Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Кузбасский государственный технический
университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители: Ащеулова А. С., Карнадуд О. С.

МАТЕМАТИКА: ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий
и сооружений» в качестве электронного учебного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2022

Рецензенты:

Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Ащеулова Алена Сергеевна

Карнадуд Олеся Сергеевна

Математика: введение в математический анализ функции одной переменной : материалы для обучающихся всех направлений всех специальностей, изучающих дисциплины «Математика», «Специальные главы математики» всех форм обучения / сост. А. С. Ащеулова, О. С. Карнадуд ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2022. – Текст : электронный

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Специальные главы математики».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу «Математический анализ одной переменной» и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех направлений всех специальностей всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математический анализ одной переменной».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2022
© Ащеулова А. С.
© Карнадуд О. С.
составление, 2022

Оглавление

Введение

Дисциплина входит в Блок 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП. Цель дисциплины – получение обучающимися знаний, умений, навыков и опыта профессиональной деятельности, для формирования способности осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Результаты обучения по дисциплине определяются индикаторами достижения компетенций

✓ анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие;

✓ осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи;

✓ рассматривает возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

Результаты обучения по дисциплине:

✓ знать основные понятия и теоремы математики;

✓ уметь работать со справочной литературой; применять полученные знания в области математики для решения поставленных задач;

✓ владеть основными техниками математических расчетов.

Данное пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» и состоит из введения, трех глав, списка литературы. Каждая глава содержит необходимый теоретический материал и заканчивается заданиями для самостоятельной работы. Пособием могут пользоваться обучающиеся как заочной, так и очной формы обучения 1 курса всех направлений подготовки.

Глава 1. Функция

1.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому значению переменной $x \in X$ по некоторому правилу ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что между переменными существует **функциональная зависимость** $y = f(x)$. Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а y – **зависимой переменной** или **функцией.** Говорят еще, что функция f **отображает** множество X на множество Y (f: $X \to Y$).

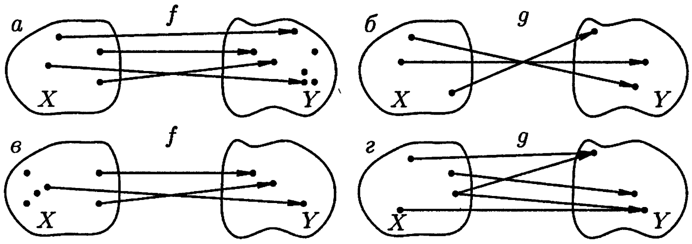


Рис. 1. Примеры функций

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 1 *а* и *б*, являются функциями, а *в* и *г* – нет. В случае *в* – не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех Y называется **множеством значений** функции f и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости xOy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

1.2. Способы задания функции

1) Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул.

Если функция задана уравнением, неразрешенным относительно *y*, то говорят, что функция задана **неявно** и записывают $f(x, y) = 0$.

Если соответствующие друг другу значения *x* и *y* выражены через третью переменную (например *t*), называемую **параметром**, то говорят, что функция задана **параметрически**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Функция может быть задана также различными аналитическими выражениями на разных участках.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию y = f(x).

Пример 1. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, тогда уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет неявную зависимость *x* от *y*. Иногда можно найти явную зависимость между *x* и *y*. В нашем случае фиксируя *x*, находим $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ при $|x| \le 1$. Точке *x* соответствует два значения *y*, эту неопределенность можно устранить каким-нибудь дополнительным способом. Например, можно потребовать, чтобы $y \ge 0$, тогда $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2)Графический способ: задается график функции. Значения функции *y*, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

Пример 2. Функции задана графически (рис. 2).

Рис. 2. Графическое задание функции

3)Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Пример 3. Рост числа научных изданий y, начиная с 1750г. С интервалом в 50 лет, в зависимости от года x, выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750г.	1800г.	1850г.	1900г.	1950г.
y	10	100	1000	10000	100000

1.3. Основные свойства функций

Под основными свойствами функции $y = f(x)$ будем понимать следующие шесть свойств:

1) Область определения *D (f)*.

2) Область значений *E (f)*.

3) Четность, нечетность.

4) Монотонность.

5) Ограниченность.

6) Периодичность.

Четность, нечетность. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется **четной,** если $\forall\ x \in D$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$; **нечетной**, если $\forall\ x \in D$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$; **ни четной ни нечетной** если $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной – относительно начала координат.

Пример 4. Функция $y = x^n$ при четном n является четной функцией (так как $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$).

Функция $y = x^n$ при нечетном n является нечетной функцией (так как $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$).

Функция $y = x + x^2$ является функцией общего вида. Действительно $f(-x) = y = -x + (-x)^2 = -x + x^2 \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

Монотонность. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$ то функция называется **возрастающей** на множестве D_1; $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется **неубывающей** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$ то функция называется **убывающей** на множестве D_1; $f(x_1) \geq f(x_2)$ то функция называется **невозрастающей** на множестве D_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – **строго монотонными.** Интервалы, в которых функция монотонна, называются **интервалами монотонности.**

Пример 5. На рисунке 3, функция, заданная графиком, убывает на интервале (-2; 1), не убывает на интервале (1; 5), возрастает на интервале (3; 5).

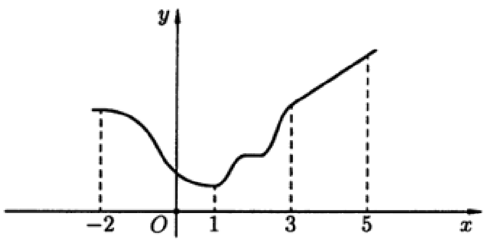


Рис. 3. Пример монотонности функции

Пример 6. Функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей действительной оси.

Функция $y = 0{,}1^x$ является строго убывающей на всей действительной оси.

Ограниченность. Функцию $y = f(x)$ определенную на множестве D называют **ограниченной** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. (Рис.4)

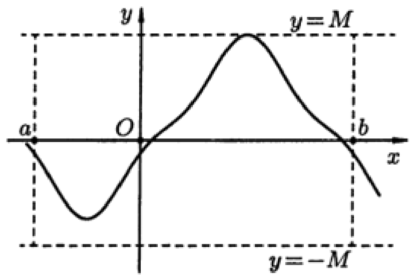


Рис. 4. Ограниченная функция

Пример 7. Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in R$.

Периодичность. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется **периодической** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется **периодом** функции. Если T – период функции, то ее периодами будут также числа kT, где $k = \pm 1; \pm 2, ...$

Пример 7. Тригонометрические функции являются периодичными.

1.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in$ Е соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ *с* областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется **обратной** *к* функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(x)$. (Рис. 5)

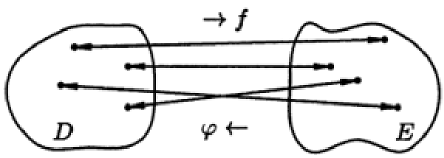


Рис. 5. Обратная функция

Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются **взаимно обратными**. Чтобы найти функцию $\varphi(y)$ *о*братную к функции $f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

Пример 8. Для функции $y = 2x^2$ обратной функцией является функция $x = \sqrt{\dfrac{y}{2}}$.

Из определения обратной функции вытекает, что функция y = f (x) имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая **строго монотонная функция имеет обратную.** При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$. (Рис. 6)

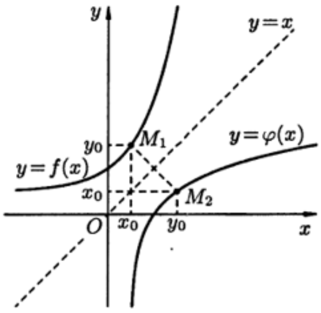
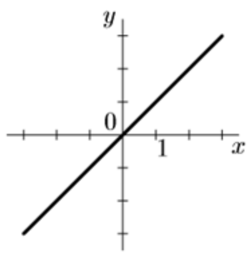


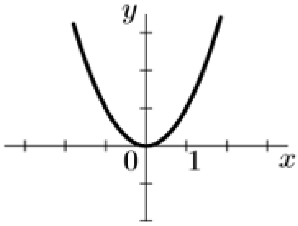
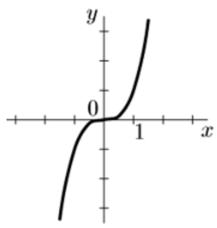
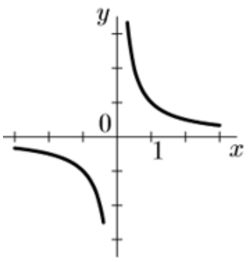
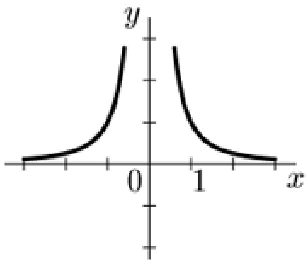
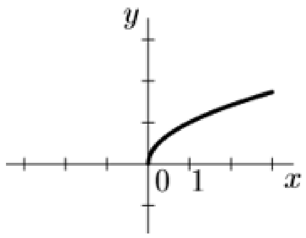
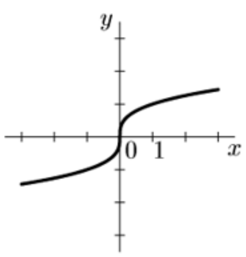
Рис. 6. Построение взаимно обратных функций

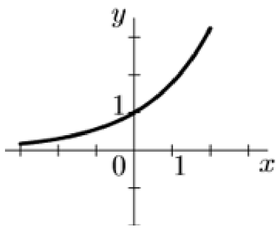
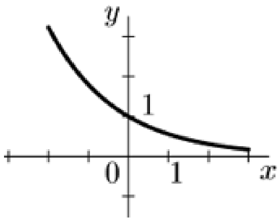
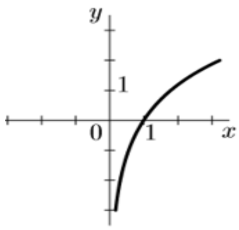
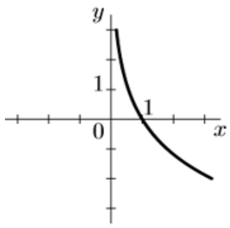
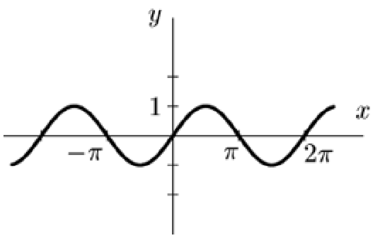
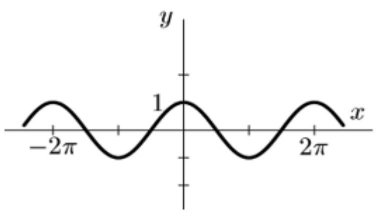
1.5. Основные элементарные функции и их графики

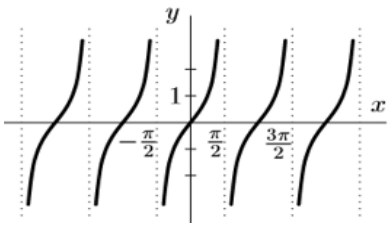
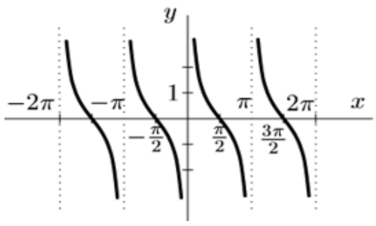
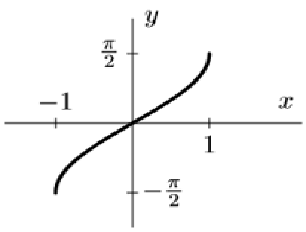
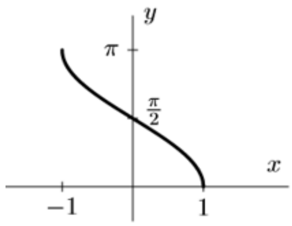
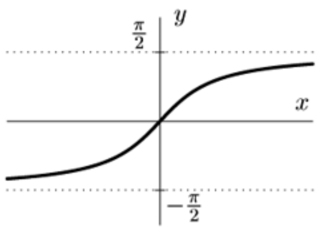
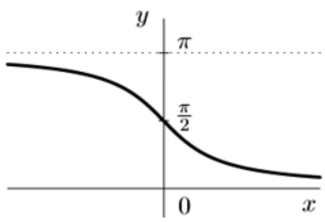
Прежде чем ввести необходимые определения отметим, что функции, называемые элементарными, были первыми функциями, которые подверглись математиками наиболее детальному изучению и начали широко использоваться в приложениях математики.

К *основным элементарным функциям* относят пять классов функций:

Формула	График	Свойства
1. Степенные функции $y = x^n$ $(n \in R)$;		
$y = x$		1) $D = (-\infty; +\infty)$; 2) $E = (-\infty; +\infty)$; 3) нечетная; 4) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.

Формула	График	Свойства
$y = x^n$ n-четное		1) $D = (-\infty;+\infty)$; 2) $E = [0;+\infty)$; 3) четная; 4) убывает $(-\infty; 0]$, возрастает $[0;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y = x^n$ n-нечетное		1) $D = (-\infty;+\infty)$; 2) $E = (-\infty;+\infty)$; 3) нечетная; 4) возрастает $(-\infty;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y=x^{-n}$ n-нечетное		1) $D = (-\infty;+\infty) \cup \{0\}$; 2) $E = (-\infty;+\infty) \cup \{0\}$; 3) нечетная; 4) убывает $(-\infty; 0) \cup (0;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y=x^{-n}$ n-четное		1) $D = (-\infty;+\infty) \cup \{0\}$; 2) $E = (0;+\infty)$; 3) четная; 4) возрастает $(-\infty; 0)$, убывает $(0;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y=\sqrt[n]{x}$ n-четное		1) $D = [0;+\infty)$; 2) $E = [0;+\infty)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) возрастает $[0;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y=\sqrt[n]{x}$ n-нечетное		1) $D = (-\infty;+\infty)$; 2) $E = (-\infty;+\infty)$; 3) нечетная; 4) возрастает $(-\infty;+\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.

Формула	График	Свойства
2. Показательные функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$;		
$y = a^x$, $a > 1$		1) $D = (-\infty; +\infty)$; 2) $E = (0; +\infty)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) возрастает $(-\infty; +\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y = a^x$, $0 < a < 1$		1) $D = (-\infty; +\infty)$; 2) $E = (0; +\infty)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) убывает $(-\infty; +\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
3. Логарифмические функции $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$;		
$y = \log_a x$ $a > 1$		1) $D = (0; +\infty)$; 2) $E = (-\infty; +\infty)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) возрастает $(0; +\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
$y = \log_a x$ $0<a<1$		1) $D = (0; +\infty)$; 2) $E = (-\infty; +\infty)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) убывает $(0; +\infty)$; 5) неограниченная; 6) непериодическая.
4. Тригонометрические функции		
$y = \sin x$		1) $D = (-\infty; +\infty)$; 2) $E = [-1; 1]$; 3) нечетная; 4) возрастает $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n]$; 5) убывает $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$; 6) ограниченная $\lvert\sin x\rvert \leq 1$; 7) периодическая $T = 2\pi$.
$y = \cos x$		1) $D = (-\infty; +\infty)$; 2) $E = [-1; 1]$; 3) четная; 4) возрастает $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$; 5) убывает $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$; 6) ограниченная $\lvert\cos x\rvert \leq 1$; 7) периодическая $T = 2\pi$.

Формула	График	Свойства
$y = \mathrm{tg}\, x$		1) $D = (-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$; 2) $E = (-\infty;\ +\infty)$; 3) нечетная; 4) возрастает $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$; 5) неограниченная; 6) периодическая $\mathrm{T} = \pi$.
$y = \mathrm{ctg}\, x$		1) $D = (\pi\mathrm{n};\ \pi + \pi\mathrm{n})$; 2) $E = (-\infty;\ +\infty)$; 3) нечетная; 4) убывает $(\pi n;\ \pi + \pi n)$; 5) неограниченная; 6) периодическая $T = \pi$.
5. Обратные тригонометрические функции		
$y = \arcsin x$		1) $D = [-1;\ 1]$; 2) $E = [-\pi/2;\ \pi/2]$; 3) нечетная; 4) возрастает $[-1;\ 1]$; 5) ограниченная $\lvert\arcsin x\rvert \le \pi/2$; 6) непериодическая.
$y = \arccos x$		1) $D = [-1;\ 1]$; 2) $E = [0;\ \pi]$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) убывает $[-1;\ 1]$; 5) ограниченная $0 \le \arcsin x \le \pi$; 6) непериодическая.
$y = \mathrm{arctg}\, x$		1) $D = (-\infty;\ +\infty)$; 2) $E = (-\pi/2;\ \pi/2)$; 3) нечетная; 4) возрастает $(-\infty;\ +\infty)$; 5) ограниченная $\lvert\mathrm{arctg}\, x\rvert < \pi/2$; 6) непериодическая.
$y = \mathrm{arcctg}\, x$		1) $D = (-\infty;+\infty)$; 2) $E = (0;\ \pi)$; 3) ни четная, ни нечетная; 4) убывает $(-\infty;\ +\infty)$; 5) ограниченная $0 < \mathrm{arcctg}\, x < \pi$; 6) непериодическая

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными**.

Функция $y = x + \sin x^2$ является элементарной, так как она получена из основных элементарных функций.

1.6. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall\ x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется **сложной функцией** от $\boldsymbol{x}$ (или **суперпозицией** заданных функций, или **функцией от функции**).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют **промежуточным аргументом** сложной функции.

Пример 9. Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

Задания для самостоятельной работы

№1.1 Дана функция $f(x) = x^2$ вычислить $\dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}$, $f\left(\dfrac{a+h}{2}\right) - f\left(\dfrac{a-h}{2}\right)$.

№1.2 Найдите значение функции:

а) $f(x) = tg 2x$ в точках a, $b - 1$;

б) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{3}$ в точках z, $h + \pi$.

№1.3 Пусть $f(x) = -3x + 2$. Найдите: $f(f(1))$; $f(f(x))$.

№1.4 Пусть $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$. Найдите: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $f(2x-1)$; $f(f(5))$; $f(f(x))$.

№1.5 Найдите область значений каждой из функций:

а) $y = \cos^2 x + \cos^4 x$; б) $y = [x]^2$; в) $y = \left\{\dfrac{1}{x^2 + 0,5}\right\}$.

№1.6 Выразить y, как функцию x, если:

а) $y=u^3+1$, где $u=x-3$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{3u-4}}{u}$, где $u=2x+1$;

в) $y=u^2$, где $u=\sqrt{z}$, $z=2x$.

№1.7 Дано $f(x)=x^2$. Упростите выражение: $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$; $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$; $\dfrac{f(1+\varepsilon)+f(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon^2}$.

№1.8 Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Докажите, что $\left(f(x)\right)^{-1}=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

№1.9 Пусть $f(x)=x^2+2$. Докажите, что $f(|x|)=f(x)$, $\left|f(x)\right|=f(x)$.

№1.10 Найдите область определения функции, учитывая все возможное значения параметра a:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-a}}{x^2-1}$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x-a}$;

в) $f(x)=\sqrt{1-a|x|}$;

г) $f(x)=\dfrac{ax^3-\sqrt{-x^2-7x+8}}{1+\sqrt{x-a}}$.

№1.11 Пусть $f(x)=2-\sqrt{1-x}$; $g(x)=\dfrac{1+2x}{3+x}$. Докажите, что $f(|x|)=f(x)$, $\left|f(x)\right|=f(x)$.

№1.12 Пусть $D(f)=[-2;\ 9]$ – область определения функции $y=f(x)$. Найдите область определения функции:

а) $y=4f(x-1)$;

б) $y=-4f(x+11)$;

в) $y=4f(x)-1$;

г) $y=-4f(x)+11$.

№1.13 При каких значениях параметра а функция $y=3-\sqrt{x-a}$ определена во всех точках отрезка $[-11;\ 7]$?

№1.14 При каких значениях параметра а функция $y=3-\sqrt{x-3}$ определена во всех точках отрезка $[a-1;\ a+1]$?

№1.15 Найдите все значения параметра а, при которых областью определения функции $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{ax+4}$ будет:

а) луч;
б) отрезок;
в) единственное число;
г) пустое множество.

№1.16 Являются ли функции $y=g(x)$ и $y=f(x)$ взаимно-обратными, если:

а) $f(x)=3x+5,\ g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3};$

б) $f(x)=\frac{3}{5}-6x,\ g(x)=0{,}1-\frac{1}{6}x;$

в) $f(x)=\frac{1}{7}x-3,\ g(x)=7x+3;$

г) $f(x)=\frac{7}{3}x+\frac{3}{7},\ g(x)=\frac{3}{7}x+\frac{7}{3}.$

№1.17 Найдите функцию, обратную к данной. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно-обратных функций:

а) $f(x)=\dfrac{3}{x-1};$ б) $f(x)=\dfrac{2}{x+4};$

в) $f(x)=\dfrac{x+7}{2x-5};$ г) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}.$

№1.18 Найдите функцию, обратную к данной.

а) $f(x)=2\sqrt{x}-1;$ б) $f(x)=x^2,\ D(f)=(-\infty;0].$

№1.19 Постройте в одной системе координат график данной функции, обратной к ней:

а) $f(x)=-0{,}5x+2;$ б) $f(x)=\sqrt{x+1};$

в) $f(x)=3x-1;$ г) $f(x)=x^2-4,$ если $x\geq 0.$

Глава 2. Предел функции

2.1 Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть самой точки x_0.

Число А называется **пределом функции в точке** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать на «языке $\varepsilon - \delta$»:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

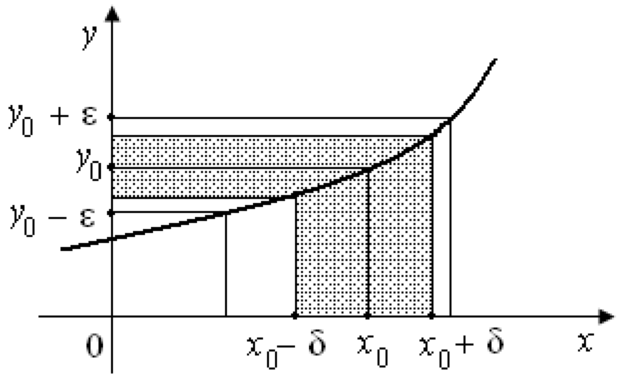


Рис. 7. Геометрическая интерпретация определения предела

2.2 Основные свойства предела

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – функции, для которых существуют пределы при $x \to x_0$ *(или* $x \to \infty$): $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

1. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} f(x).$$

2. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делителя не равен нулю):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.\ \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right).$$

4. Если $\lim\limits_{u\to b} f(u)=c,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=b,$ то предел сложной функции

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=c.$$

5. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b>0,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=c,$ имеет место соотношение

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=b^c.$$

Символическая запись $\left[\dfrac{1}{0}\right]$ означает не деление на ноль, а на число стремящееся к нулю, так и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]$ – это не деление на бесконечность, а деление на число, стремящееся к бесконечности, при этом $\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$ и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0.$

Запомните

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}=0.$
$\lim\limits_{x\to\infty} cx=\infty$, если $c>0$.	$\lim\limits_{x\to\infty} cx=-\infty$, если $c<0$.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=\infty$, если $c>0$.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=-\infty$, если $c<0$.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)$.

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}7=$$
$$=3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-2\lim_{x\to 1}x+7=3\cdot 1-2+7=8.$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-4}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-x-2}=\frac{1^2-4}{1^2-1-2}=\frac{-3}{2}=1{,}5.$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{\ln(1+2x^2)}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{\ln(1+2x^2)}=\frac{2^2-4}{\ln(1+2\cdot 2^2)}=\frac{0}{\ln 9}=0.$$

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(-1+1)^2}=\frac{1}{0}=\infty.$$

2.3 Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0

(слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0) или колеблясь около точки x_0.

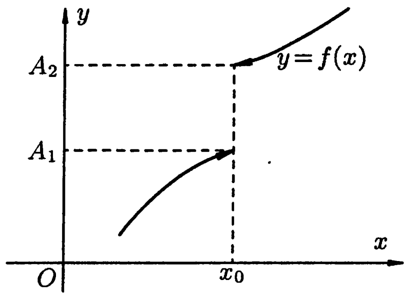


Рис. 8. Геометрическая интерпретация односторонних пределов

Число A_1 называется пределом **функции** $f(x)$ **слева** в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Это определение коротко можно записать на «языке $\varepsilon - \delta$»:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1.$$

Аналогично определяется **предел функции справа**, запишем его с помощью «языка $\varepsilon - \delta$»:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Пределы функции слева и справа называют **односторонними пределами**. Очевидно, если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют оба односторонних предела, причем $A=A_1=A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба односторонних предела и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Пример 14. Рассмотрим функцию

$$y = sign(x) = \begin{cases} 1, & если \quad x > 0 \\ 0, & если \quad x = 0 \\ -1, & если \quad x < 0 \end{cases}$$

График этой функции

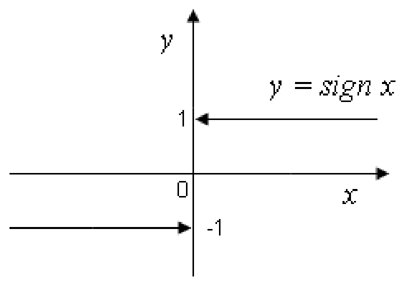


Рис. 9. График функции sign(x)

Легко видеть, что $\lim\limits_{x \to 0+0} sign(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0-0} sign(x) = -1$.

2.4 Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией** (б.м.ф.) (или **бесконечно малой величиной**, или **бесконечно малой**) в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Запишем определение бесконечно малой функции на «языке $\varepsilon - \delta$»:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Аналогично определяется б. м. ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех случаях $f(x) \to 0$.

Пример 15. Примерами б. м. ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$;

$y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to 0$.

<u>*Свойства бесконечно малых функций:*</u>

1°. Сумма конечного числа бесконечно малых функций $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x) \ldots \alpha_n(x)$ является бесконечно малой функцией.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\ldots+\alpha_n(x)\right)=0.$$

2º. Произведение бесконечно малой функции *α(x)* на ограниченную функцию *f(x)* является бесконечно малой функцией.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha(x)\cdot f(x)\right)=0.$$

3º. Произведение бесконечно малых функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ является бесконечно малой функцией.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\right)=0.$$

4º. Частное от деления бесконечно малой функции *α(x)* на функцию *f*(*x*), предел которой отличен от нуля, является бесконечно малой функцией.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=0.$$

<u>Таблица эквивалентных бесконечно малых величин</u>

$$\left(\alpha\left(x\right)\to 0\right)$$

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
2. $tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
6. $\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;
7. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;
8. $e^{\alpha\left(x\right)}-1\sim\alpha(x)$;
9. $a^{\alpha\left(x\right)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$;

10. $\sqrt[n]{1+\alpha\left(x\right)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Рассмотрим примеры вычисления пределов с использованием бесконечно малых величин.

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\sin 3x\sim 3x;\ \left(x-x^3\right)^2\sim x^2\\ \sin 5x\sim 5x;\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 5x}{x^2}=15.$$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (б. б. ф.) (**бесконечно большой величиной**, **бесконечно большой**) в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Запишем определение бесконечно большой функции на «языке $\varepsilon-\delta$»:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x:\left|x-x_0\right|<\delta)\Rightarrow\left|\alpha(x)\right|>\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Пример 17. Примерами б. б. ф. служат функции $y = tg\,x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$; $y = 2$ при $x\to\infty$.

<u>Теорема (о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций)</u>

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$ и $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x\to x_0$.

<u>Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)</u>

Если $f(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

<u>Теорема (о связи функции, её предела и бесконечно малой)</u>

Если существует конечный предел функции f(x) при $x \to x_0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A\right)$, то функцию можно представить в виде *f(x) = A +* $\alpha(x)$*,* где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

2.5 Раскрытие неопределенностей

При вычислении пределов необходимо в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить ее предельное значение. При этом возможны два варианта:

1. Проведение необходимых вычислений позволяет получить определенное число (в частности, ноль) или бесконечность, которое и является ответом.

2. В результате подстановки предельного значения переменной получаются неопределенные выражения, символические обозначения которых $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$ и др. В этом случае, для получения результата, нужно эти неопределенности раскрыть, либо показать, что предела не существует (то есть он не определен).

Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

При вычислении пределов отношения многочленов с неопределенностью $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x \to x_0$ необходимо:

1. при помощи алгебраических преобразований представить эти многочлены в виде произведения сомножителей, одним из которых будет $\left(x - x_0\right)$ (вынесение общего множителя, разложение на множители, формулы сокращенного умножения);

2. сократить общий множитель, а затем подставить предельное значение.

Пример 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{1}{3}.$$

Пример 19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x^2-2x-3}$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x^2-2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-5}{x-3}=$$

$$=\frac{-2-5}{-1-3}=\frac{-7}{4}=-1\frac{3}{4}.$$

Пример 20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\textit{домножим числитель}\\ \textit{и знаменатель на}\\ \textit{сопряженное выражение}\\ \textit{к числителю}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2-x)-(x+6)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=\frac{1}{10}.$$

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

При раскрытии неопределенностей данного типа, найдем старшую степень переменной x, и разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на x в этой степени.

Пример 21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{2x-5x^3}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{2x-5x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}-5}=-\frac{2}{5}.$$

Пример 22. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x+x^4}{2x^2-5x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+2x+x^4}{2x^2-5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}+1}{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Пример 23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+7}{5x^3+4x^2-7x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+7}{5x^3+4x^2-7x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{5}=0.$$

2.6 Два замечательных предела

Первый замечательный предел

Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла, в радианах, равен единице, то есть,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел называется ***первым замечательным пределом***.

Имеют место следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$ если $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Второй замечательный предел

<u>Теорема</u>. Предел функции $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен е, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется *экспонентой,* логарифм с основанием e называется *натуральным* и обозначается символом ln.

Пример 24. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Заменим переменную, положив $x = 2y$. При $x\to\infty$ (а значит, и $y\to\infty$) последовательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^2=e^2.$$

Пример 25. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Применим здесь замену переменной, полаем $1/x=y$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to 0$, т.е. имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e.$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить пределы.

№2.1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}.$

№2.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}.$

№2.3 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}.$

№2.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}.$

№2.5 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}.$

№2.6 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}.$

№2.7 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}.$

№2.8 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-1}{x^3-3x-2}.$

№2.9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}.$

№2.10 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}.$

№2.11 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}.$

№2.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2-2x}.$

№2.13 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}.$

№2.16 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}.$

№2.17 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-5x}{-5x^2+x-1}.$

№2.18 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}.$

№2.19 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+2}{x+1}.$

№2.20 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5+10x}{5x^4+x^3}.$

№2.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}.$

№2.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{7+x}-3}.$

№2.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}.$

№2.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 5x}.$

№2.25 $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}.$

№2.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

№2.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}.$

№2.28 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x.$

№2.29 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x.$

№2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+7x+2}{x^2-5x}$.

№2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.

№2.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

№2.31 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

Глава 3. Непрерывность функции и точки разрыва

3.1 Непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in D$ – предельная точка множества D. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Можно дать еще одно определение непрерывности функции.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D$ удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа в точке** x_0, если $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева в точке** x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Ясно, что $f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если она непрерывна и слева и справа, т.е. если $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в интервале** $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a; b]$, если она непрерывна в интервале $(a; b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на множестве** D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

<u>Теорема</u>. Основные элементарные функции непрерывны в областях их определения.

<u>Теорема (первая теорема Вейерштрасса)</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограниченна на этом отрезке.

<u>Теорема (вторая теорема Вейерштрасса)</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M.

3.2 Точки разрыва

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.

Напомним, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0,

2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Когда хотя бы одно из условий нарушается, то имеет место разрыв. В соответствии с этим различают следующие типы разрывов.

Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $f(x)$, если предел функции в этой точке существует, но в точке x_0 функция $f(x)$ либо не определена, либо ее значение $f(x_0)$ не равно пределу в этой точке.

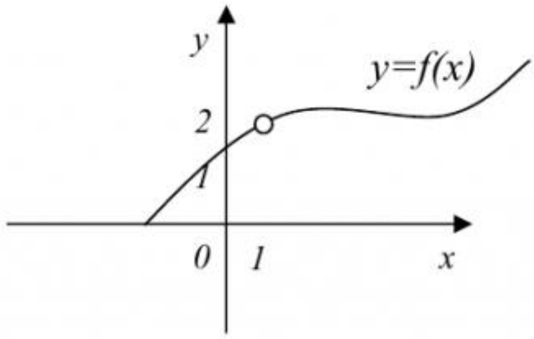


Рис. 10. Точка устранимого разрыва

Пример 26. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$. В нуле эта функция не определена, но существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, при этом если $A_1 \neq A_2$. Величину $|A_1 - A_2|$ называют **скачком функции в точке разрыва первого рода**.

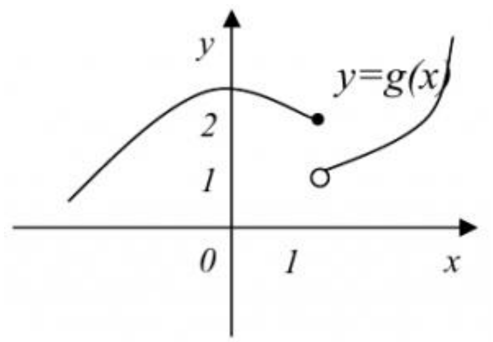


Рис. 11. Точка разрыва первого рода

Пример 27. Функция $y = \operatorname{sign} x$. Определена всюду на **R**. Рассмотрим пределы слева и справа в нуле: $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1$. Поэтому ноль – точка разрыва первого рода.

Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции *f(x)*, если в этой точке не существует хотя бы один из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

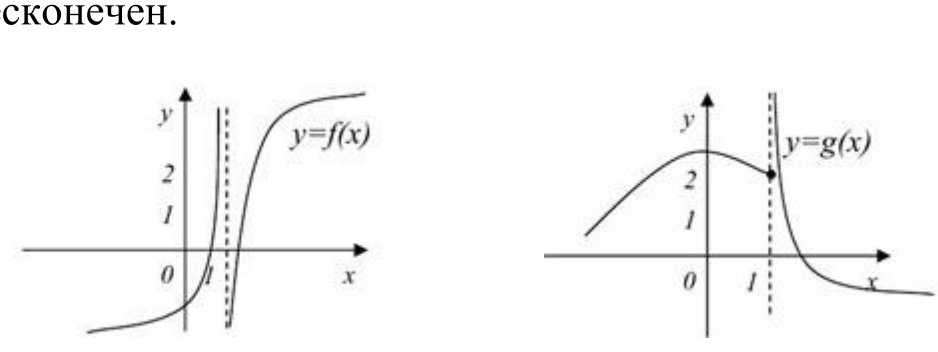


Рис. 12. Точка разрыва второго рода

Пример 28. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

Пример 29. Для функции $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, так как ни левого, ни правого предела функции в этой точке не существует.

Задачи для самостоятельной работы

№3.1-3.10 Доказать, что функция *f(x)* непрерывна в точке x_0.

№3.1 $f(x)=5x^2-1,\ x_0=6.$

№3.2 $f(x)=3x^2-3,\ x_0=4.$

№3.3 $f(x)=-2x^2-5,\ x_0=2.$

№3.4 $f(x)=-4x^2-7,\ x_0=1.$

№3.5 $f(x)=-5x^2-9,\ x_0=3.$

№3.6 $f(x)=4x^2-2,\ x_0=5.$

№3.7 $f(x)=2x^2-4,\ x_0=3.$

№3.8 $f(x)=-3x^2-6,\ x_0=1.$

№3.9 $f(x)=-5x^2-8,\ x_0=2.$

№3.10 $f(x)=-4x^2+9,\ x_0=4.$

№3.11-3.25 Исследовать функцию *y=f(x)* на непрерывность:
а) найти точки разрыва функции, если они существуют;
б) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва;
в) построить график функции.

№3.11 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x<2,\\ x-1 & x\ge 2.\end{cases}$

№3.12 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-2,\\ 4-x^2, & -2\le x\le 1,\\ 3-2x, & x>1.\end{cases}$

№3.19 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x\le 2,\\ 6-x, & x>2.\end{cases}$

№3.20 $f(x)=\begin{cases}2-xx, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & x\ge\pi.\end{cases}$

№3.13 $f(x)=\begin{cases}-3-x, & x<-2,\\ x^2-5, & -2\le x<3,\\ 7-2x, & x\ge 3\end{cases}$

№3.14 $f(x)=\begin{cases}-3x, & x\le 1,\\ x^2-4, & 1<x<3,\\ 2x-5, & x\ge 3\end{cases}$

№3.15 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x<\pi,\\ -1, & x\ge \pi.\end{cases}$

№3.16 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

№3.17 $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

№3.18 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$

№3.21 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2, & x\ge \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

№3.22 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le \pi,\\ -3, & x>\pi.\end{cases}$

№3.23 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & -0<x\le \pi,\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

№3.24

$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

№3.25 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

Список использованной литературы

1. Гусак, А. А. Основы высшей математики: пособие для студетнов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. Минск : ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Мачулис, В. В. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. В. Мачулис. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 306 с.
3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс/ Д. Т. Письменный. – 13-е изд., испр. – Москва : Айрис-пресс, 2015. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 447 с.