Г. Шодмонов Ш. Т. Пирматов
А. Абдукаримов П. Н. Подкур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Кемерово 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Г. Шодмонов Ш. Т. Пирматов
А. Абдукаримов П. Н. Подкур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Кемерово 2022

УДК 517(075.8)

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» Н. К. Смоленцев

Заместитель директора по научно-административной работе ФИЦ УУХ СО РАН, кандидат технических наук, доцент В. В. Зиновьев

Шодмонов, Г. **Высшая математика. Теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, уравнения математической физики** : учебное пособие / Г. Шодмонов, Ш. Т. Пирматов, А. Абдукаримов, П. Н. Подкур ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2022. – 132 с. – ISBN 978-5-00137-323-0. – Текст : непосредственный.

В учебном пособии дан краткий теоретический материал и разобрано множество примеров и задач по следующим разделам математики: «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление», «Уравнения математической физики». Содержит около 600 задач для самостоятельного изучения.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-5-00137-323-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие подготовлено на основе изучения программы предмета высшей математики в высших технических учебных заведениях. Оно содержит в себе множество подробно разобранных примеров и задач по следующим разделам – «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление» и «Уравнения математической физики».

Пособие предназначено для проведения практических занятий, но в нем также изложены необходимые теоретические сведения по каждой рассматриваемой теме. Показаны решения около 400 типовых примеров и задач с подробными объяснениями.

В учебном пособии даны около 600 примеров и задач для самостоятельного решения, которые дают возможность преподавателю достаточный выбор материалов для проведения аудиторных занятий, и для выполнения студентами домашних заданий.

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Основные сведения о комплексных числах

1.1.1. Комплексные числа в алгебраической форме. Модуль и аргумент комплексного числа

1. Выражение вида $z = x + iy$ называется комплексным числом в алгебраической форме, где x и y – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – так называемая мнимая единица. Если $z = x + iy$, то число x называется действительной частью комплексного числа (обозначение: $x = \operatorname{Re} z$), число y называется мнимой частью комплексного числа (обозначение $y = \operatorname{Im} z$).

По определению, $i^2 = -1$, поэтому $i^3 = -i,\ i^4 = 1$, а также для любого натурального числа n можно записывать так:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно-сопряженным числу $z = x + iy$

Если в комплексных числах $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ имеют места равенств $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то они называются равными комплексными числами.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $\mathbf{C}$.

Если к плоскости комплексных чисел присоединена бесконечно удаленная точка, то она называется расширенной плоскостью комплексных чисел и обозначается $\overline{\mathbf{C}}$.

2. Сумма, разность и произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, также являются комплексными числами, и они определяются следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

В частности, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

Если $z_2 \neq 0$, то их отношение вычисляется таким образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)} = \frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2\cdot y_1-x_1\cdot y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Действительная и мнимая часть комплексного числа z, через комплексно-сопряженного числа $\bar{z}$ выражается так:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z}+z}{2}, \operatorname{Im} z = i\frac{\bar{z}-z}{2}.$$

Свойства произведения комплексных чисел:

1. $z_1.z_2 = z_2 \cdot z_1$;
2. $(z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$;
3. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \; \forall \, z_1, z_2, z_3 \; \in \mathbf{C}$.

3. Известно, что любое комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости в декартовой системе координат в виде точки M с координатами (x, y) или в виде радиус-вектора точки M, т.е., $z = \overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

По определению, длина радиус-вектора называется модулем данного комплексного числа и обозначается, как $r = |z|$, т.е., $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, образованный радиус-вектором $z\,(z \neq 0)$, с положительным направлением оси Ox и обозначается, как $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Вообще говоря, он определяется с точностью до $2k\pi$ выражением:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

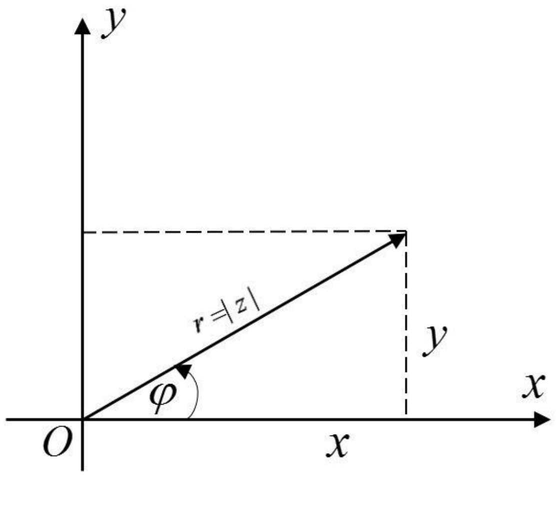

Рис. 1

Здесь $\arg z$ является главным значением $\operatorname{Arg} z$ и для него выполняется условие $-\pi < \arg z \leq \pi$. Верны следующие соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0; \end{cases}$$

Из определения вытекают также следующие формулы:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Отметим, что для того, чтобы комплексные числа z_1 и z_2 были равными, должны выполнятся следующие равенства:

$$|z_1| = |z_2| \text{ и } \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2.$$

Единственным комплексным числом, для которого не определяется аргумент, является 0.

Существуют следующие основные свойства модуля и аргумента:

1) $|z_1 . z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;
3) $|z^n| = |z|^n$;
4) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
5) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
6) $\operatorname{Arg}(z_1 . z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$;
7) $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$;
8) $\operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z$;
9) $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$.

4. Выражение вида $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется, тригонометрической формой комплексного числа, где r – модуль, φ – аргумент комплексного числа.

Если иметь в виду, что $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (формула Эйлера), то тригонометрическая форма записи комплексного числа будет выглядеть в следующем виде: $z = re^{i\varphi}$, эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Примеры

Пример 1. Выполнить четыре арифметических действия над данными комплексными числами: $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 8 + 5i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (4 - 3i) + (8 + 5i) = (4 + 8) + i(-3 + 5) = 12 + 2i;$$
$$z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (8 + 5i) = (4 - 8) + i(-3 - 5) = -4 - 8i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 3i) \cdot (8 + 5i) = 32 - 24i + 20i + 15 = 47 - 4i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4 - 3i) \cdot (8 - 5i)}{(8 + 5i) \cdot (8 - 5i)} = \frac{32 - 24i - 20i - 15}{64 + 25} = \frac{17}{89} - i\frac{44}{89}.$$

Пример 2. Доказать, что $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$.

Решение. Так как, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + +i(y_1 - y_2)$,
а также, $\overline{z_1 - z_2} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)$. Отсюда имеем, что
$\overline{z_1 - z_2} = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z_1} - \bar{z_2}$.

Пример 3. Найти действительные корни уравнения:
$(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

Решение. Раскроем скобки и приведем подобные:

$$6x - 2i + 3ix - i^2 + x - iy + 2ix - 2i^2y = 5 + 6i$$
$$7x + 5ix + 2y - iy + 1 - 2i = 5 + 6i.$$

Отсюда имеем: $7x + 2y = 4$ и $5x - y = 8$, т.е.:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 4, \\ 5x - y = 8. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим, корни исходного уравнения:
$x = \frac{20}{17}$ и $y = -\frac{36}{17}$.

Пример 4. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i$.

Решение. Так как,

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \arg(1 + i) = \mathrm{arctg}\frac{1}{1} = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

(потому что, вектор, который изображает $(1 + i)$ лежит в первой четверти).

Следовательно, $\mathrm{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi(k = 0: \pm 1; \pm 2: \ldots)$.

Пример 5. Найти модуль и главное значение аргумента $z = 1 - i$.

Решение. Имеем: $|z| = r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, так как,

$$x = 1 > 0 \text{ и } y = -1 < 0,$$

то соответствующий вектор данному числу находится в IV-четверти, поэтому, $\arg(1 - i) = -\mathrm{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4}$.

Пример 6. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Решение. $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Так как, $x = -1 < 0$ и $y = \sqrt{3} > 0$ соответствующий вектор находится во II-четверти, следовательно, $\arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \pi - \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Поэтому: $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Пример 7. Представить в тригонометрической форме $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение.

Имеем: $\left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, а также

$x = -1 < 0$ и $y = -\sqrt{3} < 0$, то $\arg\left(-1 - i\sqrt{3}\right) = -\pi + \mathrm{arctg}\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$. Следовательно: $-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Пример 8. Записать число $z = i$ в показательной форме.

Решение. $|z| = r = 1, x = 0, y = 1$: $\varphi = \mathrm{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Тогда имеем: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Пример 9. Записать $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ в показательной форме.

Решение. Так как,

$\left|-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ и в виду того, что изображающий вектор данного числа лежит во второй четверти, имеем: $\arg\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right) = \pi - \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi$. Следовательно: $-\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Упражнения

Выполнить действия над данными комплексными числами.

1. $(-5+2i)\cdot(-5-2i)$;

2. $(8+5i)\cdot(7+6i)$;

3. $\frac{1+i}{1-i}$;

4. $\frac{5-i}{2-i}$;

5. $\frac{1+2i}{i}$;

6. $\frac{2+i}{1+i}+\frac{1}{1-i}$;

Доказать следующие соотношения.

7. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$;

8. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$;

9. $\overline{\bar{z_1}+\bar{z_2}}=z_1+z_2$;

Найти действительные решения следующих уравнений.

10. $(4+2i)x-(5-3i)y=13+i$;

11. $(x-iy)\cdot(3+2i)=i^6$;

12. $\frac{1}{x+i(y-1)}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$;

13. $x^4-30x^2-216=0$;

14. $(5-8i)x+(7+3i)y=2-i$;

15. $x^2-(3+4i)x+2(1+2i)=0$;

Привести к тригонометрической форме комплексные числа.

16. $z=-2+2\sqrt{3}i$;

17. $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;

18. $z=-2i$;

19. $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$;

20. $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$;

21. $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$;

22. $z=1-\sqrt{3}i$;

23. $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$;

24. $z=-2-2i$.

Записать комплексные числа в показательной форме.

25. $z=-1+i$;

26. $z=-i$;

27. $z=2i$;

28. $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

29. $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

30. $z=-2i$;

31. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

32. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

33. $z=-1$;

34. $(1+i)\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – вычислить.

1.1.2. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Извлечение корней из комплексных чисел

1. Произведение и отношение двух комплексных чисел заданных в тригонометрической форме $z_1=r_1\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$ и $z_2=r_2\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$ определяется по следующим формулам:

$$z_1\cdot z_2=(r_1\cdot r_2)[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

2. Возведение в n натуральную степень комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ производится по следующей формуле:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Если нужно возвести какое-либо комплексное число, заданное в алгебраической форме, в целую положительную степень, необходимо сначала его записать в тригонометрической форме, а затем воспользоваться формулой Муавра.

3. Для комплексных чисел $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ справедлива формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),$$

где $k = 0,1,2,\dots,(n-1), \varphi = \arg z$.

Из формулы следует, что все n значений, корня n-ой степени из числа z различны и они расположены на окружности радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат, и делят эту окружность на n равных частей, т.е. они являются вершинами вписанного правильного n-угольника в данную окружность. Отметим, что корень n-ой степени из какого-либо действительного числа также имеет n различных значений, при этом действительных среди них будет два, один или ни одного (в зависимости от знака числа и четности n).

Примеры

Пример 1. Умножить числа

$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\ z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

Решение.

$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\cdot[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4})] = 2\sqrt{2}(\cos\pi +$
$+i\sin\pi) = -2\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти отношения следующих комплексных чисел:

$z_1 = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$ и $z_2 = 4(\cos 90° + i\sin 90°)$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}[\cos(120° - 90°)$$

$$+ i\sin(120° - 90°)] = \frac{1}{2}(\cos 30° + +i\sin 30°) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+i}{4}.$$

Пример 3. Вычислить: $(\cos 15° + i\sin 15°)^3$.

Решение. По формуле Муавра:

$$(\cos 15° + i\sin 15°)^3 =$$

$$= \cos 45° + i\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Пример 4. Вычислить: $(\sqrt{3} - i)^6$.

Решение. Так как,

$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, следовательно:

$\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}), \left(\sqrt{3} - i\right)^6 = 2^6(\cos\pi - i\sin\pi) = -2^6.$

Пример 5. Вычислить: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

Решение. Представим комплексные числа в тригонометрической форме, а потом найдем их отношение, т.е.:

$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), \quad 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}),$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})}{(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})]}{\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

Тогда:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40} = \left(\sqrt{2}\right)^{40}\cdot\left(\cos\frac{40\cdot 7\pi}{12} + i\sin\frac{40\cdot 7\pi}{12}\right) =$$

$$= 2^{20}\cdot\left(\cos\frac{70\pi}{3} + i\sin\frac{70\pi}{3}\right) = -2^{20}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{20}\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{19}\cdot\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

Пример 6. Вычислить: $\sqrt[3]{1-i}$.

Решение. Представим $1 - i$ в тригонометрической форме:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда, по формуле Муавра имеем:

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{(8k-1)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k-1)\pi}{12}\right].$$

Отсюда, при $k = 0, 1, 2$ получим следующие значения:

$$\left(\sqrt[3]{1-i}\right)_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$\left(\sqrt[3]{1-i}\right)_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$\left(\sqrt[3]{1-i}\right)_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Пример 7. Вычислить: $\sqrt[4]{-i}$.

Решение. Так как, $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$, тогда по формуле Муавра имеем: $\sqrt[4]{-i}=\cos\frac{(4k+3)\pi}{8}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{8}$.

Отсюда при $k=0{,}1{,}2{,}3$ получим следующие значения:

$$\left(\sqrt[4]{-i}\right)_0=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8},\qquad \left(\sqrt[4]{-i}\right)_1=\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8},$$
$$\left(\sqrt[4]{-i}\right)_2=\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8},\quad \left(\sqrt[4]{-i}\right)_3=\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}.$$

Пример 8. Вычислить: $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$.

Решение. Так как,

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\qquad -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а также

$$\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

то по формуле Муавра имеем:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{(24k+1)\pi}{24}+i\sin\frac{(24k+1)\pi}{24}\right],(k=0{,}1).$$

Тогда:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}\right)_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right),$$
$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}\right)_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24}+i\sin\frac{25\pi}{24}\right).$$

Пример 9. Вычислить: $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Так как,

$$1=\cos 0+i\sin 0\quad\text{и}\quad \sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\ (k=0{,}1{,}2).$$

Следовательно, получим следующие значения:

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

Вычислить следующие степени.

35. $(2-2i)^7$;
36. $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$;
37. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$;
38. $(1+i)^{25}$;
39. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{15}$;
40. $(-i)^{102}$;
41. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$;
42. $[(1+\cos\alpha)+i\sin\alpha]^4$;
43. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$;
44. $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6$;
45. $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$;
46. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{10}$;
47. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$;
48. $\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$;
49. $\frac{(1-i)^{10}}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^4}$.

В задачах 50-61 найти все значения корней:

50. $\sqrt{i}$;
51. $\sqrt[3]{-1}$;
52. $\sqrt[3]{-1+i}$;
53. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$;
54. $\sqrt[3]{125}$;
55. $\sqrt[4]{-2i}$;
56. $\sqrt[6]{-1-i}$;
57. $\sqrt[4]{16-i16}$;
58. $\sqrt[6]{64}$;
59. $\sqrt[5]{-4+4i}$;
60. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;
61. $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{3}{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

1.1.3. Логарифм комплексного числа. Степень с произвольным комплексным показателем

1. Известно, что в области действительных чисел, существует логарифм только лишь положительных чисел, а в области комплексных чисел существует логарифм всех чисел (кроме нуля), т.е. в том числе и отрицательных чисел.

По определению, логарифм комплексного числа z, обозначается через $\operatorname{Ln} z$ и вычисляется по следующей формуле:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi + 2\mathrm{k}\pi i \ (\mathrm{k} = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \dots).$$

Здесь: $r = |z|, 0 < z < \infty,\ \varphi = \arg z\,, 0 \le \varphi \le 2\pi.$ Значение, соответствующее $k = 0$, называется главным значением логарифма, и обозначается через $\ln z$, т.е.: $\ln z = \ln r + i\varphi$.

Таким образом, логарифм комплексного числа пишется так:

$$\operatorname{Ln} z\ = \ln z\ +\ 2\mathrm{k}\pi i.$$

2. Степень с произвольным комплексным показателем α, для какого-либо комплексного числа z, определяется через следующее выражение:

$$W = z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\varphi + 2k\pi i)}\ (k = 0,1,2, \dots).$$

В частности, при $k = 0$ получается выражение, которое называется главным значением общей степени z^{α} и оно обозначается через w_0, т.е.: $W_0 = e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}$.

Следовательно, для того чтобы какое-либо комплексное число z возвести в комплексную степень α, сперва нужно вычислить его модуль и аргумент.

Стоит отметить, что степень с произвольным комплексным показателем, какого-либо комплексного числа имеют бесконечно много значений.

Примеры

Пример 1. Вычислить логарифм числа z = 2.

Решение.

Известно, что $2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$ и $r = 2, \ln r = \ln 2, \varphi = 0$ поэтому, можно записать: $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2\mathrm{k}\pi i$ $(\mathrm{k} = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \dots)$.

Пример 2. Найти $\operatorname{Ln}(-4)$.

Решение. Так как, $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$,

$$\varphi = \pi, r = 4, \ln r = \ln 4$$

Следовательно: $\operatorname{Ln}(-4) = \ln 4 + i\pi + 2\mathrm{k}\pi i$ или

$\operatorname{Ln}(-4) = \ln 4 + (2\mathrm{k} + 1)\pi i$ $(\mathrm{k} = 0; \pm 1;\ \pm 2; \dots)$.

Главное значение: $\ln(-4) = \ln 4 + i\pi$.

Пример 3. Вычислить логарифм $z = -2 + 2i$.

Решение. Так как, $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ и

$$\varphi = \arg(-2 + 2i) = arctg\left(-\frac{2}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому:
$\mathrm{Ln}(-2+2i)$
$$= \ln\left(2\sqrt{2}\right) + i\cdot\frac{3\pi}{4} + +2k\pi i =$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i =$$
$$= \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{8k+3}{4}\pi i, (k = 0,;\pm 1;\ \pm 2\ldots)$$

Пример 4. Вычислить: $(1+i)^{2i}$.

Решение. Исходя из очевидных выражений, как
$$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \varphi = \frac{\pi}{4}, r = \sqrt{2}$$
имеем следующее:
$$(1+i)^{2i} = e^{2i\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)}\cdot e^{2k\cdot 2i\pi i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}-i\ln 2\right)}\cdot e^{-4k\pi} =$$
$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)}\cdot e^{i\ln 2} = e^{\frac{(8k+1)\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)],$$
$(k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$.

Пример 5. Чему равно выражение i^i?

Решение. $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда:
$i^i = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{4})}\cdot e^{2ki\pi i} = +e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2}}$
$(k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$.

Пример 6. Чему равно выражение $(-1)^{\sqrt{2}}$?

Решение. $-1 = \cos\pi + i\sin\pi, r = 1$ и $\varphi = \pi$.

Следовательно: $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i\pi)}\cdot e^{2k\sqrt{2}\pi i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$.

Упражнения

Вычислить логарифмы следующих чисел.

62. $z = -i$;
63. $z = i$;
64. $z = -1-i$;
65. $z = 1+i$;
66. $z = 3-2i$;
67. $z = 1 - i\sqrt{3}$;
68. $z = 1-i$;
69. $z = 4i$;
70. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
71. $z = 3+7i$;
72. $z = \sqrt{3}+i$;
73. $z = -1$.

Вычислить данные степени.

74. $(-1)^{-i}$;
75. $(-1)^{-1+i}$;
76. i^{-i};
77. $i^{\frac{1}{1+i}}$;
78. $(1-i)^{-i}$;
79. $(-1+i\sqrt{3})^i$;

80. $(-1+i)^{1+i}$; 81. $(1+i)^{-i}$; 82. $(1-i)^{3-3i}$;
83. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{1+i}$; 84. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; 85. $(-3)^{i}$;
86. $(1+i)^{3+3i}$; 87. $\left(1-\frac{i}{2}\right)^{i}$; 88. $\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-i}$;
89. $(2i)^{i}$.

1.2. Введение в теорию функций комплексного переменного

1.2.1 Общие понятия

1. Пусть в плоскости комплексных чисел z рассматривается некоторое множество E. Множество точек, которые лежат в круге с достаточно малым радиусом ε и центром в точке z, называется «ε-окрестностью» точки z. Если все точки, лежащие в достаточно малой «ε-окрестности» точки z принадлежат к множеству E, то точку z называют внутренней точкой множества E. Если некоторые точки «ε-окрестности» точки z принадлежат к множеству E, а некоторые точки этой окрестности не принадлежат к множеству E, то точка z называется граничной точкой множества E.

На 2-ом рисунке изображена «ε-окрестность» точки z, а на 3-м рисунке изображены внутренняя точка z_1, граничная точка z_2 и внешняя точка z_3.

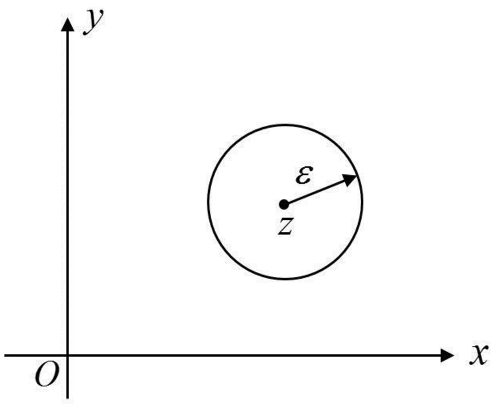

Рис. 2

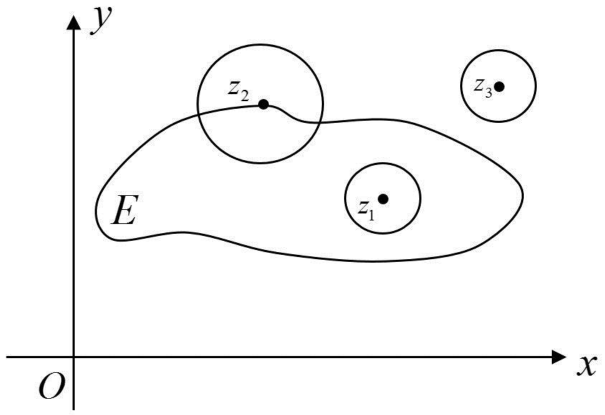

Рис. 3

Если каждая точка некоторого множества является внутренней точкой, то это множество называется открытым множеством. Некоторое множество E называется линейно связным, если любые две точки из E можно соединить непрерывной кривой, лежащей в E. Открытое линейно связное множество называется областью.

Есть еще понятие замкнутой области. Она определяется как обычная открытая область, но с добавленными к ней точками границы. Открытые области обозначаются буквами D, G и т.д., а соответствующие замкнутые области пишутся как, $\overline{D}$, $\bar{G}$ и т.д. Если область D ограничена одной замкнутой линией Γ без самопересечений, то она называется односвязной.

Если область D ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями Γ_1 и Γ_2, то она называется двусвязной. Пусть Γ_1 – внешняя линия, а также Γ_2 – внутренняя. Область является двусвязной и в том случае, если линия Γ_2 вырождается в точку или в дугу непрерывной линии. Аналогично могут быть определены трёхсвязные, четырёхсвязные и т.д. области.

На рисунке 4 изображена односвязная, на рисунке 5 изображена двусвязная, а на рис. 6 изображена трехсвязная области.

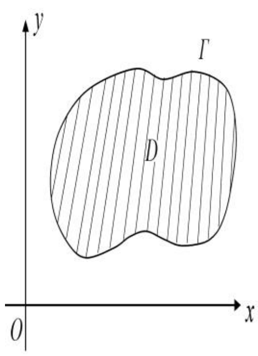

Рис. 4

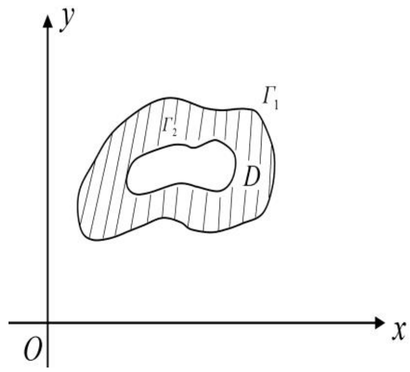

Рис. 5

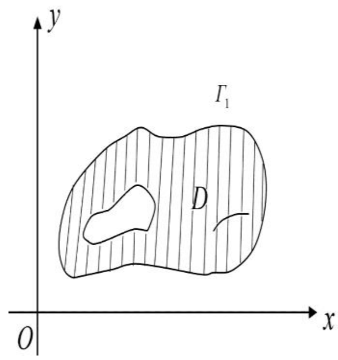

Рис. 6

Примеры

Пример 1. Какие множества точек плоскости определяют неравенство $\operatorname{Re} z \geq 1$?

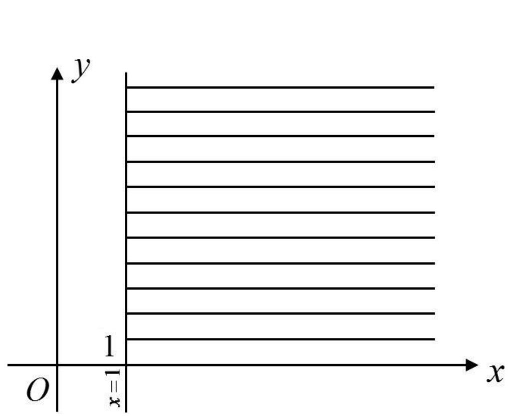

Рис. 7

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = x$ и $x \geq 1$. Поэтому, данное неравенство выражает множества таких точек плоскости, которые лежат на прямой $x = 1$ и правее от неё (см. рис. 7).

Пример 2. Какое множество точек плоскости определяет неравенство $\operatorname{Im} z^2 \geq 1$?

Решение. Исходя из $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ имеем: $xy \geq 2$. Данное неравенство выражает множество таких точек плоскости, которые лежат на гиперболе $xy = 2$ и на верхней, и на нижней части, проходящей через I и III координатные четверти (см. рис. 8).

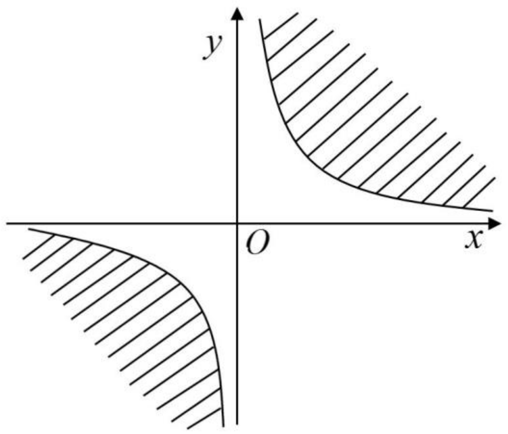

Рис. 8

Пример 3. Определить множество точек плоскости, которое задано неравенством:

$|z - 1| < |z - i|$.

Решение. $|z - 1| = |(x - 1) + iy| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ и $|z - i| = |x + i(y - 1)| = \sqrt{(y - 1)^2 + x^2}$,

Подставим в неравенство $(x - 1)^2 + y^2 < x^2 + (y - 1)^2$.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 < x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Отсюда имеем, что $y < x$. А это неравенство выражает собой множество таких точек плоскости, которые лежат ниже прямой $y = x$ (см. рис. 9).

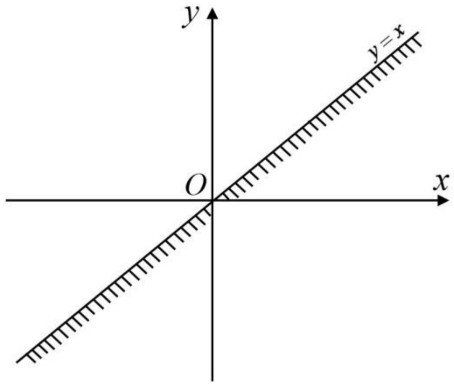

Рис. 9

Пример 4. Какую линию изображает уравнение Re $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$?

Решение. Имеем следующее:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Поэтому:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$$

или

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

А это уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке $C(2;0)$ (см. рис. 10).

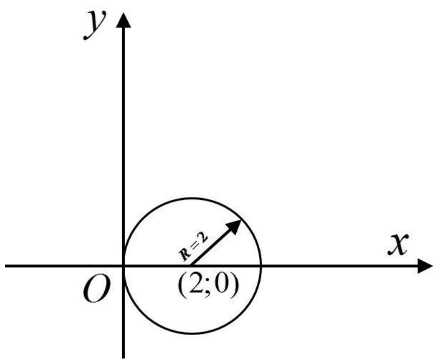

Рис. 10

Пример 5. Написать уравнение прямой $2x - 3y - 4 = 0$ в комплексном виде.

Решение. Подставляя выражения $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ и $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ в данное уравнение, преобразуем и получим ответ:

$(3-2i)z - (3+2i)\bar{z} + 8i = 0.$

Пример 6. Определить связность области, задаваемой неравенством

$|z-2| > |1-2\bar{z}|$.

Решение. Преобразовав данное неравенство получим следующее:

$$|(x-2)+iy| > |(1-2x)+2iy|$$

или

$(x-2)^2+y^2 > (1-2x)^2+4y^2$ или $x^2+y^2<1$.

А это неравенство определяет круг радиуса 1 и с центром в начале координат, поэтому это односвязная область (см. рис. 11).

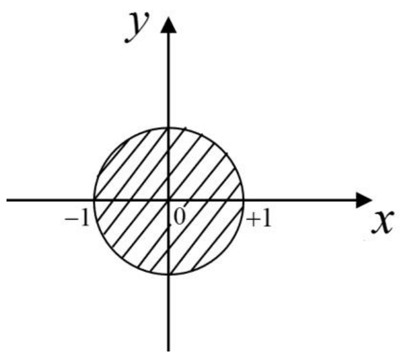

Рис. 11

Пример 7. Определить связность области, задаваемой неравенством $0 < \mathrm{Re}(2iz) < 1$.

Решение. $2iz = 2i(x+iy) = -2y+2ix$,
$\mathrm{Re}(2iz) = -2y$, $0 < -2y < 1$. Это неравенство изображает горизонтальную полосу, которая лежит между прямыми
$y = -\frac{1}{2}$ и $y = 0$ (см. рис. 12). Эти прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке расширенной комплексной плоскости, тогда границу области можно считать одной замкнутой кривой. Поэтому данная область односвязная.

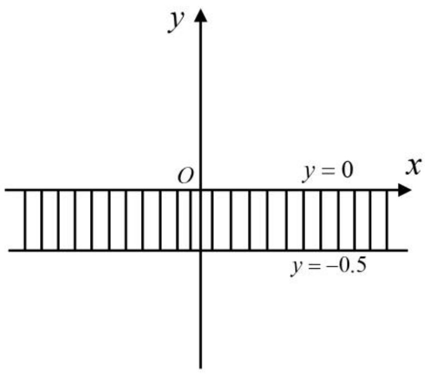

Рис. 12

Пример 8. Определить какую связность имеет область, заданная неравенством $1 < |z + 1| < 2$.

Решение. Если принять во внимание, что $|z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$, то данное неравенство равносильно неравенству $1 < (x + 1)^2 + y^2 < 4$. А это неравенство изображает кольцо, которое находится между окружностями радиусов 1 и 2, с центром в точке (–1;0). Это кольцо является двусвязной областью (см. рис. 13)

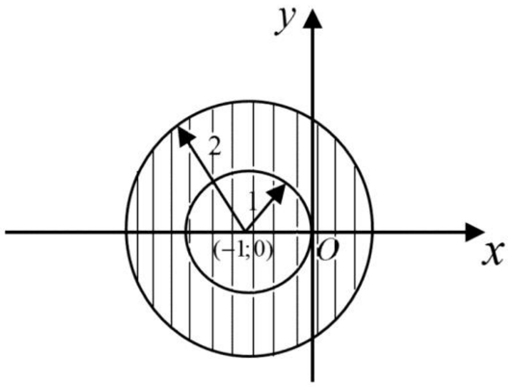

Рис. 13

Упражнения

Определить множества точек плоскости заданными следующими неравенствами.

90. $|z| < 2 + \mathrm{Im}\, z$;
91. $\mathrm{Im}\, z < 2$;
92. $-2 < \mathrm{Re}\, z < 1$;
93. $1 \le |z + 2 + i| \le 2$;
94. $|z| \ge 2$;
95. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$;
96. $\left|\frac{1}{z}\right| < 2, z \ne 0$;
97. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1$;
98. $Im\, \bar{z}^2 < 1$;
99. $|z - i| + |z + i| \le 4$;
100. $\mathrm{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$;
101. $|z| - \mathrm{Re}\bar{z} \le 0$.

Определить какую линию изображает каждое данное уравнение в нижеследующих примерах.

102. $|z| - \mathrm{Re}\, z = 12$;
103. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;
104. $Re \frac{1}{z} = 1$;
105. $|z - i| - |z + 2| = 2$;
106. $|z| - 4\mathrm{Im}\, z = 0$;
107. $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$;
108. $\mathrm{Im}\overline{(z^2 - \bar{z})} = 2$;
109. $\mathrm{Re}\bar{z}^2 = 1$;
110. $\mathrm{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$;
111. $\mathrm{Re}(1 + z) = |z|$;
112. $\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$;
113. $|z| - \mathrm{Re}\bar{z} \le 0$.

Написать в комплексном виде уравнения линий.

114. $y = x$ – уравнение прямой;

115. $x^2 - y^2 = 4$ – уравнение равносторонней гиперболы;
116. $x^2 + y^2 + 2x = 0$ – уравнение окружности;
117. $x - 2y - 1 = 0$ – уравнение прямой;
118. Уравнения координатных осей Ox и Oy.

В задачах 119-124 приведены неравенства. Для каждого неравенства начертить соответствующую область и определить их связности.

119. $\|z-2\| < 2$;	120. $2 < \|z - i\| < 3$;	121. $\|z+3\| > 1$;
122. $\mathrm{Im}(iz) < 1$;	123. $z\bar{z} + i(z-2) < 0$;	124. $Re\frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

Определение. *Пусть D – какая-либо область на комплексной плоскости. Если каждому $z \in D$ поставлено в соответствии одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на D определена функция комплексного переменного z.*

Кратко записывают: $w = f(z)$. Если каждому z соответствуют одно значение w, то функцию $f(z)$ называют однозначной; если более одного значения w – многозначной. Однозначную функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, где

$$z = x + iy,\ u(x;y) = \mathrm{Re}\, f(z), v(x;y) = \mathrm{Im}\, f(z).$$

Таким образом, функция $w = f(z)$ отображает точки, лежащие на комплексной плоскости z, к соответствующим точкам комплексной плоскости w. (см. рис. 14 а) и б)).

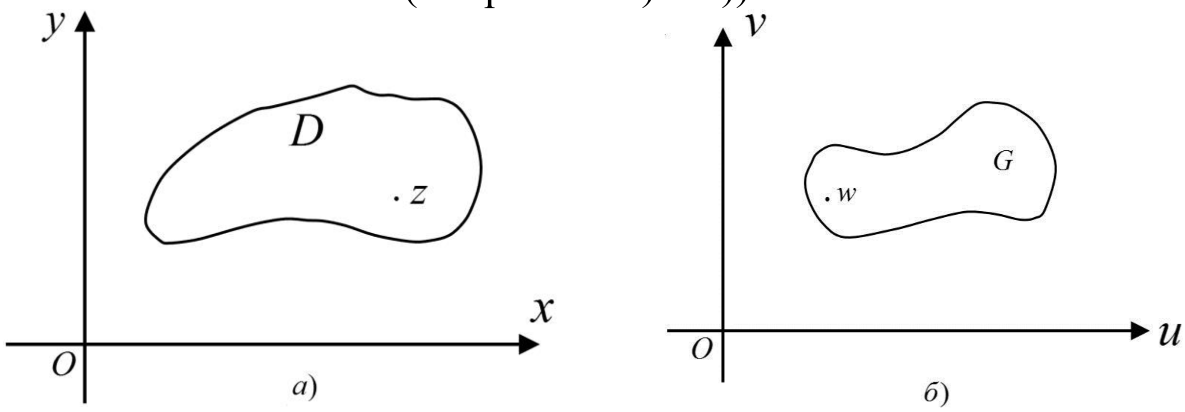

Рис. 14

Если некоторая кривая лежащая комплексной плоскости z задана своим уравнением $F(x;y) = 0$, то с помощью функции $w = f(z)$ можно определить уравнение образа этой кривой на комплексной плоскости w. Для этого достаточно выразить из уравнений $u = u(x;y), v = v(x;y)$ переменные x и y и подставить в уравнение $F(x;y) = 0$. В результате получим новое уравнение относительно неизвестных u и v: $\Phi(u;v) = 0$.

Примеры

Пример 1. Дана функция $w = z^2 + z$. Определить её значения при $z = 1 + i, z = 2 - i$ и $z = -1$.

Решение.

$$f(1+i) = (1+i)^2 + (1+i) = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i,$$

$$f(2-i) = (2-i)^2 + (2-i) = 4 - 4i - 1 + 2 - i = 5(1-i),$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Пример 2. Дана функция $w = z^2 + i$. Определить её действительную и мнимую части.

Решение.

Исходя из $z = x + iy$ и $w = u + iv$ получим следующее:

$$u + v = (x+iy)^2 + i = x^2 + 2ixy - y^2 + i = (x^2 - y^2) + i(1 + 2xy).$$

Следовательно: $u = x^2 - y^2, v = 1 + 2xy$.

Пример 3. Если $w = \frac{1+i\bar{z}}{1+z}$, найти u и v.

Решение. $u + v = (1 + i(x+iy))/(1 + i(x - iy)\,) = ((1 + y) - ix)/((1+x) + iy) \cdot ((1+y) - ix)/((1+x) - iy) = ((1 + x + y + 2xy) + i(x - y + x^2 - y^2)/((1+x)^2 + y^2\,)$

$$u = \frac{2xy + x + y + 1}{(1+x)^2 + y^2}, \quad v = \frac{x - y + x^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

Пример 4. С помощью функции $w = z^2$ найти уравнение образа окружности $|z| = 1$ на комплексной плоскости w.

Решение.

Уравнение окружности $|z| = 1$ запишем в виде $x^2 + y^2 = 1$. Нужно переменные x и y выразить из соотношения $w = z^2$. Запишем подробнее это соотношение: $u + iv = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, тогда, $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$. Нужно решить эту систему двух уравнений относительно x и y. Однако можно сделать по-другому. Учитывая, что кривая $|z| = 1$ задается уравнением $x^2 + y^2 = 1$, получим:

$$u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = 1.$$

Полученное уравнение $u^2+v^2=1$ или $|w|=1$ представляет собой на комплексной плоскости w уравнение окружности радиуса 1 и с центром в точке начала координат.

Пример 5. На какую линию функция $w=\frac{1}{z}$ отображает прямую $\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}z$?

Решение. Из $w=\frac{1}{z}$ имеем $u+iv=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$, а также, $u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Из равенства $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z), x=y$ подставляем в u и v. Тогда имеем: $u=\frac{1}{2x}, v=-\frac{1}{2x}$ или $u=-v$. Это уравнение биссектрис II-го и IV-го координатных углов.

Упражнения

Вычислить значения функций в указанных точках.

125. $f(z)=\frac{z}{\bar z}, z=1+i$;

126. $f(z)=(z+i)^2$, $z=7+6i$;

127. $f(z)=\frac{1}{z-i}, z=-1$;

128. $f(z)=\frac{z-i}{z+i}, z=1$

В следующих примерах выделить действительную и мнимую части функций.

129. $w=\bar z-iz^2$;

130. $w=\frac{\bar z}{z}$;

131. $w=\frac{z+i}{z-i}$;

132. $w=e^{-z}$;

133. $w=2z-1$;

134. $w=z^2+z$.

В следующих примерах некоторые линии заданы со своими уравнениями на комплексной плоскости z. Определить на какие линии они отображаются с помощью функции $w=\frac{1}{z}$ на комплексной плоскости w.

135. $|z|=\frac{1}{2}$;

136. $\arg z=\frac{3}{4}\pi$;

137. $|z|=z$;

138. С помощью функции $w=f(z)$ найти образ прямой $y=2x$ на комплексной плоскости w;

139. Найти отображение оси Ox с помощью функции $w=i+\frac{1}{z}$;

140. Найти отображения оси Oy с помощью функции $w=\frac{z+1}{z-1}$.

1.2.2. Сложная и обратная функции. Основные элементарные функции

1. Известно, что функция $w = f(z)$, отображала множество D в другое множество G. Если задана функция $\omega = \Phi(w)$ и она отображает множество G в другое множество Q, то функция $\omega = F(w) = \Phi[f(z)]$ называется сложной функцией от переменной z и с помощью этой функции множество D отображается в множество Q.

Например, если заданы функции $\omega = w^2$ и $w = \frac{1}{z}$, то $\omega = \frac{1}{z^2}$ является сложной функцией от z.

2. Как мы отметили выше, равенством $w = f(z)$ устанавливается закон соответствия между точками области D комплексной плоскости z и точками области G комплексной плоскости w.

Обратное соответствие каждой точке $w \in G$ ставится в соответствии одно или несколько точек z области D, таких, что $w = f(z)$. Если это возможно, что в области G задана (однозначная или многозначная) функция комплексной переменной w: $z = \varphi(w)$. Эта функция называется обратной для функции $w = f(z)$. Область G задания функции $\varphi(w)$, очевидно является областью значений функции f(z).

Если функции $\varphi(w)$, обратная однозначной функции f(z), заданной в области D, является однозначной функцией в области G, то говорят, что между областями D и G установлено взаимно однозначное соответствие.

В заключение отметим, что для того, чтобы определить обратную функцию $z = \varphi(w)$ к функции $w = f(z)$, достаточно решить уравнение $w = f(z)$ относительно z. Например, функции $w = \frac{1}{3}z^4$ и $z = \sqrt[4]{3w}$ являются взаимно обратными функциями.

3. Рассмотрим некоторые основные элементарные функции комплексной переменной:

1) $w = az + b$ линейная функция (a и b – комплексные числа);

2) $w = z^n$ –степенная функция(n ∈N);

3) $w = \sqrt[n]{z}$ – корень с натуральным показателем;

4) $w = \frac{az+b}{cz+d}$ – дробно-линейная функция (a, b, c, d –комплексные числа, а также, $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$);

5) $w = \frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$ – дробно-рациональная функция;

6) Показательная функция:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Для любых двух комплексных величин z_1 и z_2 справедливо равенство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Также, показательная функция является периодической функцией с периодом $2\pi i$, т.е.: $e^{z+2k\pi i} = e^z, k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

7) Тригонометрические функции:

$$w = \sin z,\ \ w = \cos z, w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

На основе формул Эйлера,

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$ и $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$, получим:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\ \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Отметим, что функция $\sin z$ и $\cos z$ определены для всех значений z и однозначны, а также периодические с периодом 2π, т.е.: $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \cos(z + 2\pi) = \cos z$.

Вообще, все известные из тригонометрии соотношения, связанные знаком равенства, имеют место и для тригонометрических функций комплексного аргумента. Однако, функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены в комплексной плоскости, а при $\forall c \in \mathbf{C}$ уравнение $\sin z = c$ (как и $\cos z = c$) имеет бесчисленное множество решений.

8) Гиперболические функции $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ определяются по тем же формулам, что и в действительной области:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Для этих функций справедливы формулы, имеющие место для гиперболических функций действительного аргумента.

Отметим формулы, связывающие гиперболические функции с тригонометрическими:

$$\sin z = -i\operatorname{sh} iz,\ \ \operatorname{sh} z = -i\sin iz,\ \ \cos z = \operatorname{ch} z,\ \ \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i\tanh iz,\ \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz,\ \ \operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} z,\ \ \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz.$$

9) Логарифмическая функция. Обратная функция к показательной функции e^2 называется логарифмической функцией и обозначается: $w = \operatorname{Ln} z$. Она многозначна, каждому z соответствует бесконечное множество значений, которые могут быть вычислены по формуле: $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, k \in \mathbf{Z}$. Каждое фиксированное k определяет одну из ветвей функции $\operatorname{Ln} z$.

Ветвь при $k = 0$ называют главной ветвью или главным значением логарифмической функции комплексного аргумента и обозначают $\ln z$. Таким образом,

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{и} \quad \operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$$

$$(k = 0; \pm1; \pm2; \dots).$$

Для логарифмических функций справедливы следующие выражения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \qquad \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

10) Обратные тригонометрические функции:

$w = \operatorname{Arcsin} z\,, w = \operatorname{Arccos} z\,, w = \operatorname{Arctg} z\,, w = \operatorname{Arcctg} z.$

Все эти функции многозначны и выражаются через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z + i}{z - i}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций комплексного аргумента обозначаются как

$$\arcsin z\,,\ \arccos z\,,\ \operatorname{arctg} z\,,\ \operatorname{arcctg} z,$$

они выражаются через главные значения соответствующих логарифмов.

11) Степенная функция с произвольным комплексным показателем – $w = z^a$ $(a \neq 0, a \in C)$.

Функция определяется формулой

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)},$$

где k пробегает целые действительные числа. Данная функция является бесконечнозначной и её главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

12) Общая показательная функция – $w = a^z$ ($a \neq 0 -$ произвольное комплексное число) Определяется равенством $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ и является многозначной функцией. Её главное значение равно

$a^z = e^{z \ln a}$. Если u и v два комплексных числа (причем $u \neq 0$), то можно записать: $u^v = e^{v \ln u}$.

Примеры

Пример 1. Определить значение модуля функции $w = \sin z$ при $z = \pi + i \ln(2+\sqrt{5})$.

Решение. $w = u + i = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \cdot \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$,

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y - \sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Тогда:

$$\left|\sin\left[\pi + i \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\right| = \sqrt{\sin^2 \pi + \operatorname{sh}^2\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right] =}$$

$$= \operatorname{sh}\left[\ln(2+\sqrt{5}\right] = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5}} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{5} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = \frac{4+\sqrt{5}+5-1}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{4(2+\sqrt{5})}{2(2+\sqrt{5})} = 2.$$

Из этого примера следует, что в области комплексных чисел функция синус по модулю может принимать значения больше единицы.

Пример 2. Вычислить главное значение аргумента функции $w = \operatorname{sh} z$ в точке $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$u + iv = \operatorname{sh}(x+iy) =$$

$$= -i \sin i(x+iy) = -i(\sin ix \cos y - \cos ix \sin y) =$$

$$= -i(i \operatorname{sh} x \cos y - \operatorname{ch} x \sin y) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y,$$

$u = \operatorname{sh} x \cos y, v = \operatorname{ch} x \sin y$

Из $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$ следует, что $x_0 = 1, y_0 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ch} x \sin y}{\operatorname{sh} x \cos y}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \infty, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{Ln} i$.

Решение. Известно, что $\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i \arg i + 2k\pi i$, а также, $\ln|i| = 0$ и $\arg i = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому можно записать:

$\operatorname{Ln} i = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = \frac{(4k+1)\pi i}{2}, (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$.

Пример 4. Вычислить $\mathrm{Arctg}\frac{i}{3}$.

Решение.

$$\mathrm{Arctg}\frac{i}{3} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i\frac{i}{3}}{1-i\frac{i}{3}} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Ln}\frac{1}{2} = \mathrm{Ln}\left|\frac{1}{2}\right| + i\arg\frac{1}{2} + 2k\pi i = -\ln 2 + 2k\pi i,$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{i}{3} = -\frac{i}{2}(-\ln 2 + 2k\pi i) = k\pi + \frac{i}{2}\ln 2\,, (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Упражнения

Вычислить модули и аргументы данных функций в указанных точках.

141. $w = \cos z\,, z_0 = \pi + \ln 2\,;$
142. $w = ze^z, z_0 = \pi i;$
143. $w = \mathrm{ch}\, z\,, z_0 = 2 - 2i;$
144. $w = \mathrm{tg}\, z\,, z_0 = 1 + i;$
145. $w = \mathrm{sh}\, z\,, z_0 = -2 + i;$
146. $w = \sin z\,, z_0 = 2 - i.$

Вычислить следующие выражения:

147. $e^{\frac{\pi}{4}i}$;
148. $\sin \pi i$;
149. $\mathrm{Arccos}\, 2$;
150. $\mathrm{Arcsin}\, i$;
151. $\mathrm{Arcctg}(-i)$;
153. $\mathrm{Arctg}\, i$;
154. $\mathrm{Arccos}(-i)$;
155. $\mathrm{Arcctg}(-2i)$.

1.2.3. Последовательность комплексных чисел. Предел и непрерывность функций комплексного переменного

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Комплексные числа z_n, образующие последовательность $\{z_n\}$, называются её элементами.

Определение 1. *Комплексное число* a *называется пределом последовательности* $\{z_n\}$, *если для любого положительного числа ε можно указать такой номер* $n \in \mathbf{N}(\varepsilon)$, *начиная с которого все элементы* z_n *этой последовательности удовлетворяют неравенству* $|z_n - a| < \varepsilon$ *при* $n \geq \mathbf{N}(\varepsilon)$. *Последовательность* $\{z_n\}$ *имеющая предел* a , *называется сходящейся к числу* a, *что записывается в виде* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

Поскольку каждое комплексное число $z_n = x_n + iy_n$ характеризуется парой действительных чисел x_n и y_n, то последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, составленные соответственно из действительных и мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$. Поэтому, необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\}$ является сходимость последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Определение 2. *Последовательность* $\{z_n\}$ *называется ограниченной, если существует такое положительное число* M, *что для всех элементов* z_n *этой последовательности имеет место неравенство* $|z_n| < M$. *Любая сходящаяся последовательность – всегда ограниченная последовательность.*

Все свойства сходящихся последовательностей в области действительных чисел имеют место также и для сходящихся последовательностей в области комплексных чисел.

Имеет место следующее свойство: если для последовательности $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, существуют пределы $\lim_{n\to\infty} r_n = r_0$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

Определение 3. *Если дана последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *такая, что для любого достаточно большего положительного числа* M *найдётся номер* N, *начиная с которого члены последовательности удовлетворяют условию* $|z_n| > M$ *при* $n \geq N$, *то говорят, что последовательность* $\{z_n\}$ *стремится к бесконечно удалённой точке (или бесконечности) и пишется в виде* $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Отметим, что для последовательностей комплексных чисел также имеет место такой замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности некоторой точки $z = z_0$.

Определение 4. *Если для всякого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что из неравенства* $|z - z_0| < \delta$ *следует неравенство* $|f(z) - A| < \varepsilon$, *то говорят, что функция* $w = f(z)$ *при* $z \to z_0$ *имеет предел* A. *В этом случае пишут* $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$.

Определение 5. *Если для всякого числа* $R > 0$ *найдётся такое число* $\delta = \delta(R) > 0$, *что из неравенства* $|z - z_0| < \delta$ *следует нера-*

венство $|f(z)| > R$, то говорят, что функция $w = f(z)$, при $z \to z_0$ имеет бесконечный предел и пишут$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Так как, $z_0 = x_0 + iy_0$ и $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, то существование предела $\lim_{z\to z_0} f(z)$ равносильно к существованиям пределов

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y)$$

и

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y),$$

т.е.:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y) + i \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y).$$

Если $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ и $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, то верны следующие выражения:

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B\,.$$

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B.$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}.\ \ \mathrm{B} \neq 0$$

Определение 6. *Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке $z = z_0$, если* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно непрерывности функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$.

Определение 7. *Функция $w = f(z)$, непрерывная в каждой точке, некоторой области D называется непрерывной в этой области.*

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в области D, то их сумма, разность и произведение, также являются непрерывными функциями в области D. В таком случае $\frac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z) \neq 0)$ тоже непрерывная функция в области D.

Определение 8. *Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 и функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0 = f(z_0)$, то функция $F[f(z)]$ тоже непрерывна в точке z_0 (другими словами, сложная функция $F[f(z)]$ непрерывна в точке z_0).*

Необходимо отметить, что существуют и другие определения предела и непрерывности функции, читатель может найти их в других источниках.

Примеры

Пример 1. Найти предел $\{z_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot e^{i\frac{\pi}{n}}\right\}$.

Решение.

$$z_n = x_n + iy_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

и отсюда получим: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$ и $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$.

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}\right] = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\right] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot e^{i\frac{\pi}{n}}\right] = 1.$$

Пример 2. Найти предел $\{z_n\} = \frac{n+2i}{3n+7i}$.

Решение.

Здесь: $x_n = \frac{3n^2+14}{9n^2+49}$ и $y_n = -i\frac{n}{9n^2+49}$, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2i}{3n+7i}\right) = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Найти предел $\frac{z^2+3iz-2}{z+i}$ в точке $z = -i$.

Решение.

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+3iz-2}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z+2i)}{z+i} = i.$$

Пример 4. Выяснить, непрерывна ли функция $w = |z|$ в точке $z_0 = 3-4i$?

Решение. очевидно, что данная функция определена в точке $z_0 = 3-4i$ и её предел в этой точке совпадает значением функции, т.е.:

$$\lim_{z\to 3-4i} w = \lim_{z\to 3-4i}|z| = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -4}}\sqrt{x^2+y^2} = 5, w(3-yi) = 5.$$

Поэтому она непрерывна в указанной точке.

Упражнения

Даны последовательности комплексных чисел. Найти их пределы.

156. $\{z_n\} = \left\{\frac{i^n}{n}\right\}$; 157. $\{z_n\} = \left\{\frac{e^{in}}{n^2}\right\}$; 158. $\{z_n\} = \left\{\frac{\operatorname{sh} in}{n}\right\}$;

159. $\{z_n\} = \left\{e^{-n\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}\right\}$; 160. $\{z_n\} = \left\{n \sin\frac{i}{n}\right\}$; 161. $\{z_n\} = \left\{\left(3 - \frac{i}{n}\right)^n\right\}$.

Вычислить следующие данные пределы:

162. $\lim_{z\to 1} \frac{2z+1}{z+2}$; 163. $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$; 164. $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$;

165. $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+1}$; 166. $\lim\limits_{z\to -2i} \frac{z^2+2iz}{z+2i}$; 167. $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}} \frac{z^3+i}{z-i}$;

168. $\lim\limits_{z\to 1} \frac{\sin(z-1)}{\operatorname{sh}(z-1)}$; 169. $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} z$.

Показать, что данные функции непрерывны при любом значении z.

170. $w = z^2$; 171. $w = \bar{z} + 2$; 172. $w = \operatorname{Re}(z)$;

173. $w = \operatorname{Im}(z)$; 174. $w = z \cdot \bar{z}$; 175. $w = z^2 \cdot \bar{z}$.

1.3. Дифференциальное исчисление функции комплексной переменной

1.3.1. Производная. Условие Коши-Римана. Понятие аналитической функции

1. Пусть в области D комплексной плоскости z задана однозначная функция $w = f(z)$.

Определение 1. *Если в любой точке* $z \in D$ *существует конечный предел* $\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, *то этот предел называется производной функции* $w = f(z)$ *в точке* z *и обозначается* $f'(z)$.

Определение 2. *Если функция* $w = f(z)$, *имеет производную в точке* $z \in D$, *то она называется дифференцируемой в этой точке.*

2. Если функция $w = f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$, то в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, причём эти производные связаны условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называются условиями Коши-Римана, и они являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Обратно, если частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны в точке $z = x + iy$ и условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполнены, то функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$. Производная функции $f(z)$ выражается через частные производные функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$ по формулам:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Определение 3. *Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в произвольной точке z, если она непрерывно дифференцируема в самой точке и в точках её некоторой окрестности. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитическая в области в каждой точке этой области.*

Основные правила дифференцирования функций действительного аргумента останутся неизменными и для функций комплексного аргумента. Также, производные основных элементарных функций комплексного аргумента находятся по тем же формулам, что и для действительного аргумента и приведены ниже:

1. $C = 0$, **2.** $z' = 0$, **3.** $(z^n)' = nz^{n-1}$,

4. $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$, **5.** $(z^{-n})' = -\frac{n}{z^{n+1}}$, $z \neq 0$, **6.** $\left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$,

7. $(e^z)' = e^z$, **8.** $(e^{mz})' = me^{mz}$, **9.** $(\ln z)' = \frac{1}{z}, z \neq 0$,

10. $(\sin z)' = \cos z$, **11.** $(\cos z)' = -\sin z$, **12.** $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{cos^2 z}$,

13. $(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{sin^2 z}$, **14.** $(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, **15.** $(\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$,

16. $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$, **17.** $(\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}$, **18.** $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$,

19. $(\operatorname{ch} z)' = -\operatorname{sh} z$, **20.** $(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{ch^2 z}$, **21.** $(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{sh^2 z}$.

Примеры

Пример 1. Показать, что функция $w = e^{2z}$ является аналитической и вычислить её производную.

Решение.

$$u + iv = e^{2(x+iy)} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y),$$
$$u(x;y) = e^{2x}\cos 2y\,, v(x;y) = e^{2x}\sin 2y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y\,, \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y\,, \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y.$$

Очевидно, что во всей комплексной плоскости выполняются условия Коши-Римана. Следовательно, данная функция аналитическая.

$$(e^{2z})' = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) =$$
$$= 2e^{2x}\cdot e^{2iy} = 2e^{2(x+iy)} = 2e^{2z}.$$

Пример 2. Проверить, что функция $w = z^3$ аналитическая, а затем вычислить её производную.

Решение.

$$u + iv = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3),$$
$$u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Условия Коши-Римана выполняются, функция аналитическая и её производная:

$$(z^3)' = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

Пример 3. Дана функция $w = iz$. Проверить, что она аналитическая функция и вычислить её производную.

Решение.

$$u + iv = i(x+iy) = -y + ix, u = -y, v = x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Очевидно, что выполняются условия Коши-Римана, данная функция аналитическая и её производная равна: $(iz)' = o + i = i$.

Пример 4. Аналитическая ли функция $w = |z-1|^2$?
Решение.

$$|z-1| = |x+iy-1| = |(x-1)+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2},$$
$$|z-1|^2 = (x-1)^2+y^2, U = (x-1)^2+y^2, V = 0.$$

Очевидно, что условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, исходная функция не аналитическая.

Упражнения

Выяснить, какие функции являются аналитическими, и если это так, то найти их производные.

176. $w = z^2\bar{z}$;	177. $w = z^2e^z$;	178. $w = \|z\|\bar{z}$;
179. $w = e^{z^2}$;	180. $w = \|z\|\mathrm{Re}(\bar{z})$;	181. $w = \sin 2z - i$;
182. $w = \bar{z}\mathrm{Re}(z)$;	183. $w = \bar{z}Imz$;	184. $\|z\|\mathrm{Im}(z)$;
185. $w = z\bar{z}$;	186. $w = ze^z$;	187. $w = e^{iz}$;
188. $w = 2\cos 2z + 1$;	189. $w = 2\,\mathrm{sh}\,z - z^2$;	190. $w = iz^2 + 3z$.

1.3.2. Некоторые свойства аналитических функций. Гармонические функции

1. Ряд свойств дифференцируемых функций действительного аргумента останется неизменным и дли аналитических функций. Например, если функция $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими функциями в некоторой области D, то их алгебраическая сумма и произведение также являются аналитическими функциями в той же области D. А их отношение – аналитической функцией в тех точках области D, там, где $g(z) \neq 0$. В наряду с этими всегда справедливы следующие соотношения:

$$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$
$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}. \quad (\,g(z) \neq 0)$$

2. Если в некоторой неизвестной аналитической функции $f(z)$ задана только лишб её действительная или мнимая часть, то можно будет найти её при данных действительных условиях. При этом используются условия Коши-Римана.

Примеры

Пример 1. Найти производную функции $w = ze^{-z}$.

Решение. Так как, и z, и e^{-z} являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости, то данная функция также является аналитической функцией в исходной плоскости. Следовательно:

$$w' = (z \cdot e^{-z})' = e^{-z} + ze^{-z}(-1) = e^{-z}(1 - z).$$

Пример 2. Дана функция: $w = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$. Найти её производную.

Решение. Данная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, кроме её точек $z = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi, (k \in z)$. Её производная вычисляется так:

$$w' = \frac{(-\sin z)(\cos z - \sin z) - (-\cos z - \sin z)\cos z}{(\cos z - \sin z)^2} = \frac{1}{1 - \sin z}.$$

Пример 3. Дана действительная часть $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ аналитической функции $f(z)$ и дополнительное условие $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi$. Найти эту функцию.

Решение. Находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Так как, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (в силу одного из условий Коши-Римана), то $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Интегрируя, находим $v(x; y) = \int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция (пока неизвестная).

Используем другое условие Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x)$, то $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \varphi'(x)$. Но из условия задачи находим, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Следовательно, $-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \varphi'(x) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\varphi'(x) == 0$, $\varphi(x) = C$, откуда

$$v(x; y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C \text{ и}$$

$f(z) = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + iC = \frac{1}{z} + iC$ $(C = const)$. используя дополнительное условие $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi$, находим, что

$C = 0$. Итак, $f(z) = \frac{1}{z}$.

Пример 4. Дана мнимая часть $v(x;y) = -2\sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$ и дополнительное условие $f(0) = 2$ аналитической функции $f(z)$. Найти эту функцию.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -4\cos 2x \operatorname{sh} 2y\,, \frac{\partial v}{\partial y} = -4\sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1.$$

Согласно первому условию Коши-Римана, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4\sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1$$

$$\text{или } u = -4\int \sin 2x \operatorname{ch} 2y\, dx + \int dx + \varphi(y) =$$

$$= 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4\cos 2x \operatorname{sh} 2y + \varphi'(y).$$

Используя второе условие Коши-Римана имеем, что $4\cos 2x \operatorname{sh} 2y + \varphi'(y) = 4\cos 2x \operatorname{sh} 2y$ и $\varphi'(y) = 0\,, \varphi(y) = C$.

Тогда $u = 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + C, f(z) = u + iv = (x + iy) +$ $+2(\cos 2x \operatorname{ch} 2y - i\sin 2x \operatorname{sh} 2y) + C$. Если здесь подставим $\operatorname{ch} 2y = \cos 2iy$ и $i\operatorname{sh} 2y = \sin 2iy$, то получим:

$f(z) = z + 2\cos(2x - 2iy) + C = z + 2\cos 2z + C$.

По данному дополнительному условию имеем $C = 0$. Итак, $f(z) = z + 2\cos 2z$.

Пример 5. Если мнимая часть аналитической функции $f(z)$, $v = x + y$ и $f(i) = -1$, требуется найти $f(z)$.

Решение. Так как, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 1$, а также, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$, то

$u = x + \varphi(y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'((y)$.

Тогда: $\varphi'(y) = -1$ или $\varphi(y) = -y + C$. Следовательно: $f(z) = u + iV = x - y + C + ix + iy = (x + iy) + i(x + iy) + C =$ $z + iz + C = z(1 + i) + C$. Используя дополнительное условие, получим: $f(z) = z(1 + i) - i$.

Пример 6. Дана действительная часть $u = x^2 - y^2 + xy$ аналитической функции и дано условие $f(-1) = 1$. Найти функцию $f(z)$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, из $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (первое условие Коши-Римана) имеем, что $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$, из второго условия Коши-Римана, имея в виду $\frac{\partial u}{\partial x} = -2y + x$, получим:

$$-2y + x = -2y - \varphi'(x) \text{ или } \varphi'(x) = -x, \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$v = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C.$ Итак, $f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + xy +$ $+2ixy + i\frac{y^2}{2} - i\frac{x^2}{2} + iC = (x^2 + 2ixy - y^2) - \frac{i}{2}(x^2 + 2ixy - -y^2) +$ $+iC = (x + iy)^2\left(1 - \frac{i}{2}\right) + iC = \frac{2-i}{2}z^2 + iC.$

Если иметь в виду, что здесь $C = 1 + 4i$, то наконец получим: $f(z) = \frac{2-i}{2}z^2 + (i - 4).$

2. Определение. *Функция $\varphi(x;y)$ определённая в некоторой области D называется гармонической в D,если все её вторые частные производные непрерывны в D и* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ *(уравнение Лапласа).*

Если функция $w = f(z)$ является аналитической в некоторой области D, то действительная и мнимая части $f(z)$, т.е. $u(x;y), v(x;y)$ являются гармоническими функциями. Но обратное утверждение не всегда верно, т.е. хоть и две произвольные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются гармоническими функциями по отдельности, но функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ может и не быть аналитической функцией. Чтобы эта функция являлась аналитической, гармонические функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ должны удовлетворять и условиям Коши-Римана. По определению, если две гармонические функции удовлетворяют условиям Коши-Римана, то они называются самосопряжёнными гармоническими функциями.

Примеры

Пример 1. Проверить, гармоническая ли функция

$$u(x;y) = x^3 - 3xy^2?$$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Итак – функция гармоническая.

Пример 2. Дана функция $\mathrm{v}(x;y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Проверить её на гармоничность.

Решение. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Функция гармоническая.

Пример 3. Гармоническая ли функция $u=\ln(x^2+y^2)$?

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Функция гармоническая.

Пример 4. Дана функция $u=x^2-y^2+2xy$.
Проверить, является ли она действительной частью аналитической функции $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$?

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\frac{\partial u}{\partial y}=2y+2x,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Очевидно, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$. Итак, данная функция гармоническая и она является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$.

Пример 5. Дана функция
$v(x;y)=2(x^2+y^2)+3x+4y+2$. Является ли она мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$?

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x+3,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4,\frac{\partial v}{\partial y}=4y+4,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=4,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=4+4=8\neq 0.$$

Следовательно, данная функция не является мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$.

Пример 6. Проверить, являются ли функции $u=x^2-y^2$ и $v=-2xy$ самосопряженными гармоническими функциями?

Решение. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Данные функции – гармонические. Проверим, для них выполнения условий Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=-2y, \frac{\partial v}{\partial x}=-2y, \frac{\partial v}{\partial y}=-2x$. Очевидно, что условия Коши-Римана не выполняются. Поэтому исходные функции не являются самосопряженными гармоническими функциями.

Пример 7. Доказать, что данные функции $u=e^x\cos y+1$ и $v=e^x\sin y+1$ являются самосопряженными гармоническими функциями.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^x\sin y,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^x\sin y.$$

Из этих выражений видно, что исходные функции являются самосопряженными гармоническими функциями.

Упражнения

В задачах 191-196 продифференцировать данные функции, используя таблицу производных основных элементарных функций, а также свойства аналитических функций.

191. $w=\frac{1}{z+i}$; 192. $w=e^{\mathrm{ch}z}$; 193. $w=\frac{e^z}{z}$;

194. $w=\frac{z\cos z}{1+z^2}$; 195. $w=\frac{1}{\mathrm{tg}z+\mathrm{ctg}z}$; 196. $w=\mathrm{th}(z)$

В задачах 197-204 найти аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если известны ее действительная или мнимая части, и даны дополнительные условия.

197. $u=x^2-y^2+2y$, $f(i)=2i-1$

198. $v=2(\mathrm{ch}x\cdot\sin y-xy)$, $f(0)=0$

199. $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, (x > 0)$
$f(1) = 0$

200. $u = x^2 - y^2 + 2y,$
$f(i) = 2i - 1$

201. $u = 2\sin x \cdot \operatorname{ch}(y - x)$
$f(0) = 0$

202. $v = 2(2\operatorname{sh}x \cdot \sin y + xy)$
$f(0) = 3$

203. $u = 2e^x \cos y$
$f(0) = 2$

204. $v = 2x + 2xy$
$f(-i) = 2.$

В задачах 205-210 показать, что данные функции являются гармоническими функциями.

205. $u = x^2 + 2x - y^2$;
206. $u = 2e^x \cos y$;
207. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$;
208. $u = 2xy + 3$;
209. $u = x^2 + xy - y^2$;
210. $u = xy$.

В задачах 211-216 выяснить, какие из данных функций являются или действительной, или мнимой частями аналитической функции.

211. $v = \frac{(x^2+1)y^2}{2}$;
212. $v = \ln(x^2 + y^2)$;
213. $u = x^y$;
214. $u = 3x^2y - y^3$;
215. $u = 2xy - 2x$;
216. $v = e^{1+y}\cos x$.

В задачах 217-222 приведены пары гармонических функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$. Определить среди них самосопряженные гармонические функции.

217. $u = 3(x^2 - y^2)$,
$v = 3x^2y - y^3$;

218. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{u}{x^2 + y^2}$;

219. $u = x^2 - y^2 + 2y$,
$v = 2x(u - 1)$;

220. $u = x, v = -y$;

221. $u = e^x \cos(y + 1)$,
$v = e^x \sin(y + 1)$;

222. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^2$;
$v = 4xy(x^2 - y^{2)}$.

1.4. Интегральное исчисление функций комплексного переменного

1.4.1. Интеграл по кривой и методы его вычисления. Формула Ньютона-Лейбница

1. Предположим, что в односвязной области D дана непрерывная функция $f(z)$, а Γ – произвольная гладкая кривая, лежащая в области D. Рассмотрим дугу кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z. Разделим эту дугу на n частей произвольными точками $z_0, z_1, z_2, \dots z_{n-1} z_n = z$, расположенными последовательно на линии Г. Составим сумму

$$S_n = f(z_0)\cdot \Delta z_0 + f(z_1)\cdot \Delta z_1 + \cdots + f(z_{n-1})\cdot \Delta z_{n-1}\,,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Пусть λ – наибольшая из величин $|\Delta z_k|$. Если $\lambda \to 0$ и сумма S_n стремится к определенному пределу, то этот предел называется интегралом функции $f(z)$ по дуге кривой Г, соединяющей точки z_0 и z, т.е.

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}[f(z_0)\cdot \Delta z_0 + f(z_1)\cdot \Delta z_1 + \cdots + f(z_{n-1})\cdot \Delta z_{n-1}].$$

Если $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$, то интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ сводится к двум криволинейным интегралам от действительных функций по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Пусть Г – кусочно-гладкая линия, состоящая из гладких частей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$; тогда интеграл по этой линии можно определить как сумму интегралов по отдельным кускам:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_m} f(z)dz.$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то значение интеграла $\int_{\Gamma} f(z)dz$, взятого вдоль произвольной кусочно гладкой линии Г, принадлежащей области D, не зависит от линии Г, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии.

Если Г – замкнутая кривая, то интеграл от функции $f(z)$ по этой кривой обозначается как $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ и Г называется контуром интегрирования.

2. Существуют различные способы вычисления интегралов. Рассмотрим некоторые из них.

а) Пусть кривая Г задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t)(t_0 \le t \le t_1),$$

и функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_0; t_1]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)] \cdot z'(t)dt, \text{здесь:} \, z(t) = x(t) + iy(t).$$

б) Если линия Г задана уравнением $y = f(x)$, то вычисление интеграла тоже сводится к вычислению определенного интеграла.

в) Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, а точки z_0 и z_1принадлежат к области D, то здесь также верна формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \phi(z_1) - \phi(z_0) = \phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\phi(z)$ – какая-либо первообразная функция по отношению к $f(z)$.

г) Если функция $f(z)$ и $\varphi(\mathrm{z})$ являются аналитическими в односвязной области D, а z_0 и z_1 произвольные точки, лежащие в этой области, то здесь также будет справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = [f(z) \cdot \varphi(z) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z) \cdot f'(z)dz.$$

д) В интеграле функции комплексного переменного тоже можно применить метод подстановки, который выполняется точно также, как и в интеграле функции действительного аргумента. В частности, если Г является окружностью с центром в точке $\alpha = a + ib$, то удобно ввести подстановку как $z - \alpha = ze^{i\varphi}$. А также рекомендуется такая подстановка, когда Г является лучом, выходящим из этой точки α. (здесь: $\varphi -$ постоянная, а $0 \leq r < \infty$).

3. Известно, что каждое значение некоторой многозначной функции называется ее ветвью.

Например, функция $w = f(z) = \sqrt{z^2 - 1} -$ двузначная. Функции $w_1 = \sqrt{z^2 - 1}$и $w_2 = -\sqrt{z^2 - 1}$ являются ее ветвями. При вычислении интегралов от многозначной функции выделяется ее одна ветвь и по ней ведется интегрирование. Чтобы выделить нужную ветвь, дополнительно задается соответствующее условие.

Примеры

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \overline{z} dz,$$

где Г – отрезок прямой $y = x$, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + i$.

Решение.

$$I = \int_{\Gamma} \overline{z} dz = \int_{\Gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_0^1 (x - ix)(dx + idx) =$$

$$= (1 + i)(1 - i) \int_0^1 x dx = 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int_{\Gamma} \mathrm{Re} z dz$, где Г – отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 2 + 3i$.

Решение. Очевидно, что параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и точки $(2; 3)$ имеют вид: $x = 2t, y = 3t$. Тогда,

$$dz = dx + idy = 2dt + i3dt = (2 + 3i)dt, \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Тогда получим:

$$I = \int_0^1 2t * (2 + 3i)dt = 2(2 + 3i) * \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 2 + 3i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_{\Gamma} (y + ix)dz$, где Г – ломаная ОАВ с вершинами в точках $z_o = 0, z_A = i, z_B = 1 + i$.

Решение. На отрезке ОА: $x = 0, dx = 0,\ 0 \leq y \leq 1$, а на отрезке АВ: $y = 1, dy = 0,\ 0 \leq x \leq 1$.Тогда, применяя свойство линейности интеграла получим:

$$I = \int_{OA}(y + ix)(dx + idy) + \int_{AB}(y + ix)(dx + idy) = \int_0^1 (1 + ix)dx = i\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 + i\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + i.$$

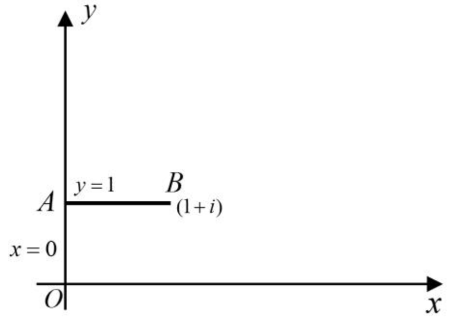

Рис. 15

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int_Г (z \cdot \overline{z} \cdot z^2)dz$,где Г-верхняя половина окружности $|z| = 1. (0 \le argz \le \pi)$.

Решение. Введем постановку: $z = e^{i\varphi}$.

Так как $dz = ie^{i\varphi}d\varphi, z \cdot \overline{z} = 1$ и $z^2 = e^{2i\varphi}(0 \le \varphi \le \pi)$, то

$$I = \int_Г (z \cdot \overline{z} \cdot z^2)dz = i\int_0^{\pi}(1 + e^{2i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{\pi}(e^{i\varphi} + e^{3i\varphi})d\varphi$$

$$= \left[e^{i\varphi} + \frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right]_0^{\pi} = e^{i\pi} - 1 + \frac{1}{3}e^{3i\pi} - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \oint_Г |z| \cdot \overline{z}dz$, где Г – замкнутый контур, образованный с верхней частью окружности $|z| = 1$ и отрезком $-1 \le x \le +1$ $(y = 0)$.

Решение. Запишем уравнение дуги окружности: $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$, тогда

$$I = \oint_Г |z| \cdot \overline{z}dz$$

$$= \oint_Г \sqrt{x^2 + y^2}(x - iy)(dx + idy)$$

$$= \int_0^{\pi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)(-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi$$

$$+ \int_{-1}^{+1} x^2dx = i\int_0^{\pi} d\varphi + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{+1} = i\pi + \frac{2}{3}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \int_0^i z^2dz$.

Решение. Подынтегральная функция является аналитической. Используя формулу Ньютона-Лейбница, находим: $I = \int_0^i z^2dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^i = \frac{i^3}{3} = -\frac{i}{3}$.

Пример 7. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2i} zsin2zdz$.

Решение. Так как подынтегральные функции являются аналитическими, используя метод интегрирования по частям, находим:

$$I = \int_0^{2i} z\sin 2z dz = \begin{vmatrix} u = z, du = dz \\ dv = \sin 2z dz \\ v = -\frac{1}{2}cos2z \end{vmatrix} = -\frac{z}{2}\cos 2z \Big|_0^{2i} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2i} \cos 2z dz = \quad = -i\cos 4i + \frac{1}{4}\sin 2z \Big|_0^{2i} = -i\cos 4i +$$

$$+\frac{1}{4}sin4i = -i(\cos 4i + \sin 4i) - \frac{3}{4}\sin 4i = -ie^{-4} - \frac{3}{4}i\text{sh}4 =$$

$$-i\left(e^{-4} + \frac{3}{4}\text{sh}4\right).$$

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$,где Г – верхняя часть окружности $|z| = 1$. Взять такую ветвь подынтегральной функции, чтобы выполнялось условие $\sqrt{1} = -1$.

Решение. Если положим, что $z = r \cdot e^{i\varphi}$ $(r = 1, 0 \leq \varphi \leq \pi)$, то из условия $\sqrt{1} = -1$, имеем: $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$. Тогда:

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}} = i\int_0^\pi e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}d\varphi =$$

$$= 2e^{i(\frac{\varphi}{2}-\pi)} \Big|_0^\pi 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-\pi i}\right) = 2(1 - i).$$

Пример 9. Вычислить интеграл $I = \int_{-1}^{i} \frac{\cos z dz}{\sqrt{\sin z}}$. Взять ту ветвь двузначной функции $\frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}}$, чтобы выполнялось условие $\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}$.

Решение.

$$I = \int_{-1}^{i} (\sin z)^{-\frac{1}{2}} d(\sin z) = 2\sqrt{\sin z} \Big|_{-1}^{i} = 2\left(\sqrt{\sin i} - \sqrt{\sin(-1)}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{\sin i} - i\sqrt{\sin 1}\right)$$

Известно, что

$$\sqrt{\sin 1} = \sqrt{\frac{e^{-1}-e}{2i}} = \sqrt{i} \cdot \sqrt{\text{sh}1} \text{ и } \sqrt{i} = \cos\frac{(4k+1)\pi}{4} +$$

$$+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{4} (k = 0.1).$$

Отсюда берем значение корня только при $k = 0$, т.е.

$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, чтобы было $\sqrt{-1} = i$, из

$\sqrt{-1} = \sqrt{cos\pi + isin\pi} = \cos\frac{(1+2k)\pi}{2} + i\sin\frac{(1+2k)\pi}{2}$ должно быть $k = 0$.

Следовательно,

$$I = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{\mathrm{sh}(1)} - i\sqrt{\sin(1)}\right]$$
$$= \sqrt{2\mathrm{sh}(1)} + i\left(\sqrt{2\mathrm{sh}(1)} - 2\sqrt{\sin(1)}\right).$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

223. $\int_C e^{|z|^2}\mathrm{Re}(z)dz$, где □ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $c_1 = 1 + i$.

224. $\int_C CzRe(z)dz$, □: $|z| = 1$, направление против часовой стрелки.

225. $\int_C z^2 dz$, □ – отрезок прямой, соединяющий $z_0 = 1$ и $z_1 = i$.

226. $\int_C z^{10}dz, C\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 -$ эллипс

227. $\int_C (1 + i - 2z)dz,$ где $C -$ дуга параболы $y = x^2$ которая проходит через точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + i$.

228. $\int_{1+i}^{-1-i}(2z+1)dz$;

229. $\int_{1+i}^{-1-i}(2z+1)dz$;

230. $\int_{1+i}^{-1-i} z^3 dz$;

231. $\int_1^i (3z^4 - 2z^3)dz$;

232. $\int_0^i z\cos(z)dz$

233. $\int_C z\,|z|dz, C\colon \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$;

234. $\int_C z\mathrm{lm}\,(z^2)dz$; □: $\{|z|R, Re(z) = 1, |\mathrm{lm}z| \leq 1\}$

235. $\int_C zRe\,(z^2)dz, C\colon \{|z| = R, Re(z) \leq 0\}$,

236.

$\int_{ABC}(2z^2 - 1)dz$, где ABC $-$ ломаная с вершинами в точках $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$ и $z_C = i$

237. $\int_C (z^2 - |z|)dz, C\colon \left\{|z| = \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq argz \leq \frac{3\pi}{4}.\right\}$

238. $\int_{AB}(1 - 3z)dz, AB\colon \{y = x^3, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.

239. $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где $C -$ верхняя часть окружности $|z| = 1$. Рассмотреть одну из четырех ветвей подынтегральной функции, чтобы выполнялось условие $\sqrt[4]{1} = 1$.

240. $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $C -$ верхняя часть окружности $|z| = 1$. Взять ту ветвь подынтегральной функции, где выполнялось условие $\sqrt{1} = 1$.

1.4.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Производные высоких порядков

1. Теорема Коши. *Для всякой аналитической функции* $f(z)$ *в некоторой односвязной области* D *интеграл, взятый по любому замкнутому кусочно гладкому контуру* Г*, лежащему в области* D*, равен нулю:* $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

2. Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, ограниченный кусочно гладким контуром Г, то имеет место интегральная формула Коши:

$$f(z_{0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} \quad (z_0 \in D).$$

3. При выполнении тех же условий имеет место другая формула:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z- z_0)^{n+1}},$$

называемая интегральной формулой Коши для производных ($n \in \mathbf{N}$).

При решении примеров, чтобы было удобно применить вышеизложенные формулы, перепишем их в следующем виде:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{z- z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0), \quad \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z- z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

Примеры

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \oint_\Gamma \frac{z^2dz}{z - 2i}, \text{где Г – окружность } |z| = 3.$$

Решение. Так как функция $f(z) = z^2$ является аналитической функцией внутри окружности $|z| = 3$ и точка $z_0 = 2i$ тоже лежит внутри данной окружности, поэтому имеем следующее:

$$I = \oint_\Gamma \frac{z^2dz}{z - 2i} = 2\pi i \cdot (2i)^2 = 2\pi i \cdot (-4) = -8\pi i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \oint_\Gamma \frac{e^zdz}{z(z-3)}$, где Г – окружность радиуса $\frac{3}{2}$ и центром в точке (2;0).

Решение. Знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в точках $z = 0$ и $z = 3$. Но точка $z = 0$ не лежит внутри данной окружности, поэтому функция $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ – аналитическая внутри этой окружности. Тогда:

$$I = \oint\limits_{|Z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{z(z-3)} = \oint\limits_{|Z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{e^z}{z} dz}{z-3} = 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z} \Big|_{z=3} = \frac{2}{3} i\pi e^3.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma:\ |z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$.

Решение.

$$I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+3i} \Big|_{z=3i} = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2}$.

Решение.

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\cos z}{(z-2)^2} dz}{z} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} i.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz dz}{z^2+4z+3}$.

Решение.

Так как $\frac{1}{z^2+4z+3} = \frac{1}{2}(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3})$, то получим:

$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz dz}{z^2+4z+3} = \oint\limits_{|z|=4} \frac{1}{2}(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}) \cdot \operatorname{sh} iz dz =$$

$$= \frac{1}{2} \oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz dz}{z+1} - \frac{1}{2} \oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz dz}{z+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} iz \Big|_{z=-1} - \operatorname{sh} iz \Big|_{z=-3}\right] \cdot 2\pi i =$$

$$= \pi i[\operatorname{sh}(-i) - sh(-3i)] = \pi i(\operatorname{sh} 3i - \operatorname{sh} i)$$

$$= \pi i(i\sin 3 - i\sin 1) == -\pi(\sin 3 - \sin 1)$$

$$= -2\pi \sin 1 \cos 2.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z) dz}{z^3}$.

Решение. Подынтегральная функция – аналитическая во всех точках $|z| \leq 1$, кроме точки $z = 0$. Следовательно:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!}[\cos(z)]'' \Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z)\Big|_{z=0}$$
$$= -\pi i.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z dz}{(z-1)^2(z-3)}$.

Решение.

$$I = \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z dz}{(z-1)^2(z-3)} = \oint_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}dz}{(z-1)^2} = (n = 1, z_0 = 1) =$$
$$= \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}\right]'_{z=1} = 2\pi i\left[\frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}z\cdot(z-3)-\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-3)^2}\right]_{z=1} = 2\pi i\cdot\frac{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4} =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}\pi i(\pi+2)}{8}.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)}$.

Решение. Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль при $z = \pm 1$ и обе точки лежат в круге $|z| \leq 1$. Функцию разложим на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}.$$

Тогда: $I = \frac{1}{4}\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)} - \frac{1}{4}\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z+1)} - \frac{1}{2}\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z+1)^2} =$
$= \frac{1}{4}(2\pi i - 2\pi i) - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$

Упражнения

В задачах 241-258 вычислить интегралы применяя теорему Коши, интегральную формулу Коши и интегральную формулу Коши для производных.

241. $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{sh}^2 z}{z}dz$;

242. $\oint_{|z|=1}\frac{z\,\mathrm{sh}z}{(z^2-1)^2}dz$;

243. $\oint_{|z-3|=6}\frac{dz}{(z-2)^2(z+4)}$;

244. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1-\sin z}{z^2}dz$;

245. $\oint_{|z-2|=3}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$;

246. $\oint_{|z-2|=3}\frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$;

247. $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+9}$;

248. $\oint_{|z-2|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$;

249. $\oint_{|z+1|=1}\frac{zdz}{(z+1)(z-1)^3}dz$;

250. $\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$;

251. $\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z}{(z+4)^3}dz$;

252. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z+i}dz$;

253. $\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^2-4z+3}$;

254. $\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z(e^2+2)}$;

255. $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2z}$;

256. $\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^2-5z+4}$;

257. $\oint_{|z|=4}\frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$;

258. $\oint_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}$;

1.5. Ряды в комплексной области
1.5.1. Числовые ряды с комплексными членами

Рассмотрим некоторый числовой ряд с комплексными членами, т.е.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

где $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ – заданная числовая последовательность с комплексными членами (x_n и y_n – действительные числа). Составим для данного ряда последовательность частичных сумм:

$$S_1 = z_1, \qquad S_2 = z_1 + z_2, \dots , \qquad S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \dots$$

Определение 1. *Если при $n \to \infty$, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ стремится к конечному пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S называется суммой ряда и в этом случае пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.*

Если же указанный предел $\lim_{n\to\infty} S_n$не существует или же бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Так как $z_n = x_n + iy_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

и для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и достаточна сходимость обеих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Определение 2. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$$

Из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ вытекает его сходимость. Указанные выше ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,, \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

являются рядами с действительными членами и вопрос о их сходимости решается с помощью признаков сходимости числовых рядов с действительными членами.

Примеры

Пример 1. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + i\,\frac{1}{3^n})$ и найти его сумму.

Решение. Так как действительная и мнимая части данного ряда являются бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями соответственно со знаменателями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, то данный ряд сходится и сумма его равна $S = 1 + i\,\frac{1}{2}$, потому что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Выяснить сходимость или расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i\,\frac{1}{2^n}\right).$$

Решение. Действительная часть данного ряда – гармонический ряд. Поэтому этот ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

Решение. Известно, что $\cos in = \operatorname{ch} n = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$. По признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{2\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{2\cdot 2^n}{e^n+e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2\cdot e^{2n}}{2e(e^{2n}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{e}=\frac{e}{2}>1\,.$$

Ряд расходится.

Пример 4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}.$$

Решение. Известно, что $e^{in}=\cos n+i\sin n$, тогда ряд перепишем в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

А также, нам известно, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}\text{ и }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$$

являются абсолютно сходящимися рядами, поэтому исходный ряд абсолютно сходится.

Упражнения

Исследовать на сходимость и расходимость данных рядов.

259. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$;
260. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$;
261. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$;
262. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$;
263. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$;
264. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}(i\sqrt{n})}{\sin in}$;
265. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^2}{2}$;
266. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$;
267. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\mathrm{sh}(in)}$;

1.5.2. Степенные ряды

Степенные ряды – важный частный случай функциональных рядов в комплексной области.

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n,$ – некоторые постоянные (коэффициенты степенного ряда).

Теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

сходится при $z = z_0$, *то он сходится, притом абсолютно, в любой точке* z, *для которой* $|z| < |z_0|$. *Если данный степенной ряд расходится при* $z = z_1$, *то он расходится для любых* z, *таких, что* $|z| > |z_1|$.

Из теоремы Абеля вытекает, что областью сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

является некоторый круг с центром в начале координат. Радиус сходимости определяется с помощью одних из формул (если, конечно, эти пределы существуют):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_n + 1}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Примеры

Пример 1. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$$

Решение. Так как $c_n = (\frac{1}{in})^n$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{in}\right|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{1}{in}\right|} = \lim_{n\to\infty} |in| = \lim_{n\to\infty} |n| = \infty,$$

т.е. областью сходимости данного ряда является вся комплексная плоскость.

Пример 2. Определить круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n.$$

Решение. $c_n = e^{in} = \cos n + i \sin n$ и $|c_n| = 1$. Следовательно, $R = 1$. Круг сходимости – $|z_1| < 1$.

Пример 3. Определить радиус и область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n.$$

Решение. Имея в виду, что

$\cos(in) = \mathrm{ch}n$ и $\cos i(n+1) = \mathrm{ch}(n+1)$, получим:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ch}n}{\mathrm{ch}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ch}n}{\mathrm{ch}n\,\mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}n\,\mathrm{sh}1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}1 + \mathrm{th}n\,\mathrm{sh}1}$$

$$= (\lim_{n\to\infty} \mathrm{th}(n) = 1) = \frac{1}{\mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}1} = \frac{2}{e + e^{-1} + e - e^{-1}} = \frac{2}{2e}$$

$$= \frac{1}{e}$$

и круг сходимости есть $|z| < e^{-1}$.

Пример 4. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

Решение. $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ и, следовательно,

$c_n = (1+i)^n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $|c_n| = \sqrt{2^n}$.

Тогда: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 5. Определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n.$$

Решение.

$$R =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+i}{(n+1)+i}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+i)[(n+1)-i]}{[(n+1)+i][(n+1)-i]}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n(n+1)+1)+i}{(n+1)^2+1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2+1}{(n^2+2n+2)^2}} = 1, R = 1.$$

Упражнения

Определить радиус и круг сходимости данных степенных рядов.

268. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$; 269. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\frac{1}{n} z^n$; 270. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$;

271. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin i\frac{\pi}{n} z^n$; 272. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$; 273. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$;

274. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{n}\frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$; 275. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^n n} z^n$; 276. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$;

277. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z}{\ln in})^n$; 278. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^n(1+in)} z^n$; 279. $\sum_{n=1}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$;

1.5.3. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть дана функция $f(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки z_0. Рассмотрим ряд

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots.$$

Этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(z)$ и внутри своего круга сходимости выражает функцию $f(z)$, т.е. в круге сходимости выполняется равенство:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Если $z_0 = 0$, то последнее равенство записывается в виде:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

В этом случае говорят, что функция $f(z)$ разложена в ряд Маклорена.

Коэффициенты ряда Тейлора также вычисляются по следующей формуле:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

C – окружность с центром в точке z_0 и целиком лежащая в окрестности точки z_0.

Ниже приведем разложения в ряды Маклорена некоторых основных элементарных функций:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n1} z^n + \cdots,$$

В частности, при $\alpha = -1$;

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Если к членам последнего разложения добавим $2n\pi i$, $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.)$, то получим разложения $\mathrm{Ln}(1+z)$.

Отметим, что в первых трех разложениях $R = \infty$, а в последних трех разложениях $R = 1$. А также четвертое разложение называется биномиальным рядом.

Используя вышеперечисленные разложения, можно найти разложения многих элементарных функций в ряды Тейлора или Маклорена.

Примеры

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1+z}$ в ряд Маклорена.

Решение. В разложении функции $\frac{1}{1+z}$, заменим z на $-z$:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots.$$

Пример 2. Разложить в степенной ряд функцию $f(z) = \mathrm{ch}(z)$ по степеням z.

Решение.

$$\mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\right) + \right.$$

$$\left.\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + + \cdots\right)\right] = \frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{z^2}{2!} + 2\frac{z^4}{4!} + \cdots + \right.$$

$$\left. 2\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

Пример 3. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ в ряд Маклорена.

Решение.

Так как $\frac{z}{z^2-2z-3} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{3}{z-3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z} - 3\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right)$, то используя разложения первого примера:

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4}\left[(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) - \left(1 + \frac{z}{3} + (\frac{z}{3})^2 + \cdots\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3}z^2 + \frac{z}{3^2}z^3 \dots\right).$$

Пример 4. Разложить функцию $f(z) = \mathrm{arctg}(z)$ в ряд Маклорена.

Решение. В биномиальном ряде сначала предположим, что $\alpha = -1$, а затем в полученном разложении заменим z на z^2.

Тогда получим:

$$\frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots.$$

Очевидно, что областью сходимости этого ряда является круг $|z| < 1$. Поэтому, последнее равенство можно проинтегрировать в пределах от 0 до z (значения z, не выходят из круга $|z| < 1$). Следовательно,

$$\mathrm{arctg}(z) = z - \frac{z^3}{3} + + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n + 1} + \cdots.$$

Пример 5. Разложить по степеням $(z + 1)$ функцию

$$f(z) = \sin(2z + 1).$$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\sin(2z + 1) = \sin[2(1 + z) - 1] =$$

$$= \sin(2(1 + z)) \cdot \cos 1 - \cos(2(1 + z)) \cdot \sin 1$$

Заменяя в разложениях $\sin(z)$ и $\cos(z)$, z на $2(1 + z)$, получим:

$$\sin(2z+1) = \cos 1\left[2(z+1) - \frac{2^3(z+1)^3}{3!} + \frac{2^5(z+1)^5}{5!} - \cdots\right] -$$
$$-\sin 1\left[1 - \frac{2^2(z+1)^2}{2!} + \frac{2^4(z+1)^4}{4!} - \cdots\right] =$$
$$= -\sin 1 + 2\cos 1\,(z+1) + \frac{2^2}{2!}\sin 1\,(z+1)^2 -$$
$$-\frac{2^3}{3!}\cos 1\,(z+1)^3 - \frac{2^4}{4!}\sin 1\,(z+1)^4 + \frac{2^5}{5!}\cos 1\,(z+1)^5 + \cdots.$$

Пример 6. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z) = \sin^2 z.$$

Решение. Находим производные функции $f(z) = \sin^2 z$:

$$f'(z) = \sin(2z),\ f''(z) = 2\cos(2z),\ f'''(z) = -4\sin(2z),$$
$$f^{(\mathrm{IV})}(z) = -8\cos(2z), f^{(\mathrm{V})}(z) = 16\sin 2z,$$
$$f^{(\mathrm{VI})}(z) = 32\cos(2z), f^{(\mathrm{VII})}(z) = -64\sin(2z)\,, \ldots;$$

Определяем значения производных в точке $z_0 = 0$:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 2, f'''(0) = 0, f^{(\mathrm{IV})}(0) = -8,$$
$$f^{(\mathrm{V})}(0) = 0, f^{(\mathrm{VI})}(0) = 32, f^{(\mathrm{VII})}(0) = 0, \ldots;$$

Следовательно,

$$sin^2 z = \frac{2}{2!}z^2 - \frac{2^3}{4!}z^4 + \frac{2^5}{6!}z^6 - \frac{2^7}{8!}z^8 + \cdots.$$

Пример 7. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ функцию $f(z) = \mathrm{sh}(3z)$.

Решение.

Находим:

$$f'(z) = 3\mathrm{ch}(3z), f''(z) = 9\mathrm{sh}(3z), f'''(z) = 27\mathrm{ch}(3z), \ldots;$$
$$f(1) = \mathrm{sh}3, f'(1) = 3\mathrm{ch}3, f''(1) = 3^2\mathrm{sh}3, f'''(1) = 3^3\mathrm{ch}3, \ldots.$$

Следовательно,

$$\mathrm{sh}(3z) = \mathrm{sh}3 + 3\mathrm{ch}3(z-1) + \tfrac{3^2}{2!}\mathrm{sh}(z-1)^2 + \tfrac{3^3}{3!}\mathrm{ch}3(z-1)^3 + \cdots =$$
$$= \left[\mathrm{sh}(3)\left(1 + \frac{3^2}{2!}3(z-1)^2 + \frac{3^4}{4!}(z-1)^4 + \cdots\right)\right.$$
$$\left. + 3\mathrm{ch}(3)\left((z-1) + \frac{3^3}{3!}(z-1)^3 + \frac{3^5}{5!}(z-1)^5 + \cdots\right)\right] =$$

$$= \operatorname{sh}(3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n} + 3\operatorname{ch}(3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1}.$$

Упражнения

Разложить в ряд Маклорена следующие функции.

280. $f(z) = \operatorname{ch}^2 z$; 281. $f(z) = \cos\sqrt{z}$; 282. $f(z) = \frac{z}{i+z^2}$;

283. $f(z) = \ln(2-z)$; 284. $f(z) = \cos^2\frac{iz}{2}$; 285. $f(z) = \sqrt[3]{27-z}$;

286. $f(z) = \operatorname{sh}^2\frac{z}{2}$; 287. $f(z) = \arcsin 2z$; 288. $f(z) = \ln(2+z-z^2)$;

289. $f(z) = \frac{1}{3+z^2}$; 290. $f(z) = \sqrt[4]{16+z}$; 291. $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$.

Разложить в ряд Тейлора по указанным степеням следующие функции.

292. $f(z) = \cos z$, по степеням $z = \frac{\pi}{4}$;

293. $f(z) = \sqrt[3]{z}$, по степеням $z-1$;

294. $f(z) = \sin(z^2+4z)$, по степеням $z+2$;

295. $f(z) = \frac{2}{z}$, по степеням $z-1$;

296. $f(z) = \ln z$, по степеням $z-1$;

297. $f(z) = \frac{1}{3-z}$, по степеням $z-3$.

1.5.4. Ряды с отрицательными степенями и ряды Лорана

1. Рассмотрим следующий ряд:

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Этот ряд называется степенным рядом с отрицательной степенью. Область сходимости этого ряда (если она существует) определяется неравенством $|z-z_0| > r \geq 0$. Радиусы сходимости (или круги сходимости) таких рядов определяются точно также, как определялись радиусы сходимости (круг сходимости) обычных степенных рядов.

2. Пусть $f(z)$ – однозначная и аналитическая функция в кольце $r < |z-z_0| < R$. Эта функция представляется в указанном кольце сходящимся рядом:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0)$$
$$+ c_2(z-z_{0)}{}^2 + \cdots + +c_n(z-z_0)^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Ряд в правой части равенства называется рядом Лорана функции *f*(z). Коэффициенты этого ряда можно вычислить по формуле

$$\mathrm{c}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, n \in Z,$$

а C_ρ – любая окружность радиуса
$\rho \quad (r < \rho < R)$ с центром в точке $z_{0.}$

Ряд

$$\textstyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n,$$

называется главной частью ряда Лорана, а ряд

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

правильной частью ряда Лорана.

Могут быть такие случаи:

а) если $r \ > R$, то ряд Лорана расходится.

б) если $r \ < R$, то ряд Лорана в кольце $r < |z-z_0| < R$ сходится ($r \geq 0, 0 < R < \infty$).

Примеры

Пример 1. Определить круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{(z+i)^n}$.

Решение. Так как,

$c_{-n} = \sin(in) = i\mathrm{sh}(n)$ и $c_{-n-1} = i\mathrm{sh}(n+1)$,

то имеем следующее:

$$r = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{i\mathrm{sh}(n+1)}{i\mathrm{sh}n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}{e^n - e^{-n}} = e.$$

Следовательно, круг сходимости: $|z+i| >$ e.

Пример 2. Определить круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

Решение. Если имеем в виду, что

$c_{-n} = (1+i)^{n+1}$ и $c_{-n-1} = (1+i)^{n+2}$, то

$$r = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1+i)^{n+2}}{(1+i)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} |1+i| = \sqrt{2}.$$

Следовательно: $|z| > \sqrt{2}$.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} : r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{i(n+1)}}{e^{in}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|e^{i}\right| = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|z+1| > 1$. Для второго ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{in} \cdot \sqrt{e} \cdot e^{i}}{\sqrt{e} \cdot e^{in}}\right| = 1,$$

т.е. данный ряд сходится при $|z+1| < 1$. Следовательно, рассматриваемый ряд вообще не сходится (т.е. ряд расходящийся).

Пример 4. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6}.$$

Решение.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3+4i)^n(3+4i)}{(3+4i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |3+4i| = 5, |z+2i| > 5,$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{6^n}}}\right| = 6, |z+2i| < 6.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является кольцо $5 < |z+2i| < 6$.

Пример 5. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}.$$

Решение.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin i(n+1)}{\sin i}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{i\mathrm{sh}(n+1)}{i\mathrm{sh}n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}{e^n - e^{-n}}$$
$$= e, |z-i| > \mathrm{e}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится в кольце $e < |z-i| < \infty$.

Пример 6. Определить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1--i)^n.$$

Решение. Очевидно, что

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,\ R = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, исследуемый ряд расходится во всех точках комплексной плоскости.

Упражнения

Определить область сходимости рядов с отрицательной степенью.

299. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n z^n}$;

300. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+i)(z+1-i)^n z^n}$;

301. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n 4^n}$;

302. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$;

303. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$;

304. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos in\cdot z^n}$;

305. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{i^n z^n}$;

306. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$;

Определить область сходимости рядов:

307. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^n(z-2+i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$;

308. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{9} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+5)(z-1)^n}{9*2^n}$;

309. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$;

310. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i+n)^n}$;

311. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$;

312. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$.

Выше было сказано, что если функция $f(z)$ – аналитическая и однозначная в некотором кольце $r < |z-z_0| < R$, то ее можно представить в данном кольце в виде ряда Лорана, где для вычисления коэффициентов ряда указывалась соответствующая формула.

Но при интегрировании различных функций комплексного переменного иногда возникают некоторые сложности вычислительного характера. По этой причине, чтобы определить разложения тех или иных элементарных функций в ряд Лорана, целесообразно использовать их готовые разложения в ряды Тейлора или Маклорена. Объясним это при решении следующих примеров.

Примеры

Пример 1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ по степеням z.

Решение.

Известно, что $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$, тогда

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - - \frac{z^4}{7!} + \frac{z^6}{9!} - \cdots.$$

Пример 2. Определить ряд Лорана функции $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$:

Решение. Известно, что $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$.

Тогда $\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots$ или

$$z^2\cos\frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \cdots.$$

Данное разложение верно для любых точек $z \neq 0$.

Пример 3. Разложить по степеням z в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \text{ в кольце } 2 < |z| < 3.$$

Решение. Разложим данную функцию на простейшие дроби

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2-z} - \frac{1}{3-z}.$$

а) чтобы было $|z| > 2$, т. е. $\frac{2}{|z|} < 1$:

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots\right] =$$

$$= -\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \cdots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

б) чтобы было $|z| < 3$ или $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$:

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^{n}.$$

Итак:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=-\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{я}\right)^{n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^{n}\right].$$

Пример 4. Разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z|<1$ функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$.

Решение.

$$\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}-(1-z+z^2-z^3+\ldots)=\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Пример 5. Разложить в ряд Лорана в кольце $1<|z+2|<3$ функцию $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$.

Решение. $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$.

а) $|z+2|>1$:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z+2)-1}=\frac{\frac{1}{z+2}}{1-\frac{1}{z+2}}=\frac{1}{z+2}\left[1+\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{z+2}++\frac{1}{(z+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+2)^n}+\cdots.$$

б) $|z+2|<3$:

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+2}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{z^2-1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{n}.$$

Пример 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{z+3}{z^2-3z+2}$ по степеням z – 1.

Решение. Представим данную функцию в виде:

$$f(z)=\frac{z+3}{(z-1)(z-2)}=-\frac{4}{z-1}++\frac{5}{z-2}$$

и вторую дробь разложим в ряд по степеням $(z-1)$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n},|z-1|>1.$$

Тогда:

$$\frac{z+3}{z^2-3z+2}=-\frac{4}{z-1}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

Упражнения

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ следующие функции.

313. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{4}}$;

314. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}4$

315. $f(z)=\frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z}$;

316. $f(z)=\frac{e^z}{z^3}4$

317. $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3}$;

318. $f(z)=\operatorname{ch}\frac{2}{z}$;

319. $f(z)=\frac{1+\cos z}{z^4}$;

320. $f(z)=\operatorname{sh}\frac{1}{z}$;

321. $f(z)=\frac{1+e^{2z}}{z}$.

Разложить в ряд Лорана в указанных кольцах следующие функции.

322. $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-5)}$; $2<|z|<3$;

323. $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$; $2<|z-1|<\infty$;

324. $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$; $2<|z|<+\infty$;

325. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$; $0<|z-i|<2$;

326. $f(z)=\frac{1}{z^2+2z-8}$; $2<|z+2|<4$;

327. $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$; $1<|z|<2$;

328. $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}$; $4<|z+2|<+\infty$;

329. $f(z)=\frac{2}{z^2-1}$; $1<|z+2|<3$;

330. $f(z)=\frac{z^5}{(z^2-4)^2}$; $2<|z|<+\infty$;

331. $f(z)=\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$. $1<|z|<2$;

1.6. Нули функции. Изолированные особые точки

1.6.1. Общие понятия

Определение 1. *Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в области D. Точка $z_0 \in D$ называется нулем $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Если*

$$f(z_0) = f'^{(z_0)} = f''^{(z_0)} = \cdots = f^{n-1}(z_0) = 0, \text{а } f^{n-1}(z_0) \neq 0,$$

то точка z_0 называется нулем n-ого порядка функции $f(z)$. В частности, если n = 1, то z_0 называется простым нулем.

Из определения следует, что точка z_0, в которой функция $f(z)$ – аналитическая, была для нее нулем n-ого порядка, необходимо и достаточно чтобы в окрестности этой точки имело место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, причем функция $\varphi(z)$ должна быть в точке z_0 аналитической и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Определение 2. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в некоторой окрестности точки z_0, а в точке z_0 не является аналитической (в точке z_0 функция может быть и не определена).*

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают три типа особых точек: устранимую особую точку, полюс и существенно особую точку.

а) Изолированная особая точка z_0 называется устранимой, если существует $\lim_{z \to z_0} f(z)$;

б) Если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то точка z_0 называется полюсом;

в) Если $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует в расширенной плоскости комплексного переменного, то z_0 называется существенно особой точкой.

Между нулем и полюсом функции существует следующая связь. Если z_0 – нуль кратности n функции $f(z)$, то z_0 – полюс того же порядка функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$; обратно, если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то z_0 – нуль той же кратности функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Для того чтобы точка z_0, была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$ (n $\in N$).

Примеры

Определить нули и их кратности для следующих функций.

Пример 1. $f(z) = 1 + \cos z$.

Решение. Так как $1 + \cos z = 0$ или $\cos z = -1$. Следовательно, $z = (2n+1)\pi - (n \in Z)$ есть нули функции.

Приняв во внимание, что $f'[(2n+1)\pi] = -\sin[(2n+1)\pi] = 0$ и $f''[(2n+1)\pi] = -\cos[(2n+1)\pi] = 1 \neq 0$, заключаем, что найденные нули являются нулями второго порядка.

Пример 2. $f(z) = z^2 + 1$.

Решение. Очевидно, что для данной функции нулями являются $z_1 = i$ и $z_2 = -i$. Так как $f'(z) = 2z$ и $f'(\pm i) = \pm 2i \neq 0$, поэтому они оба являются простыми нулями.

Пример 3. $f(z) = \text{ch}z + 1$.

Решение. $\text{ch}z = -1$ или $e^z + e^{-z} = 2$ или $(e^z+1)^2 = 0$, поэтому $e^z + 1 = 0$, $e^z = -1$ и

$$z = \text{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i + 2n\pi i; (n \in Z).$$

Так как $f'[(2n+1)\pi i] = 0,\ f''[(2n+1)\pi i] \neq 0$,

Следовательно, z_n =$(2n+1)\pi i (n \in Z)$ – нули 2-го порядка.

Пример 4. $f(z) = (z^2-1)^2 \text{sh}z$.

Решение. Очевидно, что нулями данной функции являются:

$$z_1 = -1, z_2 = +1 \text{ и } z_n = n\pi i (n \in Z).$$

Определим их кратности.

а) $z_1 = -1$. Тогда можно предположить, что

$f(z) = (z+1)^2\, \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке $z_1 = -1$ и $\varphi(-1) = 4\text{sh}(-1) = -4\text{sh}1 \neq 0$.

Следовательно, $z_1 = -1$ – нуль 2-го порядка.

б) $z_2 = +1$. Точно таким же образом покажем, что $z_2 = +1$ также является нулем второго порядка.

в) $z_n = n\pi i$. Так как $f'(n\pi i) \neq 0$, откуда заключаем, что $z_n = n\pi i$ являются простыми нулями.

Определить изолированные особые точки и их характер для следующих функций.

Пример 1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

Решение. Очевидно, что для данной функции $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$
следовательно, $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Пример 2. $f(z) = \frac{1}{z-\sin z}$.

Решение. Здесь, $z_0 = 0$ – изолированная особая точка и она является полюсом, либо,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z - \sin z} = \infty.$$
Определим порядок полюса:

$$\varphi(z) = z - \sin z, \varphi(0) = 0;$$
$$\varphi'(z) = 1 - \cos z, \varphi'(0) = 0;$$
$$\varphi''(z) = \sin z, \varphi''(0) = 0;$$
$$\varphi'''(z) = \cos z, \varphi'''(0) = 1 \neq 0.$$
Отсюда видно, что для функции $\varphi(z)$, $z_0 = 0$ является нулем третьего порядка, а для данной функции это полюс 3-го порядка.

Пример 3. $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$.

Решение. Легко видеть, что изолированными особыми точками функции являются точки $z_n = 2n\pi (n \in Z)$.

Так как $\lim_{z\to 2n\pi} f(z) = \lim_{z\to 2n\pi} \frac{1}{1-\cos z} = \infty$, то

$z_n = 2n\pi (n \in \mathbf{Z})$ – полюсы.

Определим их порядок: если положим, что $\varphi(z) = 1 - cosz$ и $\varphi(2n\pi)$=0,

$\varphi'(z) = \sin z, \varphi'(2n\pi) = 0,\ \varphi''(z) = \cos(z)\,, \varphi''(2n\pi)$ =1$\neq 0$.

Поэтому, $z_n = 2n\pi\ \ (n \in \mathbf{Z})$ есть полюсы второго порядка.

Пример 4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Очевидно, что для данной функции $z_0 = 0$ – изолированная особая точка. Если $x > 0$, при $z = x \to +0$, $e^{\frac{1}{z}} \to +\infty$,

если $x < 0$, при $z = x \to -0$, $e^{\frac{1}{z}} \to 0$.

Следовательно, $z_0 = 0$ – существенно особая точка.

Упражнения

В задачах 332-343 определить нули и их порядок для следующих функций.

332. $f(z) = z^2 \sin z$;

333. $f(z) = \frac{\text{sh}^2 z}{z^2}$;

334. $f(z)=\frac{(1-\text{sh}z)^2}{z}$;
335. $f(z)=(z+\pi i)\text{sh}z$;
336. $f(z)=\cos z^3$;
337. $f(z)=z^2-i$;
338. $f(z)=\cos z+chiz$;
339. $f(z)=\sin z-1$;
340. $f(z)=z(\text{ch}z-1)$;
341. $f(z)=e^{z^2}-1$;
342. $f(z)=1-\cos 2z$;
343. $f(z)=1+\sin 2z$.

В задачах 344-355 определить изолированные особые точки и их характер для следующих функций.

344. $f(z)=\frac{z^2-1}{z+1}$;
345. $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$;
346. $f(z)=\frac{z^2-1}{z^3+1}$;
347. $f(z)=\frac{\sin z}{z-\text{sh}z}$;
348. $f(z)=\frac{1}{1-sinz}$;
349. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$;
350. $f(z)=\cos\frac{1}{z}$;
351. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$;
352. $f(z)=\sin\frac{\pi}{z+1}$;
353. $f(z)=\frac{z^2-1}{z^3+2z^4+z^5}$;
354. $f(z)=\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$;
355. $f(z)=\frac{1-\sin z}{\cos z}$.

1.6.2. Особые точки и ряд Лорана

Классификация изолированных особых точек функции $f(z)$ тесно связана с ее рядом Лорана. При этом возможны три различных случая:

1. Если z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, а ряд Лорана функции $f(z)$ не содержит членов главной части, т.е. имеет вид

$$f(z)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

в окрестности точки z_0, то z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

2. Если z_0 –изолированная особая точка функции $f(z)$, а ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное (отличное от нуля) число членов главной части, т.е. имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

в окрестности точки z_0 (причём $c_{-m}\neq 0$), то z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$.

3. Если z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, а ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число членов главной части, то точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Используя вышеизложенные высказывания, определим характер изолированных особых точек следующих функций.

Примеры

Пример 1. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

Решение. Для данной функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ точка z_0 является устранимой особой точкой, так как

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots;$$

Пример 2. $f(z)=\frac{1+\cos z}{z-\pi}$.

Решение. Для данной функции $z_0=\pi$ является изолированной особой точкой. Так как $\cos z=-\cos(z-\pi)$, следовательно,

$$1+\cos z=1-\cos(z-\pi)=1-1+\frac{(z-\pi)^2}{2!}-\frac{(z-\pi)^4}{4!}+\cdots.$$

Тогда: $\frac{1+\cos z}{z-\pi}=\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$.

Итак, $z_0=\pi$ – устранимая особая точка.

Пример 3. $f(z)=\frac{1}{z+e}e^{z+e}$.

Решение. Для данной функции $z_0=-e$ является изолированной особой точкой. Разложим в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{z+e}e^{z+e}$ по степеням $z+e$, т.е.:

$$\frac{1}{z+e}e^{z+e}=\frac{1}{z+e}\left(1+(z+e)+\frac{(z+e)^2}{2!}+\frac{(z+e)^3}{3!}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{z+e}+1+\frac{z+e}{2!}+\frac{(z+e)^2}{3!}++\frac{(z+e)^3}{4!}+\cdots.$$

Отсюда видно, что точка $z_0=-e$ – полюс первого порядка.

Пример 4. $f(z)=\frac{\operatorname{ch}(z-1)}{(z-1)^3}$.

Решение. Здесь $z_0=1$ – изолированная особая точка.

Имеем:

$$\operatorname{ch}(z-1)=\frac{1}{2}\left[e^{z-1}+e^{-(z-1)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\frac{1}{3!}(z-1)^3+..+1$$
$$-(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2-\frac{1}{3!}(z-1)^3+\cdots\Big]=$$
$$=1++\frac{1}{2!}(z-1)^2+\frac{1}{4!}(z-1)^4+\cdots.$$

Тогда: $\frac{\operatorname{ch}(z-1)}{(z-1)^3}=\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4!}\cdot(z-1)+\frac{1}{6!}\cdot(z-1)^3+\cdots.$

Таким образом, $z_0=1$ является полюсом второго порядка.

Пример 5. $f(z)=sin\frac{1}{z+2}$.

Решение. Для данной функции $z_0=-2$ является изолированной особой точкой, функцию разложим в ряд Лорана по степени $z+2$: $sin\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+2)^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+2)^5}\ldots..$

Данное разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями по $(z+2)$.
Следовательно, $z_0=-2$ является существенно особой точкой.

Пример 6. $f(z)=z^3\operatorname{sh}\frac{1}{z}$.

Решение. Очевидно, что здесь $z_0=0$ – изолированная особая точка. Находим разложение в ряд Лорана. $z^3\operatorname{sh}\frac{1}{z}=\frac{z^3}{2}(e^{\frac{1}{z}}+e^{-\frac{1}{z}})=z^3\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}+\frac{1}{7!}\cdot\ .\frac{1}{z^7}+\cdots\right)=z^2+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{9!}\cdot\frac{1}{z^6}+\cdots$. Итак, $z_0=0$ – существенно особая точка.

Упражнения

В задачах 356-367 даны функции и указаны соответствующие изолированные особые точки. Определить характер этих точек, исходя из разложения функций в ряд Лорана в окрестности исследуемых точек.

356. $f(z)=\frac{z^2-5z+2}{z^2-2z+1}$;
$z_0=-1$;

357. $f(z)=\frac{\operatorname{sh}z}{z}$;
$z_0=0$;

358. $f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}$;
$z_0=-\pi$;

359. $f(z)=\frac{\ln(1+3)}{z^2}$;
$z_0=0$;

360. $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}$;
$z_0=0$;

361. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$;
$z_0=-2$;

362. $f(z)=e^{\frac{\pi}{1-z}}$;
$z_0=1$;

363. $f(z)=\cos\frac{z}{1+z}$;
$z_0=-1$;

364. $f(z)=\sin\frac{2-\pi z}{2z}$;
$z_0=0$;

365. $f(z)=\frac{z}{z^2-1}$;
$z_0=1$;

366. $f(z)=\sin\frac{z-1}{z+2}$;
$z_0=-2$;

367. $f(z)=(z+1)e^{\frac{1}{z+1}}$;
$z_0=-1$.

1.7. Вычеты и их приложения

1.7.1. Определение и формулы вычисления вычета

1. Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$.

Определение. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутого контура C, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.*

В большинстве случаев за C принимают произвольную окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0.

Для обозначения вычета обычно применяются выражения $\mathrm{res}f(z_0)$ или $\mathrm{res}_{z=z_0} f(z_0)$, т.е.

$$\mathrm{res}f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz.$$

2. При вычислении вычетов полезно запомнить следующие положения:

1) Если точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$res f(z_0)=0.$$

2) Пусть z_0 – полюс n-ого порядка функции $f(z)$. Вычет функции $f(z)$ относительно ее полюса n – ого порядка вычисляется по формуле:

$$\mathrm{res}f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)\cdot(z-z_0)^n].$$

В частности, если z_0 – полюс первого порядка функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot(z-z_0)^n].$$

При вычислении вычета относительно полюса первого порядка, помимо исходной формулы в случае, если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ – аналитические в точке z_0 функции, причем $\Psi(z_0)$ = 0, $\Psi'(z_0) \neq 0$, удобно пользоваться формулой

$$\mathrm{res}f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\Psi'(z_0)}.$$

3) Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то, чтобы вычислить $\mathrm{res}f(z_0)$, проще всего функцию разложить в ряд Лорана в окрестности этой точки и взять коэффициент c_{-1} этого ряда за него, т.е. $c_{-1} = \mathrm{res}f(z_0)$.

Примеры

В следующих примерах для данных функций определим сначала их изолированные особые точки, а затем вычислим вычеты функций в этих точках.

Пример 1. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$.

Решение. Очевидно, что изолированной особой точкой данной функции является $z_0 = 0$. Определим ее характер.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $z_0 = 0$ – устранимая особая точка и $resf(z_0) = resf(0) = 0$.

Пример 2. $f(z) = z\cdot\sin\frac{1}{z}$.

Решение. Так как $z_0 = 0$ – изолированная особая точка. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$z\cdot\sin\frac{1}{z} = z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \cdots\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^4} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^6} + \cdots.$$

Отсюда видно, что $c_{-1} = 0$. Значит: $resf(0) = 0$.

Пример 3. $f(z) = \frac{\text{ch}z}{z}$.

Решение. Так как $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\text{ch}z}{z} = \infty$, точка $z_0 = 0$ – полюс данной функции.

Для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z}{\text{ch}z}$, $z_0 = 0$ является простым нулем, потому что $\varphi(0) = 0, \varphi'^{(z)} = \frac{\text{ch}(z) - z\text{sh}(z)}{\text{ch}^2 z}, \varphi'(0) \neq 0$.

Следовательно, $z_0 = 0$ – простой полюс для исходной функции. Тогда: $resf(0) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\text{ch}z}{z} = \lim_{z\to 0} \text{ch}z = 1$.

А с другой стороны, если положим,

что $\varphi(z) = \text{ch}z$ и $\varphi(z) = z$, то $\varphi(0) = 1 \neq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$. $resf(0) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = 1$.

А также, при разложении функции в ряд Лорана тоже можно видеть, что $c_{-1} = resf(0) = 1$.

Пример 4. $f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^3}$.

Решение. Для данной функции $z_0 = -2$ является особой точкой. Если положим $\varphi(z) = z^4$, то она аналитическая в точке

$z_0 = -2$ и $\varphi(-2) = 16 \neq \ \neq 0$.

Следовательно, $z_0 = -2$ это полюс 3-го порядка. Тогда:

$$resf(-2) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^4}{(z+2)^3} * (z+2)^3\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}(12z^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 12(-2)^2 = 24.$$

Пример 5. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$.

Решение. Очевидно, что $e^{\frac{z}{z-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$. Функцию $e^{\frac{z}{z-1}}$ разложим в ряд Лорана в окрестности изолированной точки $z_0 = 1$:

$$e^{\frac{z}{z-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = e\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots\right] = e + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!}\cdot\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{e}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots.$$

Следовательно, $z_0 = 1$ – существенно особая точка и $resf(1) = c_{-1} = e$.

Упражнения

В задачах 368-383 даны функции и для них указаны соответствующие изолированные особые точки. Найти вычеты функций в этих точках.

368. $f(z) = z^3 \cdot \sin\frac{1}{z^3}$;
$z_0 = 0$;

369. $f(z) = \frac{z^2}{z+2}$;
$z_0 = -2$;

370. $f(z) = \frac{e}{z^2+z-2}$;
$z_0 = 1$;

371. $f(z) = \frac{\mathrm{ch}z}{(z-1)^2}$
$z_0 = 3$;

372. $f(z) = \frac{e^{\pi i}}{z-i}$;
$z_0 = i$;

373. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$;
$z_0 = -1$;

374. $f(z) = z^3 + \cos\frac{1}{z}$;
$z_0 = 0$;

375. $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$;
$z_0 = -i$;

376. $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$;
$z_0 = -1$;

377. $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z+i}$;
$z_0 = -i$;

378. $f(z) = \frac{\cos(z)}{z-\frac{\pi}{2}}$;
$z_0 = \frac{\pi}{2}$;

379. $f(z) = \frac{\mathrm{tg}(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$;
$z_0 = \frac{\pi}{4}$;

380. $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}$;
$z_0 = 0$;

381. $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;
$z_0 = 1$;

382. $f(z) = \sin(z) \cdot \cos\frac{1}{z}$;
$z_0 = 0$;

383. $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$;
$z_0 = 0$.

1.7.2. Основная теорема о вычетах

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ аналитическая в ограниченной односвязной области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ и C – простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res} f(z_k),$$

(□ – ориентирована в положительном направлении).

Основной теореме о вычетах можно придать еще такой вид: интеграл от функции $f(z)$ по контуру □, проходимому против часовой стрелки, равен сумме вычетов относительно всех особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, находящихся внутри □, умноженной на $2\pi i$.

Вышеизложенная теорема находит применение при вычислении многих интегралов от функций комплексной переменной. Ниже рассмотрим несколько типичных примеров на применение этой теоремы.

Примеры

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)dz}{z^2+4}.$$

Решение. Изолированными особыми точками подынтегральной функции являются точки $z_1 - 2i$ и $z_2 = 2i$. Обе эти точки являются простыми полюсами для этой функции, потому что, если положим $\varphi(z) = z + 1$ и $\Psi(\mathrm{z}) = z^2 + 4$, то они являются аналитическими функциями в окрестностях точек $z_1 - 2i$ и $z_2 = 2i$. А также верны следующие соотношения:

$$\varphi(\pm 2i) = 1 \pm 2i \neq 0,\ \ \Psi(\pm 2i) = 0, \Psi'(\pm 2i) = \pm 4\mathrm{i} \neq 0.$$

Следовательно:

$$\mathrm{res} f(\pm 2i) = \frac{\varphi(\pm 2i)}{\Psi'(\pm 2i)} = \frac{1 \pm 2i}{\pm 4\mathrm{i}} = \mp \frac{i \mp 2}{4}.$$

По основной теореме о вычетах получим:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)dz}{z^2+4} = 2\pi i[resf(2i) + resf(-2i)] = 2\pi i\left[\frac{1+2i}{4\mathrm{i}} - \frac{1-2i}{4\mathrm{i}}\right]$$
$$= 2\pi i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет четыре особые точки $z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = -i$ и $z_4 = i$. Все они являются простыми полюсами, потому что, если $\varphi(z) = z^3$ и $\Psi(\mathrm{z}) = z^4 - 1$, то $\varphi(\pm 1) = \pm 1, \varphi(\pm i) = \mp i,\ \Psi(\pm 1) = \ \Psi(\pm i) = 0, \Psi'(z) = 4z^3$, $\Psi'(\pm 1) = \pm 4,\ \Psi'(\pm i) = \mp 4\mathrm{i}$.

Тогда: $\mathrm{res} f(\pm 1) = \frac{\varphi(\pm 1)}{\Psi\prime(\pm 1)} = \frac{1}{4}, resf(\pm i) = \frac{1}{4}$.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1} = 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{(e^z - 1)dz}{z^2 + z}.$$

Решение. Для подынтегральной функции $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$ являются изолированными особыми точками. Первая из них является устранимой особой точкой, так как:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{2z + 1} = 1\,, resf(0) = 0.$$

Нетрудно показать, что $z_2 = -1$ – простой полюс. Тогда:

$$\mathrm{res}f(-1) = \lim_{z\to -1}\left[\frac{e^z - 1}{z(z + 1)} \cdot (z + 1)\right] = \lim_{z\to -1} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{e - 1}{e};$$

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{(e^z - 1)dz}{z^2 + z} = 2\pi i[resf(0) + resf(-1)] = 2\pi i\left(0 + \frac{e - 1}{e}\right)$$

$$= \frac{2\pi(e - 1)}{e}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin \pi z\, dz}{z^3 - 4z}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет три особые точки $z_1 = 0, z_2 = 2,\ z_3 = -2$. Точка $z_3 = -2$ лежит вне окружности $|z - 1| = 2,$ а две остальные точки являются устранимыми особыми точками:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z^3 - 4z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin \pi z}{z} \cdot \frac{1}{z^2 - 4}\right) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{z\to 2} \frac{\sin \pi z}{z^3 - 4z} = \lim_{z\to 2} \frac{\sin \pi z}{z(z - 2)(z + 2)} = \left|\begin{array}{c} z - 2 = t \\ z = t + 2 \\ z \to 2, \\ t \to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi(t + 2)}{(t + 2) \cdot t \cdot (t + 4)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t + 2} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t + 4}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, res*f*(0) = res*f*(2) = 0. Таким образом,

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin \pi z \, dz}{z^3 - 4z} = 0.$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет три особые точки $z_1 = 2, z_2 = -i, z_3 = +i$ и все они лежат в окружности $|z| = 3$. К тому же все они – простые полюсы.

$$\mathrm{res} f(2) = \lim_{z\to 2}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)} \cdot (z-2)\right] = \lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{4}{5},$$

$$\mathrm{res} f(-i) = \lim_{z\to -\mathrm{i}}\left[\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)} \cdot (z+i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to -\mathrm{i}}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)} == \frac{1}{2(1-2i)},$$

$$\mathrm{res} f(i) = \lim_{z\to \mathrm{i}}\left[\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)} \cdot (z-i)\right] = \lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}$$

$$= \frac{1}{2(1+2i)}.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)} = 2\pi i\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2(1-2i)} + \frac{1}{2(1+2i)}\right) = 2\pi i.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{(e^{z^2}-1)dz}{z^3 - iz^2}.$$

Решение. Для подынтегральной функции $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ являются особыми точками. Первая точка $z_1 = 0$ - полюс второго порядка, а вторая точка $z_2 = i$ – простой полюс.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}\cdot z^2\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{z^2}-1}{z-i}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^2}\cdot 2z(z-i)-(e^{z^2}-1)}{(z-i)^2}=\frac{(1-1)}{(-i)^2}=0.$$

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\left[\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}*(z-i)\right]=\lim_{z\to i}\frac{e^{z^2}-1}{z^2}=\frac{e^{-1}-1}{i^2}=$$

$$=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e};$$

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{(e^{z^2}-1)dz}{z^3-iz^2}=2\pi i\cdot\frac{e-1}{e}=\frac{2\pi i(e-1)}{e}.$$

Пример 7. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz.$$

Решение. Очевидно, что подынтегральная функция имеет одну особую точку $z_0=0$, которая является существенно особой точкой. Рассмотрим разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$:

$$(z+1)e^{\frac{1}{z}}=(z+1)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=z+1+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots=$$

$$=(z+2)+\left(1+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)\frac{1}{z^3}+\cdots.$$

Отсюда видно, что

$$c_{-1}=\operatorname{res} f(0)=\frac{3}{2}.\quad \oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\cdot\frac{3}{2}=3\pi i.$$

Упражнения

В задачах 384-403 вычислить интеграл либо с помощью вычетов, либо применяя основную теорему о вычетах.

384. $\oint_{|z|=1} z\operatorname{tg}\pi z dz$;

385. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$;

386. $\oint_{|z|=4}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

387. $\oint_{|z-1|=1}\frac{e^{2z}dz}{z^3-1}$;

388. $\oint_{|z|=4}\frac{(z+1)dz}{z^2+2z-3}$;

389. $\oint_{C}\ \frac{\sin\pi z dz}{(z^2-1)^3}$;

390. $\oint_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}\,dz$;

391. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^3\sin\frac{1}{z}\,dz$;

392. $\oint_{|z|=2}\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}dz}{(z+1)}$;

393. $\oint_{|z-2|=2}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$;

394. $\oint_{|z|=4}\frac{\sin z dz}{z^2+9}$;

395. $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^2}$;

396. $\oint_{|z|=4}\frac{(z+1)dz}{e^z+1}$;

397. $\oint_{C}\ \frac{\cos\frac{z}{3}dz}{z^2-9}$;

398. $\oint_{|z|=3}\frac{z^3dz}{4z^2+1}$;

399. $\oint_{|z+1|=3}\frac{\sin z dz}{z+1}$;

400. $\oint_{|z-2-2i|=2}\frac{dz}{z^3+8}$;

401. $\oint_{|z|=4}\frac{(z+1)dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$;

402. $\oint_{|z|=2}\frac{z\sin z dz}{(z-1)^3}$;

403. $\oint_{|z|=2}\frac{zdz}{(z-i)(z-3)}$.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие формы комплексных чисел вы знаете?
3. Какие действия можно производить над комплексными числами?
4. Что такое логарифм комплексного числа?
5. Что такое последовательность комплексных чисел?
6. Как определяется непрерывная функция комплексного переменного?
7. Как определяется предел функции комплексного переменного?
8. Какие замечательные пределы функций комплексного переменного вы знаете?
9. Как определяется производная функции комплексного переменного?
10. Приведите необходимое условие дифференцируемости функции комплексного переменного?
11. Приведите условия Коши-Римана.
12. Какая функция комплексного переменного называется аналитической?

13. Приведите свойства аналитической функции комплексного переменного?

14. Что называется гармонической функцией комплексного переменного?

15. Как определяется интеграл по кривой функции комплексного переменного?

16. Какие методы вычисления интегралов функций комплексного переменного вы знаете?

17. Можно ли применить Формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла функции комплексного переменного?

18. Приведите теорему Коши.

19. Приведите интегральную формулу Коши.

20. Что такое ряд комплексных чисел?

21. Какой ряд комплексных чисел называется абсолютно сходящимся?

22. Какие признаки сходимости можно применить для рядов комплексных чисел?

23. Сформулируйте теорему Абеля.

24. Как определяется ряд Тейлора?

25. Как определяется ряд Маклорена?

26. Приведите пример разложения элементарной функции комплексного переменного в ряд Маклорена.

27. Как определяется ряд Лорана?

28. Что называется главной частью ряда Лорана?

29. Что называется правильной частью ряда Лорана?

30. Как определяется сходимость ряда Лорана?

31. Как определяются нули функции n-го порядка функции комплексного переменного?

32. Что называется изолированной особой точкой?

33. Какая особая точка называется устранимой?

34. Какая особая точка называется полюсом?

35. Какая особая точка называется существенной?

36. Что называется вычетом?

37. Сформулируйте основную теорему о вычетах.

ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Вычисление изображений и оригиналов

2.1.1. Понятия оригинала и изображения. Основные теоремы преобразования Лапласа

Основные определения.

1) Если функция $f(t)$ от действительного переменного t является кусочно-непрерывной, тождественно равна нулю для значений $t < 0$ и если существуют такие числа $M > 0, S_0 > 0$, то для всех значений $0 < t < +\infty$ выполняется условие $|f(t)| < Me^{S_0 t}$, тогда эта функция называется оригиналом.

2) Функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая несобственным интегралом вида

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt,$$

называется изображением функции $f(t)$. А сам несобственный интеграл называется интегралом Лапласа.

Связь между оригиналом и изображением выражается одним из следующих обозначений:

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad f(t) \fallingdotseq F(p), \qquad L\{f(t)\} = F(p).$$

Процесс перехода от оригинала к изображению называется преобразованием Лапласа.

Теорема 1. (Единственность). *Если* $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$ *и* $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, *и если* $F_1(p) \equiv F_2(p)$, *то* $f_1(t) \equiv f_2(t)$.

Теорема 2. (Линейность). Если $C_1, C_2, \dots C_n$ постоянные числа отличные от нуля и

$$F_1(p) \risingdotseq f_1(t),\ F_2(p) \risingdotseq f_2(t), \dots, F_n(\mathrm{p}) \risingdotseq f_n(t),$$

то справедливо следующее:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\, F_{k(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t)\,.$$

Теорема 3. (Свойство подобия). *Если* $F(p) \risingdotseq f(t)$ *и* $a > 0$ – *любое число, то верно следующее равенство:* $f(at) \fallingdotseq \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$.

Теорема 4. (Свойство смещения). *Если* $F(p) \risingdotseq f(t)$ *и* $\alpha > 0$ – *любое число, то имеет место следующе равенство:*

$$e^{(-\alpha t) f(t)} \fallingdotseq F(p + \alpha).$$

Применяя вышеизложенные определения и свойства, находим изображения некоторых элементарных функций.

Примеры

Пример 1. Единичная функция Хэвисайда определяется так:

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, \text{если } t < 0, \\ 1, \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

Найти образ данной функции.

Решение.

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

Следовательно: $F(p) \risingdotseq \frac{1}{p}$.

Пример 2. $f(t) = e^{-t}$.

Решение. Из $e^{-t} = e^{-t} \cdot 1$ следует, что $f(t) = 1$.

Тогда, из $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$ и из теоремы смещения $(\alpha = 1)$ можно записать так: $e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$. Точно также для любого числа

$\alpha > 0$ можно записать: $e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha}$, $e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$.

Пример 3. $f(t) = 3 - e^{-2t} + 2e^{3t}$.

Решение. Так как, $3 \risingdotseq \frac{3}{p}, e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}$ и $e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}$, то по свойству линейности имеем:

$$3 - e^{-2t} + 2e^{3t} \risingdotseq \frac{3}{p} - \frac{1}{p+2} + \frac{2}{p-3}$$

или

$$3 - e^{-2t} + 2e^{3t} \risingdotseq \frac{2\,(2p^2 + 2p - 9)}{p(p+2)(p-3)}.$$

Пример 4. $f(t) = \cos t$

Решение: Исходя из соотношений: $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ и $e^{it} \risingdotseq \frac{1}{p-i}$, $e^{-it} \risingdotseq \frac{1}{p+i}$ имеем: $\cos t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right)$ или $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$.

По теореме подобия получим: $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + a^2}$.

Пример 5. $f(t) = \sin t$.

Решение. Так как, $\sin t = \frac{i(e^{it} - e^{-it})}{2}$, то точно также как в предыдущем примере получим:

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \text{ и } \sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Пример 6. $f(t) = 2 + 3\cos 2t - 2\sin t$.

Решение. 2 + 3cos2t – 2sint $\risingdotseq \frac{2}{p} + \frac{3p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1}$

или окончательно получим:

$$2 + 3cos2t - 2sint \risingdotseq \frac{5p^4 - 2p^3 + 13p^2 - 8p + 8}{p(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Изображения для функций sh(αt) и ch(αt) также вычисляются по формулам:

$$\mathrm{sh}(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2},$$

$$\mathrm{sh}\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2};$$

$$\mathrm{ch}(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2},$$

$$\mathrm{ch}(\alpha t) \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \alpha^2};$$

Пример 7. $f(t) = e^{-2t}\cos 3t$.

Решение. Если обозначим, $f(t) = \cos 3t$, то $\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2+9}$. Теперь используя теорему смещения, имеем следующее: $e^{(-2t)\cos 3t} \risingdotseq \frac{p+2}{(p+2)^2+9}$.

Используя теорему смещения, получим следующие формулы:

$$e^{\pm\alpha t}\cos(\alpha t) \risingdotseq \frac{p \mp \alpha}{(p \mp \alpha)^2 + a^2};\ e^{(\pm\alpha t)\sin at} \risingdotseq \frac{a}{(p \mp \alpha)^2 + a^2}.$$

$$e^{(\pm\alpha t)\mathrm{sh}(\alpha t)} \risingdotseq \frac{a}{(p \mp \alpha)^2 - a^2};\ e^{(\pm\alpha t)\mathrm{ch}at} \risingdotseq \frac{p \mp \alpha}{(p \mp \alpha)^2 - a^2}.$$

Упражнения

Исходя из определения преобразования Лапласа и их свойств найти изображения, соответствующие данным функциям.

404. $f(t) = 1 + t$;

405. $f(t) = 2\sin t - \cos t$;

406. $f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}$;

407. $f(t) = 3\mathrm{ch}2t + 5$;

408. $f(t) = \sin 3t$;

409. $f(t) = e^{-3t}$;

410. $f(t) = \sin 2t cos3t$;
411. $f(t) = \cos 2t$;
412. $f(t) = \operatorname{sh} 3t$;
413. $f(t) = \sin t \sin 3t$;
414. $f(t) = \cos^3 t$;
415. $f(t) = \sin^2 t$;
416. $f(t) = \cos 2t cos4t$;
417. $f(t) = e^{2t}\sin t$;
418. $f(t) = \cos^2 3t$;
419. $f(t) = 3\,e^{2t} - 4\cos 2t$;
420. $f(t) = e^{t}\cos 2t$;
421. $f(t) = e^{-2t}\operatorname{sh} 3t$;
422. $f(t) = 5\sin 2t - \operatorname{sh} 2t$;
423. $f(t) = e^{3t}\sin^2 t$;
424. $f(t) = \sin^3 2t$.

2.1.2. Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений. Теорема о свертке

1. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то изображения для производных данной функции находятся по следующим формулам:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots f^{(n-1)}(0).$$

2. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого натурального числа n имеет место следующее:

$$(-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n} \fallingdotseq t^nf(t).$$

3. Чтобы проинтегрировать оригинал достаточно найти отношение его изображения к p, т.е., $f(t) \fallingdotseq F(p)$, тогда справедливо следующее выражение:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

4. Если несобственный интеграл $\int_0^\infty F(p)dp$ сходится, то он является изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, т. е: $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_0^\infty F(p)dp$.

5. Теорема о свертке. Если $F_1(p) \fallingdotseq f_1(t)$ и $F_2(p) \fallingdotseq f_2(t)$, то справедливо следующее выражение:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \fallingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau.$$

Примеры

Найти изображения данных функций.

Пример 1. $f(t) = \sin^2 2t$.

Решение. Так как, $\sin^2 2\mathrm{t} = \frac{1-\cos 4t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t$ и имея в виду, что $\frac{1}{2} \risingdotseq \frac{1}{2p}$, $\frac{1}{2}\cos 4t \risingdotseq \frac{p}{2(p^2+16)}$, получим: $\sin^2 t \risingdotseq \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2+16)} = \frac{p^2+16-p^2}{2p(p^2+16)} = \frac{16}{2p(p^2+16)} = \frac{8}{p(p^2+16)}$;

Таким образом: $\sin^2 2t \risingdotseq \frac{8}{p(p^2+16)}$.

Пример 2. $f(t) = \cos^3 t$.

Решение.

$f'(\mathrm{t}) = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = 3\sin t \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} =$

$= -\frac{3}{2}\sin t — \frac{3}{2}\sin t\cos 2t = -\frac{3}{4}\sin t - \frac{3}{4}\sin 3t.$

Тогда: $-\frac{3}{4}(\sin t + \sin 3t) \;\; = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{3}{p^2+9}\right)$.

А с другой стороны, будет иметь место: $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{3}{p^2+9}\right) =$

$= pF(p) - f(0)$. Отсюда, имея в виду, что $f(0) = 1$, окончательно получим:

$$F(p) = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)} \quad \text{или} \quad cos^3 t \risingdotseq \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

Пример 3. $f(t) = t^3 e^{2t}$.

Решение. Так как, $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$. Тогда по формуле дифференцирования изображений (здесь: $n = 3$) имеем:

$(-1)^3 \frac{d^3}{dp^3}\left(\frac{1}{p-2}\right) \fallingdotseq = t^3 e^{2t}$.

Следовательно, имеем следующее: $t^3 e^{2t} \risingdotseq \frac{3!}{(p-2)^4}$.

Пример 4. $f(t) = t^3 \sin 2t$.

Решение. Здесь также воспользуемся формулой дифференцирования изображений: $t^3 \sin 2t \risingdotseq \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{4(p^2-1)}{(p^2+4)^3}$.

Пример 5. $f(t) = t^n$.

Решение: Исходя из $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, можно записать, что

$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) \fallingdotseq t^n \cdot 1$. Отсюда, имеем: $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Пример 6. $f(t) = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования оригинала $e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}$. Тогда $\int_0^t e^{-2\tau} d\tau \risingdotseq \frac{1}{p(p+2)}$.

Пример 7. $f(t) = \int_0^t \tau \mathrm{sh} 2\tau d\tau$.

Решение. Известно, что $t\mathrm{sh}2t \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2-4}\right) = \frac{4p}{(p^2-4)^2}$.

Отсюда, следует: $\int_0^t \tau\, \mathrm{sh}(2\tau) d\tau \risingdotseq \frac{4}{(p^2-4)^2}$.

Пример 8. $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$.

Решение. Имеет место: $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$. Тогда по теореме интегрирования изображений: $\frac{\sin 2t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{2dp}{p^2+4} = \frac{\pi}{2} - arctgp$.

Пример 9. $f(t) = \frac{e^t-1}{t}$.

Решение. Известно, что: $e^t - 1 \risingdotseq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$. Здесь тоже применяя формулу интегрирования изображений получим следующее:

$$\frac{e^t-1}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{p-1} - - \frac{1}{p}\right) dp = [\ln(p-1) - \ln p]_p^\infty =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \Big|_p^\infty = 0 - \ln\left(\frac{p-1}{p}\right) = \ln\left(\frac{p}{p-1}\right).$$

Пример 10. $f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^\tau d\tau$.

Решение. Для того чтобы вычислить изображение данной функции воспользуемся теоремой о свертке. Если предположим, что $f_1(t) = t$ и и $f_2(t) = e^t$, то $F_1(p) = \frac{1}{p^2}$ и $F_2(p) = \frac{1}{p-1}$.

Тогда $f(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$.

Упражнения

В задачах 425-436 применив теорему дифференцирования оригиналов и изображений, найти изображения данных функций.

425. $f(t) = \sin t$;	426. $f(t) = \cos^2 t$;
427. $f(t) = \mathrm{sh}^2 t$;	428. $f(t) = \cos^4 t$;
429. $f(t) = \sin^3 t$;	430. $f(t) = t\sin in3t$;
431. $f(t) = \mathrm{ch}^2 2t$;	432. $f(t) = t\cos 2t$;
433. $f(t) = te^{-\frac{t}{2}}$;	434. $f(t) = t(e^t + \mathrm{ch} t)$;
435. $f(t) = (t+1)\sin 2t$;	436. $f(t) = t\mathrm{sh}2t$.

В задачах 437-454 применив теорему интегрирования оригиналов и изображений, найти изображения данных функций.

437. $f(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau$; 438. $f(t) = \int_0^t \operatorname{ch}2\tau d\tau$;

439. $f(t) = \int_0^t (\tau+1)\cos2\tau d\tau$; 440. $f(t) = \int_0^t \cos^2 4\tau d\tau$;

441. $f(t) = \int_0^t \tau\operatorname{sh}^2\tau d\tau$; 442. $f(t) = \int_0^t te^{-\tau}4\tau d\tau$;

443. $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$; 444. $f(t) = \frac{\sin^{2t}}{t}$;

445. $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$; 446. $f(t) = \frac{\cos t-\cos2t}{t}$;

447. $f(t) = \frac{e^{-t}-1-t}{t}$; 448. $f(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{t}$;

449. $f(t) = \frac{e^{-2t}\sin2t}{t}$; 450. $f(t) = \frac{1-e^{2t}}{te^t}$;

451. $f(t) = \frac{\sin7t\sin3t}{t}$; 452. $f(t) = \frac{e^{-3t}\sin^2 t}{t}$;

453. $f(t) = \frac{e^{2t}-e^{4t}}{t}$; 454. $f(t) = \frac{\cos^2 2t}{t}$.

При вычислении изображений для данных функций воспользоваться теоремой о свертке.

455. $f(t) = \int_0^t e^{t-\tau}\sin2\tau d\tau$; 456. $f(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau v}d\tau$;

457. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2\operatorname{ch}\tau d\tau$; 458. $f(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)}\tau^2 d\tau$;

459. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}\operatorname{ch}\tau d\tau$;

460. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2\operatorname{sh}\tau d\tau$.

2.1.3. Таблица изображений основных элементарных функций. Отыскание оригинала по изображению

1. Таблица изображений некоторых основных элементарных функций:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	8.	$e^{-\alpha t}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
2.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	9.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	10.	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
4.	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	11.	$t\cos at$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+a^2)^2}$

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
5.	$\mathrm{ch}\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2 - \alpha^2}$	12.	$te^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$
6.	$\mathrm{sh}\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	13.	$te^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$
7.	$e^{-\alpha t}\sin at$	$\dfrac{a}{(p+\alpha)^2 + a^2}$	14.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n}[F(p)]$

2. При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения.

Если изображение $F(p)$ является правильной рациональной функцией, то её представляем в виде суммы простейших дробей относительно p. А затем, определяем соответствующий оригинал каждому слагаемому и использовав свойства линейности изображений находим оригинал для данного изображения $F(p)$.

Примеры

Пример 1. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+4)}$.

Решение. Разложим данную дробь на простейшие дроби:

$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+4}$.

Определив неизвестные коэффициенты, получим следующее разложение:

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} = \frac{1}{5(p-1)} \cdot \frac{p+1}{5(p^2+4)}$$

$$= \frac{1}{5(p-1)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+4}.$$

Отсюда, находим:

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} \risingdotseq \frac{1}{5}\left(e^t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Пример 2. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{p+2}{(p-1)(p+1)^2}$.

Решение. Так как, $\frac{p+2}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p-1}$, находим неизвестные коэффициенты.

Получим: $\frac{p+2}{(p-1)(p+1)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1}$.

Следовательно:

$$\frac{p+2}{(p-1)(p+1)^2} \fallingdotseq \frac{3}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

Пример 3. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{p}{p^4-1}$.

Решение. $\frac{p}{p^4-1} = \frac{p}{(p+1)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$.

Находим значения неизвестных коэффициентов и получим:

$$\frac{p}{p^4-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1} =$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2}\mathrm{ch}t - \frac{1}{2}\cos t =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{ch}t - \cos t).$$

Пример 4. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{(p^2+9)^2}$.

Решение. Используем теорему о свертке:

$$F(p) = F_1(p) * F_2(p) = \frac{1}{p^2+9} * \frac{1}{p^2+9}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{9}\int_0^t \sin 3\tau \sin 3(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^t [\cos 3(2\tau - t) - \cos 3t]d\tau =$$

$$= \left[\frac{1}{108}\sin 3(2\tau - t) - \frac{1}{18}\tau\cos 3t\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{54}\sin 3t - \frac{1}{18}t\cos 3t.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{(p^2+9)^2} \fallingdotseq \frac{1}{54}\sin 3t - \frac{1}{18}t\cos(3t).$$

Упражнения

В задачах 461-484 найти оригиналы, соответствующие данным изображениям.

461. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$;

462. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3}$;

463. $F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$;

464. $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$;

465. $F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+p}$;

466. $F(p) = \frac{1}{p^2-p+7}$;

467. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$;

468. $F(p) = \frac{p+2}{(p^2-p-2)(p^2+4)}$;

469. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$;

470. $F(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$;

471. $F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$;

472. $F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$;

473. $F(p) = \frac{p^2+14}{(p^2+9)(p^2+4)}$;

474. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$;

475. $F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)^3}$;

476. $F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$

477. $F(p) = \frac{p}{p^3+1}$;

478. $F(p) = \frac{3p^3}{(p^3-1)^2}$

479. $F(p) = \frac{p}{p^3-8}$;

480. $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p+3)}$;

481. $F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)^2}$;

482. $F(p) = \frac{p-2}{(p+3)(p^2-1)}$;

483. $F(p) = \frac{1}{p^2-4p+8}$;

484. $F(p) = \frac{p^2+2p-1}{(p+1)^3}$.

2.2. Применение операционного исчисления к решению некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

2.2.1. Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \quad (1)$$

правая часть которого $f(t)$ – является оригиналом.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям вида:

$$y(0) = y_0, y'^{(0)} = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

также является оригиналом.

Обозначая изображение этого решения через $Y(p)$, находим изображение левой части исходного дифференциального уравнения и, приравнивая его изображению функции $f(t)$, приходя к так называемому изображающему уравнению, которое всегда является линейным алгебраическим уравнением относительно $Y(p)$:

$$p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_{n-1}p + a_n)\,Y(p) =$$
$$= F(P) + (p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_1 + \ldots + py_{n-2} + y_{n-1}) + a_1(p^{n-2}y_0 +$$
$$+p^{n-3}y_1 + \ldots + py_{n-3} + y_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(py_0 + y_1).$$
Определив из этого уравнения $Y(p)$, находим оригинал $y(t)$.

Обычно изображающее уравнение называют операторным уравнением, а его решение-операторным решением.

В частности, если уравнение (1) является уравнением второго порядка, то операторное решение выглядит так:

$$Y(p) = \frac{F(p)+py_0+y_1+a_1y_0}{p^2+a_1p+a_2}.$$

Примеры

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' + y = t$ при $y(0) = 0$.

Решение. Переходим к изображениям:

$pY(p) - y(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2}$. Решая это уравнение относительно $Y(p)$, находим: $Y(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ (операторное решение).

Так как, $Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$, возвращаясь к оригиналу получим: $y(t) = e^{-t} + t - 1$.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение 3-го порядка $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, если $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Напишем операторное уравнение:

$$[p^3Y(p) - p^2Y(0) - py'(0) - y''(0)]$$
$$- 6[p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - y''(0)] + 11[py(p) - y(0)]$$
$$- 6Y(p) = 0$$

или $(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)Y(p) = p - 6$.

Отсюда находим операторное решение: $Y(p) = \frac{p-6}{(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Так как, $Y(p) = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{4}{p-2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-3}$, то переходя к оригиналу получим решение данного уравнения: $y(t) = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, если $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Решение. Напишем операторное уравнение:

$$[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)] + [py(p) - y(0)] - 2y(p) = \frac{1}{p+1}$$

Сначала находим операторное решение, а затем решение задачи:

$$Y(p)=\frac{p-6}{(p+1)(p^2+p-2)}=\frac{1}{(p-1)(p+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p+1)}\right),$$

$y(t)=\mathrm{sh}t.$

Пример 4. Найти частное решение уравнения $y''+4y=\sin t$, при начальных данных: $y(0)=y'(0)=1$

Решение. Определим соответствующее операторное уравнение и операторное решение:

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{1}{p^2+1}+(p+1), Y(p)=\frac{p^3+p^2+p}{(p^2+1)}$$

Имея ввиду, что $Y(p)=\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{3(p^2+4)}+\frac{1}{3(p^2+1)}$, получим решение:

$$y(t)=\sin t+\sin 2t$$

Пример 5. Решить дифференциальное уравнение 4-го порядка, если

$$y(0)=y''(0)=y'''(0)=0, y'(0)=-1$$

Решение. Операторное уравнение и операторное решение выглядит так:

$$[p^4Y(p)+p^2]-[p^2Y(p)+1]=\frac{p}{p^2+1},$$

$$p^2(p^2-1)Y(p)=\frac{p}{p^2+1}-(p^2-1),$$

$$Y(p)=\frac{p-p^4+1}{p^2(p^2-1)(p^2+1)}=\frac{1}{p(p+1)(p-1)(p^2+1)}-\frac{1}{p^2}$$

или

$$Y(p)=-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}++\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1},$$

отсюда находим решение задачи:

$$y(t)=-1-t+\frac{1}{4}e^t++\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t.$$

Упражнения

В задачах 485-514 решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях.

485. $y'+y=e^{-t}, y(0)=1;$

486. $y'+2y=\sin t, y(0)=0;$

487. $y''-2y'=e^{2t},$ $y(0)=y'(0)=0;$

488. $y''+2y'=t\sin t,$ $y(0)=y'(0)=0;$

489. $y'''+y'=t,$ $y(0)=y''(0)=0, y'(0)=-1$

490. $y'''+2y''+3y'=0$ $y(0)=-1, y''(0)=0, y'(0)=2;$

491. $y'' + y' = \cos t$, $y(0) = 2, y'(0) = 0;$

492. $y'' + 2y' + y = t^2$, $y(0) = 0, y'(0) = 0;$

493. $y'' - 2y' + 5y = 1 - t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

494 $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0, y''(0) = -2, y'(0) = -1;$

495. $y'' - y' = te'$, $y(0) = y'(0) = 0;$

496. $y'' - 2y' + y = t - \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

497. $y'' + 2y' + y = 2cos^2 t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

498. $y'' - 2y' = te^{2t} 2\sin t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

499. $y'' + y' = te' + 4\sin t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

500. $y'' + y' = 4sin^2 t$, $y(0) = 0, y'(0) = -1;$

501. $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 10y' - 6y = 0, y(0) = 1,$ $y'(0) = 0, y''(0) = 6, y'''(0) = -14;$

502. $y''' + y = \frac{1}{2} t^2 e'$, $y(0) = y''(0) = y'(0) = 0;$

503. $y'' + y = t\cos t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

504. $y''' + 3y'' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = -2;$

505. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$

506. $y''' + y'' = t, y(0) = 3,$ $y'(0) = 1, y''(0) = 0;$

507. $y'' + 2y' + 5y = 3$, $y(0) = 1, y'(0) = 0;$

508. $y'' - y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1;$

509. $y^{\mathrm{IV}} - y'' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0;$

510. $y'' + 4y = 2\cos t \cos 3t$, $y(0) = y'(0) = 0;$

511. $\begin{gathered} y'' - y' = t^2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1; \end{gathered}$

512. $\begin{gathered} y'' + y = t\cos 2t\,, \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{gathered}$

513. $\begin{gathered} y''' + 3y'' + 3y' + y = -1, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0; \end{gathered}$

514. $\begin{gathered} y''' + y = 1, \\ y(0) = y''(0) = y'(0) = 0; \end{gathered}$

2.2.2. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Процесс решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами по методу операционного исчисления, ведётся аналогично решению одного уравнения.

Для простоты рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $x(t)$ и $y(t)$ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x'(t) + a_{11}x(t) + a_{12}y(t) = f_1(t), \\ y'(t) + a_{21}x(t) + a_{22}y(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Данную систему требуется решить методом операционного исчисления, при следующих начальных условиях:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

Предположим, что неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$, а также данные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ таковы, для них существуют соответствующие изображения, т.е.:

$$x(t) \risingdotseq X(p), y(t) \risingdotseq Y(p),\ f_1(t) \risingdotseq F_1(p),\ f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$$

К обеим уравнениям системы применяем преобразование Лапласа, тогда имея в виду начальные условия получим операторную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 + a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) = F_1(p), \\ pY(p) - y_0 + a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) = F_2(p). \end{cases}$$

Решая данную систему, получим соответствующие выражения операторных решений, и находим для них соответствующие оригиналы, которые и являются решением исходной системы.

Приведем примеры решения некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при заданных начальных условиях.

Примеры

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x' + y = e^t \\ y' + x = e^{-t} \end{cases} \text{при } x(0) = 0, y(0) = 0.$$

Решение. Составим операторную систему:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) + Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ pY(p) - y(0) + X(p) = \dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $X(p) = \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}, Y(p) = \frac{p^2-2p-1}{(p^2-1)^2}$

Тогда: $X(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2}\right] \risingdotseq t\text{ch}t,$

$$Y(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right]$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2}(te^t - te^t) = \text{sh}t - t\text{sh}t$$

Следовательно: $x(t) = t\text{ch}t, y(t) = (1-t)\text{sh}t$.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x), \\ \quad y'' = x - y. \end{cases} \text{при} \begin{matrix} x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = -1. \end{matrix}$$

Решение. Переходим к операторной системе:

$$\begin{cases} p^2X(p) = 3\big(Y(p) - X(p)\big), \\ p^2Y(p) = X(p) - Y(p) - 1. \end{cases}$$

Решая данную систему, имеем:

$$X(p) = -\frac{3}{p^2(p^2+4)}, Y(p) = -\frac{p^2+3}{p^2(p^2+4)}.$$

Если учесть, что $-\frac{3}{p^2(p^2+4)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right)$ и $-\frac{p^2+3}{p^2(p^2+4)} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4(p^2+4)}$, то получим следующее решение исходной системы:

$$x(t) = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{3}{4}t, \qquad y(t) = -\frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Пример 3. Решить систему:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ \qquad x'' + 2y' + x = 0. \end{cases} \text{при } x(0) = x'(0) = y(0) = 0.$$

Решение. Соответствующая система операторных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} pX(p) - pY(p) - 2X(p) + 2Y(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2}, \\ \qquad p^2X(p) + 2Y(p) + X(p) = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие выражения:

$$X(p) = -\frac{2}{p(p+1)^2}, Y(p) = -\frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} \text{ или}$$

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}.$$

Тогда: $x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}, y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$.

Пример 4. Решить систему:

$$\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z. \end{cases} \text{при } x(0) = z(0) = 0, y(0) = 1.$$

Решение. Составим операторную систему уравнений и её решение:

$$\begin{cases} (p+1)X(p) - Y(p) - Z(p) = 0, \\ -X(p) + (p+1)Y(p) - Z(p) = 1, \\ -X(p) - Y(p) + (p+1)Z(p) = 0. \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2-4)}, \quad Y(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p^2-4)},$$

$$Z(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)}.$$

Если иметь в виду, что:

$$X(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2};$$

$$Y(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2};$$

$$Z(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1},$$

то получим следующее решение:

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t},$$
$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t},$$
$$z(t)=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}.$$

Пример 5. Решить систему:

$$\begin{cases} x''+y'=2\sin t\,, \\ y''+z'=2\cos t\,, \\ \quad z''-x=0. \end{cases} \text{ при } \begin{matrix} x(0)=z(0)=y'(0)=0, \\ x'(0)=y(0)=-1, z'(0)=1. \end{matrix}$$

Решение. Если иметь в виду, что:

$$x'' \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1,$$
$$y'' \risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+1,$$
$$z'' \risingdotseq p^2Z(p)-pz(0)-z'(0)=p^2Z(p)+1,$$
$$y' \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)+1,$$
$$z' \risingdotseq pZ(p)-z(0)=pZ(p),$$

то операторная система имеет вид:

$$\begin{cases} p^2X(p)+pY(p)=-\dfrac{2p^2}{p^2+1}, \\ p^2Y(p)+pZ(p)=-\dfrac{p(p^2-1)}{p^2+1}, \\ \quad -X(p)+p^2Z(p)=1. \end{cases}$$

А её решение: $X(p)=-\frac{1}{p^2+1}$, $Y(p)=-\frac{p}{p^2+1}$, $Z(p)=\frac{1}{p^2+1}$.

Следовательно: $x(t)=-\sin t\,;\quad y(t)=-\cos t\,;\quad z(t)=\sin t$.

Упражнения

В задачах 515-530 решить методом операционного исчисления следующие системы линейных дифференциальных уравнений.

515. $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0. \end{cases}$ при $x(0)=1, y(0)=-1$;

516. $\begin{cases} \quad x'+y=0, \\ y'-2y-2x=0. \end{cases}$ при $x(0)=y(0)=1$;

517. $\begin{cases} x'+x-3y=0, \\ y'-y-x=e^{2t} \end{cases}$ при $x(0)=y(0)=1$;

518. $\begin{cases} x'+x-y=e^t, \\ y'+y-x=e^t \end{cases}$ при $x(0)=y(0)=1$;

519. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + y = \cos t. \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 0$;

520. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0. \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 0$;

521. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t. \end{cases}$ при $x(0) = 2, y(0) = 4$;

522. $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ -y'' + x = 2\sin t. \end{cases}$ при $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = -1$;

523. $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x' - y'' = 2\cos t. \end{cases}$ при $x(0) = y'(0) = 0, x'(0) = y(0) = 2$;

524. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ y'' - 5y' + 4y - x' + x = 0. \\ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, y(0) = 1; \end{cases}$

525. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x + y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0. \\ x(0) = x'(0) = 1, y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$

526. $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t, \\ y' - x = -\sin t. \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 1$;

527. $\begin{cases} x' - 2x + y - z = 0, \\ y' - x - z = 0, \\ z' + 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0$;

528. $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ y'' + x' = sht. \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 1, x'(0) = y'(0) = 0$;

529. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \text{ при } x(0) = 0, y(0) = z(0) = 1; \\ z' = 3x + y. \end{cases}$

530. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \text{ при } x(0) = y(0) = z(0) = 1; \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$

2.2.3. Интеграл Дюамеля

Если функция $f(t)$ непрерывна на $[0; \infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0; +\infty)$ и
$f(t) \risingdotseq F(p), \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \ \risingdotseq \ pF(p)\cdot\Phi(p)$$

или

$$f(t)\varphi(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)d\tau \risingdotseq pF(p)\cdot\Phi(p).$$

Эту формулу называют формулой Дюамеля, а присутствующий здесь интеграл, интегралом Дюамеля.

Интеграл Дюамеля удобно использовать для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и нулевыми начальными данными:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t),$$

$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0.$$

Чтобы решить данную задачу, будем считать, что решение уравнения $L[y]=1$ известно при указанных выше начальных условиях, а затем переходим к соответствующим операторным уравнениям, т.е. $A(p)\cdot Y(p)=F(p)$. Этому соотношению применим формулу Дюамеля и получим следующее:

$$Y(p)=pY_1(p)F(p)\risingdotseq \int_0^t f(\tau)y'_1(t-\tau)d\tau \quad (\text{т.к. } y_1(0)=0).$$

Таким образом, определим $y(t)=\int_0^t f(\tau)y'_1(t-\tau)d\tau$, которое и является решением поставленной задачи.

Применения формулы Дюамеля рассмотрим на примере решения следующей задачи:

Дано уравнение $y''-y=\frac{1}{1+e^t}$.

Требуется найти его решение при начальных условиях $y(0)=y'(0)=0$.

Сначала решаем задачу: $y''_1-y_1=1, y_1(0)=y'_1(0)=0$.

Т.к., $y_1(t)\risingdotseq Y_1(p), 1\risingdotseq\frac{1}{p}$ и $y''_1(t)\risingdotseq p^2Y_1(p)$, это операторное уравнение имеет вид: $p^2Y_1(p)-Y_1(p)=\frac{1}{p}$ и его решением является $Y_1(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}$. Отсюда, получаем $y_1(t)=-1+cht$ и по формуле Дюамеля имеем:

$$y(t)= \quad =\int_0^t\frac{1}{1+e^\tau}\cdot sh(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}(e^t-te^t-1)+sht\cdot\ln\frac{1+e^t}{2}$$

Упражнения

В задачах 531-539 приведены дифференциальные уравнения с соответствующими начальными условиями. Требуется решить их с помощью формулы Дюамеля.

531. $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}$ при $y(0) = y'(0) = 0$;

532. $y'' + y' = \frac{1}{1+e^t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

533. $y'' + y = \frac{1}{2+\cos t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

534. $y'' + y = \frac{1}{1+cos^2 t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

535. $y'' - y = tht$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

536. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

537. $y'' + y = \frac{1}{1+sin^2 t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

538. $y''' + y' = \frac{1}{2+\sin t}$, при $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;

539. $y'' + y = \frac{1}{1+tg^2 t}$, при $y(0) = y'(0) = 0$;

Вопросы для самопроверки

1. Что называется оригиналом?
2. Что называется изображением функции?
3. Как называется процесс перехода от изображения функции к ее оригиналу.?
4. Приведите свойство подобия.
5. Приведите свойство смещения.
6. Как проинтегрировать оригинал?
7. Сформулируйте теорему о свертке.
8. Как отыскать оригинал по изображению?
9. Что такое операторное уравнение?
10. Что такое операторное решение?
11. Как определяется интеграл Дюамеля?

ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3.1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях в частных производных

Многие задачи физики и механики, а также ряд инженерных задач решаются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому, остановимся вкратце на общих понятиях о таких уравнениях.

Дифференциальным уравнением с частными производными называется равенство, содержащее неизвестную функцию от нескольких независимых переменных, независимые переменные и частные производные неизвестной функции по независимым переменным. Порядок старшей частной производной, входящий в состав дифференциального уравнения, называется порядком этого уравнения.

Уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий вид:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где u – неизвестная функция от независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ – её частные производные; F – заданная функция от своих аргументов.

Уравнение вида $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$, есть дифференциальное уравнение второго порядка с искомой функцией z от двух независимых переменных x и y.

Решением уравнения, с частными производными, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, называется функция, обращающая это уравнение в тождество.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Примеры

Пример 1. $\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} = 1$

Решение. Интегрируя по x, получаем $u(x;y) = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция y. Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 2. $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y^2} = 6y$

Решение. Интегрируя по y, получаем $\frac{du}{dy} = 3y^2 + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция x. Интегрируя опять по y, получим $u = y^3 + \varphi(x) \cdot y + \psi(x)$, где $\psi(x)$ – тоже произвольная функция от x.

Пример 3. $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x \partial y} = 1$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial dy}\right) = 1$.

Решение. Интегрируя сначала по x, а потом по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi(y) \text{ и } u = xy + \int \varphi(y)dy + \varphi_1(x)$$

или, обозначая $\int \varphi(y)dy = \varphi_2(y)$, будем иметь $u = xy + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ – произвольные функции.

Пример 4. $\frac{\partial^4 u(x;y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

Решение. Для того, чтобы определить общее решение данного уравнения, сначала интегрируем его два раза подряд по x, а потом – два раза подряд по y. Тогда получим следующее:

$$u = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + y\varphi_3(x) + \varphi_4(x),$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ – произвольные функции.

Таким образом, уравнения с частными производными могут иметь семейство решений, зависящее от произвольных функций (число которых обычно равно порядку уравнения), а не только от произвольных постоянных, как это имеет место в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

В дальнейшем нас будут интересовать уравнения с частными производными второго порядка, причём именно те уравнения, к решению которых приводятся многие важные задачи физики и техники. Эти уравнения называются уравнениями математической физики.

3.2. Основные типы уравнений математической физики

Уравнения математической физики в отличие от уравнений с частными производными второго порядка общего вида являются линейными, т.е. линейно зависят от искомой функции и её частных производных. Так, в случае двух независимых переменных функций $u\ (x;y)$, они имеют вид

$$A(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x;y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+E(x;y)\frac{\partial u}{\partial y}++F(x;y)u=f(x;y). \qquad (1)$$

Если $f(x;y)\equiv 0$, то уравнение (1) называется однородным, а если $f(x;y)\neq 0$, то оно называется неоднородным.

Определение. *Говорят, что указанное выше уравнение (1) в некоторой области D принадлежит эллиптическому типу, если в этой области $B^2-AC<0$. Если же $B^2-AC=0$, то уравнение (1) принадлежит параболическому типу, а если $B^2-AC>0$, то гиперболическому типу.*

Если в уравнение (1) введем обозначение

$$\Phi\left(x;y;u;u'_x;\ u'_y\right)=Du'_x+Eu'_y+Fu-f(x;y),$$

то оно перепишется в следующем виде

$$Au''_{xx}+2Bu''_{xy}+Cu''_{yy}+\Phi\left(x;y;u;u'_x;\ u'_y\right)=0 \qquad (2)$$

По определению, уравнение $u''_{xy}=\Phi_1\left(x;y;u;u'_x;\ u'_y\right)$ называется каноническим уравнением гиперболического типа; уравнение $u''_{yy}=\Phi_2\left(x;y;u;u'_x;\ u'_y\right)$ – каноническим уравнением параболического типа; уравнение $u''_{xx}+u''_{yy}=\Phi_3\left(x;y;u;u'_x;\ u'_y\right)$ – каноническим уравнением эллиптического типа.

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение различных стационарных процессов (электростатика, магнитостатика, потенциальное движение несжимаемой жидкости и т.п.).

Простейшим из них являются уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

и Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x;y).$$

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи о колебаниях сплошных сред и задачи об электромагнитных колебаниях. Простейшим из них является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x;t).$$

Это уравнение описывает вынужденные колебания (в случае $f\ (x,t)\equiv 0$, свободные колебания) струны.

Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных волн в проводящих средах, движение вязкой жидкости. Простейшим из них является уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Оно описывает распространение температуры в однородном стержне без тепловых источников.

Дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + \mathrm{C}(dx)^2 = 0$$

называется характеристическим уравнением (или уравнением характеристик) уравнения (2), а его общие интегралы называются характеристиками (характеристические линии). Знание одной или нескольких характеристик позволяет привести данное уравнение к более простому (каноническому) виду.

а) Для уравнения гиперболического типа уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x;y) = C_1$, $\psi(x;y) = C_2$, т.е. существуют два семейства действительных характеристик.

С помощью замены переменных $\xi = \varphi(x;y)$, $\eta = \psi(x;y)$ дифференциальное уравнение (2) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} - \Phi_1(\xi, \eta, u, u'_{\xi}, u'_{\eta}) = 0.$$

А если дополнительно положим, что $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ и $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$, то получим уравнение вида

$$u''_{\alpha\alpha} - u''_{\beta\beta} + \Phi_1(\alpha;\ \beta; u;\ u'_{\alpha};\ u'_{\beta}) = 0$$

б) Для уравнения эллиптического типа интегралы уравнения характеристик имеют вид

$$\varphi(x;y) \pm i\psi(x;y) = C_{1,2},$$

где $\varphi(x;y)$ и $\psi(x;y)$ – действительные функции.

С помощью подстановки $\xi = \varphi(x;y), \eta = \psi(x;y)$ уравнение (2) приводится к каноническому виду:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \Phi_2(\xi; \eta; u; u'_{\xi}; u'_{\eta}) = 0$$

в) Для уравнения параболического типа оба семейства характеристик совпадают, т.е. уравнение характеристик даёт лишь один интеграл $\varphi(x;y) = \mathrm{C}$. В этом случае нужно произвести замену переменных

$$\xi = \varphi(x;y), \eta = \psi(x;y),$$

где $\varphi(x;y)$ и $\psi(x;y)$ функции, для которых $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$

После такой замены уравнение (2) приводится к каноническому виду:

$$u''_{\eta\eta} + \Phi_3(\xi; \eta; u; u'_\xi; u'_\eta) = 0$$

Примеры

Пример 1. Определить тип, а затем привести к каноническому виду уравнение $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$.

Решение. Здесь $A = x^2, B = 0, C = -y^2$,

$$B^2 - AC = x^2 y^2 > 0;$$

следовательно, это уравнение гиперболического типа.

Составляем характеристическое уравнение:

$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$ или $(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$.

Получаем два дифференциальных уравнения

$$xdy + ydy = 0 \quad \text{и} \quad xdy - ydx = 0;$$

Интегрируя их, находим $xy = C_1$ и $\frac{y}{x} = C_2$ – уравнения двух семейств характеристик. Введем новые переменные $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$.

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = y u'_\xi - \frac{y}{x^2} u'_\eta$,

$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = x u'_\xi - \frac{1}{x} u'_\eta$,

$u''_{xx} = \left(y u'_\xi - \frac{y}{x^2} u'_\eta\right)'_x = y(u''_{\xi\xi}\xi'_x + u''_{\xi\eta}\eta'_x) - \frac{y}{x^2}(u''_{\xi\eta}\xi'_x + u''_{\eta\eta}\eta'_x) +$

$+u'_\eta 2\frac{y}{x^3} = u''_{\xi\xi} y^2 - 2\frac{y^2}{x^2} u''_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u''_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3} u'_\eta$,

$$u''_{yy} = \left(x u'_\xi + \frac{1}{x} u'_\eta\right)'_y = x(u''_{\xi\xi}\xi'_y + u''_{\xi\eta}\eta'_y) + \frac{1}{x}(u''_{\eta\xi}\xi'_y + u''_{\eta\eta}\eta'_y) =$$

$$= x^2 u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u''_{\eta\eta}$$

Подставив в данное дифференциальное уравнение найденные для u''_{xx} и u''_{yy} выражения, получим $u''_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u'_\eta = 0$, т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

Пример 2. Определить тип, а затем привести к каноническому виду уравнение $u''_{xx} - 2u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0$.

Решение. Здесь $A = 1, B = -1, C = 2, B^2 - AC = -1 < 0$, т.е. уравнение эллиптического типа. Уравнение характеристик имеет вид $(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0$ или $\left(y'\right)^2 + 2y' + 2 = 0$. Отсюда $y' = -1 \pm i$; получаем два семейства мнимых характеристик:

$$y + x - ix = C_1 \text{ и } y + x + ix = C_2 .$$

Произведя замену переменных $\xi = y + x, \eta = x,$ имеем

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x = u'_\xi + u'_\eta ,$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot \xi'_y + u'_\eta \cdot \eta'_y = u'_\xi ,$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot \xi'_x + u'_{\xi\eta} \cdot \eta'_x + u''_{\eta\xi} \cdot \xi'_x + u''_{\eta\eta} \cdot u'_{\eta\eta} == u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} ,$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi}, \qquad u''_{xy} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}$$

Подставив найденные выражения в дифференциальное уравнение, получаем $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$.

Пример 3. Определить тип, а затем привести к каноническому виду уравнение

$$x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0.$$

Решение. Здесь $A = x^2, B = xy, C = y^2,$

$B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$ т.е. уравнение параболического вида. Характеристическое уравнение имеет вид

$$x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0, \text{или } (xdy - ydx)^2 = 0.$$

Разделяя в равнении $xdy - ydx = 0$ переменные и интегрируя, имеем $\frac{y}{x} = C$.

Произведем замену переменных: $\xi = \frac{y}{x}$ и $\eta = y$ (произвольная функция). Тогда получим

$$u'_x = -\frac{y}{x^2}u'_\xi , \quad u'_y = \frac{1}{x}u'_\xi + u'_\eta ,$$

$$u''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2}u'_\xi\right)'_x = -\frac{y}{x^2}\left(u''_{\xi\xi}\xi'_x + u''_{\xi\eta}\eta'_x\right) + u'_\xi\frac{2y}{x^3} = u''_{\xi\xi}\frac{y}{x^4} + u'_\xi\frac{2y}{x^3} ,$$

$$u''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2}u'_\xi\right)'_y = -\frac{y}{x^2}\left(u''_{\xi\xi}\frac{1}{x} + u''_{\xi\eta}\right) - \frac{1}{x^2}u'_\xi ,$$

$$u''_{yy} = \left(\frac{1}{x}u'_\xi + u'_\eta\right)'_y = \frac{1}{x}\left(u''_{\xi\xi}\frac{1}{x} + u''_{\xi\eta}\right) + \frac{1}{x}u''_{\eta\xi} + u''_{\eta\eta} .$$

Подставив эти найденные выражения в данное уравнение, получаем $u''_{\eta\eta} = 0$. Это и есть искомое каноническое уравнение.

Упражнения

Определить тип, а затем привести к каноническому виду следующие уравнения.

540. $u''_{xx} - 4u''_{xy} - 3u''_{yy} - 2u'_x + 6u'_y = 0;$

541. $\frac{1}{x^2}u''_{xx} + \frac{1}{y^2}u''_{yy} = 0;$

542. $y^2u''_{xx} + x^2u''_{yy} - \frac{x^2}{y}u'_y - \frac{y^2}{x}u'_x = 0;$

543. $y^2u''_{xx} + x^2u''_{yy} - 2xu'_x = 0;$

544. $xyu''_{xx} + u''_{yy} + \frac{7}{2}u'_x - \frac{1}{2y}u'_y = 0;$

545. $u''_{xx} - xu''_{yy} = 0;$

546. $u''_{xx} + xu''_{yy} = 0;$

547. $\sin^2 x \cdot u''_{xx} - 2y\sin x \cdot u''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0;$

548. $y^2u''_{xx} - 2xyu''_{xy} - x^2u''_{yy} = 0;$

549. $u''_{xx} + 2u''_{xy} - \cos^2 x \cdot u''_{yy} - \mathrm{ctg}x\left(u'_x + u'_y\right) = 0;$

550. $25u''_{xx} + 6u''_{xy} + u''_{yy} = 0.$

3.3. Аналитические методы решения уравнений математической физики

3.3.1. Метод Даламбера

Обычно решение уравнения колебания струны по методу характеристик называется методом Даламбера. Согласно этому методу уравнение $u''_{tt} = a^2u''_{xx}$, с помощью замены $\xi = x + at$ и $\eta = x - at$ приводится к виду $u''_{\xi\eta} = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид $u(\xi;\eta) = \varphi(\xi) + F(\eta)$. Здесь $\varphi(\xi)$ и $F(\eta)$ являются дважды дифференцируемыми функциями, для определения которых используются данные – начальные и краевые условия задачи. Теперь, если решение выразим относительно x и y, то оно выглядит так:

$$u(x;t) = \Phi(x + at) + F(x - at),$$

где Φ и F – произвольные, дважды дифференцируемые функции. Слагаемые $F(x - at)$ и $\Phi(x + at)$ определяют волны прямую и обратную. График функции $F(x - at)$ является кривой $y = F(x)$, сдвинутой на at, аналогичным образом график $\Phi(x + at)$ получается из графика $y = \Phi(x)$, сдвинутом на $-a$.

Если для колебания струны рассмотрим задачу Коши при $-\infty < x < +\infty$ (струна бесконечной длины), то функции Ф и F определяются по заданным начальным условиям, как

$$u(x;0) = \varphi(x) \text{ и } u'_t(x;0) = \psi(x),$$

и решение вычисляется по формуле (формула Даламбера):

$$u(x;t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz.$$

Если задача о колебаниях струны рассматривается для случая $0 \le x < +\infty$ (полубесконечная струна), то помимо указанных выше начальных условий еще должно задаваться граничное условие. В частности, если струна закреплена в точке $x = 0$, то граничное условие будет $u(0;t) = 0$, а если струна не закреплена в точке $x = 0$, то граничное условие $u'_{xx}(0;t) = 0$. Эти задачи решаются аналогично задаче о колебаниях бесконечной струны. Если край струны закреплен в точке $x = 0$, то функции заданные в начальных условиях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжают по всей числовой оси нечётным образом, а если край струны не закреплена в точке, то эти функции продолжают по всей числовой оси чётным образом.

Примеры

Пример 1. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ в $-\infty < x < \infty$, если $u(x;0) = \frac{\sin x}{x}, u'_t(x;0) = 0$.

Решение. Так как a = 1, а $\psi(x) = 0$, то по формуле Даламбера:

$$u(x;t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(x-t)}{x-t} + \frac{\sin(x+t)}{x+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x[\sin(x-t) + \sin(x+t)] + t[\sin(x-t) - \sin(x+t)]}{x^2 - t^2} =$$

$$= \frac{x\sin x\cos t - t\cos x\sin t}{x^2 - t^2}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения $u''_{tt} = 4u''_{xx}$ в $\{0 \le x < \infty; 0 < t < \infty\}$ при следующих условиях:

$$u(x;0) = 0, u'_t(x;0) = \sin x \text{ и } u'_x(0;t) = 0.$$

Решение. Так как a = 2, $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = \sin x$. Этих функций продолжим на $-\infty < x < 0$ чётным образом: $\varphi(-x) = 0, \psi(-x) = \sin x$. Тогда, применяя формулу Даламбера получим:

$$u(x;t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\sin z\,dz=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos z\left|\begin{matrix}x+2t\\x-2t\end{matrix}\right.=\frac{1}{4}[\cos(x-2t)-\cos(x+2t)]=$$

$$=\frac{\sin x\sin 2t}{2}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $u''_{tt}=9u''_{xx}$ в области $\{0\le x<\infty;0<t<\infty\}$ при следующих условиях:

$$u(x,0)=x^2,\ u'_t(x,0)=0 \text{ и } u(0,t)=0.$$

Решение. Здесь функцию $\varphi(x)=x^2$ на $-\infty<x<0$ продолжим нечётным образом, т.е.:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, \text{если } x\ge 0,\\ -x^2, \text{если } x<0;\end{cases}$$

Тогда по формуле Даламбера имеем:

$$u(x,t)=\frac{\varphi_1(x+3t)+\varphi_1(x-3t)}{2}=\begin{cases}x^2+9t^2, \text{если } t\le\dfrac{x}{3},\\ 6xt, \text{если } t>\dfrac{x}{3}>0.\end{cases}$$

Пример 4. Найти решение уравнения $u''_{tt}=2u''_{xx}$, если $u(x,0)=x,\ u'(x,0)=-x$.

Решение. Так как данная задача поставлена в области $\{-\infty<x<+\infty;0<t<\infty\}$, то непосредственно воспользуемся формулой Даламбера, т.е.:

$$u(x;t)=\frac{x-\sqrt{2}t+x+\sqrt{2}t}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t}(-z)dz=$$

$$=x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(x+\sqrt{2}t\right)^2-\left(x-\sqrt{2}t\right)^2\right]=x(1-t)$$

Следовательно, решение: $u(x;t)=x(1-t)$.

Упражнения

В задачах 551-560, решить данные уравнения при соответствующих начально-краевых условиях.

551. $u''_{tt}=u''_{xx}, u(x;0)=\frac{x}{1+x^2}, u'_t(x;0)=\sin x;$

552. $u''_{tt}=4u''_{xx}, u(x;0)=\frac{sinx}{x}, u'_t(x;0)=\frac{x}{1+x^2};$

553. $u''_{tt}=9u''_{xx}, u(x;0)=x^2,\ u'_t(x;0)=0;$

554. $u''_{tt} = 9u''_{xx}, u(x;0) = 0,\ u'_t(x;0) = x$;
555. $u''_{tt} = 4u''_{xx}, u(x;0) = \frac{1}{1+x^2},\ u'_t(x;0) = \cos x$;
556. $u''_{tt} = u''_{xx}, u(x;0) = e^{-x^2},\ u'_t(x;0) = \frac{x}{1+x^2}$;
557. $u''_{tt} = u''_{xx}, u(x;0) = e^{-x^2}, u'_t(x;0) = \sin x, u(0;t) = 0$;
558. $u''_{tt} = u''_{xx}, u(x;0) = \frac{x^2}{1+x^2}, u'_t(x;0) = 0,\ u(0;t) = 0$;
559. $u''_{tt} = 3u''_{xx}, u(x;0) = \cos x,\ u'_t(x;0) = 0,\ u'_x(0;t) = 0$;
560. $u''_{tt} = u''_{xx}, u(x;0) = 0, u'_t(x;0) = sin^2 x,\ u'_x(0;t) = 0$.

3.3.2. Метод Фурье

Для того чтобы решить уравнения математической физики при данных начальных и краевых условиях по методу Фурье (или метод разделения переменных) неизвестная функция ищется в виде произведения двух функций, которые зависят только от одной из разных независимых переменных. Суть метода Фурье изложим относительно уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности.

1. Уравнение колебания струны. Пусть требуется найти решение уравнения

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x)$$

и граничным (краевым) условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Будем искать решение данного уравнения в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

В силу граничных условий функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0.$$

Подставляя их в исходное уравнение, получим

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \text{ или } \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку левая часть равенства не зависит от x, а правая от t, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда правая и левая части равны постоянной. Обозначим ее $-\lambda$ (постоянная разделения):

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что $X(x)$ и $T(t)$ должны быть решениями уравнений

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ и } T'' + a^2\lambda T = 0.$$

Это, однородные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Сначала находим их общее решение, а затем, исходя из данных начальных и граничных условий задачи, находим соответствующие частные решения. Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Здесь a_n и b_n – коэффициенты Фурье, которые определяются по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

2. **Уравнение теплопроводности**. Известно, что если тело является стержнем, направленным по оси *Ox*, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$u_t' = a^2u_{xx}''$$

Рассмотрим следующие три случая:

а) Случай неограниченного стержня. Ставится задача о нахождении решения $u(x;t)$ уравнения

$u_t' = a^2u_{xx}''$, $t > 0,\ -\infty < x < +\infty,$ удовлетворяющего начальному условию $u(x;0) = f(x)$.

Применив метод Фурье, получаем решение уравнения в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}d\tau$$

б) Случай стержня, ограниченного, с одной стороны.

В данном случае, решение уравнения $u'_t = a^2u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x;0) = f(x)$ и краевому условию $u(0;t) = \varphi(t)$ выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(\tau)\left[e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4a^2t}}\right]d\tau +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \varphi(\sigma)\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\sigma)}}(t-\sigma)^{-\frac{3}{2}}d\sigma$$

в) Случай стержня, ограниченного с обоих концов $x=0$ и $x=l$. Здесь задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения $u'_t=a^2u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=f(x)$ и двум краевым условиям, $u(0,t)=u(l,t)=0$ или $u'_x(0;t)=u'_x(l;t)=0$.

В этом случае решением является ряд

$$u(x;t)=\sum_{n=l}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{1}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

для краевых условий $u(0;t)=u(l;t)=0$ и ряд

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x+a_0$$

для краевых условий $u'_x(0;t)=u'_x(l;t)=0$.

Здесь:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx$$

Примеры

Пример 1. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=y$ имеет в начальный момент форму параболы $u=2x(4-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

Решение. Так как по условию задачи имеем следующие начальные данные:

$$\varphi(x)=2x(4-x) \text{ и } \psi(x)=0,$$

а также $u(0,t)=u(4,t)=0$, то вычислим коэффициенты Фурье a_n и b_n.

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 2x(4-x)\sin\frac{n\pi}{4}xdx=\int_0^4(4x-x^2)\sin\frac{n\pi}{4}xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u_1=4x-x^2, & dv_1=\sin\frac{n\pi}{4}xdx \\ du_1=(4-2x)dx, & v_1=-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}(4x-x^2)\cos\frac{n\pi}{4}x\Big|_0^4+$$

$$+\frac{4}{n\pi}\int_0^4(4-2x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx=\frac{8}{n\pi}\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u_1=2-x, & dv_1=\cos\frac{n\pi}{4}xdx \\ du_1=-dx, & v_1=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{8}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}(2-x)\sin\frac{4}{n\pi}x\Big|_0^4+\int_0^4\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}xdx\right]=$$

$$=\frac{32}{n^2\pi^2}\int_0^4\sin\frac{n\pi}{4}xdx=-\frac{128}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{4}x\Big|_0^4=$$

$$=-\frac{128}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)=\frac{128}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n], b_n=0$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{128}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi a}{4}t\sin\frac{n\pi}{4}x$$

или

$$u(x,t)=\frac{256}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{4}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}x$$

Пример 2. Найти решение уравнения колебания, струны, если $u(0,t)=u(2,t)=0$ и $u(x,0)=\varphi(x)=0,\ u'_t(x,0)=\cos\frac{x}{2}$.

Решение. Здесь $a_n=0$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^2 \cos\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{2}xdx =$$

$$= \frac{1}{n\pi a}\int_0^2 \left[\sin\frac{(n\pi+1)x}{2} + \sin\frac{(n\pi-1)}{2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi a}\left[-\frac{2}{n\pi+1}\cos\frac{(n\pi+1)x}{2} - \frac{2}{n\pi-1}\cos\frac{(n\pi-1)}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{-2}{n\pi a}\left[\frac{\cos(n\pi+1)}{n\pi+1} - \frac{1}{n\pi+1} + \frac{\cos(n\pi-1)}{n\pi-1} - \frac{1}{n\pi-1}\right] =$$

$$= \frac{-2}{n\pi a}\cdot\frac{2n\pi}{n^2\pi^2-1}(\cos n\pi\cos 1 - 1) = \frac{4[1-(-1)^n\cos 1]}{a(n^2\pi^2-1)}$$

Следовательно, имеем:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4[1-(-1)^n\cos 1]}{a(n^2\pi^2-1)}\sin\frac{n\pi a}{2}t\cdot\sin\frac{n\pi a}{2}x.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $u'_t = a^2 u''_{xx}$ удовлетворяющего начальному условию

$$u(x;0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2, \text{если } -1 < x < 2 \\ 0, \text{если } x < -1 \text{ или } x > 2 \end{cases}$$

в области $\{-\infty < x < +\infty; 0 < t < \infty\}$.

Решение. Стержень является бесконечным, поэтому решение запишется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)e^{\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{2} 2\, e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}d\tau =$$

$$\left[\begin{matrix}\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t}} = z \\ d\tau = -2a\sqrt{t}dz\end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-2}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{x-2}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz.$$

Если здесь имеем в виду, что

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$

(функция Лапласа), то последнее выражение пишется так:

$$u(x,t)=\Phi\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-2}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Замечание. Существуют таблицы значений функции Лапласа.

Пример 4. Найти решение уравнения $u'_t=u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x;0)=f(x)=3$ и краевому условию $u(0;t)=0$.

Решение. Здесь мы имеем дифференциальное уравнение теплопроводности для полу бесконечного стержня. Решение, удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид:

$$u(x;t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}3\left[e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4t}}\right]d\tau.$$

Полагая $\frac{x-\tau}{2\sqrt{t}}=z$ в первом интеграле и $\frac{x+\tau}{2\sqrt{t}}=z$ во втором интеграле, а затем пользуясь функцией Лапласа, получим следующее решение данной задачи:

$$u(x;t)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz-\frac{3}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-z^2}dz=$$

$$=\frac{3}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]=3\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Здесь: $\Phi\ (+\infty)=\pm1$

Пример 5. Найти решение уравнения $u'_t=4u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x;0)=f(x)=x$ и краевым условиям: $u(0;t)=u(2;t)=0$

Решение. В данной задаче рассматривается случай стержня, ограниченного с обоих концов $x=0$ и $x=2$.

Поэтому определим b_n :

$$b_n=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\begin{bmatrix}u=x, & du=dx\\ & dv=\sin\frac{n\pi}{2}xdx\\ & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\end{bmatrix}=-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{2}x\Bigg|_0^2$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi}{2}xdx=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^4=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi.$$

Очевидно, что искомое решение имеет вид:

$$u(x;t)=\frac{4}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Упражнения

561. Найти решение уравнения $u''_{tt}=4u''_{xx}$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}x, & \text{если } 0\le x\le 2\\ (4-x), & \text{если } 2\le x\le 4\end{cases}$$

$u'_t(x,0)=\psi(x)=0$ и граничным (краевым) условиям $u(0,t)=u(4,t)=0$

562. Струна закреплена на концах x=0 и x=2. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается функцией $u'_t(x,0)=sin\frac{x}{2}$. Найти форму струны для любого момента времени t (в уравнение принимать $a=3$).

563. Найти решение уравнения $u'_t=u''_{xx}$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } 0<x<1\\ (2-x), & \text{если } 1<x<2\end{cases}$$

и краевым условиям:

$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

564. Найти решение уравнения теплопроводности $u'_t=9u''_{xx}$, если левый конец $\text{x}=0$ полубесконечного стержня теплоизолирован, а начальное распределение температуры

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 2, & \text{если } 0<x<3\ ;\\ 0, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

565. Найти решение уравнения $u'_t=u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=f(x)=\frac{3x(4-x)}{16}$ и краевым условиям:

$$u(0,t)=u(4,t)=0$$

566. Найти решение уравнения $u'_t=4u''_{xx}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=f(x)=x^2$ и краевым условиям: $u'_x(0,t)=u'_x(3,t)=0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциальным уравнением в частных производных?

2. Что является решением дифференциального уравнения в частных производных?

3. Какое уравнение называется однородным?

4. Какие уравнения в частных производных принадлежат к уравнениям математической физики?

5. Какое уравнение математической физики принадлежит к эллиптическому типу?

6. Какое уравнение математической физики принадлежит к параболическому типу?

7. Какое уравнение математической физики принадлежит к гиперболическому типу?

8. Запишите уравнение Лапласа.

9. В каких областях физики используются уравнения эллиптического типа?

10. В каких областях физики используются уравнения гиперболического типа?

11. Запишите уравнение колебания струны.

12. Что называется характеристическим уравнением?

13. Как привести уравнение к каноническому типу?

14. Какая замена используется в методе Даламбера?

15. В чем заключается метод Фурье?

16. Запишите уравнение теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – Москва : Высшая школа, 2001. – 445 с.

2. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – Москва : Наука, 1989. – 477 с.

3. Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. А. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – Москва : Наука, 1998.– 415 с.

4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Изд-во МГУ, 2009. – 520 с.

5. Шелковников, Ф.А. Сборник упражнений по операционному исчислению/Ф.А. Шелковников, К.Г. Такайшвили. – Москва : Высшая школа, 1996.– 236 с.

Шодмонов Гани
Пирматов Шамшод Тургунбоевич
Абдукаримов Абдали
Подкур Полина Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 29.08.2022. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,5
Тираж 100 экз. Заказ......
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр Кузбасского государственного технического
университета имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а