Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачёва»

Составители:
В.М. Волков, И.А. Ермакова, В.А. Гоголин

МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 130400.65 «Горное дело»
в качестве электронного пособия

КЕМЕРОВО 2013

Рецензент:

Николаева Е. А. - зав. кафедрой математики, к. физ.-мат. наук

Филимонов К. А. – председатель учебно-методической комиссии специальности 130400.65 «Горное дело»

Волков Владимир Матвеевич, Ермакова Инна Алексеевна, Гоголин Вячеслав Анатольевич. Математика. Часть 1. [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов специальности 130400.65 «Горное дело», специализации 130401.65 «Подземная разработка пластовых месторождений», 130403.65 «Открытые горные работы», 130404.65 «Маркшейдерское дело», 130406.65 «Обогащение полезных ископаемых» всех форм обучения / Составители: В. М. Волков, И. А. Ермакова, В. А. Гоголин. – Электрон. дан. – Кемерово : КузГТУ, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) ; зв. ; цв. ; 12 см. – Систем. Требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Vista ; (CD-ROM -дисковод) ; мышь. – Загл. с экрана

Учебное пособие предназначено для повышения качества усвоения теоретического и практического материала студентами специальности 130400.65 «Горное дело» по дисциплине «Математика» в 1 семестре. Пособие содержит шесть глав: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ функции одной переменной, дифференциальное исчисление функции одной переменной, функции нескольких переменных. Изложение материала иллюстрируется рисунками и подробными примерами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства. Вычисление определителей по строке (столбцу)

Определителем второго порядка называется число, которое записывается таблицей в прямых скобках, и представляет собой разность произведений чисел, стоящих на одной диагонали, и чисел, стоящих на другой диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ . \tag{1.1}$$

Определитель будем обозначать символом Δ. Определитель второго порядка имеет две строчки и два столбца. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя. В обозначении элемента a_{ij} первый индекс i обозначает номер строки, а второй j – номер столбца. Диагональ, на которой стоят элементы a_{11}, a_{22}, называется главной. Диагональ с элементами a_{12}, a_{21} называется побочной.

<u>Пример 1.</u> Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 7$.

Приведем свойства определителя второго порядка. Все свойства доказываются непосредственно из его определения.

1^0.Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

2^0. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}).$$

3^0. Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0 .$$

4^0. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5^0. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6^0. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda \cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda \cdot a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11} + \lambda \cdot a_{12}\right) \cdot a_{22} - \left(a_{21} + \lambda \cdot a_{22}\right) \cdot a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{12}a_{22} - a_{21}a_{12} - \lambda a_{12}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определителем (или детерминантом) третьего порядка, называется число, которое имеет следующий вид и равно

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \quad (1.2)$$

Определитель третьего порядка записывается в виде трех строчек и трех столбцов.

Удобная схема для составления выражения (1.2) выглядит следующим образом (1.3). Под определителем (1.2) формально приписывают первую и вторую строки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

Со знаком «плюс» в выражения для определителя входят произведения элементов, расположенных вдоль прямых, параллельных главной диагонали (a_{11}, a_{22}, a_{33}). Со знаком «минус»

– произведения элементов, стоящих вдоль прямых, параллельных побочной диагонали (a_{13}, a_{22}, a_{31}).

Непосредственной проверкой с помощью (1.2) можно убедиться, что свойства $1^0 - 6^0$ определителей второго порядка остаются в силе и для определителей третьего порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i строки и j столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Пример 2. Задан определитель 3-го порядка, найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}, \text{ тогда } M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot 5 = -5$$

Понятие минора и алгебраического дополнения можно аналитическим образом ввести и для определителей второго порядка.

Так, например, для определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ найдем M_{12} и A_{12}.

$M_{12} = a_{21}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -a_{21}$.

Для определителей любого порядка справедливо еще одно свойство.

7^0. Определитель равен алгебраической сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Для определителя третьего порядка имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} A_{ij}. \qquad (1.4)$$

Для определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} A_{ij}$$, i - фиксировано, j -фиксировано.

Покажем для примера, что определитель третьего порядка можно разложить по третьей строке, то есть представить в виде суммы произведений элементов третьей строки на их алгебраические дополнения. Из (1.2) получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + a_{32}(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) +$$

$$+ a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Аналогично можно получить разложение (1.2) по любой строке или столбцу.

8^0. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \; (i \neq j) \;\; , \;\; \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \; (j \neq k) \;\; .$$

В самом деле, сумму произведений элементов i-й строки на алгебраические дополнения элементов k-й строки можно по свойству 8^0 представить как определитель, у которого на месте k-й строки стоит i-я. То есть определитель имеет две одинаковые строки, а по свойству 3^0 такой определитель равен нулю.

Свойство 7^0 дает правило для введения определителей более высокого порядка. Так можно представить определитель n-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, а M_{ij} определитель (n-1)-го порядка, полученный вычеркиванием ***i***-й строки и ***j***-го столбца.

Пример 3. Разложить определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Для подсчета таких определителей удобней вначале с помощью свойства 6^0 получить в какой-либо строке (или столбце) элементы, равные нулю. В нашем примере мы добьемся этого, выполнив следующие действия:

1) вычтем из первой строки вторую, умноженную на 4;

2) вычтем из четвертой строки вторую, умноженную на 3.

Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

(получим нули в третьем столбце: умножим 3-ю строку на 2 и прибавим ко 2-ой; умножим 3-ю строку на 3 и прибавим к 1-ой)

$$= \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & -18 & 0 \\ 17 & -9 & 0 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 26 & -18 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} == 9\cdot\begin{vmatrix} 26 & 2 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = -72.$$

1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}. \qquad (1.5)$$

Умножим второе уравнение на a_{12} и вычтем из него первое, умноженное на a_{22}. Получим $(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}) \cdot x = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$, откуда

$$x = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}}.$$

Теперь умножим второе уравнение на a_{11} и вычтем первое, умноженное на a_{21}. Имеем $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$, откуда

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Меняя знаки в числителе и знаменателе выражения для x, окончательно получим решение:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Применим теорию определителей к решению систем линейных уравнений, то есть уравнений первой степени. Рассмотрим еще раз систему (1.5) двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Введем следующие обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

Определитель Δ составлен из коэффициентов при неизвестных.

Частные определители Δ_x и Δ_y получены из Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующей неизвестной на столбец свободных членов b_1 и b_2.

Решение системы уравнений (1.1) теперь можно записать так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Тогда имеем (если $\Delta \neq 0$):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (1.7)$$

Формулы (1.7) называются формулами Крамера, по имени швейцарского математика Г. Крамера (1704–1752).

Итак, если определитель $\Delta \neq 0$, то система (1.5) имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера (1.7).

Если определитель системы $\Delta = 0$, то возможны два варианта:

1) $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Система имеет множество решений, так как выполняются тождества: $x \cdot \Delta = \Delta_x$, $y \cdot \Delta = \Delta_y$, то есть $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$.

2) хотя бы один из определителей Δ_x и Δ_y не равен нулю, то система (1.5) не имеет решений. Действительно, пусть $\Delta_x \neq 0$, а $\Delta_x = 0$. Тогда выражение $x \cdot \Delta = \Delta_x$ имеет вид: $x \cdot 0 = \textit{числу}$, решений нет.

Рассмотрим теперь систему трех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (1.8)$$

Первое умножим на A_{11}, второе на A_{21}, третье на A_{31}, где A_{11}, A_{21}, A_{31} – алгебраические дополнения соответствующих элементов. Полученные уравнения сложим

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) \cdot x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) \cdot x_2 +$$
$$+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) \cdot x_3 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3.$$

Из свойства 7^0 имеем $\Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно получить $\Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}$, $\Delta \cdot x_3 = \Delta_{x_3}$, где Δ_{x_2}, Δ_{x_3} получены из Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующей неизвестной столбцом свободных членов.

При $\Delta \neq 0$ получаем формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

<u>Пример 1.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по формулам Крамера: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

Найдем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 14 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 14 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -56,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 23 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 23 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 28 \end{vmatrix} = -56,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 14 \\ 3 & 10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 14 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 14 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -112$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{-56}{-56} = 1, \quad x_2 = \frac{-112}{-56} = 2 \quad x_3 = \frac{0}{-56} = 0.$$

<u>Пример 2</u>. Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 5, \\ 3x - 3y + z = 3. \end{cases}$$

Здесь $\Delta = 0,\ \Delta_x = -5,\ \Delta_y = -5,\ \Delta_z = 0.$ Данная система не имеет решения, так как первое и третье уравнения противоречивы. Действительно, умножая первое уравнение на 3 и вычитая третье уравнение, придем к противоречию: 0=3.

<u>Пример 3</u>. Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 4x+6y-2z=6, \\ 3x-y+2z=-1. \end{cases}$$

Здесь $\Delta=0, \Delta_x=0, \Delta_y=0, \Delta_z=0$. Так как второе уравнение получается умножением на 2 первого уравнения, то указанная система равносильна системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases}$$

и имеет бесчисленное множество решений. Задавая произвольные значения *x*, будем получать соответствующие значения *y* и *z*. Например, при x=1 получаем систему:

$$\begin{cases} 3y-z=1, \\ y+2z=-4 \end{cases},$$

решая которую, найдем $y=-\dfrac{2}{5}, \quad z=-\dfrac{11}{5}$.

При $x=0$ имеем $y=1$, $z=0$ и т.д.

1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса

До сих пор мы рассматривали системы линейных уравнений, в которых число уравнений равнялось числу неизвестных. Рассмотрим систему общего вида из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Система (1.9) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет множество решений.

Следующие преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей:

1) перемена местами двух любых уравнений;

2) умножение обеих частей любого уравнения на произвольное число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на любое число.

В результате таких преобразований, называемых элементарными, получается система, имеющая те же решения, что и первоначальная.

Для исследования систем общего вида удобно использовать метод Гаусса. Мы проиллюстрируем его использование на нескольких примерах.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}.$$

На первом шаге, используя элементарные преобразования, получим все коэффициенты при неизвестных x_1 равными нулю (во всех уравнениях кроме первого).

Поскольку все элементарные преобразования меняют только коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы, мы выпишем их в виде расширенной матрицы, то есть матрицы, в которой справа от черты записаны свободные члены

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Выполним следующие элементарные преобразования. Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из него первое; умножим третье уравнение на 2 и вычтем из него первое, умноженное на 3; из четвёртого уравнения вычтем первое. Мы получим систему, определяемую с помощью следующей расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & 16 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 5 \end{array}\right).$$

На втором шаге получим нули во всех элементах второго столбца (во всех уравнениях кроме первого и второго). Для этого выполним следующие преобразования: умножим третье уравнение на 3 и прибавим к нему второе, умноженное на 11; четвёртое уравнение умножим на 3 и прибавим второе, умноженное на 2. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 70 & 70 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \end{array}\right).$$

На третьем шаге разделим обе части третьего уравнения на 70, а четвёртого на 25, а затем из четвёртого уравнения вычтем третье. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как последняя строка в расширенной матрице соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0,$ которому удовлетворяют любые x_1, x_2, x_3 , то эту строчку можно опустить.

Последней матрице соответствует система:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Найдём её решение. Подставляя $x_3 = 1$ из третьего уравнения во второе, получаем $3x_2 = 5 - 2 \cdot 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$. Из первого уравнения имеем $2x_1 = -5 - x_2 + 4x_3 = -5 - 1 + 4 \cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$.

Таким образом, система имеет единственное решение, то есть является совместной и определённой. Заметим, что полученную расширенную матрицу, полученную в результате преобразований, можно схематически изобразить так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \tag{1.10}$$

Левая часть (1.10) (до вертикальной черты) имеет треугольный вид.

Пример 2. Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу и проведём над ней элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & -8 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 18 & -14 & 7 & -5 \\ 0 & 18 & -14 & 7 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 18 & -14 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

На первом шаге мы из второй строки вычли первую, умноженную на 3, а из третьей вычли первую, умноженную на 5. На втором шаге из третьей вычли вторую. Строку из нулей опускаем.

Окончательная матрица имеет ступенчатый вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right). \tag{1.11}$$

Система, полученная в результате преобразований, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 18x_2 - 14x_3 + 7x_4 = -5. \end{cases}$$

Число уравнений (m=2) меньше, чем число неизвестных (n=4). Поскольку из двух линейных уравнений можно определить лишь два неизвестных, то остальные неизвестные выбираются произвольно. Они называются свободными.

Пример 3. Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \bigm| & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 3 & \bigm| & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & \bigm| & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & \bigm| & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \bigm| & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigm| & -3 \end{pmatrix}.$$

Последняя строчка расширенной матрицы соответствует уравнению:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3,$$

которое не имеет решений. Следовательно, и первоначальная система не имеет решений, то есть является несовместной. Схематическая запись расширенной матрицы после всех элементарных преобразований выглядит так

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & \bigm| & * \\ 0 & 0 & * & * & \bigm| & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigm| & * \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

Три рассмотренных выше примера исчерпывают все возможные результаты элементарных преобразований неоднородной системы линейных уравнений.

Неоднородной называется система уравнений, у которой свободные члены b_i не все равны нулю одновременно.

Изобразим полученные результаты в виде схемы (рис. 1.1).

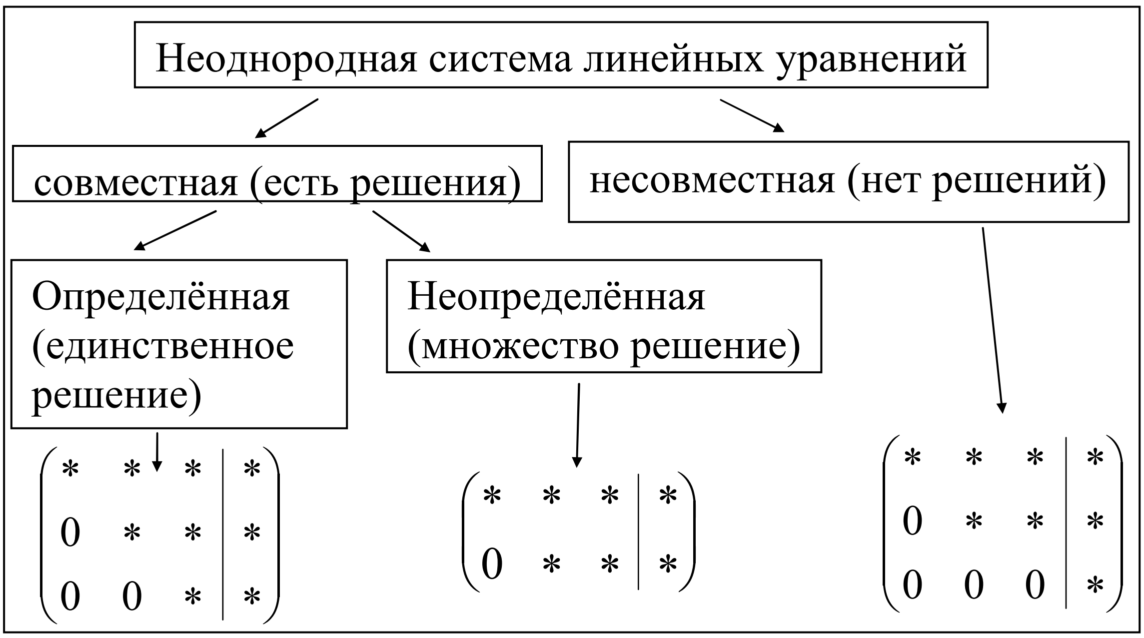


Рис.1.1. Классификация неоднородных СЛАУ по виду решения

Пусть дана система линейных уравнений, в которой все свободные члены которой равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

Такая система уравнений называется однородной. Эта система всегда совместна, так как она имеет решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$

Очевидно, что при решении её методом Гаусса мы можем прийти к результатам, изображённым на (рис.1.2).

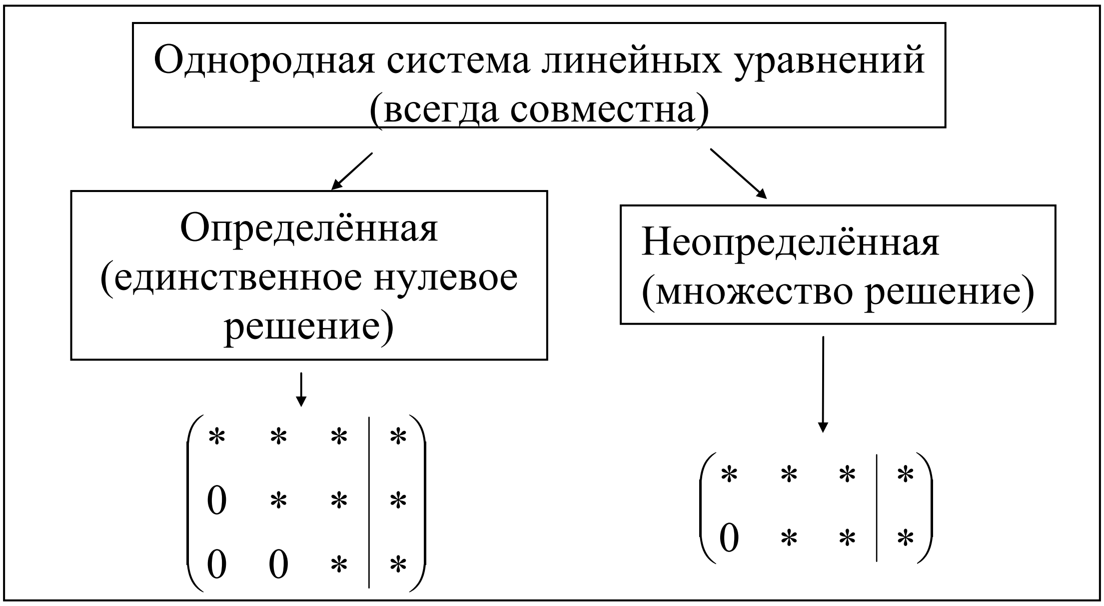


Рис.1.2. Классификация однородных СЛАУ по виду решения

Итак, метод Гаусса приводит систему линейных уравнений к ступенчатому или треугольному виду, что позволяет провести исследование этой системы на совместность.

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие вектора

При изучении физики, механики и других технических наук встречаются величины двух видов: скалярные и векторные. Скалярные величины полностью определяются заданием их численных значений (длина, масса, объём, температура тела). Векторные величины, кроме численного значения, характеризуются ещё и направлением (скорость, ускорение, сила, действующая на тело). Векторные величины изображаются с помощью векторов.

Вектор – это направленный отрезок в пространстве, имеющий определенную длину. Обозначается вектор одной буквой с чёрточкой (или стрелкой) наверху $\overline{a}$ $(\vec{a})$ или символом $\overline{AB}$, где A – начало, B – конец вектора (рис. 2.1). Длина вектора называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|, |\overline{AB}|$.

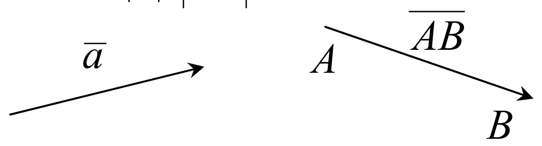


Рис. 2.1

Нуль-вектор – это такой вектор, у которого конец совпадает с началом, то есть $|\vec{0}| = 0$. Направление его не определено.

Единичным называется вектор, длина которого равна единице. Направление его может быть каким угодно.

Коллинеарными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается коллинеарность $\vec{a} \| \vec{b}$.

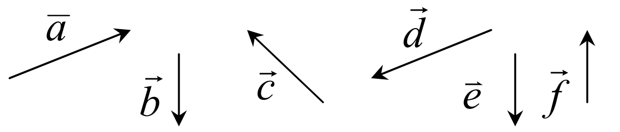
Равными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые: 1) имеют равные модули $\left(|\vec{a}| = |\vec{b}|\right)$; 2) коллинеарны $\left(\vec{a} \| \vec{b}\right)$; 3) одинаково направлены.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства.

Для каждого ненулевого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор, обозначаемый $(-\vec{a})$. Вектор $(-\vec{a})$ имеет модуль, равный $|\vec{a}|$, коллинеарен с $\vec{a}$, но направлен в противоположную сторону.

Компланарными называются векторы, лежащие на одной плоскости.

<u>**Пример.**</u> Среди векторов, изображённых на рис. 2.2, найти коллинеарные, равные, противоположные.



Ответ: $\vec{d} = -\vec{a};\ \vec{f} \| \vec{b};\ \vec{e} = \vec{b};\ \vec{f} \| \vec{e}$

Рис. 2.2

2.2. Линейные операции над векторами

Это операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

Сложение векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \vec{a}$, а затем от точки A отложим вектор $\overline{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой этих векторов и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.3).

а) б)

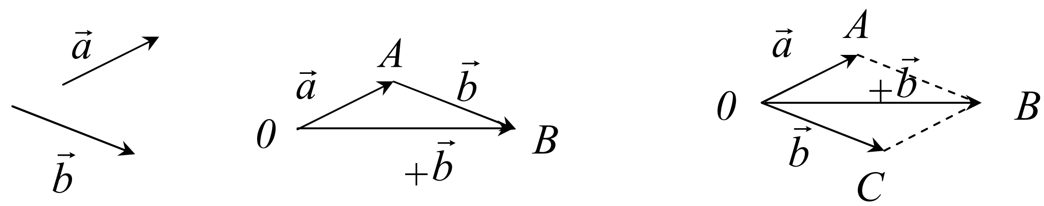


Рис. 2.3

Можно сумму векторов получить другим способом. Отложим от произвольной точки O векторы $\overline{OA} = \vec{a}$ и $\overline{OC} = \vec{b}$. Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм $OABC$. Вектор $\overline{OB}$, служащий диагональю параллелограмма, проведенной из вершины O, является суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.3б). На рис. 2.3б) видно, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Понятие суммы векторов можно обобщить для любого конечного числа слагаемых.

Пусть, например, даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 2.4). Поместим начало $\vec{b}$ в конец $\vec{a}$, затем начало $\vec{c}$ в конец $\vec{b}$ (рис. 2.4а). Вектор, соединяющий начало этой ломаной с концом, и является суммой этих векторов $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Подобным образом строится сумма любого конечного числа векторов.

Тот же самый результат можно получить другими способами. Построив сначала сумму векторов $\vec{a}+\vec{b}$, а затем, прибавив к этой сумме вектор $\vec{c}$, получим вектор $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (рис. 2.4б).

Или к $\vec{a}$ прибавим сумму $\vec{b}+\vec{c}$ (рис. 2.4в).

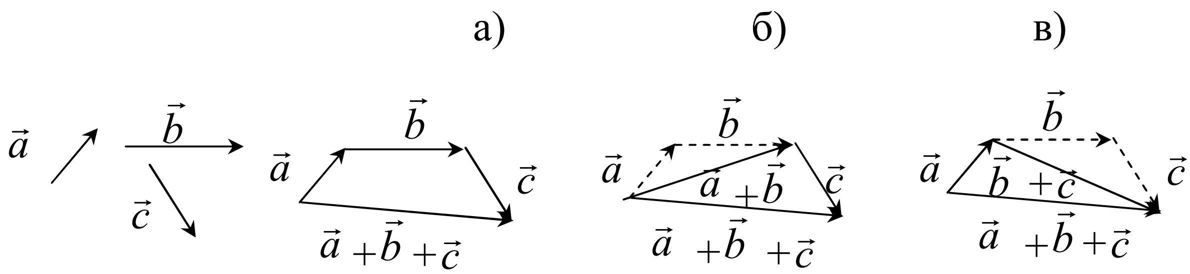


Рис. 2.4

Таким образом, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Поэтому сумму векторов записывают просто: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Если при сложении нескольких векторов конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нуль-вектору. Очевидно, что для любого вектора справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Разность векторов. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$.

Таким образом, если $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора – разности (рис. 2.5а).

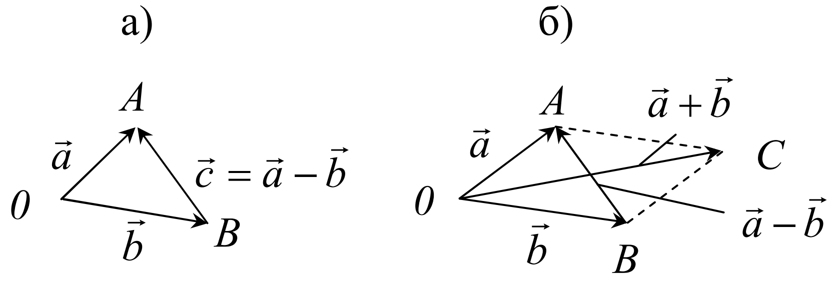


Рис. 2.5

Откладываем векторы $\overline{OA} = \vec{a}$ и $\overline{OB} = \vec{b}$ из общей точки O (рис. 2.5а). Вектор $\overline{BA}$ равен $\vec{a} - \vec{b}$. Действительно, $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$ или $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных из общей точки O, построить параллелограмм $OACB$, то вектор $\overline{OC}$, совпадающий с одной диагональю и выходящей из общего начала, равен $\vec{a} + \vec{b}$. Вектор $\overline{BA}$, совпадающий с другой диагональю, равен $\vec{a} - \vec{b}$ (рис. 2.5б).

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет длину, равную $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, и направление такое же, как у вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$ (рис. 2.6).

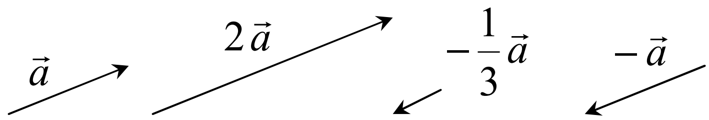


Рис. 2.6

Замечания.

1. Противоположный вектор $-\vec{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\vec{a}$ на $\lambda = -1$.

2. Из определения умножения вектора на число следует, что если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Очевидно и обратное: из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Свойства операции умножения вектора на число.

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$.

3. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a})$.

4. $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, где $\vec{a}^0$ – единичный вектор, направленный по $\vec{a}$.

Справедливость, например, первого свойства следует из того, что при изменении сторон параллелограмма в λ раз его диагонали также изменятся в λ раз (рис. 2.7).

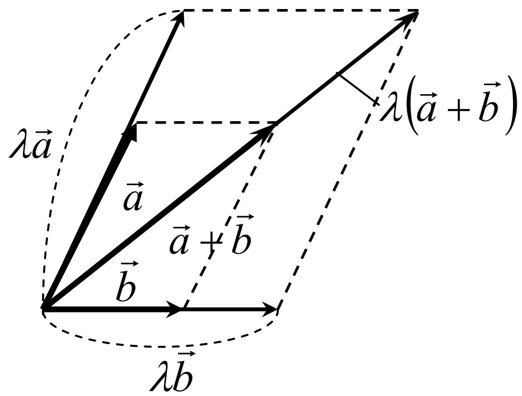


Рис. 2.7

2.3. Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, не все равные нулю, для которых справедливо равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = 0. \tag{2.1}$$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Из (2.1) получаем $\vec{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - ... - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k$.

Обозначим $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \mu_3 = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}, ..., \mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$, тогда

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 ... \mu_k\vec{a}_k. \tag{2.2}$$

Выражение вида $\mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 ... \mu_k\vec{a}_k$, где не все $\mu_i = 0$, называется линейной комбинацией векторов.

Итак, если векторы линейно зависимы, то один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных, то эти векторы линейно зависимы. Действительно, из (2.2) получаем:

$(-1)\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 ... \mu_k\vec{a}_k = 0.$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ называются линейно независимыми, если равенство (2.1) имеет место только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

Рассмотрим вопрос о линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве.

Теорема 1. Всякие три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на плоскости линейно зависимы.

Доказательство. Достаточно убедиться, что один из векторов является линейной комбинацией остальных.

1. Среди векторов есть коллинеарные. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$, то есть $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. Среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нет коллинеарных. Пусть они имеют общее начало O (рис. 2.8). Проведем через точку M прямые, параллельные векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$. При этом $\vec{a} = \overline{OB} + \overline{OC}$, $\overline{OB} = \lambda_1\vec{b}$, $\overline{OC} = \lambda_2\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$.

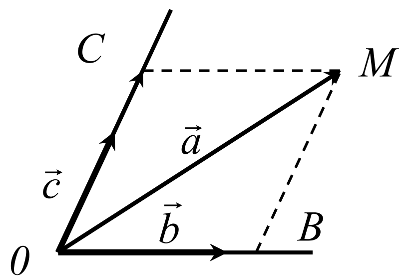


Рис. 2.8

Следствие. Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они линейно зависимы, один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Например, $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} + 0 \cdot \vec{e}$.

Теорема 2. Два вектора на плоскости линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

В пункте 2.2 показано, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то есть тогда, когда векторы линейно зависимы. Отсюда вытекает справедливость теоремы 2.

Из теорем 1 и 2 следует, что линейно независимыми на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора.

Теорема 3. Всякие четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы.

Допустим, что рассматриваемые векторы имеют общее начало.

1. Среди данных векторов есть тройка компланарных, например $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Так как эти векторы лежат в одной плоскости, то по теореме 1 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$ или $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + 0 \cdot \vec{d}$, то есть вектор $\vec{a}$ равен линейной комбинации остальных.

2. Среди данных векторов нет компланарных (рис. 2.9). В этом случае можно представить, например, вектор $\vec{a}$ виде линейной комбинации остальных векторов:

$$\vec{a} = \overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d},$$

То есть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ линейно зависимы.

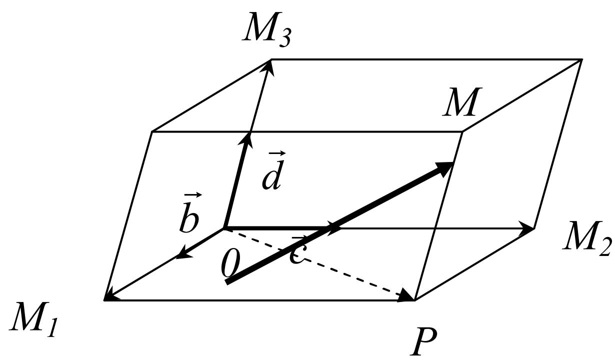


Рис. 2.9

Аналогично тому, как это было сделано в случае плоскости, можно показать, что:

1) если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы;

2) для того, чтобы три вектора в пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы;

3) для того, чтобы три вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Из сказанного следует, что линейно независимыми в пространстве являются любые три некомпланарных вектора.

2.4. Базис на плоскости и в пространстве

Базис – совокупность линейно независимых векторов. Базис на плоскости образуют любые два неколлинеарных вектора, базис в пространстве образуют любые три некомпланарных вектора (см. пункт 2.3).

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор на плоскости, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. По теореме 1:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{b},\vec{c}$, а числа λ_1,λ_2 называются аффинными координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{b},\vec{c}$. Записывают $\vec{a} = \{\lambda_1;\lambda_2\}$ или $\vec{a} = (\lambda_1;\lambda_2)$.

Покажем, что разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{b},\vec{c}$ является единственным. Допустим, что наряду с разложением (2.3) имеет место разложение

$$\vec{a} = \nu_1\vec{b} + \nu_2\vec{c}. \tag{2.4}$$

Вычитая (2.4) из (2.3), получим $(\lambda_1 - \nu_1)\vec{b} + (\lambda_2 - \nu_2)\vec{c} = 0$. Так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы, то $(\lambda_1 - \nu_1) = 0$, $(\lambda_2 - \nu_2) = 0$. То есть $\nu_1 = \lambda_1$, $\nu_2 = \lambda_2$ и разложение $\vec{a}$ по базису $\vec{b},\vec{c}$ единственное.

Аналогично любой вектор $\vec{a}$ в пространстве однозначно разлагается по векторам $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, образующим базис: $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d}$. Числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ называют аффинными координатами вектора $\vec{a}$ и записывают $\vec{a} = \{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\}$ или $\vec{a} = (\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)$.

Для произвольной точки M в пространстве построим радиус-вектор $\overline{OM}$, соединяющий начало координат с этой точкой (см. рис. 2.9). $\overline{OM} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d}$. Аффинные координаты вектора $\overline{OM}$, то есть числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,называются аффинными координатами точки M и записываются $M(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)$.

2.5. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису

Рассмотрим прямоугольную систему координат *OXYZ* (рис. 2.10).

Выберем единичные векторы: $\vec{i}$ на ось О*x*, $\vec{j}$ на ось О*y*, $\vec{k}$ на ось *Oz*. $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Эти три единичных перпендикулярных вектора называют ортами. Так как они некомпланарны, то образуют базис, который называют декартовым ортогональным базисом.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ с началом в точке O.
Проведем через его конец M плоскости, параллельные координатным (рис. 2.10).

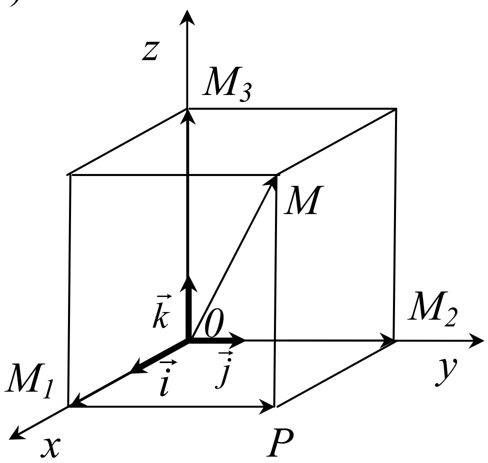


Рис. 2.10

Здесь: $\vec{a}=\overline{OM}=\overline{OM}_1+\overline{OM}_2+\overline{OM}_3$, $OM_1=пр_{Ox}\vec{a}$, $OM_2=пр_{Oy}\vec{a}$, $OM_3=пр_{Oz}\vec{a}$. Обозначив проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно a_x, a_y, a_z, получаем: $\overline{OM}_1=a_x\vec{i}$, $\overline{OM}_2=a_y\vec{j}$, $\overline{OM}_3=a_z\vec{k}$,

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}. \qquad (2.5)$$

Проекции a_x, a_y, a_z называют прямоугольными декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ или $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$.

Если точка M (см. рис. 2.10) имеет координаты x, y, z, то радиус-вектор $\overline{OM}$ имеет те же координаты: $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\overline{OM} = \{x; y; z\}$.

Если известны проекции на оси, то есть декартовы координаты векторов, то линейные операции над векторами можно проводить с помощью арифметических действий над их проекциями. Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}. \qquad (2.6)$$

<u>Пример 1</u>. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ и точки $A(1;8;2)$, $B(4;3;8)$. Найти: вектор $3\vec{a} + \overline{AB}$.

Решение. $3\vec{a} = 3 \cdot 2\vec{i} + 3 \cdot 1\vec{j} + 3 \cdot (-4)\vec{k} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k}$.

$$\overline{AB} = (4-1)\vec{i} + (3-8)\vec{j} + (8-2)\vec{k} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$3\vec{a} + \overline{AB} = (6+3)\vec{i} + (3-5)\vec{j} + (-12+6)\vec{k} = 9\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}.$$

<u>Пример 2.</u> Даны четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Векторы $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{0, 4, 5\}$, $\vec{c} = \{6, 7, 8\}$ образуют базис в трехмерном пространстве, потому что определитель, составленный из их координат: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 15$, отличен от нуля. Любой вектор этого пространства можно выразить через данные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Разложим вектор $\vec{d} = \{-1, -2, -6\}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$.

Это равенство векторов равносильно системе трех уравнений с тремя неизвестными $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$:

$$\begin{cases} -1 = 1\lambda_1 + 0\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ -2 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 \\ -6 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 \end{cases}.$$

Решая систему, найдем $\lambda_1 = -5,8$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0,8$, которые и являются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. То есть $\vec{d} = -5,8\vec{a} + \vec{b} + 0,8\vec{c}$.

2.6. Деление отрезка в заданном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda(\lambda > 0)$ – это значит найти на данном отрезке такую точку M, для которой $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ или $M_1M = \lambda \cdot MM_2$. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$.

Тогда

$$\overline{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k};$$
$$\overline{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k}.$$

Очевидно, что $M_1M = \lambda \cdot MM_2$, то есть $x - x_1 = \lambda(x - x_2)$, $y - y_1 = \lambda(y - y_2)$, $z - z_1 = \lambda(z - z_2)$. Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (2.7)$$

Если точка M является серединой отрезка, то $M_1M = MM_2$, $\lambda = 1$. Формулы (2.9) примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.8)$$

<u>Пример.</u> Найти середину отрезка *AB*, если заданы точки $A(-1; 8; 3)$ и $B(3; -2; 5)$.

Решение. $x_c = \frac{-1 + 3}{2} = 1$, $y = \frac{8 - 2}{2} = 3$, $z = \frac{3 + 5}{2} = 4$.

2.7. Длина вектора и отрезка

Так как вектор $\vec{a} = \overline{OM}$ является диагональю параллелепипеда (см. рис. 2.10), то

$$|\vec{a}| = \sqrt{(OM_1)^2 + (OM_2)^2 + (OM_3)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.9)$$

Если даны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то проекции вектора $\overline{AB}$ на оси по определению будут равны

$$np_{Ox}\overline{AB} = x_2 - x_1, \qquad np_{Oy}\overline{AB} = y_2 - y_1, \qquad np_{Oz}\overline{AB} = z_2 - z_1.$$

Поэтому

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k};$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (2.10)$$

Пример. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ и точки $A(1;8;2)$, $B(4;3;8)$. Найти: модуль вектора $|\vec{a}|$, длину отрезка $\left|\overline{AB}\right|$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$.

$$\overline{AB} = (4-1)\vec{i} + (3-8)\vec{j} + (8-2)\vec{k} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}\,.$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 6^2} \approx 8.37.$$

2.8. Направляющие косинусы, нормированный вектор

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат (рис. 2.11). Косинусы этих углов называют направляющими косинусами вектора.

Пусть $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $a_x = np_{Ox}|\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = np_{Oy}|\vec{a}|\cos\beta$,

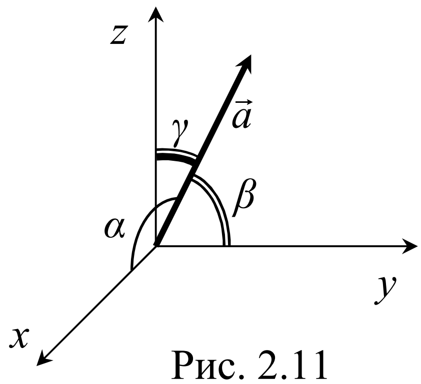


Рис. 2.11

$a_z = np_{Oz}|\vec{a}|\cos\gamma$. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то

$$cos\,\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$
$$cos\,\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad (2.11)$$
$$cos\,\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Легко видеть, что $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$.

Вектор единичной длины называется нормированным, его модуль $\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$.

В прямоугольном декартовом базисе нормированный вектор $\vec{a}^{\,0} = cos\,\alpha\vec{i} + cos\,\beta\vec{j} + cos\,\gamma\vec{k}$.

<u>Пример.</u> Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$. Найти направляющие косинусы вектора, записать нормированный вектор.

Решение. Длина $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$.

Направляющие косинусы:

$$cos\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}};\, cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{21}};\, cos\,\gamma = \frac{-4}{\sqrt{21}}.$$

Нормированный вектор $\vec{a}^{\,0} = \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{k}$.

2.9. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos(\vec{a} \wedge \vec{b}). \qquad (2.12)$$

Скалярное произведение обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Физический смысл скалярного произведения может быть истолкован как работа, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$, перемещающей материальную точку вдоль вектора $\vec{s}$. Работа $A = \left|\vec{F}\right| |\vec{s}|\, cos\,\varphi$ (рис. 2.12).

Формулу (2.12) можно записать и по-другому. Так как $|\vec{a}|\cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$ (рис. 2.13), $|\vec{b}|\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$, где $\varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b})$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}\,. \tag{2.13}$$

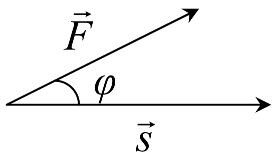


Рис. 2.12

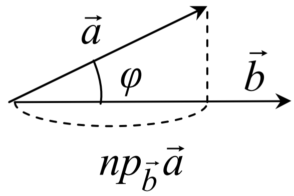


Рис. 2.13

Отсюда

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot b}{|\vec{b}|},\quad np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\,. \tag{2.14}$$

Если один из векторов, например, $\vec{a}$ – единичный, то есть $|\vec{a}| = 1$, то $np_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, это следует из определения скалярного произведения.

2. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

Докажем это для $\lambda > 0$.

По определению $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

Аналогично: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$, так как векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ одинаково направлены.

Также доказывается равенство $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Из (2.13)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{c}|np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a}+np_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{b} =$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или какой-нибудь из них равен нулю.

Действительно, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то или $|\vec{a}| = 0$, или $|\vec{b}| = 0$, или $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 0$, то есть $\vec{a}\perp\vec{b}$. Обратно, если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Отсюда следует ***условие перпендикулярности*** двух векторов: для того, чтобы два не равных нулю вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Рассмотрим скалярное произведение вектора самого на себя $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$. Скалярный квадрат обозначается $\vec{a}^2$. Следовательно, $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Но $\sqrt{\vec{a}^2}\neq\vec{a}$, $\sqrt{\vec{a}^2}=|\vec{a}|$.

<u>Пример 1.</u> Найти $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=60^\circ$.

Решение. $|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^2}=\sqrt{\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=$

$=\sqrt{4|\vec{a}|^2+12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{4\cdot 4^2+12\cdot 4\cdot 5\cdot 0.5+9\cdot 5^2}=$

$=\sqrt{405}\approx 20.2$.

Выразим скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов.

Пусть даны два вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_xb_x(i\cdot i)+a_yb_x(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_zb_x(\vec{k}\cdot\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+$$

$$+a_yb_y(\vec{j}\cdot\vec{j})+a_zb_y(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\cdot\vec{k})+a_yb_z(\vec{j}\cdot\vec{k})+a_zb_z(\vec{k}\cdot\vec{k}).$$

При раскрытии скобок мы воспользовались свойством 3.

Учитывая, что $\vec{i}\cdot\vec{i}=|i|^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$,

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$, так как векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны, получаем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.15)$$

<u>Пример 2.</u> Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{-1;0;5\}$ и $\vec{b}=\{2;-3;1\}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=-1\cdot 2+0\cdot(-3)+5\cdot 1=3$.

2.10. Угол между векторами, условие ортогональности векторов

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$, где $\varphi=(\vec{a}\wedge\vec{b})$, то

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (2.16)$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$ и угол между ними равен 90^0, то $cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=cos90^0=0$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

При этом условие перпендикулярности двух векторов принимает вид

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (2.17)$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

По формуле (2.16):

$$cos\varphi=\frac{3\cdot5+1\cdot(-2)+(-1)\cdot4}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{9}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{45}}\approx0{,}40.$$

<u>Пример 2.</u> При каком значении m векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+m\vec{k}$ перпендикулярны?

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow2\cdot1+3\cdot(-5)+(-1)\cdot m=0\Rightarrow m=-13.$

2.11. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi,\text{ где }\ \varphi=(\vec{a}\wedge\vec{b}); \qquad (2.18)$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) направление вектора $\vec{c}$ определяется направлением движения правого винта при вращении от первого вектора $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ (рис. 2.14). Если смотреть с его конца, то поворот по

кратчайшему пути от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left\lfloor \vec{a}, \vec{b} \right\rfloor$.

Геометрический смысл: модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма *S*, построенного на перемножаемых векторах как на сторонах (рис. 2.15).

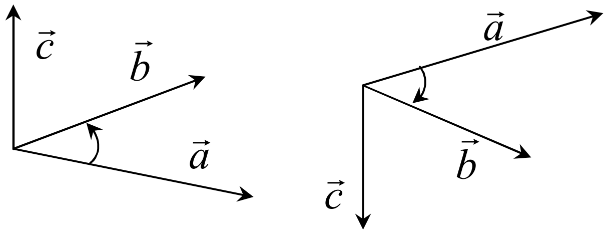


Рис. 2.14

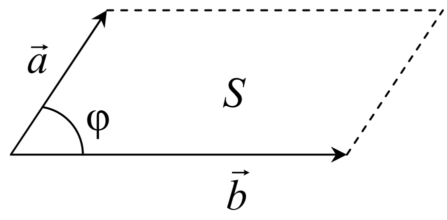


Рис. 2.15

Физический смысл: с помощью векторного произведения определяется момент силы $\vec{F}$, приложенный в точке A, относительно точки B (рис. 2.16): $\overline{mom_B \vec{F}} = \overline{BA} \times \vec{F}$.

Действительно,

$\overline{mom_B \vec{F}} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overline{BK}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overline{BA}\right| \cdot sin\,\varphi$.

Вектор-момент направлен перпендикулярно векторам $\overline{BA}$ и $\vec{F}$, с его конца поворот от $\overline{BA}$ к $\vec{F}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

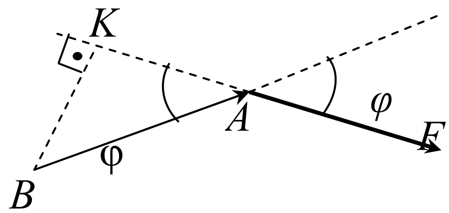


Рис. 2.16

С помощью векторного произведения можно определить и линейную скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Пусть точка M движется по окружности с центром O_1 с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и линейной скоростью $\vec{v}$ (рис. 2.17). $\overline{OM}$ – радиус-вектор точки M, обозначим его через $\vec{r}$. $\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\overline{O_1M}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot sin\,\varphi$, где $\varphi = (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$. Вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, и с его конца поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки. Следовательно, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

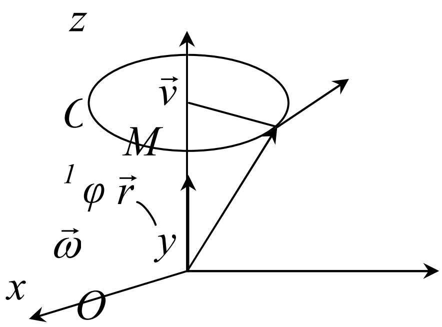


Рис. 2.17

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=a\times(\lambda\vec{b})$;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.
4. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, или один из них равен нулю.

Если $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi=0$. Значит, или $|\vec{a}|=0$, или $|\vec{b}|=0$, или $sin\varphi=0$, то есть $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Если же векторы коллинеарны, $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то $sin\varphi=0$ и $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0$, значит и $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Отсюда $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

<u>Пример 1.</u> Найти $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})$.

По свойствам 1÷4:

$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}-4\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}-6\vec{b}\times\vec{b}=$

$=-7\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{b}\times\vec{a},$

так как $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0$ и $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

Выразим векторное произведение через координаты перемножаемых векторов. Найдем сначала все парные векторные произведения единичных векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. По свойству 4:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0. \tag{2.19}$$

Рассмотрим произведение $\vec{i}\times\vec{j}$. По определению: $\left|\vec{i}\times\vec{j}\right|=|\vec{i}||\vec{j}|sin\frac{\pi}{2}=1$. Направление вектора $\vec{i}\times\vec{j}$ совпадает с направлением вектора $\vec{k}$ (рис. 2.18) и их модули равны. Следовательно,

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\,,\;\; \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\,. \qquad (2.20)$$

Так же можно показать, что

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\,,\; \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\,,\; \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\,,\; \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\,. \qquad (2.21)$$

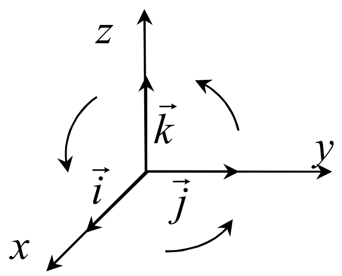


Рис. 2.18

Пусть даны два вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Используя свойства 3, 4 и равенства (2.19), (2.20) и (2.21), получим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$
$$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+$$
$$+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$
$$=a_yb_x(-\vec{k})+a_zb_x\vec{j}+a_yb_y\vec{k}+a_zb_y(-\vec{i})+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_z\vec{i}=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}\,.$$

Разности, стоящие в скобках, представляют собой определители второго порядка. Поэтому можно записать

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.22)$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2,3,1)$, $B(5,6,3)$, $C(7,1,10)$.

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, совпадающих со сторонами треугольника: $\overline{AB}=3\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\overline{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+9\vec{k}$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ как на сторонах, значит $S_\Delta = \frac{1}{2} S_\Diamond = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Модуль этого вектора равен площади параллелограмма:
$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \sqrt{1691} \approx 41{,}12$.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| \approx 20{,}56 \text{ кв.ед.}$$

2.12. Условие коллинеарности двух векторов

Пусть векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ коллинеарны. В этом случае $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число. Тогда $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$; $a_z = \lambda b_z$,откуда:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{2.23}$$

__Пример.__ Дан вектор $\vec{a} = 6\vec{i} - 4j - 8\vec{k}$ и точки $A(1;2;3)$ и B(-2;4;7). Проверить, будут ли векторы $\vec{a}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны.

Решение. $\overline{AB} = (-2-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (7-3)\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.;

Согласно (2.12) $\frac{6}{-3} = \frac{-4}{2} = \frac{-8}{4} = -2$, то есть $\vec{a}\,\|\,\overline{AB}$.

2.13. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. То есть первые два вектора умножаются векторно, и затем полученный вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно умножается на третий вектор $\vec{c}$. Пусть даны векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. По формуле (2.22) :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

По формуле (2.16):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Полученное выражение можно записать иначе

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Используя формулу (2.24) и свойства определителей, легко показать, что $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$. Действительно,

$$(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Аналогично можно получить следующие соотношения:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} =$$
$$= -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

Смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Рассмотрим геометрический смысл смешанного произведения.

Отложим три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ из одной точки и построим на них параллелепипед (рис. 2.19).

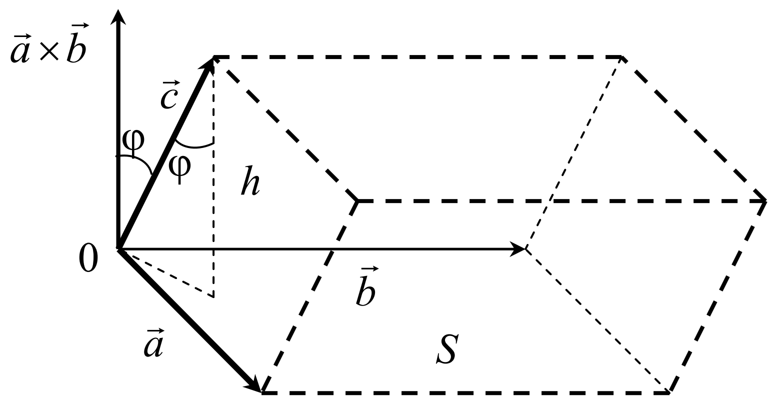


Рис. 2.19

Так как $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S$ – площадь параллелограмма в основании, а $\left|\vec{c}\right| cos\varphi = h$ – высота параллелепипеда, то

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| cos\varphi = S\cdot h = V$, где $V_{пар}$ – объем параллелепипеда.

При $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$, $\left|\vec{c}\right| cos\varphi = -h$, при этом $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = -V_{пар}$. Итак,

$V_{пар} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$.

Таким образом, модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. В этом заключается ***геометрический смысл*** смешанного произведения

Если три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны, то можно считать, что они лежат в одной плоскости. Тогда объем построенного на них параллелепипеда $V_{пар} = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$.

Условие компланарности трех векторов: три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если их смешанное произведение равно нулю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.25)$$

Объем пирамиды, построенной на трех векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен:

$V_{пир} = \dfrac{1}{6}V_{пар} = \dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$

<u>Пример.</u> Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$, $O(0,0,0)$.

Объем пирамиды, построенной на ребрах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на тех же ребрах. Найдем координаты векторов: $\overline{OA} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$; $\overline{OB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$; $\overline{OC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$V_{пир} = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{1}{6}\left|\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14 \text{ куб. ед.}$$

В табл. 1 обобщены сведения о произведениях векторов.

Таблица 1

Произведения векторов

	Определение	Выражение в декартовых координатах и условие равенства нулю	Физический и геометрический смысл
скалярное	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \cos\varphi,$ $\varphi = (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$	$\vec{a}\cdot\vec{b} =$ $= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	Работа $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$
векторное	1) $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \sin\varphi$ 2) $(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{a},$ 3) $(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{b}$	$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$	1) Площадь параллелограмма $S = \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert.$ 2) Момент силы, приложенной в точке А $\overline{mom_B \vec{F}} = \overline{BA}\times\vec{F}$ 3)Линейная скорость вращающейся точки $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$
смешанное	$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны.	Объем параллелепипеда $V = \lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\rvert$

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости

3.1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим прямую, проходящую через начало координат, образующую с осью Оx угол φ (рис. 3.1а).

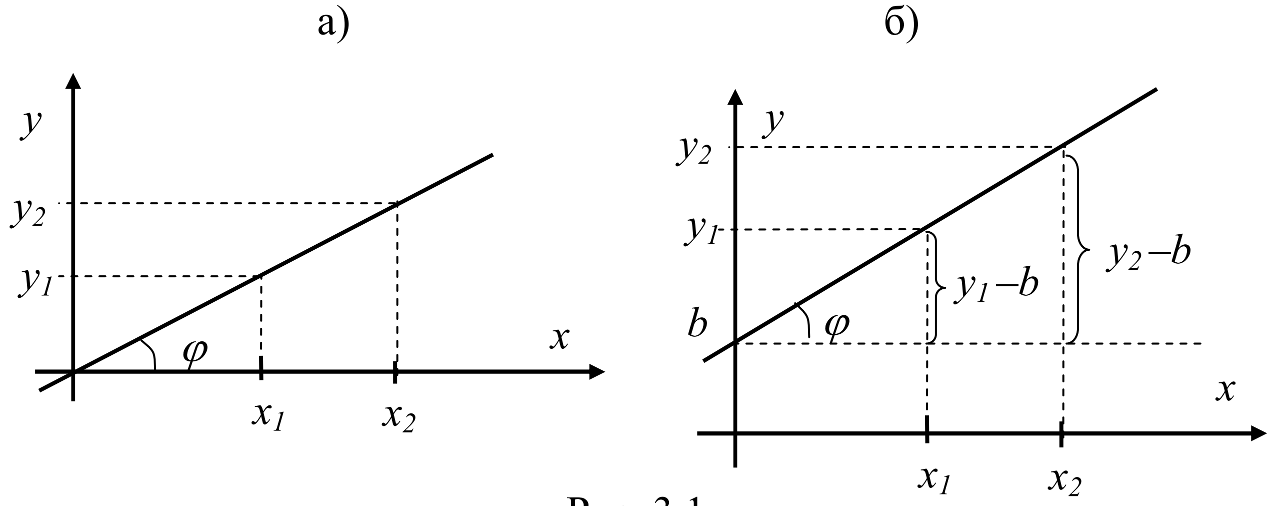


Рис. 3.1.

Тангенс угла наклона прямой к оси Оx для любой ее точки:

$tg\varphi = \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = ... = \dfrac{x}{y} = k$. Откуда $y = kx$.

Пусть прямая отсекает на оси Оy отрезок b (рис. 3.1б). Тогда для любой ее точки тангенс угла наклона

$tg\varphi = \dfrac{x_1}{y_1 - b} = \dfrac{x_2}{y_2 - b} = ... = \dfrac{x}{y - b} = k$, откуда

$$y = kx + b. \qquad (3.1.)$$

Уравнение (3.1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом,* где $k = tg\varphi$, φ – угол между прямой и осью Ox; b – величина направленного отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 3.1б).

Если прямая параллельна оси *Ox,* то есть α = 0, k = 0 , то уравнение (3.1) принимает вид:

$$y = b.$$

Отметим, что ось Ox определяется уравнением $y = 0$, а ось Оy имеет уравнение $x = 0$.

Пример 1. Построить прямые: 1) $y = 2$; 2) $x = -3$; 3) $y = 2x - 3$ (рис. 3.2).

Решение. 1) Прямая $y = 2$ параллельна оси *Ox*.

2) Прямая $x = -3$ параллельна оси *Oy*.

3) Прямая $y = 2x - 1$ отсекает на оси *Oy* отрезок, равный (–3). Зададим две точки: $x_1 = 0$, $y_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$; $x_2 = 2$, $y_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

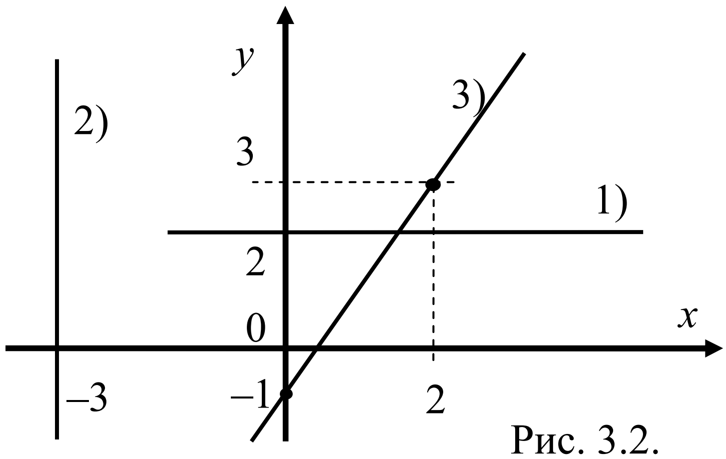


Рис. 3.2.

Если известна точка $M_0(x_0; y_0)$, лежащая на прямой, и угловой коэффициент прямой *k*, то уравнение прямой находят из выражения:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{3.2}$$

Пример 2. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -2$, проходящей через точку $(3; -5)$.

Решение. Используем (3.2): $y - (-5) = -2(x - 3)$, откуда $y + 5 = -2x + 6 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1$.

Если известны две точки, через которые проходит прямая: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то уравнение прямой находится из выражения:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{3.3}$$

Так как точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ лежат на прямой, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ также лежит на прямой и называется направляющим вектором этой прямой $\vec{s}$. Координаты направляющего вектора $\vec{s} = (m; n)$. Тогда уравнение (3.3) можно записать в виде:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n} \qquad (3.4)$$

Уравнения (3.4) называются каноническими уравнениями прямой.

<u>Пример 3.</u> Записать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1;2)$ и $M_2(3;-4)$.

$\dfrac{x+1}{3+1}=\dfrac{y-2}{-4-2}$ – уравнение через две тточк $\Rightarrow$

$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-6}$ – канонические уравнения $\Rightarrow$

$-6(x+1)=4(y-2)$

$-6(x+1)=4(y-2) \quad \Rightarrow -6x-6=4y-8 \quad \Rightarrow \quad 4y=-6x+2 \quad \Rightarrow$

$y=-1{,}5x+0{,}5$ – уравнение с угловым коэффициентом.

3.1.2. Общее уравнение прямой

Пусть на плоскости Oxy задана прямая l (рис. 3.3). Зададим на ней две точки $M(x,y)$ и $M_0(x_0,y_0)$, и нормальный вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$, перпендикулярный прямой. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\, y-y_0)$.

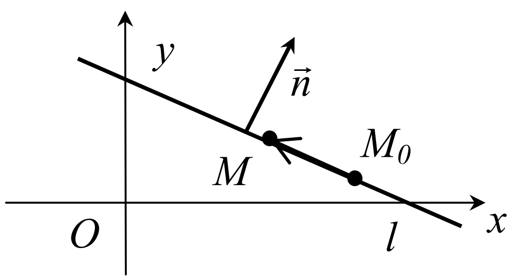


Рис. 3.3

Так как $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.5)$$

Раскрывая скобки, получим общее уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n}=\{A,B\}$, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$:

$$Ax+By+C=0. \qquad (3.6)$$

<u>Пример.</u> Записать общее уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-2; 3)$, проходящей через точку $M_0(1; -4)$.

Решение. По (3.5):

$-2(x-1)+3(y+4)=0 \quad \Rightarrow -2x+2+3y+12=0 \quad \Rightarrow -2x+3y+14=0$.

Выражая из этого уравнения *y,* получим уравнение с угловым коэффициентом: $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{14}{3}$

3.1.3. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности

Случай 1. Две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, причем $l_1 : y = k_1 x + b_1$ и $l_2 : y = k_2 x + b_2$, то один из улов между ними находится из формулы:

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{3.7}$$

<u>Пример 1.</u> В треугольнике *ABC* найти угол *A*, если его вершины находятся в точках: $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(2;0)$ (рис 3.4).

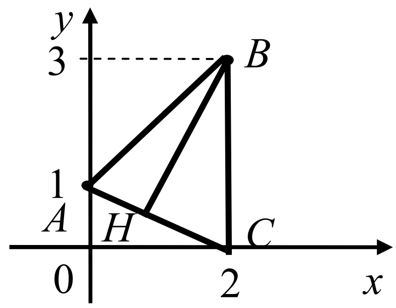


Рис. 3.4

.

Решение. Найдем уравнения прямых (*AB*) и (*AC*) по (3.3).

(*AB*): $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-1}{3-1} \quad \Rightarrow x = y-1 \quad \Rightarrow \quad y = x+1$;

(*AC*): $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-1}{0-1} \quad \Rightarrow -x = 2y-2 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}x+1$.

Выпишем угловые коэффициенты: $k_1 = 1$, $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. (Индексы выбираем произвольно, можно принять, что $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, а $k_2 = 1$)

$$tgA = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{1 + 0{,}5}{1 - 0{,}5 \cdot 1} = 3, \; A = arctg(3) \approx 72^o.$$

Если прямые параллельны, то угол между ними равен нулю, $\alpha = 0$, $tg\alpha = 0$, дробь равна нулю, когда числитель равен нулю. Отсюда *условие параллельности* двух прямых:

$$k_1 = k_2. \tag{3.8}$$

Если прямые перпендикулярны, то $\alpha = 90^o$, $tg90^o -$ не существует, следовательно знаменатель (3.6) равен нулю. Тогда *условие перпендикулярности*:

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{3.9}$$

<u>Пример 2</u>. В треугольнике ABC найти уравнение высоты (BH), если его вершины находятся в точках: $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(2;0)$. (см. рис. 3.4).

Решение. Высота (BH) перпендикулярна стороне (AC), уравнение которой найдено: $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Здесь $k_1 = -\frac{1}{2}$. По условию (3.9) найдем $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-1/2} = 2$. Так как высота ($BH$) проходит через известную вершину $B(2;3)$, то найдем ее уравнение по (3.2):

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow y = 2x - 1$$

Случай 2. Если две прямые заданы общими уравнениями, то есть:

l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то *угол между прямыми* находится как угол между векторами нормали $\vec{n}_1 = (A_1;\, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2;\, B_2)$ (см. 2.18):

$$cos\,\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.10}$$

Прямые перпендикулярны, если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (см. условие перпендикулярности векторов) и выполняется равенство:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3.11}$$

Прямые параллельны, если векторы нормали коллинеарны, $\vec{n}_1 \| \vec{n}_2$, то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{3.12}$$

3.1.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая l: $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0,y_0)$. Обозначим через $M_1(x_1,y_1)$ основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l (рис. 3.5).

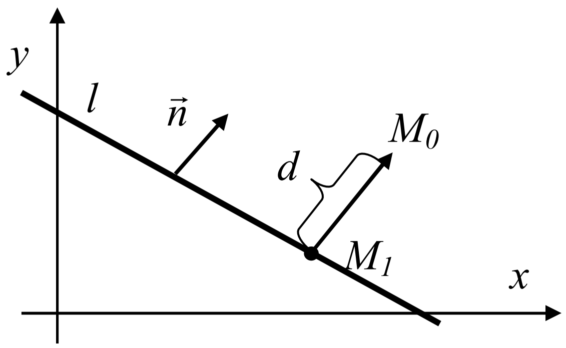


Рис. 3.5

Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно длине этого перпендикуляра, то есть модулю вектора $d=\left|\overline{M_1M_0}\right|$. Вектор $\overline{M_1M_0}=\left(x_0-x_1;\, y_0-y_1\right)$. По определению скалярного произведения: $\vec{n}\cdot\overline{M_0M_1}=|\vec{n}|\left|\overline{M_0M_1}\right|cos\,\varphi$, где угол $\varphi=(\vec{n}\,\hat{}\,\overline{M_0M_1})$, $\vec{n}=\left(A;\,B\right)$ – нормальный вектор прямой l. Так как векторы $\vec{n}$ и $\overline{M_1M_0}$ коллинеарны, то $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, а $cos\,\varphi=\pm1$. Тогда:

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M_1}=\pm|\vec{n}|\left|\overline{M_0M_1}\right|. \qquad (3.13)$$

С другой стороны, в координатной форме скалярное произведение имеет вид (2.16)

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M_1}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-\left(Ax_1+By_1\right).$$

Точка $M_1(x_1,y_1)$лежит на данной прямой, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$A_1x+B_1y+C_1=0$, отсюда $A_1x+B_1y=-C$. Учитывая это, получим

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M_1}=Ax_0+By_0+C. \qquad (3.14)$$

Приравнивая выражения, стоящие в правых частях равенств (3.13) и (3.14) и полагая $d=\left|\overline{M_1M_0}\right|$, имеем: $\pm|\vec{n}|\cdot d=Ax_0+By_0+C$.

Учитывая, что модуль нормального вектора равен $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$, получаем формулу, позволяющую найти расстояние от точки M_0 до прямой:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ или}$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.15)$$

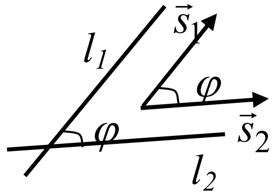
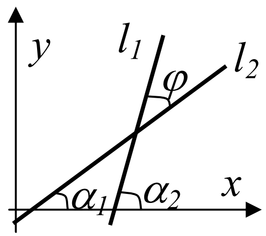
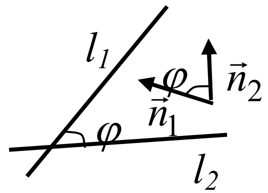
<u>Пример.</u> В треугольнике ABC с вершинами в точках: $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(2;0)$ (см. предыдущие примеры, рис. 3.4) найти расстояние от вершины B до прямой (AC).

Решение. Найдем уравнение прямой (AC), используя (3.3): $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Запишем общее уравнение этой прямой, для чего перенесем все слагаемые влево: $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0, \Rightarrow x + 2y - 2 = 0$. Из полученного уравнения записываем: $A = 1$, $B = 2$, $C = -2$. Подставим в формулу (3.15) координаты точки $C(2;0)$, тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2{,}7.$$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Таблица 2

Вид уравнений прямых	Схематическое изображение	Угол между прямыми	Условие перпендикулярности прямых	Условие параллельности прямых
канонические $l_1: \ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2: \ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$		$\cos\varphi=\dfrac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{\lvert\vec{s}_1\rvert\cdot\lvert\vec{s}_2\rvert}=$ $=\dfrac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$	$\vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \quad \Rightarrow$ $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \Rightarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$
с угловым коэффициентом $l_1: \ y=k_1x+b_1$ $l_2: \ y=k_2x+b_2$		$tg\varphi=tg(\alpha_1-\alpha_2)=$ $=\dfrac{tg\alpha_1-tg\alpha_2}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=$ $=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}$	$k_1=-\dfrac{1}{k_2}$	$k_1=k_2$
общие уравнения $l_1: \ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$		$\cos\varphi=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}=$ $=\dfrac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \quad \Rightarrow$ $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$	$\vec{n}_1 \parallel n_2 \quad \Rightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$

3.2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

где коэффициенты A, B, C, D, E, F – действительные числа, и хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

Это уравнение в зависимости от значений коэффициентов может определять окружность, эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, точку, либо не определять никакой линии.

Рассмотрим кривые второго порядка.

3.2.1. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина. Обозначим эту величину $2a$.

Введём декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 оказались на оси абсцисс, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 3.6). Обозначим расстояние F_1F_2 через $2c$, тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$ эллипса. По определению эллипса:

$$|F_1M|+|F_2M|=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (3.16)$$

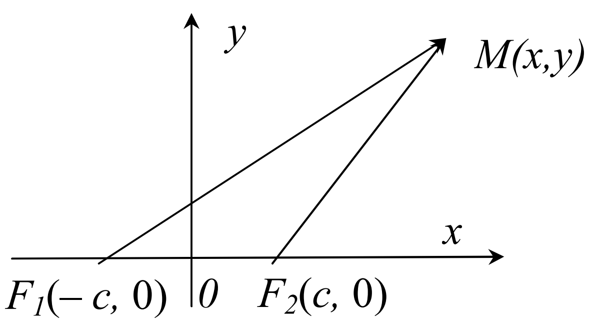


Рис. 3.6

Упростим это уравнение:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2.$$

После возведения в квадрат получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\text{или}\quad cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и после тождественных преобразований получим:

$$\left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot\left(a^2-c^2\right). \qquad (3.17)$$

Для эллипса $2a>2c$, поэтому $a^2-c^2>0$.

Обозначим $a^2-c^2=b^2$, тогда уравнение (3.17) примет вид $b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.18)$$

По определению эллипса координаты любой её точки удовлетворяют уравнению (3.16). Но уравнение (3.18) является следствием уравнения (3.16). Следовательно, ему также удовлетворяют координаты любой точки эллипса. Координаты точек, не лежащих на эллипсе, уравнению (3.18) не удовлетворяют. Таким образом, уравнение (3.18) есть уравнение эллипса. Оно называется каноническим уравнением эллипса.

Если центр эллипса находится в точке $O_1(x_0,y_0)$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (3.19)$$

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

Эллипс (рис. 3.7) имеет две оси симметрии. Ось, проходящая через фокусы F_1 и F_2, называется фокальной осью, расстояние $2c$ между фокусами – фокальным расстоянием. Точки пересечения эллипса с осями симметрии A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

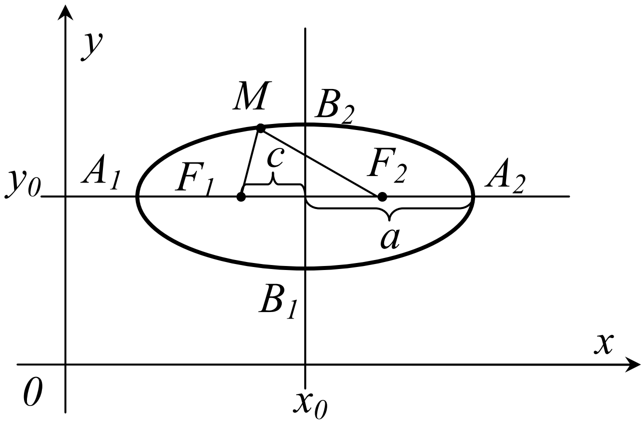


Рис. 3.7

Полуоси a**,** b и фокусное расстояние c связаны соотношением:

$c^2 = a^2 - b^2 \; (a > b)$ или $c^2 = b^2 - a^2 \; (a < b)$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} \; (0 < \varepsilon < 1)$, характеризующее его форму. Чем меньше значение ε, тем меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси.

В предельном случае при $b = a \; (\varepsilon = 0)$ эллипс является окружностью (рис. 3.8), каноническое уравнение которой имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \tag{3.20}$$

где x_0, y_0 – координаты центра; R – радиус.

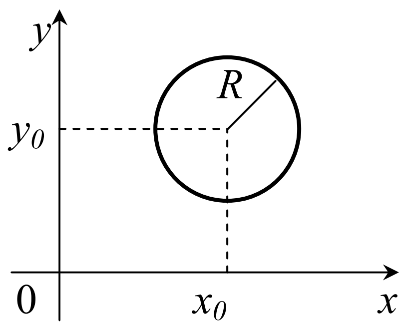


Рис. 3.8

3.2.2. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $\pm 2a$: $\quad \left|F_1M\right| - \left|F_2M\right| = \pm 2a.$

Преобразуя это выражение также, как и в случае эллипса, получим каноническое уравнение гиперболы, причём $b^2 = c^2 - a^2$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (3.21)$$

или

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.22)$$

Гипербола (рис. 3.9) имеет две оси симметрии. Точка их пересечения $O_1(x_0, y_0)$ называется центром гиперболы. Ось, на которой расположены фокусы F_1 и F_2, называется действительной (фокальной) осью, а перпендикулярная к ней ось – мнимой осью гиперболы. Расстояние между фокусами $2c$ называется фокусным расстоянием, величины a, b – действительной и мнимой полуосями. Точки пересечения гиперболы с действительной осью A_1 и A_2 являются вершинами гиперболы.

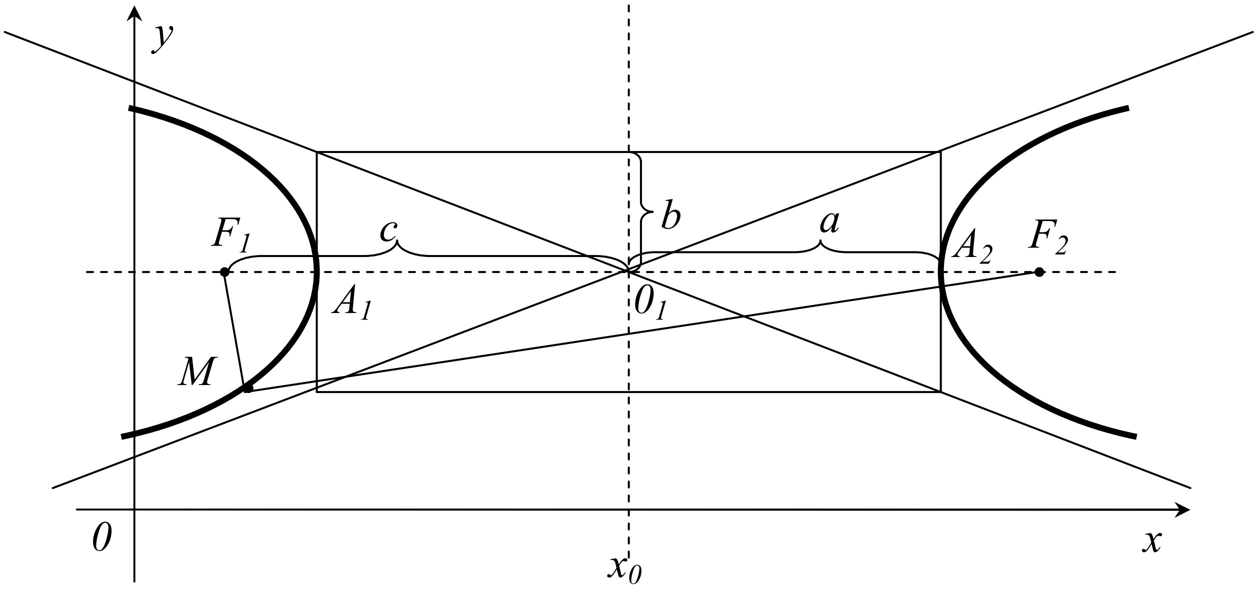


Рис. 3.9

Гипербола имеет уравнение (3.21), если ее действительная ось параллельна оси Ox (см. рис. 3.9).

Гипербола имеет уравнение (3.22), если ее действительная ось параллельна оси Oy.

Для построения гиперболы необходимо построить основной прямоугольник с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ и сторонами $2a$ и $2b$.

Диагонали прямоугольника являются асимптотами гиперболами (рис. 3.9), их уравнения имеют вид

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}\ (\varepsilon > 1)$ называется эксцентриситетом гиперболы и характеризует её форму. Чем меньше ε, тем более вытянут основной прямоугольник в направлении фокальной оси. В случае $a = b$ $\left(\varepsilon = \sqrt{2}\right)$ гипербола называется равносторонней (равнобочной).

При $a = b = 0$ уравнение гиперболы принимает вид:

$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$ – это уравнения двух пересекающихся прямых.

В частности, при $x_0 = y_0 = 0$, имеем $x^2 - y^2 = 0$. Отсюда: $(x - y)\cdot(x + y) = 0 \quad \Rightarrow$ уравнения прямых : $y = x$ и $y = -x$.

3.2.3. Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние p от фокуса до директрисы называется параметром параболы.

$$|FM| = |KM| \text{ или } \sqrt{\left(x - x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\left(x - x_0 + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Преобразуя это выражение, получим каноническое уравнение параболы, которая имеет форму, изображённую на рис. 3.10:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),\ p > 0, \tag{3.23}$$

В уравнении (3.23) x_0, y_0 – координаты вершины параболы. Ось симметрии параболы проходит через фокус перпендикулярно директрисе d: $x - x_0 = -\frac{p}{2}$, проходящей на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины параболы. Параболы, имеющие канонические уравнения

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),\ p < 0,$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),\ p > 0 \text{ и } p < 0, \tag{3.24}$$

имеют форму, изображённую в табл. 3.

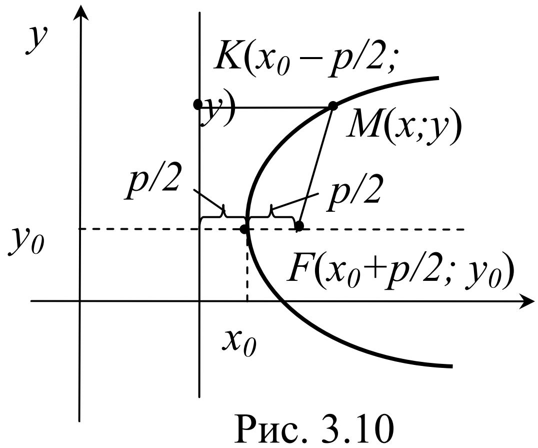


Рис. 3.10

3.2.4. Приведение уравнений кривых к каноническому виду

Пример. Построить кривую $x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$.

Решение. Приведём уравнение к каноническому виду. Для членов, содержащих *x*, и членов, содержащих *y*, выполним преобразования с выделением полного квадрата:

$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$;

$-2y^2 + 12y = -2\left(y^2 - 6y + 9 - 9\right) = -2(y-3)^2 + 18.$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 - 1 + 18 - 33 = 0,$

откуда $(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 16$ или $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{(y-3)^2}{8} = 1.$

Это уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(-1;3)$ и полуосями $a = 4$, $b = \sqrt{8}$.

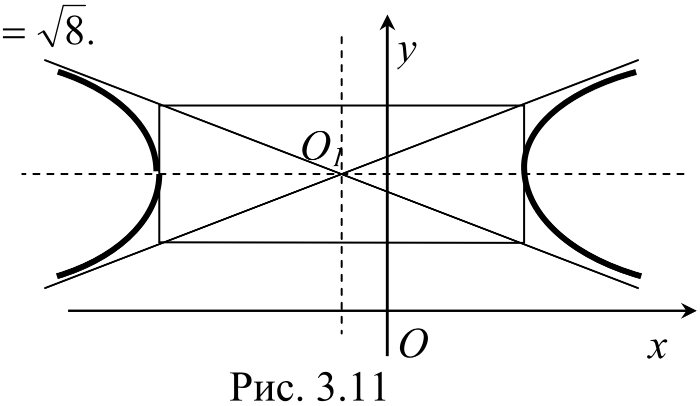
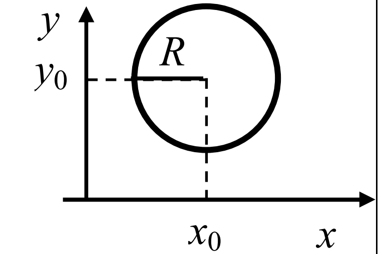
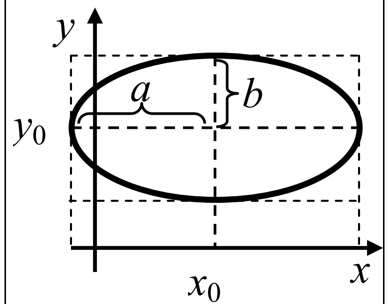


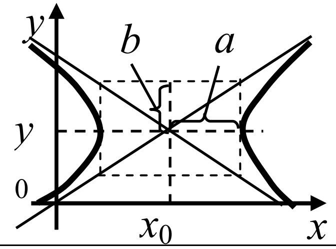
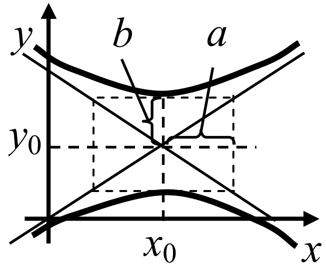
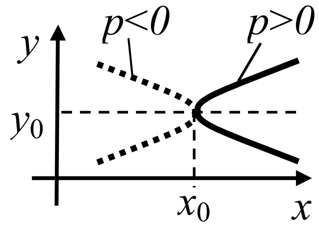
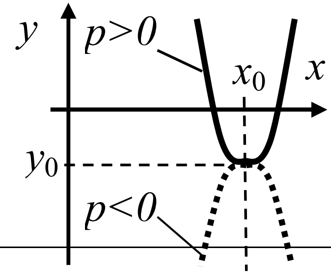
Рис. 3.11

Таблица 3

Вид и параметры кривых второго порядка

Вид кривой	Канонические уравнения: С центром (вершиной) в начале координат	Канонические уравнения: С центром (вершиной) в точке $(x_0; y_0)$	Параметры кривой	Изображение кривой
1	2	3	4	5
Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	R – радиус, x_0 и y_0 – координаты центра	
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	x_0 и y_0 – координаты центра, a – большая полуось, b – малая полуось (если $a > b$) и наоборот (если $a < b$)	

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
Гипербола с действительной осью Ox или ей параллельной	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	x_0 и y_0 – координаты центра, a – действительная полуось, b – мнимая полуось	
Гипербола с действительной осью Oy или ей параллельной	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$	x_0 и y_0 – координаты центра b – действительная полуось, a – мнимая полуось	
Парабола с осью симметрии Ox или ей параллельной	$y^2=2px$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$	x_0 и y_0 – координаты вершины, p – параметр параболы	
Парабола с осью симметрии Oy или ей параллельной	$x^2=2py$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$	x_0 и y_0 – координаты вершины p – параметр параболы	

3.2.5. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами

Зададим на плоскости точку – полярный полюс O и выходящий из него луч – полярную ось (рис. 3.12а). В полярной системе координат точка имеет две координаты: r – расстояние от точки A до точки O (полярный радиус) и φ – угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если φ > 0 (полярный угол). Таким образом, *полярными координатами* точки A называется пара (r, φ).

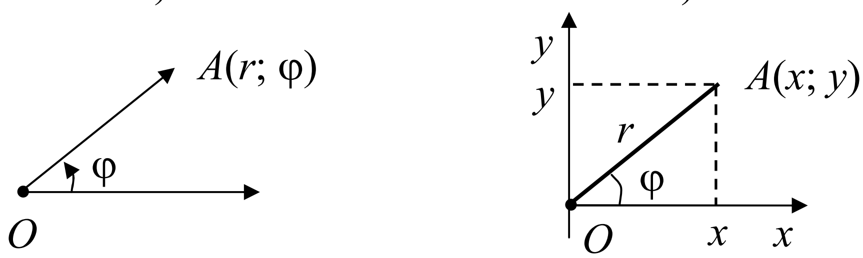


Рис. 3.12

Совместим декартову и полярную систему координат. Полюс поместим в начало координат, полярная ось совпадает с осью Ox (рис. 3.12б).

При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\,\varphi \\ y = r \cdot sin\,\varphi \end{cases}$$

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $cos\,\varphi = \dfrac{x}{r}$, $sin\,\varphi = \dfrac{y}{r}$.

Окружность радиуса R и центром в точке O задается уравнением $r = R$. Оно означает, что при любом угле φ расстояние от полюса O до точек линии постоянно и равно R (рис. 3.13).

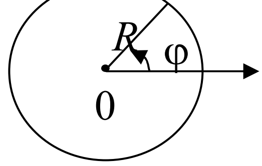


Рис. 3.13

<u>Пример</u>. Построить график функции $r = \dfrac{1}{2 \cdot (1 - \sin\,\varphi)}$. Записать уравнение линии в декартовой системе координат.

Решение. Составим табл. 4.

Таблица 4

φ_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π	$\frac{9}{8}\pi$	$\frac{10}{8}\pi$
r_i	0,5	0,81	1,71	6,57	∞	6,57	1,71	0,81	0,5	0,36	0,29

Продолжение таблицы 4

$\frac{11}{8}\pi$	$\frac{12}{8}\pi$	$\frac{13}{8}\pi$	$\frac{14}{8}\pi$	$\frac{15}{8}\pi$	2π
0,26	0,25	0,26	0,29	0,35	0,5

Графиком этой функции является линия, изображенная на рис. 3.14. Первая часть задания выполнена.

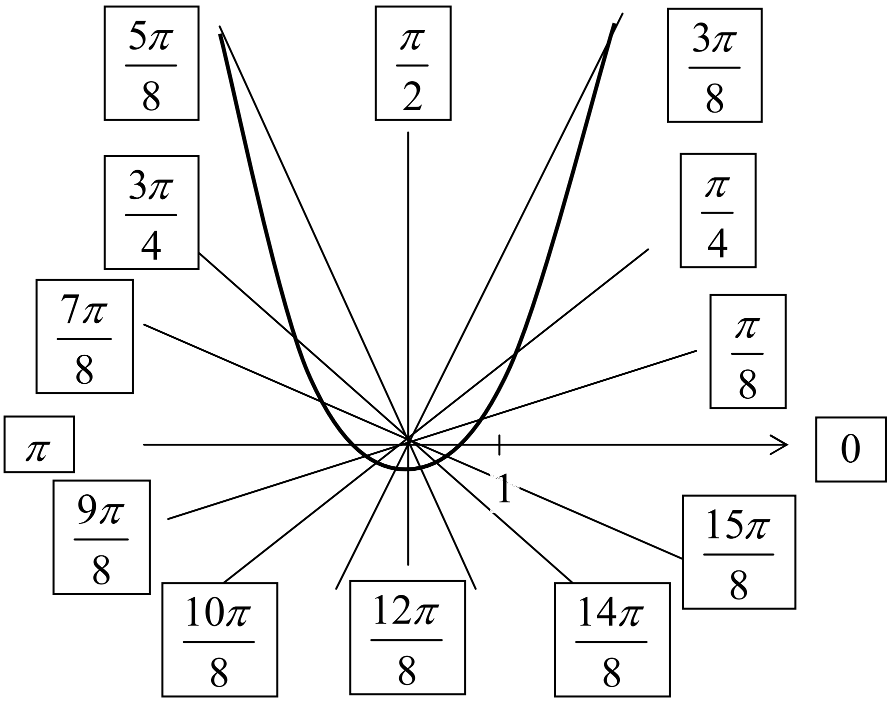


Рис. 3.14

Вторая часть задания сводится к переходу от полярного задания функции к декартовому. Выполним ряд преобразований, полагая, что: $\sin\ \varphi = \frac{y}{r}$, $\cos\ \varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Получим:

$$r = \frac{1}{2\left(1 - \frac{y}{r}\right)} \quad \Rightarrow \quad 2\left(r - y\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 2y\ ,$$

$$4x^2+4y^2=1+4y+4y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=y+\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2=y+0,25.$$

В декартовой системе координат линия – это парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $(0\,;\ -0,25)$.

При совмещении систем координат линии также совмещаются, что доказывает правильность построения.

3.3. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.3.1. Общее уравнение плоскости

Рассмотрим в пространстве плоскость α (рис. 3.15). Ее положение единственным образом определяется заданием нормального вектора $\vec{n}=(A;\,B;\,C)$, перпендикулярного плоскости α, и некоторой фиксированной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащей плоскости α.

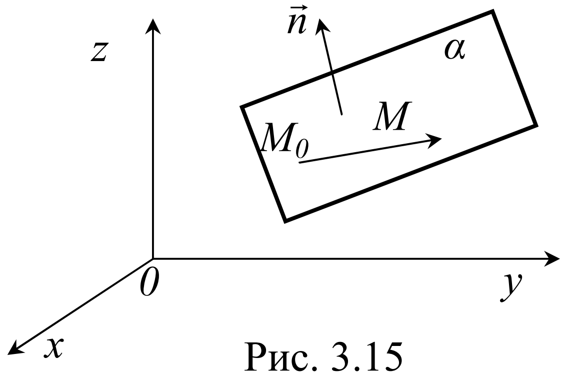


Рис. 3.15

Пусть точка $M(x,y,z)$ – текущая (произвольная) точка плоскости α. Вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$, лежащий в плоскости α, перпендикулярен нормальному вектору $\vec{n}$, поэтому их скалярное произведение $\overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$, или в координатной форме

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.25)$$

Это уравнение называется уравнением плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих плоскости. Координаты точек, не принадлежащих плоскости, не удовлетворяют этому уравнению, так как для них $\overline{M_0M} \cdot \vec{n} \neq 0$. После преобразований (3.25) получим:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Обозначим

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.26}$$

называется общим уравнением плоскости. Оно линейно относительно текущих координат, т.е. содержит x, y, z в первой степени. Числовые коэффициенты A, B, C являются декартовыми координатами нормального вектора и хотя бы один из них отличен от нуля.

Если в (3.26) свободный член $D = 0$, то уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz = 0$ и плоскость проходит через начало координат.

Если $D = 0$ и, например, $C = 0$, плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz. Координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz имеют соответственно уравнения: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

3.3.2. Построение плоскости

С помощью уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, если $D \neq 0$, можно найти координаты ее точек пересечения с осями: $M_1(-\frac{D}{A}, 0, 0)$, $M_2(0, -\frac{D}{B}, 0)$, $M_3(0, 0, -\frac{D}{C})$. К тому же результату придем, разделив уравнение (3.25) на $(-D)$: $\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$. Обозначив $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3.27}$$

где числа a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Ox, Oy, Oz от начала координат (рис. 3.16).

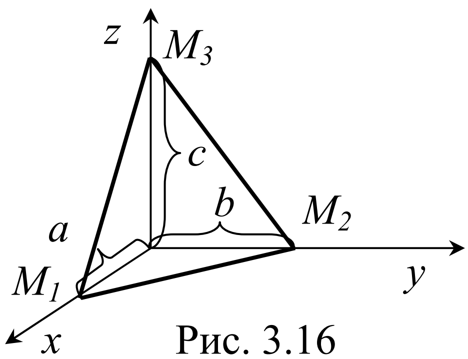


Рис. 3.16

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-2,3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$.

Решение. Здесь $A=2$, $B=-3$, $C=4$. На основании формулы (3.25) получим $2(x-1)-3(y+2)+4(z-3)=0$ или $2x-3y+4z-20=0$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точки $M_1(1,-1,0)$, $M_2(2,1,-3)$ и $M_3(-1,0,1)$ (рис. 3.17).

Решение. Уравнение плоскости будем искать в виде (3.25). Вместо точки M_0 возьмем точку M_1. Найдем координаты нормального вектора плоскости.

Так как векторы $\overline{M_1M_2}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\overline{M_1M_3}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ лежат в одной плоскости, то вектор $\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}$ перпендикулярен этой плоскости и его можно взять в качестве нормального вектора $\vec{n}$.

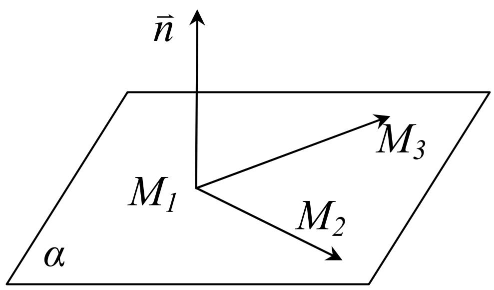


Рис. 3.17

$$\vec{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}.$$

Таким образом, $A=5$, $B=5$, $C=5$, и искомое уравнение примет вид:

$5(x-1)+5(y+1)+5(z-0)=0$ или $x+y+z=0$.

3.3.3. Угол между плоскостями

Рассмотрим две плоскости α_1 и α_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Под углом φ между плоскостями понимаем один из двугранных углов, образованных плоскостями (рис. 3.18). Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ плоскостей α_1 и α_2 равен одному из этих двугранных углов. По формуле (2.18) косинус угла между нормальными векторами равен

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \qquad (3.28)$$

или в координатной форме:

$$cos\,\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3.29)$$

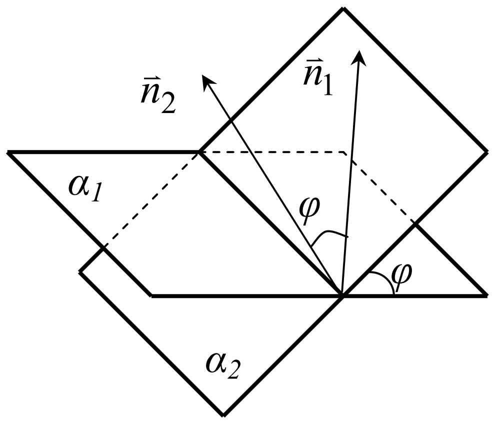


Рис. 3.18

Две плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ перпендикулярны. Полагая в (3.28) и (3.29) $cos\,\varphi = 0$, получаем условие перпендикулярности двух плоскостей

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0,\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.30)$$

Две плоскости α_1 и α_2 параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны. Условие параллельности двух плоскостей есть условие коллинеарности их нормальных векторов (2.12):

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.31)$$

<u>Пример 1</u>. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M(-2;1;4)$ параллельно плоскости α_1: $3x+2y-7z=0$.

Решение. Плоскости α и α_1 параллельны, значит в качестве нормального вектора $\vec{n}$ плоскости α можно взять любой вектор, коллинеарный $\vec{n}_1$, в частности сам вектор $\vec{n}_1$. Таким образом, $A=3$, $B=2$, $C=-7$ и уравнение искомой плоскости согласно (3.25) примет вид $3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$ или $3x+2y-7z+32=0$.

<u>Пример 2</u>. Через $M(-2;3;6)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскостям α_1: $2x+3y-2z-4=0$ и α_2: $3x+5y+z=0$.

Решение. Уравнение плоскости будем искать в виде (3.25). Плоскости α_1 и α_2 имеют соответственно нормальные векторы $\vec{n}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{n}_2=3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$. Вследствие условия перпендикулярности плоскостей нормальный вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ искомой плоскости должен быть перпендикулярен векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Поэтому за вектор $\vec{n}$ можно взять векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=13\vec{i}-8\vec{j}+\vec{k}.$$

Следовательно, $A=13$, $B=-8$, $C=1$. Подставляя найденные значения A, B, C в уравнение (3.25), получим уравнение искомой плоскости: $13(x+2)-8(y-3)+1(z-6)=0$ или $13x-8y+z+44=0$.

3.3.4. Точка пересечения трех плоскостей

Координаты этой точки находятся из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{cases},$$

каждое из которых представляет собой общее уравнение одной из рассматриваемых плоскостей. Система имеет единственное решение, если плоскости пересекаются в одной точке, то есть определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

<u>Пример</u>. Найти точку пересечения плоскостей

$$x + y - 2z + 3 = 0,\ \ 2x - 2y + 3z - 7 = 0,\ \ x + 3y - z - 4 = 0.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 7 = 0, \\ x + 3y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

найдем координаты точки пересечения плоскостей: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

3.3.5. Расстояние от точки до плоскости

Известно общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Требуется найти расстояние от точки до плоскости.

Рассуждая аналогично п. 3.1.4, где было получено расстояние от точки до прямой, можно записать:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.32}$$

<u>Пример</u>. Найти расстояние от точки $M(1;\, 0;\, -2)$ до плоскости $2x - y + 2z - 4 = 0$.

Решение. Подставим в формулу (3.32) значения: $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = -4$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = -2$, получим:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

3.3.6. Канонические уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве единственным образом определяется заданием некоторой фиксированной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющего вектора $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$, параллельного этой прямой или лежащего на ней (рис. 3.19). Рассмотрим произвольную (текущую) точку $M(x, y, z)$ на прямой l.

По правилу сложения векторов: $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1M}$, откуда

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} \qquad (3.33)$$

Вектор $\overline{M_1M}$ лежит на прямой l и коллинеарен направляющему вектору $\vec{s}$, поэтому $\overline{M_1M} = t\vec{s}$, где t – скалярный множитель, называемый параметром.

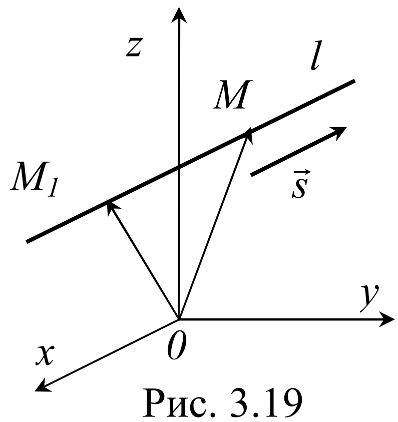


Рис. 3.19

Представим уравнение (3.33) в координатной форме, зная, что $\overrightarrow{M_1M} = t \cdot \vec{s} = (tm; tn; tp)$, $\overline{OM} = (x; y; z)$, $\overline{OM_1} = (x_1; y_1; z_1)$. Тогда:

$$\begin{cases} tm = x - x_1 \\ tn = y - y_1 \\ tp = z - z_1 \end{cases} \qquad (3.34)$$

Выразим в системе (3.34) x, y, z, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases}. \qquad (3.35)$$

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (3.34), получим $t = \dfrac{x - x_1}{m}$, $t = \dfrac{y - y_1}{n}$, $t = \dfrac{z - z_1}{p}$. Приравняв правые части этих выражений, получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \qquad (3.36)$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(3, 0, -4)$ и параллельной вектору $\vec{s} = (2, -5, 0)$.

Решение. В каноническом виде уравнение (3.36) будет следующим: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-0}{-5}=\frac{z+4}{0}$. В параметрической форме (3.35) уравнение этой же прямой примет вид: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-5t \\ z=-4 \end{cases}$.

3.3.7. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ возьмем вектор $\overline{M_1M_2}$, то есть

$\vec{s}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$. Тогда из уравнения (3.36) получим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.38}$$

3.3.8. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности

Пусть в пространстве даны две прямые $l_1\!:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $l_2\!:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

За угол между двумя прямыми принимают один из смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-нибудь точку пространства. Один из смежных углов равен углу φ между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ данных прямых. Так как $\vec{s}_1=m_1\vec{i}+n_1\vec{j}+p_1\vec{k}$, $\vec{s}_2=m_2\vec{i}+n_2\vec{j}+p_2\vec{k}$, то по формуле (2.18) для косинуса угла между векторами получим

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.39}$$

Условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 равносильно условию перпендикулярности их направляющих векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0, \tag{3.40}$$

3.3.9. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности

Рассмотрим прямую $l: \ \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ и плоскость $П: \ Ax + By + Cz + d = 0$ (рис. 3.20).

В общем случае угол между ними равен α. Угол φ между вектором нормали плоскости $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ и направляющим вектором прямой $\vec{s} = (m;\ n;\ p)$ равен $\varphi = 90 - \alpha$. Известно, что $cos\,\varphi = cos(90 - \alpha) = sin\,\alpha$.

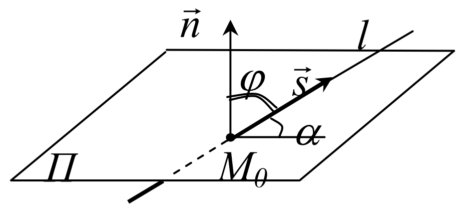


Рис. 3.20

По выражению (2.18): $cos\,\varphi = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$.

Приравнивая правые части, получаем:

$$sin\,\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{3.41}$$

Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{s} = m \cdot \vec{i} + n \cdot \vec{j} + p \cdot \vec{k}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}$ коллинеарны. Следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \tag{3.42}$$

Прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{n}$ ортогональны, то есть

$$m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C = 0. \tag{3.43}$$

Формулы (3.42) и (3.43) есть условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости соответственно.

3.3.10. Точка пересечения прямой и плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой $l: \ \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ с плоскостью $\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0$.

Пример. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ с плоскостью $2x + 3y - 2z = 0$.

Решение. Так как: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2} = t$, откуда:

$$\begin{cases} x - 1 = 2t \\ y + 1 = 3t \\ z - 5 = 2t \end{cases}.$$

Выразим x, y, z и получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 1. \\ z = 2t + 5. \end{cases}$$

Подставим эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости $2(2t+1) + 3(3t-1) - 2(2t+5) + 2 = 0$. Найдем $t = 1$.

Подставляя в параметрические уравнения прямой значение $t = 1$, получим $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$ $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2,$ $z = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$

Итак, прямая и плоскость пересекаются в точке $M(3, 2, 7)$.

3.4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

3.4.1. Цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная параллельным перемещением прямой l (образующей) вдоль некоторой кривой L (направляющей), называется цилиндрической (рис. 3.21а).

Найдём уравнения цилиндрических поверхностей с образующимися, параллельными координатным осям.

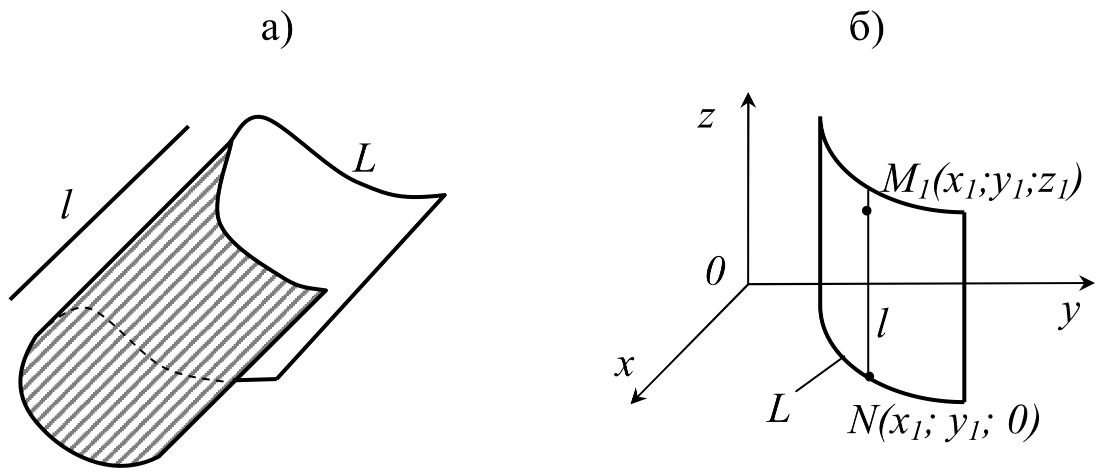


Рис. 3.21

Пусть l параллельна оси Oz, уравнение кривой L: $F(x;\ y) = 0$ (рис. 3.21б). Возьмём любую точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на цилиндрической поверхности, проведём через неё образующую l. Обозначим через N точку пересечения этой образующей l и линии L. Так как N – проекция точки M_1 на плоскость Oxy, то координаты x и y этих точек одинаковы, следовательно, координаты N: $x = x_1$, $y = y_1$, $z = 0$. Так как точка N лежит на L, то её координаты удовлетворяют уравнению этой кривой, то есть $F(x_1;\ y_1) = 0$. Следовательно, этому уравнению удовлетворяют и координаты точки M_1, так как уравнение не содержит переменной z.

Итак, не содержащее z, уравнение $F(x;\ y) = 0$ в пространстве является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей L, которая в плоскости Oxy задаётся уравнением $F(x;\ y) = 0$. На рис. 3.22 приведены и другие случаи.

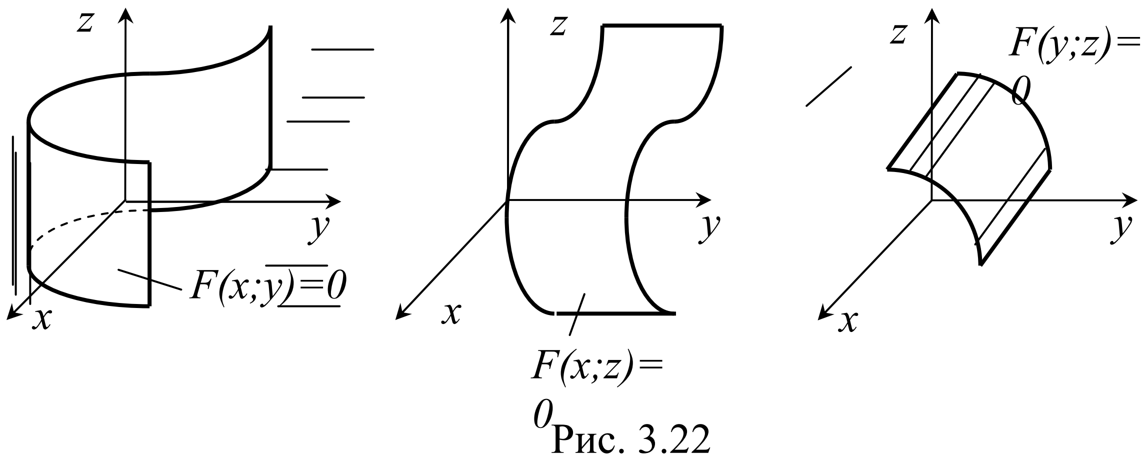


Рис. 3.22

Если в уравнении поверхности отсутствуют две координаты, то она параллельна двум координатным осям, то есть параллельна координатной плоскости.

Пример. Построить поверхности, заданные уравнениями:

$$а)\quad z^2 = 2py;\quad б)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;\quad в)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение. По данным уравнениям строим плоские кривые и проводим образующие прямые, параллельные той оси, координата которой отсутствует в уравнении (рис. 3.23).

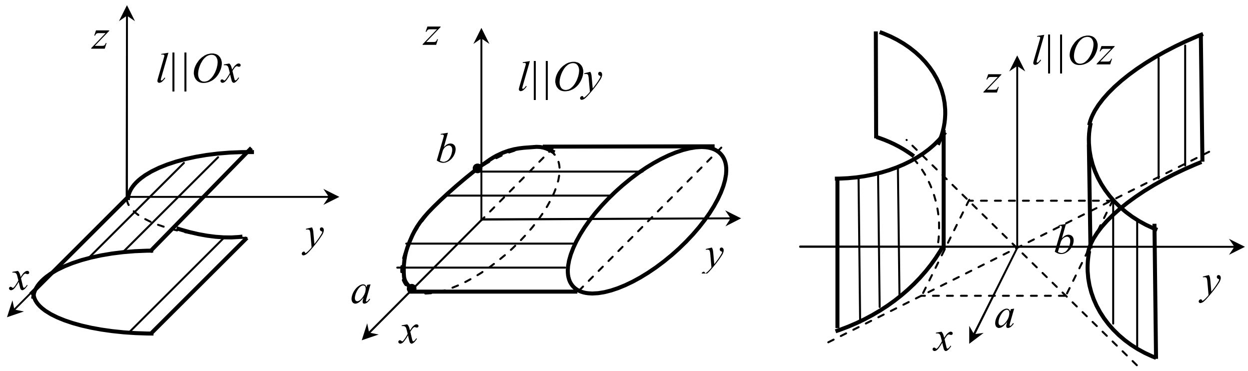


Рис. 3.23

3.4.2. Эллипсоид. Сфера

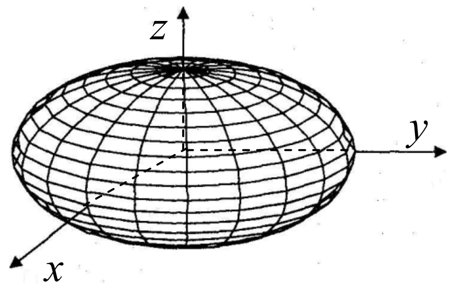


Рис. 3.24

Уравнение эллипсоида с центром в начале координат (рис. 3.24) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Положительные числа a, b и c называются *полуосями* эллипсоида.

Если $a = b = c$, то эллипсоид является сферой радиуса a.

3.4.3. Однополостной гиперболоид

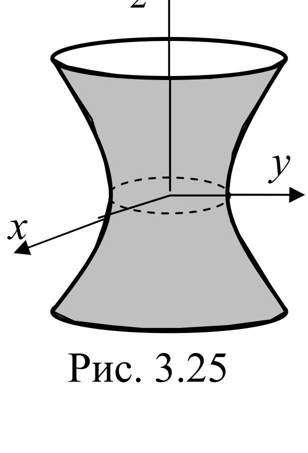


Рис. 3.25

Уравнение однополостного гиперболоида, вытянутого вдоль оси Oz (рис. 3.25), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.45)$$

3.4.4. Двуполостной гиперболоид

Если вершины гиперболоида расположены вдоль оси Oz (рис. 3.26), то его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3.46)$$

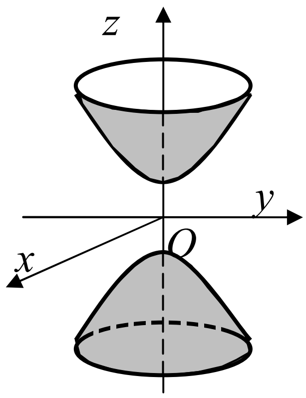


Рис. 3.26

3.4.5. Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид, вытянутый вдоль оси Oz (рис. 3.27), имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \qquad (3.47)$$

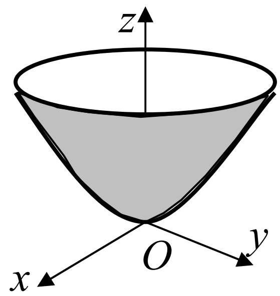


Рис. 3.27

3.4.6. Конус

Уравнение конуса, вытянутого вдоль оси Oz (рис. 3.28), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (3.48)$$

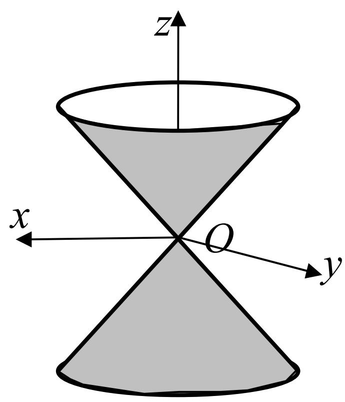


Рис. 3.28

3.4.7. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид – седлообразная поверхность (рис. 3.29), которая имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z. \qquad (3.49)$$

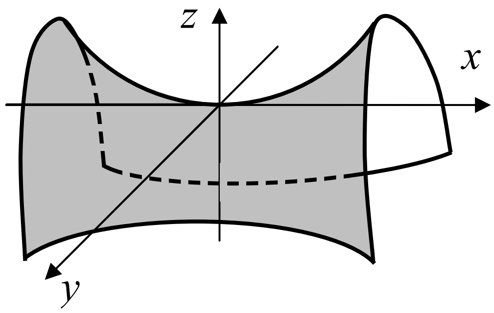


Рис. 3.29

Глава 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Общие представления о функции одной переменной

4.1.1. Понятие функции одной переменной и способы ее задания

Функцией называется закон или правило, по которому каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

При этом x называется независимой переменной или аргументом, y **–** зависимой переменной или функцией, множество X или $D(f)$ - областью определения функции, а множество Y или $E(f)$ - областью значений. Можно сказать, что функция f осуществляет отображение множества X в множество Y, то есть $X \to Y$. Значение функции при фиксированном $x = x_0$ равно $f(x_0) = y_0$, оно называется частным значением функции.

Пример. Задана функция $y = f(x) = 2x + 3$, найти $f(4)$.

Решение. Подставим в выражение функции $x = 4$: $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Зададим две оси: ось Ox – ось абсцисс и ось Oy – ось ординат, которые определяют координатную плоскость. Задавая различные значения x, и рассчитав соответствующие значения $y = f(x)$, получим множество точек $M(x;\, y)$, которые можно изобразить на координатной плоскости. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Способы задания функции.

1. Аналитический способ – с помощью формулы.

Например, $y = 3x^2 + 1$, $y = sin\, x$, $y = 2\pi x$ и т.п. – это функции, заданные формулами.

2. Табличный способ – с помощью таблицы. Примером являются таблицы Брадиса.

3. Графический способ – с помощью графика. Например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют самопишущий прибор-барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой изменение давления в зависимости от высоты.

4.1.2. Область определения

Областью определения функции называется совокупность значений независимой переменной, при которой эта функция определена. Если функция задана, формулой (аналитически), то область определения находится из нее. При этом существуют следующие ограничения:

1) $y = \dfrac{1}{\varphi(x)}, \;\; \varphi(x) \neq 0;$ 2) $y = \sqrt[2n]{\varphi(x)}, \;\; \varphi(x) \geq 0;$

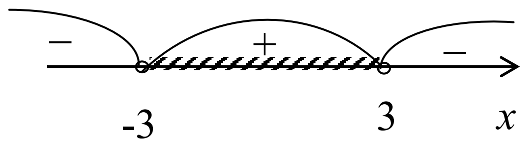
2) $y = log_a \varphi(x), \;\; \varphi(x) \succ 0;$ 4) $\begin{array}{l} y = arcsin\, \varphi(x), \\ y = arccos\, \varphi(x), \;\; |\varphi(x)| \leq 1. \end{array}$

Пример 1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Решение. Учитывая ограничения 1) и 2), запишем: $9 - x^2 > 0$. Найдем корни: $9 - x^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x^2 = 9 \;\; \Rightarrow \; x = \pm 3$.

Отложим корни на числовой оси и определим знаки в интервалах.

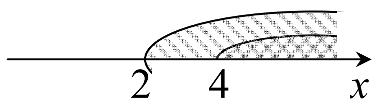
Выбираем нужный интервал: $x \in (-3; 3)$.



Пример 2. Найти область определения функции $y = \sqrt{x - 4} + log_3(x - 2)$.

Решение. Учтем ограничения 2) и 3), а также то, что областью определения является общая часть тех числовых множеств, при которых существуют оба слагаемых:

$$D = \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4.$$



4.1.3. Сложная и обратная функции

Сложная функция. Если $y = f(u), \; u \in U$, а $u = \varphi(x), \; x \in X$, то зависимая переменная y называется сложной функцией или композицией функций и записывается в виде $y = f(\varphi(x))$. При этом

x является независимой переменной, а u – промежуточной переменной.

Пример 1. $y = sin^2(2x+1)$ является сложной функцией двух промежуточных аргументов u и t, $y = u^2$, где $u = sin\,t$, $t = 2x+1$.

Обратная функция. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие $y = f(x)$, при котором каждый элемент $y \in Y$ является образом одного и только одного элемента $x \in X$, и наоборот. Тогда можно, считая y аргументом, вычислять соответствующие значения x то есть значения функции $x = f^{-1}(y)$.

Пример 2. Функция $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ задаёт зависимость объёма шара V от его радиуса R. Разрешив это уравнение относительно радиуса, получим обратную функцию $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Придерживаясь стандартных обозначений, под x понимаем независимую переменную, а под y функцию. В таком случае обратную функцию следует записать в виде $y = f^{-1}(x)$.

Пример 3. Найти обратную функцию к функции $y = 2^x$.

Решение. Выразим x: $x = log_2 y$, так как независимая переменная обозначается как x, а функция – как y, то получим $y = log_2 x$. Таким образом, функции $y = 2^x$ и $y = log_2 x$ являются взаимно обратными.

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график обратной функции $y = f^{-1}(x)$, нужно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 4.1).

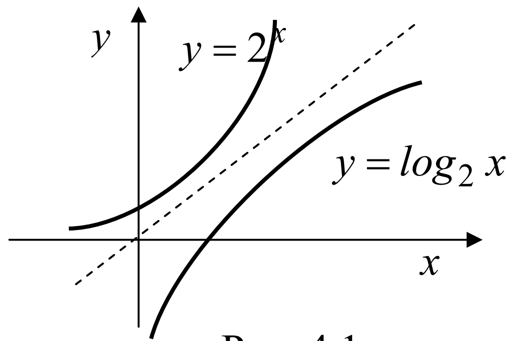


Рис. 4.1

4.1.4. Характеристики поведения функции

1) *Чётность и нечётность*

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D$ выполняется условие

$$f(-x) = f(x). \tag{4.1}$$

Например, функции $y = x^2$, $y = \sqrt{x^2 - 3}$, $y = cos\,x$ являются четными. График четной функции симметричен относительно оси OY, например, график $y = x^4$ (рис. 4.2).

Функция называется *нечетной*, если для любого $x \in D$ выполняется

$$f(-x) = -f(x). \tag{4.2}$$

Примерами нечетной функции являются $y = x^3$, $y = sin\,x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат, например график $y = 2x^3$ **(**рис. 4.3).

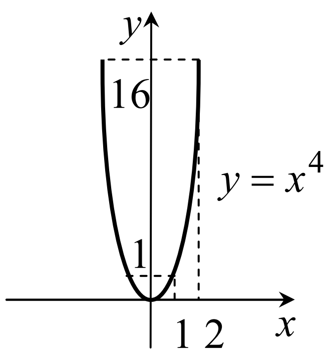


Рис. 4.2

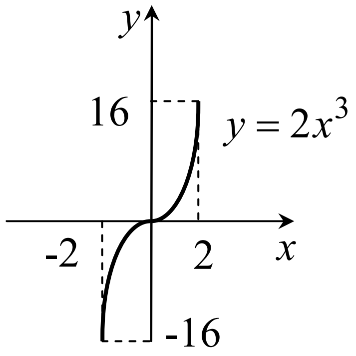


Рис. 4.3

Функции, не удовлетворяющие соотношениям (4.2) и (4.3), называются функциями общего вида.

Следует заметить, что произведение двух чётных, а также двух нечётных функций даёт функцию чётную, а произведение чётной на нечётную – нечётную. Например, функция $y = x \cdot sin\,x$ – чётная, а $y = x \cdot cos\,x$ – нечётная.

<u>Пример 1.</u> Проверить функцию $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ на четность-нечетность.

Решение. Подставим в формулу вместо x значение $(-x)$, то есть найдем $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -\dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$. Перед выражением появился знак «минус», то есть $f(-x) = -f(x)$. Эта функция – нечетная (4.2).

2) *Периодичность*

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число *T*, что при любом значении $x \in D$ выполняется равенство:

$$f(x+T) = f(x). \tag{4.3}$$

Наименьшее число *T*, удовлетворяющее данному условию, называется периодом функции.

Например, функции $y = sin\,x$, $y = cos\,x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$; функции $y = tgx$, $y = ctgx$ имеют период $T = \pi$.

<u>Пример 2</u>. Найти период функции $y = sin\,2x$.

Решение. График функции $y = sin\,2x$ получается из графика $y = sin\,x$ сжатием в два раза вдоль оси абсцисс (рис. 4.4). Так как для $y = sin\,x$ период $T = 2\pi$, то у функции $y = sin\,2x$ период в два раза меньше, $T = \pi$.

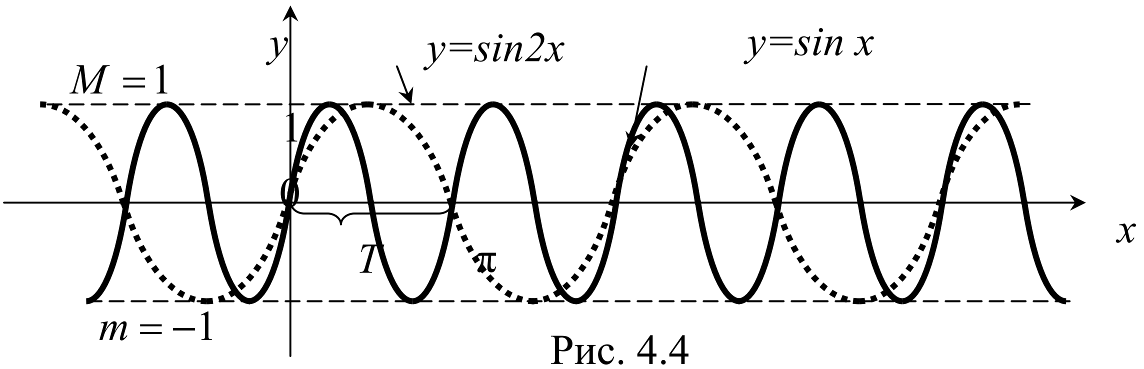


Рис. 4.4

3) *Ограниченность*

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на $[a,b]$, если существует такое число *M*, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется условие:

$$f(x) \le M. \tag{4.4}$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на $[a,b]$, если существует такое число *m*, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется условие:

$$f(x) \ge m. \tag{4.5}$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* сверху и снизу на $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется условие

$$m \le f(x) \le M. \tag{4.6}$$

График такой функции располагается между горизонтальными прямыми $y = m$ и $y = M$. Примерами функций, ограниченных на всей области определения, являются $y = sin\,x$, $y = sin\,2x$, здесь $-1 \le f(x) \le 1$ (см. рис. 4.2).

4) *Возрастание, убывание*

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если большему значению аргумента *x* соответствует большее значение функции *y*. То есть, при $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_2)$ (Рис. 4.5а).

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей,* если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. При $x_2 > x_1$, выполняется $f(x_2) < f(x_1)$(Рис. 4.5б).

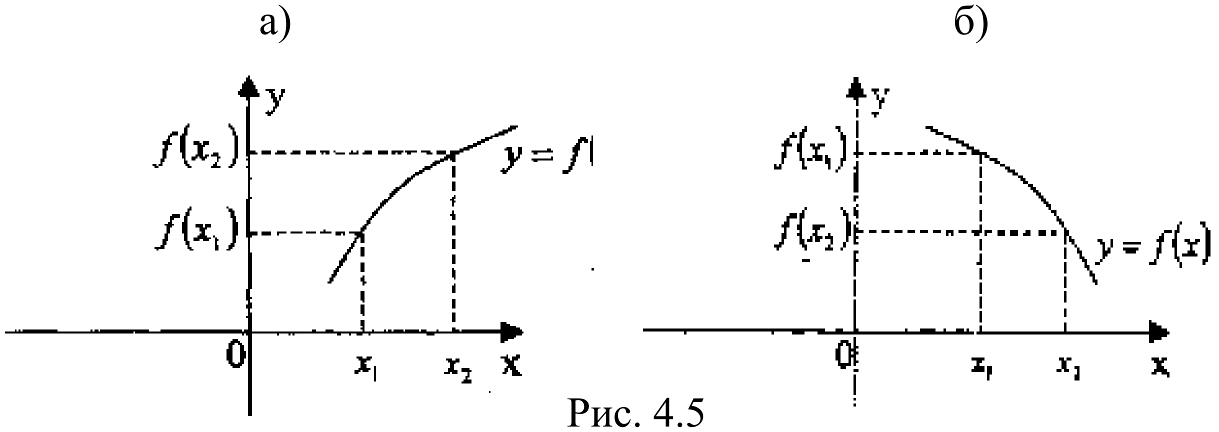


Рис. 4.5

Такие функции называются монотонными.

Если функция не является монотонной, то выделяют интервалы монотонности. Например, функция $y = x^4$ является убывающей на множестве $x = (-\infty, 0)$, а на множестве $x = (0, +\infty)$ эта функция является возрастающей (см. рис. 4.2).

4.1.5. Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная **функция** $y = x^{\alpha}$.

а) $n = 1$. Линейная функция $y = kx + b$ (рис. 4.6).

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in (-\infty;+\infty)$.

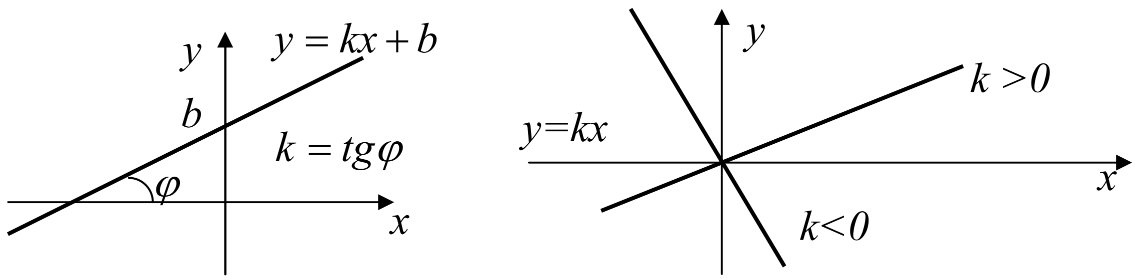


Рис. 4.6

б) n – целое**,** $n > 1$ (рис. 4.7).

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$, область значений $y \in [0;+\infty)$ при n четном (рис. 4.5а)., или $y \in (-\infty;+\infty)$ при n нечетном (рис. 4.5б).

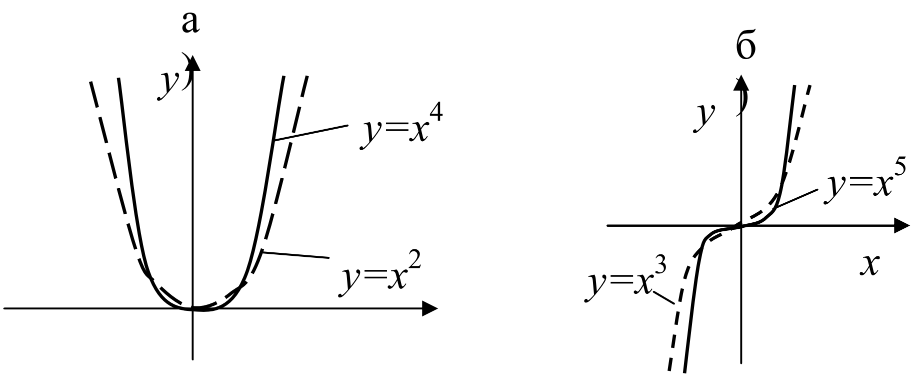


Рис. 4.7

в) n – целое**,** $n < 1$ (рис. 4.8).

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$, область значений $y \in [0;+\infty)$ при n четном (рис. 4.8а), или $y \in (-\infty;+\infty)$ при n нечетном (рис. 4.8б).

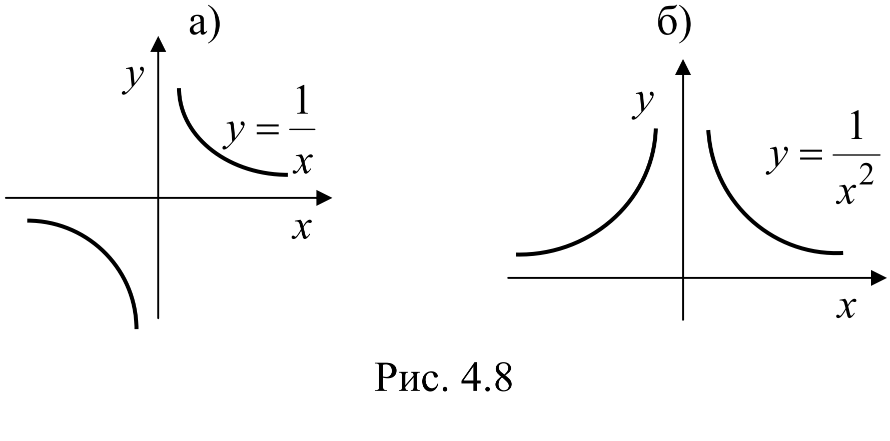


Рис. 4.8

г) n – дробное (рис. 4.9).

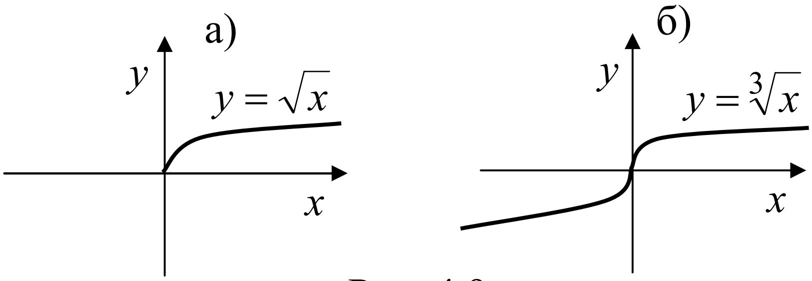


Рис. 4.9

2. Показательная **функция** $y=a^x, (a>0, a\neq 1)$ (рис. 4.10).

Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значений $y\in(0;+\infty)$.

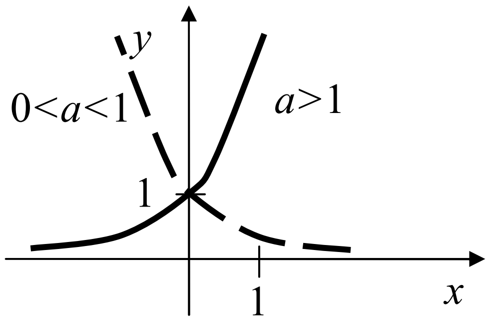


Рис. 4.10

3. Логарифмическая **функция** $y=log_\alpha x\,(a>0, a\neq 1)$ (рис. 4.11). Область определения $x\in(0;+\infty)$. Область значений $y\in(-\infty;+\infty)$.

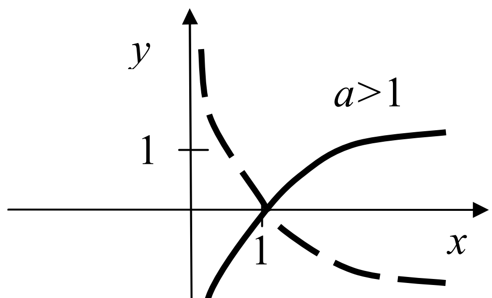


Рис. 4.11

4. Тригонометрические **функции**

а) $y = \sin x$ (рис.4.12а). Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in [-1;\ \ 1]$. Периодическая, с периодом $T = 2\pi$. Нечетная.

б) $y = \cos x$ (рис.4.12б). Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in [-1;\ \ 1]$. Периодическая, с периодом $T = 2\pi$. Четная.

в) $y = tgx$ (рис.4.12в). Область определения $x \in R$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Область значений $y \in (-\infty;+\infty)$. Периодическая, с периодом $T = \pi$. Нечетная.

г) $y = ctgx$ (рис.4.120г). Область определения $x \in R$, $x \neq \pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Область значений $y \in (-\infty;+\infty)$. Периодическая, с периодом $T = \pi$. Четная.

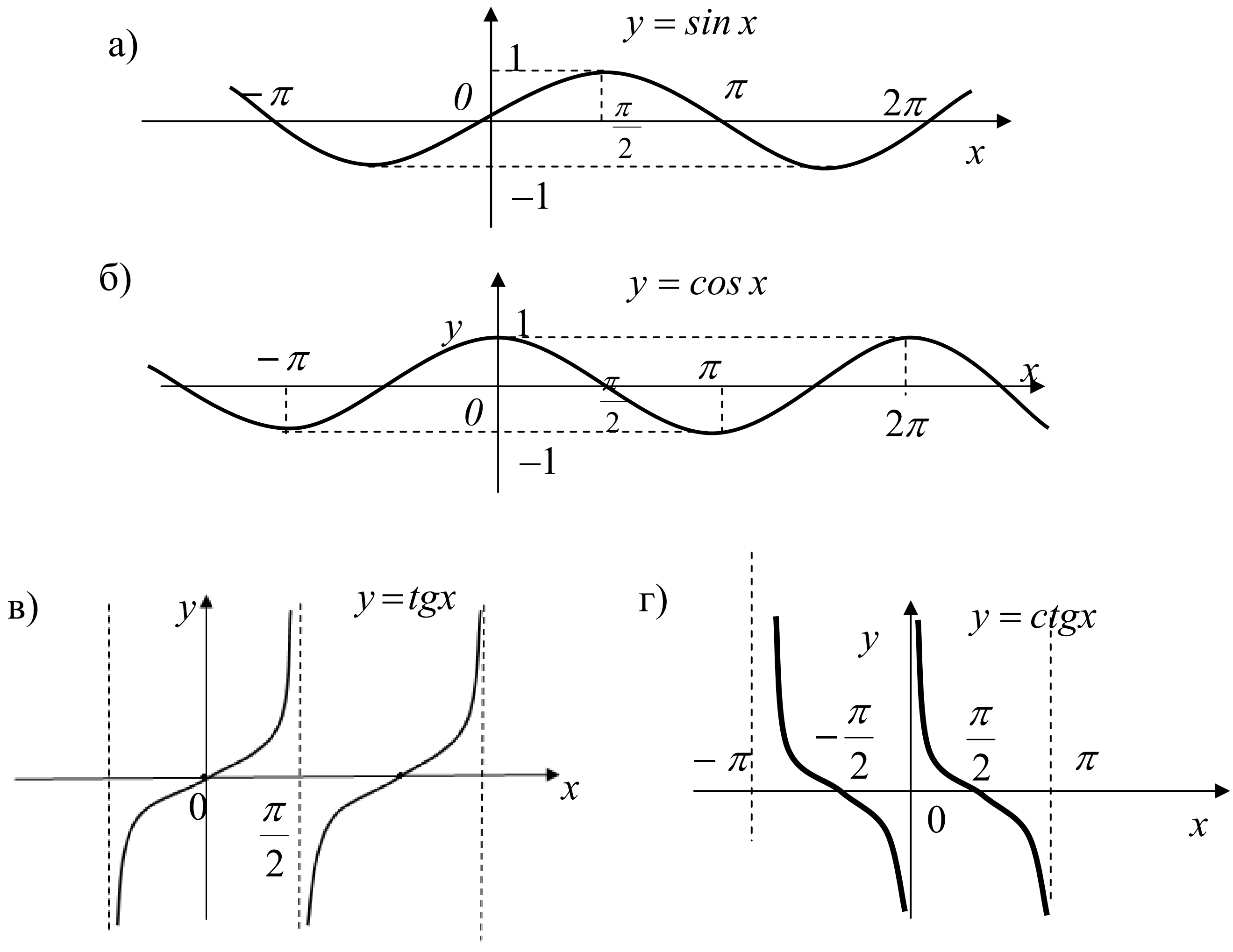


Рис. 4.12

5. *Обратные тригонометрические* функции:

а) $y = arcsin\,x$ (Рис. 4.13а). Область определения $x \in [-1;1]$. Область значений $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Нечетная.

б) $y = arccos\,x$ (Рис. 4.13б). Область определения $x \in [-1;1]$.. Область значений $y \in [0;\pi]$.

в) $y = arctgx$ (Рис. 4.13в). Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Нечетная, возрастающая.

г) $y = arcctgx$ (Рис. 4.13г). Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in (0;\pi)$, убывающая.

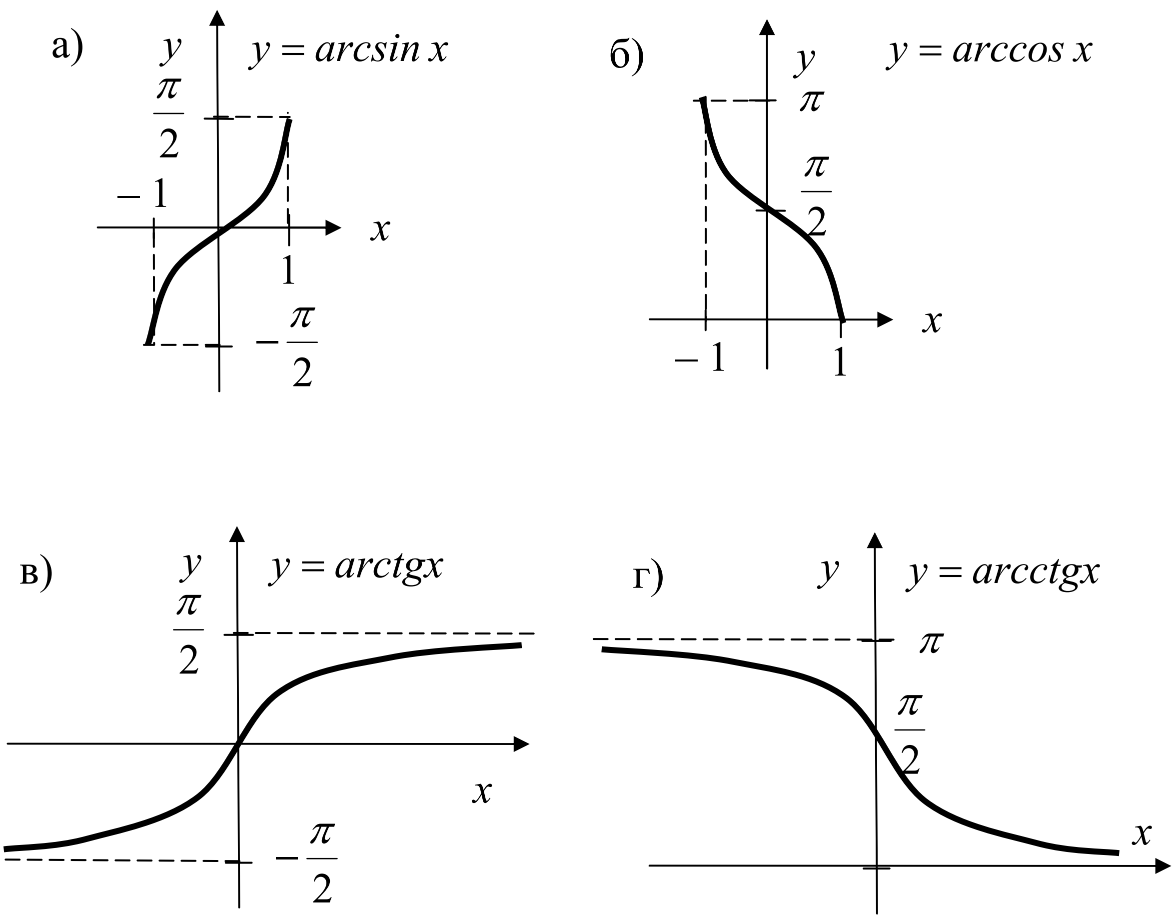


Рис. 4.13

Элементарной называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций взятия функции от функции, последовательно применённых конечное число раз. Например: $y = 2^{\sqrt{cos\,x}} + lg\,x,\ \ y = sec\,x,$ так как $sec\,x = \dfrac{1}{cos\,x}$.

Пример неэлементарной функции:

$$y = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ -x, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 4.14.

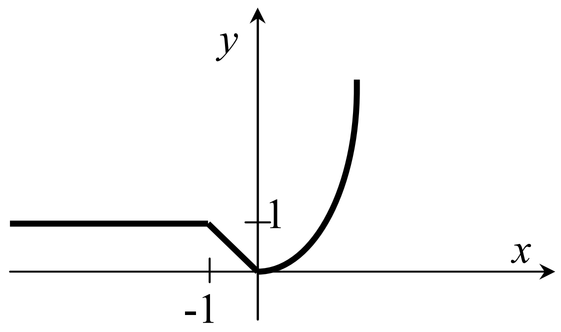


Рис. 4.14

4.2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

4.2.1. Предел функции на бесконечности

Рассмотрим функцию $y = 4 - \dfrac{1}{x}$ на интервале $]0, \infty[$.

Составим таблицу значений и построим график (рис. 4.15).

Таблица 4.1

x	1	2	3	10	100	1000	...
$f(x)$	3	3,5	3,7	3,9	3,99	3,999	...

Рассмотрим расстояние между точками графика $y = f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ и прямой $y = 4$: $d = |f(x) - 4| = \left|\left(4 - \frac{1}{x}\right) - 4\right| = \frac{1}{|x|}$.

Зададим это расстояние $d = \varepsilon$ и рассчитаем *x***.**

Если $\varepsilon = \frac{1}{|x|}$, то $|x| = \frac{1}{\varepsilon}$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}1$ $x = 10$ и $|f(x) - 4| < 0{,}1$.

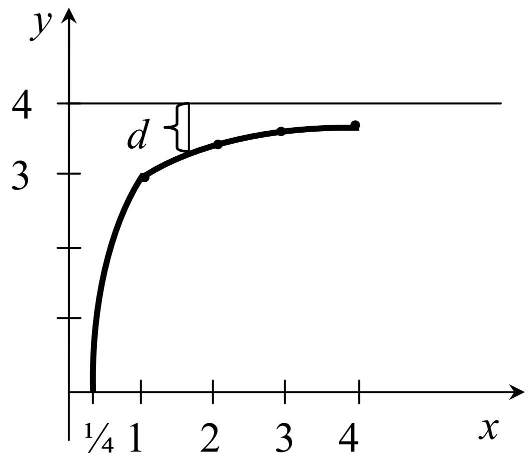


Рис. 4.15

При $\varepsilon = 0{,}01$ $|f(x) - 4| < 0{,}01$, начиная с $x > 100$.

Таким образом, можно задать какую угодно степень близости функции к числу 4, которое является её пределом при $x \to \infty$.

Число *A* называется пределом *f(x)* при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, существует такое число $N > 0$, зависящее от ε, что для $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение предела функции при $x \to -\infty$.

Число *B* называется пределом функции *f(x)* при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x < -M$ справедливо неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.

4.2.2. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы

Если при произвольном и неограниченном приближении аргумента x к значению x_0 соответствующие значения *f(x)* неограниченно близко подходят к числу A, то говорят, что A является пределом функции *f(x)* в точке x_0 (или при $x \to x_0$). При этом в самой точке x_0 значение функции *f(x)* может и не существовать.

Дадим строгое определение предела *f(x)* при $x \to x_0$.

Число A называется пределом *f(x)* в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Иногда приходится рассматривать пределы *f(x)* при условии, что x приближается к x_0 , оставаясь только слева (то есть при $x < x_0$) или только справа (при $x > x_0$). Такие пределы называются односторонними.

Число A называется левосторонним пределом *f(x)* в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Обозначается: $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$

Аналогично определяется правосторонний предел *f(x)* в точке x_0, который обозначается: $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

4.2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой (б.м.) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \qquad (4.7)$$

Другими словами $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, то есть $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $\boldsymbol{x}$ достаточно близких к x_0.

Аналогично определяются б.м. при $x \to \pm x_0$ и при $x \to \pm\infty$.

<u>Пример 1</u>. $y = 4 - \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \dfrac{1}{4}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \ . \tag{4.8}$$

<u>Пример 2</u>. Функция $y = tgx$ является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$ (см. рис. 4.10в). Эта же функция является бесконечно малой при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} tgx = 0$.

4.2.4. Свойства бесконечно малых и их связь с бесконечно большими

1^0. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

2^0. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.

Свойство справедливо для любого конечного числа таких сомножителей.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой величиной.

3^0. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно большая, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно малая.

<u>Пример</u>. Функция $y = ctgx$ – бесконечно малая при $x \to \frac{\pi}{2}$, $ctgx = \frac{1}{tgx}$, а $y = tgx$ – бесконечно большая при $x \to \frac{\pi}{2}$.

4.2.5. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если функция имеет предел, равный A (при $x \to x_0$), то её можно представить как сумму A+б.м. (при $x \to x_0$).

Теорема 2. Если *f(x)* представлена в виде суммы числа *A* и бесконечно малой функции, то число *A* является пределом *f(x)*.

Теорема 3. Предел постоянной равен ей самой, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема 4. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ при $x \to x_0$ имеют пределы *A* и *B*, то функции $y = f(x) \pm \varphi(x)$, $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, $B \neq 0$ имеют при этом пределы, соответственно равные $A \pm B$, $A \cdot B$, $\dfrac{A}{B}$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = A^n$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$, ($A > 0$ для *n* – чётных).

Теорема 5. Пусть даны три функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ в промежутке $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Если функции $\varphi(x)$, $g(x)$ имеют один и тот же предел при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, то и функция $f(x)$, заключённая между ними, имеет тот же предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4.2.6. Нахождение пределов

Для всех элементарных функции в точке x_0 из области определения значение функции равно пределу функции. Поэтому, для нахождения предела функции следует подставить значение предельной точки в выражение функции. Если получено число, то оно и является пределом функции. Если получена неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty \right)$, то она раскрывается с помощью специальных приемов.

Рассмотрим нахождение пределов при $x \to x_0$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to -2}\frac{6x^2+3x+1}{x^2-x-3}==\frac{6(-2)^2+3(-2)+1}{(-2)^2-(-2)-3}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x+2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{14}{0}\right)=\infty.$$

Пример 3.

$$.\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0}{4}=0.$$

Пример 4.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Это неопределённость. Чтобы раскрыть её, разложим числитель и знаменатель на множители.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\frac{8}{3}.$$

Итак, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{A}{B}, & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B;\\ \infty, & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0;\\ 0, & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B;\\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}, & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0.\end{cases}$$

При получении неопределённости $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ нужно разложить на множители.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\langle\begin{matrix}\text{домножим числитель и знаменатель}\\ \text{на множитель, сопряженный к числителю}\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Рассмотрим вычисление пределов при $x\to\infty$.

Пример 6.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{5x^3+6x-1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, разделим числитель и знаменатель на x в высшей степени, то есть на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^3+6x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3/x^2+4/x^3}{5+6/x^2-1/x^3}=\frac{0}{5}=0,\text{ так как}$$

$$\lim_{x\to\infty}3/x^2=\lim_{x\to\infty}4/x^3=\lim_{x\to\infty}6/x^2=\lim_{x\to\infty}1/x^3=0.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+8x-3}{7x^2+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+8/x^3-3/x^4}{7/x^2+9/x^4}=\left\{\frac{2}{0}\right\}=\infty.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{7x^2+2x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+3/x-1/x^2}{7+2/x-8/x^2}=\frac{4}{7}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0,\text{ если } n<k;\\ \infty,\text{ если } n>k;\\ a_k/b_k,\text{ если } n=k.\end{cases}$

Пример 9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\left\{\frac{-4}{\infty}\right\}=0.$$

4.2.7. Первый замечательный предел

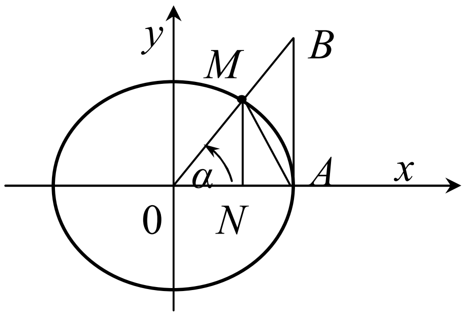


Рис. 4.16

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \qquad (4.9)$$

Доказательство. Рассмотрим для круга с радиусом OA=1 дугу АМ, радиальная мера которой равна α (рис. 4.16). При этом $AB = tg\alpha$, $NM = \sin\alpha$, (в силу чётности функции $y = \frac{\sin x}{x}$ можно рассматривать только случай $\alpha > 0$).

Так как $S_{\Delta OAM} < S_{сек} < S_{\Delta OAB}$, где $S_{сек}$ – площадь сектора OAM, то есть $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}tg\alpha$, то $\sin\alpha < \alpha < tg\alpha$. Поделив обе части неравенства на $\sin\alpha > 0$, получим: $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$. И так как $\lim_{\alpha \to 0} 1 = 1$, $\lim_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1$, то из теоремы 5 следует равенство (4.9).

<u>**Пример 1.**</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

<u>**Пример 2.**</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} == \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \sin\frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

4.2.8. Второй замечательный предел

Рассмотрим функцию натурального аргумента $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Таблица значений этой функции показывает, что $2 < y < 3$.

Таблица 4.2

n	1	2	3	4	...	10	...	100	...	1000	...
y	2	2,25	2,37	2,44	...	2,53	...	2,705	...	2,707	...

В полных курсах математического анализа доказывается, что предел этой функции (числовой последовательности) при $x \to \infty$ равен числу $e = 2{,}7182818...$. Это число является основанием натуральных логарифмов $ln\, a = log_e\, a,$ причем $lg\, a = 0{,}4343\, ln\, a$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4.10}$$

Эта форма второго замечательного предела справедлива и для действительного аргумента, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Положив $x = \dfrac{1}{\alpha}$, откуда $\alpha = \dfrac{1}{x}$, получим другую форму второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\alpha} = e. \tag{4.11}$$

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности $\left(1^{\infty}\right)$.

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right) = \left(1^{\infty}\right) = \left[\lim_{\frac{x}{k}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k.$$

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)+5}{x-3}\right]^x =$$

$$\left\{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{5}{x-3}\right]^{\frac{x-3}{5}}\right\}^{\frac{5}{x-3}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{3}{x}}} = e^5.$$

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)\right]=\lim_{x\to\infty} ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=ln\, e=1.$$

4.2.9. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определения. Пусть α и β бесконечно малые при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$), тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$называется бесконечно малой более высокого порядка малости и обозначается $\alpha=o(\beta)$, читается о – малое;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ то $\alpha(x)$называется б.м. более низкого порядка малости, а β – более высокого, то есть $\beta=\mathrm{o}(\alpha)$;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, $c\neq 0$, то α и β одного порядка малости;

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то α и β эквивалентные бесконечно малые. Обозначение $\alpha\sim\beta$.

<u>Пример 1</u>. Бесконечно малые при $x\to 0$ функции $y=x$ и $y=arctgx$ являются эквивалентными, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{arctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\rangle\begin{matrix} arctgx=t\\ x=tgt\\ x\to 0, t\to 0\end{matrix}\right\langle=\lim_{t\to 0}\frac{tgt}{t}=1.$$

<u>Пример 2.</u> Бесконечно малая $y=\sqrt{x^2+1}-1$ имеет более высокий порядок малости, чем б.м. $y=x$ (при $x\to 0$), так как предел их отношения равен 0 (см. пример 5 из п. 4.2.5).

Эквивалентные бесконечно малые функции в точке $x=0$ приведены в табл.4.3.

Таблица 4.3

$\sin x \sim x,$	$\arcsin x \sim x,$	$tgx \sim x,$
$arctgx \sim x,$	$\ln(1+x) \sim x,$	$e^x - 1 \sim x,$
$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n},$		$\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{2}$

Аналогично сравниваются бесконечно большие величины.

Пример 3.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$, значит, бесконечно большие величины $\left(2x^2+x+1\right)$ и $\left(3x^2-x-2\right)$ имеют одинаковый порядок при $x \to \infty$.

Рассмотрим применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов функций

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций.

Пример 4.

$\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} 3\sqrt{x} = 0,$ так как $\sin 3x \sim 3x$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{tg\left(4-x^2\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)(2+x)} = -\frac{(2-3)}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

4.3. Непрерывность функции

4.3.1. Определение функции, непрерывной в точке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке, и бесконечно малому приращению Δx аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (4.12).$$

Здесь $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$. Так как $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Получим, что $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$, откуда:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из этого равенства имеем три условия непрерывности функции:

1) значение $f(x_0)$ существует, то есть $f(x)$ определена в точке x_0;

2) односторонние пределы существуют и равны между собой, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

3) односторонние пределы и значение функции в точке x_0 равны между собой: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из условий 1-3 нарушено, то x_0 называется точкой разрыва.

4.3.2. Точки разрыва и их классификация

Точка x_0 называется, ***точкой разрыва 1 рода***, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x)$.

Точка x_0 разрыва 1 рода, в которой $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) \neq f(x_0)$ называется ***точкой устранимого разрыва.***

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва 1 рода, называется ***точкой разрыва 2 рода***.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{x-1}$, построить график.

Функция не определена в точке $x_0 = 1$, следовательно, эта точка является точкой разрыва (не выполнено первое условие непрерывности).

Для определения характера разрыва найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-0}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Оба предела бесконечны, что означает, что $x=1$ является точкой разрыва 2 рода или точкой бесконечного разрыва (рис. 4.17).

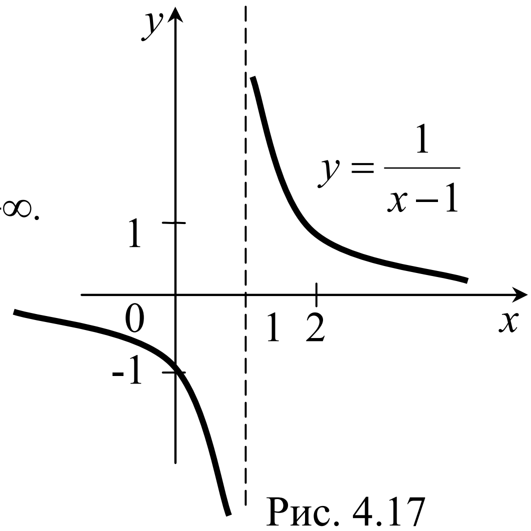


Рис. 4.17

<u>Пример 2.</u> Исследовать на непрерывность функцию, построить график:

$$y=\begin{cases} -x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$$

Область определения этой функции $(-\infty;\infty)$. Поскольку функция задана различными выражениями на нескольких промежутках (не является элементарной), то необходимо проверить на непрерывность точки "стыка" промежутков: $x_1=0$ и $x_2=1$.

Проверим три условия непрерывности в каждой точке.

Исследуем точку $x_1=0$.

1) Найдем значение функции, $f(0)=f(-x)=0$.

2) Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0,\quad \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1.$$

Односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой (второе условие не выполняется). Поэтому $x_1=0$ – точка разрыва 1 рода. В этой точке $f(x)$ имеет скачок $H=1-0=1$.

Исследуем точку $x_2=1$.

1) Значение функции $f(1)=2$.

2) Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2,\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}2=2$$

3) Значение функции и односторонние пределы равны между собой.

Так как все три условия непрерывности выполняются, то в точке $x_2 = 1$ функция непрерывна. График показан на рис. 4.18.

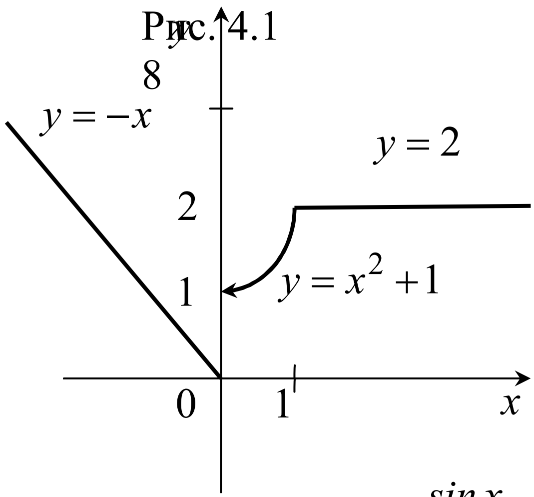


Рис. 4.18

<u>Пример 3.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Функция не определена в точке $x = 0$, которая является точкой разрыва. Найдем односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Так как они равны между собой, то $x = 0$ – точка устранимого разрыва (рис. 4.19).

Функцию можно доопределить в точке $x = 0$ таким образом, чтобы она была непрерывной:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

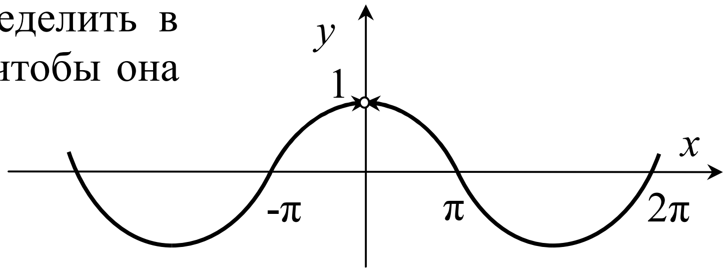


Рис. 4.19

4.3.3. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, если она непрерывна во всех точках интервала $(a,\ b)$ и непрерывна в точке $x = a$ справа и в точке $x = b$ слева.

Для функций, непрерывных в точке или на отрезке, справедливо:

1. Если $y = f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, то их сумма, произведение и частное (если знаменатель $\neq 0$) есть непрерывная функция.

2. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, есть непрерывная функция.

3. Все элементарные функции непрерывны в области своего определения.

Так, функция $y = ctgx$ непрерывна для всех действительных чисел, за исключением точек $x = \pi k$ (k – целое) (см рис. 4.10г).

Теорема 1. Если $y = f(x)$ непрерывна на [a, b], то на этом отрезке она ограничена и достигает своего наибольшего значения M и своего наименьшего значения m.

Например, $f(x) = x^2$ – непрерывная на отрезке $[-2; 3]$. Она ограничена на этом отрезке, так как $\left|x^2\right| \le 9$, и достигает в точке $x = 3$ своего наибольшего значения $M = 9$, а в точке $x = 0$ своего наименьшего значения $m = 0$.

Теорема 2. Если $y = f(x)$ непрерывна на [a, b] и имеет значения на концах интервала $f(a) = A$, $f(b) = B$, то функция принимает любое значение C, заключенное между A и B хотя бы один раз.

Геометрически это означает, что прямая $y = C$, где C – любое число между A и B, пересечет график функции $y = f(x)$ по крайней мере в одной точке (рис. 4.20).

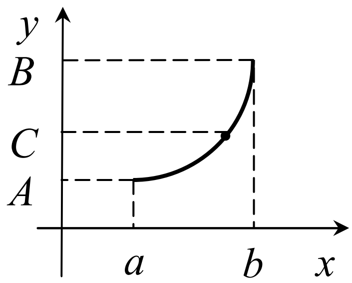


Рис. 4.20

Теорема 3. Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой значение функции равно нулю.

Геометрический смысл теоремы: если точки $M(a; f(a))$ и $N(b; f(b))$, соответствующие концам отрезка [a, b], лежат по разные стороны от оси Ox (рис. 4.19), то график функции хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox. Для функции $y = f(x)$, график которой представлен на рис. 4.21, таких точек три: $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$.

Замечание. Эта теорема является важным частным случаем теоремы 2 и используется в приближенных вычислениях для нахождения корней уравнений $f(x) = 0$ с любой степенью точности.

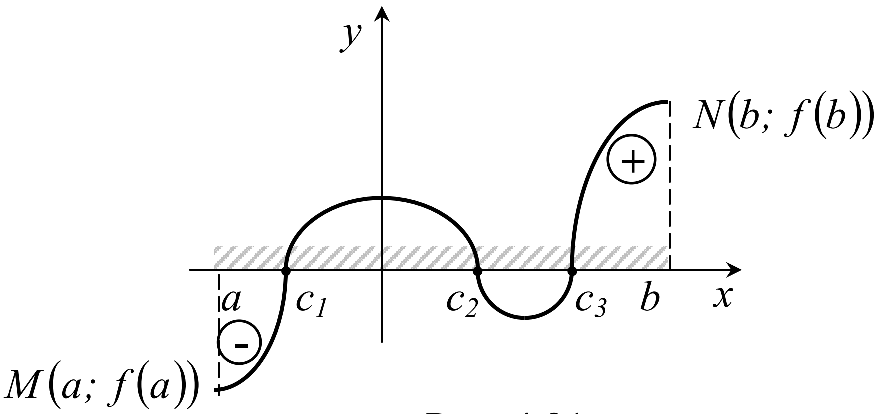


Рис. 4.21

Пример. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет в промежутке (1, 2) действительный корень.

Обозначим $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Значения функции на границах: $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$. Так как функция непрерывна и имеет на концах промежутка разные знаки, то $f(x) = 0$ хотя бы в одной точке из (1, 2).

ГЛАВА 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Производная

5.1.1. Производная функции, ее механический и геометрический смысл

Рассмотрим задачи, приводящие к понятию производной.

Задача 1. Материальная точка движется по оси S слева направо, причем неравномерно, по закону $s = f(t)$**s**, где t – время, s – путь. Найти скорость v материальной точки в момент времени t.

Решение. Пусть за время t материальная точка прошла путь $s(t)$ и заняла положение A (рис. 5.1). В момент $t + \Delta t$, пройдя путь $s(t + \Delta t)$, точка окажется в положении B. Таким образом, за время Δt она пройдет путь $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя скорость движения на участке AB: $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а мгновенная скорость в момент t

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

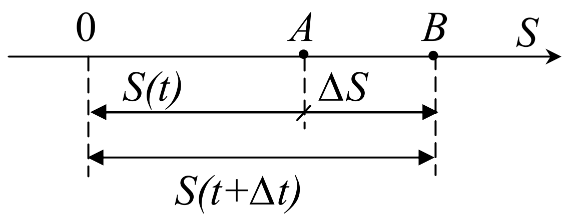


Рис. 5.1

Задача 2. Дана кривая $y = f(x)$и точка $M_0(x_0, y_0)$ на ней. Найти угловой коэффициент касательной к кривой в M_0.

Решение. Зададим значение x, соответствующее значение $y = f(x)$. Дадим приращение Δx, функция получит приращение Δy. Проведем секущую l через точки M_0 и M. При уменьшении Δx, секущая l поворачивается и стремится к положению касательной m. Углы наклона касательной m и секущей l к оси Ox составляют соответственно α и β. При $\Delta x \to 0$, $\beta \to \alpha$. Из рис. 5.2 видно, что угловой коэффициент касательной $k_{кас} = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, то есть

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (5.2)$$

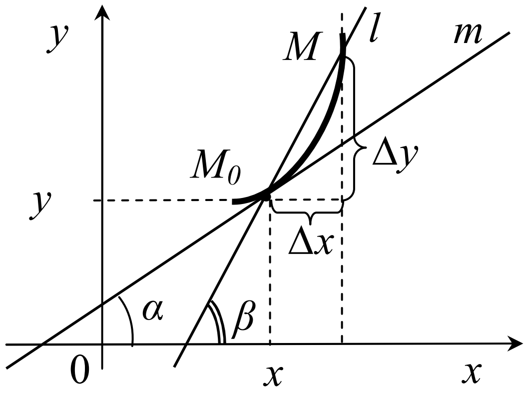


Рис. 5.2

Задачи 1 и 2 имеют одинаковую структуру. Дана функция $y = f(x)$. В точке x ее значение $y = f(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx, найдем значение функции в точке $x+\Delta x$, равное $f(x + \Delta x)$. Тогда приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ дает среднюю скорость изменения функции на интервале длиной Δx.

Производная – это предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функции $y = f(x)$ обозначается $f'(x), y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}, y'_x$.

Таким образом, в задаче 1 скорость движения – это производная пройденного пути по времени $v = s'(t)$. В этом заключается механический смысл производной.

Во второй задаче угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $\boldsymbol{x}$ равен значению производной этой функции в точке x, $k_{кас} = f'(x)$. То есть, геометрический смысл производной состоит в том, что она равна угловому коэффициенту касательной.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в интервале [a, b], если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Примем эту теорему без доказательства.

5.1.2. Таблица производных

1) Производная постоянной: $(c)' = 0$.

Здесь $y = c$. По определению производной:

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

<u>2) Производная синуса:</u> $(\sin x)' = \cos x$.

Здесь $y = \sin x$.

Найдем $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

<u>3) Производная косинуса</u> $(\cos x)' = -\sin x$

Выводится аналогично.

<u>4) Производная логарифмической функции:</u>

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Пусть $y = \log_a x$. Дадим x приращение Δx, тогда приращение функции

$$\Delta\, y = log_a(x+\Delta\, x) - log_a x = log_a\left(\frac{x+\Delta\, x}{x}\right) = log_a\left(1+\frac{\Delta\, x}{x}\right).$$

Поэтому

$$(log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x\to 0} log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} log_a e.$$

Так как $log_a e = \dfrac{ln\, e}{ln\, a} = \dfrac{1}{ln\, a}$,

то $(log_a x)' = \dfrac{1}{x\, ln\, a}$. При $a = e$ имеем: $(ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$.

Запишем таблицу производных.

1. $(c)' = 0$
2. $(sin\, x)' = cos\, x$
3. $(cos\, x)' = -sin\, x$
4. $(tgx)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$
5. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$
6. $(arcsin\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(arccos\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

9. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

11. $(ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$

12. $(a^x) = a^x\, ln\, a$

13. $(e^x)' = e^x$

14. $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

15. $(x)' = 1$

5.1.3. Правила дифференцирования

1) Постоянный множитель можно вынести за знак

производной:

$$(cu)' = c \cdot u' \tag{5.3}$$

Действительно, если $y = cu$, то

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = cu(x + \Delta x) - cu(x) = c[u(x + \Delta x) - u(x)] = c\Delta x$.

Отсюда, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c \cdot \Delta u}{\Delta x} = c \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'$.

Пример 1.

$(4x^2)' = 4 \cdot (x^2)' = 4 \cdot 2x = 8x$.

2) Производная суммы:

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{5.4}$$

Производная суммы функций равна сумме производных.

Пусть $y(x) = u(x) + v(x)$. Приращению Δx соответствуют приращения $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ и $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$. Тогда функция y получит приращение:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x))] =$
$[u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$. Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Аналогично, $(u - v)' = u' - v'$.

Замечание. Формула справедлива при любом числе слагаемых

$(u \pm v \pm \ldots \pm t)' = u' \pm v' \pm \ldots \pm t'$.

Пример 2.

$$(3^x + arctgx - 4)' = (3^x)' + (arctgx)' - (4)' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) Производная произведения:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \tag{5.5}$$

Пусть $y(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$. Тогда

$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v = u \cdot v + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$$= u'v + uv' + u'v' \cdot 0.$$

Итак, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Пример 3.

$$(ln\, x \cdot cos\, x)' = (ln\, x)' \cdot cos\, x + ln\, x \cdot (cos\, x)' = \frac{1}{x} \cdot cos\, x + ln\, x \cdot (-sin\, x).$$

4) Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (5.6)$$

Пусть $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ и $v(x) \neq 0$. Будем вместо $u(x)$ и $v(x)$ писать u и v. Тогда $\Delta — = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v \cdot (v + \Delta v)}$. В знаменателе Δv представим в виде $\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x$, получим:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x\right)} = \frac{u'v - uv'}{v(v + v' \cdot 0)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 4.

$$(tgx)' = \left(\frac{sin\, x}{cos\, x}\right)' = \frac{(sin\, x)'\, cos\, x - (cos\, x)'\, sin\, x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{cos^2 x}$$

Пример 5. Найти производную $y = 3x^2 + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}} + 2.$

Так как $y=3x^2+x^{\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{7}{4}}+2$, то

$$y'=3\cdot 2x+\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}-2x^{-\frac{7}{4}-1}=6x+\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}-2x^{-\frac{11}{4}}=6x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{x^2\sqrt[4]{x^3}}.$$

5.1.4. Производная сложной и обратной функции

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Функция $y=f[\varphi(x)]$ есть сложная функция и переменная u – промежуточный аргумент.

Пример 1. Функция $y=sin^3 x$ является сложной функцией, где $u=sin\,x$, тогда $y=u^3$.

Производная сложной функции находится по следующей формуле $y'_x=f'_u\cdot u'_x$ (нижний индекс указывает переменную, по которой берется производная). Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по аргументу *x*.

Пусть *x* получит приращение Δx, тогда промежуточная функция $u(x)$ получит приращение Δu, а *y* также получит приращение Δy. Так как $u(x)$ непрерывна, то $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$. При этом запишем, что

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x.$$

Запишем таблицу формул дифференцирования для сложных функций.

1. $(c)'=0$
2. $(sin\,u)'=cos\,u\cdot u'$
3. $(cos\,u)'=-sin\,u\cdot u'$
8. $(arctg\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
9. $(arccrc\,)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
10. $(log_a u)'=\dfrac{1}{u\,ln\,a}\cdot u'$

4. $(tgu)' = \frac{1}{cos^2 x} \cdot u'$

5. $(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$

6. $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

7. $(arccos\, u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

11. $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

12. $\left(a^u\right) = a^u\, ln\, a \cdot u'$

13. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

14. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

Пример 2.

$$\left[ctg\left(3 - x^3\right)\right]' = -\frac{\left(3 - x^3\right)'}{sin^2\left(3 - x^3\right)} = \frac{3x^2}{sin^2\left(3 - x^3\right)}.$$

Пример 3.

$$\left(\frac{lg\sqrt{x^2+4}}{2^x}\right)' = \frac{\left(lg\sqrt{x^2+4}\right)' \cdot 2^x - lg\sqrt{x^2+4} \cdot \left(2^x\right)'}{\left(2^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{ln10 \cdot \sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x \cdot 2^x - lg\sqrt{x^2+4} \cdot 2^x \cdot ln\,2}{2^{2x}} =$$

$$= \frac{2^x}{2^{2x}} \cdot \left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)ln10} - ln\sqrt{x^2+4} \cdot ln\,2\right) =$$

$$= \frac{1}{2^x}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)ln10} - ln\sqrt{x^2+4} \cdot ln\,2\right).$$

Пример 4.

3. $$\left(\sqrt[3]{x} \cdot 2^{tg5x}\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' \cdot 2^{tg5x} + \sqrt[3]{x} \cdot \left(2^{tg5x}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2^{tg5x} +$$

$$+ \sqrt[3]{x} \cdot 2^{tg5x} \cdot ln\,2 \cdot \frac{1}{cos^2 5x} \cdot 5 = \frac{2^{tg5x}}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left(1 + 15 \cdot ln\,2 \cdot \frac{x}{cos^2 5x}\right).$$

Пример 5. Найти производную степенной функции $(x)^n$.

Используя основное логарифмическое тождество, имеем $x^n = \left(e^{ln\,x}\right)^n = e^{n\,ln\,x}$. Согласно производной сложной показательной функции:

$$\left(x^n\right)' = \left(e^{n\ln x}\right)' = e^{n\ln x} \cdot (n\ln x)' = e^{n\ln x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}.$$

Пусть для $y = y(x)$ существует обратная функция $x = x(y)$, производная которой x'_y. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ и, так как $y(x)$ непрерывна, то $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}.$$

Таким образом, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

<u>Пример 6.</u> Найти производную $arcsin\, x$.

Здесь $y = arcsin\, x,\; x = sin\, y$.

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(sin\; y)_y'} = \frac{1}{cos\; y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2\, y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Итак,

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

<u>Пример 7.</u> Найти производную арктангенса $arctgx$.

Здесь $y = arctgx$ **,** тогда $x = tgy$.

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\, x}} = cos^2\, y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$ Итак,

$$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}\;.$$

<u>Пример 8</u>. Найти производную показательной функции.

Пусть $y = a^x$, тогда $x = log_a y$. Так как $y_x{}' = \frac{1}{x_y{}'}$, то $\left(a^x\right)' = \frac{1}{\left(log_a y\right)'} = \frac{1}{\frac{1}{y\,ln\,a}} = y\,ln\,a = a^x\,ln\,a$. При $a = e$ имеем: $\left(e^x\right)' = e^x$.

5.1.5. Уравнение касательной и нормали к графику

Исходя из геометрического смысла производной (5.2), уравнение касательной, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0) \tag{5.7}$$

Уравнение нормали (т.е. перпендикуляра к касательной в точке касания $M_0(x_0, y_0)$) имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0) \tag{5.8}$$

Пример 1. Найти уравнение касательной и нормали к линии $y = x^2 + 1$ в точке $M_0(-1, 3)$.

$y' = \left(x^2 + 1\right)' = 2x$, $y'(x_0) = y'(-1) = 2x = -2$.

Тогда уравнение касательной: $y - 3 = -2\cdot(x + 1)$, откуда $y = -2x + 1$.

Уравнение нормали: $y - 3 = -\frac{1}{-2}\cdot(x + 1)$, откуда $y = 0{,}5x + 3{,}5$.

Пример 2. Найти точку, в которой касательная к графику функции $y = x^3 - 1$ параллельна прямой $y = 3x + 2$.

Так как неизвестная касательная и прямая $y = 3x + 2$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k_{кас} = y'(x_0) = 3$. Найдем производную и приравняем ее известному значению: $y' = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2 = 3$. Отсюда $x = \pm 1$. Таким образом, имеем две точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x + 2$. Первая точка: при $x = 1$, $y = x^3 - 1 = 0$, то есть $M_1(1; 0)$. Вторая точка: при $x = -1$, $y = (-1)^3 - 1 = -2$, то есть $M_2(-1; -2)$.

5.1.6. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл.

По определению производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда (см. п. 4.2.5) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Слагаемое $y' \cdot \Delta x$ является линейной функцией от Δx, а слагаемое $\alpha(x) \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$.

Поэтому $y' \cdot \Delta x$ составляет главную часть приращения функции.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy, $dy = y' \cdot \Delta x$.

В частности, при $y = x$ имеем: $dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$. Итак, дифференциал dx независимой переменной x совпадает с ее приращением, то есть $dx = \Delta x$.

Тогда $dy = y' \cdot dx$. При нахождении дифференциала функции надо производную этой функции умножить на дифференциал независимого переменного.

<u>Пример 1.</u> Найти дифференциал функции $y = 5x - 3$.

$dy = (5x - 3)' \cdot dx = 5dx$.

<u>Пример 2.</u> Найти дифференциал функции $y = x^4 + 3cos^2 x$.

$dy = \left(x^4 + 3cos x\right)' dx = \left(4x^3 + 6cos x \, sin x\right) dx.$

<u>Пример 3.</u> Найти дифференциал функции $y = xarctgx - ln\sqrt{1+x^2}$.

$$dy = \left(xarctgx - ln\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \left(arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) dx =$$

$$= \left(arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = arctgxdx$$

Рассмотрим механический смысл дифференциала.

Пусть точка M движется по закону $s = f(t)$, с переменной скоростью $v = s'(t) = f'(t)$. За время Δt точка пройдет путь Δs. Однако, если Δt невелико, то скорость не успеет существенно измениться, и ее можно считать постоянной. Поэтому путь равен $v \cdot \Delta t = s'(t) \cdot \Delta t = ds$. Итак, $ds = s'(t) \cdot \Delta t$.

Дифференциал пути ds – это бесконечно малый путь, пройденный за бесконечно малый промежуток времени, на котором скорость движения считается постоянной.

Геометрический смысл дифференциала показан на рис. 5.3.

Проведем касательную m к графику $y = f(x)$ в точке $A(x; y)$. Дадим приращение $\Delta x = AB$, функция получит приращение $\Delta y = BD$.

Так как $y' = tg\alpha$, то $dy = y' \cdot dx = tg\alpha \cdot \Delta x = BC$. Таким образом, дифференциал функции dy – это приращение ординаты касательной на промежутке от x до $x + \Delta x$. При малом Δx приращение функции Δy приближенно равно дифференциалу dy, то есть $dy \approx \Delta y$.

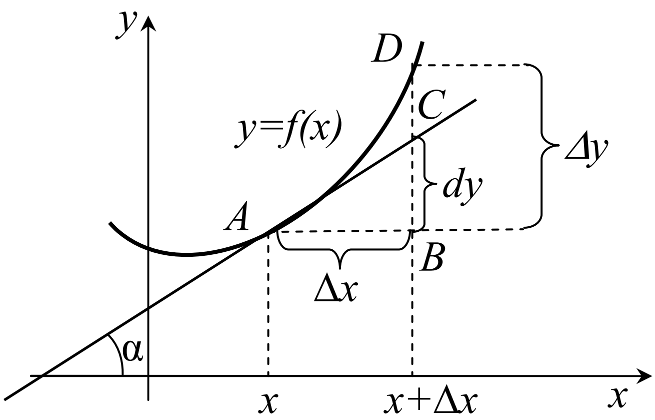


Рис. 5.3

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной, так как $dy = y' \cdot dx$:

1. $d(u+v) = (u+v)' \cdot dx = u'dx + v'dx = du + dv$.
2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.

5.1.7. Применение дифференциала для приближенных вычислений

Дана функция $y = y(x)$ и известно ее значение в точке x. Аргумент получил приращение Δx, тогда новое значение функции $y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y$. Так как $\Delta y \approx dy$, а $dy = y'(x)\cdot dx$, то

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\cdot \Delta x.$$

Пример. Вычислить $sin 31^0$.

$y = sin\,x,\ y' = cos\,x$.

Пусть $x = 30^0, (x+\Delta x) = 31^0, \Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ рад.

Тогда $sin\,31^0 \approx sin\,30^0 + cos\,30^0 \cdot \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}516.$

5.2. Производные высших порядков

Пусть $y=f(x)$ – непрерывная функция. Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ $f'(x)$ – производная первого порядка функции $f(x)$. И если она, в свою очередь, является непрерывной функцией, то от нее можно найти производную $(y')' = y''$, которая называется производной второго порядка от исходной функции: $y'' = f''(x)$.

Аналогично определяется производная третьего порядка: $y''' = (y'')' = f'''(x)$. Производные более высших порядков обозначаются

$$y^{(4)},\ y^{(5)},\ \ldots, y^{(n)},\ \ldots$$

Пример. Найти первую, вторую и третью производные для

$y = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 5$.

$y' = 20x^3 - 9x^2 + 2,\ y'' = 60x^2 - 18x,\ y''' = 120x = 18.$

Рассмотрим механический смысл производной второго порядка.

$$s = f(t),\ v = s'(t) = f'(t),\ s'' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega,$$

где ω – есть мгновенное ускорение.

5.3. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в окрестности точки $x=a$ непрерывны, дифференцируемы и $\varphi'(x)\neq 0$. При $x\to a$ обе функции одновременно стремятся или к нулю, или к бесконечности : $f(x)\to 0, \varphi(x)\to 0$ или $f(x)\to\infty, \varphi(x)\to\infty$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило Лопиталя может применяться неоднократно.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Если получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, и производные удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

В случае неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ или $(\infty-\infty)$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и далее использовать правило Лопиталя.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2-x)}=\frac{1}{2}.$$

В случае неопределенности вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Пример 4.

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=\left(0^0\right)$. Пусть $y=(\sin x)^x$, прологарифмируем ее: $\ln y = x\ln\sin x$. Найдем предел этого выражения:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln\sin x)=(-0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\cos x\right]=-1\cdot 0\cdot 1=0;$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^0=1.$

5.4. Условия и интервалы монотонности функций

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента $x_2>x_1$ соответствует большее значение функции $f(x_2)>f(x_1)$ (рис. 5.4а).

График возрастающей функции при движении вправо по оси x поднимается вверх и любая касательная к графику образует острый угол α, тогда $tg\alpha>0$ и $y'>0$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей, если большему значению аргумента $x_2 > x_1$ соответствует меньшее значение функции

$f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 5.4б). При этом угол α – тупой, $tg\alpha < 0$ и $y' < 0$.

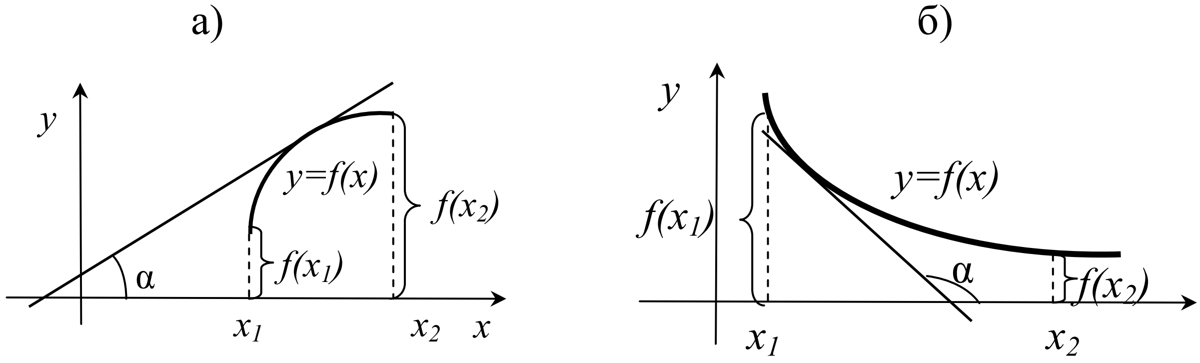


Рис. 5.4

Таким образом, возрастание и убывание функции связано со знаком первой производной.

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), когда $y' > 0$ ($y' < 0$) (функции $y = f(x)$ и $y' = f'(x)$ непрерывны).

Интервалы, в которых функция либо только возрастает, либо только убывает, называются интервалами монотонности.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет вид, показанный на рис. 5.5. Отметим точки $x = b$, $x = c$, $x = d$, в которых касательные к графику параллельны оси Оx ($y' = tg\alpha = \alpha = 0$), и угловую точку $x = a$ (y' не существует). Эти точки называются критическими.

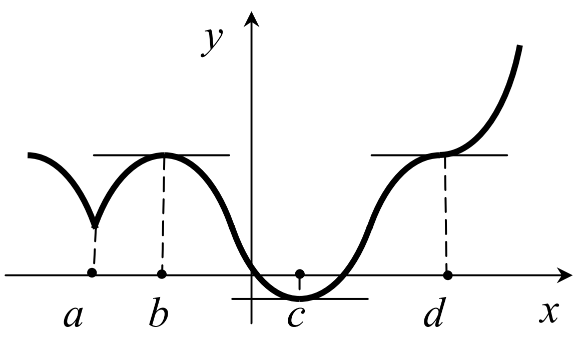


Рис. 5.5

Для нахождения интервалов монотонности функции $y = f(x)$ надо на ось x нанести все критические точки этой функции, после чего проверить знак y' на каждом из интервалов между критическими точками. Интервалы, на которых $y' > 0$, будут интервалами возрастания, а на которых $y' < 0$, будут интервалами убывания функции. При этом, если на соседних интервалах знак y' одинаков, то они составляют единый интервал монотонности. На рис. 5.5 интервал $(c; \infty)$ составляет единый интервал возрастания функции.

<u>Пример.</u> Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2.$

1) Найдем производную функции:

$y' = x^2 - 4$.

2) Найдем критические точки, в которых производная равна нулю или не существует.

а) $y' = 0$, $x^2 - 4 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

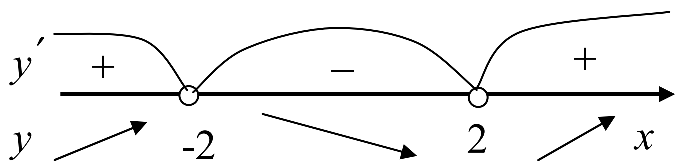
б) y' не существует – точек нет.

Критические точки разбивают ось Оx на три интервала. Определим знак y' в каждом интервале. Для этого возьмем произвольные точки в каждом из интервалов.

$x = -3$, $y' = x^2 - 4 = 9 - 4 > 0$,

$x = 0$, $y' = x^2 - 4 = 0 - 4 < 0$,

$x = 3$, $y' = x^2 - 4 = 9 - 4 > 0$.



Таким образом, данная функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$ и убывает на $(-2; 2)$.

5.5. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума

Точки x, лежащие в δ-окрестности x_0, $(x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta))$, будем называть соседними.

Точка x называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если значение функции в этой точке больше соседних значений. На рис. 5.6 точки x_2 и x_4 являются точками максимума.

Точка x называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если значение функции в этой точке меньше соседних значений. На рис. 5.6 точками минимума являются точки x_1 и x_3.

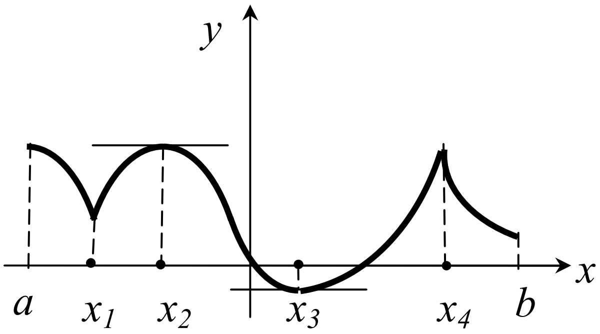


Рис. 5.6

Точки максимума и минимума объединяются словом экстремум (extremus, латинское). Крайние точки $x = a$ и $x = b$ не относятся к точкам экстремума, так как они не имеют соседних точек слева и справа соответственно.

Касательные к графику в точках экстремума либо параллельны оси Оx, либо не существуют (в угловых точках x_1, x_4).

Таким образом, ***необходимое условие экстремума***: если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (максимум или минимум), то производная в этой точке $y'(x_0) = 0$ или не существует.

Теорема дает лишь необходимое условие существования экстремума, но не достаточное.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на экстремум $y = x^3$.

Производная $y' = \left(x^3\right)' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако, экстремума в этой точке нет (рис. 5.7).

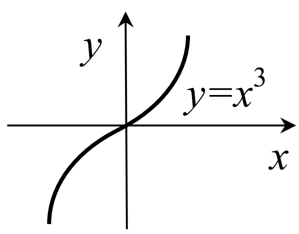


Рис. 5.7

Критическими называются точки, в которых производная равна нулю или не существует.

Запишем ***первое достаточное условие*** существования экстремума).

Критическая точка x_0 является точкой экстремума непрерывной функции $y = f(x)$, если производная y' при переходе слева направо через x_0 меняет знак Причем, если y' меняет знак с + на –, то x_0 – точка максимума, если с – на + , то x_0 – точка минимума.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на экстремум $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

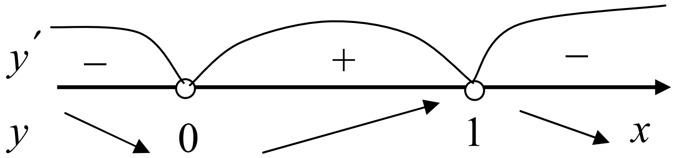
1. Находим производную данной функции: $y' = 6x^2 - 6x$.

2. Находим критические точки.

$y' = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -6x(x-1) = 0$, отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

y' не существует – нет точек.

3. Критические точки откладываем на числовой оси и определяем знак производной в каждом интервале.



$x = -1$, $y' = -6x(x-1) = 6 \cdot (-7) < 0$,

$x = \dfrac{1}{2}$, $y' = -6x(x-1) = -6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = (-)\cdot(-) > 0$,

$x = 2$, $y' = -6x(x-1) = -6 \cdot 2 \cdot (2-1) = (-)\cdot(+) < 0$.

Точка $x = 0$ – точка минимума, так как производная меняет знак с – на +.

Точка $x = 1$ – точка максимума, так как производная меняет знак с + на –.

4. Вычисляем значения данной функции в точках экстремума:

$y(0) = -2x^3 + 3x^2 + 1 = 1$, $y(1) = -2x^3 + 3x^2 + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$.

5. Схематично строим график (рис. 5.8).

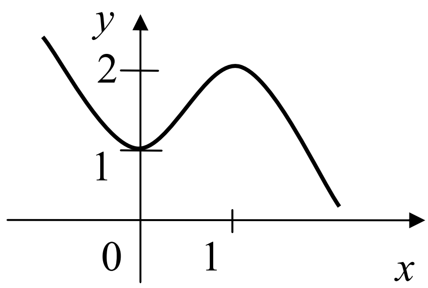


Рис. 5.8

<u>Пример 3.</u> Исследовать на экстремум функцию $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

1. Находим производную данной функции $y' = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

2. Находим критические точки.

$y' = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = 0$ при $x_1 = 1$.

y' не существует при $x_2 = 2$.

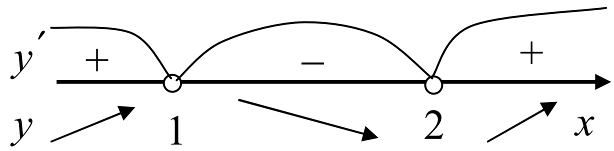
Следовательно, критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3. Критические точки откладываем на числовой оси и определяем знак производной в каждом интервале.

$x = 0$, $y' = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(-)}{(-)} > 0$,

$x = 1{,}5$, $y' = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(+)}{(-)} < 0$,

$x = 3$, $y' = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(+)}{(+)} > 0$,



Так как y' меняет знак в критических точках, то $x_1 = 1$ – точка максимума, $x_2 = 2$ – точка минимума.

4. Вычисляем значения данной функции в точках экстремума:

$y(1) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2} = 3$, $y(2) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2} = 0$.

5. Схематично строим график (рис 5.9).

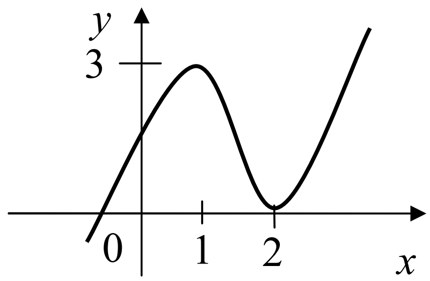


Рис. 5.9

Запишем ***второе достаточное условие*** существования экстремума.

Точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, причем, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) < 0$. На основании определения второй производной имеем:

$$f''(x_0)=[f'(x_0)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

Исследуем знак первой производной при переходе через точку $x=x_0$. Слева от точки x_0 знаменатель $\Delta x<0$, следовательно, числитель $f'(x_0+\Delta x)>0$. Справа от точки x_0 знаменатель $\Delta x>0$, следовательно, числитель $f'(x_0+\Delta x)<0$. Таким образом, при переходе через точку $x=x_0$ первая производная меняет свой знак с плюса на минус.

Следовательно, на основании первого достаточного признака существования экстремума функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ максимум. Аналогично показывается, что если $f''(x_0)>0$, то $x=x_0$ – точка минимума.

Пример 4. Исследовать на экстремум $y=-2x^3+3x^2+1$ (см. пример 2).

1. Находим производную данной функции: $y'=-6x^2+6x$.
2. Находим критические точки.
$y'=-6x^2+6x=0 \Rightarrow -6x(x-1)=0$, отсюда $x_1=0$, $x_2=1$
3. Находим вторую производную: $y''=\left(-6x^2+6x\right)'=-12x+6$.
4. Определяем знак производной в критических точках:
$y''(0)=0+6>0$, следовательно, $x_1=0$ – точка минимума;
$y''(1)=-12+6<0$, следовательно, $x_1=1$ – точка максимума.

5.6. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи

Функция $y=f(x)$ достигает на множестве X своего наименьшего (наибольшего) значения в точке $x_0\in X$, если для любого $x\in X$ имеет место неравенство $f(x_0)\le f(x)$ ($f(x_0)\ge f(x)$).

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то она достигает на отрезке $[a,b]$ наибольшего и наименьшего значений либо в точках экстремума, принадлежащих этому отрезку, либо на концах отрезка.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции $y=f(x)$, достаточно:

1) Найти критические точки, принадлежащие $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2) Вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$.

3) Сравнить полученные результаты, выбрать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$.

<u>Пример 1.</u> Исследовать функцию $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на наибольшее и наименьшее значение на промежутке $x \in [0, 2]$.

Исследуемая функция дифференцируема и непрерывна на отрезке.

1) Найдем производную и критические точки функции: $y'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 = 4x^2 - 4$, $4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x+1) = 0$, откуда $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$.

При этом $x_1 \in [0,2], \quad x_1 \notin [0,2]$. Найдем значения функции в точке $x_1 = 1$: $f(1) = \frac{4}{3} - 1 = -\frac{8}{3}$.

2) Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$$

3) Выберем наибольшее и наименьшее значения:

$$f_{наиб}(x) = f(2) = \frac{8}{3}, \; f_{наим}(x) = f(1) = -\frac{8}{3}.$$

<u>Пример 2.</u> Сумма двух положительных чисел равна 10. Найти возможное наибольшее произведение этих чисел

Обозначим числа: $a\,(a > 0)$ и $b\,(b > 0)$. Тогда по условию: $a + b = 10$.

Произведение этих чисел: $P = ab$. Выразим b из известного условия, тогда $P = ab = a(10 - a) = 10a - a^2$. Это функция одной переменной *a*, область определения которой $(0; 10)$.

Найдем производную и критические точки функции:

$$P' = \left(10a - a^2\right)' = 10 - 2a = 0, \text{ откуда } a = 5.$$

Это единственная критическая точка на интервале $(0; 10)$.

Покажем, что в ней достигается максимум. Найдем вторую производную в этой точке: $P'' = (10 - 2a)' = -2 < 0$. По второму достаточному признаку экстремума имеем при $a = 5$ точку максимума.

Найдем последовательно значение $b = 10 - a = 5$, и наибольшее возможное произведение двух чисел $P = a \cdot b = 5 \cdot 5 = 25$.

5.7. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым, если он расположен ниже любой своей касательной (рис. 5.10а). График функции $y = f(x)$ называется вогнутым, если он расположен выше любой своей касательной (рис. 5.10б).

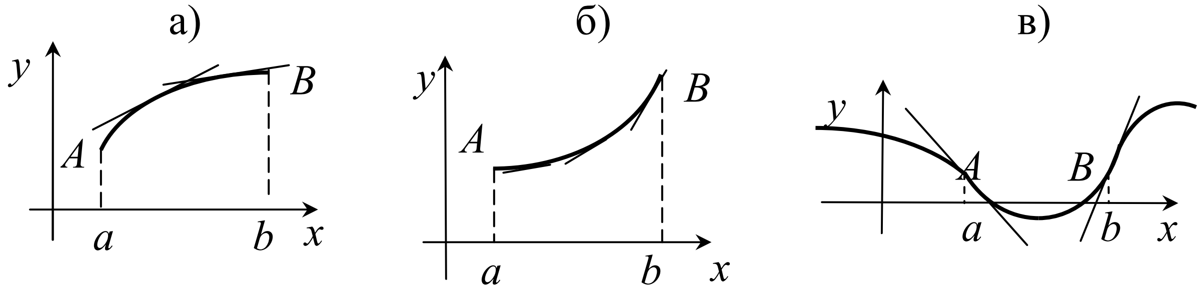


Рис. 5.10

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ на рис. 5.10в). Мы видим, что левее точки A и правее точки B график выпуклый, а между A и B вогнутый. Точки A и B, отделяющие выпуклую часть от вогнутой, называются точками перегиба, в них график пересекает касательную, то есть касательная лежит с обоих сторон графика.

Для нахождения участков выпуклости и вогнутости рассмотрим поведение касательной на участках выпуклости и вогнутости.

На интервале выпуклости с ростом x касательная поворачивается по часовой стрелке, при этом угол наклона касательной α, а также тангенс этого угла уменьшается, убывает.

(см. рис. 5.10а). Известно, что $tg\alpha = y'$. Эта функция убывает при условии, что ее производная меньше нуля, то есть $(y')' = y'' < 0$.

На интервале вогнутости (см. рис. 5.10б) с ростом x касательная поворачивается против часовой стрелки, при этом угол наклона касательной α, а также тангенс этого угла увеличивается, возрастает. Следовательно, $y'' > 0$.

Так как точки перегиба (см. рис. 5.10в) разделяют участки выпуклости от участков вогнутости, то в них y'' меняет знак. В самой же точке перегиба y'' равна нулю или не существует.

Таким образом, для исследования графика функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость следует произвести следующие действия.

1. Найти вторую производную y''.

2. Найти критические точки на перегиб, то есть точки, в которых y'' равна нулю или не существует. Для этого следует приравнять к нулю числитель и знаменатель y''.

3. Нанести критические точки на ось x и найти знак y'' в каждом интервале.

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

__Пример 1.__ Исследовать на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции $y = \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^3}{6} + 1$.

Данная функция определена на всей числовой прямой.

1. Находим $y' = \left(\dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^3}{6} + 1\right)' = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$,

$$y'' = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)' = x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right).$$

2. Найдем критические точки: $y'' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Отложим их на числовой оси.

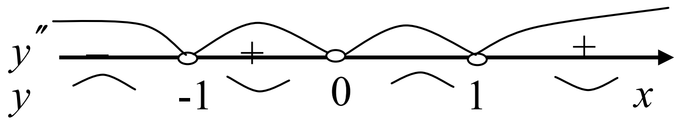
3. Найдем знаки y'' в интервалах:

$y''(-2) = x\left(x^2 - 1\right) = (-2)\cdot(4-1) = (-)\cdot(+) < 0$,

$y''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = x\left(x^2 - 1\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) = (-)\cdot(-) > 0$,

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = x\left(x^2 - 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4} - 1\right) = (+)\cdot(-) < 0,$$

$$y''(2) = x\left(x^2 - 1\right) = (2)\cdot(4 - 1) = (+)\cdot(+) > 0.$$



4. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ $y'' < 0$ – график выпуклый.

На интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ $y'' > 0$ – график вогнутый.

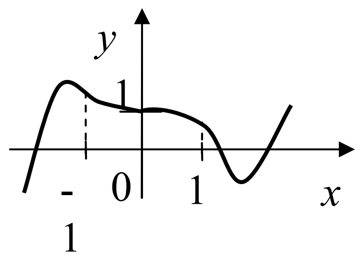
Вторая производная меняет знак в трех точках. Найдем ординаты точек перегиба:

$$y(-1) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + 1 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{6} + 1 = 1\frac{7}{60} \approx 1{,}1;$$

$$y(0) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + 1 = 1, \quad y(1) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + 1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{53}{60} \approx 0{,}9.$$

Таким образом, имеем три точки перегиба с координатами: $(-1; 1{,}1)$, $(0; 1)$, $(1; 0{,}9)$.

Изобразим схематично график.



Пример 2. Исследовать на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции $y = e^{-x^2}$

Данная функция определена на всей числовой прямой.

1. Находим $y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$

$$y'' = -2\left(e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)\right) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right).$$

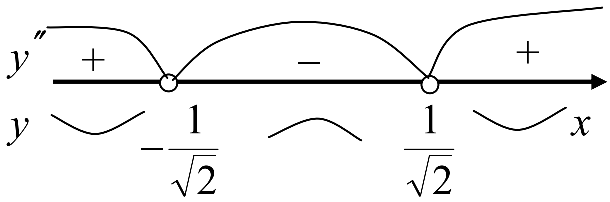
2. Найдем критические точки: $y'' = 0$, если

$$2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Найдем знаки y'' в интервалах:

$$y''(-1) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0,$$

$$y''(0) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^0(-1) = -2 < 0,$$
$$y''(1) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0.$$



Следовательно, точки кривой с абсциссами $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба.

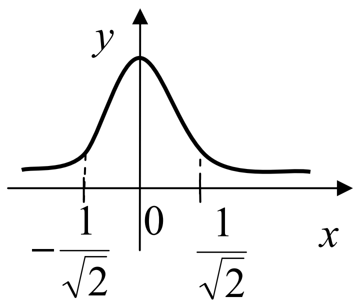
4. Находим ординаты точек перегиба:

при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$

при $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Таким образом, точки $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба графика данной функции.

Причем на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$ кривая вогнута ($y'' > 0$), а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ выпукла ($y'' < 0$).



5.8. Асимптоты графика функции

Асимптота – это прямая линия, к которой неограниченно приближается график функции $y = f(x)$, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат. Различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

1. ***Вертикальная асимптота*** имеет уравнение $x = a$, причем $x = a$ – точка разрыва второго рода функции $y = f(x)$. То есть должно выполняться хотя бы одно из условий:

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Количество вертикальных асимптот не ограничено.

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты $y = \dfrac{1}{x-2}$.

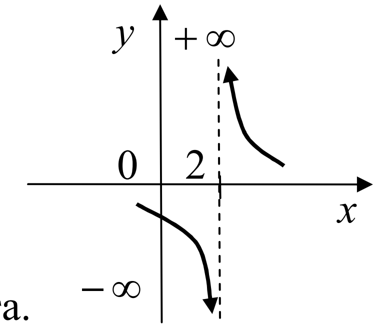
Функция не определена при $x = 2$.

Найдем пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2-0)-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2+0)-2} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 2$ – вертикальная асимптота.



Пример 2. Найти вертикальные асимптоты $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$.

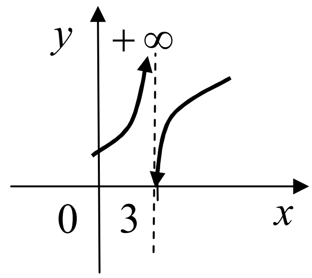
Функция не определена при $x = 3$.

Найдем пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{3-x}} = 2^{\frac{1}{3-(3-0)}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{3-x}} = 2^{\frac{1}{3-(3+0)}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

Таким образом, $x = 3$ – вертикальная асимптота.



Пример 3. Найти вертикальные асимптоты $y = tgx$.

Точки разрыва и вертикальные асимптоты: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n – целое число. Количество вертикальных асимптот – бесчисленное множество (см. рис. 4.12в) .

2. ***Наклонная асимптота*** имеет уравнение $y = kx + b$. По определению асимптоты, расстояние по вертикали между графиком $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ стремится к 0 при $x \to +\infty$ (рис. 5.11). То есть, должно выполняться условие: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx - b\right) = 0$.

Отсюда $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$ не существует или не равен конечному числу, то асимптоты при $x\to+\infty$ нет.

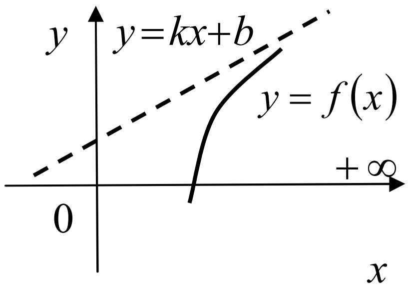


Рис. 5.11

Аналогично определяется и находится асимптота графика при $x\to-\infty$. В этом случае $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Наклонные асимптоты при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ могут совпадать.

Таким образом, максимальное количество наклонных асимптот графика функции равно двум.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной, в этом случае $k=0$, и ее уравнение имеет вид: $y=b$.

Пример 4. Найти асимптоты кривой $y=\frac{x^2+1}{x-2}$.

Проверим существование вертикальных асимптот. Функция не определена при $x=2$, это точка разрыва.

Так как $\lim\limits_{x\to2+0}\frac{x^2+1}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2-0}\frac{x^2+1}{x-2}=-\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты:

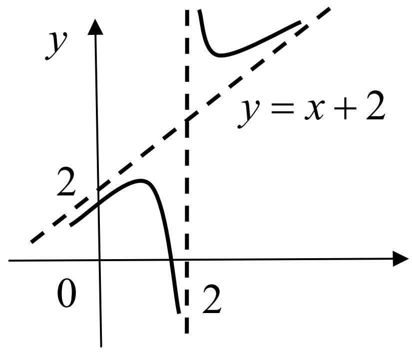
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2.$$

Итак, $y = x+2$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную $y = x+2$.



5.9. Общая схема исследования функции и построения её графика

Схема исследования функции $y = f(x)$ устанавливает следующее:

1) область определения функции;

2) точки разрыва функции и поведение функции в их окрестности, вертикальные асимптоты;

3) поведение функции на бесконечности, наклонные асимптоты;

4) четность и нечетность, периодичность;

5) точки пересечения с осями координат, интервалы положительности и отрицательности функции (если возможно).

6) Интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

Найденные асимптоты строятся на координатной плоскости, затем наносятся характерные точки (экстремумы, точки перегиба), после чего строится сам график. Если поведение графика недостаточно ясно, то надо построить еще несколько точек графика, вычислив значения *y* для отдельных значений *x*.

<u>Пример 1.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Точки разрыва функции и вертикальных асимптот нет.

3) Исследуем поведение функции на бесконечности, найдем пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^2+1\right)\cong\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^2+1\right)\cong\lim_{x\to-\infty} x^4=+\infty.$$

Отложим найденные точки с координатами $(+\infty;+\infty)$ и $(-\infty;+\infty)$ на графике (рис. 5.12).

Наклонных асимптот $y=kx+b$ нет, так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-2x^2+1}{x}=\infty.$$

4) Исследуем на четность и нечетность:

$y(x)=x^4-2x+1,\ y(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=x^4-2x^2+1.$

Так как $y(-x)=y(x)$, то функция четная, ее график симметричен относительно оси Оy.

Функция не является тригонометрической, поэтому периодичности нет.

5) Найдем точки пересечения с осью Оy:

$y(0)=x^4-2x^2+1=1.$

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$y'=\left(x^4-2x^2+1\right)'=4x^3-4x=4x\cdot\left(x^2-1\right).$

$y'=0$ при $x_1=0$ и $x_{2,3}=\pm1$.

y' не существует – точек нет.

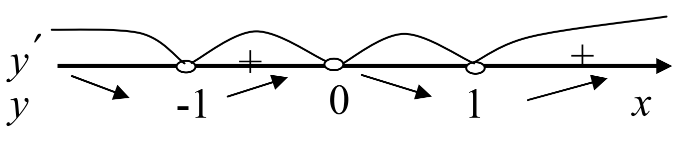
Отложим найденные критические точки на числовой оси и проверим знак y' в каждом интервале:

$$y'(-2)=4x\cdot\left(x^2-1\right)=4\cdot(-2)\cdot(4-1)=(-)\cdot(+)<0,$$

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\cdot\left(x^2-1\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=(-)\cdot(-)>0,$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=4x\cdot\left(x^2-1\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=(+)\cdot(-)<0,$$

$$y'(2)=4x\cdot\left(x^2-1\right)=4\cdot(2)\cdot(4-1)=(+)\cdot(+)>0.$$



Отмечаем на числовой оси интервалы возрастания и убывания. Функция убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$. Функция возрастает на промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

В критических точках производная меняет знак, поэтому имеем:

$x = -1$ – точка минимума, $x = 0$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремальные значения:

$y_{min}(-1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$,

$y_{max}(0) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1$,

$y_{min}(1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

Отложим найденные точки экстремума на графике.

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

$y'' = (4x^3 - 4x)' = 12x^2 - 4$.

$y'' = 0$, когда $12x^2 - 4 = 0$, откуда $x^2 = \dfrac{1}{3}$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$.

Отложим критические точки на перегиб на числовой оси и найдем знак y'' в интервалах:

$y''(-1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$,

$y''(0) = 12x^2 - 4 = 0 - 4 < 0$,

$y''(1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$.

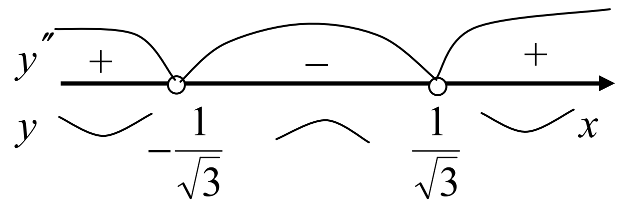


График вогнутый на промежутках $\left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}; +\infty\right)$, выпуклый – на $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}; \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

В точках $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$ вторая производная меняет знак, в них имеются точки перегиба. Найдем их ординаты:

$y\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55$,

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55.$$

Отложим точки перегиба с координатами $(-0{,}58;\, 0{,}55)$ и $(0{,}58;\, 0{,}55)$ на графике.

Соединим все точки с учетом выпуклости и вогнутости.

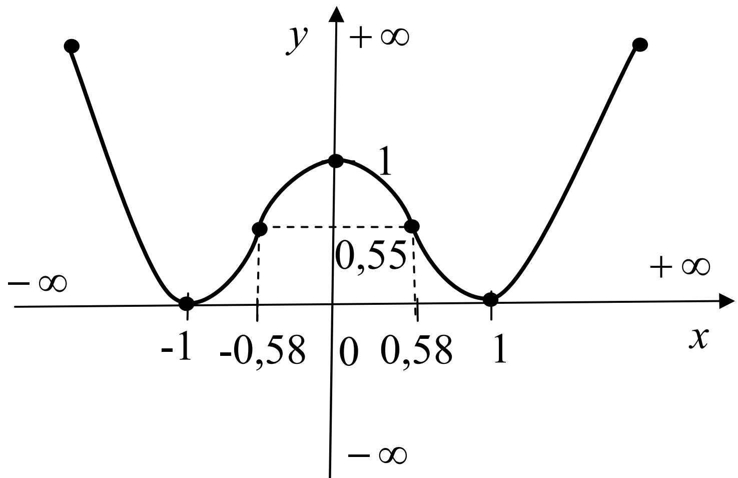


Рис. 5.12

Пример 2. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty;\, 4) \cup (4;\, \infty)$.

2) Точка разрыва функции: $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \frac{7^2}{4-0-4} = \frac{49}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \frac{7^2}{4+0-4} = \frac{49}{+0} = +\infty$$

Так как пределы бесконечны, то $x = 4$ – вертикальная асимптота.

3) Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x+3)^2}{x-4} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x(x-4)}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{10x + 9}{x-4} = 10.$$

$y = x + 10$ – уравнение наклонной асимптоты.

Изобразим асимптоты на графике (рис. 5.13).

4) Функция непериодичная, исследуем на четность и нечетность.

$y(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$, $y(-x) = \dfrac{(-x+3)^2}{-x-4}$, так как условия четности и нечетности не выполняются, то функция – общего вида.

5) Найдем точки пересечения с осью Оy: $y(0) = \dfrac{(x+3)^2}{x-4} = -\dfrac{9}{4}$,

и осью Оx: $\dfrac{(x+3)^2}{x-4} = 0$, откуда $x = -3$.

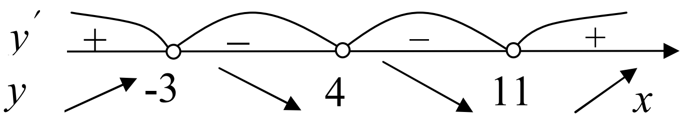
Имеем точки: $\left(0; -\dfrac{9}{4}\right)$ и $(-3; 0)$.

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y' = \left(\frac{(x+3)^2}{x-4}\right)' = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.$$

$y' = 0$, если $x^2 - 8x - 33 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 11$.

y' не существует при $x = 4$.



Определяем знаки y' в интервалах:

$y'(-10) = \dfrac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \dfrac{+}{+} > 0$, $y'(0) = \dfrac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \dfrac{(-)}{(+)} < 0$,

$y'(10) = \dfrac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \dfrac{(-)}{(+)} < 0$, $y'(20) = \dfrac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \dfrac{(+)}{(+)} > 0$.

В интервале $(-\infty; -3)$ $y' > 0$, функция возрастает.

В интервалах $(-3; 4)$ и $(4; 11)$ $y' < 0$, функция убывает.

В интервале $(11; \infty)$ $y' > 0$, функция возрастает.

$x = -3$ – точка максимума, $y(-3) = 0$,

$x = 11$ – точка минимума $y(11) = 28$.

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки

перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} \right)' = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

$y'' = 0$ – нет точек, y'' не существует при $x = 4$.

В интервале $(-\infty; 4)$ $y'' < 0$, кривая выпукла; в интервале $(4; \infty)$ $y'' > 0$, кривая вогнута. Так как при $x = 4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

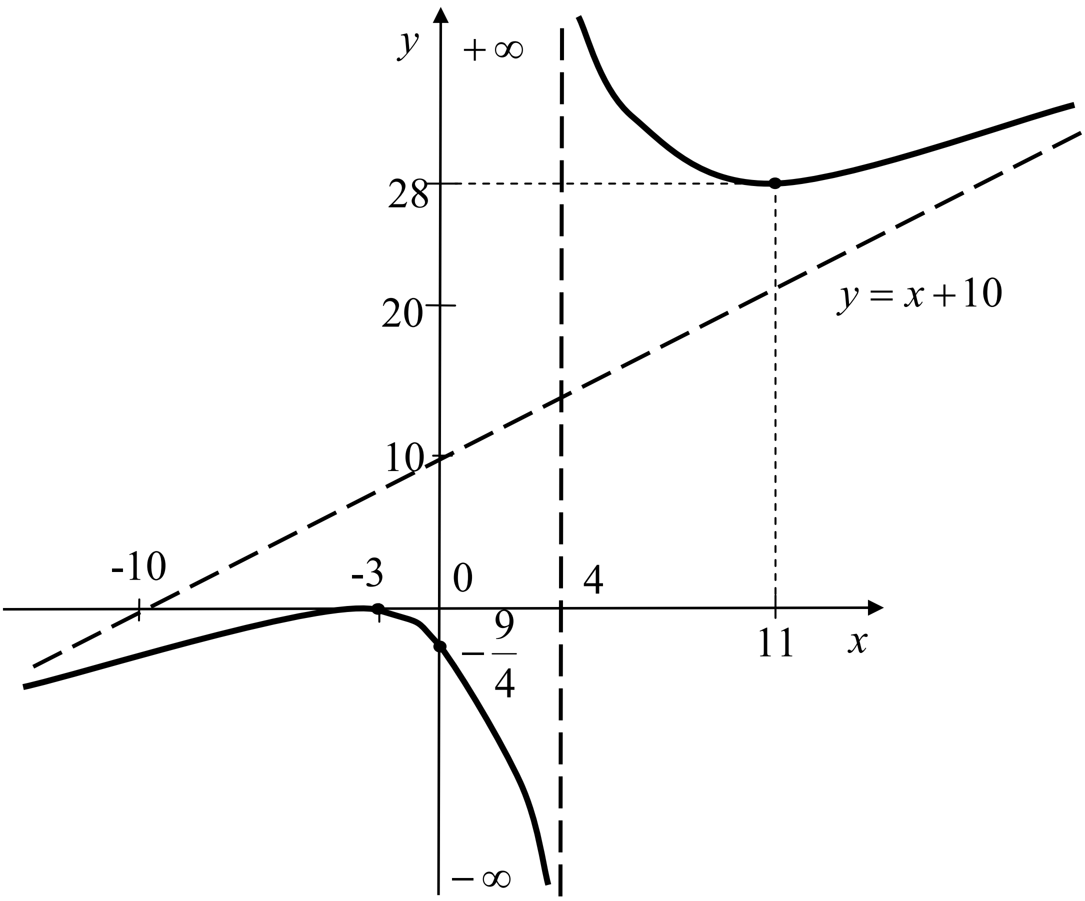


Рис. 5.13

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

1) Область определения функции: $(-\infty; \infty)$.

2) Точек разрыва нет, следовательно, вертикальных асимптот нет.

3) Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \cong \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{x^6-4x^5+4x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^5}+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\cong$$

$$\cong\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{x^6}+\sqrt[3]{x^6}+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

При нахождении коэффициента b воспользовались формулой: $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$, при этом домножили числитель и знаменатель на вторую скобку.

Уравнение наклонной асимптоты: $y=x-\dfrac{2}{3}$.

4) Исследуем четность функции:

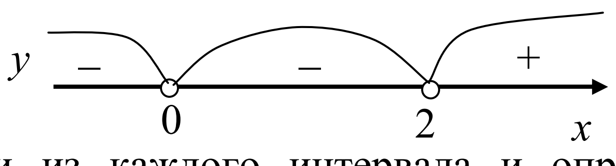
$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-2(-x)^2}=\sqrt[3]{-x^3-2x^2}$.

Так как $f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$, то функция общего вида. График функции не обладает симметрией. Функция не является периодической, так как она алгебраическая.

5) Для определения нулей функции приравняем $y=0$.

$\sqrt[3]{x^3-2x^2}=0,\ x^3-2x^2=0,\ x^2(x-2)=0,\ x_1=0,\ x_2=2$.

Функция имеет три интервала знакопостоянства $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;\infty)$.



Берем точки из каждого интервала и определяем знак y: $y(-1)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}=-\sqrt[3]{3}<0$, $y(1)=-1<0$, $y(3)=\sqrt[3]{9}>0$.

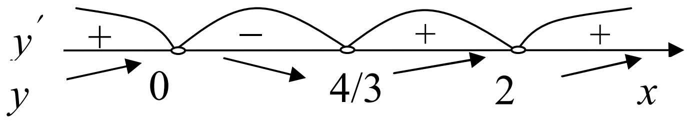
Таким образом, на промежутках $(-\infty;0)$, $(0;2)$ функция отрицательная, а на $(2;\infty)$ – положительная.

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y' = \frac{1}{3}\left(x^3 - 2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3x^2 - 4x\right) = \frac{x(3x-4)}{3x\sqrt[3]{x(x-2)^2}} = \frac{(3x-4)}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Решим уравнение $y' = 0,\ \dfrac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}} = 0,\ 3x - 4 = 0,\ x_1 = \dfrac{4}{3}.$

Кроме того, первая производная не существует при $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$. Имеем три критические точки и четыре интервала монотонности.



Возьмем точки из каждого интервала и вычислим знак производной

$$y'(-1) = \frac{(3x-4)}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}} = \frac{(-)}{(-)} > 0,\ y'(1) < 0,\ y'\left(\frac{5}{3}\right) > 0,\ y'(3) > 0.$$

Интервалом убывания служит $\left(0; \dfrac{4}{3}\right)$, в остальных интервалах функция возрастает. Точка $x = 0$ является точкой максимума со значением $y(0) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = 0$. Причем эта точка угловая, так как в этой точке y' не существует. Точка $x = \dfrac{4}{3}$ – точка минимума со значением $y\left(\dfrac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2} \approx -1{,}06$.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

Находим y''. Будем использовать логарифмическое дифференцирование, найдем логарифмы левой и правой части равенства.

$$y' = \frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2 x}},\ ln(y') = ln(3x-4) - ln\,3 - \frac{2}{3}ln(x-2) - \frac{1}{3}ln\,x,$$

Найдем производную левой и правой части:

$\dfrac{1}{y'} \cdot y'' = \dfrac{3}{3x-4} - \dfrac{2}{3(x-2)} - \dfrac{1}{3x}$, откуда

$$y''=\left(\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3x}\right)\cdot y'=\left(\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3x}\right)\cdot\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}}=$$

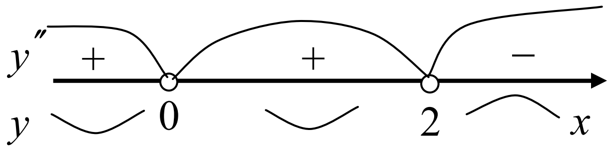
$$=\frac{9x^2-18x-6x^2+8x-3x^2+6x+4x-8}{3(3x-4)(x-2)x}\cdot\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}}=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}.$$

y'' не существует при $x=0$ и $x=2$. Отложим эти точки на числовой оси и проверим знаки y'' в интервалах.

$$y''(-1)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(-)}>0,$$

$$y''(1)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(-)}>0,$$

$$y''(3)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(+)}<0.$$



Следовательно, $x=2$ – абсцисса точки перегиба, ее ордината $y(2)=\sqrt[3]{2^3-2\cdot 2^2}=0$. Таким образом, $A(2,\ 0)$ – точка перегиба. На интервалах $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,2)$ кривая вогнута, а на интервале $(2;\,\infty)$ – выпукла.

Построим график (рис.5.14).

Для более точного построения графика функции вычислим $y(-1)\approx-1{,}44$ и $y(3)\approx 2{,}08$.

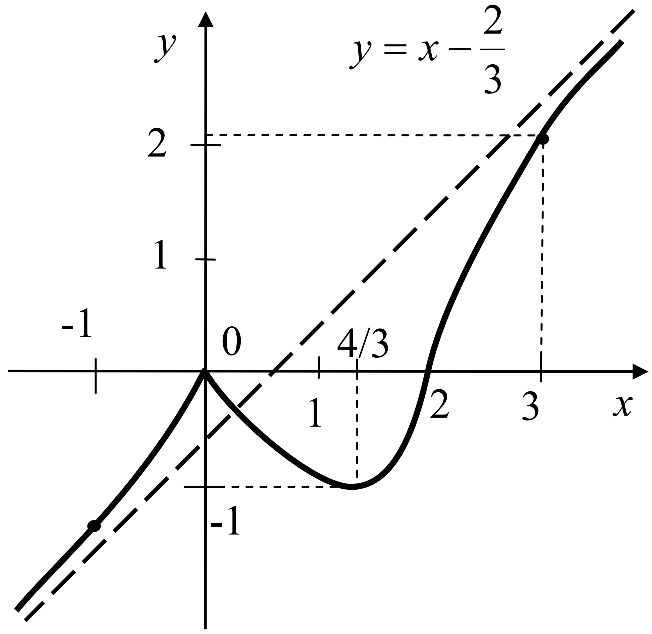


Рис. 5.14

ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Понятие функции двух переменных, область определения

Пусть заданы два множества: M – некоторое множество пар (x, y) действительных чисел и L – некоторое множество действительных чисел.

Функцией двух переменных называют правило, по которому каждой паре чисел $(x, y) \in M$ соответствует единственное число $z \in L$ при условии, что каждое число $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x, y) \in M$.

При этом x и y – независимые переменные (аргументы), z – зависимая переменная (функция), M – область определения функции, L – множество значений функции.

Функция двух переменных обозначается $z = f(x, y)$.

Функция двух переменных может быть задана с помощью таблицы, аналитически или графически.

Когда функция двух переменных задана только аналитическим выражением, то под областью определения понимают совокупность всех точек плоскости Oxy, в которых аналитическое выражение определено и принимает действительные значения. Например, для функций $z = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – некоторая функция двух переменных, выполнены условия:

1) $z = \dfrac{a}{\varphi(x, y)}$ область определения $D: \quad \varphi(x, y) \neq 0$;

2) $z = \sqrt[2n]{\varphi(x, y)}$ область определения $D: \quad \varphi(x, y) \geq 0, n \succ 0$ – целое;

3) $z = ln\,\varphi(x, y)$ область определения $D: \quad \varphi(x, y) \succ 0$;

4) $z = arcsin\,\varphi(x, y)$ область определения $D: \quad |\varphi(x, y)| \leq 1$.

<u>Пример.</u> Найти область определения функции

$$z = arcsin\frac{x}{2} + ln\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Первое слагаемое определено при $\left|\dfrac{x}{2}\right| \leq 1$ или $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$ или

$-2 \le x \le 2$.

Областью определения первого слагаемого является часть плоскости, выделенная штриховкой на рис. 6.1а).

Второе слагаемое определено при $x^2 + y^2 - 1 \succ 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \succ 1$. Изобразим штриховкой область определения второго слагаемого на чертеже (рис. 6.1б).

Область определения нашей функции есть пересечение областей определения слагаемых функции (рис. 6.1в).

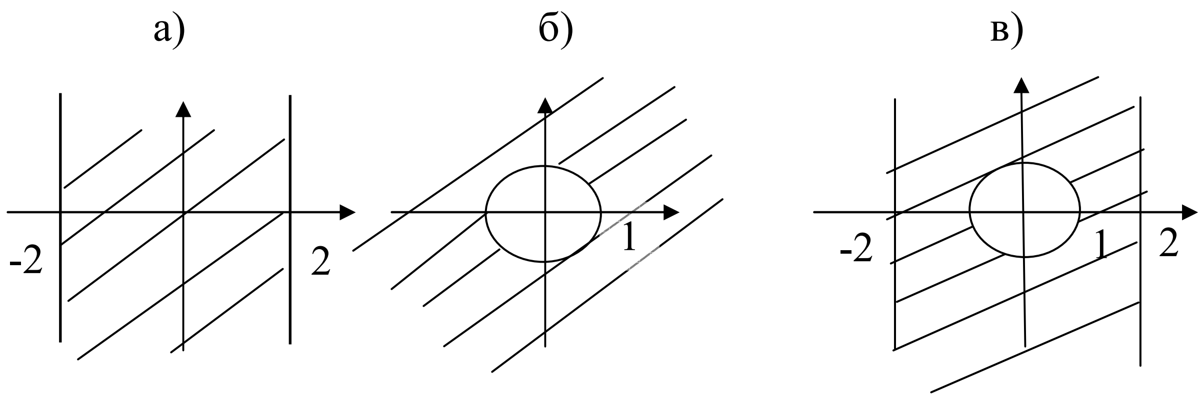


Рис. 6.1

Точки линий $x = -2, \quad x = 2$ принадлежат области определения, а точки окружности $x^2 + y^2 = 1$ не принадлежат области определения.

6.2. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем значение одного из её аргументов, например $\boldsymbol{y}$, положив $y = y_0$. Тогда функция $z = f(x, y_0)$ есть функция одной переменной $\boldsymbol{x}$. Пусть она имеет производную в точке x_0. Эта производная называется частной производной (частной производной первого порядка) функции $z = f(x, y)$ по переменной $\boldsymbol{x}$ в точке (x_0, y_0) и обозначается $f_x'(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется частная производная (частная производная первого порядка) функции $z = f(x, y)$ по переменной $\boldsymbol{y}$ в точке (x_0, y_0) и обозначается $f_y'(x_0, y_0)$.

Значение частных производных зависит от точки $P(x, y)$, в которой они вычисляются. Поэтому частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$ также есть функции точки $P(x, y)$.

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

<u>**Пример.**</u> Найти частные производные функции $z = f(x, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции $z = f(x, y)$ по переменной $\boldsymbol{x}$, полагая $y = const$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)_x' = 2xy + 5.$$

Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ находим как производную функции $z = f(x, y)$ по переменной $\boldsymbol{y}$, полагая $x = const$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)_y' = x^2 + 6y.$$

6.3. Частные производные высших порядков

Частные производные функции двух переменных являются функциями тех же самых переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются вторыми частными производными (частными производными второго порядка) исходной функции.

Функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции двух переменных.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Пример. Показать, что функция $z=x^2\cdot sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Решение. Найдём частные производные функции $z=x^2\cdot sin\frac{y}{x}$ первого порядка. Рассматривая y как постоянную величину, получим частную производную функции z по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,sin\frac{y}{x}+x^2\,cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2x\,sin\frac{y}{x}-y\,cos\frac{y}{x}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим частную производную функции z по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\,cos\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)=x\,cos\frac{y}{x}.$$

Найдём вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\,cos\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)-cos\frac{y}{x}-y\left(-sin\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=2\,cos\frac{y}{x}-cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}sin\frac{y}{x}=cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=cos\frac{y}{x}+x\left(-sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}sin\frac{y}{x}.$$

Подставим частные производные второго порядка в заданное уравнение

$$cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}sin\frac{y}{x}=cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}sin\frac{y}{x}.$$

Получили тождество, то есть функция z удовлетворяет заданному уравнению.

6.4. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям

Пусть дана функция двух переменных $z=f(x,y)$, её аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция $z=f(x,y)$ получит полное приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если её полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)=A\Delta x+B\Delta y+\omega(\Delta x,\Delta y),$$

где функция $\omega(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Главная часть приращения функции $z=f(x,y)$ – линейная относительно Δx и Δy, называется полным дифференциалом этой функции и обозначается dz. Таким образом, $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

Теорема. Если функция $z=f(x,y)$ в точке (x,y) дифференцируема (то есть, имеет дифференциал), то она в этой точке имеет частные производные, причём

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A,\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=B.$$

Таким образом, имеем

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пусть дана функция двух переменных $z=f(x,y)$, её полное приращение выражается формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y).$$

Тогда при малых значениям приращений Δx и Δy получим формулу для приближенных вычислений значений функции двух переменных с помощью дифференциала

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x{}'(x,y)\Delta x + f_y{}'(x,y)\Delta y.$$

Пример. Дана функция $z = x^2 + xy - y$ и две точки $A(1{,}2)$ и $B(1{,}03;1{,}98)$. Вычислить приближённое значение $\bar{z}_1$ функции в точке В, исходя из значения z_0 функции в точке А и заменив приращение функции при переходе от точки А к точке В дифференциалом.

Решение. Используем формулу

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Положим $x_0 = 1,\ x_0 + \Delta x = 1{,}03,\ y_0 = 2,\ y_0 + \Delta y = 1{,}98$. Тогда

$$\Delta x = 0{,}03;\ \Delta y = -0{,}02.$$

Для заданной функции вычисляем частные производные:

$$f'_x(x,y) = 2x + y \quad \Rightarrow \quad f'_x(1{,}2) = 2 + 2 = 4;$$

$$f'_y(x,y) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1{,}2) = 1 - 1 = 0;$$

$$f(x_0,y_0) = f(1{,}2) = z_0 = 1 + 2 - 2 = 1.$$

Следовательно:
$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y = \\ &= 1 + 4\cdot 0{,}03 + 0\cdot(-0{,}02) = 1{,}12.\end{aligned}$$

6.5. Экстремум функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x,y)$.

Теорема (Необходимый признак существования экстремума) Если точка (x_0, y_0) – точка экстремума функции $z = f(x,y)$, то

$$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Замечание. Функция $z = f(x,y)$ может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Точки в которых частные производные равны нулю или не существуют будем называть критическими.

Теорема (Достаточный признак существования экстремума). Пусть точка (x_0, y_0) – критическая точка функции $z = f(x,y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и все её вторые частные производные непрерывны в точке $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$. Тогда

1) если $\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}''(x_0, y_0) \cdot f_{yy}''(x_0, y_0) - \left[f_{xy}''(x_0, y_0)\right]^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) экстремум. Причем, в случае $f_{xx}''(x_0, y_0) > 0$ точка (x_0, y_0) есть точка минимуму, а в случае $f_{xx}''(x_0, y_0) < 0$ точка (x_0, y_0) есть точка максимума;

2) если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функция $z = f(x, y)$ не имеет в точке (x_0, y_0) экстремума;

3) если $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремум может иметь, а может и не иметь.

Пример. Найти экстремумы функции $z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Решение. Найдем частные производные:

$$f_x'(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f_y'(x, y) = 6xy - 18.$$

Приравнивая эти производные к нулю, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \\ 6xy - 18 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим четыре критические точки:

$M_1(3,1), M_2(1,3), M_3(-1,-3), M_1(-3,-1)$.

Найдём вторые частные производные $f_{xx}''(x, y) = 6x$, $f_{yy}''(x, y) = 6x$, $f_{xy}''(x, y) = 6y$ и составим выражение $\Delta(x, y) = 6x6x - [6y]^2 = 36\left(x^2 - y^2\right)$.

Вычисляя значения $\Delta(x, y)$ в критических точках, убеждаемся, что:

1) $\Delta(3,1) = 288, f_{xx}''(3,1) = 18 > 0$, тогда $M_1(3,1)$ – точка минимума;

2) $\Delta(1,3) = -288$, тогда $M_2(1,3)$ не является точкой экстремума;

3) $\Delta(-1,-3) = -288$, тогда $M_3(-1,-3)$ не является точкой экстремума;

4) $\Delta(-3,-1) = 288$, $f_{xx}''(3,1) = -18 < 0$, тогда $M_1(-3,-1)$ – точка максимума.

6.6. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Функция двух переменных $z = f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает наибольшего и наименьшего значений или в критических точках, лежащих внутри, или на границе области, или в угловых точках границы области.

Сформулируем правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области G, необходимо:

1) Найти значения функции в критических точках, принадлежащих области G;

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области G;

3) Наибольшее и наименьшее из всех полученных значений являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области G.

<u>Пример.</u> Функция $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4y$ задана в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z.

Решение. Построим заданную область (рис. 6.2.). Найдём критические точки внутри области, пользуясь необходимым условием существования экстремума $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2y, \\ z'_y = -2x - 2y + 4. \end{cases}$$

Решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x - 2y + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили критическую точку $M_1(1{,}1)$, которая лежит внутри области.

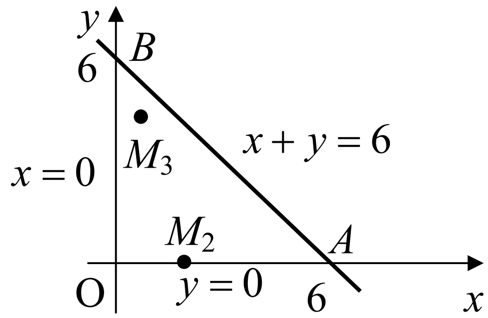


Рис. 6.2

Значение функции в этой точке $z_1 = 1 - 2 - 1 + 4 = 2$.

Исследуем функцию на границах области.

На границе $AO:\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le 6$, исходная функция примет вид $z = x^2 - 2x \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 0 = x^2$, то есть является функцией одной переменной. Определим критические точки $z'_x = 2x,\ \ 2x = 0,\ \ x = 0$. Получаем точку $O(0{,}0)$. Это угловая точка, вычисляем $z_2 = z(0) = 0$.

На $OB:\ \ x = 0,\ \ 0 \le y \le 6$, исходная функция примет вид $z = -y^2 + 4y$, то есть является функцией одной переменной. Определим критические точки $z'_y = -2y + 4,\ \ -2y + 4 = 0,\ \ y = 2$. Получаем точку $M_2(0;\, 2)$. Эта точка принадлежит отрезку, вычисляем $z_3 = z(M_2) = 4$.

На $AB:\ \ y = 6 - x,\ \ 0 \le x \le 6$, исходная функция примет вид $z = 2x^2 - 4x - 12$, то есть является функцией одной переменной. Определим критические точки $z'_x = 4x - 4,\ \ 4x - 4 = 0,\ \ x = 1$. Получаем точку $M_3(1;\, 5)$. Эта точка принадлежит отрезку, вычисляем $z_4 = z(M_3) = -14$.

Найдём значения функции в угловых точках $A(6;\, 0);\ B(0;\, 6)$ (в точке O значение уже вычислено).

$$z_5 = z(A) = 36 - 0 - 0 + 0 = 36,\quad z_6 = z(B) = 0 - 0 - 36 + 24 = -12.$$

Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее. Получаем:

$$z_1 = 2, z_2 = 0, z_3 = 4, z_4 = -14, z_5 = 36, z_6 = -12$$
$$z_{наиб} = z(A) = 36, \quad z_{наим} = z(M_3) = -14.$$

6.7. Производная по направлению, градиент

Часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины, называется скалярным полем. Тем самым, функция двух переменных $z = f(x, y)$ задает скалярное поле.

При изучении скалярных полей наряду с функцией $z = f(x, y)$ рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией – градиент скалярного поля.

Градиентом в точке (x, y) скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, называется вектор, равный

$$\overrightarrow{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}.$$

Вектор $\overrightarrow{gradz}$ является вектором, указывающим направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющим модуль, равный скорости этого возрастания.

Чтобы охарактеризовать скорость изменения поля в точке $A(x, y)$ в направлении произвольного вектора $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j}$, введем в рассмотрение производную по направлению.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$ являются направляющими косинусами вектора $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j}$.

<u>Пример.</u> Даны функция $z = 5x^2 y - 7xy^2 + 5xy$, точка $A(1,2)$ и вектор $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$. Найти градиент функции z в точке $A(1,2)$ и производную функции z в точке $A(1,2)$ по направлению вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$.

Решение. Для определения градиента функции $z = 5x^2 y - 7xy^2 + 5xy$ в точке $A(1{,}2)$ нужно найти значения частных производных в этой точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10xy - 7y^2 + 5y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 20 - 28 + 10 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 14xy + 5x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 5 - 28 + 5 = -18.$$

По определению градиента $\overrightarrow{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}$ в данном примере получим $\left.\overrightarrow{gradz}\right|_A = 2 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j}$.

Для нахождения производной в точке A по направлению вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ найдём направляющие косинусы вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$:

$$cos\,\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad cos\,\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Согласно определению производной функции вдоль заданного направления $\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot cos\,\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot cos\,\beta$, в нашем примере получаем $\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_A = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{22}{\sqrt{5}}$, то есть скалярное поле функции убывает в направлении вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$.

6.8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана функцией двух переменных $z = f(x, y)$, дифференцируемой в некоторой точке (x_0, y_0) области. В точке (x_0, y_0, z_0) данной поверхности можно провести касательную плоскость, уравнение которой имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно к касательной плоскости, называется нормалью к поверхности $z = f(x, y)$. Канонические уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

<u>Пример.</u> Дана функция $z=x^2+xy-y$ и точка $A(1;\,2)$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+xy-y$ в точке $C(1;\,2;\,z_0)$.

Решение. Для заданной функции вычисляем частные производные:

$f'_x(x,y)=2x+y \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,2)=2+2=4$;

$f'_y(x,y)=x-1 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,2)=1-1=0$;

$f(x_0,y_0)=f(1,2)=z_0=1+2-2=1$.

Используем уравнение касательной плоскости:

$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

к поверхности $z=f(x,y)$. Подставляем в уравнение касательной плоскости все найденные данные, получим:

$4(x-1)+0(y-2)-(z-1)=0$ или $4x-z-3=0$.

Для получения уравнения нормали подставим все данные в уравнение

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Получим $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Перечень вопросов для самоконтроля

1. Определители второго и третьего порядка, их свойства. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу).

2. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.

3. Исследование систем линейных алгебраических уравнений, метод Гаусса

4. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Деление отрезка в заданном отношении. Длина вектора и отрезка, направляющие косинусы. Нормированный вектор.

5. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности и коллинеарности векторов.

6. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл.

7. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов

8. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

9. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.

10. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами.

11 Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

12. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой через две точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности. Точка пересечения прямой и плоскости.

13. Поверхности второго порядка в пространстве. Цилиндрические поверхности. Эллипсоид, сфера. Однополостной гиперболоид. Двуполостной гиперболоид. Параболоид. Конус. Гиперболический параболоид.

14. Функция одной переменной, способы задания, область определения, характеристики поведения. Сложная и обратная функции. Основные элементарные функции и их графики.

15. Преобразование графиков основных элементарных функций.

16. Предел функции: на бесконечности, в конечной точке, односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь и свойства. Основные теоремы о пределах.

17. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции.

18. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

19. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику.

20. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложной и обратной функции.

21. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

22. Производные высших порядков. Правило Лопиталя.

23. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи.

24. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции.

25. Общая схема исследования функции и построения её графика.

26. Функция двух переменных: область определения, частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.

27. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

28. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.