МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель
А. В. Дягилева

МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»
в качестве электронного учебного издания для использования
в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических
наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский
государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Чичерин И. В. – председатель учебно-методической комиссии
направления 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов
и производств»

Дягилева Анна Владимировна.
Математика: Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: методические материалы для студентов технических и экономических направлений подготовки, изучающих дисциплины «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», всех форм обучения / сост. А. В. Дягилева; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу «Теория функций комплексного переменного» и организация самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Комплексные числа возникли в математике в начале XVI века в связи с решением алгебраических уравнений. Вплоть до начала XIX века к ним относились с явным недоверием и предубеждением. Однако со временем комплексные числа занимали все большее значение в математике и ее приложениях. В первую очередь они глубоко проникали в теорию алгебраических уравнений, существенно упростив их изучение.

После того как в XIX веке появилось наглядное геометрическое изображение комплексных чисел, стало возможным сводить к комплексным числам и уравнениям для них многие задачи естествознания, особенно гидро- и аэродинамики, электротехники, теории упругости и прочности, а также геодезии и картографии. С этого времени существование комплексных чисел стало общепризнанным фактом, и они получили такое же реальное содержание, как числа действительные. К настоящему времени изучение комплексных чисел развилось в важнейший раздел современной математики – теорию функций комплексного переменного.

Настоящие методические указания предназначены для самостоятельной работы при выполнении практических заданий по дополнительным главам математики (теория функций комплексного переменного), для студентов направления подготовки 220700.62 «Автоматизация технологических процессов и производств»

В каждом параграфе кратко излагаются основные теоретические положения, определения и формулы, относящиеся к соответствующему разделу курса, показаны образцы решения особо важных типовых задач, многие из которых для наглядности иллюстрированы рисунками. В конце каждого параграфа даны задачи для самостоятельного решения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1.Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица $(i^2 = -1)$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это значит, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, то есть $R \in C$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = Re\, z$, а y – мнимой частью z $(y = Im\, z)$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Между комплексными числами и точками плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x, y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. И, наоборот, каждую точку $M(x, y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$ (рис. 1).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0 \cdot y = x$. Ось ординат называется мнимой осью, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy = iy$.

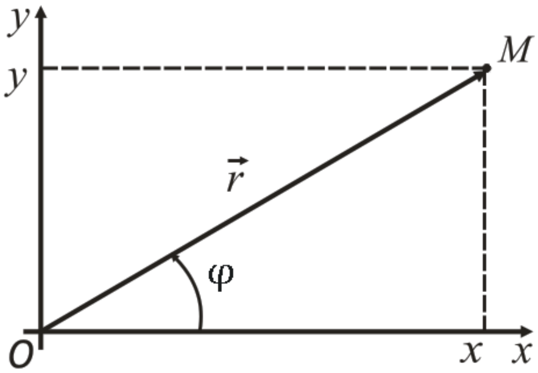

Рис.1

Легко показать, что точки, соответствующие сопряженным числам z и $\bar{z}$, симметричны относительно действительной оси, а точки, соответствующие противоположным комплексным числам z и $-z$, симметричны относительно начала координат.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y\}$. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ. Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент φ комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi\, k,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leq \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину из промежутка $[0, 2\pi)$).

1.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$ (см. рис. 1). Тогда получаем, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись комплексного числа называется тригонометрической формой.

Модуль $r = |z|$ определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = x/r, \sin\varphi = y/r, \operatorname{tg}\varphi = y/x$. Так как $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z +$ $+2\pi k$, то

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z),$$
$$\sin\varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, то есть считать $\varphi = \arg z$. Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ получаем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{для внутренних точек 1, 4 четверти;} \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{для внутренних точек 2 четверти;} \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{для внутренних точек третьей четверти.} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно (рис. 2). Например, $\arg z_1 = 0$ для $z_1 = 2$, $\arg z_2 = \pi$ для $z_2 = -3$, $\arg z_3 = \pi/2$ для $z_3 = i$ и $\arg z_4 = -\pi/2$ для $z_4 = -8i$.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой показательной (или экспоненциальной) форме $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

В силу формулы Эйлера, функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π. Для записи комплексного числа z в показательной форме достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, то есть считать $\varphi = \arg z$.

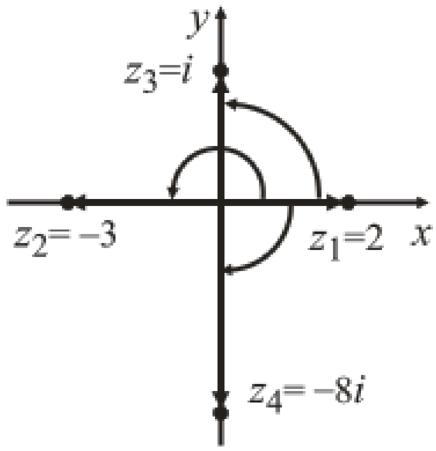

Рис. 2

Пример. Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение.

Для числа z_1 имеем $|z_1| = r = \sqrt{-1^2 + 1^2 = \sqrt{2}}$, $\arg z = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, то есть $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Для z_2 имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2}$=1, arg z = arg (-1) = π, то есть $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.

Замечание. Комплексному числу $z = 0 = 0 + 0 \cdot i$ соответствует на комплексной плоскости начало координат. Модуль числа $z = 0$ равен нулю. Аргумент этого числа не определен. Поэтому число $z = 0$ допускает следующее представление в тригонометрической и показательной формах: $0 = 0(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$, $0 = 0e^{i\varphi}$, где φ – любое вещественное число.

2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

2.1. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{2.1}$$

Сложение комплексных чисел обладает переместительным (коммуникативным) и сочетательным (ассоциативным) свойствами:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

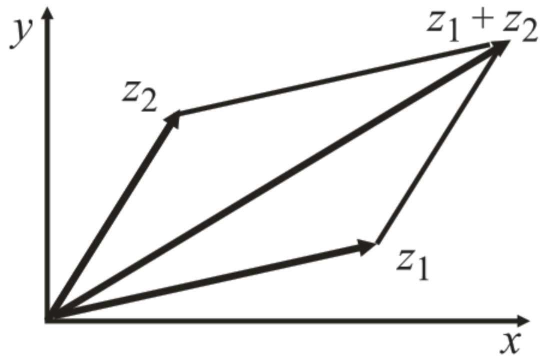

Рис. 3

Из определения (2.1) следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (рис. 3).Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется неравенством треугольника.

2.2. Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, то из этого определения легко получить z:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{2.2}$$

Из равенства (2.2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (рис. 4).

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - -|z_2|$.

Отметим, что $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d$, то есть модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости. Поэтому, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной прямой множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, то есть окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

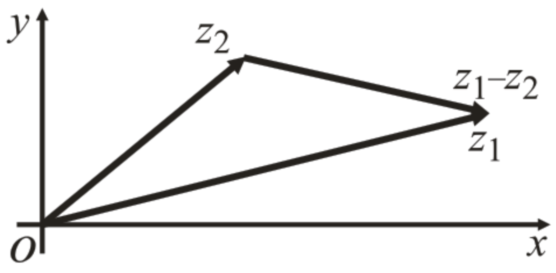

Рис. 4

2.3. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + +iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2.3}$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение:

$$i^2 = -1. \tag{2.4}$$

Действительно, $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + + i(0 + 0) = -1$. Благодаря соотношению (2.4) формула (2.3) получается путем перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i\, y_1 x_2 + i y_1 y_2 =$$
$$= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 +$$
$$+ i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Например,

$(2-3i)\,(-5+4i) = -10+8i+15i-12i^2 = -10\ +23i+12 =$
$= 2+23i.$

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ – действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами: $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

В этом легко убедиться, используя определение (2.3).

Найдем произведение заданных в тригонометрической форме комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 +$ $+ i\sin\varphi 2$:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 -$$
$$-\sin\varphi 1\sin\varphi 2 = r1r2\cos\varphi 1\cos\varphi 2 - \sin\varphi 1\sin\varphi 2 + + i\sin\varphi 1\cos\varphi 2 +$$
$$\cos\varphi 1\sin\varphi 2 = r1r2\cos\varphi 1+\varphi 2 + + i\sin\varphi 1+\varphi 2,$$

то есть $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) называется формулой Муавра.

Пример. Найти $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$.

Решение:

Запишем сначала число $z = 1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме: $r = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\arg z = \operatorname{arctg}\sqrt{3}/1 = \pi/3$, $z = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$.

По формуле Муавра имеем:

$$z^9 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^9 = 2^9(\cos 9\pi/3 + i\sin 9\pi/3) = 2^9(\cos 3\pi +$$
$$+\, i\sin 3\pi = 29 - 1 = -512.$$

2.4. Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2 дает число z_1, то есть $z_1/z_2 = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует:

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 - yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}, \qquad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю (избавляются от мнимости в знаменателе).

Пример. Выполнить деление $(1+3i)/(2+i)$.

Решение:

$$\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+6i+3}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$$

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

2.5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня -й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем -й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n=z$, то есть $\sqrt[n]{z}=\omega$, если $\omega^n=z$.

Если положить $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а $\omega=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, то по определению корня и формуле Муавра получаем

$$z=\omega^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n=r$, $n\theta=\varphi+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. То есть $\theta=(\varphi+2\pi k)/n$ и $\rho=\sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z}=\omega$ принимает вид:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad (2.6)$$
$$k=0,1,\ldots,n-1.$$

Получили n различных значений корня. При других ях k в силу периодичности косинуса и синуса получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем:

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) == \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \right.\right.$$

*2*π*+i*sinφ*n+2*π*== nr*cosφ*n+i*sinφ*n=* ω*0, k=0.*

Итак, для любого $z \neq 0$ корень -й степени из числа z имеет ровно n различных значений. Все значения корня n-й степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей.

Пример. Найти значения: а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$.

Решение:

а) запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$. Тогда при $k = 0, 1, 2$ имеем:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt{\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) =}$$

$$= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right).$$

При $k = 0$ имеем:

$$\omega_0 = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

При $k = 1$ имеем:

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

При $k = 2$ имеем:

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

б) снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

Поэтому при $k = 0,\ 1$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}.$$

При $k = 0$

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

а при $k = 1$ получаем

$$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Таким образом, $\sqrt{-1} = i, \sqrt{-1} = -i$.

2.6. Упражнения

1.Выполнить указанные действия:

1) $1/i$; 2) $(1-i)/(1+i)$; 3) $2/(1-3i)$; 4) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел. Написать эти числа в тригонометрической и показательной форме (a и b – действительные числа):

1) $3i$; 2) -2; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$; 7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) bi $(b \neq 0)$; 10) $a+bi$ $(a \neq 0)$.

3. Найти комплексные числа по их модулям и аргументам:

1) $|z| = \sqrt{13}$, $\arg z = \operatorname{arctg} 3/2$;

2) $|z| = \sqrt{13}$, $\arg z = \pi - \operatorname{arctg} 3/2$;

3) $|z| = \sqrt{32}$, $\arg z = (-3\pi)/4$; 4) $|z| = \sqrt{53}$, $\arg z = -\operatorname{arctg} 2/7$.

4. Найти все значения следующих корней и построить их:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5)$\sqrt[8]{1}$; 6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

5. Найти комплексное число z, если один из корней 5 степени из $\sqrt[5]{z}$ равен $2(\cos 20° + i \sin 20°)$.

6. Решить уравнения:

1) $z^4 + 16 = 0$; 2) $z^3 - 8 = 0$; 3) $z^3 + 1 - 2i = 0$; 4) $z^2 - 8 + {}+8i = 0$.

7. Доказать тождество

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

и выяснить его геометрический смысл.

3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Определение функции комплексной переменной. Открытые и замкнутые области

Если действительные величины x и y или одна из них будут переменными, то величина $z = x + iy$ называется комплексной переменной.

Комплексная переменная $w = f(z)$ называется функцией комплексного переменного z, если указан закон, по которому каждому значению z соответствует вполне определенное значение или определенное множество значений величины w.

Величина z называется независимой переменной (аргументом).

Если каждому значению z соответствует одно значение w, то функция называется однозначной, если хотя бы одному значению z соответствует более одного значения w, то функция называется многозначной.

Множество всех рассматриваемых значений независимой переменной z называется множеством (областью) определения.

Величина $w = f(z)$ есть тоже комплексная величина, поэтому задание функции комплексной переменной равносильно заданию двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$от двух действительных переменных, тогда

$$w = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3.1}$$

Областью в комплексной плоскости называется совокупность точек этой плоскости, обладающая следующими свойствами:

1) *свойство открытости*. Если z – точка области, то существует круг с центром в точке z, целиком состоящий из точек этой области;

2) *свойство связанности*. Любые две точки этой области можно соединить ломаной, целиком состоящей из точек этой области.

Область называется ограниченной (или конечной), если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область называется неограниченной.

Совокупность всех граничных точек области называется ее границей.

Область D вместе с ее границей называется замкнутой, которую будем обозначать символом $\overline{D}$.

Область называется односвязной, если ее граница состоит из одной связной линии, или многосвязной, если граница состоит из нескольких связных частей (в частности двухсвязной, трехсвязной, и т. д. – по числу несвязных между собой частей границы).

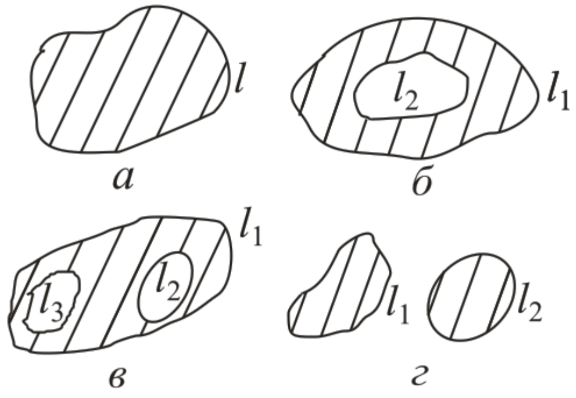

Рис. 5

На рис. 5, a (заштрихованная часть плоскости) изображена односвязная область (ее граница состоит из одной связной линии). На рис. 5, *б* – двухсвязная область, (т. к. область ограничена двумя несвязными между собой линиями l_1 и l_2); на рис. 5, *в* – трехсвязная область (ее граница состоит из трех несвязных линий l_1, l_2 и l_3).

На рис. 5, *г* изображено геометрическое место точек, которое не образует область, так как не выполняется свойство связности.

Непрерывная кривая в -плоскости есть последовательность точек $z = x + iy$, таких, что

$$z = z(t) \text{ или } x = x(t),\ y = y(t)\ (t_1 < t < t_2). \qquad (3.2)$$

Пример. Начертить в комплексной плоскости линию, точки которой удовлетворяют уравнению $|z - 2 + i| = 2$.

Решение:

Запишем уравнение $|z - (2 - i)| = 2$. Величина $|z - z_1|$ означает расстояние между точками z и z_1. В частности, $|z - (2 - i)|$ есть расстояние от точки $(2 - i)$ до точки z. Равенство $|z -$

$-(2-i)| = 2$ определяет геометрическое место точек, отстоящих от точки $2-i$ на расстоянии, равном 2, т. е. окружность с центром в точке $2-i$ и радиусом, равном 2 (рис. 6).

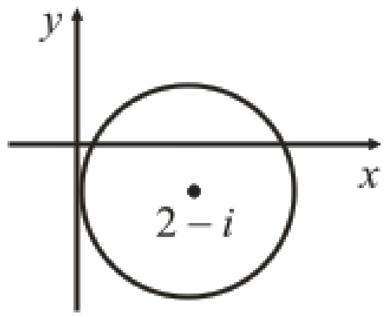

Рис. 6

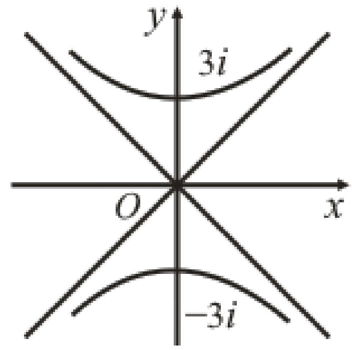

Рис. 7

Пример. Начертите в комплексной плоскости линию, точки которой удовлетворяют уравнению $|z-5i|-|z+5i| = \pm 6$.

Решение:

Нужно найти геометрическое место точек комплексной плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных $5i$ и $-5i$ есть величина постоянная, равная по модулю 6. Таким геометрическим местом является гипербола с фокусами в точках $5i$ и $-5i$, для которой длина большой оси $2a = 6$, $a = 3$.

Найдем расстояние $2c$ между фокусами и величину мнимой полуоси:

$2c = |5i| + |-5i| = 10;\ c = 5;\ b = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4.$

По этим параметрам строим гиперболу (рис. 7).

Пример. Какую линию в комплексной плоскости описывает точка z при изменении действительной переменной t от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, если:

а) $z = 2t + i/2t$; б) $z = 2t^4 + i/2t^4$.

Решение:

а) так как $z = x + iy = 2t + i/2t$, то $x = 2t$, $y = 1/2t$. Отсюда $y = 1/x$, причем $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. Следовательно, точка z описывает обе ветви гиперболы (рис 8).

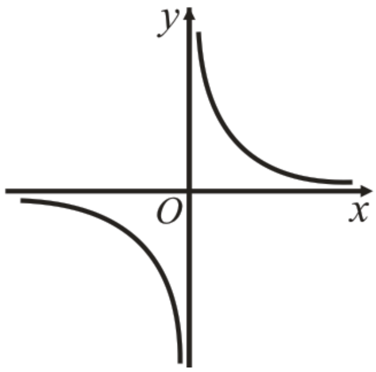

Рис. 8

б) аналогично получим $x = t^4$, $y = 1/2t^4$, отсюда $y = 1/x$, причем $0 < x < +\infty$.

В этом случае точка описывает лишь правую (верхнюю) ветвь гиперболы (рис. 8).

Пример. Дано уравнение кривой в комплексной форме $z=7e^{2it} + 3e^{-2t}$. Определить вид кривой.

Решение.

Так как $z = x + iy$, то
$z = 7(\cos 2t + i \sin 2t) + 3(\cos 2t - i \sin 2t)10 \cos 2t + 4i \sin 2t$. Тогда $x = 10 \cos 2t$, $y = 4 \sin 2t$. Это параметрические уравнения кривой. Исключив параметр t, получим $x^2/100 + y^2/16 = 1$. Следовательно, это эллипс с полуосями $a = 10$, $b = 4$.

Пример. Записать в комплексной форме уравнение окружности радиуса r с центром в точке a.

Решение.

Уравнение окружности в комплексной форме имеет вид $z - a = \rho e^{i\varphi}$. Для точек данной окружности $\rho = |z - a| = r$ (по условию), $\varphi = \arg z$. Следовательно, искомое уравнение окружности будет $z = a + re^{i\varphi}$, где φ играет роль параметра.

Пример. Выяснить геометрический смысл указанных соотношений:

1) $|z - 2 + 2i| \geq 1{,}5$;
2) $1 < |z| < 2$;
3) $1 < |z| < 2$, $\pi/6 < \arg z < \pi/4$;
4) $1 < |z + 3 - 2i| < 2$, $2\pi/3 < \arg z < 3\pi/4$;
5) $|(z + 1)/(z - 2i)| < 1$.

Решение:

1) $|z - 2 + 2i| > 1{,}5$ запишем в виде $|z - (2 - 2i)| > 1{,}5$. Следовательно, комплексные точки, удовлетворяющие этому неравен-

ству, лежат вне и на границе круга радиуса 1,5 с центром в точке $2-2i$. Это множество точек будет односвязной, неограниченной областью (рис 9).

2) Неравенству $1<|z|$ соответствует множество точек, лежащих вне круга радиуса 1, с центром в начале координат. Неравенству $|z|<2$ соответствует множество точек, дежащих внутри круга радиуса, равного 2, с центром в начале координат. Неравенство же $1<|z|<2$ соответствует часть комплексной плоскости, лежащая между этими окружностями, которая является двусвязной ограниченной и открытой областью (рис. 10).

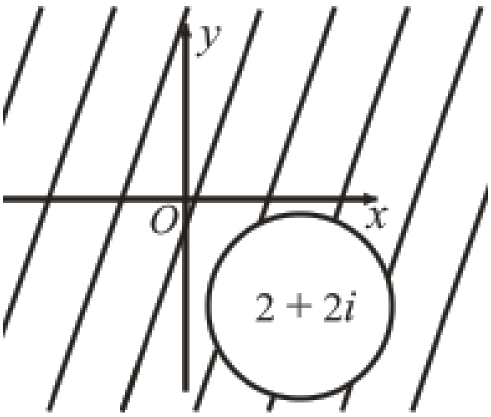

Рис. 9

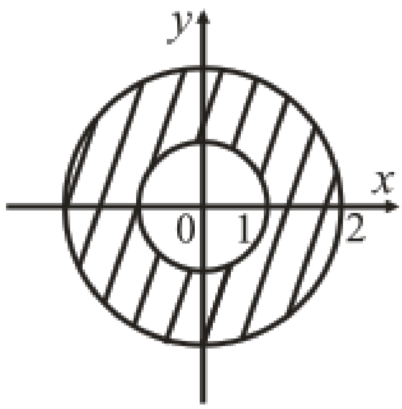

Рис. 10

3) Учитывая решение предыдущей задачи, а также условия $5/6<\arg z<\pi/4$ получаем ограниченную, незамкнутую односвязную область, заштрихованную на рис. 11.

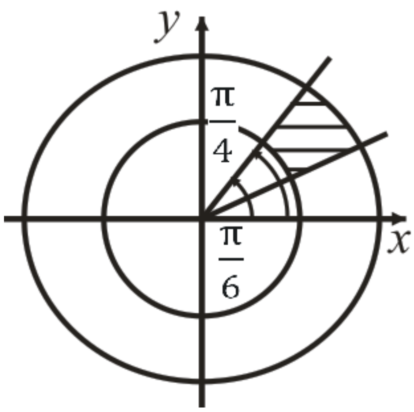

Рис. 11

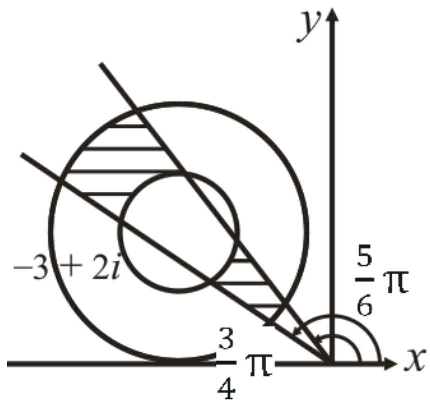

Рис. 12

4) Перепишем неравенства $1 < |z + 3 - 2i| < 2$ в виде $1 < |z - (-3 + 2i)|$. Тогда рассматриваемое множество точек, заданное условиями $1 < |z - (-3 + 2i)| < 2$; $3\pi/4 < \arg z < 5\pi/6$, есть часть комплексной плоскости, заштрихованной на рис. 12. И это множество точек не является областью, так как не выполнено второе условие определения области – связность.

5) Неравенства $|(z + 1)/(z - 2i)| < 1$ заменим равносильными:

$$|z + 1| < |z - 2i|;$$
$$|x + 1 + iy| < |x + i(y - 2)|;$$
$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + (y - 2)^2};$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 + y^2 - 4y + 4;$$
$$2x < -4y + 3.$$

Отсюда $y < x/2 + 3/4$. Следовательно, имеем неограниченную незамкнутую область, заштрихованную на рис. 13.

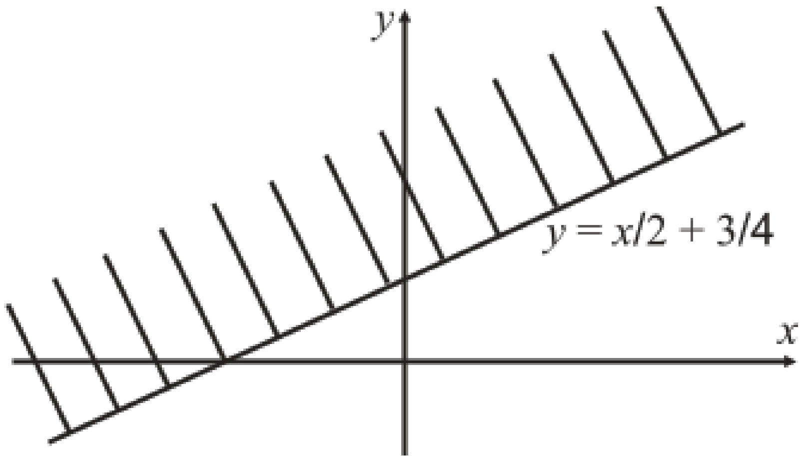

Рис. 13

3.2. Упражнения

В задачах 9–17 выяснить геометрический смысл указанных соотношений:

9) $|z - z_0| < R$, $|z - z_0| > R$, $|z - z_0| = R$;

10) $|z - 2| + |z + 2| = 5$;

11) $|z-2|-|z+2|=3$;

12) $|z-z_1|=2$;

13) а) $\operatorname{Re} z \geq C$; б) $\operatorname{Im} z < C$.

14) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$;

15) $\alpha < \arg z < \beta$; $\alpha < \arg(z-z_0) < \beta$, $(\pi < \alpha < \beta \leq \pi)$;

16) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$;

17) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

В задачах 18–27 определить линии или семейства линий, заданные указанными уравнениями:

18) а) $\operatorname{Re}(1/z) = C$; б) $\operatorname{Im}(1/z) = C$, $(-\infty < C < +\infty)$;

19) а) $\operatorname{Re} z^2 = C$; б) $\operatorname{Im} z^2 = C, (-\infty < C < +\infty)$;

20) $z = t - it, (0 \leq t \leq 2)$;

21) $z = t + it^2$, $(-\infty < t < 0)$;

22) $z = t^2 + it^4$, $(-\infty < t + \infty)$;

23) $z = t + 1/t$, $(-\infty < t < 0)$;

24) $z = a(\cos t + i \sin t)$, $(\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2)$, $a > 0$;

25) $z = 2e^{it} + 5e^{-it}$, $(-\infty < t < +\infty)$;

26) $z = 2e^{it} - 2e^{-it}$, $(-\infty < t < +\infty)$;

27) $z - 3 + i - 2e^{it} = 0$, $(-\infty < t < +\infty)$.

28. Написать в комплексной форме уравнение окружности с центром в точке a и радиусом r:

1) $a = 0$, $r = 4$; 2) $a = -4$, $r = 2$; 3) $a = -1$, $r = \sqrt{3}$.

29. Указать, сколько корней соответствующего уравнения лежит в данной области:

1) $z^6 - 1 = 0, |z+5| = 2$; 2) $z^4 + 81 = 0, |z-3| = 4$;

3) $z^4 - 81 = 0, |z-3| = 4$.

3.3. Элементарные функции

Формулы, определяющие некоторые из основных элементарных функций $z = x + iy$:

а) показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y); \tag{3.3}$$

б) основные тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin\ z}{\cos\ z}; \; \cos z = \frac{\sin\ z}{\cos\ z}; \tag{3.4}$$

в) гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \; \operatorname{ch} z = \frac{ez +\ e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \; \operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}; \tag{3.5}$$

г) логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z + i(\arg z + 2\pi k)|,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{3.6}$$

д) главные значения логарифмической функции

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z;\ e^{\ln z} = z;\ \ln e^z \ = z + i2\pi k; \tag{3.7}$$

е) показательная функция

$$a^z = \ e^{z\,\operatorname{Ln} a}, \tag{3.8}$$

где a – любое комплексное число, не равное нулю или единице;

е) степенная функция

$$z^n = \ e^{n\,\operatorname{Ln} z}, \tag{3.9}$$

где n – любое комплексное число.

Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими формулами:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \sin iz = i \operatorname{sh} z. \qquad (3.10)$$

Пример. Найти:

1) $e^{2-3\pi i/4}$; 2) $\operatorname{tg}\left(e^{3\pi i/4}\right)$; 3) $\cos(2+i)$; 4) $\ln(i-1)$;

5) $\ln(-1)$; 6) $\operatorname{Ln}(1)$; 7) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^i$.

Решение:

1) По формуле (3.3) имеем:

$$e^{2-3\pi i/4} = e^2\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right] =$$
$$= e^2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = e^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= -\frac{e^2}{\sqrt{2}}(1+i);$$

2) $\operatorname{tg}\left(e^{3\pi i/4}\right) = \operatorname{tg}(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)) = \operatorname{tg}(-i) =$ $\sin(-i)/\cos(-i) = -\sin i/\cos i = -i\mathrm{sh}1/\mathrm{ch}1 = -i\mathrm{tg}1$;

3) Применяем последовательно формулы (3.3) и (3.4), получаем $\cos(2+i) = \left(e^{(2+i)i} + e^{-(2+i)i}\right)/2 = \left(e^{-1+2i} + e^{1-2i}\right)/2 =$ $= [e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) + e(\cos 2 - i\sin 2)]/2 = \cos 2\,(e^{-1}+e)/2 -$ $-i\sin 2\,(e - e^{-1})/2 = \cos 2\mathrm{ch}1 - i\sin 2\mathrm{sh}1$;

4) Так как $i - 1 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, то применяя формулу (3.7), получим: $\ln(i-1) = \ln\left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right) = \ln 2/2 + 3\pi i/4$;

5) $\ln(-1) = \ln\left(1e^{-\pi i}\right) = \ln 1 + \pi i = \pi i$;

6) $\operatorname{Ln}(1) = \operatorname{Ln}\left(1 \cdot e^{i0}\right) = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

7) Применим формулу (3.9):

$$\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^i = e^{i\operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)} = e^{i\operatorname{Ln}\left(2e^{i\pi/4}\right)} = e^{i[\ln 2 + i(\pi/4 + 2k\pi)]} =$$
$$= e^{-(\pi/4+2\pi k)+i\ln 2} = e^{-(\pi/4+2\pi k)}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2).$$

Пример. Доказать тождество $\operatorname{ch}(z+z_1) = \mathrm{ch}z\,\mathrm{ch}z_1 + \mathrm{sh}z\,\mathrm{sh}z_1$.

Решение:

По формулам (3.5) получим

$$\text{ch}z\,\text{ch}z_1 = \frac{(e^z + e^{-z})(e^{z_1} + e^{-z_1})}{4} =$$

$$= \frac{e^{z+z_1} + e^{-z-z_1} + e^{z-z_1} + e^{z_1-z}}{4};$$

$$\text{sh}z\,\text{sh}z_1 = \frac{(e^z - e^{-z})(e^{z_1} - e^{-z_1})}{4} =$$

$$= \frac{e^{z+z_1} + e^{-(z+z_1)} - e^{z-z_1} - e^{z_1-z}}{4};$$

$$\text{ch}z\,\text{ch}\,z_1 + \text{ch}z\,\text{sh}z_1 = \frac{e^{z+z_1} + e^{-(z+z_1)}}{2} = \text{ch}(z + z_1),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции, если

а) $w = e^{z^2}$; б) $w = \sin 2z$.

Решение:

а) $e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2}(\cos 2\,xy + i\sin 2xy) = u + iv$.

Тогда

$$u = e^{x^2-y^2}\cos 2\,xy;$$

$$v = e^{x^2-y^2}\sin 2\,xy.$$

б) $\sin 2z = \sin(2x + i2y) = \sin 2x\cos(2yi) + \cos 2x\sin(2yi) =$ $= \sin 2x\,\text{ch}2y + i\cos 2x\,\text{sh}2y$ (см. формулу 3.10);

$$u = \sin 2x\, ch2y;$$

$$v = \cos 2xsh2y/$$

3.4. Упражнения

30. Найти $e^{\pm\pi i/2}$; $e^{k\pi i}$, $(k = 0, t = \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $e^{2\pm\pi i/4}$.

31. Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел: e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; $ae^{i\,\varphi}$ $(a > 0, |\varphi \le \pi|)$; $e^{-i\varphi}(|\varphi| \le \pi)$.

32. Исходя из определения соответствующих функций, доказать, что:

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;

2) $\sin z = \cos \pi/2 - z$;

3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

4) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

5) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh}z_1 \operatorname{ch}z_2 + \operatorname{ch}z_1 \operatorname{sh}z_2)$;

6) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

33. Доказать, что

1) $\sin iz = i\operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz = \operatorname{ch} z$; 3) $\operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z$; 4) $\operatorname{ctg} iz = -icth\, z$.

34. Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$.

35. Найти действительные и мнимые части следующих значений функций:

1) $\sin 2i$; 2) $\operatorname{tg}(2 - i)$; 3) $\cos\ (2 + i)$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi/4 - i\ln 2)$; 5) $\operatorname{th}(\ln 3 + \pi i/4)$.

36. Вычислить:

1) $\operatorname{Ln} 4$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 3) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$; 4) $\operatorname{Ln}\,(1 + i)/\sqrt{2}$; 5) $\operatorname{Ln}(2 - 3i)$, $\operatorname{Ln}(-2 + 3i)$.

37. Найти все значения следующих степеней:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^i; 4) 1^{-i}; 5) $\left((1 - i)/\sqrt{2}\right)^{1+i}$.

38. Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

1) $\operatorname{Arccos} z = i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$;

2) $\operatorname{Arcsin} z = i\operatorname{Ln} i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$;

3) $\operatorname{Arctg} z = (i/2)\operatorname{Ln}\,(i + z)/(i - z) =$

$= (1/2i)\operatorname{Ln}\,(1 + iz)/(1 - iz)$;

4) $\operatorname{Arcctg} z = (i/2)\operatorname{Ln}\,(-z - i)/(z + i)$.

39. Найти все значения следующих функций:

1) $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{Arccos} 2$; 3) $\operatorname{Arcsin} i$; 4) $\operatorname{Arctg}(1 + 2i)$; 5) $\operatorname{Arch} 2i$; 6) $\operatorname{Arth}\,(1 - i)$.

3.5. Отображение с помощью функции комплексной переменной

Отображение есть какое-либо правило или закон соответствия множеств. Говорят, что задано отображение множества M в множество N, если каждому элементу множества M поставлен в соответствие некоторый элемент множества N. Если каждый элемент множества N соответствует при отображении некоторому элементу множества M, то говорят, что задано отображение M на N. Всякая функция есть отображение области определения на множество значений функции.

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

определенную на множестве P чисел (точек) z. Тогда множеству P чисел z с помощью функции $w = f(z)$приводится в соответствие некоторое множество Q чисел w. В этом случае говорят, что функции $w = f(z)$ отображает множество P на множество Q, или преобразует множество P в множество Q (рис.14).

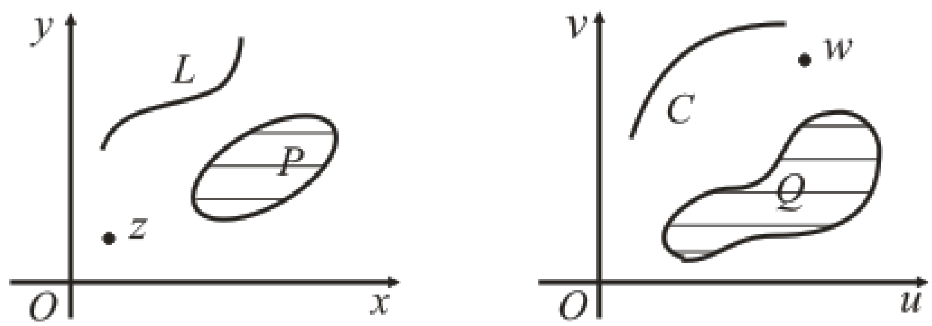

Рис. 14

Таким образом, функция комплексной переменной производит отображение плоскости z в плоскость w: каждая точка плоскости z переходит в соответствующую точку w плоскости w.

Кривая $x = x(t), y = (t)$ переходит в кривую

$$u = u[x(t), y(t)],\ v = v[x(t), y(t)]. \quad (3.11)$$

Пример. На какие линии плоскости отображаются с помощью функции $w = 1/z$ следующие линии плоскости z:

а) $|z| = 3$; б) $\arg z = 3\pi/4$.

Решение:

а) линия $|z| = 3$ есть окружность радиуса 3 с центром в начале координат, ее уравнение $x^2 + y^2 = 3^2 (*)$.

С другой стороны

$$w = \frac{1}{2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2};\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Учитывая $(*)$, получим

$$u = \frac{x}{3^2};\ \ v = \frac{y}{3^2},$$

или $x = 3^2 u,\ \ y = -3^2 v$. Подставляем это в $(*)$ и получим

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3^2}.$$

Итак, окружность $x^2 + y^2 = 3^2$ плоскости z переходит в окружность $u^2 + v^2 = 1/3^2$ плоскости w (рис.15).

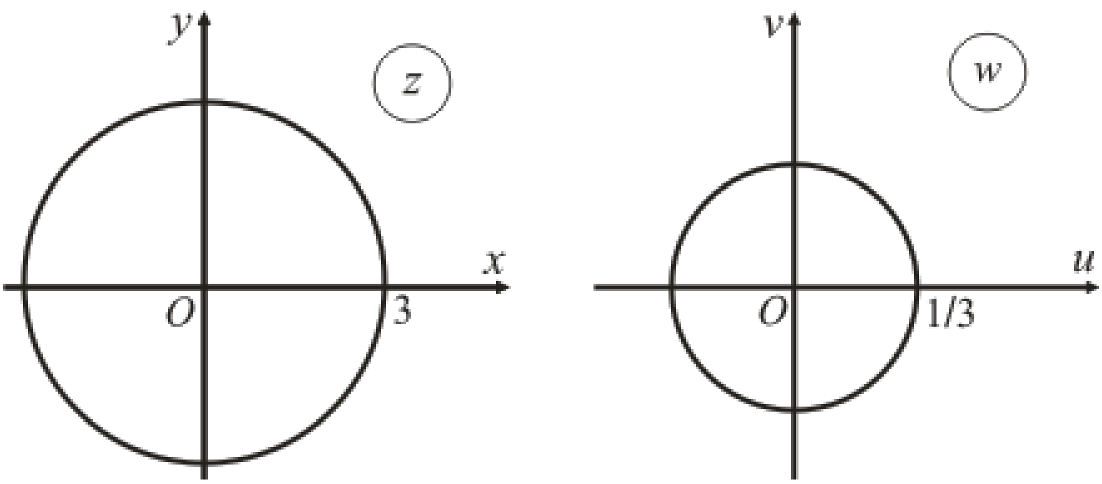

Рис. 15

б) учитывая решение предыдущей задачи, найдем:

$$\arg w = \arg\frac{1}{z} = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$\arg w = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \frac{-\dfrac{y}{x^2+y^2}}{\dfrac{x}{x^2+y^2}} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}(\arg z).$$

Следовательно, образом луча $\arg z = 3\pi/4$ плоскости z является луч $\arg w = -3\pi/4$ плоскости w (рис.16).

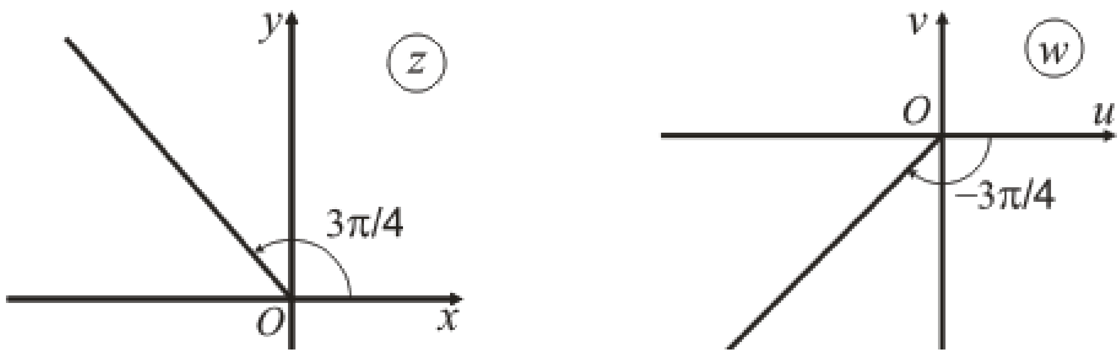

Рис. 16

Пример. На какую область плоскости отобразится с помощью функции $W = z^2$ сектор P, определенный неравенствами

$$\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\,, |z| < 2.$$

Решение:

Так как $\arg z^2 = 2\arg z$ и $|z^2| = |z|^2$, то $\pi/3 < \arg w < 2\pi/3$, $|W| < 4$. Следовательно, функция $w = z^2$ отображает сектор P на сектор Q (рис.17).

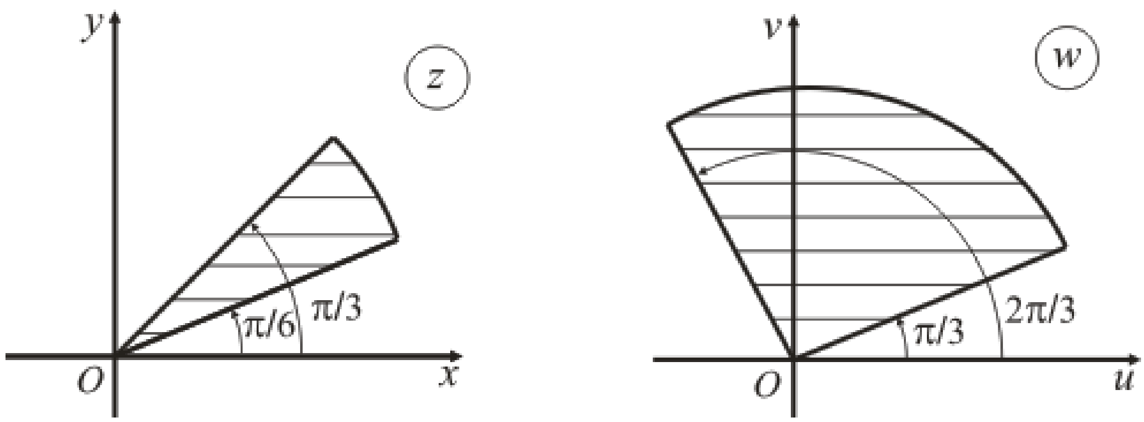

Рис. 17

Очевидно, что это отображение взаимно однозначно. Действительно, функция $w = z^2$ однозначна и каждой точке z соответствует единственная точка w. Хотя функция $z = \sqrt{W}$ обратная по отношению к данной, двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 $(z_2 = -z)$, соответствующих точке w области Q, лишь одна принадлежит области P.

3.6. Упражнения

Установить, на какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w = 2z - i$ следующие линии плоскости z:

а) $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$, (Ответ: $u - v = 1$);

б) $|z| = 1$, Ответ: ($[u^2 + (v+1)^2 = 4]$);

в) На какую область плоскости Wотобразится с помощью функции $w = kz$ область, заданная неравенством $|z| < 1$, (Ответ: $|w| < k$).

3.7. Дифференцирование и интегрирование функций комплексной переменной

Производная. Производной от функции $W = f(z)$ по переменному z в точке $z = z_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной, когда приращение аргумента произвольно стремится к нулю:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную в точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Теорема: Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в некоторой области, была дифференцируемой в точке z этой области, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в той же точке и чтобы, кроме этого, выполнялись условия (Коши-Римана или Даламбера-Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.12}$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial u} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Регулярные функции. Однозначная функция $f(z)$ называется регулярной (аналитической, голоморфной) в точке $z = a$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки a.

Функция называется регулярной в области D, если она регулярна в каждой точке этой области. Точки, в которых функция регулярна, называются правильными, Регулярные функции имеют во всех правильных точках производные любого порядка. Производные элементарных функций комплексной переменной вычисляются по тем же правилам, что и производные функции действительной переменной.

Пример. Найти производные от функций:

а) $w = 3x - 2yi$; б) $w = \sin 2z$.

Решение:

Проверим условия (3.12) дифференцируемости для функции:

а) $u = 3x$, $v = -2y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\,, \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,, \frac{\partial v}{\partial y} = -2.$$

Так как условия (3.1) не выполнены, то функция производной не имеет;

б) $w = \sin 2z$; $u = \sin 2x\mathrm{ch}2y$; $v = \cos 2x\mathrm{sh}2y$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos 2x\mathrm{ch}2y\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin 2x\mathrm{sh}2y\,;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin 2x\mathrm{sh}2y\,;\ \frac{\partial v}{\partial u} = 2\cos 2x\mathrm{ch}2y.$$

Функция дифференцируема. Найдем производную $w' = (\sin 2z)' = 2\cos 2z$ или по формуле (3.13)

$$w' = 2\cos 2x\text{ch}2y - i2\sin 2x\text{sh}2y.$$

Пример. Выяснить, является ли регулярной функция $w = -\sin x - i\sin y$.

Решение.

$$u = -\sin x\,;\;\; v = -\sin y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\cos x;\;\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0;\; \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos y.$$

Условия регулярности выполнены только для $x = y$. Следовательно, функция дифференцируема только на прямой $x = y$.

Пример. Найти регулярную функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $f(i) = -1 + 2i$, $u = x^2 + 2x$.

Решение:

Задача сводится к нахождению функции $v(x, y)$. По условиям искомая функция регулярна, следовательно, функция v должна быть такой, чтобы выполнялись условия Коши-Римана (3.12). Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2,\;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2,$$

откуда $v = \int\big((2x + 2)\big)dy = 2(x + 1)y + \varphi(x)$.

Для определения $\varphi(x)$ найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x).$$

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

то $2y + \varphi'(x) = -(-2y\,)$, $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(x) = C$, $v = 2yx + 2y + C$ $(*)$. Найдем С. По условию $f(i) = -1 + 2i = u + iv$, отсюда $i = 0 + i = x + iy$, $x = 0$, $y = 1, v(0{,}1) = 2$. Подставим эти значения в уравнение $(*)$, получим $2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + C, C = 0$.

Искомая функция $w = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) = z^2 + 2z$.

3.8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если функция $w = f(z)$регулярна в точке z_0 , причем $f'(z_0) \neq$ $\neq 0$, то $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту линейного растяжения в точке z_0 при отражении $w = f(z)$, а $\arg f'(z_0)$ равен углу поворота в точке z_0 при том же отображении.

Если $|f'(z_0)| > 0$, то в точке z_0 происходит растяжение, если $|f'(z_0)| < 0$, то – сжатие.

Если $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот в точке z_0 происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z_0) < 0$, то – по часовой стрелке.

Пример. Найти коэффициент ρ растяжения и угол φ поворота при отображении функции $w = z^2$ в точке $1 - i$.

Решение:

$w' = 2z$,

$w'|_{z=1-i} = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,

$w'|_{z=1-i} = 2\sqrt{2\,}, \arg w'|_{z=1-i} = -\pi/4$.

Следовательно, коэффициент растяжения $\rho = 2\sqrt{2}$, угол поворота $\varphi = -\pi/4$.

Пример. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая – сжимается при отображении с помощью функции $w = \ln z$.

Решение:

$w' = (ln\, z)' = 1/z$, $|w'| = 1/|z|$. При $z \neq z_0$ $|w'| > 1$ для $|z| < 1$, $|w'| < 1$ для $|z| > 1$, следовательно, в каждой точке, лежащей внутри круга $|z| \leq 1$, за исключением точки $z = 0$, происходит растяжение, а для точек, лежащих за кругом $|z| = 1$, происходит сжатие.

3.9. Упражнения

41. Проверить выполнение условий Даламбера-Эйлера для функций z^n, $e^z, \cos z$, $\ln z$

В задачах 42-47 найти аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части $u(x, y)$ или $v(x, y)$.

42. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - y/(x^2 + y^2)$.

43. $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$.

44. $v = 3 + x^2 - y^2 - y/\big(2(x^2 + y^2)\big)$.

45. $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

46. $u = x^2 - y^2 + 2$.

47. $v = x + y - 3$.

48. Отображение совершается с помощью $w = z^2$ и $w = z^3$. Найти угол поворота (φ) направления, выходящего из точки z_0, и коэффициент растяжения ρ в следующих точках:

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -1/4$; 3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.

49. Какая часть плоскости растягивается, а какая сжимается, если отображение осуществляется функцией:

1) $w = z^2$; 2) $w = z^2 + 2z$; 3) $w = 1/z$; 4) $w = e^z$.

3.10. Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть функция $f(z)$ непрерывна на дуге $\overset{\smile}{AB}$ гладкой или кусочно-гладкой кривой L. Дугу $\overset{\smile}{AB}$ разобьем произвольными точками $z_1, z_2, \dots, z_n$ на n элементарных дуг (рис. 18).

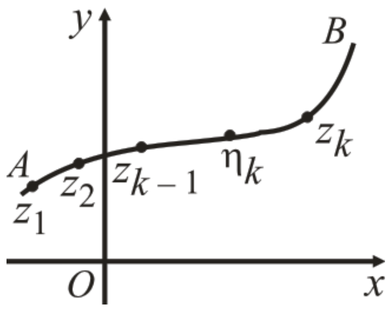

Рис. 18

На каждой произвольной элементарной дуге $\Delta z_k = z_n - -z_{n-1}$, выберем точку $□_k$ и составим интегральную сумму $S_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(□_k)\,_\Delta\, z_k$. Предел этой интегральной суммы S_k при $k \to \infty$ и $\Delta z_k \to 0$ комплексной переменной по дуге $\breve{AB}$, то есть

$$\lim \sum_{k=1}^{\infty} f(□_k)\Delta z_k = \int\limits_{\breve{AB}} f(z)dz. \tag{3.14}$$

Из определения интеграла следует, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{\breve{AB}} f(z)dz &= \int\limits_{\breve{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy \\ &+ i \int\limits_{\breve{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Интеграл (3.14) обладает теми же свойствами, что и криволинейный интеграл по координатам, в частности следующими:

$$\begin{gathered} \int_{\breve{AB}} C\, f(z)dz = C \int_{\breve{AB}} f(z)dz\,; \\ \int_{\breve{AB}} f(z)dz = \int_{\breve{BA}} f(z)dz\,; \\ \int_{\breve{AB}} [f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)]\, dz = \int_{\breve{AB}} f_1(z)dz + \\ + \int_{\breve{AB}} f_2(z)dz \ldots + \int_{\breve{AB}} f_n(z)dz; \\ \int_{c_1+c_2+\cdots+c_k} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \\ + \cdots + \int_{c_k} f(z)dz, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где C – постоянная.

Вычисление интеграла (3.14) сводится по формуле (3.15) к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций двух действительных переменных.

Пример. Выразить интеграл от комплексной переменной $\int_C z^2 dz$ через криволинейные интегралы от функций двух действительных переменных.

Решение:

Находим действительную u и мнимую v части подинтегральной функции z^2: $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Следовательно, $u = x^2 - y^2\,, v = 2xy$.

По формуле (3.15) имеем:
$\int_C z^2 dz = \int_C (x^2 - y^2)dz - 2xydy + i\int 2xydx + \left((x^2 - y^2)\right)dy$.

Если кривая C задана уравнением $z = z(t)$, где $t_1 < t < t_2$, причем при изменении t от t_1 до t_2 кривая C описывается от начальной точки до конечной, то интеграл по комплексной переменной проще вычислять по формуле:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_1}^{t^2} f[z(t)]z'(t)dt, \qquad (3.17)$$

где $z = x(t) + iy(t)$; $x = x(t),\ y = y(t)$ – параметрические уравнения кривой.

Пример. Вычислить $\int_0^{2+i} \bar{z}\,dz$ по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$.

Решение:

Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $2 + i$ в параметрической форме имеет вид $x = 2t, y = t$, а в комплексной форме $z = (2 + i)t$, где действительное переменное t изменяется от 0 до 2. Находим $dz = (2 + i)dt,\ \bar{z} = (2 - i)t$.

$$\int_0^{2+i} \bar{z}dz = \int_0^2 (2 - i)t(2 + i)dt = 5\int_0^2 tdt = 10.$$

Пример. Вычислить $\int_{-2}^{2} |z|dz$ по верхней половине окружности C с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис.19).

Решение:

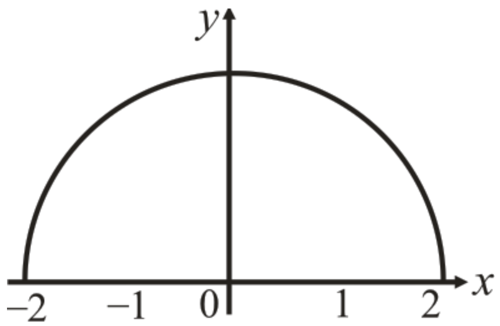

Рис. 19

Первый способ решения. Уравнение окружности C в комплексной форме имеет вид $z = 2e^{i\varphi}$, причем $0 \le \varphi \le \pi$. Тогда имеем $dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$.

$\int_{-2}^{2} |z| dz = \int_{\pi}^{0} 2 \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi =$

$= 4e^{i\varphi}|_{\pi}^{0} = 4\left(1 - e^{\pi i}\right) = 4(1 - \cos\pi - i\sin\pi) = 8.$

Второй способ решения: На полуокружности C выразим x и y через полярный угол φ: $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$, причем для точки $x = -2$, $\varphi = \pi$, а для точки $x = 2$, $\varphi = 0$.

Тогда $|z| = 2$, $z = x + iy = 2\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,

$$dz = 2(-\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi)d\varphi,$$

$\int_{-2}^{2} |z|\, dz = \int_{\pi}^{0} 2 \cdot 2(-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi = 4[\cos\varphi +$

$+ i\sin\varphi\pi 0 = 8.$

Если $f(z)$ – регулярная функция и $F(z)$ является первообразной функцией для $f(z)$, то $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ (формула Ньютона-Лейбница) (3.18).

Пример. Вычислить $\int_{0}^{2i} z\cos z\, dz$.

Решение:

Функция $z\cos z$ регулярна во всей плоскости. Поэтому интеграл от нее зависит от пути интегрирования, проведенного между точками $z = 0$ и $z = 2i$. Воспользовавшись методом интегрирования по частям и формулой (3.18), получим:

$$\int_{0}^{2i} z\cos z dz = [z\sin z + \cos z]_{0}^{2i} = 2i\sin 2i + \cos 2i - 1 =$$

$$= \mathrm{ch}2 - 2\mathrm{sh}2 - 1.$$

3.11. Упражнения

50. Вычислить интегралы $Y_1 = \int x dz$, $Y_2 = \int y dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $2 + i$;

2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);

3) по окружности $|z - a| = r$.

51. Вычислить интеграл $\int |z| dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $2 - i$;

2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);

3) по полуокружности $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ (начало пути в точке $z = -i$);

4) по окружности $|z| = R$.

52. Вычислить интеграл $\int_C |z| z dz$, где C – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $z = 1$ и отрезка $y = 0$, $-1 \le x \le 1$.

53. Вычислить интеграл $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz$, где C – граница полукольца, образованного верхними полуокружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$ и отрезками $-2 \le x \le -1, y = 0, 1 \le x \le 2$, $y = 0$.

54.Вычислить интеграл $\int (z - a)^n dz$ (n - целое число):

1) по полуокружности $|z - a| = R$, $0 \le \arg(z - a) \le \pi$ (начало пути в точке $z = a + R$);

2) по окружности $|z - a| = R$;

3) по периметру квадрата с центром в точке a и сторонами, параллельными осям координат.

55. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-2+i}^{2-i} e^z dz$; б) $\int_{1-i}^{3+3i} z dz$; в) $\int_{z_1}^{z_2} \sin z dz$.

3.12. Теорема и формула Коши

Интегральная теорема Коши. Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, то интеграл от этой функции вдоль всякого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в области D, не зависит от пути интегрирования, т. е. $\oint f(z)\,dz = 0$.

Теорема. Если функция $f(z)$ регулярна в конечной замкнутой области D, имеющей границу C, то для любой точки z_0, лежащей внутри этой области, имеют место следующие формулы (интегральные формулы Коши):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \tag{3.19}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{3.20}$$

Пример. Вычислить $\int_c \frac{z^3 dz}{z-3}$, если:

а) C – окружность $|z| = 2$; б) C – окружность $|z_1| = 4$ (рис. 20).

Решение:

а) функция $\frac{z^3}{z-3}$ регулярна в замкнутом круге $|z| \leq 2$, и по теореме Коши $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3}\,dz = 0$;

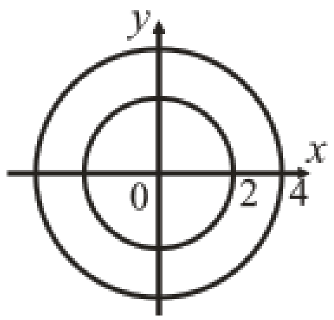

Рис. 20

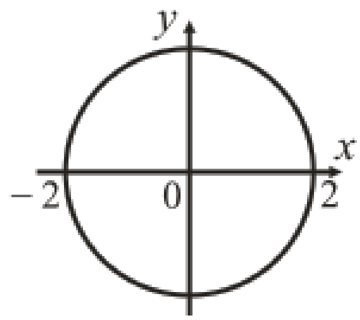

Рис. 21

б) функция $\frac{z^3}{z-3}$ нерегулярна в точке $z = 3$ круга $|z| \leq 4$, и поэтому теорема Коши не применима. Воспользуемся второй теоремой. Рассмотрим функцию $f(z) = z^3$ и точку $z_0 = 3$, функция z^3 регулярна в замкнутом круге $|z| \leq 4$, поэтому, применяя интегральную формулу Коши (3.19), получим

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^3 dz}{z-3} = \oint_{|z|=4} \frac{f(z)}{z-3} dz = 2nif(3) = 2\pi i 3^3 = 54\pi i.$$

Пример. Вычислить $\int_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{z^2+2z-3}$.

Решение:

Данный интеграл представим в виде:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-1)(z+3)} dz.$$

Рассмотрим функцию $\frac{\sin z}{z+3}$, регулярную в круге $|z| \leq 2$, и внутреннюю точку этого круга $z_0 = 1$ (рис.21). Применяя формулу Коши (3.19), получим

$$\int_{|z|=2} \frac{\frac{\sin z}{z+3}}{z-1} dz = \int (1) 2\pi i = \frac{\sin 1}{1+3} 2ni = \frac{\pi i}{2} \sin 1 .$$

Пример. Вычислить

$\int_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)^2} dz$, где $C -$ окружность $|z-i| = 2$.

Решение:

Данный интеграл представим в виде (рис.22):

$$\int_{|z-i|=2} \frac{z^2+1}{(z-2i)^2(z+2i)^2} dz$$

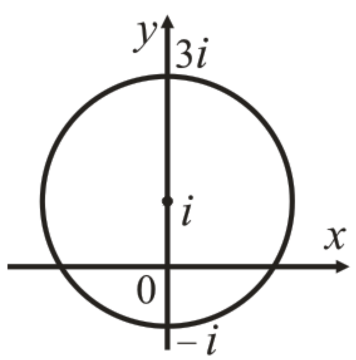

Рис. 22

Полагая $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2i)^2}$ и $z_0 = 2i$, применяем формулу (3.20), в которой положим $n = 1$:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Или согласно условию

$$\left[\frac{z^2+1}{(z+2i)^2}\right]'_{z=2i} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z^2+1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}dz.$$

Отсюда получим:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^2+4}dz = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{(z+2i)^2}\right]'_{z=2i} = \frac{5\pi}{16}.$$

3.13. Упражнения

58. Показать, что если путь не проходит через начало координат, то

$$\int\limits_1^z dt/t = \ln z + i(\varphi + 2\pi k),$$

где k – целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат $\left(z = ze^{i\varphi}\right)$.

59. Показать, что если путь не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где k– целое число.

60. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C dz/(z^2+9),$$

если:

1) C – окружность $|z-3i| = 2$;
2) C – окружность $|z+3i| = 2$;
3) C – окружность$|z| = 4$.

61. Вычислить

$$\int\limits_C dz/[z(z^2-1)],$$

если:

1) точка $z = 0$ лежит внутри контура, а точки $z = 1, z = -1$ – вне его;

2) точки $z = 1$ и $z = -1$ лежат внутри контура C , а $z = 0$ – вне его.

62. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-a|=a} zdz/(z^4 - 1)\,,(a > 1).$$

63. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2},$$

если контур C содержит внутри себя круг $|z| \leq a$.

64. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3},$$

если точка a лежит внутри контура C.

65. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{e^z dz}{(1-z)^3},$$

если:

1) точка $z = 0$ лежит внутри, а точка $z = 1$ – вне контура C;

2) точка $z = 1$ лежит внутри, а $z = 0$ – вне контура C;

3) точки $z = 0$ и $z = 1$ лежат внутри контура C.

4. РЯДЫ ТЭЙЛОРА И ЛОРАНА. ВЫЧЕТЫ

4.1. Ряды Тэйлора и Лорана

Теорема 1. Всякая функция $f(z)$, регулярная в точке a, в некоторой окрестности точки a может быть представлена рядом Тэйлора

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} C_n (z-a)^n, \tag{4.1}$$

где

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz. \tag{4.2}$$

Ряд (4.1) сходится к функции $f(z)$ в наибольшем круге $|z-a| < R$, в котором функция $f(z)$ является регулярной, и этот наибольший круг называется кругом сходимости, а его радиус – радиусом сходимости.

Теорема 2. Всякая функция $f(z)$, регулярная внутри кругового кольца $r < |z-a| < R$, разлагается в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-a)^n. \tag{4.3}$$

Этот ряд называется рядом Лорана. Коэффициенты ряда Лорана определяются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots . \tag{4.4}$$

где γ – любая окружность, лежащая внутри кольца $r < |z-a| < R$. Часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n$ называется правильной его частью. Она представляет собой степенной ряд, сходящийся внутри круга $|z-a| < R$. Другая часть ряда Лорана

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-a)^n = \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-3}}{(z-a)^3} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots$$

называется главной частью и сходится для $|z-a|>r$, т. е. вне круга радиуса r, с центром в точке a.

Пример. Представить степенными рядами в окрестности точки следующие функции:

а) $f(z)=e^z$; б) $f(z)=\sin z$; в) $f(z)=e^{\sin z}$.

Решение:

Функции e^z, $\sin z$, $e^{\sin z}$ регулярны в каждой точке плоскости z, поэтому представим их рядом Тэйлора:

а) $f(z)=f'(z)=\cdots=f^{(n)}(z)=e^z, f(0)=f'(0)=f^{(n)}(0)=$ $=e^0=1$.

Поэтому $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$.

б) $f'=(\sin z)'=\cos z=\sin(\pi/2+z)\,, f''(z)=-\sin z=$ $\sin(z+\pi)$. Отсюда получим

$$f^{(n)}(z)=\sin\left(z+n\frac{\pi}{2}\right), f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{(2n-1)}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

в) $f(z)=e^{\sin z}$. В разложении $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+$, положив $t=\sin z$, получим $e^{\sin z}=1+\frac{\sin z}{1!}+\frac{\sin^2 z}{2!}+\frac{\sin^3 z}{3!}+\cdots$.

В полученное соотношение вместо функции $\sin z$ подставим разложение: $e^{\sin z}=$

$$=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots=$$

$$=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)$$

$$+\frac{z^3}{3!}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots.$$

Итак, $e^{\sin z}=1+z+\frac{1}{2}\cdot z^2+\cdots$.

Пример. Разложить $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в точках:

а) $z = 0$; б) $z = 1$.

Решение:

а) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}$.

Вблизи точки $z = 0$, $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия).

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) = \frac{1}{z} - 1 - z - z^2.$$

б) Величину $1/z$ тоже приведем к сходящейся геометрической прогрессии, но со знаменателем $(z-1)$. Тогда получим

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)} =$$

$$= \frac{1}{z-1}[1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots] =$$

$$= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \cdots.$$

4.2. Упражнения

1. Разложить $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в следующих кольцах:

а) $0 < |z| < 1$; б) $|z| > 1$; в) $0 < |z-1| < 1$.

Ответ: а) $f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$;

б) $f(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{1}{z^n}$;

в) $f(z) = -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + z - (z-1)^2 - (z-1)^3$.

2. Функцию $z^2 e^{1/z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

Ответ: $f(z) = \frac{1}{z} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!z^n}$ при $0 < |z| < \infty$.

4.3. Нули и изолированные особые точки

1. Нули. Точки z, для которых $f(z) = 0$, называются нулями (корнями) функции. Функция $f(z)$, регулярная в точке $z = a$, имеет нуль порядка m (где m – целое положительное число), если в точке $z = a$ первые m коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots a_{m-1}$ разложения функции $f(z)$ в ряд Тэйлора равны нулю. При этом $f(z) \cdot (z-a)^{-m}$ регулярна и отлична от нуля в точке a. Нули функции, регулярной в области D, все изолированы друг от друга (т. е. в окрестности каждого нуля, исключая сам нуль, $f(z) \neq 0$).

Пример. Показать, что $z = 0$ есть нуль третьего порядка для функции $z - \sin z$.

Решение:

Действительно,

$$z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots \right) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \cdots.$$

4.4. Изолированные особые точки

Особой точкой, или особенностью функции $f(z)$ называется точка, в которой $f(z)$ не регулярна. Если в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ регулярна всюду, кроме самой точки z_0 (в которой она может быть и не задана), то z_0 называется изолированной особой точкой. Изолированные особые точки могут быть:

1. Устранимые особые точки, если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности $|z| \leq a$, исключая возможно саму точку, т. е. когда ряд Лорана функции $f(z)$ в точке a не содержит отрицательных степеней $(z-a)$. Итак, для устранимой особой точки a $\lim_{z \to a} f(z)$ существует и конечен.

2. Полюсом порядка m называется изолированная особая точка a, если $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, т. е. ряд Лорана для этой функции в окре-

стности точки a имеет конечное число отрицательных степеней $(z-a.)$.

Для полюса порядка m

$$\lim_{z\to a}[(z-a)^m f(z)] = c \tag{4.4}$$

существует, конечен и не равен нулю. Полюс первого порядка называют простым полюсом.

4.5. Изолированная существенно особая точка

Если в разложении ряда Лорана функции $f(z)$ в точке a имеется бесконечное число членов отрицательных степеней $z-a$, при этом не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при z стремящемся к a.

Теорема 1. Если точка z_0 есть нуль порядка m для функции $f(z)$, то для $1/f(z)$ эта точка является полюсом порядка m.

Пример. В окрестности точки $z=0$ исследовать поведение функций:

а) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$; б) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$; в) $f(z)=e^{1/z}$.

Решение:

а) в окрестности $z=0$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots.$$

Для $\sin z$ точка $z=0$ является нулем первого порядка, а по теореме (1) эта точка будет простым полюсом функции $1/\sin z$.

б) точка $z=0$ – устранимая особая точка функции $\sin z/z$.

в) функцию $e^{1/z}$ для точек окрестности $z=0$ представим рядом Лорана.

В разложении

$$e^t = 1+\frac{t}{1}!+\frac{t^2}{2}+\cdots$$

положим $t=1/z$, тогда получим

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots.$$

Отсюда видим, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов, следовательно, точка $z = 0$ есть существенно особая точка функции $e^{1/2}$.

4.6. Вычет. Нахождение вычета относительно полюса. Вычисление интегралов с помощью вычетов

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна или имеет изолированную особенность в точке $z = a$. Тогда вычетом $\mathrm{Res}\, f(a)$ (или $\mathrm{Res}\,[f(z), a]$) функции $f(z)$ называется выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz,$$

где γ – контур, окружающий изолированную точку a.

Согласно определения вычет функции в точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ в разложении ряда Лорана, то есть $\mathrm{Res}\, f(a,) = C$. Вычет относительно устранимой точки равен нулю. Если $z = a \neq \infty$ есть полюс порядка m, то

$$\mathrm{Res}\, f(a) = \frac{1}{(m-1!)}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \quad (4.5)$$

Если $z = a$ простой полюс и

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – регулярные функции в точке $z = a$ ($\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) \neq 0$), то

$$\mathrm{Res}\, f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}. \quad (4.6)$$

Основная теорема. Если функция $f(z)$, регулярная в замкнутой области D, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \quad z_n$, лежащих внутри C, то

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \tag{4.7}$$

Пример. Найти вычеты в особых точках функций:
а) $f(z) = \operatorname{ctg} 3z$; б) $f(z) = 1/(z^2+4)^2$.

Решение:

а) $f(z) = \operatorname{ctg}\ 3z = \cos 3z/\sin 3z$. Особыми точками будут те точки, в которых знаменатель $\sin 3z = 0$, т. е. $z = \pi k/3$. Так как в этих точках $\cos 3z \neq 0$, то по формуле (4.6) имеем:

$$\operatorname{Res}\left[\left[\cos\ 3z, \frac{\pi k}{3}\right]\right] = \frac{\cos 3z}{\sin 3z}, z = \frac{\pi k}{3} = \frac{\cos k\pi}{3\cos k\pi} = \frac{1}{3}.$$

б) функция $1/(z^2+4)^2$ в качестве особых точек имеет полюсы второго порядка $z_1 = 2i,\ z_2 = -2i$. По формуле (4.5), положив $m = 2$, получим

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}, 2i\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z-2i}\frac{d}{dz}[(z+2i)] = \lim_{z-2i}\frac{-2}{(z+2i)^3} = -\frac{2}{4i} = -\frac{1}{32}i;$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}, -2i\right] = \frac{1}{1i}\lim_{z-2i}\frac{d}{dz}\left[(z+2i)^2\frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z-2i}\frac{-2}{(z-2i)^3} = \frac{1}{32}i.$$

Пример. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы: а) $\int_{|z|=4}\frac{dz}{9+z^2}$; б) $\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z(z-2)}dz$; в) $\int_{|z-1|=1{,}4}\operatorname{tg} z dz$.

Решение:

а) подинтегральная функция $1/(9+z^2)$ имеет простые полюсы в точках $z_1 = 3i, z_2 = 3i$, лежащие внутри контура интегрирования (рис. 23). По основной теореме вычетов

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{9+z^2} = 2\pi i \left[\operatorname{Res} \frac{1}{9+z^2} \; |_{z=3i} + \operatorname{Res} \frac{1}{9+z^2} |_{z=-3i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2z} |_{z=3i} + \left(\frac{1}{9+z^2} \right) |_{z=-3i} \right] = 2\pi i \left[\frac{1}{2z} |_{z=3i} + \frac{1}{2z} \right].$$

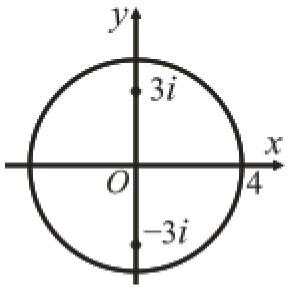

Рис. 23

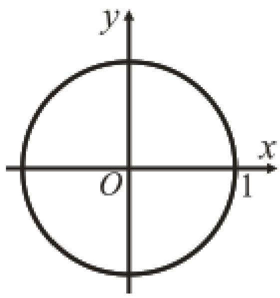

Рис. 24

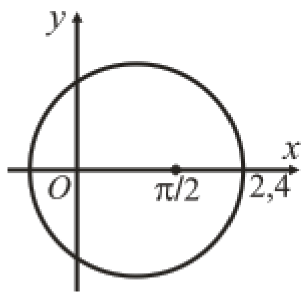

Рис. 25

б) подинтегральная функция имеет две особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, из которых только $z_1 = 0$ лежит внутри контура интегрирования (рис. 24). Так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

то $z = 0$ – устранимая точка и $\operatorname{Res}[\sin z/[z(z-2)] \;, 0] = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{\sin z}{z(z-2)} = 0.$$

в) функция $\operatorname{tg} z = \sin z/\cos z$ имеет простые полюсы в точках $z = \pi/2 + k\pi$ при $k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$, из которых только один $z = \pi/2$ лежит внутри контура интегрирования (рис. 25). Тогда

$$\int_{|z-1=1,4|} \operatorname{tg} z dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\sin z}{\cos z}, \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi i \left[\frac{\sin z}{\cos z} \right]_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i.$$

4.7. Упражнения

В задачах 66–70 найти порядки всех нулей данных функций.

66. z^2+9; 67. $\frac{z^2+9}{z^4}$; 68. $z\sin z$; 69. $(1-e^z)(z^2-4)^3$;

70. $1-\cos z$.

В задачах 71–77 найти особые точки функций, выяснить их характер.

71. $\frac{1}{z-z^3}$; 72. $\frac{z^4}{6+z^4}$; 73. $\frac{z^5}{(1-z)^2}$; 74. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$; 75. $\frac{e^z}{1+z^2}$; 76. $\frac{1}{\sin z}$;

77. $\operatorname{tg} z$.

В задачах 78–84 найти вычеты указанных функций относительно полюсов.

78. $\frac{1}{z^3-z^5}$; 79. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 80. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; 81. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; 82. $\operatorname{tg} z$; 83. $\frac{1}{\sin z}$;

84. $\operatorname{ctg}^2 z$.

В задачах 85–94 вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.

85. $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C – окружность $x^2+y^2=2x$.

86. $\int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, где C – окружность $|z-2|=\frac{1}{2}$.

87. $\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где C – окружность $|z|=2$.

88. $\int_C \frac{z^3dz}{2z^4+1}$, где C – окружность $|z|=1$.

89. $\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, где C – окружность $|z|=1$.

90. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, где C – окружность $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}$.

91. $\int_C \frac{dz}{\sin 2z}$, где C – окружность $|z|=\frac{\pi}{8}$.

92. $\int_C \frac{dz}{z(z^2+9)}$, где C – окружность $|z-2-3i|=2{,}5$.

93. $\int_C \frac{z^2dz}{(z-4)^4}$, где C – окружность $|z-5|=2$.

94. $\int_C \frac{\sin z dz}{z(z^4-16)}$, где C – окружность $|z|=3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д.Т.Письменный–9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2010. – 608 с.: ил.- (Высшее образование)
2. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 445с.:ил. – (Серия «Прикладная математика»)
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного, операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.:Наука,1981, – 304 с.
4. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2002. – 206 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ