



*С. А. Шепелева В. В. Дырдин*

**ФИЗИКА.  
ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

**Учебное пособие**

**Кемерово 2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва»

*С. А. Шепелева В. В. Дырдин*

**ФИЗИКА.**

**ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

**Учебное пособие**

*Издание второе, дополненное*

**Кемерово 2022**

УДК 531(075.8)

Рецензенты:

Заведующий кафедрой теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» профессор, доктор физико-математических наук А. Б. Гордиенко

Профессор кафедры медицинской и биологической физики и высшей математики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет», доктор физико-математических наук Ю. М. Басалаев

Шепелева, С. А. **Физика. Элементы механики сплошных сред** : учебное пособие. – 2-е изд., доп. / С. А. Шепелева, В. В. Дырдин ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачёва. – Кемерово, 2022. – 84 с. – ISBN 978-5-00137-304-9. – Текст : непосредственный.

В учебном пособии содержится теоретический материал по темам «Упругие тела», «Твёрдое тело в механике», «Механика жидкости и газа», «Механика газовых потоков» и примеры решения задач, а также задачи и тестовые задания для самостоятельного решения, контрольные вопросы для самоподготовки.

Предназначено для студентов технических специальностей и направлений высших учебных заведений.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачёва.

УДК 531(075.8)

© Кузбасский государственный  
технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва, 2022

ISBN 978-5-00137-304-9

© Шепелева С. А.,  
Дырдин В. В., 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	7
ЧАСТЬ 1. УПРУГИЕ ТЕЛА.....	8
§ 1.1. Типы деформаций.....	8
§ 1.2. Упругие напряжения .....	8
§ 1.3. Закон Гука.....	11
§ 1.4. Сдвиг, кручение, изгиб .....	12
§ 1.5. Вопросы для самоподготовки .....	13
§ 1.6. Примеры решения задач .....	14
§ 1.7. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения .....	18
ЧАСТЬ 2. ТВЁРДОЕ ТЕЛО В МЕХАНИКЕ.....	24
§ 2.1. Статика, её задачи и принципы.....	24
§ 2.2. Условия равновесия тел.....	26
§ 2.3. Вопросы для самоподготовки .....	28
§ 2.4. Примеры решения задач .....	28
§ 2.5. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения .....	30
ЧАСТЬ 3. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....	35
§ 3.1. Основные понятия.....	35
§ 3.2. Основные законы гидро- и аэростатики .....	35
§ 3.3. Основное уравнение гидростатики.....	37
§ 3.4. Теорема о неразрывности струй жидкости.....	38
§ 3.5. Теорема Бернулли .....	40
§ 3.6. Измерение давления в текущей жидкости.....	41
§ 3.7. Истечение идеальной жидкости из отверстия.....	43
§ 3.8. Вязкость.....	44
§ 3.9. Закон изменения скорости при ламинарном течении .....	45
§ 3.10. Турбулентное течение.....	47
§ 3.11. Законы гидродинамического подобия .....	48
§ 3.12. Движение тел в жидкостях и газах .....	49
§ 3.13. Вопросы для самоподготовки .....	51
§ 3.14. Примеры решения задач .....	51
§ 3.15. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения .....	53
ЧАСТЬ 4. МЕХАНИКА ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ.....	61

§ 4.1. Параметры потока.....	61
§ 4.2. Первый закон термодинамики для газового потока .....	62
§ 4.3. Параметры газового потока.....	65
§ 4.4. Сопло Лавалья .....	69
§ 4.5. Ударная волна.....	71
§ 4.6. Вопросы для самоподготовки .....	73
§ 4.8. Примеры решения задач .....	74
§ 4.9. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения.....	78
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	83

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Физика. Элементы механики сплошных сред» соответствует содержанию федерального образовательного стандарта и программам курса физики для специалистов и бакалавров технических вузов. В пособии излагаются основные законы физики по разделу «Механика сплошных сред» и их применение к объяснению круга явлений, наблюдающихся в массивах горных пород, связанных с деформациями, сдвигениями и динамическими процессами. Пособие подготовлено на основе курса лекций, которые читали авторы в Кузбасском государственном техническом университете в течение ряда лет, и предназначено для студентов технических специальностей и направлений высших учебных заведений.

Потребность в создании пособия возникла в связи с увеличением объёма самостоятельной работы у студентов при изучении дисциплин, поэтому учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения, особенности решения задач и практическое применение основных законов.

В данном учебном пособии, которое является вторым изданием, включены новые темы, добавлены примеры решения задач, расширен список литературы. Каждая тема начинается с изложения основных физических законов, что даёт возможность проводить качественный и количественный анализ решения предложенных задач, а также подобрано значительное количество задач и тестовых заданий для самостоятельной работы.

Большое значение имеет практическое применение теоретических знаний. Выработка приёмов и навыков решения конкретных задач из разных областей науки и техники поможет в дальнейшем на их основе обеспечивать безопасность технологических процессов.

### **Методические рекомендации к решению задач**

К решению задач следует приступать после изучения теоретического материала на соответствующую тему.

*При решении задач* целесообразно придерживаться следующей схемы:

- по условию задачи представить себе физическое явление, о котором идёт речь. Сделать краткую запись условия, выразив исходные данные в единицах СИ;

- сделать, где это необходимо, чертёж, схему или рисунок, поясняющие описанный в задаче процесс;
- написать уравнения или систему уравнений, отображающих физический процесс;
- используя чертежи и условие задачи, преобразовать уравнения так, чтобы в них входили лишь исходные данные и табличные величины;
- решив задачу в общем виде, проверить конечную формулу на соответствие размерностей;
- осуществить вычисления и оценить реальность числового ответа.

Авторы благодарны рецензентам профессору, доктору физико-математических наук А. Б. Гордиенко и профессору, доктору физико-математических наук Ю. М. Басалаеву за ценные замечания и обсуждение некоторых методологических аспектов пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред – обширная часть механики, посвящённая движению газообразных, жидких и твёрдых деформируемых тел. Можно указать много разнообразных движений жидкостей, газов и твёрдых деформируемых тел, с которыми мы встречаемся при рассмотрении явлений природы и при решении многочисленных технических задач.

Механика сплошных сред – фундамент развития различных наук, техники и технологий. На основных законах и моделях механики сплошных сред базируется большинство теорий, описывающих поведение реальных сред: теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, гидродинамика, газодинамика, динамика гетерогенных структур и др.

Наиболее существенные проблемы механики сплошной среды: проблема воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела (задачи о движении самолетов, вертолётов, кораблей и т. д., которые связаны с изучением сил, действующих со стороны жидкости на тело); движение жидкости и газа по трубам и внутри различных машин (законы взаимодействия жидкости с границами потока, явление неравномерности в распределении скоростей и т. п.); гидростатика (равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости); теория упругости (основа для постройки всякого рода сооружений и машин) и т. д.

В учебном пособии рассматриваются математические методы изучения общих свойств и законов движения деформируемых тел.



## ЧАСТЬ 1. УПРУГИЕ ТЕЛА

### § 1.1. Типы деформаций

Реальные твёрдые тела под действием внешних сил *изменяют* свои линейные размеры и объём. Эти изменения называют *деформацией твёрдого тела*. Различают *упругие* и *пластические* деформации. Упругими называют деформации, которые исчезают после прекращения действия сил. Пластическими деформациями называют деформации, сохраняющиеся после прекращения действия сил. Физика процесса заключается в том, что под действием внешних сил происходит смещение частиц, ионов, атомов, составляющих тело, из положения равновесия. Возникающие при этом внутренние силы препятствуют данным смещениям. Эти внутренние силы называются *силами упругости*. Если внешние силы не превосходят некоторой величины, называемой *пределом упругости* твёрдого тела, то деформации будут *упругими*. Для абсолютно упругих тел существует однозначная зависимость между внешними силами и вызываемыми ими деформациями.

Если упругие свойства тела по всем направлениям одинаковы, то тело называется *изотропным*. В противном случае – *анизотропным*. Если деформации тела не изменяются от точки к точке, то они называются *однородными*, в противном случае – *неоднородными*.

### § 1.2. Упругие напряжения

Упругие деформации характеризуются напряжением. *Напряжением*  $\sigma$  в заданной точке твёрдого тела называют силу упругости  $d\vec{F}_{\text{упр}}$ , с которой одна часть твёрдого тела  $A$  действует на другую часть  $B$  этого тела (рис. 1.1) на бесконечно малом участке  $dS$  поверхности их соприкосновения с центром в точке  $O$ , отнесённую к величине площадки  $dS$ :

$$\sigma = \frac{d\vec{F}_{\text{упр}}}{dS}.$$

Проекция силы на нормаль  $\vec{n}$  задаёт нормальное напряжение, а на плоскость – тангенциальное (касательное) напряжение. Если на некоторую поверхность тела  $S$  действует сила  $\vec{F}$ , то напряжение  $\sigma$  определяется формулой

$$\sigma = \frac{\vec{F}}{S}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

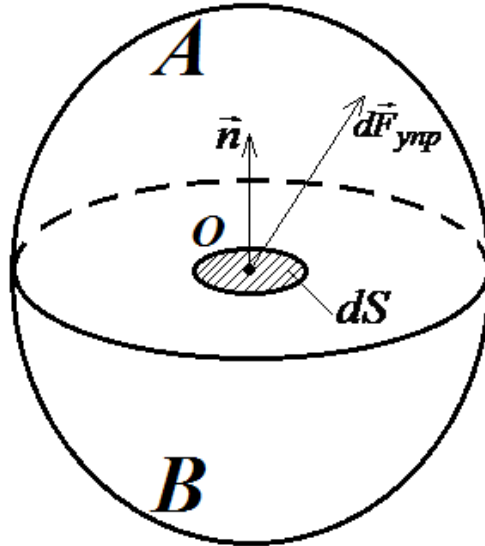


Рис. 1.1. Схема к определению напряжений в твёрдом теле

Для однозначного определения напряжения  $\sigma_n$  в твёрдом теле на произвольно ориентированной площадке  $S$  в точке  $O$  достаточно задать напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку  $O$ :

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z,$$

где  $n_x$ ,  $n_y$  и  $n_z$  – проекции внешней нормали  $\vec{n}$  к площадке  $S$  на оси декартовой системы координат с центром в точке  $O$ .

Совокупность девяти величин, являющихся проекциями векторов  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  на три координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , называют *тензором упругих напряжений* и записывают следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензор упругих напряжений симметричен, то есть:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z).$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  называют *главными осями тензора упругих напряжений* или главными напряжениями.

### § 1.3. Закон Гука

Закон Гука справедлив для малых упругих деформаций. Напряжение  $\sigma$  при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации  $\varepsilon$ :

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $E$  – модуль упругости, равный напряжению при относительной деформации, равной единице.

В случае линейного растяжения или сжатия стержня относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad l = l_0 \pm \Delta l.$$

Модуль упругости  $E$  называют модулем Юнга. Изменение длины стержня при одноосной деформации будет равно

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l_0.$$

При объёмном растяжении или сжатии модуль упругости рассчитывают по формуле

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)},$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Для твёрдых тел  $\mu < 0,5$ ;  $\Delta d$  – изменение поперечных размеров.

Если тело находится в жёсткой обойме и деформации по осям  $Oy$  и  $Oz$  равны нулю, то есть  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ , то деформация по оси  $Ox$  при одностороннем сжатии определяется выражением

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \right). \quad (1)$$

Откуда вытекает соотношение для напряжений

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E(1 - \mu)} \sigma_x = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)} \sigma_x,$$

где  $\frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$  – модуль упругости твёрдого тела при одностороннем сжатии и наличии бокового отпора.

Деформированное тело обладает запасом потенциальной энергии, называемой *упругой*. За счёт неё может совершаться работа.

Упругая энергия равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при условии, что его кинетическая энергия не изменяется. Тогда упругая энергия растянутого стержня будет равна

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2,$$

где  $|F| = k \Delta l$  – модуль растягивающей силы

Плотность упругой энергии, то есть энергию единицы объёма, можно рассчитать следующим образом:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{F \Delta l}{Sl} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad [U] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

#### § 1.4. Сдвиг, кручение, изгиб

Примером однородной деформации является сдвиг. *Сдвигом* называется деформация, при которой все слои твёрдого тела, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, перемещаются в одном и том же направлении, параллельном плоскости сдвига. Основание  $AD$  куба (рис. 1.2) есть плоскость сдвига.

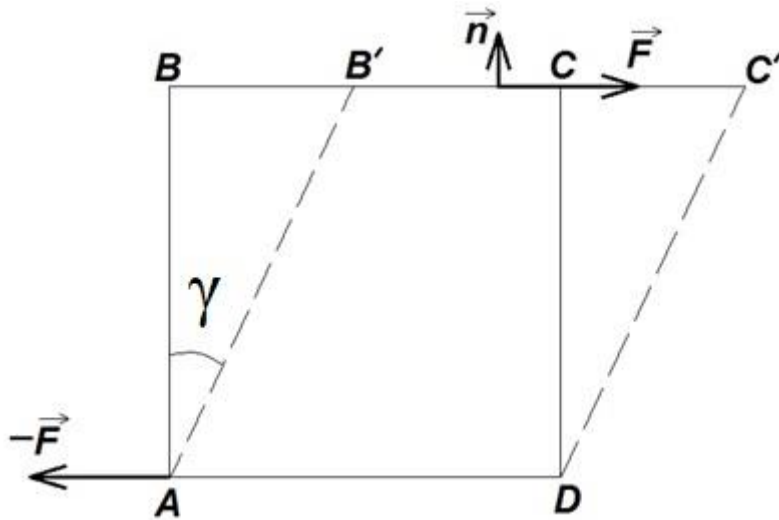


Рис. 1.2. Деформация сдвига

Внешняя сила  $\vec{F}$ , вызывающая деформацию, направлена по касательной к грани  $BC$ . По закону Гука касательное напряжение

$$\tau = \frac{F}{S} = G\gamma,$$

где  $S$  – площадь грани  $AB$ , перпендикулярно которой действует сила  $\vec{F}$ ;  $\gamma$  – угол;  $G$  – модуль сдвига, который зависит от материала.

Существует соотношение, устанавливающее связь между упругими постоянными для твёрдых тел:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

При деформациях, для которых выполняется закон Гука, объём тела практически не изменяется. Плотность упругой энергии при сдвиге

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1+\mu}{E} \tau^2 = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Примером неоднородных деформаций являются кручение и изгиб. *Кручением* называют деформацию твёрдого тела, при которой под действием внешней силы происходит относительный поворот параллельных сечений тела вокруг некоторой оси (рис. 1.3).

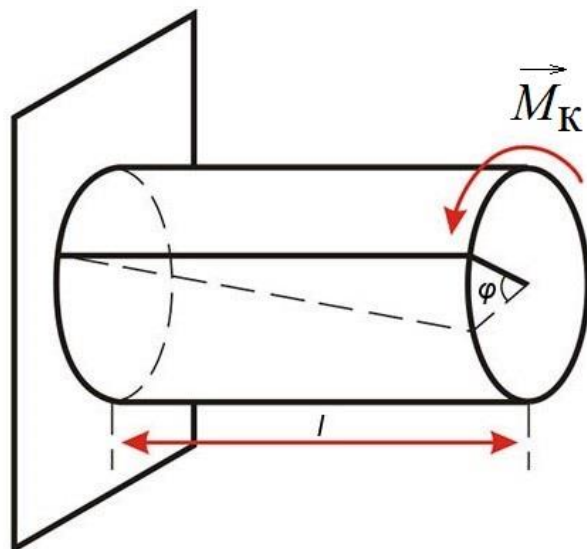


Рис. 1.3. Кручение

Для деформации кручения справедливо соотношение

$$M = f\varphi,$$

где  $f$  – постоянная, называемая модулем кручения, который зависит от свойств тела и его геометрических размеров;  $\varphi$  – угол поворота.

*Изгибом* называют деформацию твёрдого тела, при которой одни части (рис. 1.4) тела претерпевают сжатие, а другие – растяжение в параллельных направлениях.

Напряжение любого волокна определяется формулой

$$\sigma = E \frac{x}{R}.$$

Выше средней линии  $NN'$  – растягивающие напряжения  $\sigma > 0$ , а ниже  $NN'$  – сжимающие напряжения  $\sigma < 0$ . Напряжение действует вдоль волокна.

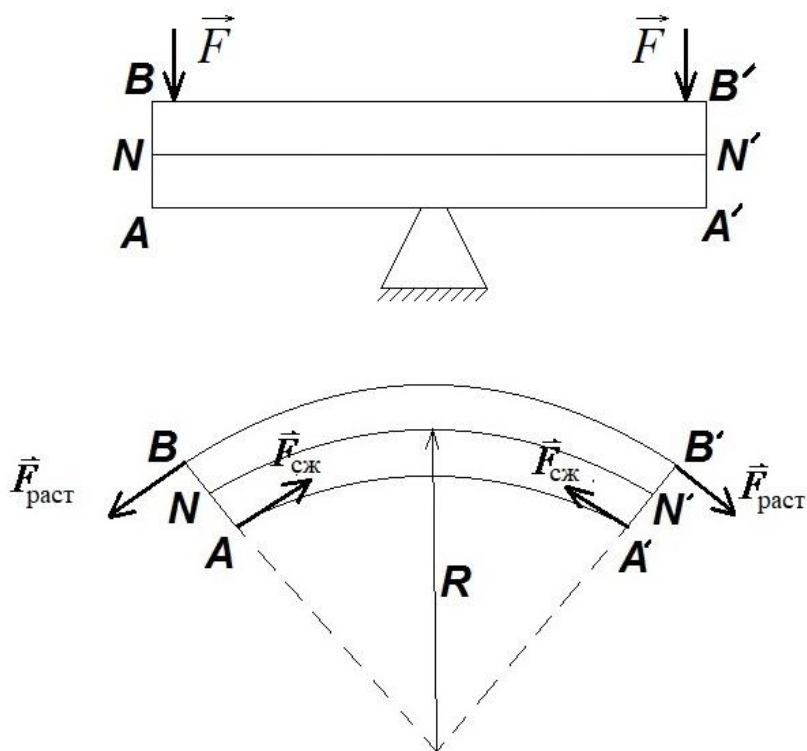


Рис. 1.4. Схема, поясняющая возникновение в балке растягивающих и сжимающих напряжений

### § 1.5. Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?
2. Что такое предел прочности и упругости?
3. Как зависит сила упругости от величины деформации тела? Куда направлена эта сила при деформациях сжатия и растяжения?
4. Как называется свойство материала сохранять некоторую часть деформации после снятия нагрузки?
5. Каков физический смысл модуля Юнга?
6. Что называется коэффициентом упругости тела? От чего он зависит?
7. Назовите виды деформации.
8. Что называется касательным и нормальным напряжением? Какова их размерность?
9. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при кручении?
10. Что такое жёсткость тела? При каких деформациях жёсткость тела не изменяется?

## § 1.6. Примеры решения задач

**Пример 1.1.** Нижнее основание железной тумбы, имеющей форму цилиндра диаметром  $d = 20$  см и высотой  $h = 20$  см, закреплено неподвижно. На верхнее основание тумбы действует сила  $F = 20$  кН (рис. 1.5). Найти: 1) тангенциальное напряжение  $\tau$  в материале тумбы; 2) относительную деформацию  $\gamma$  (угол сдвига); 3) смещение  $\Delta x$  верхнего основания тумбы.

Решение.

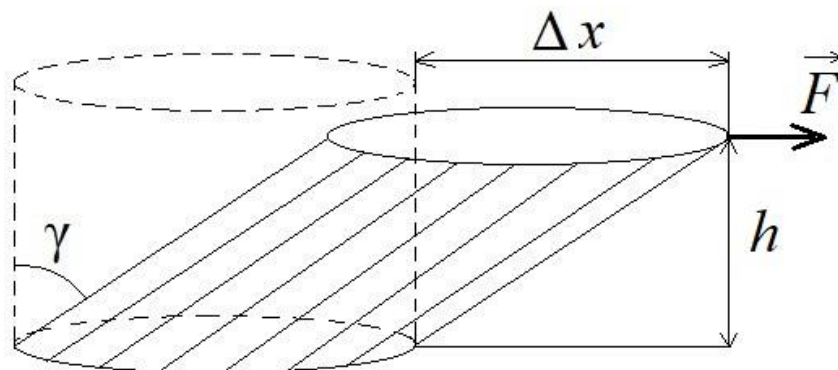


Рис. 1.5. Деформация сдвига железной тумбы

Тангенциальное напряжение в материале тумбы:

$$\tau = \frac{F}{S},$$

где  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь поперечного сечения тумбы;

$$\text{Рассчитаем: } \tau = \frac{4F}{\pi d^2}; \tau = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,2)^2} = 636,9 \cdot 10^3 \text{ Па} = 637 \text{ кПа.}$$

Тангенциальное напряжение связано с относительной деформацией выражением

$$\tau = \gamma G,$$

где  $G = 76 \cdot 10^9$  Па модуль сдвига для железа. Тогда  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ .

$$\text{Рассчитаем: } \gamma = \frac{637 \cdot 10^3}{76 \cdot 10^9} = 8,37 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 8,37 \text{ мкрад.}$$

**Пример 1.2.** Верхний конец свинцовой проволоки диаметром  $d = 2$  см и длиной  $l = 60$  м закреплён неподвижно. К нижнему концу подвешен груз массой  $m = 100$  кг. Найти напряжение материала: 1) у нижнего конца; 2) на середине длины; 3) у верхнего конца проволоки.

Решение.

1. Сила натяжения проволоки у нижнего конца

$$F_1 = mg.$$

Тогда напряжение

$$\sigma = \frac{F_1}{S},$$

где  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

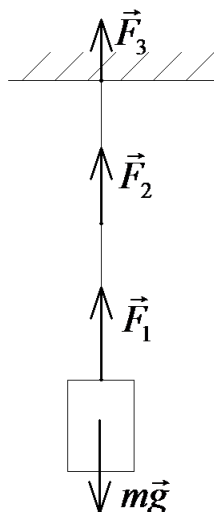


Рис. 1.6. Силы натяжения в разных точках проволоки

То есть  $\sigma_1 = \frac{4mg}{\pi d^2}$ . Рассчитаем:

$$\sigma_1 = \frac{4 \cdot 100 \cdot 9,81}{3,14 \cdot (0,02)^2} = 3,12 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,12 \text{ МПа}.$$

2. Сила натяжения проволоки на середине длины:

$$F_2 = mg + m_1g,$$

где  $m_1g = S \frac{l}{2} \rho g$  – сила тяжести отрезка проволоки, равного её половине. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S} = \frac{mg}{S} + \frac{l\rho g}{2} = \sigma_1 + \frac{l\rho g}{2}.$$

Рассчитаем:

$$\sigma_2 = 3,12 \cdot 10^6 + \frac{60 \cdot 11300 \cdot 9,81}{2} = 6,45 \text{ МПа}.$$

3. Сила натяжения проволоки у верхнего конца:

$$F_3 = mg + m_2g,$$

где  $m_2g = Sl\rho g$  – сила тяжести проволоки. Тогда

$$\sigma_3 = \frac{F_3}{S} = \frac{mg}{S} + \frac{Sl\rho g}{S} = \sigma_1 + l\rho g.$$

Рассчитаем:

$$\sigma_3 = 3,12 \cdot 10^6 + 60 \cdot 11300 \cdot 9,81 = 9,78 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,78 \text{ МПа}.$$

**Пример 1.3.** К вертикально закреплённой проволоке длиной  $l = 5$  м и площадью поперечного сечения  $S = 2 \text{ мм}^2$  подвешен груз массой  $m = 5,1$  кг. В результате проволока удлинилась на  $x = 0,6$  мм. Найти модуль Юнга  $E$  материала проволоки.

**Решение.** Сила натяжения проволоки

$$F = mg.$$

Напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}.$$

По закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  – относительная деформация.

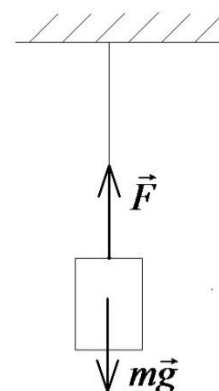


Рис. 1.7. Сила натяжения проволоки в точке подвеса груза



Тогда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{mgl}{S\Delta l}.$$

Рассчитаем:

$$E = \frac{5,1 \cdot 9,81 \cdot 5}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 2,08 \cdot 10^{11} \text{ Па.}$$

**Пример 1.4.** Какое давление изнутри может выдержать стеклянная трубка радиусом  $R$  со стенками толщиной  $h$ ?

**Решение.** Проанализируем поведение части трубки. Сделаем рисунок для бесконечно малого элемента трубки (рис. 1.8).

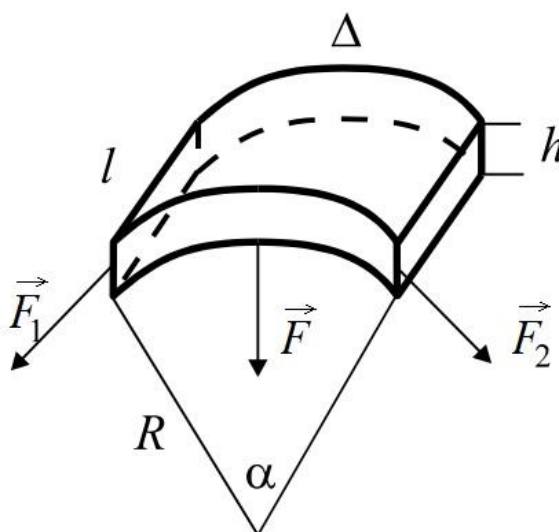


Рис. 1.8. Бесконечно малый элемент трубки

Сумма упругих сил  $F_1$  и  $F_2$  даёт результирующую силу  $F$ , которая и уравновешивает силу внутреннего давления. Тогда, так как  $F_1 = F_2$  и угол  $\alpha$  бесконечно мал ( $\alpha \rightarrow 0$ ), можем записать

$$F = F_1 \sin \frac{\alpha}{2} + F_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2F_1 \sin \frac{\alpha}{2} = F_1 \alpha,$$

$$F = PdS = Pl\Delta.$$

Из этих уравнений получаем

$$P = \frac{F_1 \alpha}{l\Delta}.$$

В момент разрушения напряжение в стекле равно пределу прочности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_1}{S} = \frac{F_1}{lh},$$

$$F_1 = \sigma_{\text{пр}} lh.$$

Пренебрегая увеличением радиуса трубки (так как относительное удлинение стекла мало), мы можем записать  $\Delta = R\alpha$ . Подставив эти выражения в формулу для давления, получаем

$$P = \frac{\sigma_{\text{пр}} h}{R}.$$

Пример 1.5. Установить связь между крутящим моментом  $N$  и углом закручивания  $\varphi$  для: а) трубы, у которой толщина стенок  $\Delta r$  значительно меньше радиуса трубы; б) сплошного стержня круглого сечения. Их длина  $l$ , радиус  $r$  и модуль сдвига  $G$  известны.

Решение. Выделим малый элемент объёма стержня. Из рис. 1.9 видно, что деформация, которую испытывает этот элемент, есть деформация сдвига. Запишем закон Гука для выделенного элемента:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{dF}{Gds} = \frac{dF}{rd\alpha\Delta rG} = \frac{dFr}{r^2 d\alpha\Delta rG} = \frac{dN}{r^2 d\alpha\Delta rG}.$$

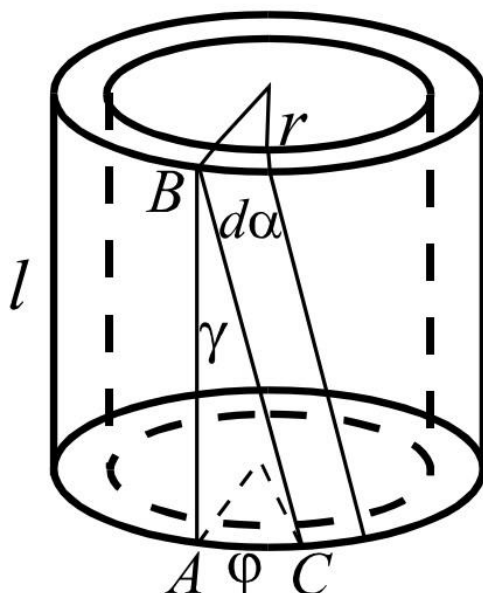


Рис. 1.9. Малый элемент объёма стержня

Из треугольника  $ABC$  имеем  $\text{tg}\gamma = AC/AB$ . Если углы  $\varphi$  и  $\gamma$  малы:

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}.$$

Подставив это выражение в первую формулу, получим

$$dN = \frac{r^3 \Delta r G \varphi d\alpha}{l}.$$

Проинтегрируем это выражение по  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$ :

$$N = \frac{2\pi G \varphi r^3 \Delta r}{l}.$$

Сплошной стержень можно разбить на множество труб с толщинами стенок  $dr$ . Для каждой из этих труб можно записать выражение, полученное в пункте а). Тогда общий крутящий момент найдётся суммированием крутящих моментов отдельных труб:

$$N = \int dN = \frac{1}{l} \int_0^r 2\pi\varphi Gr^3 dr = \frac{\pi\varphi Gr^4}{2l}.$$

Из этой задачи видно, что деформация кручения сводится к деформации сдвига.

### § 1.7. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

1.1. К проволоке диаметром  $d = 2$  мм подвешен груз массой  $m = 1$  кг. Определите напряжение  $\sigma$ , возникшее в проволоке.

1.2. Какой наибольший груз может выдержать стальная проволока диаметром  $d = 1$  мм, не выходя за предел упругости  $\sigma_{\text{упр}} = 294$  МПа? Какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе?

1.3. Свинцовая проволока подвешена в вертикальном положении за верхний конец. Какую наибольшую длину  $l$  может иметь проволока, не обрываясь под действием силы тяжести? Предел прочности  $\sigma_{\text{пр}}$  свинца равен 12,3 МПа.

1.4. Гирия массой  $m = 10$  кг, привязанная к проволоке, вращается с частотой  $n = 2$  с<sup>-1</sup> вокруг вертикальной оси, проходящей через конец проволоки, скользя при этом без трения по горизонтальной поверхности. Длина  $l$  проволоки равна 1,2 м, площадь  $S$  её поперечного сечения равна 2 мм<sup>2</sup>. Найдите напряжение  $\sigma$  металла проволоки. Массой её пренебречь.

1.5. К стальному стержню длиной  $l = 3$  м и диаметром  $d = 2$  см подвешен груз массой  $m = 2,5 \cdot 10^3$  кг. Определите напряжение  $\sigma$  в стержне, относительное  $\varepsilon$  и абсолютное  $x$  удлинения стержня.

1.6. Две пружины жёсткостью  $k_1 = 0,3$  кН/м и  $k_2 = 0,8$  кН/м соединены последовательно. Определите абсолютную деформацию  $x_1$  первой пружины, если вторая деформирована на  $x_2 = 1,5$  см.

1.7. Определите жёсткость  $k$  системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении. Жёсткость пружин  $k_1 = 2$  кН/м и  $k_2 = 6$  кН/м.

1.8. Для сжатия пружины на  $x_1 = 1$  см нужно приложить силу  $F = 10$  Н. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы сжать пружину на  $x_2 = 10$  см, если сила пропорциональна сжатию?

1.9. Пружина жёсткостью  $k = 10$  кН/м сжата силой  $F = 200$  Н. Определите работу  $A$  внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину ещё на  $x = 1$  см.

1.10. Пружина жёсткостью  $k = 1$  кН/м была сжата на  $x_1 = 4$  см. Какую нужно совершить работу  $A$ , чтобы сжатие пружины увеличить до  $x_2 = 18$  см?

1.11. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, поставленной на подставке, сжимает её на  $x = 2$  мм. На сколько сожмёт пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты  $h = 5$  см?

1.12. Однородный упругий брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы  $F_0$ , равномерно распределённой по торцу. Площадь торца равна  $S$ , модуль Юнга материала –  $E$ . Найдите относительное сжатие бруска в направлении действия силы.

1.13. На двух параллельных невесомых пружинах одинаковой длины висит невесомый стержень длиной  $L = 10$  см. Жёсткость пружины  $k_1 = 2$  Н/м и  $k_2 = 3$  Н/м. В каком месте стержня надо подвесить груз, чтобы стержень оставался горизонтальным?

1.14. Груз массой  $m = 1$  кг падает на чашку весов с высоты  $h = 10$  см. Каковы показания весов  $F$  в момент удара, если после успокоения качаний чашка опускается на  $x_0 = 0,5$  см?

1.15. Какую работу необходимо совершить, чтобы стальную полосу длиной  $l$ , шириной  $h$  и толщиной  $\delta$  согнуть в круглый обруч? Предполагается, что процесс происходит в пределах упругой деформации.

1.16. Гимнаст падает с высоты  $h = 12$  м в упругую сетку. Во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше его первоначального веса, если прогиб сетки под действием первоначального веса гимнаста  $\Delta x = 1$  м?

1.17. Акробат прыгает на сетку с высоты  $h = 8$  см. На какой предельной высоте над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на  $x_0 = 0,5$  м, если акробат прыгает на неё с высоты  $h_1 = 0,5$  м.

1.18. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены недеформированной пружиной жёсткости  $k$ . Затем к телам одновременно приложили противоположно направленные силы  $F$ . Найдите максимальную

кинетическую энергию тел и максимальную потенциальную энергию пружины.

1.19. С какой скоростью двигался вагон массой  $m = 20$  т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на  $x_0 = 10$  см? Жёсткость пружины каждого буфера  $k = 1$  МН/м.

1.20. К нижнему концу пружины жёсткостью  $k_1$  присоединена пружина жёсткостью  $k_2$ , к концу которой подвешен груз. Пренебрегая массой пружины, определите отношение их потенциальных энергий.

1.21. На рис. 1.10 изображены графики зависимости модуля  $F$  силы упругости от модуля  $\Delta l$  удлинения двух пружин. Сравните жёсткости  $k_1$  и  $k_2$  пружин:

1)  $k_1 < k_2$ ; 2)  $k_1 > k_2$ ; 3)  $k_1 = k_2$ .

1.22. Резиновый шнур при подвешивании груза массой  $m = 1$  кг удлинился на  $\Delta l = 0,1$  м. Найдите потенциальную энергию  $W_{\text{п}}$  шнура в конечном состоянии:

1) 1,0 Дж; 2) 0,49 Дж; 3) 2,0 Дж; 4) 0,25 Дж.

1.23. Когда возникает сила упругости?

1) При деформации тела; 2) при нагревании тела;

3) при увеличении массы тела; 4) ни один вариант не является

верным.

1.24. По какой причине возникает сила упругости?

1) частицы тел отталкиваются друг от друга;

2) частицы тел притягиваются друг к другу;

3) частицы тел притягиваются друг к другу или отталкиваются

друг от друга.

1.25. От чего зависит жёсткость пружины?

1) от массы и материала; 2) от объёма и формы;

3) от размера и массы; 4) от формы, размера и материала.

1.26. Закон Гука выполняется:

1) только при малых деформациях; 2) при любых деформациях;

3) только при больших деформациях.

1.27. Пружина с самой большой жёсткостью будет растянута на:

1) наименьшую величину; 2) наибольшую величину;

3) ту же величину, что и пружины с другой жёсткостью.

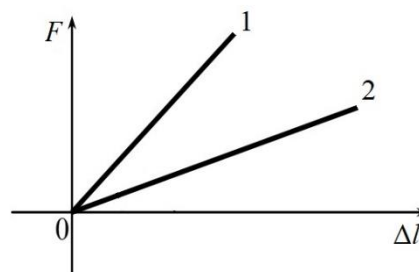


Рис. 1.10. Графики зависимости модуля силы упругости при разных  $k$  (к задаче 1.21)

1.28. Величина удлинения будет положительна при:

- 1) растяжении стержня; 2) сжатии стержня;
- 3) сжатии и растяжении стержня.

1.29. При каких деформациях справедлив (выполняется) закон Гука?

- 1) Сжатии и растяжении;
- 2) всех видах деформаций;
- 3) изгибе и кручении;
- 4) всех деформациях, если они – упругие деформации.

1.30. При растяжении бруска его удлинение составило величину  $\Delta l = 1$  см. При каком значении длины бруска  $L$  его можно считать абсолютно твёрдым телом?

- 1) 5 см; 2) 5 м;
- 3) любое численное значение; 4) ответ дать невозможно.

1.31. Модуль Юнга равен:

- 1) отношению механического напряжения к относительному удлинению;
- 2) механическому напряжению;
- 3) отношению относительного удлинения к механическому напряжению;
- 4) произведению относительного удлинения и механического напряжения.

1.32. Модуль Юнга алюминия равен 70 ГПа. Это означает, что:

- 1) если бы удалось увеличить длину алюминиевого стержня в 2 раза, то в нём возникло бы механическое напряжение 70 ГПа;
- 2) механическое напряжение, которое возникает в алюминиевом стержне площадью поперечного сечения  $1 \text{ м}^2$  при действии на него силы 1 Н, равно 70 ГПа;
- 3) механическое напряжение, возникающее в алюминиевом стержне, равно 70 ГПа;
- 4) механическое напряжение, возникающее в алюминиевом стержне, равно 1 ГПа при действии на него силы 70 Н.

1.33. Чему равна сила, действующая на серебряную проволоку длиной 4 м, имеющую площадь поперечного сечения  $0,2 \text{ мм}^2$ , если она под действием силы удлинилась на 0,5 см? Модуль Юнга серебра равен 80 ГПа.

- 1) 16 кН; 2) 800 Н;
- 3) 80 Н; 4) 20 Н.

1.34. Запас прочности – это:

- 1) механическое напряжение, при котором тело начинает разрушаться;
- 2) механическое напряжение, при котором тело перестаёт быть упругим;
- 3) механическое напряжение, при котором тело сохраняет деформацию;
- 4) число, показывающее, во сколько раз предел прочности больше допустимого механического напряжения.

1.35. Если при кручении стержня круглого сечения его диаметр увеличить в 2 раза, то взаимный угол поворота торцов стержня:

- 1) уменьшится в 8 раз; 2) уменьшится в 4 раза;
- 3) увеличится в 16 раз; 4) уменьшится в 16 раз.

1.36. Для стержня, показанного на рисунке, известны допускаемый относительный угол закручивания  $\varphi = 0,01$  рад/м, крутящий момент  $M = 20$  кН·м и модуль сдвига материала  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Найдите диаметр стержня из расчета на жёсткость. Укажите номер правильного ответа:

- 1) 12,6 см; 2) 9,2 см;
- 3) 11,4 см; 4) 7,8 см.

1.37. При свободном кручении стержня его длина:

- 1) увеличивается; 2) не изменяется;
- 3) уменьшается; 4) может как увеличиваться, так и уменьшаться.

1.38. При кручении стержня круглого сечения его диаметр:

- 1) увеличивается; 2) не изменяется;
- 3) уменьшается; 4) может как увеличиваться, так и уменьшаться.

1.39. Величина изгибающего момента в поперечном сечении балки  $M = 20$  кН·м. Максимальное нормальное напряжение, действующее в сечении балки, при изгибе в вертикальной плоскости равно:

- 1) 30 МПа; 2) 20 МПа;
- 3) 40 МПа; 4) 10 МПа.

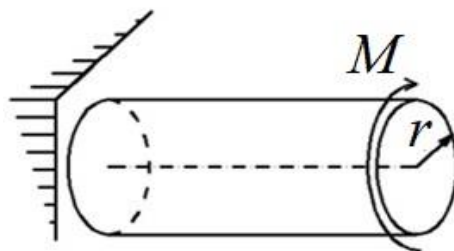


Рис. 1.11. Деформация кручения стержня

1.40. К концу пружины жёсткостью 25 Н/м прикрепили конец пружины 100 Н/м и растянули за свободные концы. При этом первая пружина жёсткостью 25 Н/м растянулась на 4 см. Чему равно удлинение второй пружины жёсткостью 100 Н/м?

- 1) 1 см;
- 2) 2 см;
- 3) 4 см.

1.41. Деформация изгиба – это деформация, в результате которой:

- 1) расстояние между молекулярными слоями уменьшается;
- 2) после прекращения воздействия тело полностью восстанавливает первоначальную форму и размеры;
- 3) происходит поворот одних молекулярных слоёв относительно других;
- 4) одни молекулярные слои растягиваются, а другие сжимаются.



## ЧАСТЬ 2. ТВЁРДОЕ ТЕЛО В МЕХАНИКЕ

### § 2.1. Статика, её задачи и принципы

Статика – это раздел механики, в котором изучают условия равновесия материальных тел под действием приложенных сил. К основным понятиям статики относят понятия силы, момента силы относительно центра и оси, пары сил.

Основная задача статики – определение условий, при которых тело, на которое действуют силы, может оставаться в покое.

Принципы статики:

1. Сила в механике является вектором.
2. Силы можно складывать и вычитать в соответствии с правилами сложения и вычитания векторов.
3. Точку приложения силы можно переносить вдоль её направления, не меняя действия силы на тело в целом.
4. Силу можно разложить на составляющие.
5. Если линии действия сил не пересекаются, то их равнодействующая делит расстояние между этими силами в отношении, обратном отношению сил (рис. 2.1):

$$F_1:F_2 = l_2:l_1.$$

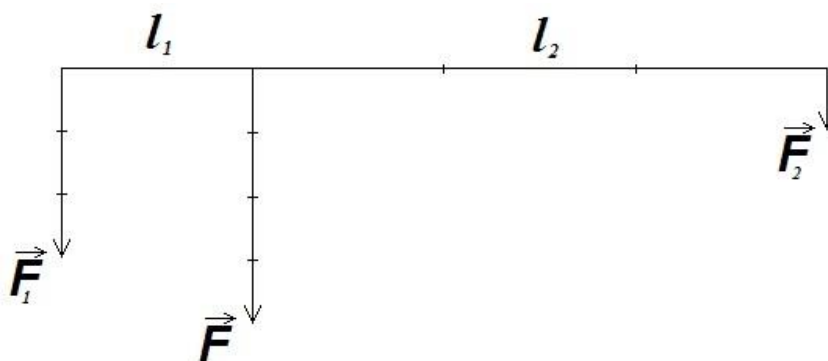


Рис. 2.1. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  и их равнодействующая  $\vec{F}$

6. Момент силы: сила, действующая на тело, закреплённое на оси, может вызывать его вращение только в том случае, когда направление силы не проходит через ось вращения (рис. 2.2).

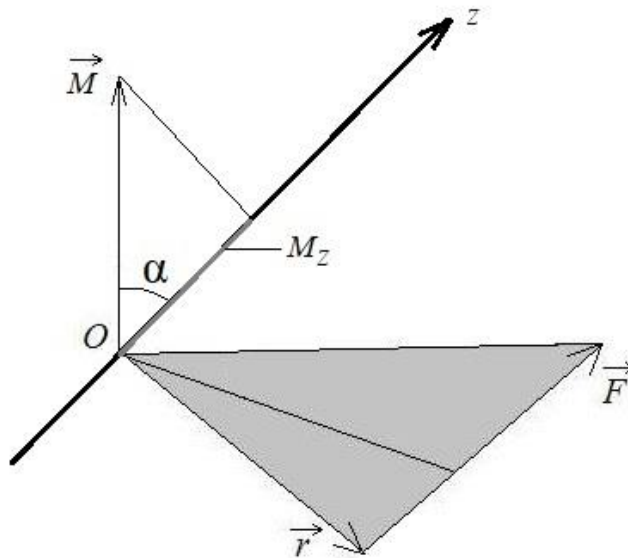


Рис. 2.2. Момент силы относительно оси  $z$ , проходящей через точку  $O$

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]; \quad M = rF \sin \alpha.$$

Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$  называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $\vec{M}$  момента силы, определённого относительно произвольной точки  $O$ , выбранной на оси  $z$ . Значение  $M_z = M \cos \alpha$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ . Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью  $z$ .

Пара сил – это две силы, равнодействующая которых равна нулю, а результирующий момент не равен нулю. Если тело закреплено на оси, то при действии пары сил оно начнёт вращаться вокруг этой оси (рис. 2.3).

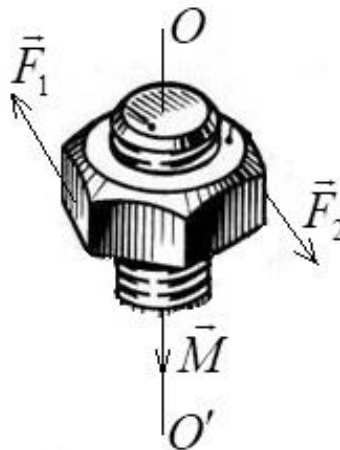


Рис. 2.3. Схема действия пары сил на твёрдое тело

Момент пары сил  $\vec{M}$  относительно любой  $OO'$  оси, перпендикулярной плоскости пары, одинаков, а его направление определяют по правилу правого винта.

## § 2.2. Условия равновесия тел

1. Тело может находиться в равновесии, если сумма проекций всех приложенных к нему сил на любое направление равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0.$$

2. Тело, закреплённое на оси, может находиться в равновесии, если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю.

Равновесие тела называется устойчивым, если при отклонении тела от положения равновесия оно под действием возникших сил возвращается к положению равновесия (рис. 2.4).

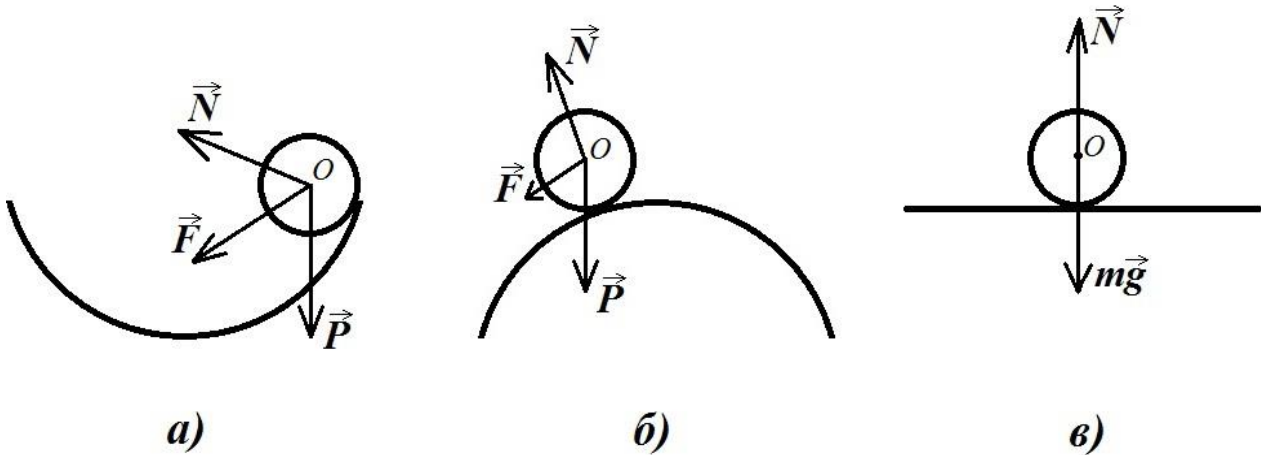


Рис. 2.4. Равновесие твёрдого тела:  
 а – устойчивое; б – неустойчивое; в – безразличное

Если силы вызывают дальнейшее отклонение от положения равновесия, то равновесие называется неустойчивым. Безразличным называется равновесие тела, когда действующие на него силы уравниваются друг друга при любом положении тела.

Центр масс (или центр тяжести) – точка, к которой приложена сила тяжести, действующая на тело. В общем случае центр тяжести может и не лежать внутри тела, а выходить за его пределы (например, различные изогнутые длинные предметы, кольца, полукольца и так далее).

Рассмотрим основные методы определения положения центра масс тел для некоторых конкретных случаев, возникающих при решении задач по статике:

1. У однородных тел правильной формы (шары, прямоугольники, стержни) центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Следует запомнить, что центр тяжести однородной треугольной пластины лежит в точке пересечения её медиан. Для однородных симметричных тел центр тяжести всегда расположен на оси симметрии.

2. Определение положения центра тяжести системы из двух тел с известными центрами тяжести. Здесь можно использовать замечательное свойство центра тяжести. Подперев центр тяжести, мы обеспечим равновесие тела. Таким образом, центр тяжести системы из двух тел лежит на отрезке, соединяющем их центры тяжести, и делит его в отношении, обратном отношению масс тел:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

где  $l_1$  – расстояние от центра масс до тела с массой  $m_1$ , а  $l_2$  – до тела с массой  $m_2$ .

3. Определение положения центра тяжести любой системы тел с известными положениями центров тяжести. Необходимо ввести систему координат (естественно, начало координат выбрать в точке, относительно которой необходимо рассчитать положение центра тяжести), определить в ней координаты центров тяжести всех тел и найти координаты центра тяжести системы по формуле

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Аналогичные уравнения получаются для остальных координатных осей, если таковые необходимо рассматривать в задаче.

4. Однородное тело правильной формы с вырезом правильной формы. Проще всего свести задачу к обратной: мысленно вставить вырез обратно и получить тело правильной формы с известным положением центра тяжести. Далее представить его в виде двух тел: с вырезом и самого выреза. У одного из тел (выреза) мы знаем положение центра тяжести. У другого – нет. Зато знаем положение центра тяжести системы двух тел. Составив уравнение для определения общего центра тяжести, получим выражение с одной неизвестной – центром тяжести тела с вырезом. Решив уравнение, получим искомый ответ.

5. Теорема Паппа. Применяется для определения положения центра тяжести плоской пластины, которая при вращении вокруг некоторой оси образует тело с легко вычисляемым объёмом. Необходимо мысленно повернуть пластину на один оборот, нарисовать рисунок и применить теорему.

Формулировка теоремы: объём тела, полученного при вращении пластины, равен произведению её площади на путь, пройденный центром тяжести при вращении.

### § 2.3. Вопросы для самоподготовки

1. Какая сила называется равнодействующей?
2. Какие вопросы рассматриваются в статике? Где применяется статика?
3. Чему равен момент силы относительно точки?
4. Почему гайку легче крутить длинным гаечным ключом?
5. Какое состояние тела называется равновесием? Назовите условия равновесия.
6. Какие условия необходимы и достаточны для равновесия твёрдого тела?
7. Что такое центр тяжести? Где может находиться центр тяжести тела? В каких случаях может меняться положение центра тяжести тела?
8. Как определить положение центра масс системы, состоящей: а) из двух материальных точек; б) произвольного числа материальных точек?

### § 2.4. Примеры решения задач

Пример 2.1. На тело действуют силы 4 и 5 Н, направленные под углом  $90^\circ$  друг к другу. Определите равнодействующую этих сил.

Решение. Равнодействующая сила  $F$  равна геометрической (то есть векторной) сумме всех сил, действующих на тело (рис. 2.5).

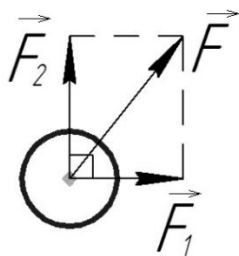


Рис. 2.5. Равнодействующая сила

Если сложить силы  $F_1$  и  $F_2$ , которые перпендикулярны друг другу, то модуль равнодействующей силы можно найти по теореме Пифагора:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

Произведём вычисления:

$$F = 6,4\text{Н.}$$

Пример 2.2. Центр тяжести системы, состоящей из однородного массивного стержня с укрепленными на его концах грузами  $m_1 = 5,5$  кг и  $m_2 = 1$  кг, находится на расстоянии  $1/5$  длины стержня от более тяжелого груза. Чему равна масса стержня?

Решение. Если в центре тяжести поставить опору (или укрепить подвес), то система будет находиться в равновесии. Сделаем схематический рисунок и покажем действующие на систему силы: силу реакции опоры  $\vec{N}$ , силы тяжести грузов и стержня  $m_1\vec{g}$ ,  $m_2\vec{g}$  и  $m\vec{g}$ , учитывая, что последняя приложена в середине стержня (рис. 2.6).

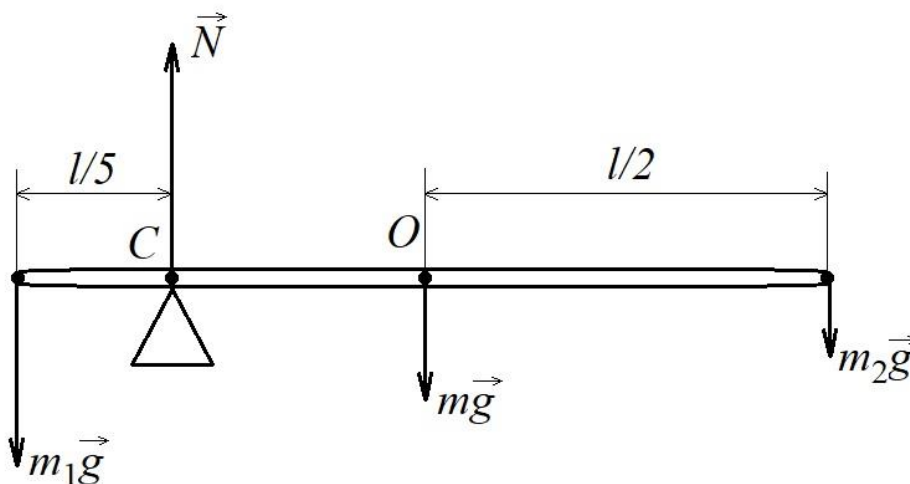


Рис. 2.6. Схема системы стержень – грузы

Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через центр тяжести  $C$ , равна нулю:

$$mg \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{5} \right) + m_2g \left( l - \frac{l}{5} \right) - m_1g \frac{l}{5} = 0.$$

Решив это уравнение, найдём

$$m = \frac{(2m_1 - 8m_2)}{3}.$$

Численно масса стержня равна

$$m = \frac{(2 \cdot 5,5 - 8 \cdot 1)}{3} = 1 \text{ кг.}$$

## § 2.5. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

2.1. На аэростат в горизонтальном направлении действует ветер с силой 3000 Н. Натяжение троса 5000 Н. Определите натяжение троса в безветренную погоду.

2.2. Шар массой 6 кг висит на верёвке, прикрепленной к гладкой стене. С какой силой шар давит на стенку, если верёвка проходит через центр шара, а  $\alpha = 30^\circ$ ?

2.3. На обод колеса вагона действует тормозящая сила 500 Н. Определите момент этой силы, если радиус колеса 45 см.

2.4. Рабочий удерживает за один конец доску массой 50 кг. С горизонтальной поверхностью доска образует угол  $30^\circ$ . С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила направлена перпендикулярно доске?

2.5. Два человека несут груз на невесомом стержне длиной 3 м. Нагрузка (усилие) одного человека в два раза больше, чем другого. На каком расстоянии от него укреплен груз?

2.6. К стене приставлена лестница массой 60 кг. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии  $1/3$  длины от её верхнего конца. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы её верхний конец не оказывал давления на стенку? Угол между лестницей и стеной равен  $45^\circ$ .

2.7. Лестница массой  $m_1$  и длиной  $l$  приставлена к гладкой стене. Угол между стеной и лестницей равен  $\alpha$ , модуль силы трения между лестницей и полом равен  $F_{\text{тр}}$ . На какую высоту может подняться человек массой  $m_2$  по лестнице, прежде чем она начнет скользить? Центр тяжести лестницы находится на расстоянии  $l/2$  от её конца.

2.8. Какой тормозящий момент относительно оси вращающегося колеса диаметра 40 см создаёт колодка, прижатая к ободу колеса с силой 100 Н, если коэффициент трения равен 0,6?

2.9. Труба лежит на земле. Рассчитайте массу трубы, если известно, что, для того чтобы приподнять её за один конец, необходимо приложить силу  $F = 20$  Н,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2.10. Два однородных шара, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ , а радиусы – соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , соединены однородным стержнем, масса которого  $m_3$ , длина  $l$ . Центры шаров лежат на продолжении оси стержня. Найдите центр тяжести этой системы.

2.11. Определите положение центра тяжести однородной круглой пластинки радиусом  $R$ , в которой вырезано квадратное отверстие так, как показано на рис. 2.7.

2.12. К вершине вертикальной мачты прикреплена антенна, действующая на неё в горизонтальном направлении с силой  $F_1 = 500$  Н, и оттяжка, которая действует на мачту с силой  $F_2 = 1000$  Н. Считая мачту невесомым твёрдым телом, Найдите угол между оттяжкой и вертикалью и силу, с которой мачта давит на землю.

2.13. Одна половина цилиндрического стержня состоит из стали, а другая – из алюминия. Определите положение центра масс стержня, если его длина равна 30 см.

2.14. С какой минимальной силой  $F$ , направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок массы  $m = 5$  кг к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Коэффициент трения между бруском и стеной  $\mu = 0,1$ .

2.15. Однородная линейка массы  $m$  на  $1/3$  длины выступает за край стола. Какую силу  $F$  нужно приложить, чтобы сдвинуть линейку вдоль её длинной стороны? Коэффициент трения между линейкой и столом равен  $\mu$ .

2.16. Деревянный брусок массой  $m = 2$  кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 60^\circ$ . С какой силой  $F$ , направленной перпендикулярно к плоскости, необходимо прижать брусок, чтобы он не соскользнул? Коэффициент трения между бруском и плоскостью  $\mu = 0,4$ .

2.17. Однородный стержень с прикреплённым на одном из его концов грузом массой  $m = 1,2$  кг находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть на расстоянии  $1/5$  длины стержня от груза. Найдите массу стержня.

2.18. Однородная балка лежит на платформе так, что один её конец на  $1/4$  длины свешивается с платформы. К свешивающемуся концу прилагают силу, направленную вертикально вниз. Когда эта сила становится равной  $F = 2000$  Н, противоположный конец балки начинает подниматься. Найдите массу балки.

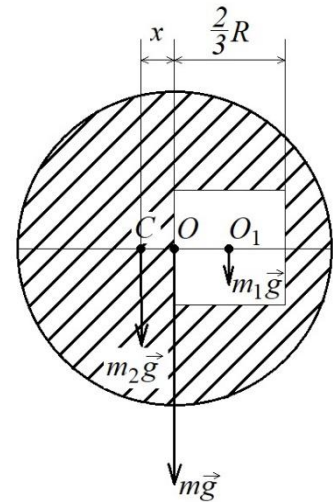


Рис. 2.7. Однородная пластинка с квадратным вырезом



2.19. Две параллельные и противоположно направленные силы  $F_1 = 10$  Н и  $F_2 = 25$  Н приложены в точках  $A$  и  $B$  стержня, расположенных на расстоянии  $d = 1,5$  м друг от друга. Найдите силу  $F$ , уравнивающую силы  $F_1$  и  $F_2$ , и точку её приложения.

2.20. Два однородных кубика с массами  $m_1 = 0,3$  кг и  $m_2 = 1,2$  кг и длинами ребер  $l_1 = 0,08$  м и  $l_2 = 0,12$  м соединены при помощи однородного стержня, имеющего массу  $m = 0,6$  кг и длину  $d = 0,1$  м. Концы стержня прикреплены к серединам граней кубиков, а центры кубиков лежат на продолжении оси стержня. Найдите положение центра масс системы.

2.21. Две тонкие палочки массами  $M$  и  $m$  соединены так, как показано на рис. 2.8. Палочки могут вращаться без трения вокруг осей  $A$  и  $B$ , проходящих через нижние концы палочек. Верхняя палочка образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . При каком минимальном коэффициенте трения  $\mu$  между палочками нижняя палочка не упадёт?

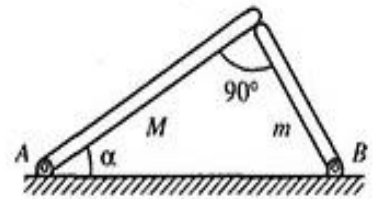


Рис. 2.8. Схема расположения палочек в задаче 2.21

2.22. Четыре однородных шара массами  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 5$  кг,  $m_3 = 7$  кг и  $m_4 = 3$  кг укреплены последовательно (в порядке номеров) на невесомом стержне так, что их центры находятся на оси стержня на равных расстояниях  $0,2$  м друг от друга. На каком расстоянии от центра третьего шара находится центр тяжести системы?

2.23. Две стороны проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника, сделаны из алюминиевой проволоки, а третья – из медной вдвое большего диаметра. Плотность меди считайте в три раза большей плотности алюминия. Определите, на каком расстоянии от середины медной проволоки находится центр тяжести системы, если сторона треугольника равна  $L$ .

2.24. Однородный цилиндр поставлен на наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha$  с горизонтом. При каком максимальном значении угла наклона  $\alpha_{\max}$  цилиндр ещё не опрокинется, если высота цилиндра вдвое больше его радиуса?

2.25. На каком расстоянии от дна находится центр масс тонкостенного цилиндрического стакана, имеющего высоту  $h = 12$  см и радиус  $R = 4$  см, если толщина дна в два раза больше толщины стенок?

2.26. Однородная пластина имеет форму полукруга радиусом  $r$ , соединённого с прямоугольником, имеющим основание, равное диаметру полукруга, и высоту  $h$  (рис. 2.9). Найдите отношение  $h/r$ , если центр масс всей пластины совпадает с геометрическим центром полукруга (точкой  $C$ ). Расстояние от центра масс полукруга  $C_1$  до его геометрического центра  $C$  равно  $4r/3\pi$ .

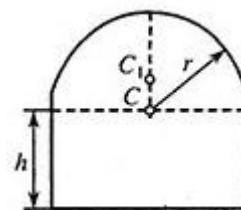


Рис. 2.9. Пластинка

2.27. Определите положение центра тяжести однородного диска радиусом  $R$ , из которого вырезано отверстие радиусом  $r < (R/2)$ . Центр выреза находится на расстоянии  $R/2$  от центра диска (рис. 2.10).

2.28. Три человека несут однородную пластину массой 70 кг, имеющую форму равностороннего треугольника со стороной 2 м. Один держит середину основания пластины, а двое других – противоположную вершину. На каком расстоянии от этой вершины надо положить на пластину груз массой 100 кг, чтобы при горизонтальном положении пластины нагрузка была распределена поровну между всеми несущими?

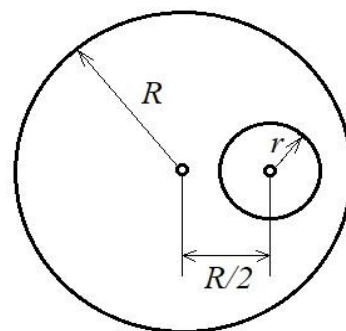


Рис. 2.10. Диск с вырезом

2.29. Момент силы относительно точки – это:

- 1) произведение модуля силы на квадрат расстояния от линии её действия до данной точки;
- 2) произведение вектора силы на время, в течение которого эта сила действует;
- 3) вращающее действие силы, равное произведению модуля силы на её плечо;
- 4) отношение импульса силы к расстоянию от линии её действия до данной точки.

2.30. Парой сил называют систему двух сил:

- 1) равных по модулю, непараллельных и направленных в разные стороны;
- 2) равных по модулю, параллельных и направленных в одну сторону;
- 3) равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

2.31. Назовите условия равновесия:

- 1) геометрическая сумма всех сил должна быть равна нулю;
- 2) геометрическая сумма всех внешних сил должна быть равна нулю;
- 3) алгебраическая сумма моментов всех внешних сил должна быть равна нулю;
- 4) наличие сил сопротивления в системе.

2.32. Плечо силы – это:

- 1) длина рычага;
- 2) расстояние от оси рычага до его конца;
- 3) кратчайшее расстояние от точки опоры до линии действия силы;
- 4) кратчайшее расстояние между линиями, вдоль которых направлены силы, действующие на рычаг.

2.33. Брусок расположен на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 45^\circ$  (рис. 2.11). Будет ли брусок находиться в равновесии, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu = 0,8$ ?

- 1) будет;
- 2) будет, если масса бруска намного меньше массы наклонной плоскости;
- 3) ответ дать невозможно;
- 4) не будет.

2.34. На железной дороге для натяжения проводов используется показанная на рис. 2.12 система, состоящая из лёгких блоков и тросов, натягиваемых тяжёлым грузом. Чему равна сила натяжения провода? Трение в осях блоков мало. Блоки и нити считайте невесомыми.

- 1) 100 Н; 2) 400 Н;
- 3) 200 Н; 4) 800 Н.

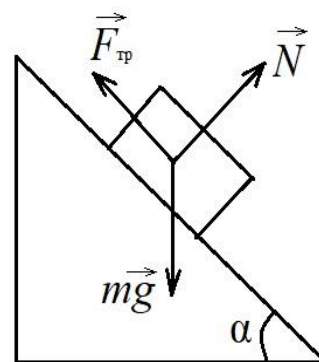


Рис. 2.11. Брусок на наклонной плоскости

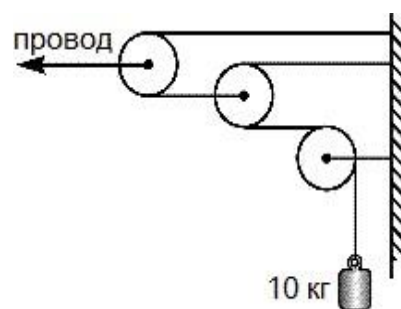


Рис. 2.12. Схема натяжения провода

## ЧАСТЬ 3. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

### § 3.1. Основные понятия

Механика жидкости и газа или гидроаэромеханика – раздел механики, в котором изучают равновесие и движение жидких и газообразных сред, а также их взаимодействие между собой и с погруженными в них телами.

Основные задачи гидроаэромеханики:

1. Определение сил, действующих на твёрдые тела, движущиеся в жидкости или газе.
2. Определение параметров жидкости или газа вблизи поверхности твёрдых тел.
3. Исследование движения жидкости и газа внутри каналов различной формы.

Гидроаэромеханику делят на гидро- и аэростатику и гидро- и аэродинамику.

*Жидкость* – это агрегатное состояние вещества, промежуточное между твёрдым и газообразным состояниями. Характеризуется следующими свойствами:

- 1) сохраняет объём;
- 2) образует поверхность;
- 3) обладает прочностью на разрыв;
- 4) принимает форму сосуда;
- 5) обладает текучестью.

Пункты 1–3 аналогичны свойствам твёрдых тел, а п. 4 – газам. Главное отличительное свойство жидкости – текучесть.

Жидкости, имеющие одно жидкое состояние, называют *нормальными*. Существуют также *квантовые* жидкости: одна нормальная фаза и одна или две сверхтекучие; жидкие кристаллы – жидкокристаллические вещества, имеющие нормальную и одну или несколько анизотропных фаз. *Газом* называется агрегатное состояние вещества, в котором все его частицы слабо взаимодействуют между собой и заполняют весь предоставленный объём.

### § 3.2. Основные законы гидро- и аэростатики

#### *Закон Паскаля*

Жидкости и газы передают оказываемое на них давление равномерно по всем направлениям. Следовательно, давление  $P$  не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

На произвольной глубине

$$P = P_0 + \rho gh,$$

где  $P_0$  – давление на поверхность жидкости;  $\rho gh$  – давление столба жидкости (гидростатическое давление).

Если несжимаемая жидкость находится в сосуде, который равномерно вращается вокруг некоторой вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ , то давление в некоторой точке определяется выражением

$$P = P_0 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2,$$

где  $r$  – расстояние от этой точки до оси вращения;  $\rho$  – плотность жидкости.

Следствия:

1. Действие гидравлического пресса: выигрыш в силе равен отношению его площадей:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2},$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – площадь малого и большого цилиндра соответственно.

2. Давление на дно сосуда не зависит от формы сосуда и определяется высотой столба жидкости и её плотностью.

3. Однородная жидкость в *сообщающихся сосудах* устанавливается на одном и том же уровне, а разнородные – на высотах:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Упругие свойства жидкости по отношению к малым изменениям объёма характеризуются *коэффициентом изотермической сжимаемости*:

$$\beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{T=\text{const}}, \quad \beta = \frac{1}{\text{Па}} = \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}.$$

Знак « $\rightarrow$ » говорит о том, что увеличение давления  $P$  сопровождается уменьшением объёма  $V$ . Жидкости обладают очень малой сжимаемостью: вода:  $\beta = 0,47 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$ ; спирт:  $\beta = 1,17 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$ ; эфир:  $\beta = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$ .

*Закон Архимеда*

На тело, погружённое в жидкость (газ), действует выталкивающая сила (подъёмная), численно равная весу жидкости (газа) в объёме, вытесненном телом:

$$F_g = V \rho g = mg,$$

где  $V$  – объём тела;  $\rho$  – плотность жидкости.

Она направлена вверх и проходит через центр масс. Центр масс вытесненной жидкости называется центром плавучести тела. Его положение определяет условия равновесия и устойчивости плавающего тела.

Следствия:

1. Плавающее тело будет находиться в равновесии, если его вес равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести и центр масс тела лежат на одной вертикали, при этом тело полностью погружено в жидкость:

$$G = F_B,$$

где  $G$  – вес тела;  $F_B$  – выталкивающая сила.

2. Если  $G < F_B$ , то тело плавает частично погружившись.

3. Если  $G > F_B$ , то тело утонет.

*Закон Бойля – Мариотта*

При постоянной температуре  $T$  произведение давления газа  $P$  на его объём  $V$  – величина постоянная:

$$PV = \text{const.}$$

Следствия:

1. При постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ) давление газа  $P$ , находящегося в замкнутом сосуде, пропорционально его плотности  $\rho$ , то есть  $P \sim \rho$ .

2. При постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ) справедливо равенство

$$P_1 V_1 = P_2 V_2,$$

где  $P_1, V_1$  – параметры начального состояния газа;  $P_2, V_2$  – параметры конечного состояния газа.

Если считать, что атмосфера является изотермической, то есть находящейся в механическом и тепловом равновесии, то давление атмосферы с высотой уменьшается по экспоненциальному закону.

### § 3.3. Основное уравнение гидростатики

Основное уравнение гидростатики устанавливает связь между силой  $f$ , действующей в жидкости (газе) и приходящейся на единицу её объёма, и изменением давления  $P$  в состоянии равновесия.

$$\vec{f} = -\text{grad}P;$$

$f_x = \frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $f_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $f_z = \frac{\partial P}{\partial z}$  – проекции силы  $\vec{f}$  на оси декартовой системы координат. В случае силы тяжести:

$$f = \rho g,$$

$$[f] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

Из уравнения следует, что равновесие жидкости (газа) возможно только в том случае, если сила  $\vec{f}$  является консервативной.

### § 3.4. Теорема о неразрывности струй жидкости

Для описания движения жидкости будем отмечать скорость, с которой проходят через каждую точку пространства отдельные частицы жидкости. Тогда совокупность векторов  $\vec{v}(t)$ , заданных для всех точек пространства, называется *полем вектора скорости*. Это поле можно наглядно изобразить с помощью *линий тока*. Для наглядности построения густоту линий тока выбирают численно равной модулю скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле вектора скорости  $\vec{v}$  в разных точках пространства. Например, в точке 1 (рис. 3.1) густота линий и модуль вектора  $\vec{v}$  больше, чем в точке 2.

Если скорость в каждой точке пространства по модулю и направлению остаётся постоянной ( $\vec{v} = \text{const}$ ) в течение времени, то течение жидкости называется *стационарным* (установившимся).

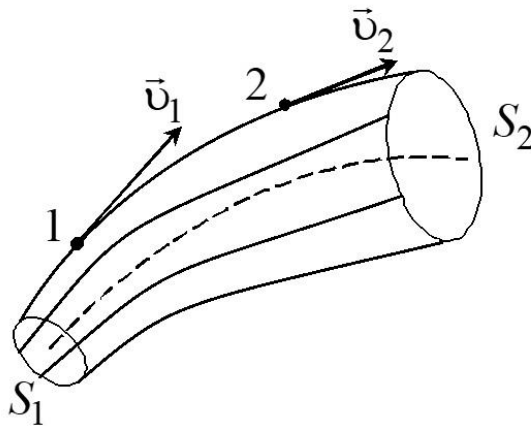


Рис. 3.1. Линии тока и векторы скорости в различных точках потока

Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, образуется поверхность, которую называют *трубкой тока*. Вектор  $\vec{v}$  касателен к поверхности трубки тока в каждой точке. Следовательно, частицы жидкости при своём движении не пересекают стенку трубки тока.

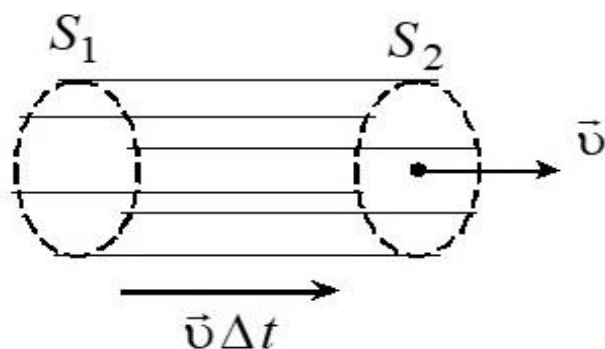


Рис. 3.2. Цилиндрическая трубка тока

Изобразим трубку тока (рис. 3.2) в виде прямолинейной цилиндрической трубы:  $S_1 = S_2 = S$ . За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  пройдёт объём жидкости

$$V = S\bar{v}\Delta t,$$

а за единицу времени

$$V = S\bar{v}.$$

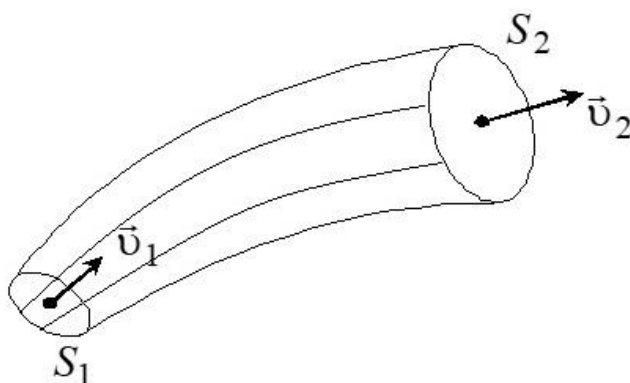


Рис. 3.3. Произвольная трубка тока

Так как коэффициент сжимаемости жидкостей очень мал, то практически их можно считать несжимаемыми. Тогда для произвольной трубки тока (рис. 3.3) количество жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  остаётся постоянным. Следовательно, объёмы жидкости, протекающие в единицу времени через  $S_1$  и  $S_2$ , должны быть одинаковыми:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любой пары сечений, то для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение  $S \cdot v$  в любом сечении трубки тока имеет одинаковое значение:

$$Sv = \text{const.}$$



Это сущность теоремы о неразрывности струй жидкости. Из данной теоремы следует, что при изменяющемся сечении трубки частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением, то есть скорость жидкости в различных по величине сечениях будет разной.

Для реальной жидкости и газа эта теорема имеет вид

$$\rho S v = \text{const.}$$

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение (то есть вязкость), называется *идеальной*.

### § 3.5. Теорема Бернулли

Согласно теореме неразрывности  $\Delta V_1 = \Delta V_2$ , то есть за время  $\Delta t$  жидкость, заключённая между сечениями 1 и 2, перемещается вдоль трубки тока в положение, определяемое сечениями 1' и 2' (см. рис. 3.4).

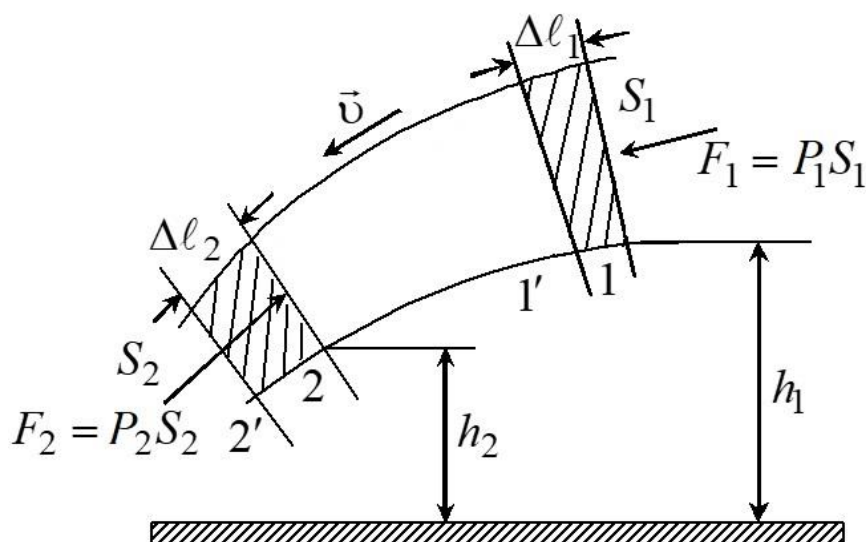


Рис. 3.4. Схема к выводу теоремы Бернулли

Возьмём сечения  $S_1$  и  $S_2$ , а также перемещение  $\Delta l$  такими малыми, чтобы все точки выделенных участков имели одинаковые скорости, давление и высоту.

Тогда работа приложенных сил будет равна:

$$A = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_1 - P_2) \Delta V.$$

Эта работа численно равна приращению механической энергии потока:

$$\begin{aligned} \Delta E &= A = (W_{k2} + W_{n2}) - (W_{k1} + W_{n1}) = \\ &= \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) = (P_1 - P_2) \Delta V. \end{aligned}$$

Получим уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2;$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const.}$$

Сумма скоростного напора  $\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$ , гидростатического давления  $(\rho g h)$  и внешнего давления на жидкость  $P$  есть величина постоянная в любом сечении.

Проверка единиц:

скоростной напор:  $\left[\frac{\rho v^2}{2}\right] = [P]$ , так как  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \text{с}^2} = \frac{\text{Нм}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ;

гидравлическое давление:  $[\rho g h] = [P]$ , так как  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \text{м} = \frac{\text{Нм}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

Если высота не изменяется, то есть  $h = \text{const}$  (трубка горизонтальная), то

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \text{const.}$$

То есть сумма скоростного напора и внешнего давления – величина постоянная.

Из последнего равенства следует, что давление меньше в тех точках, где скорость больше.

### § 3.6. Измерение давления в текущей жидкости

#### *Трубка Пито*

Давление в точке 1 (рис. 3.5, а)

$$P_{(1)} = \frac{\rho v_1^2}{2} + P_1,$$

где  $P_1$  – статическое давление;  $\frac{\rho v_1^2}{2}$  – динамическое давление.

В точке 2 скорость  $v_2 = 0$ , поэтому давление в ней будет

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1,$$

что и показывает манометр (полное давление):

$$P_{(2)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

В случае б (рис. 3.5, б) трубка Пито покажет только статическое давление, так как скорости в точках 1 и 2 практически не отличаются, поэтому  $P_{(1)} = P_{(2)} = P_1$ .

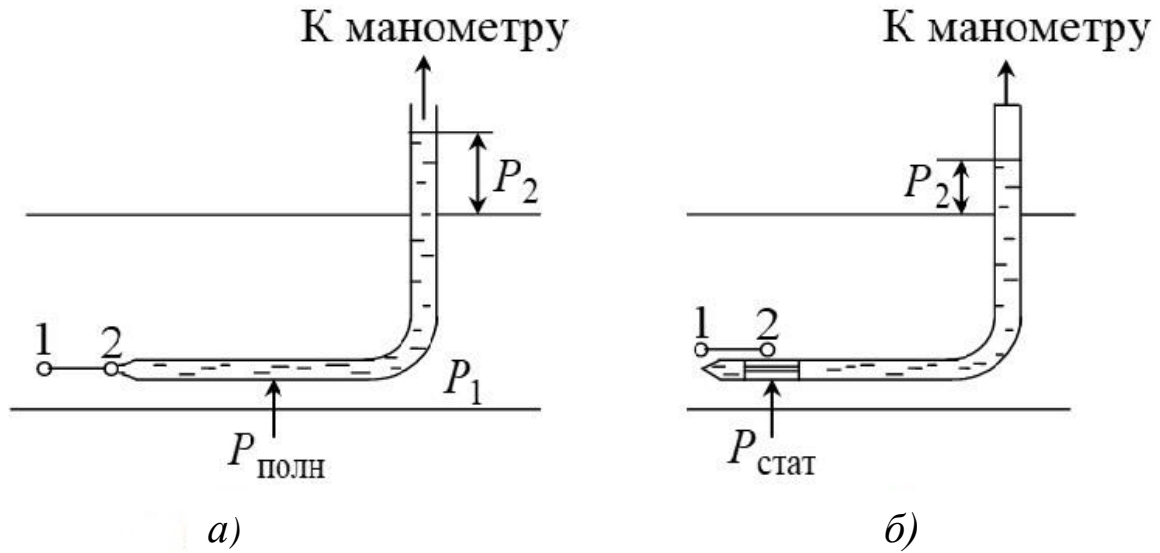


Рис. 3.5. Схемы для измерения полного (а) и статического (б) давления с помощью трубки Пито

### Трубка Пито – Прандтля



Рис. 3.6. Схема для измерения динамического давления с помощью трубки Пито – Прандтля

Трубка Пито – Прандтля (рис. 3.6) позволяет измерить разность давлений в точках 1 и 2, то есть динамическое давление, так как

$$P_{(1)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2};$$

$$P_{(2)} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Следовательно,  $P_{(1)} - P_{(2)} = (P_1 - P_2) + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2}{2}$ , так как  $P_1 = P_2$ , а  $v_2 = 0$ .

Таким образом, если шкалу дифференциального манометра проградуировать в единицах скорости, то трубку Пито – Прандтля можно использовать для измерения скорости течения жидкости.

### § 3.7. Истечение идеальной жидкости из отверстия

Для всех точек каждого из сечений  $S_1$  и  $S_2$  скорость  $v$  и высоту  $h$  можно считать одинаковыми (рис. 3.7).

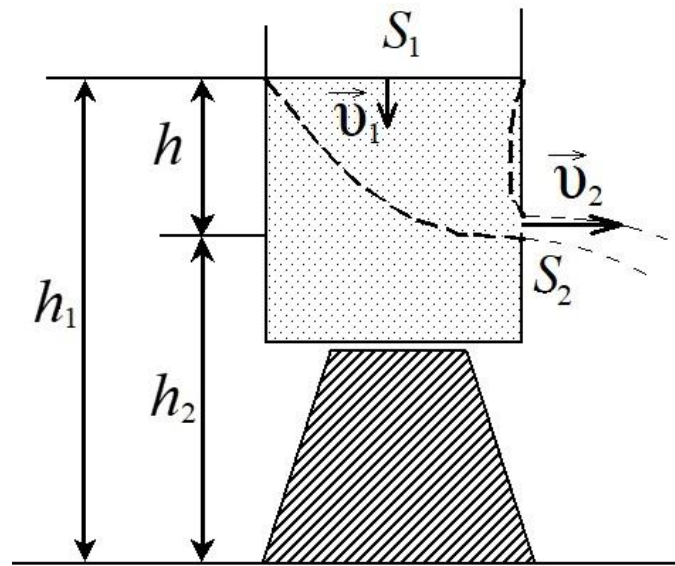


Рис. 3.7. Схема к расчёту скорости истечения идеальной жидкости из отверстия

Применим теорему Бернулли. Так как  $v_1$  очень мала, будем полагать, что  $v_1 = 0$ , поэтому

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

где  $v_2$  – скорость течения в сечении  $S_2$ . С учётом того, что  $h_1 - h_2 = h$ , получим

$$v = \sqrt{2gh},$$

то есть совпадает со скоростью свободного падения тела. Это для идеальной жидкости. Для реальных жидкостей скорость будет тем меньше, чем больше внутреннее трение. Вязкие жидкости: нефть, мазут, глицерин – будут вытекать медленнее.

Объём жидкости:  $V = S_1 v$ , но  $\rho S_1 v = m$ , то есть масса жидкости.

Импульс струи:  $m \vec{v} = \rho S_2 v \vec{v}$ .

По закону сохранения импульс силы, действующей на стенку сосуда, равен импульсу вытекающей струи. Импульс силы в единицу времени равен силе, действующей на стенку. Модуль этой силы:

$$F_r = \rho S_2 v^2 = \rho S_2 2gh = 2S_2 \rho gh = 2S_2 P = 2 \cdot F_{\text{гидр}};$$

$$F_r = -\rho S_2 v \vec{v}.$$

Следовательно, сила  $F_r$  превосходит силу гидростатического давления в 2 раза. Это связано с тем, что движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления. На противоположной стене (относительно отверстия) давление оказывается большим, чем на стенку с отверстием.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Основоположником теории полёта ракет и межпланетного сообщения является русский учёный К. Э. Циолковский.

### § 3.8. Вязкость

Течение жидкости, при котором частицы движутся вдоль прямолинейной траектории не перемешиваясь, называется ламинарным (слоистым). При ламинарном течении жидкость может быть представлена в виде слоёв, которые скользят один относительно другого (рис. 3.8).

Такое течение стационарно. Например, при течении жидкости в трубе скорость частиц изменяется от нуля (у стенки) до максимальной (на оси).

При движении слоёв жидкости с разными скоростями между ними возникают касательные силы, называемые силами внутреннего трения  $F_{\text{тр}}$  или силами вязкости. Экспериментально установлено, что модуль силы трения равен

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S,$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения или динамической вязкости.

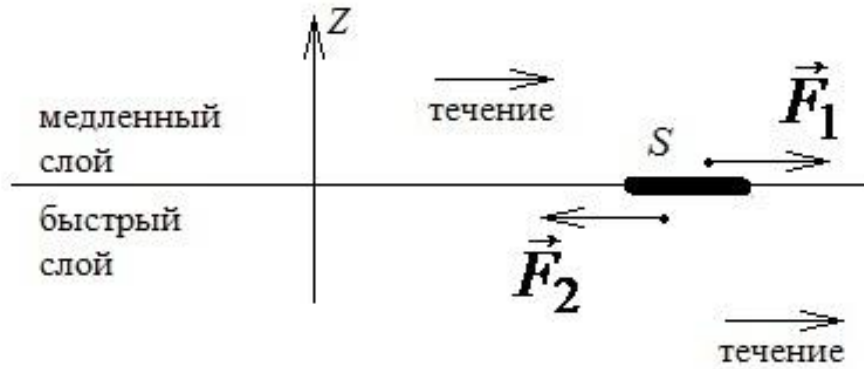


Рис. 3.8. Схема действия сил при контакте быстрого и медленного слоёв

Размерность коэффициента внутреннего трения

$$[\eta] = \frac{\text{Н}}{\frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{М}} \text{М}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Физический смысл коэффициента динамической вязкости заключается в том, что он численно равен импульсу, переносимому от слоя к слою в единицу времени через единичную площадку, при градиенте скорости, равном единице.

### § 3.9. Закон изменения скорости при ламинарном течении

Рассмотрим малый цилиндрический объём жидкости в трубе (рис. 3.9).

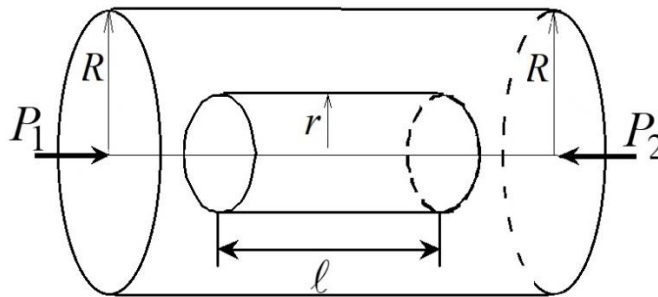


Рис. 3.9. Схема к выводу формулы изменения скорости при ламинарном течении

На основание цилиндра действует сила давления

$$F_1 = (P_1 - P_2)\pi r^2.$$

На боковую поверхность – сила внутреннего трения:

$$F_2 = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l.$$

Знак « $\rightarrow$ » означает, что скорость убывает с расстоянием от оси трубы;  $2\pi rl$  – площадь боковой поверхности цилиндра.

Поскольку объём жидкости движется без ускорения, то

$$F_1 = F_2;$$

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl;$$

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

После взятия неопределённого интеграла получаем

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

$C$  выбирают так: при  $r = R$  скорость  $v = 0$ . Тогда постоянную  $C$  определим из выражения

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2,$$

тогда

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Скорость на оси трубы

$$v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 \quad \text{или} \quad v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

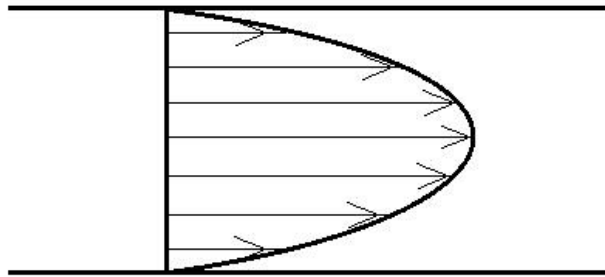


Рис. 3.10. Эпюра скорости при ламинарном течении

Получили, что при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону.

Вычислим расход жидкости, то есть объём жидкости, протекающей через сечение площадью  $S$  за единицу времени:

$$dQ = v_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr,$$

где  $2\pi r dr$  – площадь кольца радиуса  $r$  и ширины  $dr$ . Тогда  $dQ$  – это объём жидкости, протекающей через кольцо в единицу времени.

Величина  $r$  изменяется от нуля до  $R$ , поэтому

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 = \frac{(P_1 - P_2) \pi R^4}{8\eta l}.$$

Эта формула носит название *формулы Пуазейля*. Формула Пуазейля используется для определения вязкости жидкости. Если экспериментально определить объём жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы за единицу времени, то можно рассчитать коэффициент внутреннего трения.

Масса жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы  $S$  за единицу времени, рассчитывается по формуле  $m = \rho \cdot Q$ , кг/с.

### § 3.10. Турбулентное течение

*Турбулентным* называется такое течение жидкости (газа), при котором её (его) *скорость и давление быстро и нерегулярно изменяются со временем*. При турбулентном течении газа нерегулярным образом изменяется также его плотность и температура. Течение становится нестационарным (рис. 3.11).

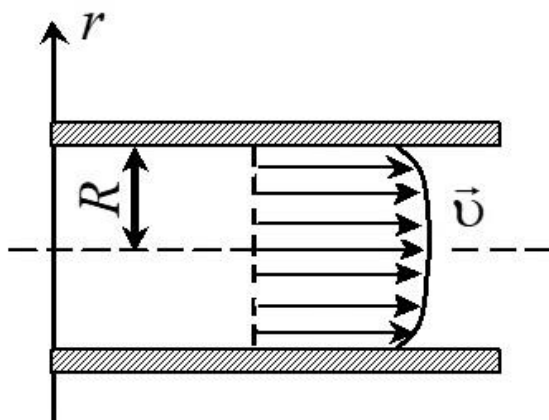


Рис. 3.11. Эпюра скоростей при турбулентном потоке

*Ламинарное* течение переходит в *турбулентное* при увеличении скорости движения жидкости (газа) или при увеличении поперечных размеров потока  $S$ . Характер течения можно определить по значению безразмерной величины, которую называют число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho v_0 l}{\eta} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}; \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}},$$

где  $\eta$ ,  $\nu$  – динамическая и кинематическая вязкость;  $l$  – характерный размер.

При малых  $Re$  течение является ламинарным, а при больших – турбулентным. Значение  $Re$ , при котором течение становится турбулентным, называется критическим. Для круглого сечения при  $l = r$  число  $Re \approx 1000$ .



Наибольшее изменение скорости при турбулентном течении наблюдается около стенки трубы.

### § 3.11. Законы гидродинамического подобия

Законы подобия позволяют осуществить моделирование, то есть из одного течения получать другое путём изменения масштаба скоростей и координат. Существует три закона подобия.

*Закон подобия для скорости потока*

$$\frac{\bar{v}}{v_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \text{Re}\right),$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор заданной точки;  $v_0$  – характерная скорость;  $l$  – характерный размер.

При одинаковых  $\text{Re}$  отношение  $\frac{\bar{v}}{v_0}$  является функцией только  $\frac{\vec{r}}{l}$ .

*Закон подобия для давления в жидкости*

$$P = \rho v_0^2 f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \text{Re}\right).$$

*Закон подобия для силы сопротивления, действующей на обтекаемое тело с характерным размером  $l$ :*

$$F = \rho v_0^2 l^2 f(\text{Re}).$$

Данные формулы справедливы, если влиянием силы тяжести можно пренебречь. В противном случае:

$$\frac{\bar{v}}{v_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \text{Re}, \Phi\right); \frac{P}{\rho v_0^2} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \text{Re}, \Phi\right); \frac{F}{\rho v_0^2 l} = f(\text{Re}, \Phi),$$

где  $\Phi$  – безразмерная величина, равная

$$\Phi \sim \frac{v_0^2}{gl},$$

называется *числом Фруда*.

Число  $\text{Re}$  (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости к потере этой энергии, равной работе сил вязкости (динамического трения) на характерной длине:

$$\text{Re} \sim \frac{T}{A} \approx \frac{\rho v_0 l}{\eta}.$$

Число Фруда (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости  $T$  к её приращению, равному работе  $A'$  сил тяжести на характерной длине:

$$\Phi \sim \frac{T}{A'} \approx \frac{v_0^2}{gl}.$$

При больших числах  $Re$  главную роль играет инерция, а при малых – вязкость. При больших числах  $\Phi$  главную роль играет инерция, а при малых – тяготение.

Если число  $Re$  велико, а число  $\Phi$  мало, то движение жидкости в основном определяется инерцией и тяготением.

При малых числах  $Re$  и больших числах  $\Phi$  движение жидкости в основном определяется инерцией и вязкостью.

### § 3.12. Движение тел в жидкостях и газах

Силу  $\vec{F}$ , с которой набегающий поток действует на тело, можно разложить на две составляющие (рис. 3.12): в направлении потока  $\vec{F}_{\parallel}$  и перпендикулярно потоку  $\vec{F}_{\perp}$ . Сила  $\vec{F}_{\parallel}$  называется лобовым сопротивлением, а сила  $\vec{F}_{\perp}$  – подъёмной силой.

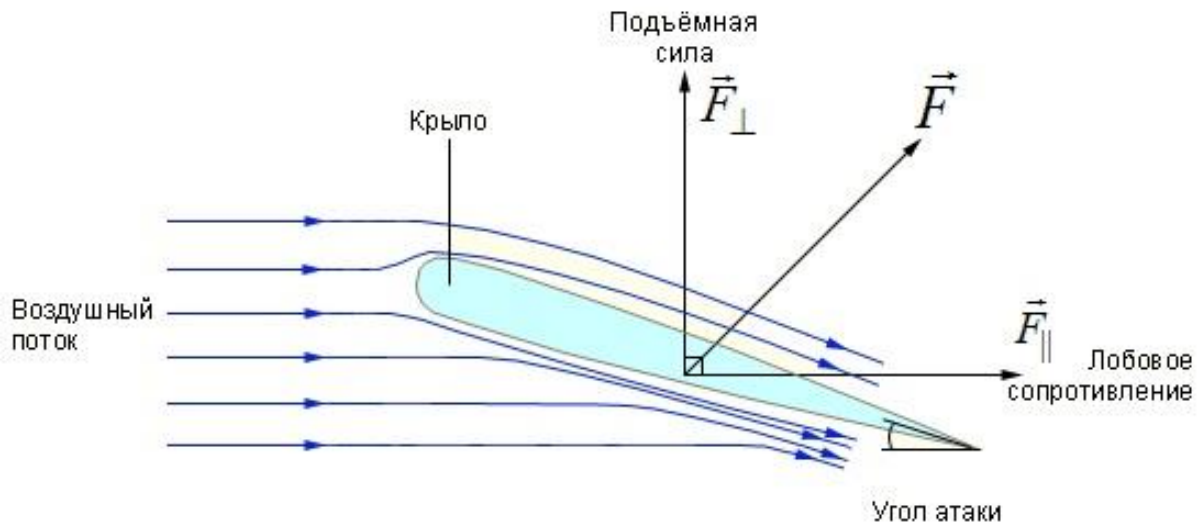


Рис. 3.12. Подъёмная сила крыла

Лобовое сопротивление складывается из сил давления и внутреннего трения.

На тело симметричное относительно направления скорости потока  $\vec{v}$  действует только лобовое сопротивление, подъёмная сила в этом случае отсутствует (рис. 3.13). При равномерном движении тела в идеальной несжимаемой жидкости лобовое сопротивление равно нулю  $\vec{F}_{\parallel} = 0$  (принцип Д’Аламбера). Это справедливо только для идеальной жидкости, в реальных жидкостях  $\vec{F}_{\parallel} \neq 0$ , так как движущееся тело всегда увлекает за собой часть жидкости.

Сила  $\vec{F}_{\parallel}$ , определяющая лобовое сопротивление, равна

$$\vec{F}_{\parallel} = C \frac{\rho S}{2} v_0^2,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $S$  – площадь поперечного сечения тела;  $C$  – коэффициент лобового сопротивления:

$$C = f(\text{Re}),$$

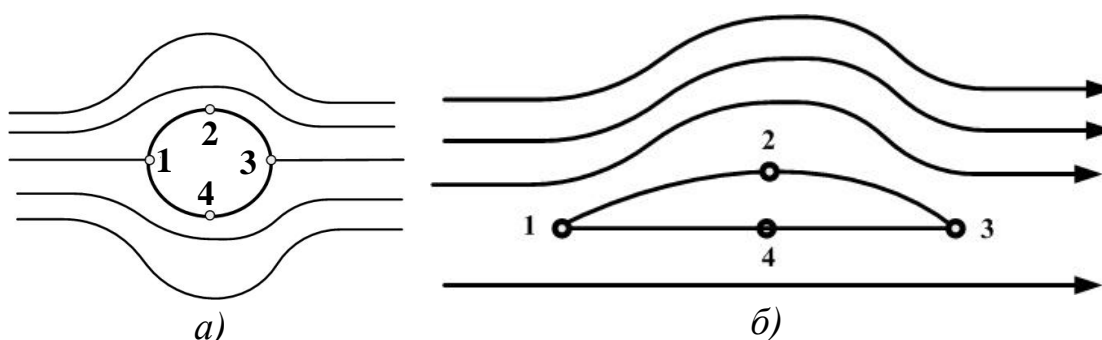
то есть  $C$  является функцией числа  $\text{Re}$  и зависит от формы тела и от его ориентации по отношению к потоку. Числовые значения  $C$  определяются экспериментально.

### Примеры численных значений коэффициента $C$

Тело	Коэффициент $C$
Тело обтекаемой формы (капля)	0,05
Шар	0,1–0,4
Автомобиль	0,3

При больших числах  $\text{Re}$  лобовое сопротивление обусловлено главным образом разностью давлений перед телом и за ним.

При малых числах  $\text{Re}$  ( $\text{Re} \ll 1$ ) лобовое сопротивление определяется в основном вязкостью.



3.13. Обтекание ламинарным потоком симметричного и несимметричного тела

Идеальная жидкость не обладает вязкостью.

В случае обтекания симметричного тела (рис. 3.13, *a*) в точках 1, 3 давление одинаково и больше, чем при  $\vec{v} = 0$ . В точках 2, 4 давление также одинаково и меньше, чем при  $\vec{v} = 0$ . В случае обтекания несимметричного тела (рис. 3.13, *б*) ламинарным потоком в точке 2 давление меньше, чем в точке 4, поэтому возникает подъёмная сила.

Тело оказывается окружённым пограничным слоем с быстро изменяющейся внутри него скоростью. Следовательно, возникают силы вязкого трения, которые приложены к телу и вызывают лобовое сопротивление.

$P_{(1)} > P_{(3)}$ , то есть давление в точке 1 больше, чем в точке 3 (см. рис. 3.13).

$$S = \frac{\ell}{\sqrt{Re}} \text{ — толщина пограничного слоя.}$$

### § 3.13. Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
2. Что называют линией тока? Трубкой тока?
3. Что характерно для установившегося течения жидкости?
4. Выведите уравнение Бернулли.
5. Как в потоке жидкости измерить статическое давление? Динамическое давление?
6. Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?
7. Какое течение жидкости называют ламинарным? Турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
8. Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?
9. Как объяснить возникновение подъёмной силы?
10. Что такое профиль крыла? Что такое угол атаки?

### § 3.14. Примеры решения задач

Пример 3.1. Бак высотой  $H = 2$  м до краёв заполнен жидкостью (рис. 3.14). На какой высоте  $h$  должно быть проделано отверстие

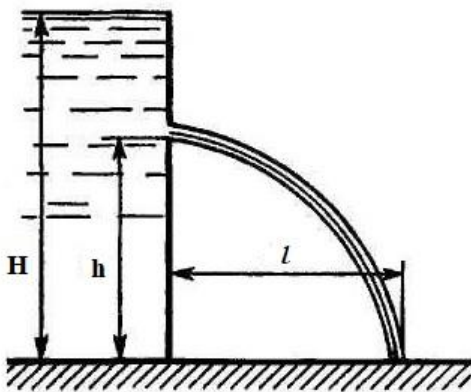


Рис. 3.14. Бак с жидкостью

в стенке бака, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия, было на максимальном от бака расстоянии?

Решение. Воспользуемся формулой для расчёта скорости истечения идеальной жидкости из отверстия

$$v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Время, за которое вода, исте-

кающая из отверстия, пройдёт путь  $h$ :  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Тогда путь

$$l = vt = \sqrt{2g(H-h)\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)}.$$

Возьмём производную для нахождения экстремума функции:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dh} &= 4H - 8h; \\ 4H - 8h &= 0.\end{aligned}$$

Откуда  $h = \frac{H}{2}$ .

Рассчитаем:  $h = 1$  м.

Пример 3.2. Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр  $d_1 = 20$  см. В нём движется со скоростью  $v_1 = 1$  м/с поршень, выталкивая воду через отверстие диаметром  $d_2 = 2$  см. С какой скоростью  $v_2$  будет вытекать вода из отверстия? Каково будет избыточное давление  $P$  воды в цилиндре?

Решение. Запишем

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Откуда

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Рассчитаем

$$\begin{aligned}v_2 &= 1 \frac{0,2^2}{0,02^2} = 100 \text{ м/с.} \\ P_1 &= \frac{\rho v_1^2}{2}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Рассчитаем:  $\Delta P = \frac{1000}{2} (10^4 - 1) = 5 \cdot 10^6$  Па.

Пример 3.3. При движении шарика радиусом  $r_1 = 2,4$  мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости  $v_1$  шарика, не превышающей 10 см/с. При какой минимальной скорости  $v_2$  шарика радиусом  $r_2 = 1$  мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Решение. Число Рейнольдса при движении шарика в касторовом масле:

$$Re_1 = \frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1}$$

Тогда при движении шарика в глицерине:

$$Re_2 = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2}.$$

Так как

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2,$$

тогда

$$\frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2},$$

откуда

$$v_2 = \frac{\rho_1 v_1 \eta_2 d_1}{\eta_1 \rho_2 d_2} = \frac{\rho_1 v_1 \eta_2 r_1}{\eta_1 \rho_2 r_2}.$$

$$\text{Рассчитаем } v_2 = \frac{960 \cdot 0,1 \cdot 1,48 \cdot 0,0024}{0,987 \cdot 1260 \cdot 0,001} = 27,5 \text{ см/с.}$$

**Пример 3.4.** По трубе течёт машинное масло. Максимальная скорость  $v_{\text{max}}$ , при которой движение масла в этой трубе остаётся ещё ламинарным, равна 3,2 см/с. При какой скорости  $v$  движение глицерина в той же трубе переходит из ламинарного в турбулентное?

**Решение.** Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta_1},$$

откуда

$$\text{Re} = \frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2}.$$

Выразим скорость течения глицерина:

$$v_2 = \frac{\eta_2 \rho_1 v_1}{\rho_2 \eta_1}.$$

Рассчитаем:

$$v_2 = \frac{0,2 \cdot 900 \cdot 0,032}{1260 \cdot 1,48} = 0,31 \text{ см/с.}$$

### § 3.15. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

3.1. Гладкую нижнюю грань площадью  $S = 36 \text{ см}^2$  квадратной берёзовой пластинки толщиной  $h = 2 \text{ см}$  натёрли парафином, поставили ко дну сосуда и осторожно заполнили сосуд водой до высоты  $H = 12 \text{ см}$ . Пластинка осталась лежать на дне. Какую наименьшую силу, направленную вертикально вверх, нужно приложить к середине одного из верхних рёбер пластинки, чтобы она всплыла на поверхность воды? Плотность берёзы  $\rho = 650 \text{ кг/м}^3$ .

3.2. Однородный сплошной стальной цилиндр плавает в ртути, при этом его основания горизонтальны. Поверх ртути наливают такой слой воды, чтобы весь цилиндр находился в жидкости. Плот-

ность воды  $\rho_1$ , плотность ртути  $\rho_2$ , плотность стали  $\rho_3$ . Какая часть объёма цилиндра находится в ртути?

3.3. Вес тела, погружённого в жидкость плотностью  $\rho_1$ , равен  $P_1$ , а погружённого в жидкость плотностью  $\rho_2$  –  $P_2$ . Найдите плотность тела.

3.4. В аквариум, имеющий форму куба с ребром длиной  $a = 40$  см, налита вода до высоты  $h = 30$  см. Найдите, какая сила действует на дно и какая – на одну боковую стенку аквариума.

3.5. Однородный металлический шар, масса которого  $m = 1$  кг, а плотность  $\rho_1 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>, погрузили в воду и отпустили. Найдите кинетическую энергию шара в момент времени, когда он погрузился на глубину  $h = 10$  м, а также архимедову силу, действующую на шар. Силой трения пренебречь.

3.6. Тело массой  $m$  и плотностью  $\rho_1$  равномерно движется вертикально вниз в жидкости, плотность которой  $\rho_2$ . Какое количество теплоты выделяется при прохождении телом пути длиной  $h$ ?

3.7. Трубку в опыте Торричелли наклонили так, что она составляет с горизонтом угол  $\alpha = 70^\circ$ . Какова длина столба ртути в трубке, если атмосферное давление нормальное?

3.8. Какой длины трубку нужно было бы взять для измерения атмосферного давления в опыте Торричелли, если бы в ней и в сосуде была не ртуть, а вода? Атмосферное давление нормальное.

3.9. В сообщающиеся сосуды налили сначала ртуть, а затем в один из сосудов – масло, в результате чего уровень ртути во втором сосуде стал выше на  $h_1 = 2$  см, чем в первом. Высота столба масла  $h_2 = 30$  см. Плотность ртути  $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Определите плотность  $\rho_2$  масла.

3.10. Закрытая с одного конца пробкой стеклянная трубка погружена вертикально открытым концом в сосуд с водой, при этом вода в трубке поднялась на высоту  $h$  (рис. 3.15). Каково атмосферное давление, если длина трубки от пробки

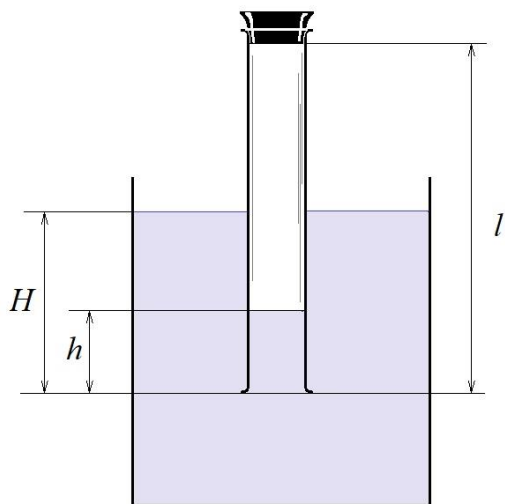


Рис. 3.15. Стеклянная трубка с пробкой в сосуде с водой

до открытого конца равна  $l$ , а глубина погружения трубки  $H$ ? Ис-  
кривлением поверхности воды в трубке пренебречь.

3.11. В баллоне содержится сжатый газ при температуре  $t_1 = 27\text{ }^\circ\text{C}$  и давлении  $P_1 = 4\text{ МПа}$ . Каково будет давление, если из баллона выпустить  $n = 0,4$  массы газа, а температуру понизить до  $t_2 = 17\text{ }^\circ\text{C}$ ?

3.12. Считая атмосферный воздух совершенным газом, температура которого меняется линейно с высотой  $T = T_0 - \alpha x_3$ , где  $T_0$  – температура на уровне Земли, а координата  $x_3$  отсчитывается от уровня Земли вверх, определите атмосферное давление как функцию  $x_3$  в условиях гидростатики.

3.13. На горизонтальном дне широкого сосуда с идеальной жидкостью имеется круглое отверстие радиусом  $R_1$ , а над ним укреплен круглый закрытый цилиндр радиусом  $R_2 > R_1$ . Зазор между цилиндром и дном сосуда очень мал, плотность жидкости  $\rho$ . Найдите статическое давление жидкости в зазоре как функцию расстояния  $r$  от оси отверстия и цилиндра, если высота слоя жидкости равна  $h$ .

3.14. Латунный шарик диаметром  $d = 0,5\text{ мм}$  падает в глицерине. Определите: 1) скорость  $v$  установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным.

3.15. Медный шарик диаметром  $d = 1\text{ см}$  падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением в нем шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса  $Re_{кр} = 0,5$ .

3.16. В трубе с внутренним диаметром  $d = 3\text{ см}$  течёт вода. Определите максимальный массовый расход  $Q_{\max}$  воды при ламинарном течении.

3.17. Вода течёт по круглой гладкой трубе диаметром  $d = 5\text{ см}$  со средней по сечению скоростью  $\langle v \rangle = 10\text{ см/с}$ . Определите число Рейнольдса  $Re$  для потока жидкости в трубе и укажите характер течения жидкости.

3.18. При каком режиме будет протекать вода с температурой  $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$  в открытом прямоугольном лотке, если объёмный расход жидкости  $Q$  равен  $0,56\text{ м}^3/\text{с}$ , глубина воды в лотке  $h = 0,7\text{ м}$ , а ширина лотка  $b = 0,8\text{ м}$ ?

3.19. По напорному трубопроводу переменного сечения подаётся жидкость с объёмным расходом  $Q = 0,6\text{ л/с}$ . Кинематический



коэффициент вязкости жидкости  $3,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Определите диаметр, при котором произойдёт смена режима движения.

3.20. Определите расход жидкости  $Q$  в горизонтальном трубопроводе диаметром  $d_1 = 0,2 \text{ м}$ , имеющем сужение диаметром  $d_2 = 0,12 \text{ м}$  (рис. 3.16).

Разность показаний пьезометров  $\Delta h = 250 \text{ мм}$ .

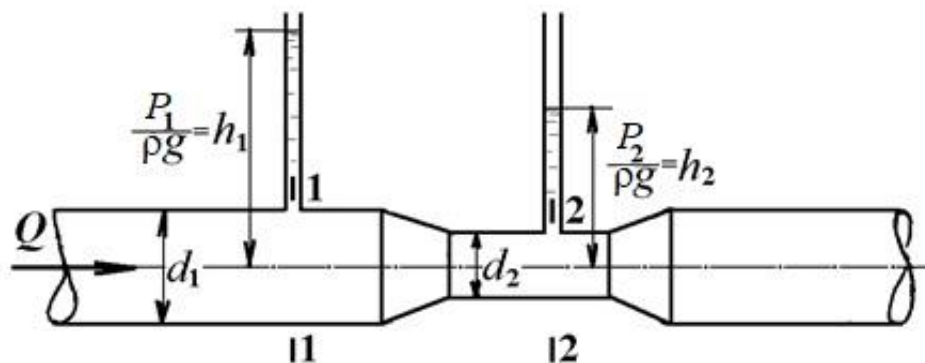


Рис. 3.16. Схема к определению расхода жидкости в горизонтальном трубопроводе

3.21. Определите массу жидкости плотностью  $780 \text{ кг}/\text{м}^3$ , которая пройдёт через живое сечение круглого напорного трубопровода диаметром  $d = 0,2 \text{ м}$  за 10 минут. Средняя скорость жидкости в поперечном сечении потока  $v$  равна  $1,5 \text{ м}/\text{с}$ .

3.22. Определите размер квадратного напорного трубопровода. За 3 минуты через поперечное сечение трубопровода проходит  $7,2 \text{ м}^3$  жидкости постоянной плотности. Средняя скорость потока в сечении составляет  $1,0 \text{ м}/\text{с}$ .

3.23. Какова должна быть разность давлений  $\Delta P$  на концах капилляра радиусом  $r = 1 \text{ мм}$  и длиной  $L = 10 \text{ см}$ , чтобы за время  $t = 5 \text{ с}$  через него можно было пропустить объём  $V = 1 \text{ см}^3$  воды (коэффициент вязкости  $\eta_1 = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ) или глицерина ( $\eta_2 = 0,85 \text{ Па} \cdot \text{с}$ )?

3.24. Бак высотой  $h = 1,5 \text{ м}$  наполнен до краёв водой. На расстоянии  $d = 1 \text{ м}$  от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии  $l$  от бака падает на пол струя, вытекающая из отверстия?

3.25. Струя воды диаметром  $d = 2 \text{ см}$ , движущаяся со скоростью  $v = 10 \text{ м}/\text{с}$ , ударяется о неподвижную плоскую поверхность, поставленную перпендикулярно струе. Найдите силу  $F$  давления струи на поверхность, считая, что после удара о поверхность скорость частиц воды равна нулю.

3.26. Давление  $P$  ветра на стену равно 200 Па. Определите скорость  $v$  ветра, если он дует перпендикулярно стене. Плотность  $\rho$  воздуха равна  $1,29 \text{ кг/м}^3$ .

3.27. К поршню спринцовки, расположенной горизонтально, приложена сила  $F = 15 \text{ Н}$ . Определите скорость  $v$  истечения воды из наконечника спринцовки, если площадь  $S$  поршня равна  $12 \text{ см}^2$ .

3.28. В горизонтально расположенной трубе с площадью  $S_1$  поперечного сечения, равной  $20 \text{ см}^2$ , течёт жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь  $S_2$  сечения равна  $12 \text{ см}^2$ . Разность  $\Delta h$  уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определите объёмный расход  $Q_V$  жидкости.

3.29. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течёт со скоростью  $v_1 = 2 \text{ м/с}$ . Определите скорость  $v_2$  нефти в узкой части трубы, если разность  $\Delta P$  давлений в широкой и узкой частях её равна  $6,65 \text{ кПа}$ .

3.30. Вода течёт в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость  $v_1$  воды в широкой части трубы равна  $20 \text{ см/с}$ . Определите скорость  $v_2$  в узкой части трубы, диаметр  $d_2$  которой в 1,5 раза меньше диаметра  $d_1$  широкой части.

3.31. Для измерения глубины погружения в море различных приборов применяется запаянная с одного конца стеклянная трубка длиной  $l_0 = 1 \text{ м}$ , которая погружается в воду вместе с приборами в вертикальном положении открытым концом вниз. Максимальная глубина погружения  $H$  вычисляется по минимальной высоте  $l$  сжатого воздуха в трубке. Для определения высоты  $l$  внутренние стенки трубки покрываются легкорастворимой в воде краской. Та часть трубки, куда не проникла вода, остаётся окрашенной. На какую глубину  $H$  была опущена трубка, если оказалось, что  $l = 0,2 \text{ м}$ ? Плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Атмосферное давление  $P_0 = 0,1 \text{ МПа}$ . Температуру воздуха в трубке считать постоянной.

3.32. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтально расположенной трубки длиной  $L = 1 \text{ м}$  находится столбик ртути длиной  $h = 20 \text{ см}$ . Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на расстояние  $l = 10 \text{ см}$ . До какого давления  $p_0$  была откачана трубка? Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

3.33. Каково давление газа в цилиндре под поршнем, если поршень удерживается в равновесии при помощи стержня, вдоль

которого действует сила  $F = 9,8$  Н? Площадь поршня  $S = 7$  см<sup>2</sup>, стержень составляет с нормалью к поршню угол  $\alpha = 30^\circ$ . Атмосферное давление  $P_0 = 0,1$  МПа. Трением пренебречь.

3.34. Два одинаковых сообщающихся сосуда с поршнями частично заполнены жидкостью плотностью  $\rho$ . Расстояния поршней от поверхностей жидкости одинаковы и равны  $H$ . Один из поршней закреплён, а второй поднимают на высоту  $h$ . При какой высоте  $h$  разность уровней жидкости в сосудах будет равна  $r$ ? Начальное давление воздуха в каждом из сосудов равно  $P_0$ .

3.35. До какого давления накачан футбольный мяч объёмом  $V = 3$  л за  $n = 40$  качаний поршневого насоса? При каждом качании насос захватывает из атмосферы объём воздуха  $V_0 = 150$  см<sup>3</sup>. Атмосферное давление  $P_0 = 0,1$  МПа.

3.36. Закрытый цилиндр, расположенный горизонтально, разделён на две части подвижным поршнем. Одна часть цилиндра заполнена некоторым количеством газа при температуре  $t_1 = 16$  °С, другая – таким же количеством газа при температуре  $t_2 = 27$  °С. Поршень находится в равновесии. Найдите объёмы  $V_1$  и  $V_2$ , занимаемые газом в двух частях цилиндра, если общий объём газа  $V = 500$  см<sup>3</sup>.

3.37. Открытую пробирку с воздухом при давлении  $P_1$  медленно нагрели до температуры  $t_1$ , затем герметически закрыли и охладили до температуры  $t_2 = 10$  °С. Давление при этом упало до  $P_2 = 0,1P_1$ . До какой температуры  $t_1$  была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки пренебречь.

3.38. Найдите массу  $m$  водорода, находящегося в баллоне объёмом  $V = 20$  л под давлением  $P = 830$  кПа при температуре  $t = 17$  °С. Молярная масса водорода  $M = 0,002$  кг/моль.

3.39. Газ массой  $m = 16$  г при давлении  $P = 1$  МПа и температуре  $t = 112$  °С занимает объём  $V = 1600$  см<sup>3</sup>. Определите, какой это газ.

3.40. Сколько баллонов водорода, имеющих объём  $V = 50$  л каждый, при температуре  $t = 27$  °С и давлении  $P = 4$  МПа потребуется для заполнения аэростата объёмом  $V_1 = 1000$  м<sup>3</sup>, если при температуре  $t_1 = 7$  °С давление в нём должно быть  $P_1 = 0,1$  МПа?

3.41. Сжимаемость – это свойство жидкости:

- 1) изменять свою форму под действием давления;
- 2) изменять свой объём под действием давления;

3) сопротивляться воздействию давления, не изменяя свою форму;

4) изменять свой объём без воздействия давления.

3.42. В координатах  $P$ ,  $V$  (рис. 3.17) изображён график зависимости давления  $P$  от объёма  $V$  при переходе идеального газа из состояния 1 в состояние 2. Как изменялась температура в этом процессе?

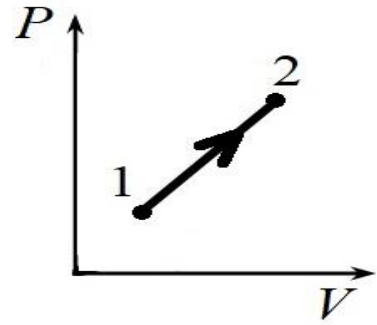


Рис. 3.17. Зависимость давления от температуры

- 1) увеличивалась;
- 2) уменьшалась;
- 3) не изменялась.

3.43. График зависимости давления  $P$  идеального газа от его температуры  $T$  в некотором процессе изображён на рис. 3.18. Определите, как изменялся объём газа при переходе из состояния 1 в состояние 2:

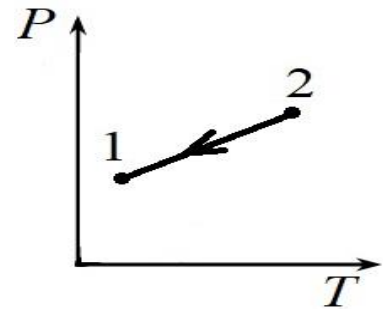


Рис. 3.18. Зависимость давления от температуры

- 1) уменьшался;
- 2) увеличивался;
- 3) не изменялся.

3.44. Явление внутреннего трения характеризует перенос...

- 1) импульса направленного движения;
- 2) массы;
- 3) энергии;
- 4) электрического заряда.

3.45. Явление внутреннего трения имеет место при наличии градиента...

- 1) скорости слоёв жидкости или газа;
- 2) концентрации;
- 3) температуры;
- 4) электрического заряда.

3.46. Где скорость движения жидкости максимальна при турбулентном режиме?

- 1) у стенок трубы;
- 2) может быть максимальна в любом месте;
- 3) в центре трубы;
- 4) все частицы движутся с одинаковой скоростью.

3.47. На какой глубине в озере давление в 3 раза больше атмосферного давления  $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ ?

- 1) 20,4 м; 2) 30,6 м;  
3) 19,9 м; 4) 29,9 м.

3.48. В процессе 1 – 2, представленном на рис. 3.19, абсолютная температура и абсолютное давление соответственно:

- 1) увеличиваются, не изменяются;  
2) не изменяются, уменьшаются;  
3) уменьшаются, не изменяются;  
4) не изменяются, увеличиваются.

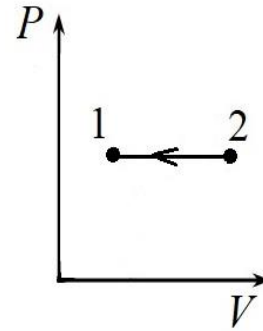


Рис. 3.19. Изменение давления при сжатии

3.49. Металлическую деталь объёмом  $0,0003 \text{ м}^3$  погрузили в керосин. Плотность керосина  $800 \text{ кг/м}^3$ . На деталь действует выталкивающая сила:

- 1) 0,24 Н; 2) 2,4 Н;  
3) 270 Н; 4) 0,04 Н.

3.50. Шар объёмом  $0,015 \text{ м}^3$  полностью погружён в воду. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ . На шар действует выталкивающая сила:

- 1) 0,15 Н; 2) 1,5 Н;  
3) 15 Н; 4) 150 Н.

## ЧАСТЬ 4. МЕХАНИКА ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

Газовые потоки создаются в двигателях: газотурбинных, реактивных, внутреннего сгорания, а также в компрессорах, диффузорах и соплах, в теплообменных аппаратах и других устройствах. В газовой или паровой турбине работу совершает газ или пар, в компрессорах и вентиляторах, наоборот, работа совершается над потоком газа с целью изменения его параметров, например, изменения его давления или скорости. Газ приходится перемещать по магистральным трубопроводам, для чего создаются необходимые условия.

### § 4.1. Параметры потока

Различают *статические* (стационарные) параметры потока: скорость, плотность, давление, температура, удельный объём. В теплотехнике рассматривают также *заторможенные* параметры, под которыми понимают параметры газа после адиабатного торможения потока.

Характеристиками потока являются: средняя макроскопическая скорость потока  $w$ , которая может иметь разное значение вдоль пути потока в разных сечениях канала, по которому движется поток. Поток можно характеризовать также массовым  $G_m$  или объёмным  $G_V$  расходом, который определяется как масса или объём вещества, прошедшего через выбранное сечение за единицу времени. Массовый и объёмный расход связаны со скоростью потока и площадью  $A$  сечения канала следующим образом:

$$G_m = \frac{dm}{dt} = \frac{Aw}{v}; \quad G_V = \frac{dV}{dt} = Aw.$$

Для стационарного потока массовый расход имеет постоянное значение в каждом сечении канала, а объёмный расход может быть постоянным только для веществ, сжимаемостью которых мы можем пренебречь, например для жидкости. Газовый поток в процессе своего течения изменяет свои параметры состояния. Меняется удельный объём газа вдоль потока – газовый поток может сжиматься или расширяться. В разных точках потока могут иметь разное значение давление и температура газа. Но в любой точке потока эти три параметра состояния связаны уравнением состояния, которое для идеального газа можно записать следующим образом:

$$Pv = R_m T \text{ либо } P/R_m T = \rho.$$

Для описания газового потока удобнее использовать удельный объём или объём единицы газа:  $v = V/m = 1/\rho$ , здесь  $\rho$  – плотность газа.

#### § 4.2. Первый закон термодинамики для газового потока

Причины, по которым стационарный поток изменяет своё состояние, обусловлены внешним воздействием. Газовый поток может получать или отдавать теплоту, совершать работу над внешними телами, или внешние тела могут совершать работу над потоком. Из-за трения или вязкости часть энергии потока может переходить во внутреннюю энергию газа или внешних объектов. Но наряду с теплотой, работой и вязкими потерями внешним воздействием на поток является также изменение поперечного сечения канала, по которому протекает поток.

Для потока несжимаемого вещества (например жидкости) сужение сечения сопровождается понижением давления и ускорением потока, а увеличение сечения канала приводит к понижению скорости потока. Для газового потока возможно как ускорение, так и замедление потока в сужающихся и в расширяющихся каналах. Можно показать, что в случае если скорость газового потока меньше скорости звука, то ускоряющее воздействие оказывает уменьшение площади сечения газового канала, но в том случае, если скорость самого газового потока превосходит местную скорость звука, то ускоряющее воздействие будет оказывать увеличение площади, то есть сверхзвуковой поток будет ускоряться в расширяющемся канале.

В канале постоянного сечения несжимаемая жидкость будет двигаться с постоянной скоростью, а дозвуковой газовый поток будет ускоряться при понижении давления вдоль канала.

Для изменения скорости газового потока используют *сопла* и *диффузоры*. В соплах происходит ускорение потока и понижение давления газа. В диффузорах происходит замедление потока и увеличение давления. Для несжимающейся жидкости и дозвуковых газовых потоков соплом является сужающийся канал, а для сверхзвуковых течений функции сопла выполняет расширяющийся канал. Диффузором является расширяющийся канал для несжимаемых жидкостей и дозвуковых течений газа и сужающийся канал при сверхзвуковом течении газа.

Стационарным потоком называется поток, в каждой точке которого скорость, а также параметры состояния имеют постоянное во времени значение. При этом скорость потока, а также давление, удельный объём, температура могут иметь разные значения в разных точках пространства.

Мы будем рассматривать стационарный поток без вязкости. В этом случае закон, который именуется как первое начало термодинамики для потока, можно записать следующим образом:

$$q = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + l_{\text{техн}}. \quad (3)$$

Теплота, подводимая к потоку, идёт на изменение энтальпии потока, ускорение потока, а также совершение потоком технической работы. В данном выражении  $q$ ,  $h_2$ ,  $h_1$ ,  $l_{\text{техн}}$  – удельная теплота, подведённая к газу между первым и вторым сечением, удельная энтальпия во втором и первом сечении, а также техническая работа, совершённая потоком над внешними объектами.

Функция  $H = U + PV$  называется энтальпией. Физический смысл энтальпии: *в изобарных процессах изменение энтальпии равно поглощённому количеству теплоты*. При адиабатных процессах изменение (убыль) энтальпии равно работе расширенной системы.

Техническая работа отличается от полной работы, совершённой газом, на величину работы, пошедшей на ускорение самого потока и его сжатие. Техническая работа положительна, если газ совершает работу, и отрицательна, если работа совершается над газом.

В случае если рассматриваемые сечения 1 и 2 отстоят близко друг от друга, выражение (3) можно записать в дифференциальной форме:

$$\delta q = dh + wdw + \delta l_{\text{техн}}.$$

В случае адиабатного течения, то есть течения потока без подвода теплоты  $q = 0$ , уравнение (3) преобразуется к следующему виду:

$$l_{\text{техн}} = h_1 - h_2 + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}. \quad (4)$$

Из выражения (4) определяется работа, которую способен совершить поток над внешними объектами. Работа совершается за счёт падения энтальпии и скорости потока. Отсюда следует, что если мы планируем, чтобы поток совершил существенную работу, например, при вращении турбины, то в начальном сечении он должен обладать высокой энтальпией.



В компрессорах работа совершается над потоком, то есть техническая работа имеет отрицательную величину. В тех случаях, когда скорость потока не очень велика, можно говорить, что затрачиваемая компрессором работа идёт на увеличение энтальпии потока. Из величины энтальпии и уравнения состояния определяется изменение температуры и давления газа.

При свободном течении потока нет теплообмена с окружающей средой и не совершается техническая работа. В этом случае первое начало термодинамики для потока можно будет записать в следующем виде:

$$0 = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad \text{либо} \quad h_2 + \frac{w_2^2}{2} = h_1 + \frac{w_1^2}{2}. \quad (5)$$

В случае свободного течения потока в любом сечении остаётся постоянной величиной сумма энтальпии и квадрата скорости потока, делённого на два:  $h + \frac{w^2}{2} = \text{const}$ . Константу можно определить как энтальпию заторможенного потока, то есть удельную энтальпию, которая станет у газа при равновесном адиабатном торможении потока:

$$h + \frac{w^2}{2} = h^*. \quad (6)$$

Энтальпия заторможенного потока является удобной характеристикой всего потока, она связывает между собой параметры потока в любом произвольном сечении. По сути, уравнение (6) устанавливает связь скорости потока с его энтальпией в каждом сечении вдоль пути потока.

Чтобы использовать уравнения (3)–(5) для расчёта параметров состояния потока вдоль его движения, необходимо уточнить уравнение состояния конкретной среды и уравнение энтальпии, то есть зависимость энтальпии от параметров состояния рабочего тела конкретного потока. Удобно рассматривать в качестве рабочего тела потока идеальный газ. Если принять, что  $C_{mP}$  – удельная изобарная теплоёмкость газа – является постоянной, то на основе определения энтальпии получим

$$h = C_{mP}T. \quad (7)$$

Ещё одной характеристикой газа, которая становится существенной при исследовании закономерностей течения потока, является скорость звука в данной среде:

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (8)$$

Скорость звука зависит от температуры потока, таким образом скорость звука может иметь разное значение в разных сечениях потока. Для уточнения этого факта часто используют термин «местная скорость звука».

Скорость звука является характерной скоростью установления равновесия в среде, для газового потока скорость звука является максимальной скоростью, с которой может распространяться волна изменения давления внутрь потока. В общем случае только за счёт понижения давления в выходном сечении потока нет возможности ускорить газовый поток до скоростей бóльших, чем местная скорость звука в данном сечении. Сечение, в котором скорость потока становится равной местной скорости звука, называется критическим сечением, а параметры состояния в этом сечении называются критическими параметрами:  $T_{кр}$ ,  $P_{кр}$ .

### § 4.3. Параметры газового потока

#### 4.3.1. Скорость потока газа в произвольном сечении канала

Рассмотрим порядок действий, применяемый для расчёта параметров свободного газового потока. Допустим, что в некотором произвольном сечении, параметры в этом сечении мы будем помечать индексом «1», нам известна скорость потока, а также температура и давление газа в данной точке. В этом случае мы можем найти параметры заторможенного потока. Из выражения (6) следует:

$$C_{mP}T_1 + \frac{w_1^2}{2} = C_{mP}T^*,$$

отсюда можно найти температуру заторможенного потока:

$$T^* = T_1 + \frac{w_1^2}{2C_{mP}}. \quad (9)$$

Свободное течение происходит без подвода тепла, связь температуры и давления определяется обычным уравнением адиабаты

$$P^* = P_1 \left( \frac{T^*}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (10)$$

Если течение потока происходит равновесно, то есть ни в одном из сечений не достигается скорости звука, то считая известными параметры заторможенного потока  $T^*$ ,  $P^*$ ,  $w^*$ , можно найти параметры потока в произвольном сечении. Обозначим параметры состояния в этом сечении индексом «2». Если во втором сечении известен хотя бы один параметр состояния: давление, температура

или скорость, то оставшиеся параметры можно определить из связи между параметрами состояния в сечении «2» с параметрами заторможенного потока:

$$T_2 = T^* - \frac{w_2^2}{2C_{mP}}; \quad P_2 = P^* \left( \frac{T_2}{T^*} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (11)$$

Удельный объём и плотность газа можно определить исходя из уравнения состояния. Мы предоставляем возможность студенту самостоятельно решить три задачи по поиску полного набора параметров потока исходя из выражений (11), если известно только давление, только температура или только скорость потока во втором сечении.

#### 4.3.2. Критические параметры газового потока

Полученные выражения (11) остаются справедливы при равновесном течении потока и нарушаются при достижении потоком местной скорости звука в некотором сечении, называемом критическим. Для идеального газа с числом степеней свободы  $i$  показатель адиабаты и удельная изобарная теплоёмкость могут быть записаны следующим образом:  $k = \frac{i+2}{i}$ ;  $C_{mP} = \frac{i+2}{2} R_m$ , отсюда  $C_{mP} = \frac{k}{k-1} R_m$ . Предположив, что в некотором сечении скорость потока равна (8) местной скорости звука  $w_{кр} = \sqrt{k R_m T_{кр}}$ , из выражений (11) можно найти критические параметры в этом сечении через параметры заторможенного потока:

$$T_{кр} = \frac{2}{k+1} T^*; \quad P_{кр} = P^* \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad w_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R_m T^*}. \quad (12)$$

Фактически мы определили максимальное отношение давлений, которое может быть реализовано в ускорении потока, без возникновения неравновесностей в виде турбулентностей, скачков давления и т. д. Критическое отношение давлений будет равно

$$\beta_{кр} = \frac{P_{кр}}{P^*} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (13)$$

Эта величина зависит только от показателя адиабаты газа. Например, для воздуха  $k = 1,4$  критическое отношение давлений будет  $\beta_{кр} = 0,528$ .

Если отношение давления на выходе из канала к давлению заторможенного потока меньше, чем критическое значение:

$$\beta = \frac{P_2}{P^*} < \beta_{кр},$$

возникает сверхкритический режим течения и формулы (11) не пригодны для расчёта параметров состояния. В случае закритического течения параметры состояния определяются уравнениями (12). Если же выполняется обратное условие

$$\beta = \frac{P_2}{P^*} > \beta_{\text{кр}},$$

то реализуется равновесный режим течения, расчёт которого производится по формулам (11).

Таким образом, для выполнения расчёта параметров потока на выходе из каналов необходимо по формулам (9)–(11) определить отношение выходного давления потока к давлению заторможенного потока и сравнить его с критическим значением. Если  $\beta > \beta_{\text{кр}}$ , для расчёта использовать формулы (9)–(11), в противном случае при  $\beta < \beta_{\text{кр}}$  расчёты необходимо проводить по формулам (9), (10), (12).

Например, в случае докритического режима расчёт параметров потока в произвольном сечении, исходя из формул (11), при известном отношении давлений  $\beta = \frac{P}{P^*}$  можно проводить по следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} P &= \beta P^*; & T &= T^* \beta^{\frac{k-1}{k}}; \\ v &= 1/\rho = RT/P = RT^*/(P^* \cdot \sqrt[k]{\beta}) = v^*/\sqrt[k]{\beta}; \\ w &= \sqrt{2C_{mP}(T^* - T)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_m T^* \left(1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}\right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Студентам предоставляется возможность самостоятельно проверить, что при критическом отношении давлений (13) данные выражения (14) перейдут в (12). Если известна площадь сечения канала, по которому протекает поток, можно определить объёмный и массовый расход газа:

$$\begin{aligned} G_V &= Aw = A \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_m T^* \left(1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}\right)}; \\ G_m &= \frac{Aw}{v} = \frac{A}{v^*} \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_m T^* \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}\right)}; \\ G_m &= \frac{Aw}{v} = A \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P^{*2}}{R_m T^*} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}\right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В последних выражениях  $\beta = P/P^*$  – отношение текущего давления к давлению заторможенного потока;  $T^*$ ,  $P^*$ ,  $v^*$  – параметры заторможенного потока;  $R_m$ ,  $k$  – удельная газовая постоянная и показатель адиабаты газа;  $A$  – площадь сечения канала. Обра-

тим внимание, что при стационарном течении массовый расход должен оставаться постоянным в любом сечении, так что в последнем выражении в неявном виде учитывается связь площади канала и давления в каждой точке вдоль пути потока.

Формулы (14) и (15) удобны ещё и тем, что они пригодны для расчёта как критического, так и сверхкритического режима течения потока. Для расчёта докритического режима в эти формулы необходимо подставлять  $\beta_2 = P_2/P^*$  – реальное отношение давления, а при сверхкритическом режиме  $\beta_{кр}$  – критическое отношение (13), рассчитанное исходя из показателя адиабаты газа.

В задачах на истечение с учётом трения и сужения струи в формулы необходимо ввести поправочные коэффициенты. При определении  $w_2$  – скорости газового потока на выходе канала – вводится коэффициент скорости  $\phi_c$ , учитывающий изменение скорости из-за трения. При определении массового расхода  $G_m$  вводится коэффициент расхода  $\mu = \phi_c \cdot \varepsilon_c$ , учитывающий уменьшение расхода вследствие трения и сужения струи, где  $\varepsilon_c$  – коэффициент сужения струи. Коэффициент скорости и коэффициент расхода являются характеристикой каждого конкретного канала и имеют значение меньше или равное единице. С использованием этих коэффициентов формулы (14) и (15) можно записать так:

$$\begin{aligned} w &= \phi_c \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT^* \left(1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}\right)}; \\ G_m &= \mu_c A \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P^{*2}}{RT^*} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}\right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ещё раз уточним условия, при которых становятся справедливы полученные выше уравнения (9) – (13) для расчёта скорости потока и расхода. Они получены для потока, ускоряющегося за счёт понижения давления в сужающемся сопле. При этом подходе величина максимальной скорости потока ограничена местной скоростью звука, так как её невозможно превзойти только за счёт понижения газового давления на выходе из канала. Если мы понижаем давление на выходе из канала так, что отношение давления на выходе и на входе становится ниже критического, то дополнительный перепад давления не может быть реализован на ускорение потока и переходит в возникновение очагов турбулентности и звуковых волн. Возникают разнообразные неравновесные процессы, при ко-

торых увеличивается энтропия потока, то есть энергия переходит в неупорядоченное состояние.

#### § 4.4. Сопло Лавалия

Существуют условия, при которых преодолевается ограничение и скорость свободного потока становится выше местной скорости звука. Такое возможно в специально профилированных соплах, которые называются сопла Лавалия. В этих соплах газ сначала ускоряется до скорости звука в начальной сужающейся части, затем сопло становится расширяющимся и происходит дальнейшее ускорение потока выше скорости звука. Принцип действия сопла Лавалия основан на том, что для дозвукового потока газа ускоряющее воздействие оказывает сужающийся канал, а для сверхзвукового потока ускоряющее воздействие оказывает расширяющийся канал. Если сопло правильно спроектировано, то в его самом узком сечении скорость газового потока равна местной скорости звука.

Профиль расширяющейся части сопла также требует точного проектирования, так как при слишком медленном увеличении сечения канала мало' воздействие на газовый поток, а при слишком быстром изменении сечения канала газовый поток срывается. В последнем случае между потоком и стенками канала возникают турбулентности, проникающие в ядро потока и нарушающие течение потока.

Будем рассматривать правильно спроектированное сопло Лавалия, работающее в расчётном режиме. В его наименьшем сечении достигается скорость потока, равная скорости звука, то есть это будет критическое сечение потока, которое мы определили ранее, и к этому сечению подходят формулы (12) и (13). Для объёмного и массового расхода газа формулу (15) можно записать:

$$G_V = Aw = A \sqrt{\frac{2k}{k+1} R_m T^*};$$

$$G_m = \frac{Aw}{v} = A \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P^{*2}}{R_m T^*} \left( \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} - \frac{2}{k+1} \right)}. \quad (17)$$

Ввиду того, что газовый поток способен сильно расширяться, объёмный расход имеет разное значение в каждом сечении. Но при стационарном течении массовый расход газа имеет постоянное зна-

чение в любом сечении, и его удобнее считать через массовый расход в самом узком, критическом сечении сопла.

В сопле Лавая практически полностью может реализоваться превращение энтальпии газа в скорость газового потока. В этом случае справедливы законы (13)–(17), полученные для стационарного равновесного газового потока. Соответственно максимальную скорость потока, уже безо всяких ограничений, можно выразить через параметры заторможенного потока (14):

$$w = \sqrt{2C_{mP}(T^* - T)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_m T^* \left(1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}\right)}.$$

Если считать, что на выходе из потока давление много меньше, чем на входе,  $\beta = P_2/P^* \ll 1$ , то данную формулу можно трактовать следующим образом:

$$w_{max} = \sqrt{2C_{mP}T^*} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_m T^*}. \quad (18)$$

Эта величина может быть существенно выше местной скорости звука на выходе из потока, так как в формуле (8) фигурирует температура на выходе из потока, а в формуле (18) использована температура заторможенного потока.

Стоит сказать про реальные приложения полученной формулы (18). Мощность реактивных двигателей, используемых для движения ракет и самолетов, линейно зависит от скорости, с которой возможно выбрасывать реактивную струю. Чем больше скорость струи, тем больше мощность реактивного двигателя при одинаковом массовом расходе потока, выбрасываемого реактивным двигателем.

Абсолютное значение скорости (18) зависит как от температуры заторможенного потока, так и от молярной массы газа, формирующегося в потоке:  $R_m = R/M$ . Чем меньше молярная масса выхлопных газов и чем больше их температура, тем больше будет абсолютная скорость потока, вылетающего из сопла реактивного двигателя. Таким образом, реактивное топливо должно обладать высокой теплотой сгорания, а продукты сгорания должны быть с малой молекулярной массой. Так как обычно используется углеводородное топливо, то в нём должна быть повышена доля водорода по сравнению с углеродом. Продуктами горения водорода являются пары воды  $M_{H_2} = 0,018$  кг/моль, а продуктами горения углерода

являются углекислый газ  $M_{\text{CO}_2} = 0,044$  кг/моль и оксид углерода  $M_{\text{CO}} = 0,028$  кг/моль.

### § 4.5. Ударная волна

При обтекании тела потоком жидкости или газа перед ним образуется зона торможения. В этой области происходит снижение скорости потока и повышение давления.

При обтекании тела потоком газа местное повышение давления, связанное с торможением, имеет конечное значение, существенно превышающее звуковое давление.

Возмущения, вызванные в газовой среде повышением давления в любой части обтекаемого тела, распространяются со скоростью, большей скорости звука. Если тело движется со скоростью, большей скорости звука, то перед ним возникает устойчивая ударная волна.

*Ударной волной* называется поверхность, при прохождении через которую давление, плотность, скорость и температура газа изменяются скачком (рис. 4.1).

Фронт распространения ударной волны движется с той же скоростью, как и тело. В то же время ударная волна может возникнуть только при сверхзвуковых относительных скоростях движения газа.

Образующиеся в потоке ударные волны в различных случаях могут быть подвижными и неподвижными. Неподвижная ударная волна называется *скачком уплотнения*.

Наличие скачка уплотнения связано с гидравлическими потерями, происходящими в очень узкой области ширины фронта ударной волны.

Вдоль плоскости фронта волны допускается равномерное распределение скорости потока, поэтому частные производные скорости потока вдоль фронта равны нулю. Это приводит к выводу о том, что касательные составляющие вязкого напряжения также равны

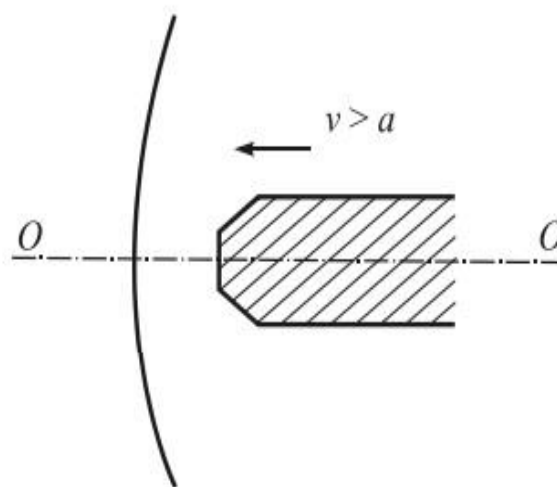


Рис. 4.1. Фронт ударной волны перед телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью – прямой скачок уплотнения



нулю. Частная производная скорости в направлении, нормальном к фронту волны (по направлению движения), велика, так как на узком участке ширины фронта происходит резкое снижение скорости. Это указывает на появление существенных нормальных напряжений, которые и являются в данном случае причиной гидравлических потерь.

Запас удельной механической энергии потока перед скачком уплотнения равен  $\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g}$ , а после него  $-\frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g}$ . Разность механической энергии до и после скачка уплотнения

$$\Delta h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \frac{1}{k}$$

в виде тепла подводится к массе газа.

Таким образом, хотя и нет подвода тепла к потоку газа из внешней среды (условие адиабатичности), происходит перераспределение запаса удельной энергии и после скачка уплотнения запас механической энергии необратимо снижается. Зависимость между плотностью и давлением газа до и после скачка уплотнения уже не адиабатическая.

Если фронт скачка уплотнения перпендикулярен скорости набегающего потока, то скачок называется прямым. При переходе через прямой скачок направление скорости не меняется.

Связь между параметрами газа до скачка  $P_1, \rho_1$  и за ним  $P_2, \rho_2$  имеет вид

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\rho_2(k+1)}{\rho_1(k-1)} - 1}{\frac{(k+1)}{(k-1)} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Это соотношение называется ударной адиабатой Гюгонио (рис. 4.2, кривая 1).

На этом же рисунке для сравнения показана адиабата Пуассона  $P_2/P_1 = (\rho_2/\rho_1)^k$  (кривая 2), соответствующая изоэнтропному сжатию совершенного газа.

Адиабата Гюгонио характеризует адиабатическое неизэнтропное сжатие газа в ударной волне. При прохождении газом

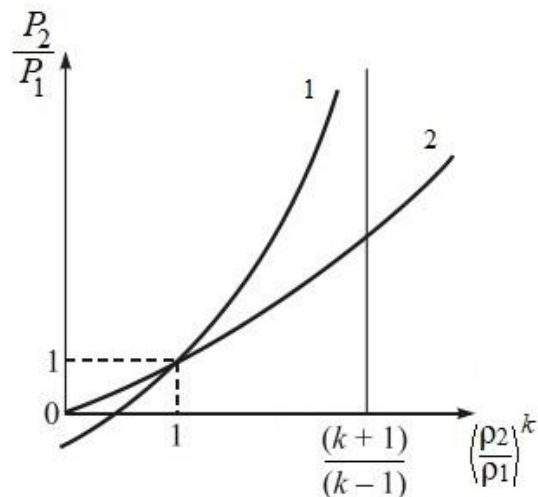


Рис. 4.2. Сравнение ударной адиабаты Гюгонио (кривая 1) и адиабаты Пуассона (кривая 2)

скачка уплотнения происходит необратимый частичный переход механической энергии в тепловую энергию, что приводит к увеличению энтропии.

Особенность ударной адиабаты в том, что при неограниченном возрастании давления в скачке ( $P_2/P_1 \rightarrow \infty$ ) плотность не может возрасти более чем в  $(k + 1)/(k - 1)$  раз (для воздуха не больше чем в 6 раз).

Скорости течения газа до ( $v_1$ ) и после скачка ( $v_2$ ) связаны соотношением Прандтля

$$v_1 v_2 = a_{кр}^2$$

или

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (19)$$

Из формулы (19) видно, что каков бы ни был начальный сверхзвуковой поток ( $\lambda_1 > 1$ ), за прямым скачком движение становится дозвуковым ( $\lambda_2 < 1$ ).

#### § 4.6. Вопросы для самоподготовки

1. Какой вид будет иметь закон сохранения полной (механической и внутренней) энергии газового потока, при условии адиабатичности процесса распространения колебаний в газовой среде, в любом сечении сужающегося канала?

2. Чему будет равняться скорость течения в выходном сечении сужающегося канала при значении давления окружающей среды меньше критического давления?

3. Можно ли получить в сужающемся канале скорость больше критической?

4. Что нужно для того, чтобы в выходном канале устанавливалось давление окружающей среды меньше критического давления?

5. Какой канал называют соплом Лавалю? Опишите принцип работы сопла.

6. В каких устройствах сопло Лавалю нашло применение?

7. Каковы условия функционирования сопла?

8. На чём основывается математическое описание процессов, происходящих в сопле?

9. Что такое докритический, критический и закритический участки?

## § 4.6. Примеры решения задач

**Пример 4.1.** Из рабочего колеса центробежного компрессора воздух поступает в диффузор, имея параметры  $P_1 = 0,11$  МПа,  $T_1 = 290$  К и абсолютную скорость  $w_1 = 300$  м/с. Давление за диффузором  $P_2 = 0,17$  МПа, площадь выходного сечения  $A = 7 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты  $k = 1,4$ ; удельная газовая постоянная  $R_m = 287$  Дж/(кг·К); теплоёмкость  $C_{mP} = 1005$  Дж/(кг·К). Определите скорость воздуха на выходе из диффузора и расход газа.

**Решение.** Вначале необходимо определить местную скорость звука (8) в заданном сечении (сечение 1):

$$a_1 = \sqrt{kR_m T_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 290} = 341 \text{ м/с.}$$

Так как у нас скорость потока ниже, чем скорость звука, поток дозвуковой. Диффузором для дозвукового газового потока является канал с уменьшающимся сечением. В процессе движения по диффузору поток замедляется, в нём растёт давление, повышается температура и местная скорость звука. Следовательно, отношение скорости потока к скорости звука вдоль всего канала уменьшается, поток останется дозвуковым.

В предположении, что поток движется стационарно и равномерно, для нахождения температуры и давления на выходе канала можно воспользоваться законами адиабатического процесса:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 290 \cdot \left(\frac{0,17}{0,11}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 328 \text{ К.}$$

Теперь на основании изменения энтальпии потока газа (7), на основании формулы (5) можно рассчитать скорость газового потока во втором сечении:

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 2(h_1 - h_2)} = \sqrt{w_1^2 + 2C_{mP}(T_1 - T_2)}.$$

Произведём расчёты:

$$w_2 = \sqrt{300^2 + 2 \cdot 1005 \cdot (290 - 328)} = 117 \text{ м/с.}$$

Чтобы определить массовый и объёмный расход газа на выходе из канала, воспользуемся формулами (15). Для расчёта объёмного расхода достаточно данных, полученных из предыдущих расчётов:

$$G_V = A_2 w_2 = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 117 = 0,0817 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Для того чтобы определить массовый расход, необходимо из уравнения Менделеева – Клапейрона рассчитать удельный объём газа в выходном сечении:

$$v_2 = 1/\rho_2 = R_m T_2 / P_2$$

и использовать полученное значение для расчёта массового расхода:

$$G_m = \frac{A_2 w_2}{v_2} = \frac{A_2 w_2 P_2}{R_m T_2} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 117 \cdot 0,17 \cdot 10^6}{287 \cdot 328} = 0,148 \text{ кг/с.}$$

Отметим, что мы произвели промежуточные расчёты, то есть рассчитали температуру в сечении (2), но могли бы использовать выражение для расчёта температуры и подставить его в конечные формулы. Тогда выражения для расчёта скорости в выходном сечении и массового расхода выглядели бы так:

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 2C_{mP}T_1 \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}.$$

Пример 4.2. Воздух вытекает из сопла Лаваля с диаметром узкого (критического) сечения  $D_{кр} = 5,5$  см. Скорость на входе сопла  $w_1 = 140$  м/с, на выходе  $w_2 = 1200$  м/с. Параметры воздуха на входе  $P_1 = 14,5$  МПа;  $t_1 = 825$  °С. Удельная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_{mP} = 1005$  Дж/(кг·К); показатель адиабаты  $k = 1,4$ ; удельная газовая постоянная  $R_m = 287$  Дж/(кг·К). Надо определить давление  $P_2$ , площадь критического сечения сопла, а также параметры – температуру, плотность и массовый расход воздуха на выходе сопла, оценить диаметр выходного сечения сопла. Какая должна быть длина сопла от критического сечения до выходного сечения, если расширяющуюся часть сопла можно приближённо считать усечённым конусом с углом при вершине  $\alpha = 10^\circ$ ?

Решение. Параметры заторможенного потока можно рассчитать на основе формул (9), (10):

$$T^* = T_1 + \frac{w_1^2}{2C_{mP}}; P^* = P_1 \left(\frac{T^*}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Подставим численные значения:  $T_1^* = 1098 + \frac{140^2}{2 \cdot 1005} = 1108$  К.

$$P_1^* = 14,5 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1108}{1098}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 15,0 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

На основании полученных данных из формул (12) можно определить параметры потока в критическом сечении:

$$T_{\text{кр}} = \frac{2}{k+1} T^* = \frac{2}{1,4+1} 1108 = 923 \text{ К};$$

$$P_{\text{кр}} = P^* \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 15 \cdot 10^6 \left( \frac{2}{1,4+1} \right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 7,92 \text{ МПа};$$

$$w_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R_m T^*} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4+1} 287 \cdot 1108} = 609 \text{ м/с}.$$

Критические параметры позволяют нам рассчитать параметры потока в самом узком сечении, которое при расчётном режиме течения через сопло Лавали является критическим сечением. Для решения задачи необходимо найти массовый расход газа на выходе из сопла. При стационарном течении газа массовый расход является одинаковой величиной для любого сечения, это следует из закона сохранения массы. Нам удобнее определить массовый расход в критическом, самом узком сечении сопла. Удельный объём в этом сечении можно выразить из уравнения состояния:  $v_{\text{кр}} = R_m T_{\text{кр}} / P_{\text{кр}}$ .

Площадь узкого сечения:

$$A_{\text{кр}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 5,5^2 \cdot 10^{-4}}{4} = 23,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Массовый расход газа можно рассчитать на основе выражения (15):

$$G_m = \frac{A_{\text{кр}} w_{\text{кр}}}{v_{\text{кр}}} = \frac{A_{\text{кр}} w_{\text{кр}} P_{\text{кр}}}{R_m T_{\text{кр}}} = \frac{23,8 \cdot 10^{-4} \cdot 609 \cdot 7,92 \cdot 10^6}{287 \cdot 1108} = 36,1 \text{ кг/с}.$$

Параметры газового потока на выходе из сопла можно определить исходя из основного уравнения термодинамики для свободного потока (5) с учётом зависимости энтальпии от параметров состояния (7):

$$C_{mP} T_2 + \frac{w_2^2}{2} = C_{mP} T_1 + \frac{w_1^2}{2}.$$

Так как скорости на входе и выходе канала известны, отсюда можно выразить температуру потока на выходе из канала:

$$T_2 = T_1 + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2 C_{mP}} = 1098 + \frac{140^2 - 1200^2}{2 \cdot 1003} = 390 \text{ К}$$

и, исходя из уравнения адиабаты, определить давление в выходном сечении:

$$P_2 = P_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 14,5 \cdot 10^6 \left( \frac{390}{1098} \right)^{3,5} = 0,387 \text{ МПа}.$$

Плотность газа на выходе из сопла можно выразить из уравнения состояния идеального газа:

$$\rho_2 = P_2 / (R_m T_2) = (0,387 \cdot 10^6) / (287 \cdot 390) = 3,49 \text{ кг/м}^3.$$

Так как массовый расход газа одинаков в любом сечении, можно оценить площадь выходного сечения:

$$G_m = A_2 w_2 \rho_2 = 36,1 \text{ кг/с};$$

$$A_2 = \frac{G_m}{w_2 \rho_2} = \frac{36,1}{1200 \cdot 3,49} = 0,862 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

В предположении, что профиль выходного сечения круглый, можно рассчитать диаметр канала в выходном сечении:

$$D_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,862 \cdot 10^{-2}}{3,14}} = 0,105 \text{ м}.$$

Длина расширяющейся части сопла  $l_p$  определяется из геометрических построений, приведённых на рис. 4.3:

$$l_p = l_{0-2} - l_{0-кр} = \frac{d_2}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} - \frac{d_{кр}}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{d_2 - d_{кр}}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)}.$$

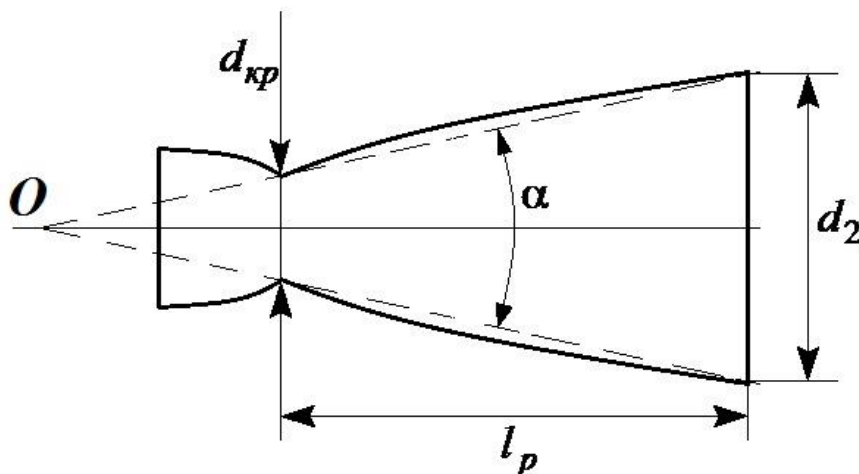


Рис. 4.3. Схема для определения длины  $l_p$  расширяющейся части сопла Лавалья

Подставим численные значения:

$$l_p = \frac{0,105 - 0,055}{2 \cdot \operatorname{tg}(5^\circ)} = 0,286 \text{ м}.$$

Подставим численные значения:

$$l_p = \frac{0,0115 - 0,0055}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{10}{2}\right)} = 0,034 \text{ м}.$$

Расход определяется параметрами в узком сечении сопла. При неизменных параметрах воздуха на входе критические параметры остаются неизменными. Поэтому при увеличении площади выходного сечения расход воздуха не изменится.

Так как  $G = v_2 \rho_2 A_2 = \text{const}$ , то с увеличением площади  $A_2$  пропорционально уменьшится плотность  $\rho_2$  и с учётом  $\rho_2 = \frac{P_2}{R_m T_2}$  при неизменном давлении  $P_2 = P_0$  увеличится температура  $T_2$ .

#### § 4.7. Задачи и тестовые задания для самостоятельного решения

4.1. Азот из компрессора поступает в канал с изменяющимся сечением. Параметры азота на входе канала:  $P_1 = 0,2$  МПа,  $T_1 = 320$  К и скорость  $w_1 = 280$  м/с. Давление на выходе канала  $P_2 = 0,12$  МПа, а площадь выходного сечения  $A = 11,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты рассчитать как для идеального газа. Удельная газовая постоянная  $R_m = 0,296 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , удельная теплоёмкость при постоянном давлении равна  $C_p = 1,035 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ . Определите скорость на выходе канала, объёмный и массовый расход газа.

4.2. Азот из компрессора поступает в канал с диффузором. Параметры поступающего потока азота:  $P_1 = 0,3$  МПа,  $T_1 = 320$  К и скорость потока  $w_1 = 230$  м/с. Давление на выходе канала  $P_2 = 0,180$  МПа, площадь выходного сечения  $A = 11,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты  $k = 1,4$ . Удельная газовая постоянная  $R_m = 0,296 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , удельная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_p = 1,035 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ . Определите скорость на выходе канала и расход газа.

4.3. Азот из компрессора поступает в канал с диффузором. Параметры поступающего потока азота:  $P_1 = 0,2$  МПа,  $T_1 = 320$  К и скорость потока  $w_1 = 130$  м/с. Давление на выходе канала  $P_2 = 0,156$  МПа, площадь выходного сечения  $A = 11,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты  $k = 1,4$ . Удельная газовая постоянная  $R_m = 0,296 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , удельная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_p = 1,035 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ . Определите скорость на выходе канала и расход газа.

4.4. Отработанные газы выпускаются из цилиндра при давлении в цилиндре  $P_1 = 0,55$  МПа и температуре  $t_1 = 1250$  °С. Давление за выпускным каналом  $P_0 = 0,11$  МПа, а площадь сечения канала  $A_2 = 12,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>. Принять, что коэффициент скорости  $\phi_c = 0,86$ , а коэффициент расхода  $\mu = 0,82$ . Удельная газовая постоянная

$R_m = 0,287 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ , показатель адиабаты  $k = 1,33$ . Определите скорость истечения, массовый расход выпускных газов, их температуру и плотность на выходе из цилиндра.

4.5. Из сопла Лавалля вытекает газ. Диаметр узкого (критического) сечения сопла равен  $d_{\text{кр}} = 5,0 \cdot 10^{-3}$  м. Скорость на входе сопла  $w_1 = 150$  м/с, на выходе  $w_2 = 1300$  м/с. Параметры воздуха на входе  $P_1 = 14,0$  МПа;  $t_1 = 850$  °С. Удельная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_p = 1,003$  кДж/кг·К, показатель адиабаты  $k = 1,33$ , удельная газовая постоянная  $R_m = 287$  кДж/кг·К. Определите давление  $P_2$ , площадь критического сечения сопла, а также параметры – температуру, плотность и расход воздуха на выходе сопла.

4.6. В центробежном компрессоре происходит адиабатное сжатие воздуха. Показатель адиабаты  $k = 1,4$ . Удельная работа сжатия составляет 66,0 Дж/кг·К. Температура на входе в рабочее колесо компрессора  $t_1 = 17$  °С, давление равно 1,1 МПа, а скорость равна 125 м/с. На выходе температура 42 °С. Изобарная теплоёмкость составляет  $1,003 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ . Определите скорость воздуха на выходе из центробежного компрессора. Какое давление установится в резервуаре при адиабатном торможении этого потока?

4.7. В процессе впуска в цилиндр дизеля засасывается атмосферный воздух, имеющий параметры  $P_1^* = 0,1$  МПа и  $t_1 = 27$  °С. Определите давление, которое установится в цилиндре после адиабатного торможения потока, если скорость воздуха на входе в цилиндр 110 м/с, а коэффициент скорости во впускном канале  $\phi_c = 0,83$ .

4.8. Кислород из компрессора поступает в канал с диффузором. Параметры поступающего потока кислорода:  $P_1 = 0,25$  МПа,  $T_1 = 315$  К и скорость потока  $330 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Давление на выходе канала  $P_2 = 0,160$  МПа, площадь выходного сечения  $A = 10,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты  $k = 1,4$ . Удельная газовая постоянная  $R_m = 0,268 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ , удельная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_p = 1,032 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ . Определите скорость потока на выходе канала и массовый расход кислорода.



4.9. В центробежном компрессоре происходит адиабатное сжатие азота. Удельная работа сжатия составляет  $66,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ . Температура на входе в рабочее колесо компрессора  $T_1 = 290 \text{ К}$ , давление равно  $0,8 \text{ МПа}$ , а скорость  $120 \text{ м/с}$ . На выходе температура  $310 \text{ К}$ . Изобарная теплоёмкость составляет  $1,004 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ . Определите скорость азота на выходе из центробежного компрессора. Какое давление установится в резервуаре при адиабатном торможении этого потока?

4.10. В резервуаре, заполненном кислородом, поддерживается давление  $P_1 = 5 \text{ МПа}$ . Газ вытекает через сужающееся сопло в среду с давлением  $4 \text{ МПа}$ . Начальная температура кислорода  $100 \text{ }^\circ\text{С}$ . Определите теоретическую скорость истечения и расход кислорода, если площадь выходного сечения сопла  $f = 20 \text{ мм}^2$ . Найдите также теоретическую скорость истечения кислорода и его расход, если течение будет происходить в атмосферу ( $P_0 = 100 \text{ кПа}$ ).

4.11. Воздух, имеющий температуру  $15 \text{ }^\circ\text{С}$ , по трубке диаметром  $8 \text{ мм}$  перетекает из резервуара с постоянным давлением  $1,2 \text{ МПа}$  в другой, расположенный рядом, с постоянным давлением  $0,8 \text{ МПа}$ . Определите скорость истечения воздуха, температуру при переходе его во второй резервуар и количество воздуха, перетекшее за  $1 \text{ ч}$ .

4.12. В пространство, где давление  $0,4 \text{ МПа}$ , из резервуара выпускается газ при давлении  $0,6 \text{ МПа}$  и температуре  $25 \text{ }^\circ\text{С}$  через суживающееся сопло, у которого площадь сечения  $10 \text{ мм}^2$ . Определите количество газа, вытекающее за  $1 \text{ с}$ , если в резервуаре находится один из следующих газов: азот, кислород или углекислота.

4.13. Давление в резервуарах равно  $1,6 \text{ бар}$ , температура обоих газов равна  $17 \text{ }^\circ\text{С}$ . Сопротивлениями при течении газа можно пренебречь. Рассчитайте сечение  $f_a$  суживающегося сопла для выпуска из резервуара в среду с давлением  $1,12 \text{ бар}$  углекислоты и окиси углерода в количестве  $100 \text{ кг/ч}$ .

4.14. В резервуаре под вакуумом  $0,4 \text{ бар}$  содержится воздух. Через неплотность в шве, у которого площадь сечения  $2 \text{ мм}^2$ , в резервуар снаружи проникает воздух при давлении  $1,1 \text{ бар}$  и температуре  $17 \text{ }^\circ\text{С}$ . Определите количество воздуха, которое необходимо удалять из резервуара вакуум-насосом за  $1 \text{ ч}$ . Принять  $\varphi = 0,75$ ;  $\alpha = 0,7$ .

4.15. В камере жидкостного реактивного двигателя газ с молекулярной массой 24,2 кг/моль имеет температуру  $T_0 = 2800$  К. Определите скорость звука в заторможенном газе в камере двигателя и критическую скорость звука ( $k = 1,3$ ).

4.16. Воздушно-реактивный двигатель обтекается сверхзвуковым потоком с давлением  $P_1 = 0,255 \cdot 10^5$  Па, температурой  $T_1 = 220$  К и скоростью  $v_1 = 575$  м/с. Рассчитайте параметры для прямого скачка уплотнения:  $P_2$ ,  $T_2$ ,  $\rho_2$ ,  $v_2$ . Найдите давление в камере горения, считая, что оно совпадает с  $P_{02}$ . Найдите давление, которое имело бы место в камере горения в предположении изоэнтропности всего течения. Найдите коэффициент давления  $\sigma = P_{02}/P_{01}$ ,  $k = 1,4$ ;  $R = 287$  Дж/кг·К.

4.17. Давление при сжатии воздуха возрастает в 7 раз. Найдите изменение температуры  $T_2/T_1$  при изоэнтропном течении и при наличии скачка уплотнения.

4.18. На прямом скачке уплотнения плотность возрастает в 2 раза. При каком значении коэффициента скорости возник скачок уплотнения? Как изменится кинетическая энергия единицы объёма газа на скачке?

4.19. Скорость газа за прямым скачком уплотнения  $v_2 = 221$  м/с. Температура торможения после скачка  $t_{02} = 100$  °С. Определите температуру газа в потоке до скачка.

4.20. Воздух поступает в сопло Лаваля под давлением  $P_{01} = 2$  МПа. В расширяющейся части сопла имеет место прямой скачок уплотнения. Перед скачком давление  $P_1 = 0,4$  МПа. Найдите давление за скачком, считая, что до скачка внутри сопла движение газа изоэнтропное.

4.21. Давление перед прямым скачком уплотнения  $P_1 = 0,255$  МПа, давление торможения  $P_{02} = 0,6$  МПа. Найдите давление за скачком  $P_2$ , давление торможения  $P_{02}$  и коэффициент давления  $\sigma = P_{02}/P_{01}$ . Принять  $k = 1,4$ .

4.22. Определите коэффициент давления  $\sigma$  для прямого скачка уплотнения, если  $M_1 = 2$ . Найдите также давление торможения за прямым скачком, если давление в потоке воздуха до скачка  $P_1 = 10^5$  Па.

4.23. Определите давление торможения воздуха за прямым скачком уплотнения, если параметры газа до скачка:  $P_1 = 10^5$  Па,  $\lambda_1 = 2$ .

4.24. Найдите скорость распространения ударной волны по неподвижному газу с давлением  $P_1 = 9,8 \cdot 10^4$  Па и плотностью  $\rho_1 = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, предполагая, что движение одномерное, без трения и без притока теплоты. Известно, что после прохождения ударной волны давление возросло в 25 раз. Сопоставьте скорость распространения ударной волны со скоростью звука в неподвижном газе. Принять  $k = 1,4$ .

4.25. Воздух вытекает из сопла Лавалья при числе Маха  $M_1 = 2,5$  под действием давления  $P_{01} = 1,57$  МПа;  $T_0 = 288$  К. Определите параметры газа в выходном сечении сопла, то есть  $P_1$ ,  $T_1$ ,  $\rho_1$ , считая, что расширение воздуха расчётное; параметры газа за скачком  $P_2$ ,  $T_2$ ,  $\rho_2$ ,  $M_2$ , считая, что в выходном сечении сопла имеет место прямой скачок уплотнения. Коэффициент давления  $\sigma$ .

4.26. Если на входе в сопло Лавалья (рис. 4.4)  $c < a$ , где  $a$  – местная скорость звука, то на участке  $b - d$  сопла поток...

- 1) тормозится;
- 2) не изменяется;
- 3) ускоряется;
- 4) не изменяется или тормозится.

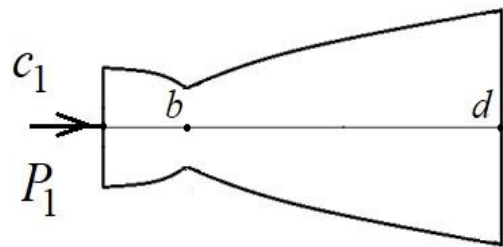


Рис. 4.4. Схема расширяющейся части сопла Лавалья

4.27. Сопло, состоящее из суживающейся и расширяющейся частей (сопло Лавалья), служит для получения:

- 1) сверхвысоких плотностей;
- 2) сверхнизких температур;
- 3) сверхвысоких давлений;
- 4) сверхзвуковых скоростей пара (газа).

4.28. При увеличении скорости течения рабочей среды в канале давление в нём...

- 1) увеличивается;
- 2) не изменяется или увеличивается;
- 3) уменьшается;
- 4) не изменяется.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 5 томах. Том 1. Механика / И. В. Савельев. – 7-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 340 с. – ISBN 978-5-8114-6938-3. – Текст : электронный. – URL: <https://e.lanbook.com/book/153686> (дата обращения: 23.05.2022).

2. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 5 томах. Том 3. Молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. – 5-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 224 с. – ISBN 978-5-8114-1209-9. – Текст : электронный. – URL: <https://e.lanbook.com/book/167871> (дата обращения: 23.05.2022).

3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 томах : учебное пособие для студентов физических специальностей вузов / Д. В. Сивухин. – Том 1. Механика. – 4-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2005. – 560 с. – Текст : непосредственный.

4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 томах : учебное пособие для студентов физических специальностей вузов / Д. В. Сивухин. – Том 2. Термодинамика и молекулярная физика. – 5-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2006. – 544 с. – Текст : непосредственный.

5. Савельев, И. В. Курс физики : в 3 томах : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям и специальностям / И. В. Савельев. – Том 1. Механика. Молекулярная физика. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 352 с. – (Классическая учебная литература по физике). – Текст : непосредственный.

6. Детлаф, А. А. Курс физики : учебное пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2002. – 718 с. – Текст : непосредственный.

7. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2001. – 542 с. – Текст : непосредственный.

8. Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики : учебное пособие для студентов вузов. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 352 с. – Текст : непосредственный.

**Шепелева Софья Алексеевна  
Дырдин Валерий Васильевич**

**ФИЗИКА.  
ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

**Учебное пособие**

*Издание второе, дополненное*

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 25.05.2022. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 5,25  
Тираж 100 экз. Заказ

Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр Кузбасского государственного технического  
университета имени Т. Ф. Горбачёва, 650000, ул. Д. Бедного, 4 а