 0,5 м; 4) 6,28 м.

ГЛАВА VIII. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 8.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Молекулярно-кинетическая теория объясняет наблюдаемые на опыте свойства и процессы: давление, температуру, теплоемкость, явления переноса и ряд других. Эти свойства она объясняет как результат движения и взаимодействия большого числа молекул, из которых состоят тела. В основе теории лежат три основных положения:

1. Все вещества состоят из огромного количества частиц: молекул, атомов, ионов, линейные размеры которых порядка 10^{-10} м.
2. Молекулы (атомы, ионы) находятся в тепловом движении. Средняя кинетическая энергия этого движения определяется температурой тела.
3. Между молекулами (атомами, ионами) действуют силы взаимодействия, которые в зависимости от расстояния между частицами являются силами притяжения или отталкивания.

В классической теории считается, что отдельные молекулы движутся в соответствии с законами механики Ньютона. При этом выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса.

Молекулы считаются различимыми, то есть в принципе можно проследить за траекторией движения отдельной молекулы, изменением ее импульса.

Вспомним, что идеальный газ – совокупность беспорядочно движущихся молекул – шариков, имеющих ничтожно малые размеры и не взаимодействующих друг с другом.

Молекулы находятся в постоянном движении, непрерывно сталкиваются между собой и со стенками сосуда, оказывая на них давление. Следовательно, давление – макроскопическое проявление теплового движения молекул.

Основной задачей кинетической теории газов является вычисление давления газа на основе молекулярно-кинетических представлений. При этом Максвелл показал, что в случае идеального газа соударения молекул между собой не влияют на давление газа, оказываемое на стенки сосуда. А также им показано, что давление

не зависит от того, какие это соударения – упругие или неупругие – и от материала стенок сосуда.

Выразим давление на стенку прямоугольного ящика через массу и скорость молекул. Соударения молекул со стенкой будем считать упругими. Вначале вычислим изменение импульса молекулы, ударяющейся о стенку (рис. 8.1). Зная среднее число молекул, ударяющихся о стенку в единицу времени, можно вычислить среднюю по времени силу, равную средней по времени скорости изменения импульса, сообщаемого стенке. Изменение импульса молекулы по оси x :

$$m v_x - (-m v_x) = 2m v_x.$$

Оно произошло в силу того, что стенка подействовала на молекулу с силой F_x . Импульс этой силы $\int F_x dt = 2m v_x$. Число молекул в единице объема с перпендикулярной к стенке составляющей скорости v_x обозначим через n_v . Тогда к стенке направлено $\frac{n_v}{2}$ молекул (и столько же от нее).

Рассмотрим объем, образованный единицей площади стенки и расстоянием $v_x \Delta t$ от стенки (рис. 8.2). За интервал времени Δt о стенку будет ударяться следующее число молекул: $\frac{1}{2} n_v v_x \Delta t$, а в единицу времени – $\frac{1}{2} n_v v_x$, то есть

за 1 с, а для отражения одной молекулы стенке требуется импульс силы $2m v_x$. Следовательно, средняя проекция силы удара молекулы на ось x на единицу площади

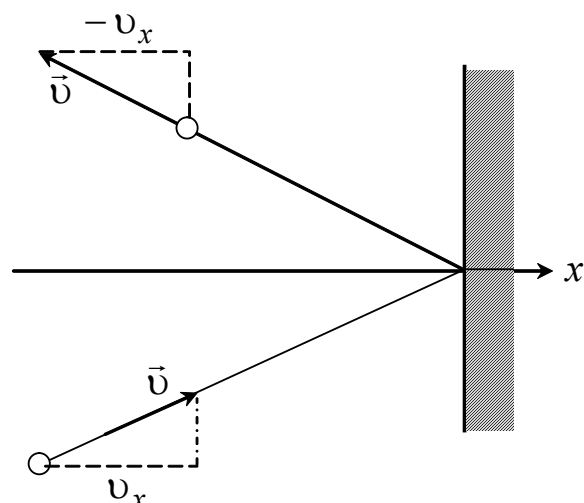


Рис. 8.1. Изменение импульса молекулы при упругом ударе о стенку

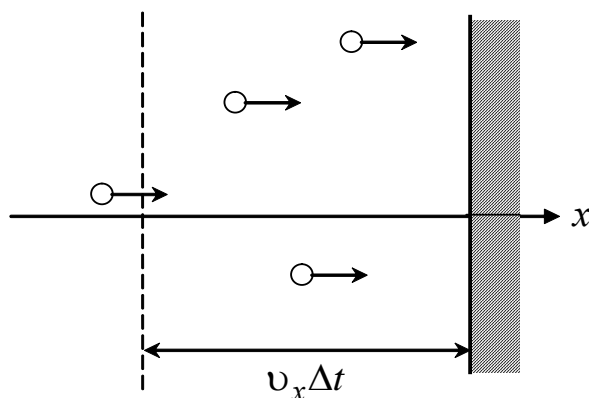


Рис. 8.2. Схема к расчету давления газа

(то есть давление P_v):

$$P_v = \frac{F_x}{S} = \left(\frac{1}{2} n_v v_x \right) (2m v_x) = m n_v v_x^2.$$

Для получения полного давления на одну стенку нужно просуммировать вклады от всех молекул:

$$P = \sum P_v.$$

Обозначим среднее значение квадрата скорости по оси x как v_x^2 . Тогда давление на эту стенку будет равно

$$P_x = \sum P_v = m n \langle v_x^2 \rangle, \quad (8.1)$$

где $n = \frac{N}{V}$ – число молекул в единице объема, то есть концентрация молекул.

Аналогично можно вычислить давление и на другие стенки:

$$P_y = m n \langle v_y^2 \rangle \text{ и } P_z = m n \langle v_z^2 \rangle.$$

В силу эквивалентности этих формул $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Учи-

тывая, что $\langle v \rangle = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle} = \sqrt{3 \langle v_x^2 \rangle}$, получим $\langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$.

Подставляя это выражение в формулу (8.1), будем иметь

$$P = \frac{1}{3} m n \langle v^2 \rangle. \quad (8.2)$$

Можно получить и другую форму основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для одного моля газа:

$$P V_m = R T.$$

Отсюда следует, что давление равно

$$P = \frac{R T}{V_m} = \frac{R}{N_A} \frac{N_A}{V_m} T = n k T, \quad (8.3)$$

так как $\frac{R}{N_A} = k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; $\frac{N_A}{V_m} = n$ – концентрация молекул.

Из выражения (8.2) с учетом (8.3) можно получить среднюю кинетическую энергию молекул:

$$\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = W_k = \frac{3P}{2n} = \frac{3}{2}kT. \quad (8.4)$$

Следовательно, средняя кинетическая энергия одной молекулы

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2}kT. \quad (8.5)$$

Число степеней свободы одной молекулы при поступательном движении равно трем, следовательно, на одну степень свободы у одной молекулы приходится средняя кинетическая энергия:

$$\langle W'_k \rangle = \frac{1}{2}kT, \quad (8.6)$$

которая называется тепловой энергией, приходящейся на одну степень свободы. То же получим, если рассматривать смесь молекул с разными массами. Экспериментально выражение (8.6) было проверено при изучении движения незаряженных частиц. Формулу (8.6) применяют в электротехнике для расчета тепловых шумов. Например, среднее значение квадрата напряжения теплового шума на сопротивлении R равно

$$\langle u^2 \rangle = 4kTR\Delta f, \quad (8.7)$$

где Δf – ширина полосы пропускания.

Выражение (8.7) позволяет рассчитать нижний предел напряжения сигнала, который будет отличен от шумов, а следовательно, принят приемником. Выражение (8.7) проверено Джонсоном.

§ 8.2. Закон распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла)

Средняя квадратичная скорость молекул определяется следующим выражением:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (8.8)$$

где v_i – скорость i -й молекулы; N – число молекул.

В идеальном газе при одной и той же температуре молекулы имеют различные скорости. При упругих соударениях изменяются направление и модуль скорости молекул. Действительно, пусть молекула A имеет скорость \vec{v}_1 . В некоторый момент времени она сталкивается с молекулой B , которая имеет скорость \vec{v}_2 . В результате

упругого соударения молекула A будет иметь скорость \vec{v} (рис. 8.3). Но как бы не изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость, определяемая выражением (8.8), при $T = \text{const}$, остается постоянной.

Предположим, как и Максвелл, что: 1) газ состоит из большого числа N тождественных молекул, находящихся в тепловом движении; 2) силовые поля на молекулы не действуют. Тогда распределение Максвелла дает функцию распределения молекул идеального газа по скоростям.

При этом скоростями в диапазоне dv будет обладать число молекул dN , то есть они будут иметь скорость, заключенную в этом интервале. Тогда функция $\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv$ определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в диапазоне от v до $(v + dv)$, откуда выражаем

функцию распределения $f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$.

Максвелл установил, что функция распределения молекул по

скоростям имеет вид $f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$.

Площадь, ограниченная кривой распределения (рис. 8.4) и осью абсцисс, равна единице, то есть функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

При повышении температуры ($T_3 > T_2 > T_1$), то есть с увеличением температуры газа, максимум кривой смещается в сторону больших скоростей

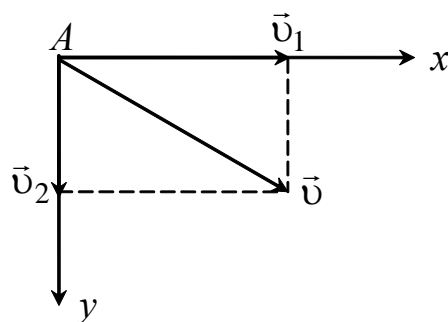


Рис. 8.3. Изменение модуля скорости молекулы при упругом столкновении с другой молекулой

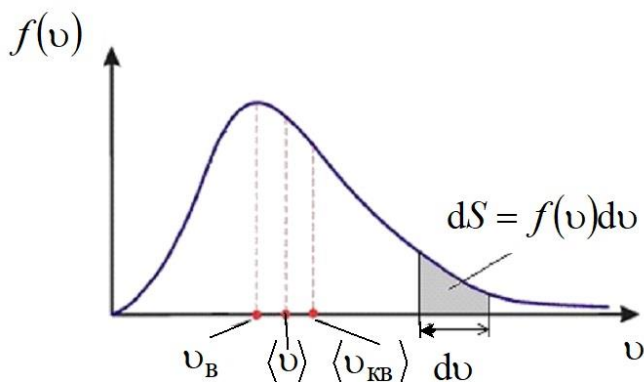


Рис. 8.4. Функция Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям

(рис. 8.5), а его абсолютная величина уменьшается. Следовательно, при нагревании доля молекул, обладающих малыми скоростями, уменьшается, а доля молекул с большими скоростями увеличивается.

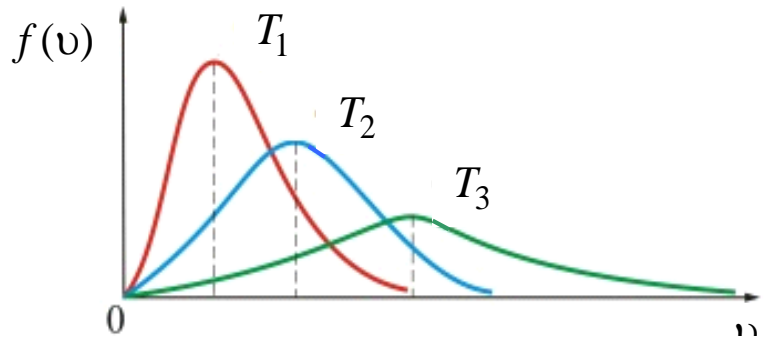


Рис. 8.5. Изменение распределения Максвелла в зависимости от температуры

Вычислим *среднюю арифметическую скорость* $\langle v \rangle$ поступательного движения молекул. При этом суммирование

заменяем интегрированием. Тогда $\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^N v dN$; подставим сюда

$\frac{dN}{N} = f(v)dv$ как функцию распределения Максвелла. Получим после интегрирования и упрощений

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (8.9)$$

где m – масса одной молекулы; M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная.

Максимуму кривых соответствует *наиболее вероятная скорость* v_B . Этой скоростью обладает большая часть молекул. Ее можно найти обычным путем, то есть взять производную по скорости и приравнять ее к нулю:

$$\left[\frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) \right]_{v=v_B} = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Таким образом, скорости, характеризующие состояние газа:

1) наиболее вероятная $v_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$;

$$2) \text{ средняя арифметическая } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$3) \text{ средняя квадратичная } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Зная распределение молекул по скоростям, можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии:

$$f(W_{\text{к}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} W_{\text{к}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W_{\text{к}}}{kT}}.$$

А среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ молекулы идеального газа при термодинамической температуре T найдем следующим образом:

$$\langle W_{\text{к}} \rangle = \int_0^{\infty} W_{\text{к}} f(W_{\text{к}}) dW_{\text{к}} = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} W_{\text{к}}^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_{\text{к}}}{kT}} dW_{\text{к}} = \frac{3}{2} kT,$$

то есть получили результат, совпадающий с ранее полученной формулой:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}.$$

Тогда основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов примет вид

$$P = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} mn \frac{3kT}{m} = nkT.$$

Следовательно, средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа равна

$$W_{\text{к}} = \frac{3}{2} kT.$$

А средняя кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на одну степень свободы $W_{\text{к}}^{(1)}$, равна

$$W_{\text{к}}^{(1)} = \frac{1}{2} kT. \quad (8.10)$$

Следовательно, частица идеального одноатомного газа в трехмерном пространстве имеет 3 степени свободы, а величину $\frac{1}{2} kT$ называют тепловой энергией, отнесенной к одной степени свободы.

§ 8.3. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Молекулы любого газа находятся постоянно в поле тяготения Земли. Поэтому силы тяготения и тепловое движение молекул приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором его давление с высотой убывает.

Условия: 1) поле тяготения однородно; 2) температура постоянна; 3) масса всех молекул одинакова.

Пусть атмосферное давление на высоте h равно P , тогда на высоте $(h + dh)$ оно равно $(P + dP)$; при этом надо иметь в виду, что если $dh > 0$, то $dP < 0$, так как давление с высотой убывает. Разность давлений P и $(P + dP)$ равна силе тяжести газа, заключенного в объеме цилиндра высотой dh (площадь основания равна 1).

$$P - (P + dP) = \rho g dh,$$

где ρ – плотность газа; dh – малое приращение высоты, поэтому $\rho = \text{const}$.

Отсюда

$$dP = -\rho g dh. \quad (8.11)$$

Из уравнения $PV = \frac{m}{M} RT$ следует выражение $\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$, подставим его в формулу (8.11). Получим

$$dP = -\frac{PM}{RT} g dh.$$

Разделяя переменные, получим $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dh$.

Для высот $h_1 < h_2$ давление будет изменяться от P_1 до P_2 , тогда

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh, \text{ откуда } \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{Mg}{RT}(h_2 - h_1).$$

Получаем закономерность изменения давления с высотой:

$$P_2 = P_1 e^{-\frac{Mg}{RT}(h_2 - h_1)}.$$

Данная формула называется барометрической.

Если высоту измерять относительно уровня моря, где давление P_0 , то давление на высоте h будет равно

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \quad (8.12)$$

Прибор для измерения высоты, основанный на этом принципе,

называется *высотомером* или *альтиметром*.

Если использовать соотношение $P = nkT$, то выражение (8.12) можно преобразовать и получить закономерность изменения кон-

центрации молекул газа с высотой: $n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$, где n – концентрация молекул газа на высоте h , а n_0 – на высоте $h = 0$. Если исполь-

зовать соотношение $\frac{M}{N_A} = m$, где m – масса одной молекулы газа

и $R = kN_A$, то получим *распределение молекул* во внешнем потенциальном поле – *распределение Больцмана*:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

§ 8.4. Средняя длина свободного пробега молекул.

Среднее число столкновений

Путь между двумя последующими столкновениями молекул называют *длиной свободного пробега*. Для разных молекул – это разная величина. В принципе, необходимо говорить о *средней длине свободного пробега молекул*:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle},$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость, равная пути, пройденному молекулой за 1 с; $\langle z \rangle$ – среднее число столкновений молекул газа за 1 с. Для определения $\langle z \rangle$ представим молекулу в виде шарика диаметром d . Она столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстоянии $\leq d$ от центра траектории молекулы. Тогда среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме данного цилиндра, то есть

$$\langle z \rangle = nV,$$

где n – концентрация молекул; $V = \pi d^2 \langle v \rangle$ – объем цилиндра, а d – его радиус; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул – его высота.

Следовательно, $\langle z \rangle = \pi d^2 n \langle v \rangle$.

С учетом того, что другие молекулы движутся, то

$\langle z \rangle = \sqrt{2\pi} d^2 n \langle v \rangle$, а средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 n}.$$

§ 8.5. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

1. Броуновское движение.

Броун (шотландский ботаник) установил, что частицы цветочной пыльцы в воде беспорядочно движутся. Впоследствии выяснилось, что зигзагообразное движение характерно для любых частиц с размерами порядка 1 мкм, взвешенных в газе или жидкости.

Через 80 лет после открытия броуновское движение было объяснено. Броуновское движение подтверждает хаотическое тепловое движение атомов и молекул.

2. Опыт Штерна (1920 г.).

Штерн выполнил эксперименты по определению скорости молекул (рис. 8.6). Два цилиндра: 1 – внутренний; 2 – внешний. Внутри цилиндра 1 натянута платиновая проволока, покрытая серебром. В цилиндре 1 имеется щель. При нагревании проволоки ионы Ag попадают через щель на внутреннюю поверхность цилиндра 2. Точка O – это изображение щели. Если прибор вращать, то получится размытое изображение щели ($O - S$). А по толщине покрытия можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому. Зная ω , R_1 , R_2 и OS , можно вычислить $\langle v \rangle_{Ag}$ при данной температуре.

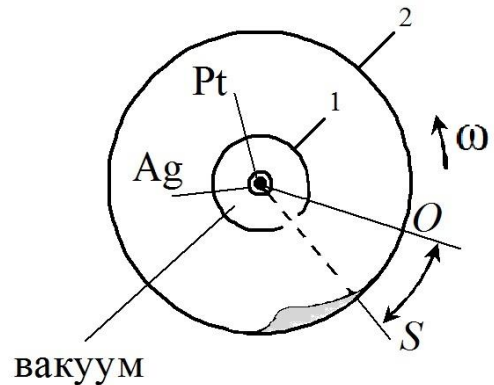


Рис. 8.6. Схема опыта Штерна

3. Опыт Ламмерта (1929 г.).

Опыт позволяет точно определить закон распределения молекул по скоростям (рис. 8.7). Если ось OO' привести во вращение, то приемник достигнут только те молекулы, которые затрачивают для пробега между дисками время, равное или кратное времени оборота второго диска. Другие молекулы задерживаются вторым диском.

Меняя угловую скорость и измеряя число молекул, попадающих в приемник, можно выявить закон распределения молекул по скоростям.

Прорези 1 и 2 повернуты относительно друг друга на угол φ . При неподвижных дисках пучок атомов на приемник не попадает. Если диски привести во вращение, то атомы пройдут через щель во втором диске тогда, когда за время полета атомов между дисками второй диск успеет повернуться на угол φ , так что на пути пучка окажется прорезь второго диска. Если $\omega = 2\pi n$, где n – частота вращения дисков, то

$\varphi = \omega t = 2\pi n t$. Время $t = \frac{l}{u}$, где l – расстояние между дисками; u – скорость атомов.

Погрешность опыта определялась шириной прорези:

$$\Delta u = u - u_1 = \frac{2\pi n l}{\varphi} - \frac{2\pi n l}{\varphi + \Delta\varphi} = \frac{u \Delta\varphi}{\varphi + \Delta\varphi},$$

где $\Delta\varphi$ – угловая ширина щели.

При $u = 300$ м/с и $\Delta\varphi = 2^\circ$ погрешность опыта составляет $\Delta u = 23$ м/с.

Недостаток экспериментов: измеряют не скорости хаотичного движения, а скорости пучков (упорядоченного движения). В пучках быстрых молекул больше.

§ 8.6. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

Уравновешивающие потоки вещества, энергии, импульса в газе, содержащем пространственную неоднородность, создают основу процессов, называемых *явлениями переноса*. Это теплопроводность, внутреннее трение, диффузия.

Теплопроводность. Возникает при разности температур в объеме газа. Молекулы будут иметь разные скорости $\langle v \rangle$, а их движение (хаотичное) приведет к направленному переносу внутренней энергии газа. Перенос энергии в форме теплоты подчиняется *закону Фурье*:

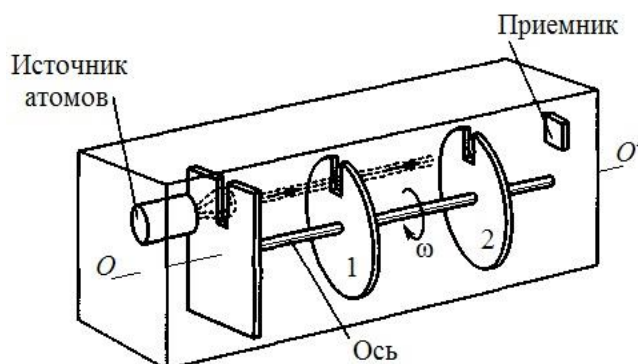


Рис. 8.7. Схема опыта Ламмерта

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где \vec{j}_Q – плотность теплового потока (это энергия, переносимая в форме тепла в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси Ox); λ – коэффициент теплопроводности; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры. Знак «минус» показывает, что тепловой поток направлен в сторону убывания температуры.

$$|\lambda| = |j_Q| \text{ при } \frac{dT}{dx} = 1.$$

Для идеального газа коэффициент теплопроводности рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3} C_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где C_V – удельная теплоемкость; $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул газа; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

Когда $T = f(x, y, z)$, то есть температура является функцией трех координат, тогда вектор плотности теплового потока определяется выражением

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T.$$

Внутреннее трение (вязкость). Это силы трения между слоями, перемещающимися параллельно друг другу с разными скоростями. Силы трения действуют по касательной к слоям. Причиной вязкости с точки зрения молекулярно-кинетической теории является наложение упорядоченного движения слоев газа с различными скоростями и хаотичного теплового движения. Быстрые молекулы, переходя в медленный слой, переносят большие импульсы mv , а путем соударений приводят к ускорению упорядоченного движения более медленного слоя. Сила внутреннего трения подчиняется закону Ньютона:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S,$$

где η – динамическая вязкость; $\frac{dv}{dx}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении оси Ox , перпендикулярной направлению движения слоев.

Взаимодействие слоев можно представить как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе ($\vec{F}\Delta t = m\vec{v}$). Тогда плотность потока импульса через единичную площадку, перпендикулярную оси x , будет равна

$$\vec{j}_p = -\eta \frac{d\vec{v}}{dx}.$$

Для идеального газа коэффициент внутреннего трения рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v \rangle\langle l \rangle.$$

Диффузия. В химически однородном газе перенос вещества при диффузии подчиняется закону Фика:

$$\vec{j}_m = -D \frac{d\rho}{dx},$$

где \vec{j}_m – плотность потока массы, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси Ox ; D – коэффициент диффузии; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности; знак «минус» показывает, что перенос вещества осуществляется в сторону убывания плотности.

Для идеального газа коэффициент диффузии рассчитывается по формуле

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle\langle l \rangle.$$

Процесс диффузии заключается в самопроизвольном проникновении и перемешивании частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и твердых тел. Он продолжается, пока существует градиент плотности.

§ 8.7. Внутренняя энергия системы

Полная энергия термодинамической системы

$$E = E^{\text{мех}} + U^{\text{внутр}}.$$

Рассмотрим неподвижную систему, ее полная энергия равна сумме механической энергии и внутренней энергии. Это энергия всевозможных видов движения и взаимодействия частиц, образующих рассматриваемую систему. Например, кинетическая энергия

теплового движения молекул; кинетическая энергия колебательного движения молекул; потенциальная энергия, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия; энергия электронных оболочек.

Изменение внутренней энергии не зависит от вида перехода системы из состояния 1 в состояние 2 и равно $\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1$. Если система возвращается в исходное состояние, то $\Delta U \equiv 0$. Внутренняя энергия определяется с точностью до некоторой константы U_0 .

§ 8.8. Теплота и работа

Обмен энергией между закрытой термодинамической системой и внешними телами может осуществляться путем совершения работы и путем теплообмена. В первом случае она называется работой, а во втором случае – теплотой.

Для перевода системы из состояния 1 в состояние 2 необходимо системе сообщить различную теплоту или совершить над системой различную работу в зависимости от вида процесса 1–2.

§ 8.9. Первый закон термодинамики

Рассмотрим равновесный переход системы из начального состояния 1 в состояние 2. Тогда

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \quad (8.13)$$

Теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение внутренней энергии и работу против внешних сил. Для малых величин

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (8.13a)$$

Выражение dU является полным дифференциалом:

$$\int_{1-2-1} dU = 0.$$

Если $\delta Q > 0$, то к системе подводится тепло, и наоборот.

Если система совершает работу, то считается $\delta A > 0$; если работа совершается над системой, то $\delta A < 0$. Соотношение (8.13) получило название *первого начала термодинамики*. Оно выражает всеобщий закон сохранения и превращения энергии.

§ 8.10. Теплоемкость вещества

Теплоемкость – физическая величина, равная отношению теплоты δQ , сообщенной системе, к изменению ее температуры dT в рассматриваемом термодинамическом процессе:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость $c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$, тогда количество теплоты, сообщаемое массе газа, $\delta Q = cmdT$.

Молярная теплоемкость $C = Mc = \frac{M}{m} \frac{\delta Q}{dT}$, где M – молярная масса вещества; m – масса вещества.

Теплоемкость системы также зависит от вида термодинамического процесса. Например, запишем первое начало термодинамики для изобарного процесса

$$\frac{m}{M} C_P dT = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R dT;$$

$$C_P = C_V + R,$$

где C_P – молярная теплоемкость при постоянном давлении; C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Данное соотношение носит название соотношение Майера. Физический смысл: $C_P - C_V = R$, то есть при изобарном нагревании газа к нему должна подводиться большая теплота, чем при изохорном нагревании, так как при этом процессе происходит расширение газа с понижением давления.

Рассмотрим некоторые термодинамические процессы в газе.

1. Изотермический процесс. Протекает при постоянной температуре ($T = \text{const}$). Уравнение процесса $PV = \text{const}$ или $P_1V_1 = P_2V_2$. Изменение внутренней энергии для данного процесса равно нулю, так как $dT = 0$:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0. \quad (8.14)$$

Следовательно, теплота, сообщаемая системе в этом процессе, равна совершаемой работе и рассчитывается следующим образом:

$$Q_{1-2} = A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right);$$

$$PV = \frac{m}{M} RT; \quad P = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}.$$

При расчете давление выразили из уравнения Менделеева – Кла-

пейрона и подставили в подынтегральное выражение.

Если $V_2 > V_1$, $Q_{1-2} > 0$, то к газу подводится тепло и газ, расширяясь, совершает положительную работу.

При изотермическом сжатии $A_{1-2} < 0$, при этом от газа отводится тепло.

2. Изобарный процесс. Условие протекания процесса $P = \text{const}$. Уравнение процесса $\frac{P}{T} = \text{const}$ или $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$. Расчет теплоты, подводимой к системе в изобарном процессе, проводится по формуле $\delta Q = \frac{m}{M} C_P dT$. Работа при изобарном процессе рассчитывается следующим образом:

$$A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

3. Изохорный процесс. Условие протекания процесса $V = \text{const}$. Уравнение процесса

$$\frac{V}{T} = \text{const} \text{ или } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Работа при изохорном процессе равна нулю, а теплота, сообщаемая системе, рассчитывается по формуле

$$Q = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

4. Адиабатный процесс ($\delta Q = 0$). При адиабатном процессе отсутствует теплообмен с окружающей средой. Уравнение процесса

$$PV^\gamma = \text{const},$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – показатель адиабаты.

Из первого начала термодинамики $\delta A = -dU$, то есть система совершает работу за счет убыли ее внутренней энергии:

$$\delta A = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Теплоемкость вещества при адиабатном процессе

$$C_{\text{ад}} = \frac{\delta Q}{dT} = 0. \quad (8.15)$$

Внутренняя энергия идеального газа рассчитывается следующим образом:

$$U = \langle W_k \rangle N_A = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T,$$

где i – число степеней свободы молекулы газа; N_A – число Авогадро; R – универсальная газовая постоянная.

Молярные теплоемкости C_P и C_V найдем по формулам

$$C_V = \frac{dU}{dT};$$

$$C_P = C_V + R.$$

Следовательно,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R \text{ и } C_P = \frac{i+2}{2} R.$$

Тогда показатель адиабаты идеального газа

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Для одноатомного идеального газа ($i = 3$): $\gamma_1 = 1,67$; для двухатомного идеального газа ($i = 5$): $\gamma_2 = 1,40$; для многоатомного идеального газа ($i = 6$): $\gamma_3 = 1,33$. Для одноатомного и двухатомного идеального газа показатели γ_1 и γ_2 достаточно близки к экспериментальным значениям.

Для многоатомных газов классическая теория дает заниженные значения при средних и высоких температурах. Причина трудностей кроется в предположении равномерного распределения энергии по степени свободы. Эти трудности преодолены в квантовой теории.

§ 8.11. Энтропия. Второй закон термодинамики

Формулировки второго начала термодинамики:

1. Клаузиус Р. (1850) Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему.

2. Томсон У. (1851) Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела.

3. Невозможен вечный двигатель второго рода, то есть тепловой двигатель, который бы превращал всю полученную теплоту в работу без компенсации.

Все процессы в замкнутой системе делятся на обратимые и необратимые. Процесс перехода из состояния 1 в состояние 2 называется обратимым, если возвращение этой системы в исходное состояние из 2 в 1 можно осуществить без каких-либо изменений в окружающих внешних телах.

Процесс перехода из состояния 1 в состояние 2 называется необратимым, если обратный переход нельзя осуществить без изменений в окружающих телах.

Все необратимые процессы являются неравновесными.

Примеры необратимых процессов:

1. При процессах с трением работа может быть без компенсации превращена в теплоту, а обратный переход теплоты в работу невозможно осуществить без изменений в окружающих телах.

2. Процесс теплопередачи при конечной разности температур необратим, так как обратный процесс без компенсации невозможен.

3. Процесс диффузии необратим, так как для обратного разделения газов их необходимо сжимать, а чтобы они не нагревались, отнять у них теплоту и превратить ее в работу.

Пусть нагреватель отдает системе при малом изменении ее состояния количество теплоты δQ при температуре T . Отношение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал функции состояния системы, называемой *энтропией* S , а не зависящая от выбора термодинамического вещества температура T – термодинамической температурой.

Из второго начала термодинамики следует, что S является однозначной функцией состояния. Это означает, что $\oint \frac{\delta Q}{T}$ для любого кругового равновесного процесса равен нулю. В противном случае можно было бы осуществить вечный двигатель второго рода. Это приводит к невозможности пересечения адиабат.

Выражение $dS = \frac{\delta Q}{T}$ является математическим выражением второго начала термодинамики для равновесных процессов в дифференциальной форме. Оно справедливо как для открытых, так и для закрытых систем.

Интегральным уравнением второго начала для равновесных круговых процессов является равенство Клаузиуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Рассмотрим изменение энтропии на примере идеального газа при переходе системы из состояния 1 в состояние 2.

Запишем первое начало термодинамики для идеального газа и разделим правую и левую часть на термодинамическую температуру T , после чего получим

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = \frac{m}{M} C_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона имеем $\frac{P}{T} = \frac{R}{V}$. После подстановки получим $dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = \frac{m}{M} \left(C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right)$.

Тогда

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{M} \left(\int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V} \right) = \frac{m}{M} \left(C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right).$$

Если процесс круговой и обратимый, то $T_2 = T_1$ и $V_2 = V_1$, тогда изменение энтропии $dS = 0$.

Энтропия – аддитивная функция состояния системы, то есть энтропия системы равна сумме энтропий всех тел, входящих в систему. Энтропия изолированной системы в любом обратимом процессе не изменяется, а при необратимом – увеличивается. Таким образом, энтропия изолированной системы не может убывать при любых происходящих в ней процессах и является мерой необратимости процессов.

Изменение энтропии открытой системы при обратимых процессах рассчитывается по формуле $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$, а при необрати-

мых процессах по формуле $(S_2 - S_1) > \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$.

Пример. Рассчитаем изменение энтропии при изотермическом расширении системы, состоящей из смеси двух газов, в обратимом процессе:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + PdV}{T} = \frac{P}{T} dV = \frac{m}{M} R \frac{dV}{V},$$

так как $T = \text{const}$, поэтому $dU = 0$.

На основании свойства аддитивности энтропии системы получим

$$\Delta S = \frac{m_1}{M_1} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} + \frac{m_2}{M_2} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \left(\frac{m_1}{M_1} \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m_2}{M_2} \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

§ 8.12. Цикл Карно

Второе начало термодинамики было установлено в результате анализа работы тепловых машин. КПД тепловой машины есть отношение работы, производимой машиной за цикл, к количеству теплоты, полученной от нагревателя.

Теория тепловых машин разработана С. Карно. В основу теории положен цикл Карно. Существуют прямой и обратный циклы Карно. Прямой цикл состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис. 8.8). Из исходного состояния 1 газ совершает изотермическое

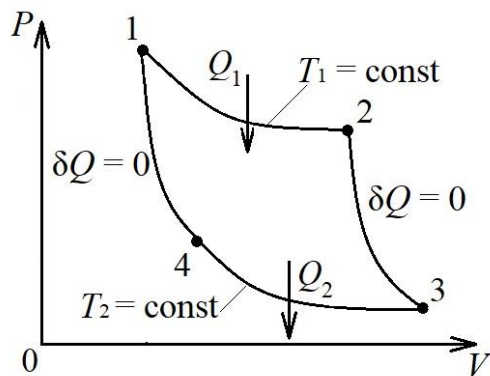


Рис. 8.8. Цикл Карно в координатах $P - V$

расширение до состояния, изображенного точкой 2, при температуре T_1 . При этом для поддержания температуры T_1 газу передается от нагревателя тепло Q_1 . Далее идет адиабатное расширение газа 2–3. При этом температура газа падает до T_2 , так как работа адиабатного расширения происходит за счет уменьшения внутренней

энергии системы.

В изотермическом процессе 1–2 к газу подводится тепло

$$Q_{1-2} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Работа адиабатного расширения 2–3 рассчитывается по формуле

$$A_{2-3} = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Далее производят изотермическое сжатие газа 3–4. Для поддержания постоянной температуры T_2 от системы отводится тепло

$$Q_{3-4} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_4}{V_3},$$

которое отдается в окружающую среду (холодильник). Последний процесс 4–1 – это адиабатное сжатие газа, то есть проводится без теплообмена с окружающей средой, поэтому температура газа поднимается до исходной, то есть до T_1 .

Поскольку цикл завершен и система вернулась в исходное состояние, то полное изменение внутренней энергии в этом цикле равно нулю.

КПД цикла Карно рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Существует первая теорема Карно, согласно которой КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела, но определяется только температурой нагревателя и холодильника. Согласно первой теореме Карно КПД цикла можно рассчитать по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Тепловая машина может также работать по необратимому циклу. Согласно второй теореме Карно КПД тепловой машины, работающей по необратимому циклу, всегда меньше КПД тепловой машины, работающей по обратимому циклу, то есть

$$\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}.$$

КПД тепловой машины можно повысить либо путем повыше-

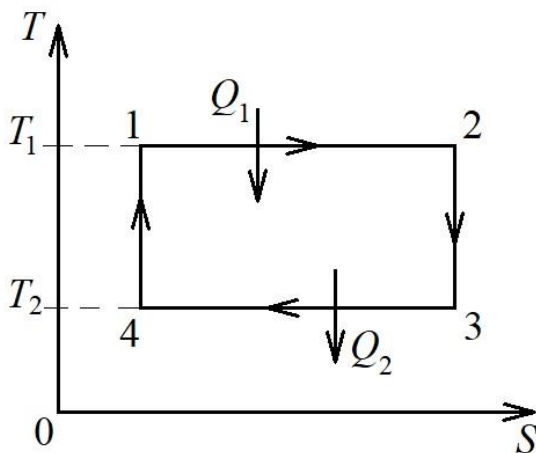


Рис. 8.9. Цикл Карно в координатах $T - S$

ния температуры нагревателя T_1 , либо путем понижения температуры холодильника T_2 . Если взять производные от η по T_1 и по T_2 , то окажется, что повышать КПД более эффективно путем понижения температуры T_2 .

КПД цикла Карно имеет большую величину по сравнению с КПД тепловых машин, работающих в таком же интервале температур $T_1 - T_2$, поэтому КПД цикла

Карно является эталоном для оценки КПД тепловых машин, работающих по другим циклам. Для удобства подсчета КПД цикла Карно его можно изобразить в координатах $T - S$ (абсолютная температура – энтропия). На рис. 8.9 1–2 и 3–4 – процессы изотермического расширения и сжатия, 2–3 и 4–1 – адиабатного расширения и сжатия.

Поскольку $T_1 > T_2$, то тепловая машина, работающая по прямому циклу Карно, называется тепловым двигателем. Если тепловая машина работает по обратному циклу Карно, то она называется холодильной машиной.

§ 8.13. Реальные газы, жидкости и твердые тела

Модель идеального газа, используемая нами для реальных газов, применима лишь при низких давлениях и высокой температуре. Нельзя пренебрегать размерами молекул и их взаимодействием.

Силы межмолекулярного взаимодействия проявляются на расстояниях порядка 10^{-9} м.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{от}} + \vec{F}_{\text{пр}}$$

При $r = r_0$ силы $F = 0$, то есть силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга.

При $r < r_0$ преобладают силы отталкивания и энергия взаимодействия молекул становится положительной.

Если $r > r_0$, то преобладают силы притяжения (рис. 8.10).

При $r \geq 10^{-9}$ м и сближении молекул их взаимная потенциальная энергия растет и достигает максимума (по модулю).

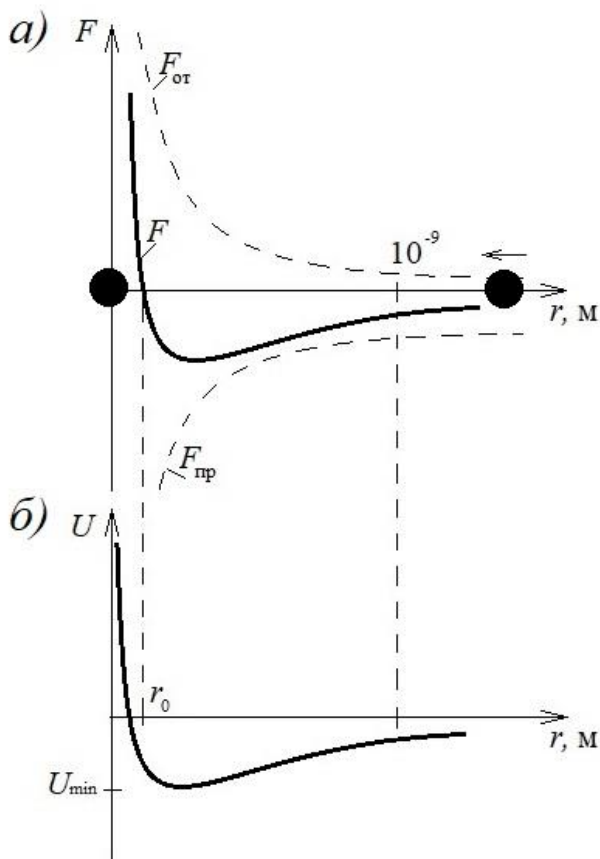


Рис. 8.10. Силы межмолекулярного взаимодействия двух сближающихся молекул (а) и потенциальная энергия их взаимодействия (б)

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение Ван-дер-Ваальса позволяет в уравнении состояния

реального газа учесть размеры молекул и их взаимодействие друг с другом.

1. Учет собственного объема молекул. Силы отталкивания приводят к тому, что фактический свободный объем, в котором движутся молекулы, будет равен $(V_m - b)$, где b – объем, занимаемый самими молекулами; $b \approx 4V'$, где V' – собственный объем молекул.

Например, если в объеме две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру другой на $r < d$. Это значит, что для центров обеих молекул недоступна сферическая область радиуса d , то есть объем равен восьми объемам молекулы, а на одну молекулу приходится $4V'$.

2. Учет притяжения молекул проявляется в повышении давления газа, которое называется внутренним давлением:

$$P' = \frac{a}{V_m^2},$$

где V_m – молярный объем газа; a – постоянная Ван-дер-Ваальса.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT.$$

Произвольный объем газа можно выразить формулой

$$V = \nu V_m,$$

где ν – число молей газа. Тогда уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного объема газа запишется следующим образом:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) \left(\frac{V}{\nu} - b \right) = RT,$$

где a , b – постоянные Ван-дер-Ваальса, определяемые опытным путем.

Уравнение Ван-дер-Ваальса больше подходит для несильно сжатых газов.

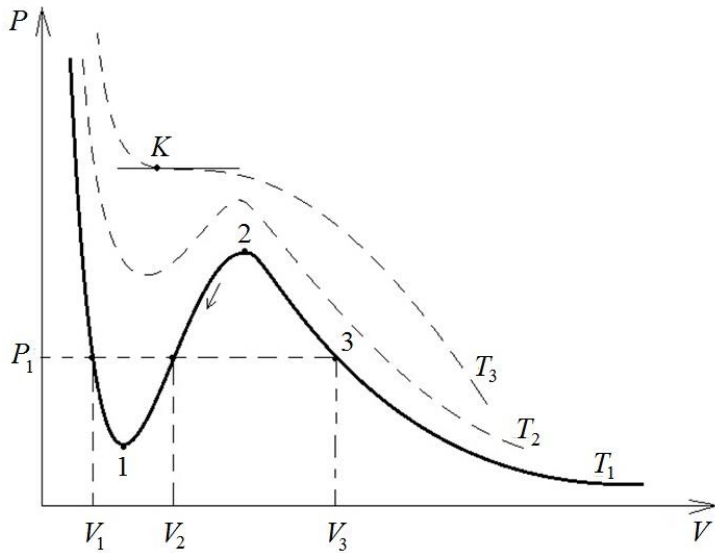


Рис. 8.11. Изотермы Ван-дер-Ваальса при различных температурах: $T_3 > T_2 > T_1$

При T_3 (рис. 8.11) изотерма называется критической, а температуру T_3 называют критической и обозначают T_K .

Точку K называют *критической точкой*. Она определяет критические значения объема V_K и давления P_K . Состояние с параметрами T_K , P_K , V_K называют *критическим*.

Запишем уравнение

Ван-дер-Ваальса в виде

$$PV_m^3 - (RT + Pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.16) является уравнением 3-й степени, поэтому в общем случае оно может иметь три вещественных корня или один вещественный и два мнимых. Следовательно, при температурах ниже критической имеем три решения (V_1 ; V_2 ; V_3), а при $T = T_K$ — одно — V_K . Положим, $P = P_K$, а $T = T_K$. В критической точке все три корня равны, поэтому уравнение (8.16) приводится к виду

$$P_K (V - V_K)^3 = 0.$$

Решая данное уравнение совместно с уравнением (8.16), найдем критические параметры:

$$V_K = 3b; \quad P_K = \frac{a}{27b^2}; \quad T_K = \frac{8a}{27Rb}.$$

На рис. 8.12 представлена изотерма Ван-дер-Ваальса, которая носит скорее теоретический характер, потому что на участке 5–3 сжатие газа сопровождается уменьшением давления, чего не может быть.

Процессы 6–5 и 3–2 могут

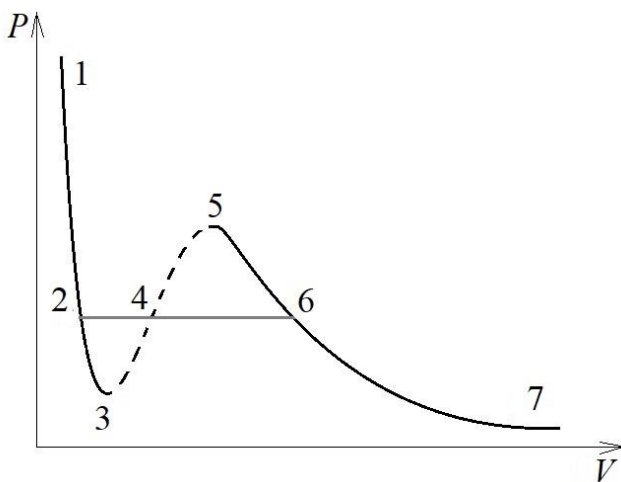


Рис. 8.12. Изотерма Ван-дер-Ваальса

быть реализованы при выполнении ряда дополнительных условий.

В изобарном состоянии 6–2 наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз. Причем, если вещество находится в газообразном состоянии при $T < T_k$, то оно называется *паром*. Выводы Ван-

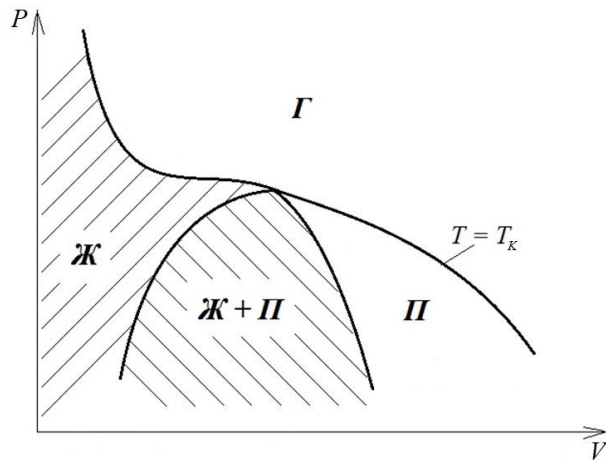


Рис. 8.13. Выделение области жидкость + пар относительно критической изотермы

дер-Ваальса подтвердил ирландский ученый Эндрюс. Он изучал изотермическое сжатие углекислого газа. Отличие изотерм Эндрюса от изотерм Ван-дер-Ваальса заключается в формах участков 6–4–2 (Эндрюс) и 5–4–3 (Ван-дер-Ваальс).

Если через крайние точки горизонтальных участков изотерм провести линии, то получится кривая, изображенная на рис. 8.13.

Пар отличается от газообразного состояния тем, что при изотермическом сжатии он превращается в жидкость. Газ же при $T > T_k$ никогда в жидкость не превращается.

§ 8.14. Поверхностное натяжение в жидкостях

Жидкость имеет определенный объем V и принимает (как газ) форму сосуда. Средняя энергия хаотических движений молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, поэтому жидкости имеют определенный объем. Было установлено, что характер расположения частиц в жидкостях промежуточен между газами и твердыми телами.

В данном случае говорят о *ближнем порядке*, то есть упорядоченное расположение частиц повторяется на расстояниях приблизительно равных межатомным (для твердых тел характерен *дальний порядок*).

Для молекулы A : $\sum \vec{F} = 0$.

Для молекулы B : концентрация молекул в газе над жидкостью меньше, чем в жидкости, поэтому равнодействующая \vec{F} направлена в жидкость. Следовательно, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое

молекулярным (или внутренним). Оно не действует на тело, помещенное в жидкость, так как обусловлено силами, действующими только между молекулами на поверхности жидкости (рис. 8.14).

Суммарная энергия частицы жидкости равна

$$E_i = W_i^{\text{ТЕПЛ. ДВ}} + U_{ij},$$

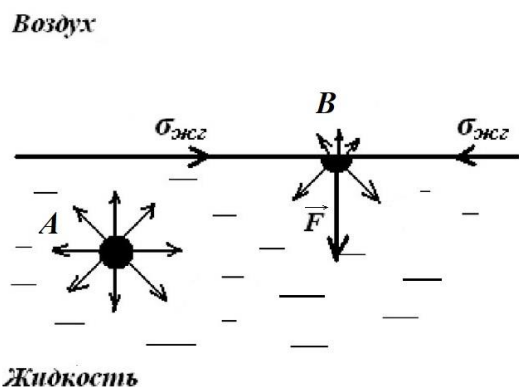


Рис. 8.14. Силы, действующие на молекулу в глубине жидкости (А) и в поверхностном слое (В)

где U_{ij} – потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия.

При перемещении молекулы в поверхностный слой из глубины жидкости надо затратить работу за счет кинетической энергии молекул. Эта работа идет на увеличение их потенциальной энергии. Следовательно, молекулы поверхностного слоя обладают боль-

шей потенциальной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости. Эта дополнительная энергия молекул в поверхностном слое называется *поверхностной энергией*.

Причем

$$\Delta U_{\text{пов}} = \sigma S, \quad (8.17)$$

где σ – поверхностное натяжение (поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности).

В равновесии в отсутствии сил тяготения жидкость стремится к минимуму поверхностной потенциальной энергии. Действительно, в условиях невесомости капля любой жидкости имеет шаровидную форму. Поверхностный слой можно сравнить с упругой пленкой, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости, ограниченную контуром a (рис. 8.15). Под действием сил поверхностного натяжения, которые направлены по касательной к поверхности жидкости, поверхность жидкости сожмется и займет положение b .

При этом силами поверхностного натяжения совершается элементарная работа

$$\delta A = f \Delta l \Delta x = f \Delta S, \quad (8.18)$$

где f – сила поверхностного натяжения, приходящаяся на единицу

длины контура, то есть $f = \frac{F}{\Delta l}$.

Сравнивая (8.17) и (8.18), можно утверждать, что $\delta A = \Delta V_{\text{пов}}$, то есть работа совершается за счет уменьшения потенциальной поверхностной энергии; следовательно, поверхностное натяжение σ равно силе поверхностного натяжения f , приходящейся на единицу длины контура и направленной по касательной к поверхности жидкости:

$$\sigma = f.$$

В качестве примера ниже приведены коэффициенты поверхностного натяжения некоторых жидкостей при нормальных условиях ($T = 300 \text{ K}$):

глицерин – $59 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$;

ацетон – $23,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$;

вода – $72,86 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$.

С повышением температуры σ уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение, называются поверхностно-активными. По отношению к воде это мыло. Оно уменьшает поверхностное натяжение воды до $4,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$. Это также спирты, эфир, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой.

§ 8.15. Смачивание

Рассмотрим каплю, находящуюся на стекле (рис. 8.16). Форма капли зависит от того, смачивает или нет жидкость поверхность.

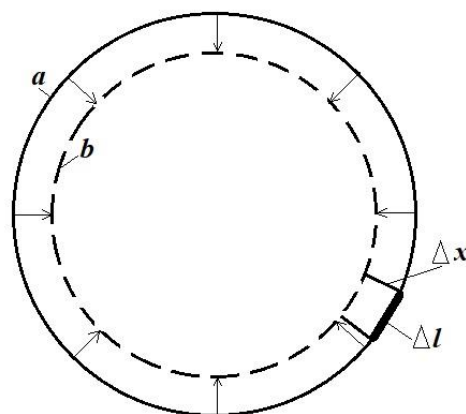


Рис. 8.15. Сокращение сферической поверхности жидкости под действием сил поверхностного натяжения

Для смачивающей жидкости (вода) силы притяжения между

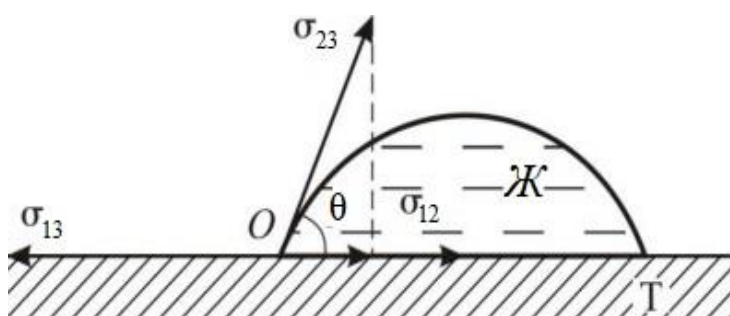


Рис. 8.16. Краевой угол θ при частичном смачивании

молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости. Следовательно, жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для ртути наоборот (рис. 8.17), а именно силы притяже-

ния между молекулами жидкости больше, чем силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела, поэтому жидкость стремится уменьшить поверхность соприкосновения.

Угол между касательной к поверхности жидкости и поверхностью твердого тела называется *краевым углом*.

Условие равновесия капли (см. рис. 8.16)

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0.$$

Отсюда $\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$, то есть в зависимости от $(\sigma_{13} - \sigma_{12})$

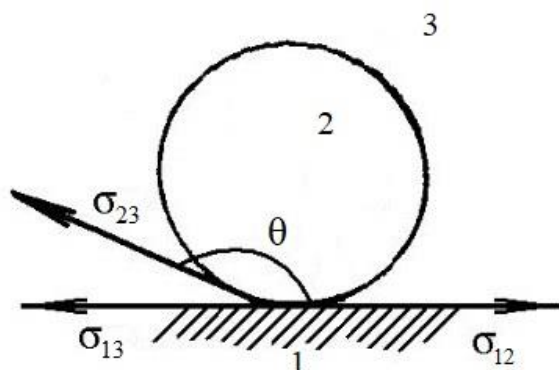


Рис. 8.17. Краевой угол θ при несмачивании

угол может быть острым или тупым.

Краевой угол удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \right| \leq 1.$$

1. Если $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$, то жидкость растекается по поверхности твердого тела (например, керосин по стеклу),

то есть имеет место *полное смачивание*, а угол $\theta = 0$.

2. Если $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$, то жидкость стягивается в шаровую каплю, имея с поверхностью одну точку соприкосновения (капля воды на поверхности парафина), то есть это *полное несмачивание*, $\theta = \pi$.

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными. Жидкость может смачивать одну поверхность, а другую — нет. В качестве примера рассмотрим каплю жидкости на поверхности

другой жидкости. Пусть капля имеет форму чечевицы (рис. 8.18).

Условия равновесия:

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} \cos \theta_1 + \sigma_{23} \cos \theta_2;$$

$$\sigma_{12} \sin \theta_1 = \sigma_{23} \sin \theta_2.$$

Из них получаем

$$\cos \theta_1 = \frac{\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2}{2\sigma_{13}\sigma_{12}};$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2}{2\sigma_{13}\sigma_{23}};$$

Данные формулы однозначно определяют значения углов θ_1 и

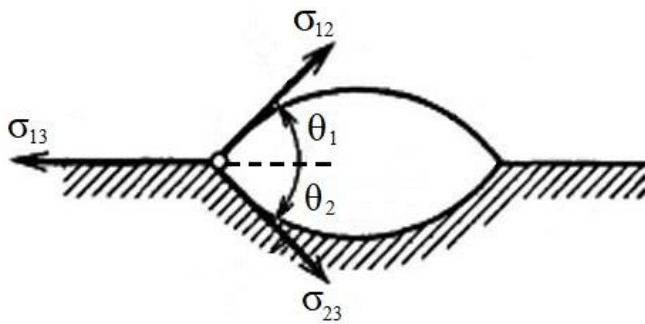


Рис. 8.18. Капля жира на поверхности воды

θ_2 . Равновесие возможно только в том случае, когда $\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23}$. В этом случае капля будет иметь форму чечевицы. Например, капля жира на поверхности воды.

Если $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$, то не существует углов θ_1 и θ_2 , удовлетворяющих условиям равновесия. Равновесие капли

невозможно, и она растекается по поверхности жидкости тонкой пленкой. Примером служит пленка бензина или керосина на поверхности воды.

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике, например в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы). Руду мелко дробят и взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через смесь продувают воздух и отстаивают. Смооченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости.

§ 8.16. Давление в жидкости под искривленной поверхностью

Искривленная поверхность оказывает на жидкость *избыточное*

(добавочное) давление. Рассмотрим мысленно отсеченный шаровой сегмент жидкости (рис. 8.19).

На каждый элемент контура поверхности Δl действует сила поверхностного натяжения $\Delta F = \sigma \Delta l$, касательная к поверхности сферы. Разложим

$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_1 + \Delta \vec{F}_2.$$

Поскольку сегмент жидкости находится в равновесии, то $\sum(\Delta \vec{F}_2) = 0$. Следовательно, равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечения жидкости (в данном случае внутрь жидкости).

Причем

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \alpha = \sum \sigma \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\sigma r}{R} \sum \Delta l = \frac{\sigma r}{R} 2\pi r.$$

Избыточное давление

$$\Delta P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (8.19)$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то аналогично можно показать, что

$$\Delta P = -\frac{2\sigma}{R}.$$

Следовательно, давление под выпуклой поверхностью больше на ΔP , а под вогнутой – меньше на ту же величину.

Формула (8.19) – это формула Лапласа, который установил, что для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности:

1) для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$, $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$;

2) для цилиндрической поверхности (например, вода в гори-

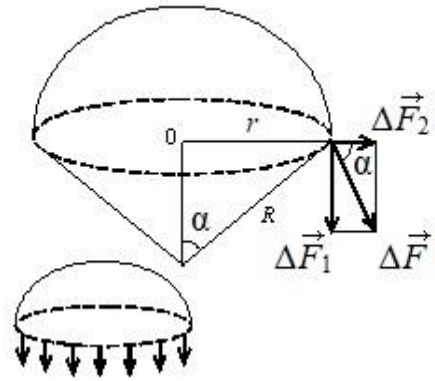


Рис. 8.19. Давление под выпуклой поверхностью жидкости

зонтальной трубе) $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$;

3) для плоской поверхности $R_1 = R_2 = \infty$, $\Delta P = 0$, то есть если жидкость имеет плоскую поверхность, то силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают. Пример: через трубочку выдули два мыльных пузыря (рис. 8.20), причем каждый пузырь выдували отдельно. Затем закрыли кран K_1 , а K_2 и K_3 открыли.

Что при этом произошло? Радиус кривизны поверхности жидкости у меньшего пузыря меньше, поэтому давление в меньшем пузыре больше, чем в большом пузыре, и воздух из меньшего пузыря будет перетекать в больший.

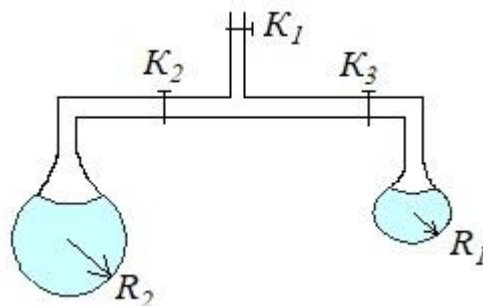


Рис. 8.20. Мыльные пузыри

§ 8.17. Капиллярные явления

Если узкую трубку (капилляр) поместить в жидкость, то можно увидеть либо то, что изображено на рис. 8.21, а, либо то, что изображено на рис. 8.21, б.

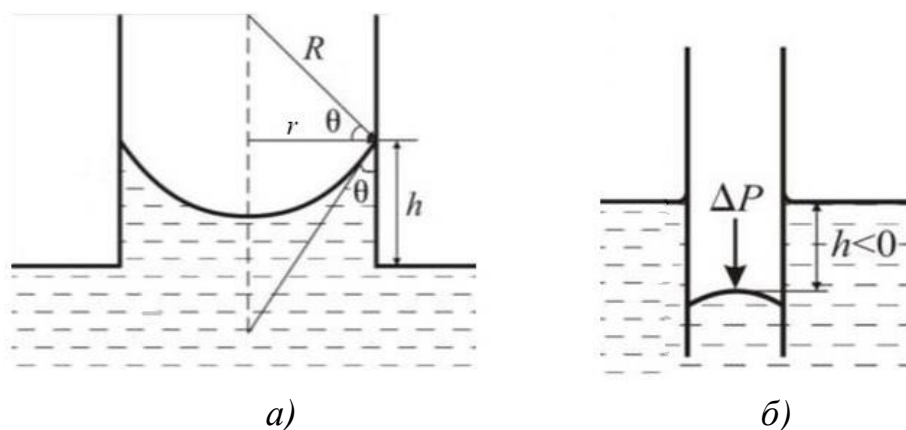


Рис. 8.21. Жидкость в капилляре в случае смачивания (а) и несмачивания (б)

Равновесие будет, если выполнено условие $\frac{2\sigma}{R} = \rho gh$.

Но $R = \frac{r}{\cos\theta}$, тогда $\frac{2\sigma\cos\theta}{r} = \rho gh$. Следовательно, $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr}$,

то есть высота поднятия (или опускания) зависит от смачивания

($\cos\theta$) и поверхностного натяжения σ .

Это явление называют *капиллярностью*. При полном смачивании $\theta \rightarrow 0$, вода в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту $h \approx 3$ м.

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Это влагообмен в почве и растениях, действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т. д.

§ 8.18. Фазовое равновесие и фазовые превращения

Фаза – макроскопически физически однородная часть вещества, отделенная от остальных частей системы границами раздела, так что она может быть извлечена из системы механическим путем.

Например, закрытый сосуд с водой, причем $V_{\text{воды}} < V_{\text{сосуда}}$. Над водой имеется смесь воздуха с водяными парами. Это *двухфазная* система. Если бросить в воду кусочек льда, то система превратится в *трехфазную*.

Что будет, если к воде добавить спирт? Число фаз не изменится, так как спирт смешивается с водой. Если добавить ртуть, то будем иметь две жидкие фазы. Если кроме льда бросить кусочки NaCl, то будет система с двумя твердыми фазами.

Система не может содержать больше одной газообразной фазы, так как все газы смешиваются.

Равновесие фаз механическое и тепловое.

Для теплового равновесия необходимо, чтобы все фазы имели одну и ту же температуру.

Необходимым условием механического равновесия является равенство давлений по разные стороны границы раздела фаз. Это условие для плоских границ раздела. В случае криволинейных границ должны быть учтены силы поверхностного натяжения.

Соприкасающиеся фазы могут взаимно превращаться. Это *фазовые превращения*. При их наличии одна фаза увеличивается, а другие уменьшаются и даже могут исчезнуть.

Состояние равновесия характеризуется тем, что массы всех фаз системы остаются неизменными. Следовательно, для того чтобы в системе было равновесие, необходимо выполнение условия: равновесие по отношению к взаимным превращениям фаз. Примеры фазовых превращений: агрегатные состояния вещества (твердое, жидкое, газообразное); конденсированные состояния (твердое и жидкое).

Испарение (парообразование) – переход вещества из конденсированного состояния в газообразное. Обратный переход называется *конденсацией*. Переход из твердого состояния непосредственно в газообразное называется *сублимацией* или *возгонкой*. Пример сублимации – превращение льда в пар (высыхание мокрого белья на морозе).

Еще один пример: кристалл йода поместим в колбу и нагреем на горелке. Он превратится в фиолетовые пары йода. При охлаждении образуются кристаллы йода.

Твердое состояние некоторых тел может иметь несколько модификаций. Это называется *полиморфизмом*. Например, твердый углерод может превратиться в графит или алмаз, лед также имеет несколько модификаций. Твердое железо имеет 4 модификации (α , β , γ , δ -железо). Жидкие кристаллы также могут иметь несколько модификаций. Гелий имеет две модификации.

Одни модификации могут переходить в другие при изменении давления или температуры. Это *полиморфные превращения*.

§ 8.19. Тройная точка. Диаграмма состояния

Допустим, что число фаз химически однородного вещества, находящихся в равновесии друг с другом, равно трем. Например, твердая фаза, жидкость и ее пар. Для равновесия необходимо равенство термодинамических потенциалов:

$$\begin{aligned}\varphi_1(P, T) &= \varphi_2(P, T); & \varphi_2(P, T) &= \varphi_3(P, T); \\ \varphi_3(P, T) &= \varphi_1(P, T).\end{aligned}$$

Первое уравнение – условие равновесия между паром и жидкостью; второе – между жидкостью и твердой фазой; третье – между твердой фазой и паром. Данные три условия не являются независимыми. Каждое из них является следствием двух других. Изобразим их графически (рис. 8.22). Точка *A* – *тройная точка* – это точка равновесия жидкой, твердой и газообразной фаз при определенных давлении и температуре. Например, для воды $P_A = 4,58$ мм рт. ст.

Кривые испарения, плавления, возгонки делят плоскость на три области: 1 – газообразное состояние вещества; 2 – жидкое; 3 – твердое состояние. Плоскость с тремя кривыми равновесия называется *диаграммой состояния*. Она позволяет судить о том, какие фазовые превращения будут происходить при том или ином процессе. Например, пусть производится нагрев при постоянном

давлении, это горизонтальная прямая. Если давление выше P_A , то в точке B твердое тело расплавится, а в точке C жидкость испарится. Если $P < P_A$, то в точке D произойдет возгонка.

Существуют фазовые переходы II рода, которые характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости.

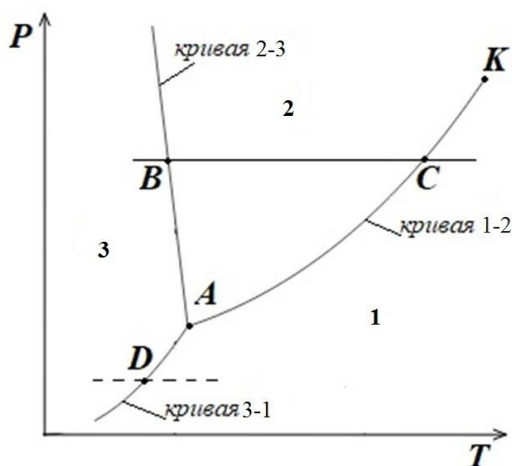


Рис. 8.22. Диаграмма состояния трех фаз: жидкого, газообразного, твердого

Теория была разработана Л. Д. Ландау. Примеры: переход ферромагнитного вещества при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход некоторых металлов при термодинамической температуре порядка нескольких кельвинов в сверхпроводящее состояние; переход жидкого гелия (модификация I) в гелий II при $T = 2,9$ К.

§ 8.20. Испарение и конденсация. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса

Уравнение кривой DK (рис. 8.23) представляется в виде зависимости $P(T)$, то есть это уравнение кривой равновесия жидкости и ее насыщенного пара (кривая испарения).

Пересечем кривую DK изобарой ACB . Пусть здесь $P < P_{кр}$. В точке A вещество находится в жидком состоянии. При нагревании жидкости при постоянном давлении изображение точки будет перемещаться вправо до кривой.

В точке C начнется испарение жидкости. При этом давление и температура будут постоянны. Когда вся жидкость испарится, изображение точки будет перемещаться по линии CB , то есть пар будет нагреваться при постоянном давлении.

Вычислим $\frac{dP}{dT}$, то есть исследуем наклон кривой испарения.

Учитывая равенство удельных термодинамических потенциалов фаз $d\phi_1 = d\phi_2$, получим $v_1 dP - s_1 dT = v_2 dP - s_2 dT$ или

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}, \quad (8.20)$$

где s_1, s_2 – удельные энтропии; v_1, v_2 – удельные объемы (объемы единицы массы пара v_1 и жидкости v_2).

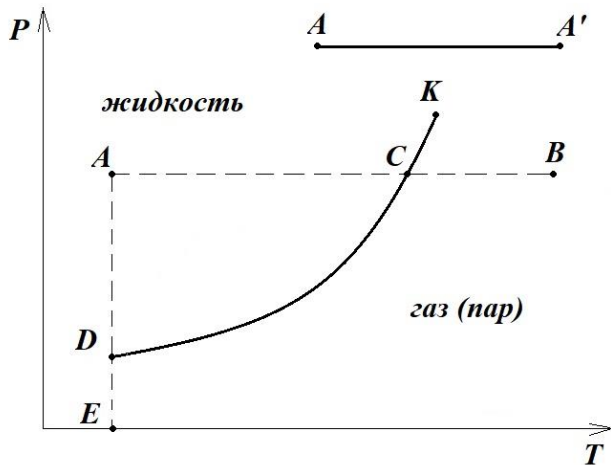


Рис. 8.23. Кривая равновесия жидкости и ее насыщенного пара

Фазовые превращения сопровождаются скачкообразными изменениями энтропии. Например, при переходе единицы массы вещества из газообразного состояния 1 в жидкое состояние 2 выделяется тепло:

$$q_{12} = T(S_1 - S_2). \quad (8.21)$$

При обратном переходе из 2 в 1 тепло поглощается. Тепло q называется удельной теплотой испарения. В общем случае оно называется удельной теплотой фазового пре-

вращения. Это фазовый переход I рода.

Если уравнение (8.21) подставить в (8.20), то получим

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T - (v_1 - v_2)}. \quad (8.22)$$

Данное уравнение носит название уравнения Клапейрона – Клаузиуса.

Почему для испарения жидкости требуется затрата тепла?

Это легко объяснить с молекулярной точки зрения. Скорости молекул жидкости распределяются по закону Максвелла. Вылетают из жидкости самые быстрые молекулы, так как лишь они способны преодолеть силы притяжения в поверхностном слое жидкости.

В результате ухода быстрых молекул жидкость охлаждается, поэтому для поддержания постоянной температуры требуется подвод тепла.

Для плавления

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{23}}{T(v_2 - v_3)}, \quad (8.23)$$

где q_{23} – удельная теплота плавления; v_2, v_3 – удельные объемы

жидкости и твердой фазы; T – температура плавления.

При плавлении нужно подвести тепло, чтобы разрушить кристаллическую решетку.

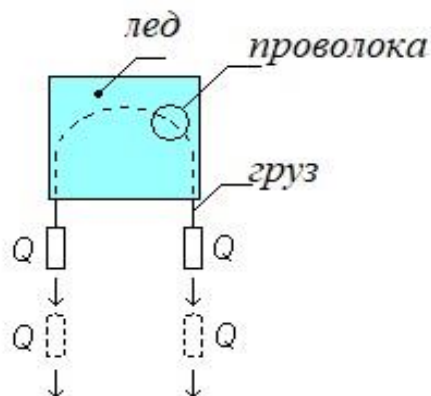


Рис. 8.24. Схема опыта по прохождению проволоки через брусок льда

Если $v_2 > v_3$, то $\frac{dP}{dT} > 0$, то есть с повышением давления температура плавления повышается; если $v_2 < v_3$, то $\frac{dP}{dT} < 0$. То есть с повышением давления температура плавления понижается. Это наблюдается у воды и льда.

Например, если на брусок льда накинуть проволочную петлю и к ней подвесить тяжелый груз Q , то лед под проволокой плавится, вода выдавливается и замерзает над проволокой. Проволока проходит через брусок льда, но брусок остается целым (рис. 8.24).

Дьюар установил опытно, что точка плавления льда понижается на $0,0072 \text{ К/атм}$. Из формулы (8.23) можно получить то же, полагая $(v_3 - v_2) = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{кг}$.

§ 8.21. Вопросы для самоподготовки

1. Какая изотерма Ван-дер-Ваальса является критической?
2. Чем отличается пар от газа?
3. Действует ли молекулярное давление на пловца?
4. За счет чего появляется поверхностная энергия?
5. Что такое поверхностное натяжение?
6. Почему стальная иголка, смазанная жиром, не тонет?
7. Что будет наблюдаться, если высота поднятия жидкости в капиллярах больше высоты самого капилляра?
8. Вследствие чего в жидкости возникает избыточное давление и от чего оно зависит?
9. Сколько фаз могут создавать твердые, жидкие и газообразные тела в одной системе?
10. Что является необходимым условием механического равновесия фаз?
11. В чем заключаются фазовые превращения?

12. Что происходит с термодинамическим потенциалом системы и удельным термодинамическим потенциалом фаз при фазовых превращениях?

13. Как показать с помощью изобары возгонку твердого вещества?

14. Как изображается состояние вещества в координатах $P - T$?

§ 8.22. Примеры решения задач

Пример 8.1. В цилиндре под поршнем находится азот массой 56 г при температуре 300 К. При адиабатном расширении объем азота увеличится в 2 раза, а при последующем изотермическом сжатии уменьшится в 2 раза. Найдите температуру газа, установившуюся в результате этих процессов, и совершенную работу. Изобразите процесс графически.

Дано:

$$m = 56 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$V_3 = 0,5V_2$$

$$T, A - ?$$

Решение. При адиабатном расширении (процесс 1–2) температура и объем газа свя-

заны соотношением $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$. Азот N_2 –

двухатомный газ, для него $i = 5$,

$$\text{а } \gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

$$\text{Тогда } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300 \left(\frac{V_1}{2V_1}\right)^{1,4-1} = 227,4 \approx 227 \text{ К.}$$

Поскольку следующий процесс изотермический (процесс 2–3), температура азота останется неизменной и равной

$$T_3 = 227 \text{ К.}$$

Работа газа при адиабатном расширении

$$A_{12} = -\frac{im}{2M} R(T_2 - T_1).$$

На рис. 8.25 изображены процессы: 1–2 – адиабатное расширение; 2–3 – изотермическое сжатие. Вычисляем работу газа при адиабатном расширении:

$$A_{12} = \frac{5}{2} \cdot \frac{56 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31(227 - 300) = 3,03 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 3,03 \text{ кДж.}$$

Работа газа при изотермическом расширении:

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_1} P dV = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}.$$

Вычисляем:

$$A_{23} = \frac{56 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 227 \ln(0,5) = -2615 \text{ Дж} = -2,62 \text{ кДж}.$$

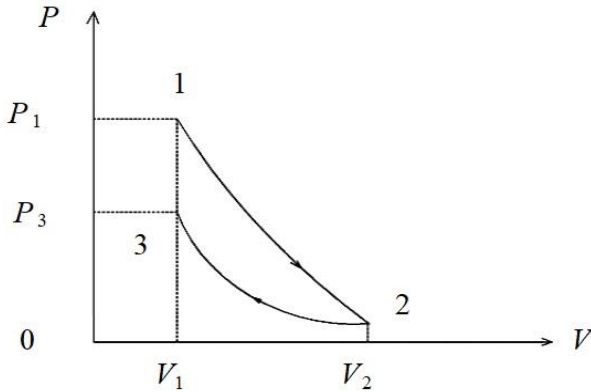


Рис. 8.25. График цикла:
1–2 адиабатное расширение;
2–3 изотермическое сжатие

Знак «минус» говорит о том что, при изотермическом сжатии работа была совершена внешними силами.

Общая работа, совершенная газом в этих процессах:

$$A_{13} = A_{12} + A_{23} = 3,03 - 2,62 = 0,41 \text{ кДж}.$$

Пример 8.2. Кислород при неизменном давлении 80 кПа нагревается. Его объем увеличивается от 100 до 300 л. Определите: 1) изменение внутренней энергии кислорода; 2) работу, совершенную им при расширении; 3) количество теплоты, сообщенное газу.

Дано:

$$M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$i = 5; P = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$V_1 = 100 \text{ л} = 0,1 \text{ м}^3$$

$$V_2 = 300 \text{ л} = 0,3 \text{ м}^3$$

$$\Delta U_{12}, A_{12}, Q_{12} - ?$$

Решение. Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний газа:

$$PV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \text{ и } PV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Подставив в формулу изменения внутренней энергии, получим

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} P(V_2 - V_1).$$

Учитывая, что работа, совершенная газом при изобарном процессе:

$$A_{12} = P(V_2 - V_1),$$

рассчитаем внутреннюю энергию и работу:

$$A_{12} = 8 \cdot 10^4 (0,3 - 0,1) = 16 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 16 \text{ кДж};$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} A_{12} = \frac{5}{2} 16 = 40 \text{ кДж}.$$

Запишем первое начало термодинамики для изобарного процесса:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2} A_{12} + A_{12} = \frac{i+2}{2} A_{12} = \frac{5+2}{2} 16 = 56 \text{ кДж}.$$

§ 8.23. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

8.1. Газ занимает объем 2 л под давлением 0,5 МПа. Определите суммарную кинетическую энергию поступательного движения молекул.

8.2. Водород находится при температуре 300 К. Рассчитайте среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы, а также внутреннюю энергию 0,5 моля водорода.

8.3. Молярная внутренняя энергия кислорода равна 6,02 кДж/моль. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы.

8.4. Отношение концентраций молекул кислорода и азота вблизи поверхности Земли при температуре 0 °С равно 0,268. Найдите отношение их концентраций на высоте 4,5 км, полагая, что температура остается неизменной.

8.5. Определите разность атмосферных давлений на высоте 5 км и в шахте на глубине 2 км. Расчет произведите для изотермической атмосферы при температуре 20 °С. Давление на уровне моря принять равным 100 кПа.

8.6. Как изменится средняя длина свободного пробега молекул азота, находящегося в цилиндре под поршнем, при двукратном увеличении объема?

8.7. Средняя длина свободного пробега молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 мкм. Определите среднюю длину свободного пробега этих молекул при давлении

10 Па и той же температуре.

8.8. После нагревания газа в цилиндре под поршнем его объем увеличился в 3 раза, а давление осталось неизменным. Как изменилось при этом среднее число соударений молекул за единицу времени?

8.9. Определите среднее число соударений молекул азота за единицу времени при температуре 27°C , если плотность газа 1 кг/м^3 .

8.10. В двух баллонах находятся водород и кислород при одинаковой температуре. Во сколько раз различаются давления в баллонах, если среднее число соударений молекул за единицу времени в обоих баллонах одинаково?

8.11. Найдите среднюю кинетическую энергию $\langle W_{\text{вр}} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350\text{ К}$, а также суммарную кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в $m = 4\text{ г}$ кислорода.

8.12. Найдите среднее значение кинетической энергии вращательного движения одной молекулы и среднее значение полной энергии $\langle W \rangle$ теплового движения молекулы аммиака NH_3 при температуре $t = 27^\circ\text{C}$.

8.13. Найдите среднюю кинетическую энергию $W_{\text{вр}}$ вращательного движения одной молекулы водорода, а также суммарную кинетическую энергию вращательного движения всех молекул в одном моле водорода при температуре $T = 190\text{ К}$.

8.14. Газ занимает объем $V = 2\text{ л}$ под давлением $P = 5 \cdot 10^5\text{ Па}$. Определите суммарную кинетическую энергию $W_{\text{к}}$ поступательного движения молекул газа.

8.15. Молярная внутренняя энергия U_m некоторого двухатомного газа равна $6,02\text{ кДж}$. Определите среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

8.16. Определите наиболее вероятную скорость \bar{v}_v молекул газа, плотность ρ которого при давлении $P = 40\text{ кПа}$ составляет $0,35\text{ кг/м}^3$.

8.17. Колба емкостью $V = 4\text{ л}$ содержит некоторый газ массой $m = 0,6\text{ г}$ под давлением $P = 2 \cdot 10^5\text{ Па}$. Определите среднюю квадра-

тичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул газа.

8.18. Плотность некоторого газа равна $6 \cdot 10^{-2}$ кг/м³, средняя арифметическая скорость молекул этого газа равна 500 м/с. Найдите давление, которое газ оказывает на стенки сосуда.

8.19. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна 450 м/с. Давление газа равно 50 кПа. Найдите плотность газа при этих условиях.

8.20. Определите наиболее вероятную $v_{\text{в}}$, среднюю арифметическую $\langle v \rangle$ и среднюю квадратичную $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ скорости молекул азота N₂ при температуре 27 °С.

8.21. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = 0,91$ см²/с. Определите коэффициент теплопроводности λ водорода.

8.22. Коэффициент диффузии кислорода при температуре 0 °С $D = 0,19$ см²/с. Определите среднюю длину $\langle \ell \rangle$ свободного пробега молекул кислорода.

8.23. Средняя длина $\langle \ell \rangle$ свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях равна $1,8 \cdot 10^{-7}$ см. Определите коэффициент диффузии D гелия при этих условиях.

8.24. При нормальных условиях динамическая вязкость азота $\eta = 17$ мкПа·с. Определите среднюю длину $\langle \ell \rangle$ свободного пробега молекул газа.

8.25. Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определите коэффициент диффузии D и коэффициент внутреннего трения η . Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм.

8.26. Определите коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент внутреннего трения η для него при тех же условиях равен 10 мкПа·с.

8.27. Определите среднее число $\langle z \rangle$ соударений в секунду молекул водорода при давлении $P = 10^{-3}$ мм рт. ст. и температуре $T = 300$ К.

8.28. Определите плотность ρ кислорода, если средняя длина свободного пробега его молекул $\langle \ell \rangle = 0,1$ см.

8.29. При нормальных условиях длина свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы водорода равна 0,112 пм. Определите эффективный

диаметр d молекулы водорода газа.

8.30. При каком давлении P средняя длина $\langle \ell \rangle$ свободного пробега молекулы азота равна 1 м, если температура T газа равна 300 К?

8.31. Водород занимает объем $V = 10 \text{ м}^3$ при давлении $P_1 = 10^5 \text{ Па}$. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $P_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Определите изменение внутренней энергии газа ΔU , работу A , совершаемую газом, и теплоту Q , сообщенную газу.

8.32. Кислород нагревается при неизменном давлении $P = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$, при этом его объем увеличивается от $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до $V_2 = 3 \text{ м}^3$. Определите изменение внутренней энергии кислорода ΔU , работу A , совершаемую им при расширении, а также теплоту Q , сообщенную газу.

8.33. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему была сообщена теплота $Q = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Дж}$. Какую работу A совершил при этом газ? Каково было изменение внутренней энергии азота ΔU ?

8.34. Азот массой $m = 0,1 \text{ кг}$ был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 200 \text{ К}$ до температуры $T_2 = 400 \text{ К}$. Определите работу A , совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота.

8.35. Объем водорода ($m = 200 \text{ г}$) при изотермическом расширении ($T = 300 \text{ К}$) увеличился в 3 раза. Определите работу A , совершенную газом, и теплоту Q , полученную им при этом.

8.36. При изотермическом расширении одного моля водорода, имевшего температуру $T = 300 \text{ К}$, затрачено количество теплоты $Q = 2 \text{ кДж}$. Во сколько раз увеличился объем газа?

8.37. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 20 \text{ г}$. Газ был нагрет от температуры $T_1 = 300 \text{ К}$ до температуры $T_2 = 450 \text{ К}$ при постоянном давлении. Определите теплоту Q , переданную газу, совершенную газом работу A и приращение внутренней энергии ΔU .

8.38. При изотермическом расширении водорода массой $m = 1 \text{ г}$ объем газа увеличился в два раза. Определите работу A расширения, совершенную газом, если температура газа $T = 300 \text{ К}$. Определите теплоту Q , переданную при этом газу.

8.39. 1 кмоль азота, находящегося при нормальных условиях, расширяется адиабатически от V_1 до $V_2 = 5V_1$. Найдите: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) работу A , совершенную при расширении.

8.40. При адиабатическом расширении кислорода с начальной температурой $t_0 = 47^\circ\text{C}$ внутренняя энергия уменьшилась на 8400 Дж. Определите массу кислорода, если объем увеличился в 10 раз.

8.41. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя теплоту $Q_1 = 4 \cdot 10^3$ Дж. Термический КПД цикла $\eta = 0,1$. Определите работу A , совершенную газом в результате протекания всего цикла, а также работу при изотермическом расширении газа и работу при его изотермическом сжатии.

8.42. Газ, совершающий цикл Карно, получает от нагревателя теплоту $Q_1 = 42$ кДж. Какую работу совершает газ, если температура T_1 нагревателя в три раза выше, чем температура T_2 охладителя?

8.43. Газ совершает цикл Карно. Температура охладителя $T_2 = 290$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от $T_1 = 400$ К до $T_1' = 600$ К.

8.44. Температура нагревателя тепловой машины, работающей по циклу Карно, 470 К, а холодильника – 290 К. Определите термический КПД машины. На сколько нужно повысить температуру нагревателя, чтобы увеличить КПД машины в два раза при неизменной температуре холодильника?

8.45. Газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 в четыре раза выше температуры охладителя T_2 . Какую долю теплоты, получаемой за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

8.46. Два килограмма льда, находящегося при температуре $t_1 = -13^\circ\text{C}$, нагрели и расплавили при 0°C . Определите изменение ΔS энтропии.

8.47. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление газа увеличилось в два раза. Определите изменение ΔS энтропии.

8.48. Найдите изменение ΔS энтропии при расширении азота массой $m = 4$ г от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 9$ л, если процесс изобарический.

8.49. Смешано $m_1 = 5$ кг воды при температуре $t_1 = 10$ °С с $m_2 = 8$ кг воды при температуре $t_2 = 80$ °С. Найдите: а) температуру $t_{\text{см}}$ смеси; б) изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

8.50. Азот массой $m = 10,5$ г изотермически расширяется от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найдите изменение ΔS энтропии при этом процессе.

8.51. Изменение энтропии при изотермическом расширении 10 г азота, если давление газа уменьшилось от 0,1 МПа до 50 кПа, равно ...

- 1) 2,06 Дж/К; 2) 4120 Дж/К;
- 3) 2060 Дж/К.

8.52. На рис. 8.26 изображен график зависимости давления газа на стенки сосуда от температуры. Какой процесс изменения состояния газа изображен?

- 1) изохорное охлаждение;
- 2) изобарное нагревание;
- 3) изотермическое сжатие;
- 4) изохорное нагревание.

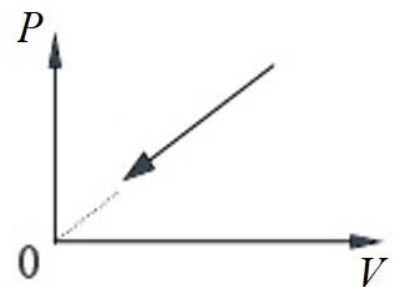


Рис. 8.26. Зависимость давления от температуры

8.53. При охлаждении твердого тела массой m температура тела понизилась на ΔT . Какое из приведенных ниже выражений определяет количество отданной теплоты Q , если удельная теплоемкость вещества этого тела c ?

- 1) $cm\Delta T$; 2) $\frac{m\Delta T}{c}$; 3) $\frac{cm}{\Delta T}$; 4) $\frac{m}{c\Delta T}$.

8.54. На рис. 8.27 представлен график функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$. Для этой функции верным утверждением является ...

- 1) при изменении температуры площадь под кривой не изменяется;
- 2) при изменении температуры положение максимума не изменяется;

3) с уменьшением температуры величина максимума уменьшается;

4) с увеличением температуры величина максимума увеличивается.

8.55. На рис. 8.27 представлен график функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$.

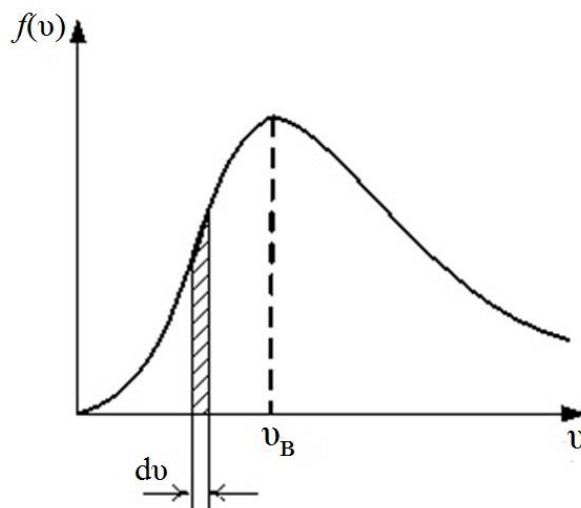


Рис. 8.27. Распределение молекул газа по скоростям

Если не меняя температуры взять другой газ с большей молярной массой и таким же числом молекул, то ...

1) максимум кривой сместится влево в сторону меньших скоростей;

2) площадь под кривой увеличится;

3) величина максимума уменьшится;

4) максимум кривой сместится вправо в сторону больших скоростей.

8.56. В трех одинаковых сосудах находится одинаковое количество газа, причем температуры соотносятся следующим образом:

$$T_1 > T_2 > T_3.$$

Распределение скоростей молекул в сосуде с температурой T_1 будет описывать кривая (рис. 8.28) ...

1) 1; 2) 2; 3) 3.

8.57. Давление и объем одноатомного идеального газа увеличили в два раза. Внутренняя энергия ...

1) увеличится в 4 раза;

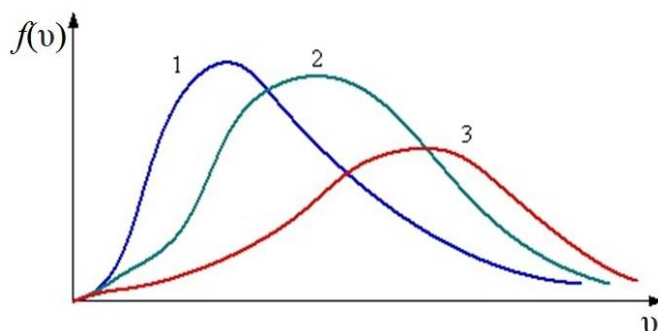


Рис. 8.28. Изменение распределения Максвелла при изменении термодинамической температуры

- 2) уменьшится в 4 раза;
- 3) уменьшится в 2 раза;
- 4) не изменится.

8.58. Изменение внутренней энергии газа происходит только за счет работы сжатия газа в ...

- 1) адиабатном процессе;
- 2) изохорном процессе;
- 3) изотермическом процессе;
- 4) изобарном процессе.

8.59. На (P, V) -диаграмме (рис. 8.29) изображен циклический процесс. На участках AB и BC температура ...

- 1) на AB – повышается, на BC – понижается;
- 2) повышается;
- 3) понижается;
- 4) на AB – понижается, на BC – повышается.

8.60. Два грамма гелия, расширяясь адиабатически, совершили работу $A = 249,3$ Дж. В этом процессе изменение температуры составило ...

- 1) 40 К; 2) 50 К; 3) 30 К.

8.61. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рис. 8.30. Работа циклического процесса равна ...

- 1) 90 кДж; 2) 30 кДж;
- 3) 15 кДж; 4) 20 кДж.

8.62. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рис. 8.31. Отношение работы при нагревании газа к работе при охлаждении равно ...

- 1) 2,5; 2) 1,5;
- 3) 3; 4) 5.

8.63. При изотермическом сжатии

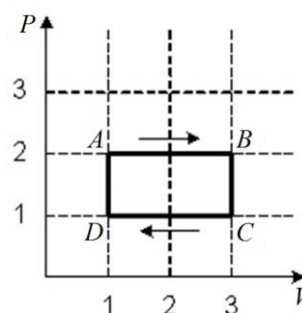


Рис. 8.29. Термодинамический цикл

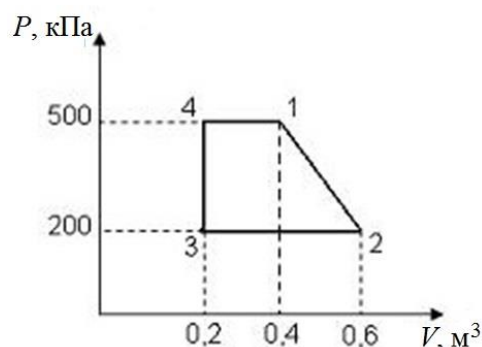


Рис. 8.30. Цикл идеального одноатомного газа

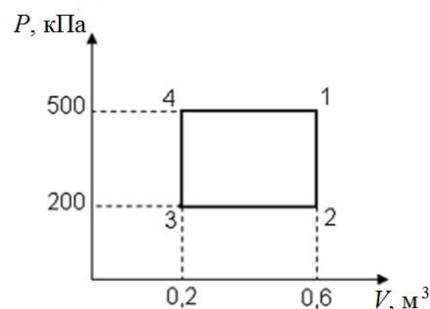


Рис. 8.31. Схема цикла одноатомного газа

идеального газа энтропия ...

- 1) уменьшается; 2) увеличивается;
- 3) не изменяется;
- 4) сначала увеличивается, потом уменьшается.

8.64. В процессе обратимого адиабатического охлаждения постоянной массы идеального газа его энтропия ...

- 1) не изменяется;
- 2) увеличивается;
- 3) равна нулю;
- 4) уменьшается.

8.65. При адиабатическом расширении идеального газа ...

- 1) температура понижается, энтропия не изменяется;
- 2) температура и энтропия не изменяются;
- 3) температура и энтропия возрастают;
- 4) температура понижается, энтропия возрастает.

8.66. Энтропия изолированной термодинамической системы в ходе необратимого процесса ...

- 1) только увеличивается;
- 2) только убывает;
- 3) остается постоянной;
- 4) остается постоянной или уменьшается.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные физические постоянные

| Название | Обозначение | Численное значение |
|----------------------------------|--------------------------|--|
| Ускорение свободного падения | g | 9,81 м/с ² |
| Универсальная газовая постоянная | R | 8,314 Дж/(моль·К) |
| Постоянная Авогадро | N_A | 6,022·10 ²³ моль ⁻¹ |
| Постоянная Больцмана | k | 1,381·10 ⁻²³ Дж/К |
| Элементарный заряд | e | 1,602·10 ⁻¹⁹ Кл |
| Масса покоя электрона | m_e | 9,109·10 ⁻³¹ кг |
| Скорость света в вакууме | c | 2,9979·10 ⁸ м/с |
| Масса покоя протона | m_p | 1,67·10 ⁻²⁷ кг |
| Электрическая постоянная | ϵ_0 | 8,85·10 ⁻¹² Ф/м |
| Магнитная постоянная | μ_0 | 12,56·10 ⁻⁷ Гн/м |
| Постоянная Планка | h | 6,63·10 ⁻³⁴ Дж·с |
| Постоянная Планка (с чертой) | $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ | 1,0546·10 ⁻³⁴ Дж·с |
| Постоянная Стефана – Больцмана | σ | 5,67·10 ⁻⁸ Вт/(м ² ·К ⁴) |
| Постоянная закона смещения Вина | b | 2,90·10 ⁻³ м·К |
| Энергия ионизации атома водорода | E_i | 2,16·10 ⁻¹⁸ Дж |
| Комптоновская длина волны | λ_c | 2,43·10 ⁻¹² м |
| Атомная единица массы | $a. e. m.$ | 1,6605·10 ⁻²⁷ кг |
| Электрон-вольт | эВ | 1,6·10 ⁻¹⁹ Дж |

2. Тепловые свойства твердых тел

| Вещество | Удельная теплоемкость C_m , Дж/(К·кг) | Температура плавления $t_{пл}$, °С | Удельная теплота плавления λ , кДж/кг |
|----------|---|-------------------------------------|---|
| Алюминий | 880 | 660 | 380 |
| Лед | 2100 | 0 | 330 |
| Медь | 380 | 1083 | 180 |
| Олово | 230 | 232 | 59 |
| Свинец | 130 | 327 | 25 |
| Серебро | 230 | 960 | 87 |
| Сталь | 460 | 1400 | 82 |

3. Тепловые свойства жидкостей

| Вещество | Удельная теплоемкость C_m , Дж/(К·кг) | Температура кипения $t_{кип}$, °С | Удельная теплота парообразования r , кДж/кг |
|----------|---|------------------------------------|---|
| Вода | 4200 | 100 | 2300 |
| Ртуть | 120 | 357 | 290 |
| Спирт | 2400 | 78 | 850 |

4. Тепловые свойства газов

| Вещество | Удельная теплоемкость C_m , кДж/(К·кг) | Температура конденсации $t_{кип}$, °С | Плотность при нормальных условиях ρ , кг/м ³ |
|----------|--|--|--|
| Азот | 1,0 | -196 | 1,25 |
| Водород | 14 | -253 | 0,09 |
| Воздух | 1,0 | -216 | 1,29 |
| Кислород | 0,92 | -183 | 1,43 |

5. Численные значения коэффициента температуропроводности α

| № п/п | Вещество | α , $10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ |
|-------|--|--|
| 1 | Медь ($T = 273 \text{ К}$) | 11,6 |
| 2 | Воздух ($T = 273 \text{ К}$, $P = 0,101 \text{ МПа}$) | 1,88 |
| 3 | Сталь 20 ($T = 273 \text{ К}$) | 1,16 |
| 4 | Вода ($T = 273 \text{ К}$, $P = 0,101 \text{ МПа}$) | 0,0169 |

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 томах : учебное пособие для студентов физических специальностей вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 1 : Механика. – 4-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2005. – 560 с. – Текст : непосредственный.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 томах : учебное пособие для студентов физических специальностей вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 2 : Термодинамика и молекулярная физика. – 5-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2006. – 544 с. – Текст : непосредственный.

3. Савельев, И. В. Курс физики : в 3 томах : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям и специальностям / И. В. Савельев. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 352 с. – (Классическая учебная литература по физике). – Текст : непосредственный.

4. Савельев, И. В. Курс физики : в 3 томах : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям и специальностям / И. В. Савельев. – Т. 2 : Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 480 с. – (Классическая учебная литература по физике). – Текст : непосредственный.

5. Детлаф, А. А. Курс физики : учебное пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2002. – 718 с. – Текст : непосредственный.

6. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 542 с. – Текст : непосредственный.

Дырдин Валерий Васильевич
Шепелева Софья Алексеевна
Ким Татьяна Леонидовна

ФИЗИКА
*Механика. Молекулярная физика
и термодинамика*

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 31.03.2022. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 15,00
Тираж 100 экз. Заказ

Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр Кузбасского государственного технического
университета имени Т. Ф. Горбачева, 650000, ул. Д. Бедного, 4 а