КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Т. Ф. Горбачёва

1950 2020

ЦЕНИМ ПРОШЛОЕ, СТРОИМ БУДУЩЕЕ

А. В. Кузнецова
Е. Н. Грибанов
Е. А. Николаева
Е. В. Гутова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Кемерово 2020

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

А. В. Кузнецова
Е. Н. Грибанов
Е. А. Николаева
Е. В. Гутова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Кемерово 2020

УДК 519.2(075.8)

Рецензенты:

Заместитель директора по научной работе ФГБНУ «Федеральный центр угля и углехимии Сибирского отделения Российской академии наук» кандидат технических наук, доцент В. В. Зиновьев

Доцент кафедры прикладной математики Кемеровского государственного университета, (ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет») кандидат физико-математических наук, доцент В. В. Мешечкин

Теория вероятностей: методы и способы решения задач : учебное пособие / А. В. Кузнецова, Е. Н. Грибанов, Е. А. Николаева, Е. В. Гутова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2020. – 111 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-00137-166-3

Рассмотрены основные положения теории вероятности, представлены задания с решениями и задания для самостоятельной работы по разделам курса: случайные события и случайные величины.

Пособие подготовлено по дисциплинам «Математика», «Высшая математика», «Теория вероятностей» и предназначено для студентов всех специальностей направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева.

УДК 519.2(075.8)

ISBN 978-5-00137-166-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ 3
ПРЕДИСЛОВИЕ 4
Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ 5
1.1. Элементы комбинаторики 5
1.2. Алгебра событий 11
1.3. Классическое определение вероятности 16
1.4. Геометрическое определение вероятности 23
1.5. Вероятность суммы и произведения событий 31
1.6. Формула полной вероятности. Формула Байеса 39
1.7. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли 50
1.8. Теоремы Муавра–Лапласа. Формула Пуассона 56
Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 65
2.1. Закон распределения случайной величины 65
2.2. Функция распределения. Плотность распределения 70
2.3. Числовые характеристики случайной величины 78
2.4. Основные законы дискретной случайной величины 88
2.5. Основные законы непрерывной случайной величины 95
ПРИЛОЖЕНИЕ 109
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 112

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие охватывает основные разделы теории вероятности, входящие в учебные программы по курсу математики для обучающихся всех направлений и специальностей.

Материал пособия представлен в виде отдельных тем, которые, по мнению авторов, должны рассматриваться на занятиях. По каждой из тем в необходимом объеме представлен теоретический материал, разобрано несколько типовых задач с решением и предложены задачи для самостоятельного решения. Предлагаемые задачи подобраны из различных задачников.

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Элементы комбинаторики

Теоретическое введение

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин.

Иногда комбинаторику рассматривают как введение в теорию вероятностей, поскольку методы комбинаторики очень помогают в теории вероятностей осуществить подсчет числа возможных исходов и числа благоприятствующих исходов в разных конкретных случаях. Усиленный интерес к комбинаторике в последнее время обусловлен бурным развитием кибернетики, вычислительной техники.

Факториал. Функция $f(n)$, определенная на множестве целых, неотрицательных чисел, для которой

$$f(0)=1,$$
$$f(n+1)=(n+1)f(n),$$

называется n-факториалом и обозначается $n!$. Для любого натурального n имеем

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n.$$

Перестановки. Каждая последовательность n различных элементов с учетом их порядка называется *перестановкой* этих элементов. Число перестановок обозначается P_n и находится по формуле

$$P_n = n!.$$

Размещение. Любой упорядоченный набор k различных элементов множества M, содержащего n элементов, называется *размещением* k элементов из n. Число размещений обозначается символом A_n^k и находится по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетание. Любое подмножество k различных элементов множества M, содержащего n элементов, называется *сочетанием*.

Число сочетаний обозначается символом C_n^k и находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Примеры задач с решением

Пример 1. Сколькими способами можно расставить шесть книг на полке?

Решение. Число способов равно числу перестановок из шести элементов, то есть $P_6 = 6! = 720$.

Пример 2. Сколькими способами можно распределить три первых места для восьми участвующих в соревновании команд?

Решение. Нас интересует, какая из команд займет первое, второе и третье места, то есть нам важен порядок среди отобранных трех команд, следовательно, используем размещение. Тогда число способов найдем по формуле

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336.$$

Пример 3. Найти число способов отобрать три цветка из семи.

Решение. Так как порядок среди цветов нам не важен, то используем сочетание. Число способов найдем по формуле

$$C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Пример 4. Сколько разных слов можно образовать из букв слова «стена», «класс».

Решение.

1) «стена», $n = 5$, можно образовать $P_5 = 5! = 120$ разных слов (не все они имеют смысл);

2) «класс», $n = 5$, но 2 буквы «с», то слов будет в 2 раза меньше, т. е. 60.

Пример 5. Набирая номер телефона, вы забыли последние две цифры, но помните, что они различны. Сколько вариантов вам придется перебрать, если будете набирать наугад?

Решение.

Каждый вариант отличен либо цифрой, либо порядком набора $n=110$, $k=2$ $A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=9\cdot 10=90$ вариантов.

Задачи для самостоятельной работы (1–50)

1. Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?

2. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?

4. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

5. Сколькими способами можно группу из 15 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4, а в другой – 11 человек?

6. Из 20 студентов надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

7. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных трехзначных чисел можно из них составить?

8. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

9. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

10. В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток?

11. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

12. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

13. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

14. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников.

15. Имеются в неограниченном количестве палочки длиной 5, 6, 7, 8, 9, 10 см. Сколько различных треугольников можно из них составить?

16. Из 10 роз и 8 лилий нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 лилии. Сколькими способами это можно сделать?

17. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколько существует возможностей выбора этих пяти человек?

18. Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома: а) стояли рядом; б) не стояли рядом?

19. Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

20. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

21. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

22. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Стояли не рядом?

23. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных; в) 5 шаров одного цвета?

24. В группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать случайным образом 3 человека? а) на награждение; б) на должность старосты, профорга и культорга?

25. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать три студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

26. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочек. Сколькими способами это можно сделать?

27. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5 и в третьем – 2 вакантных места?

28. На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на сельскохозяйственные работы может быть отправлен каждый рабочий.

29. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

30. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

31. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из 8 вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку?

32. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй 28 и третьей – 20 человек. Определить число делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в состав делегации.

33. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

34. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, при этом каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

35. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой – 6 мужчинам, по третьей – 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

36. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

37. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

38. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью – 12. Сколькими способами это можно сделать?

39. Даны 2 слова: «интегрирование» и «суперкомпьютер». Вася посчитал, сколько получается слов из слова «интегрирование», если вычеркнуть в нем 2 произвольные буквы (получившиеся слова не обязательно осмысленные). Маша сделала то же самое для слова «суперкомпьютер». У кого слов получилось больше?

40. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек, причем один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

41. Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

42. Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую? Сколько среди этих способов; таких, что: а) Петя стоит впереди Коли (не обязательно подряд); б) Петя и Коля не стоят рядом?

43. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка пять львов и четыре тигра, при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

44. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами их можно рассадить их за пятнадцатью партами так, чтобы за каждой партой мальчик сидел за одной партой с девочкой?

45. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа. 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237).

46. На экзамене по математике было предложено три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по тригонометрии – 600. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400, а 300 абитуриентов решили все задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

47. В киоске продается лимонад 10 сортов. Сколькими способами можно купить 12 бутылок?

48. В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный. Сколько существует случаев распределения флажков на здании?

49. В ресторан устроился человек, который абсолютно не знает, как сервируется стол. Он получил 10 приборов, из которых 3 десертных, для сервировки одного стола. Какова вероятность того, что 3 десертных прибора окажутся на своих местах, если учесть, что при сервировке стола все приборы имеют четко определенное место?

50. Студентка решила отпраздновать свой день рождения в кафе и пригласила 23 человека. Сколькими возможными вариантами студентка может рассадить гостей (и сесть сама), если за каждым столом должно сидеть по 4 человека: а) с учетом возможности пересадки гостей за одним столом; б) без учета возможности пересадки?

1.2. Алгебра событий

Теоретическое введение

Под **событием** в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Событием называется результат испытания, который может произойти или не произойти.

Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно может либо произойти, либо не произойти.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно происходит в результате опыта.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном опыте.

События называются *несовместными*, если они не могут произойти в одном опыте.

Событие $\boldsymbol{A}$ благоприятствует событию $\boldsymbol{B}$, если из появления события $\boldsymbol{A}$ следует, что произошло событие $\boldsymbol{B}$.

События образуют *полную группу*, если в результате опыта произойдет хотя бы одно из них.

Событие $\boldsymbol{C}$ называется *суммой* событий $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$, если оно состоит в появлении события $\boldsymbol{A}$ ***или*** появлении события $\boldsymbol{B}$. Сумма событий обозначается $\boldsymbol{C = A + B}$.

Событие $\boldsymbol{C}$ называется *произведением* событий $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$, если оно состоит в появлении события $\boldsymbol{A}$ ***и*** появлении события $\boldsymbol{B}$. Обозначается $\boldsymbol{C = A \cdot B}$.

Событие $\boldsymbol{C}$ называется *разностью* событий $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$, если оно состоит в появлении события $\boldsymbol{A}$ ***и*** не появлении события $\boldsymbol{B}$. Обозначается $\boldsymbol{C = A - B}$.

Событие $\overline{\mathrm{A}}$ называется *противоположным* событию $\boldsymbol{A}$, если оно состоит в не появлении события $\boldsymbol{A}$.

События называются *равновозможными*, если нет объективных оснований считать, одно более возможным чем другое.

Равновозможные, несовместные образующие полную группу события называются *исходами* данного опыта.

Примеры задач с решением

Пример 6. Примеры событий:

– появление герба при бросании монеты;

– появление трех гербов при трехкратном бросании монеты;

– попадание в цель при выстреле;

– появление туза при вынимании карты из колоды;

– обнаружение объекта при одном цикле обзора радиолокационной станции;

– обрыв нити в течение часа работы ткацкого станка;

– оценка на экзамене;

– град и др.

Пример 7. Монета подбрасывается три раза подряд. Необходимо: построить пространство элементарных исходов и описать событие A, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

Решение. Пространство элементарных исходов: 0,00 событие A есть подмножество Ω, образованное элементарными исходами, содержащими не менее двух букв «Г»: $A = \{ггг, грг, ггр, ргг\}$.

Задачи для самостоятельной работы (51–70)

51. Относительно каждой из групп событий ответить на следующие вопросы: образуют ли эти события пространство элементарных исходов описанного эксперимента; если образуют, то являются ли они равновозможными; если не образуют, то являются ли они несовместными?

51.1. Эксперимент бросание правильной монеты; события A_1 = {выпал герб}, A_2 = {выпала цифра}.

51.2. Эксперимент – бросание неправильной монеты (например, погнутой монеты); те же события A_1 и A_2.

51.3. Эксперимент – бросание двух правильных монет; B_1 = {выпали два герба}, B_2 = {выпали две цифры}.

51.4. Эксперимент – бросание двух правильных монет; B_1 = {выпали, два герба}, B_2 = {выпали две цифры}, B_3 = {выпали один герб и одна цифра}.

51.5. Эксперимент – бросание двух правильных монет; B_1 = {герб на первой монете}, B_2 = {герб на второй монете}.

51.6. Эксперимент – бросание правильного игрального кубика. События C_1 = {1 или 2 очка}, C_2 = {2 или 3 очка}, C_3 = {3 или 4 очка}, C_4 = {4 или 5 очков}, C_5 = {5 или 6 очков}.

51.7. Эксперимент – бросание двух правильных игральных кубиков. События D_1 = {выпало две шестерки}, D_2 = {ни одной шестерки}, D_3 = {на одном кубике 6 очков, на другом не шесть очков}.

51.8. Эксперимент – передача 3 сообщений по каналу связи. События E_1 = {хотя бы 1 сообщение искажено}, E_2 = {хотя бы 1 сообщение не искажено}.

51.9. Эксперимент – передача 3 сообщений по каналу связи. События E_1 = {все 3 сообщения переданы без ошибок}, E_2 = {все,3 сообщения переданы с ошибками}, E_3 = {два сообщения переданы с ошибками, одно без ошибок}.

51.10. Эксперимент – передача 3 сообщений по каналу связи. События E_1 = {в первом сообщении есть ошибка}, E_2 = {во втором сообщении есть ошибка}, E_3 = {в третьем сообщении есть ошибка}.

51.11. Эксперимент – извлечение одной карты из полной колоды игральных карт. События F_1 = {червонная масть}, F_2 = {трефовая масть}, F_3 = {бубновая масть}, F_4 = {пиковая масть}.

51.12. Эксперимент – извлечение двух карт из полной колоды игральных карт. События G_1 = {обе карты черной масти}, G_3 ={среди вытянутых карт есть дама треф}, G_3 = {среди вытянутых карт есть туз пик}.

51.13. Эксперимент – два выстрела по цели. События H_1 = {ни одного попадания}, H_2 = {одно попадание}, H_3 = {два попадания}.

51.14. Эксперимент – эксплуатируются 2 прибора в течение одного времени. События K_1 = {первый прибор вышел из стоя, второй нет}, K_2 = {второй прибор вышел из строя, первый нет}, K_3 = {оба прибора вышли из строя}, K_4 = {один прибор не вышел из строя}.

52. По канату связи последовательно передано три знака. Описать пространство элементарных; событий и события: 1) принят только первый знак; 2) принят, по крайней мере, один знак; 3) приняты два и только два знака; 4) принято меньше двух знаков; 5) принят один знак.

53. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A – выбранное число делится на 5; событие B – данное число оканчивается нулем? Что означают события $A \setminus B$ и $A\overline{B}$?

54. Равносильны ли события A и B, если а) $\overline{A} = \overline{B}$; б) $A + C = B + C$; в) $AC = BC$.

55. Бросаются две игральные кости. Пусть – A событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B – событие, заключаю-

щееся в том, что бы хотя была одной из костей выпала единица. Описать события: AB: $A+B$; $\overline{A}$; $A\overline{B}$.

56. Упростить выражение $(A+B)(B+C)(C+A)$.

57. Доказать справедливость тождеств: 1) $(A+B)(A+\overline{B})=A$; 2) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=AB$; 3) $A\setminus B+A\setminus C=A\setminus(BC)$; 4) $(\overline{A}+BC)(\overline{B}+AC)(\overline{C}+AB)=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; 5) $AC\setminus B=(AC)\setminus(BC)$.

58. В пекарне выпекается n булок хлеба. A_i = {i-я булка хлеба подгорела}. Записать события: а) ни одна из булок хлеба не подгорела; б) хотя бы одна подгорела; в) ровно одна булка хлеба подгорела.

59. При движении автомобиля под его левые и правые колеса попадают препятствия. Пусть событие A – попадание препятствия под левое колесо, событие B – попадание препятствия под правое колесо. Какой смысл имеют события: а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $A+B$.

60. Пусть события A, B, C – попадание случайной точки в соответствующие круги на плоскости (возможны их пересечения). Изобразить события $A+B+C$; ABC; $A\overline{B}C$. Представить событие в виде суммы несовместных событий.

61. Среди студентов, собравшихся на лекцию, наудачу отбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент оказался юношей. Событие B – выбранный студент не курит, событие C – он живет в общежитии. Описать событие ABC; при каком условии будет иметь место тождество $ABC=A$?

62. В условии предыдущей задачи: когда будет верно равенство $A=B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

63. Событие A – хотя бы одно из четырех изделий бракованное, событие B – бракованных изделий не менее двух. Что означают события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

64. Когда возможно равенство $AB=A$? Проиллюстрировать геометрически на схеме.

65. Эксперимент состоит в двукратном подбрасывании игральной кости. Построить пространство элементарных событий. Описать события: A – оба раза выпало число очков, кратное трем; B – произведение очков делится на шесть. Найти соотношения между этими событиями.

66. Пусть A, B – произвольные события. Упростить выражение: $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

67. Пусть A и B – наблюдаемые события в эксперименте. Показать, что событие $A+B$ можно разложить на сумму несовместных событий следующими способами: а) $A+B=A+(B-AB)$; б) $A+B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$; в) $A+B=A+B\overline{A}$.

68. Найти случайное событие X из равенства: $(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{(X+\overline{A})}+\overline{(X+A)}=B$.

69. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выигрывает тот, кто первым забросит мяч. События: A_k = первый попадает при k-m броске, B_k = второй попадает при k-m броске, A = первый выигрывает, B = второй выигрывает. Первый баскетболист бросает первым. Определить состав множества элементарных исходов и записать события A, B в алгебре событий.

70. К механизмам управления некоторого агрегата относятся рулевое управление и две тормозные системы. Событие A – исправно рулевое управление, события B_1 и B_2 – исправны первая и вторая тормозные системы. Событие C означает работоспособность агрегата в том случае, если исправно рулевое управление и хотя бы одна из тормозных систем. Выразить события C и $\overline{C}$ через события A, B_1 и B_2.

1.3. Классическое определение вероятности

Теоретическое введение

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется *элементарным исходом*. Элементарные исходы будут *благоприятствующими* событию, если это событие наступает.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности появления этого события.

Вероятностью (классическое определение вероятности) события A называется отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов данного опыта.

Вероятность события A обозначается $p(A)$.

Тогда

$$p(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных для появления события A исходов; n – число всевозможных исходов опыта.

Основные свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Для любого события A его вероятность заключена в интервале $0 \le p(A) \le 1$.
4. Вероятность наступления противоположного события $\overline{A}$ равна разности между единицей и вероятностью события A, то есть $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Примеры задач с решением

Пример 8. Набирая номер телефона, вы забыли последние две цифры, но помните, что они различны. Сколько вариантов вам придется перебрать, если будете набирать наугад?

Решение. Каждый вариант отличен либо цифрой, либо порядком набора $n = 10$, $k = 2$, тогда $A_{10}^2 = \dfrac{10!}{(10-2)!} = \dfrac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

Пример 9. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, разложив в ряд буквы К, И, Р, Д, А, Н, З, П, он получит слово ПРАЗДНИК.

Решение. Обозначим событие A – ребенок составляет слово ПРАЗДНИК. Найдем вероятность данного события применив классическое определение вероятности: $p(A) = \dfrac{m}{n}$.

Общее число n исходов получим воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 8 элементов – 8 букв; в образовании различных соединений участвуют все 8 элементов отличающиеся друг от друга только порядком элементов, следовательно, это перестановки из 8-ми элементов. Получим $n = P_8 = 8! = 40320$.

Число исходов испытаний, благоприятствующих событию A, равно $m = 1$, так как требуется составить слово с буквами, распределенными в определенном порядке, и эти буквы различны.

Тогда вероятность события A равна: $p(A) = \dfrac{1}{40320}$.

Пример 10. Из урны, содержащей 12 черных и 8 белых шаров, наудачу вынуто два шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

Решение. Обозначим событие A – шары разного цвета, тогда по определению $p(A)=\frac{m}{n}$. Но число всевозможных исходов равно числу способов отобрать два шара из двадцати, то есть $n=C_{20}^{2}=\frac{20!}{18!\cdot 2!}=\frac{20\cdot 19}{2}=190$. Число благоприятных исходов равно числу способов отобрать один шар из 8 и один шар из 12, так как союз и, то общее число благоприятных исходов равно произведению $m=C_8^1\cdot C_{12}^1=\frac{8!}{7!\cdot 1!}\cdot\frac{12!}{11!\cdot 1!}=8\cdot 12=96$. Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{96}{190}=\frac{48}{95}$.

Пример 11. Из колоды карт наудачу вынуто две. Найти вероятность того, что они обе бубновой масти. Колода содержит 36 карт.

Решение. Обозначим событие A – из колоды карт наудачу вынуть две бубновые карты. По классическому определению вероятности имеем $p(A)=\frac{m}{n}$, где m – число способов, которыми можно вынуть из колоды две карты бубновой масти; n – общее число всевозможных исходов, то есть $m=C_9^2=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=36$; $n=C_{36}^{2}=\frac{36!}{2!\cdot 34!}=630$. Тогда $p(A)=\frac{36}{630}=\frac{2}{35}$.

Задачи для самостоятельной работы (71–120)

71. При стрельбе из винтовки вероятность попадания в цель равна 0,75. Найти число попаданий, если всего было произведено 140 выстрелов.

72. В пачке имеется 100 жетонов, занумерованных числами от 1до 100. Определить вероятность того, что номер наудачу взятого жетона будет кратным 25 или 30.

73. Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найти вероятность того, что A – одна карта окажется бубновой масти; B – 2 карты черви; C – все разной масти.

74. В лотерее разыгрывается тысяча билетов. Среди них один выигрыш в 50 рублей, пять выигрышей в 20 рублей, двадцать выигрышей по 10 рублей и пятьдесят выигрышей по 5 рублей. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 10 рублей; б) какого-либо выигрыша.

75. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что: A – выпадет одинаковое число очков; B – сумма выпавших очков равна 8; C – сумма выпавших очков четная; D – число очков, выпавших при первом броске, больше числа очков, выпавших при втором броске; E – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

76. Из колоды карт извлекается 4 карты. Найти вероятность событий: A – все черви; B – три короля и одна дама; C – один туз, один король, одна дама, один валет; D – разной масти.

77. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 человек оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

78. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадает четное число очков.

79. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «рама». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

80. В корзине 2 красных, 5 белых и 8 синих шара. Наудачу достают три шара. Найти вероятность событий: A – все одного цвета; B – все разного цвета; C – есть два синих шара; D – ровно два шара одного цвета.

81. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: 1) два мальчика, 2) две девочки, 3) девочка и мальчик?

82. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

83. На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

84. Студент сдает два экзамена с вероятностью 0,6 каждый. Какова вероятность, что он сдаст: A – оба экзамена; B – ровно один экзамен; C – не сдаст оба.

85. В группе пять двоечников: две девушки и три парня. В деканат наугад вызывают двоих. Найти вероятности событий: а) обе девушки; б) оба парня; в) одна девушка и один парень.

86. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

87. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

88. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

89. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах?

90. В ящике содержится 100 перемешанных жетонов, пронумерованных целыми числами от 1 до 100. Найти вероятность того, что извлеченный наудачу жетон имеет номер, который не делится ни на 2, ни на 3.

91. В урне а белых и в черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

92. На 20 одинаковых жетонах написано 20 двухзначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

93. В мешке смешаны нити 5 сортов; 30% белых, 40% черных, 15% красных, 10% зеленых, 5% голубых. Определить вероятность того, что наудачу взятая нить будет цветной.

94. В команде спортсменов 6 бегунов на короткие дистанции, 3 бегуна на длинные, 5 метателей, 7 борцов и 4 боксера. Определить вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен будет бегуном.

95. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «мел». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

96. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

97. Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

98. Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

99. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

100. Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найти вероятность того, что: A – одна карта окажется бубновой масти; B – 2 карты черви; C – все разной масти.

101. Из колоды карт извлекается 4 карты. Найти вероятность событий: A – все черви; B – три короля и одна дама; C – один туз, один король, одна дама, один валет; D – разной масти.

102. В группе из 25 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных студента имеют неудовлетворительные оценки?

103. В корзине 2 красных, 5 белых и 8 синих шара. Наудачу достают три шара. Найти вероятность событий: A – все одного цвета; B – все разного цвета; C – есть два синих шара; D – ровно два шара одного цвета.

104. В урне 6 белых и 4 черных шара. Какова вероятность того, что среди 5 шаров наудачу взятых из урны, будет 2 белых и 3 черных шаров?

105. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона делится без остатка на число 7.

106. В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. Какова вероятность того, что из трех взятых билетов окажется хотя бы один выигрышный.

107. На книжной полке 15 учебников, 5 из них новые. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность того, что хотя бы один из них будет новым?

108. Группе студентов для прохождения практики выделено 30 мест: 15 – в городе A, 8 – в городе B, 7 – в городе C. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются сыграть свадьбу, будут посланы на практику в один в тот же город?

109. Упаковка содержит 20 плиток, причем 3 имеют дефекты. Контролер извлекает наугад 4 плитки. Найти вероятность того, что упаковка будет принята контролером, если для этого необходимо, чтобы он не обнаружил ни одной бракованной плитки.

110. У сборщика имеется 20 деталей: 6 изготовлены заводом № 1, 10 – заводом № 2 города A, и 4 – заводом города В. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной в городе A.

111. Библиотечка состоит из десяти различных книг. Причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу три книги стоят 6 рублей.

112. Студентам, едущим на практику, предоставили 7 мест в Ленинград, 8 – в Омск и 10 – в Воронеж. Какова вероятность того, что три определенных студента попадут на практику в Воронеж?

113. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

114. Из колоды в 52 карты вынимаются наудачу три карты. Найти вероятность того, что это тройка, семерка, туз.

115. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу излеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

116. Кусок сыра $7 \times 7 \times 7$ см в красной пластиковой оболочке разрезается на 125 кусочков одинакового размера и конфигурации для приготовления салата, кладется в салатницу и тщательно перемешивается. Найти вероятности следующих событий. Извлечь кусочки сыра случайным образом из салатницы с красной оболочкой, покрывающей: а) три грани; б) две грани; в) одну грань; г) ни одной; д) четыре грани.

117. Какова вероятность того, что в четырехзначном номере случайно выбранного в большом городе автомобиля: а) все цифры разные; б) две пары одинаковых цифр; в) только две одинаковые цифры; г) только три одинаковые цифры; д) все цифры одинаковые; е) сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

118. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи: белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?

119. В кафе имеется 6 свободных столов по два места за каждым столом, 3 стола из которых являются столами для самообслуживания. Найти вероятность того, что две пришедшие пары займут столы, которые обслуживаются официантами.

120. Для приготовления компота хозяйка купила 24 абрикоса и 23 сливы. Дома девушка не удержалась и съела какой-то один фрукт, причем неизвестно, какой. После этого наудачу она извлекла из сумки еще два фрукта для младшего брата, которые оказались абрикосами. Найти вероятность того, что съеденный фрукт был: а) абрикос; б) слива.

1.4. Геометрическое определение вероятности

Теоретическое введение

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области благоприятных исходов к мере области всевозможных исходов

$$p(A) = \frac{S_{\text{бл}}}{S},$$

где $S_{бл}$ – площадь области благоприятных исходов; S – площадь области всевозможных исходов.

Примеры задач с решением

Пример 12. (Задача о встрече) Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

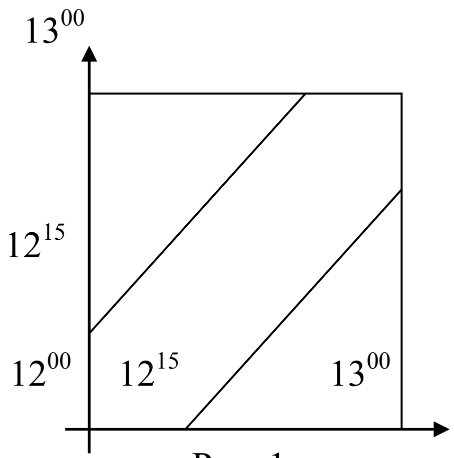


Рис. 1

Решение. Обозначим событие A – студенты встретятся, тогда противоположное событие $\overline{A}$ – студенты не встретятся. Отложим по оси Ox время прихода первого студента, по оси Oy время прихода второго студента. Тогда точка области с координатами $(x;y)$ однозначно определяет время прихода обоих студентов. Студенты встретятся, если выполнено условие $|x-y|\le\frac{1}{4}$. Построим две прямые линии $x-y=\frac{1}{4}\Rightarrow y=x-\frac{1}{4}$ и $x-y=-\frac{1}{4}\Rightarrow y=x+\frac{1}{4}$. Область, заключенная между этими линиями внутри квадрата, составляет область благоприятных исходов события A (рис. 1). Для события $\overline{A}$ область благоприятных исходов согласно рис. 1 состоит из двух прямоугольных треугольников с катетами, равными $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$, общей площадью, равной $S_{бл}=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$. Область всевозможных исходов равна площади квадрата со стороной 1. Следовательно, площадь всевозможных исходов равна $S=1\cdot 1=1$. Тогда вероятность события $\overline{A}$ равна $p\left(\overline{A}\right)=\dfrac{\frac{9}{16}}{1}=\dfrac{9}{16}$. Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}$.

Пример 13. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение. Пусть радиус круга равен R, тогда сторона шестиугольника тоже равна R. При этом площадь круга $S=\pi R^2$, а площадь шестиугольника $s=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. Следовательно,

$$p=\frac{S-s}{S}=\frac{\pi R^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{\pi R^2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0{,}174.$$

Пример 14. На отрезок AB случайным образом брошены три точки: C, D и M. Найти вероятность того, что из отрезков AC, AD и AM можно построить треугольник.

Решение. Обозначим длины отрезков AC, AD и AM через x, y и z и рассмотрим в качестве возможных исходов множество точек трехмерного пространства с координатами (x, y, z). Если принять длину отрезка равной 1, то эти множество возможных исходов представляет собой куб с ребром, равным 1. Тогда множество благоприятных исходов состоит из точек, для координат которых выполнены неравенства треугольника: $x+y>z$, $x+z>y$, $y+z>x$. Это часть куба, отрезанная от него плоскостями $x+y=z$, $x+z=y$, $y+z=x$, одна из них, плоскость $x+y=z$, проведена на рис. 2.

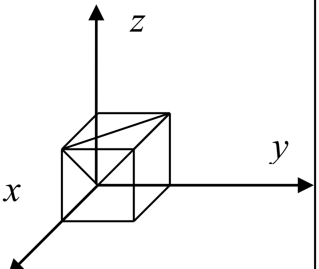


Рис. 2

Каждая такая плоскость отделяет от куба пирамиду, объем которой равен $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{6}$. Следовательно, объем оставшейся части $v=1-3\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$. Тогда $p=\dfrac{v}{V}=\dfrac{1}{2}:1=\dfrac{1}{2}$.

Пример 15. На отрезок L, имеющий длину 40 см, помещен меньший отрезок l длиной 15 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит о его расположения на отрезке L.

Решение. Обозначим событие A – точка, наудачу поставленная на отрезок L, попадет также и на отрезок l.

Найдем вероятность события A, $p(A)=\frac{15}{40}=0{,}375$.

Задачи для самостоятельной работы (121–160)

121. Территория нефтебазы имеет форму прямоугольника со сторонами 50 м и 30 м. На территории имеется 4 круглых нефтебака, диаметром 10 м каждый. Какова вероятность поражения нефтебаков бомбой, попавшей на территорию нефтебазы, если попадание бомбы в любую точку равновероятно.

122. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется внутри квадрата?

123. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

124. Найти вероятность того, что из трех отрезков, не превосходящих по длине 10 см, можно построить треугольник.

125. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превосходит единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение $x \cdot y$ меньше 0,09.

126. В квадратном уравнении $x^2+px+q=0$ известно, что $|p|\le 2$, $|q|\le 2$. Найти вероятность того, что дискриминант этого уравнения положителен.

127. У квадратного трехчлена $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q наудачу выбраны из интервала [–1;1]. Какова вероятность того, что квадратный трехчлен имеет действительные корни.

128. Наудачу взяты два числа x и y, каждое из которых по модулю не превышает двух. Найти вероятность того, что их произведение меньше по модулю единицы.

129. Для двух наудачу взятых чисел известно, что $|x|+|y| \le 2$, найти вероятность того, что $y^2 \le |x|$.

130. Найти вероятность того, что из трех отрезков, каждый из которых меньше 8-ми можно построить треугольник, если известно, что один из отрезков равен 6.

131. На отрезке OA длины 12 см числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

132. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

133. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

134. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

135. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

136. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что ве-

роятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

137. На отрезке OA длины 12 см числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

138. На отрезке OA длины 12 см числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$ причем $y < x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем 6. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

139. Задача Бюффона (французский естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

140. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный, затем снова одну минуту – зеленый и полминуты – красный и т. д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает машина. Какова вероятность, что она проедет перекресток без остановок?

141. Внутрь круга радиуса R наудачу бросают точку. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

142. Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 метров одна от другой. Ширина корабля 20 метров. Какова вероятность того, что корабль благополучно пройдет через заграждение.

143. На отрезок длины L наудачу ставят две точки B и C. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше $\frac{L}{2}$.

144. Взяты два случайных положительных числа x и y, каждое из которых не больше 2. Найти вероятность того, что: а) произведение этих чисел будет не больше 1; б) сумма чисел будет не больше 3, а разность между большим из них и меньшим, не меньше 1.

145. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу в случайное время в течение суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

146. Внутрь квадрата со стороной 10 бросают точку. Найти вероятность того, что: а) точка попадет и в квадрат со стороной 2, расположенного внутри большого квадрата; б) точка попадет в треугольник, с основанием 10 и высотой равной 2,5 расположенный внутри квадрата.

147. Внутрь шара радиуса R бросают точку. Найти вероятность того, что точка попадет внутрь вписанной в шар правильной фигуры, если эта фигура: а) куб; б) цилиндр высоты H; в) круговой конус высоты H.

148. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в малый круг.

149. В окне, размером 2×2 открыта форточка, размером $0{,}5\times0{,}5$. Какова вероятность того, что пуля случайно выпущенная по окну попадет в форточку?

150. Хозяйка для приготовления пиццы раскатала пласт теста радиусом 18 см. Сверху распределила тонким слоем томатный соус в форме круга радиусом 16 см. Затем распределяет шампиньоны, предварительно разрезав их на небольшие пластики. Найти вероятность того, что пластик шампиньона, наудачу размещенный в круге из теста, попадет также и в малый круг из томатного соуса.

151. Имениннику подарили круглый торт. В этот торт были запечены три горошины черного перца – на счастье. Торт разрезали на сектора по 30°. Какова вероятность, что все три горошины окажутся в одном из этих отрезанных кусочков?

152. Имеются два треугольника: прямоугольный равнобедренный и равносторонний. Площадь прямоугольного треугольника 20 см^2 и она в два раза больше площади равностороннего. В каждый из треугольников вписана окружность. В каждый из треугольников случайным образом ставятся две материальные точки. Что вероятнее: обе точки, поставленные в прямоугольный треугольник,

попадут в окружность или одна из двух точек, установленных в равносторонний треугольник, попадет и в окружность?

153. Стержень длиной L делится на две части в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить треугольник?

154. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

155. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

156. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

157. Из отрезка [1;2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

158. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ расположен круг $x^2+y^2=9$. Найти вероятность попадания точки в область, ограниченную эллипсом и окружностью.

159. Внутри квадрата с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ наудачу выбирается точка M (x,y). Найти вероятность события $A=(x,y)\left|x^2+y^2\le a^2,\ a>0\right.$.

160. В прямоугольник вписан эллипс: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. В прямоугольник ставятся наудачу пять точек. Найти вероятность того, что все пять точек попадут в эллипс.

1.5. Вероятность суммы и произведения событий

Теоретическое введение

Теорема 1. Для несовместных событий вероятность появления суммы событий равна сумме вероятностей, то есть

$$p(A+B)=p(A)+p(B).$$

Теорема 2. Для любых событий вероятность появления суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, то есть

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B).$$

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или не произошло второе событие.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если любая комбинация из них независима.

События называются *зависимыми*, если появление или не появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Вероятность события B, вычисленная в предположении осуществления события A, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $p_A(B)$ или $p(B/A)$.

Теорема 3. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло, то есть

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A).$$

Следствие 1. Если появление события A не зависит от события B, то появление события B не зависит от события A.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятности этих событий.

Примеры задач с решением

Пример 16. Вероятности получить на экзамене 5, 4, 3 соответственно равны 0,2; 0,3; 0,3. Найти вероятность сдачи экзамена.

Решение. Обозначим события:

A – студент сдал экзамен;

B – студент сдал экзамен на 5;

C – студент сдал экзамен на 4;

K – студент сдал экзамен на 3.

По условию задачи имеем: $p(B) = 0{,}2$; $p(C) = 0{,}3$; $p(K) = 0{,}3$. Применяем теорему сложения в силу несовместности событий B, C, K, имеем

$$p(A) = p(B + C + K) = p(B) + p(C) + p(K) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3.$$

Пример 17. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;

B – ровно одно попадание при двух выстрелах;

C – два попадания;

D – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда $A = H_1 + H_2$, $B = H_1 \cdot \overline{H}_2 + \overline{H}_1 \cdot H_2$, $C = H_1 \cdot H_2$, $D = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2$. События H_1 и H_2 совместны и независимы. Следовательно, $p(C) = p(H_1) \cdot p(H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(A) = p(H_1) + p(H_2) - p(H_1 \cdot H_2) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$, $\mathrm{p(B) = p(H_1) \cdot p(\overline{H}_2) + p(\overline{H}_1) \cdot p(H_2)} = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события $H_1 \cdot \overline{H}_2$ и $\overline{H}_1 \cdot H_2$ несовместны), $p(D) = p(\overline{H}_1) \cdot p(\overline{H}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Заметим, что события A и D являются противоположными, поэтому $p(A) = 1 - p(D)$.

Пример 18. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наудачу последовательно извлекают два шара. Найти вероятность того, что второй извлеченный шар белый, если известно, что первый извлеченный шар черный.

Решение. Обозначим события:

A – первый извлеченный шар черный;

B – второй извлеченный шар белый.

Для нахождения искомой вероятности используем классическое определение:

$$p_A(B) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов, равное числу оставшихся после первого извлечения белых шаров, то есть $m = 2$; n – число всевозможных оставшихся шаров, то есть $n = 4$. Тогда искомая вероятность равна: $p_A(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Пример 19. Известно, что 85% готовой продукции цеха является стандартной. Вероятность того, что стандартная деталь отличного качества, равна 0,51. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется отличного качества.

Решение. Пусть A – событие, означающее, что взятое наудачу изделие стандартное, B – событие, означающее, что изделие отличного качества. Изделие может быть отличного качества, если оно стандартное. Поэтому из условия задачи следует $p(A) = 0{,}85$, а $p_A(B) = 0{,}51$. Тогда искомая вероятность равна $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p_A(B) = 0{,}85 \cdot 0{,}51 = 0{,}4335$.

Задачи для самостоятельной работы (161–210)

161. Студент сдает два экзамена с вероятностью 0,6 каждый. Какова вероятность, что он сдаст: A – оба экзамена; B – ровно один экзамен; C – не сдаст оба экзамена&

162. Студент сдает математику с вероятностью 0,7, физику с вероятностью 0,8, философию – 0,9. Найти вероятности: A – сдаст все экзамены; B – сдаст ровно один экзамен; C – сдаст ровно два экзамена; D – сдаст хотя бы один экзамен?

163. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

164. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых студент знает только 15. Для успешной сдачи экзамена нужно ответить на 2 предложенных вопроса, или на один из них и дополнительный вопрос. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

165. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга. В поисках книги студент обходит библиотеки пока не найдет ее или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность: A – студент посетит 2 библиотеки;

B – не более двух библиотек; C – четыре библиотеки. Что вероятнее: найдет книгу или нет?

166. Четыре друга идут сдавать экзамен. Вероятность сдачи для первого – 0,9, для второго – 0,5, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,7. Найти вероятности: A – все сдадут экзамен; B – сдаст ровно один из них; C – сдадут больше двух; D – сдаст хотя бы один.

167. В первой корзине 4 белых и 6 черных шаров; во второй – 5 белых и 5 черных; в третьей 7 белых и 3 черных шара. Из каждой корзины достают по одному шару. Найти вероятности, что среди этих шаров: A – все белые; B – ровно один белый; C – хотя бы один белый; D – два белых шара.

168. Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,7. Найти вероятности следующих событий: а) оба стрелка попали в мишень; б) в мишень попал хотя бы один стрелок.

169. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 человек оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

170. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: а) два мальчика; б) две девочки; в) девочка и мальчик?

171. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

172. Студент сдает два экзамена. Вероятность того, что он сдаст первый экзамен, равна 0,7; второй – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) оба экзамена; б) только один экзамен; в) хотя бы один экзамен.

173. В первой корзине 4 белых и 6 черных шаров; во второй- 5 белых и 5 черных шаров; в третьей – 7 белых и 3 черных шара. Из каждой корзины достают по одному шару. Найти вероятность того, что среди этих шаров: а) все белые; б) один белый; в) не более одного белого; г) хотя бы один белый; д) два белых шара.

174. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга. В поисках книги сту-

дент обходит библиотеки, пока не найдет ее, или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность того, что студент посетит: а) две библиотеки; б) не более двух библиотек; в) хотя бы две библиотеки. Что вероятнее: найдет студент книгу или нет?

175. В корзине 7 красных и 3 белых шара. Из корзины поочередно достают по шару до тех пор, пока не вынут белый шар. Найти вероятность того, что: а) в корзине останется 6 шаров, б) вынут 2 шара; в) вынут не более 3-х шаров; г) вынут не менее 3-х шаров.

176. Студент может уехать в институт автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 минут?

177. Сколько раз нужно бросить пару игральных кубиков, чтобы с вероятностью не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

178. У двух стрелков по два патрона. Каждый из них стреляет в одну и ту же мишень, пока не попадет, или пока не израсходует все патроны. Вероятности попаданий соответственно равны 0,6 и 0,8. Найти вероятности событий: а) мишень будет поражена дважды, б) будут израсходованы все патроны, в) останется один неизрасходованный патрон, г) останется хотя бы один неизрасходованный патрон.

179. Два игрока поочередно бросают: а) монету; б) игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб (или шестерка для б) найти вероятность выигрыша первого игрока.

180. В группе 8 человек, говорящих только на немецком языке, и 6 человек – только на финском. Какова вероятность того, что из двух наудачу выбранных людей оба говорят на одном языке?

181. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга и если книга есть в фонде библиотеки, то с вероятностью 0,5 она может быть на руках у другого читателя. В поисках книги студент обходит библиотеки, пока не найдет ее, или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность того, что студент посетит: а) две библиотеки; б) не более двух библиотек; в) хотя бы две библиотеки.

182. Студент выучил 25 вопросов из 30. Билет состоит из: а) двух вопросов; б) трех вопросов. Найти вероятность того, что

билет, который достанется студенту, будет состоять из вопросов, среди которых он не выучил: а) один; б) хотя бы один; в) два вопроса.

183. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них одна нестандартная, во втором – 10 ламп, из них тоже одна нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

184. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,7; четвертый – 0,4. Найти вероятность того, что ни один станок в течение часа не потребует внимания рабочего.

185. Для сообщения об аварии установлено два независимо работающих сигнализатора-автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал хотя бы от одного сигнализатора.

186. Вероятность поражения цели при одновременном залпе из двух орудий равна 0,98. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго она равна 0,8.

187. На стройку от разных поставщиков должны поступить 4 партии материалов. Вероятности того, что партии будут доставлены в срок, равны соответственно 0,9, 0,8, 0,7 и 0,95. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна партия не будет доставлена в срок; б) только две партии доставят в срок.

188. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,9. Найти вероятность того, что: а) только два из них поразят цель; б) хотя бы одно попадание в цель будет.

189. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих датчика. Вероятность срабатывания первого и второго равны 0,9 и 0,95. Определить вероятность того, что при пожаре сработает: а) только один; б) хотя бы один датчик.

190. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; 9 очков – 0,3; 8 или меньше очков равна

0,6. Найти вероятность того, что при двух выстрелах стрелок выбьет не более 18 очков.

191. Два спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норму – 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена хотя бы одним спортсменом.

192. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0,8, для второго – 0,9. Вычислить вероятность попадания в цель.

193. Зашедший в магазин мужчина что-нибудь покупает с вероятностью 0,1, зашедшая женщина – с вероятностью 0,6. У прилавка один мужчина и две женщины. Вычислить вероятность того, что по крайней мере один из них что-нибудь купит.

194. Батарея из трех орудий производит залп по цели. Вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только одно орудие поразит цель; б) хотя бы одно попадет.

195. Охотник выстрелил 3 раза по цели. Вероятность попадания в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) промахнется 3 раза; б) попадет хотя бы 1 раз; в) попадет 2 раза.

196. Три станка работают независимо друг от друга. Рабочий, обслуживающий их, должен был отлучиться на некоторое время. Вероятности того, что в течение этого времени станки не потребуют внимания рабочего, равны соответственно: 0,7, 0,8 и 0,9. Вычислить вероятности того, что: а) за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания; б) откажет только один станок.

197. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) хотя бы на 2 вопроса.

198. Строительную бригаду обслуживает бульдозер и экскаватор. Надежность бульдозера равна 0,7, а экскаватора – 0,9. Если хотя бы одна машина выходит из строя, бригада простаивает. Какая

часть простоев бригады происходит по вине производителей бульдозеров?

199. Два датчика посылают сигналы в общий канал связи, причем, первый из них посылает втрое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,01, от второго – 0,03. Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи?

200. Издательство отправило журналы в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки их в каждое почтовое отделение равна соответственно: 0,9; 0,92; 0,96. Найти вероятность того, что: а) 2 почтовых отделения; б) три почтовых отделения получат журналы с опозданием.

201. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета, при условии, что не вынут синий шар.

202. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

203. Определить, какова вероятность, что все члены группы, состоящей из трех лиц разного возраста, проживут ближайшие 10 лет, если вероятность прожить 10 лет для первого лица равна 0,95, вероятность для второго лица – 0,93 и для третьего – 0,89.

204. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули 1 шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: а) белый или черный; б) синий или красный; в) белый, черный или синий.

205. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическими объектами, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность обнаружения объекта за n циклов.

206. Вероятность выхода из строя одной из систем для самолетов, отслуживших ресурс, равна: для системы управления – 0,01; для планера – 0,02; для шасси – 0,03. Какова вероятность того, что на случайно выбранном самолете не будет аварийной посадки?

207. Мастер обслуживает пять станков. 20% рабочего времени он провел у первого станка, 10 – у второго, 15 – у третьего, 25 –

у четвертого, 30 – у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находился: 1) у первого или третьего станков; 2) у второго или пятого; 3) у первого или четвертого; 4) у первого или второго, или третьего; 5) у четвертого или пятого.

208. Вероятность выиграть по билету одной лотереи равна 0,08, по другой – 0,09. Какова вероятность лицу, купившему по одному билету каждой лотереи, выиграть по обеим, если розыгрыш лотерей производится независимо друг от друга?

209. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

210. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того« что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

1.6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теоретическое введение

Теорема 4. Если событие A может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, ..., H_n$ на соответствующую условную вероятность события A:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(H_k) \cdot p_{H_k}(A).$$

Это формула называется формулой полной вероятности, события $H_1, H_2, ..., H_n$ – гипотезы, причем сумма вероятностей гипотез равна единице, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} p(H_k) = 1.$$

Формула Байеса. Формула Байеса применяется при решении практических задач в том случае, когда событие A, появляющееся совместно с каким-либо из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, произошло и требуется произвести количественную переоценку вероятностей событий $H_1, H_2, ..., H_n$ (события $H_1, H_2, ..., H_n$, образуют полную группу несовместных событий).

Априорные вероятности: $p(H_1)$, $p(H_2)$, $p(H_n)$ известны. Требуется вычислить апостериорные вероятности: $p_A(H_1)$, $p_A(H_2),\ldots,p_A(H_n)$.

Пусть событие A может наступить при условии появления одной из гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Вероятность совместного появления события A с одной из гипотез H_m по теореме умножения равна

$$p(A \cdot H_m) = p(A) \cdot p_A(H_m) = p(H_m) \cdot p_{H_m}(A),$$

отсюда получаем

$$p_A(H_m) = \frac{p(H_m) \cdot p_{H_m}(A)}{p(A)}$$

или

$$p_A(H_m) = \frac{p(H_m) \cdot p_{H_m}(A)}{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) + \ldots + p(H_n) \cdot p_{H_n}(A)}.$$

Полученные формулы носят название *формулы Байеса.*

Примеры задач с решением

Пример 20. Три завода производят одинаковые изделия, которые поступают на один склад, причем первый завод производит 30%, второй – 20% и третий – 50% от всех поступивших на склад деталей. Для первого завода брак составляет 5%, для второго – 8% и для третьего – 10%. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь окажется бракованной.

Решение. Обозначим события:

A – деталь бракованная;

H_1 – деталь произведена на первом заводе;

H_2 – деталь произведена на втором заводе;

H_3 – деталь произведена на третьем заводе.

По условию задачи можем записать:

$$p(H_1) = 0{,}3;$$
$$p(H_2) = 0{,}2;$$
$$p(H_3) = 0{,}5;$$

$$p_{H_1}(A)=0{,}05;$$
$$p_{H_2}(A)=0{,}08;$$
$$p_{H_3}(A)=0{,}1.$$

Тогда искомую вероятность необходимо вычислять по формуле полной вероятности:

$$p(A)=\sum_{k=1}^{3} p(H_k)\cdot p_{H_k}(A)=0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}08+0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}081.$$

Пример 21. В урну, содержащую 3 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все варианты предположений о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Рассмотрим следующие предположения о первоначальном составе шаров (гипотезы):

H_1 – в урне было 3 белых шара;

H_2 – в урне были 2 белых и 1 шар другого цвета;

H_3 – в урне был 1 белый и 2 шара другого цвета;

H_4 – в урне было 3 шара другого цвета.

Обозначим событие:

A – извлечен белый шар;

Гипотезы $H_i (i=1;2;3;4)$ составляют полную группу событий $\sum\limits_{i=1}^{4} p(H_i)=1$. Поскольку имеется 4 гипотезы, причем по условию они равновероятны, то вероятность каждой из них $\frac{1}{4}$, т. е. $p(H_i)=\frac{1}{4}$.

Событие A может произойти только с одним из событий H_i. Так как в урну добавляют один белый шар, то условные вероятности события A равны

$$p_{H_1}(A)=\frac{4}{4}=1;$$
$$p_{H_2}(A)=\frac{3}{4};$$

$$p_{H_3}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$p_{H_4}(A)=\frac{1}{4}.$$

Искомую вероятность того, что извлечен белый шар найдем по формуле полной вероятности при $n=4$:

$$p(A)=\sum_{k=1}^{4} p(H_k)\cdot p_{H_k}(A)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4+3+2+1}{16}=\frac{5}{8}.$$

Пример 22. В первой группе 20 студентов, во второй группе 25 студентов, а в третьей группе 15 студентов. Вероятность сдать экзамен на отлично для студентов первой группы равна 0,6, для студентов второй – 0,3, для третьей – 0,4. Наудачу взятый студент сдал экзамен на отлично. Найти вероятность того, что он из третьей группы.

Решение. Обозначим события:

A – наудачу взятый студент сдал экзамен на отлично;

H_1 – студент из первой группы;

H_2 – студент из второй группы;

H_3 – студент из третьей группы.

Определим вероятности:

$$p(H_1)=\frac{20}{20+25+15}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3};$$

$$p(H_2)=\frac{25}{20+25+15}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12};$$

$$p(H_3)=\frac{15}{20+25+15}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4};$$

$$p_{H_1}(A)=0{,}6;$$

$$p_{H_2}(A)=0{,}3;$$

$$p_{H_3}(A)=0{,}4.$$

Тогда искомая вероятность $p_A(H_3)$ по формуле Байеса равна

$$p_A(H_3)=\frac{p(H_3)\cdot p_{H_3}(A)}{p(H_1)\cdot p_{H_1}(A)+p(H_2)\cdot p_{H_2}(A)+p(H_3)\cdot p_{H_3}(A)}=$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 0{,}4}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}4} = \frac{4}{17}.$$

Задачи для самостоятельной работы (211–260)

211. Болты изготавливаются на 3 станках, производящих соответственно 25%, 30%, 45% общего количества продукции. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3%, 2%. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется дефектным?

212. В тире имеется 5 ружей, вероятности из попадания из которых соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

213. Вероятности правильного определения химического состава детали для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4 и 2/5. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка, если равновероятно деталь может попасть на проверку к любому из контролеров.

214. Из 25 приборов, имеющихся в магазине, 5 штук произведены заводом № 1, 12 штук – заводом № 2 и 8 штук – заводом № 3. Вероятность того, что прибор, изготовленный заводом № 1, в течение гарантийного срока не выйдет из строя, равна 0,95. Для прибора 2-го завода такая вероятность равна 0,9, а 3-го завода – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый прибор выдержит гарантийный срок.

215. Два токаря обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака первого – 0,03; второго – 0,04. Обработанные детали складываются в одно место. При этом первый токарь изготавливает деталей в 2 раза больше, чем второй. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

216. В железнодорожном составе 50 вагонов с углем двух сортов. По сортности угля вагоны состава делятся на три группы: 25 вагонов содержат 70% угля первого сорта и 30% угля второго сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60% и 40%, остальные – 85% и 15%. Случайно взятый для анализа уголь оказался второго сорта. Какова вероятность, что он взят из вагона первой группы?

217. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Контролер ОТК проверяет детали по упрощенной системе. Вероятность ошибки при проверке годных деталей равна 0,02, при проверке негодных деталей – 0,01. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, является годным?

218. В телеателье поступили кинескопы с двух заводов: 35 штук с первого завода и 50 – со второго. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный на первом заводе, не выйдет из строя в течение гарантированного срока, равна 0,85. Аналогичная вероятность для второго завода – 0,7. Наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он был изготовлен на втором заводе.

219. У рабочего есть 10 сверл, 2 из которых имеют дефект. Вероятность того, что в течение смены сверло не придется менять, равна 0,75 для сверла, не имеющего дефект, и 0,25 – для сверла с дефектом. Наудачу взятое сверло в течение смены сломалось. Какова вероятность того, что было взято сверло без дефекта?

220. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях направлено из первой группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадет в сборную университета, равны соответственно 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал студент?

221. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха № 2, а остальная – цеха № 1. Продукция цеха № 1 содержит 90%, а цеха № 2 – 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Какова вероятность, что он из цеха № 1?

222. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция 1-го завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, 2-го – 10%, 3-го – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с 1 завода, 20% – со 2-го и 50% – с 3-го?

223. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему IV группу крови, можно переливать кровь любой группы; человеку со II или III группой

крови можно переливать кровь либо той же группы, либо I группы; человеку с I группой крови можно перелить только кровь I группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью, 7,9% – четвертую группу крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

224. Студент знает только 10 билетов из 25. В каком случае его шансы получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

225. В ящике 15 новых и 5 игранных теннисных мячей. Для игры наудачу выбирают два мяча и после игры возвращают обратно. Затем для второй игры так же наудачу извлекают еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет производиться новыми мячами?

226. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен, 10 человек подготовились отлично, 7 – хорошо, 5 – удовлетворительно и 3 – плохо. Отличники знают все 30 вопросов, хорошо подготовленные – 25, удовлетворительно – 20 и плохо подготовленные – 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на заданный вопрос. Какова вероятность, что он подготовлен: а) отлично; б) отлично или хорошо?

227. Прибор состоит из двух последовательно включенных узла. Вероятность безотказной работы в течение времени T для первого узла равна 0,9 , для второго – 0,8. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Какова вероятность, что: а) отказал только первый узел; б) отказали оба узла?

228. Из полного набора домино произвольно берутся две кости. Какова вероятность того, что, следуя обычным правилам, вторую кость можно приставить к первой?

229. В первой урне 10 шаров, из них 3 белых, во второй урне 12 шаров, из них 7 белых, в третьей урне 15 шаров, из них 6 белых. а) Из наудачу выбранной урны достают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым? б) Из первой и второй урн достают по шару и кладут их в третью урну. Какова вероятность, что два шара, вынутых после этого из третьей урны, окажутся белыми?

230. В коробке находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми ве-

роятностями выпадения всех шести цифр; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При подбрасывании неправильной кости шестерка появляется с вероятностью 1/3, единица – с вероятностью 1/9, а остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная кость была подброшена, и в результате выпало: а) шесть очков; б) одно очко. Найти вероятность того, что подбросили правильную кость.

231. В урне лежит шар неизвестного цвета, с равной вероятностью белый или черный. В урну опускают один белый шар и после перемешивания наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

232. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% – с заболеванием L, 20% – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; болезни L – 0,8; болезни M – 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

233. Два автомата производят одинаковые детали. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

234. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартна.

235. Два автомата производят одинаковые детали. Производительность первого автомата равна производительности второго. Первый автомат производит в среднем 70% деталей отличного качества, а второй – 90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена вторым автоматом.

236. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 – хорошо, 4 – удовлетворительно, а 2 – плохо. В экзаменационных билетах содержится 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо – 35, удовлетворительно – 25 и плохо – 10 вопросов. Приглашенный студент ответил

на все три вопроса билета. Найти вероятность того, что он подготовлен хорошо.

237. На стройку поступают однотипные изделия из 4 заводов. Вероятность производства бракованной продукции на каждом из заводов равна соответственно 0,04, 0,03, 0,06 и 0,02. Первый завод поставляет 300, второй – 200, третий – 500, а четвертый – 250 изделий. Поступило бракованное изделие. Найти вероятность того, что оно произведено на втором заводе.

238. Известно, что в партии из 600 металлических конструкций 200 изготовлены на первом заводе, 250 – на втором и 150 – на третьем. Вероятность того, что конструкция стандартна при изготовлении каждым заводом, равна соответственно 0,97; 0,91 и 0,93. Найти вероятность того, что наудачу выбранная из данной партии конструкция окажется стандартной.

239. В новом доме 75% квартир отделывает бригада № 1, остальные – бригада № 2. Первая бригада допускает дефекты в работе в 0,1% квартир, вторая – 0,3%. Найти вероятность того, что наудачу проверенная квартира будет иметь дефекты в отделке.

240. Скобы изготавливаются на трех станках, которые производят соответственно 25%, 30% и 45% всего количества скоб. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3% и 2%. Какова вероятность того, что скоба, случайно взятая из всей поступившей продукции окажется без брака?

241. Мастер получает в среднем 50% облицовочной плитки с завода № 1, 20% и 30% – соответственно с заводов № 2 и № 3. Вероятность того, что плитка первого завода не имеет дефектов, равна 0,7, завода № 2 – 0,8, завода № 3 – 0,9. Наудачу выбранная мастером плитка оказалась без дефектов. Какова вероятность того, что она поступила с завода № 2?

242. Объект возводят три бригады монтажников. Вероятности того, что данная бригада допустит нарушение технологии равны соответственно 0,01, 0,02 и 0,015. Первая бригада выполнила 30% всего объема работ, вторая – 40%, третья – 30%. Какова вероятность того, что выбранный случайным образом блок смонтирован с нарушением технологии?

243. В группе спортсменов – 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,7.

Найти вероятность того, что спортсмен, выполнивший норму, окажется велосипедистом.

244. Часы изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45% и третий – 15%. В продукции первого завода спешат 80% часов, у второго – 70% и у третьего – 90%. Каково вероятность того, что купленные часы спешат?

245. В городе 3 шоколадные фабрики. Первая выпускает 45% конфет, причем 15% из них в обертке. Вторая выпускает 35% конфет, из которых 23% в обвертке. Третья выпускает 20% конфет, из них 48% в обвертке. Какова вероятность, что купленная наугад конфета окажется без обертки?

246. Первой чашке 2 пирожка с малиной и 4 – с лимоном, во второй чашке – 5 пирожков с малиной и 5 – с лимоном. Из первой чашки наудачу переложили во вторую 2 пирожка. Найти вероятность того, что потом взятый наудачу из второй чашки пирожок окажется с лимоном.

247. Студент ждет автобус. В автопарке 25 автобусов с креслом кондуктора в передней части автобуса и 15 автобусов – с креслом кондуктора в задней части автобуса. Найти вероятность того, что: а) студент может проехать «зайцем», если вероятность входа студента в заднюю дверь равна 0,95; б) студент встретит кондуктора, если они в одной части автобуса, и не встретит, если в разных.

248. Серия послематчевых пенальти состоит из 10 ударов. После нанесения 7 ударов выигрывает первая команда со счетом 3 : 2 (первый удар наносила первая команда). Вероятность точно пробитого пенальти первой командой – 0,6, второй – 0,8. Найти вероятность того, что после нанесения 10 ударов первая команда не проиграет.

249. В баре разливают 50% пива «Балтика», 30% пива «Золотая бочка» и 20% пива «Очаков». Вероятность того, что пиво «Балтика» окажется «свежим», равна 0,3. Для пива «Золотая бочка» и пива «Очаков» эти вероятности соответственно равны 0,1 и 0,2. Посетитель купил «свежее» пиво. Какова вероятность того, что ему налили пиво «Очаков»?

250. На складе имеется два мешка муки первого или второго сорта. Грузчик принес еще один мешок муки первого сорта. Найти

вероятность того, что взятый мешок окажется мешком муки первого сорта, если равновозможны все предположения о первоначальном сорте муки.

251. Перед Новым годом 4 ребенка написали письмо Деду Морозу. Вероятности исполнения их желаний равны 0,95; 0,7; 0,53 и 0,03. Найти вероятность исполнения одного из наудачу прочитанных писем.

252. Вероятность того, что первая группа из пяти студентов помнит письмо Онегина Татьяне, равна 0,85; для второй группы из 10 студентов эта вероятность составляет 0,5; для третей группы из 24 студентов она составляет 0,2. Наудачу выбранный студент получил за этот отрывок «отлично». Найти вероятность, что отвечал студент из второй группы.

253. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

254. Зачет принимают трое преподавателей, вероятность получить положительную оценку (при отсутствии необходимых знаний) у которых равна соответственно 0,01; 0,02 и 0,03. Какова вероятность сдачи зачета без подготовки, если любой студент с равной возможностью попадает к каждому из преподавателей? Студент Иванов в указанных условиях зачет сдал. Какова вероятность, что он сдал второму преподавателю?

255. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

256. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на кото-ром стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для за-

правки машина. Найти вероятность того, что это грузовой автомобиль.

257. Два программиста при подготовке программы набрали на разных компьютерах по одинаковому числу операторов в алгоритмическом языке «Fortran». Вероятность того, что первый программист допустит ошибку, равна 0,05; для второго программиста эта вероятность равна 0,1. При проверке программ была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошибку допустил первый программист (предполагается, что оба компьютера были исправны).

258. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

259. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны: 0,2; 0,4 и 0,3.

260. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

1.7. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

Теоретическое введение

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие A. При этом представляет интерес не исход каждого отдельного испытания, а общее число появлений события A в результате определенного количества испытаний. В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа m появлений события A в результате общего числа n испытаний. Рассмотрим случай независимых испытаний.

Испытания называются *независимыми*, если результат одного испытания не зависит от результатов других испытаний и вероятность появления события A в каждом испытании постоянна.

Пусть происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется схемой повторения испытаний. Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно k раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что A произошло в некоторых к испытаниях и не произошло в остальных $n - k$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из n по k, то есть $C_n^к$, а вероятность каждого из них: $p(A) = p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте A не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим **формулу Бернулли**:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Примеры задач с решением

Пример 23. Найти вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб появится ровно один раз.

Решение. Вероятность появления герба при одном бросании монеты равна $p = \frac{1}{2}$, вероятность его непоявления соответственно равна $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность появления одного герба при пяти бросаниях по формуле Бернулли равна $p_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{32}$.

Пример 24. Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение. Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия. Найдем вероятность этого по формуле Бернулли: $p_9(4) = C_9^4 \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^5 = 0{,}0006092$. Тогда $p = 0{,}0006092 \cdot 0{,}05 = 0{,}0000304$.

Задачи для самостоятельной работы (261–300)

261. Производится 3 выстрела, вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Найти вероятности того, что будет ровно одно, два или три попадания.

262. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,3. Наугад выбираются 4 студента. Найти вероятности того, что среди них получают стипендию: ровно 1; ровно 2; ровно 3; никто не получает.

263. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб будет более 2 раз.

264. В комнате 6 электролампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она придет в негодность в течение года, равна 3/4. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не более двух лампочек?

265. Вероятность того, что расход воды на предприятии не превысит нормы в течение суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в течение 7 дней расход воды будет нормальным более 5 дней?

266. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,10. Какова вероятность того, что в сообщении из 8 знаков будет искажено не более трех знаков?

267. 5% телевизоров одного из телевизионных заводов требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что из 5 телевизоров более трех потребуют ремонта.

268. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз; не менее 50 раз.

269. Вероятность того, что человек имеет высшее образование в России 0,3. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых человек высшее образование имеют более 20%?

270. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий хотя бы одно не выдержит испытание.

271. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две партии из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

272. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) 2 раза; б) не менее двух раз; в) не более двух раз; г) не менее одного и не более трех раз.

273. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) 3 мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) хотя бы один мальчик; д) хотя бы одна девочка. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

274. Вероятность того, что студент сдаст сессию в срок, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число успевающих студентов среди 1500 обучающихся в вузе.

275. 31% продукции обувной фабрики составляют изделия высшего сорта. Сколько пар обуви высшего сорта скорее всего будет среди 75 изделий, поступивших с фабрики?

276. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число появлений «6» очков было бы равно 32?

277. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Приборы испытываются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что из 120 приборов при испытании откажут: а) ровно15; б) менее 20; в) от 10 до 25; г) не более 18.

278. Вероятность того, что деталь стандартна, равно 0,9. Какова вероятность того, что доля стандартных деталей среди 900 проверенных будет заключена в пределах от 0,8 до 0,91?

279. Баскетболист забрасывает штрафной с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что: а) все 20 бросков будут удачными. б) из 50 бросков более 43 будут удачными? в) из 100 бросков от 75 до 95 будут удачными. Сколько раз баскетболист должен бросить мяч, чтобы с вероятностью не меньше 0,95 можно было ожидать не менее 100 удачных бросков?

280. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 4-х посеянных семян взойдут три.

281. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 5 волокон длинных окажется три.

282. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров не более одного потребуют ремонта.

283. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят по крайней мере 6 предприятий.

284. На факультете 20% студентов выходцы из сельской местности. Какова вероятность того, что среди 4 случайно выбранных студентов хотя бы один будет из сельской местности?

285. На стройку завезли 7 контейнеров аппаратуры. Вероятность того, что аппаратура каждого контейнера не требует отладки, равна 0,3. Определить вероятность того, что потребуют работы мастера: а) три контейнера; б) не менее 5 контейнеров.

286. Вероятность того, что муфтовое соединение труб водопровода не даст течи, равна 0,9. Некоторый участок водопровода содержит 8 таких соединений. Определить вероятность того, что при этом течь дадут: а) не более трех соединений; б) ровно 2 соединения.

287. Вероятность искажения одного знака равна 0,1. Определить вероятность того, что сообщение из 10 знаков содержит ровно три искажения.

288. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Какова вероятность того, что среди наугад выбранных 5 волокон длинных окажется: а) 3 волокна, б) не более 2-х?

289. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы 11 ноября, если для этого необходимо иметь на линии не менее восьми автомашин.

290. По мишени производится три выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,8. Найти вероятность: а) будет 2 попадания; б) не более одного попадания в мишень.

291. Вероятность производства бракованного изделия равна 0,2. Найти вероятность того, что из 4-х произведенных изделий бракованных будет не менее трех.

292. Вероятность того, что при одном измерении будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,2. Произведено 5 независимых измерений. Найти вероятность того, что не более чем в двух измерениях допущенная ошибка превысит заданную точность.

293. В мастерской имеется 12 моторов. Вероятность того, что мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что не менее 10 моторов работают с полной нагрузкой.

294. В водоеме карпы составляют 80% всех рыб. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб, карпов окажется: а) 4 штуки; б) не менее 4.

295. По мишени производится три выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,8. Найти вероятность событий: а) все три промаха, б) попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

296. В аудиторию вошли восемь студентов. Найти вероятность того, что три из них ответят на вопрос преподавателя, если вероятность того, что каждый из них подготовился, одинакова и равна 0,7.

297. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

298. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

299. Фабрика выпускает конфеты четырех сортов: A, B, C и D. Из партии, содержащей равное количество конфет всех сортов, комплектуются детские подарки, включающие по 8 конфет в каждом. Какова вероятность того, что из 25 подарков в девяти окажется по одной конфете сорта A?

300. Пусть вероятность попадания в цель равна 1/5. Производится 10 независимых выстрелов. Какова вероятность попадания в цель, по меньшей мере, дважды?

1.8. Теоремы Муавра–Лапласа. Формула Пуассона

Теоретическое введение

Локальная теорема Лапласа.

При большом числе испытаний пользоваться формулой Бернулли достаточно трудно. Поэтому при большом числе испытаний $(n \geq 20)$ пользуются целым рядом приблизительных формул.

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появится событие A. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Если число испытаний велико, то вероятность наступления события A ровно m раз (безразлично, в какой последовательности) приближенно может быть найдена по асимптотической формуле Лапласа:

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $q = 1 - p$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) функция $\varphi(x)$ четная, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) для $x > 4$ значение функции $\varphi(x)$ близко к нулю.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении, табл. 1.

Интегральная теорема Лапласа.

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Если число испытаний велико, то вероятность того, что событие A наступит не менее a раз и не более b раз, приближенно равно

$$p(a \leq m \leq b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где m – число появлений событий A в n испытаниях;

$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Свойства функции $\Phi(x)$:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) для $x > 5$ значение функции $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в приложении, табл. 2.

Формула Пуассона.

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p. Если число испытаний велико, а вероятность p очень мала, то вероятность появления события A ровно m раз в n испытаниях приближенно определяется по формуле Пуассона:

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Формула Пуассона применяется для $\lambda \le 10$.

Примеры задач с решением

Пример 25. Отдел технического контроля проверяет партию из 20 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,88. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

Решение. По условию задачи имеем

$$n = 20;$$
$$p = 0{,}88;$$
$$q = 1 - p = 1 - 0{,}88 = 0{,}12.$$

Подставляя в неравенство, получим

$$20 \cdot 0{,}88 - 0{,}12 \le m_0 \le 20 \cdot 0{,}88 + 0{,}88$$

или

$$17{,}48 \le m_0 \le 18{,}48.$$

Единственное целое число, принадлежащее этому интервалу, равно 18. Следовательно, наивероятнейшее число стандартных деталей в партии 18.

Пример 26. Вероятность того, что станок-автомат произведет стандартную деталь, равна $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что из 900 изготовленных деталей стандартными будут 804 детали.

Решение. По условию задачи имеем

$$n = 900;\ m = 804;\ q = 1 - p = 0{,}1,$$

тогда

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{npq}} = \frac{804 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{6}{9};$$

$$\varphi\left(-\frac{6}{9}\right) \approx 0{,}3187;$$

$$p_{900}(804) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{1}{9} \cdot 0{,}3187 \approx 0{,}0354.$$

Пример 27. Вероятность появления события A в каждом из 250 независимых испытаний равна 0,008. Найти вероятность того, что событие A появится 3 раза.

Решение. По условию задачи имеем: $p = 0{,}008$; $n = 250$. Вычислим:

$$\lambda = np = 250 \cdot 0{,}008 = 2;$$

$$p_{250}(3) \approx \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0{,}18.$$

Пример 28 Известно, что при контроле бракуется 10% деталей. Для контроля отобрано 500 изделий. Найти вероятность того, что число годных деталей окажется в пределах от 460 до 475.

Решение. По условию задачи

$$n = 500;\ p = 0{,}9;\ q = 0{,}1;\ a = 460;\ b = 475.$$

Подставляем

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{460 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 1{,}49;$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{475 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 3{,}73;$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(1{,}49) = 0{,}4319;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(3{,}73) = 0{,}4999;$$

Задачи для самостоятельной работы (301–360)

301. Устройство состоит из 1000 элементов. Вероятность выхода одного элемента из строя равна 0,001 и не зависит от состояния остальных элементов. Определить вероятность выхода из строя 2 элементов.

302. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

303. Сдается 400-квартирный дом, 5% квартир которого с недоделками. Найти вероятность того, что обнаружено при сдаче дома: а) 25 квартир; б) не менее 30 и не более 60 квартир с недоделками.

304. Диспетчерская ЖЭУ обслуживает 1000 квартир. Вероятность того, что в течение дня туда поступит заявка, для каждой квартиры равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение дня не более 18 квартир потребуют вызова мастера.

305. Всхожесть семян кукурузы равна 80%. Определить вероятность того, что среди 100 посеянных семян: а) не взойдут 20; б) взойдут от 80 до 90 семян.

306. Книга издана тиражом 50000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит пять неправильно сброшюрованных книг.

307. Для испытания на прочность изготовлены 5000 одинаковых деталей. Вероятность разрушения детали из-за случайных дефектов равна 0,02. Какова вероятность разрушения во время испытаний 70 деталей?

308. Трос состоит из 200 жил. Вероятность того, что одна жила не удовлетворяет техническим требованиям, равна 0,015. Трос относят ко второму сорту, если в нем не более 4 дефектных жил. Определить вероятность того, что трос второго сорта.

309. К магистрали подключено 100 пневматических инструментов, каждый из которых работает в данный момент времени с вероятностью 0,4. Магистраль не перегружена, если число одновременно работающего инструмента не превышает 58. Найти вероятность того, что в данный момент магистраль не перегружена.

310. К водопроводу подключено 120 предприятий, каждое из которых с вероятностью 0,7 в данный момент времени осуществляет забор воды. Определить вероятность того, что забор воды производят не менее 80 и не более 110 предприятий.

311. При производстве изделий вероятность появления брака равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 500 изделий будут забракованы три изделия.

312. Вероятность того, учебник будет нуждаться в новом переплете, равна 0,3. Определить вероятность того, что среди сданных в библиотеку 5000 учебников необходимо переплести заново от 1300 до 2100 книг.

313. 70% продукции строительного кооператива высшего качества. Определить вероятность того, что 1000 изделий этого кооператива высшего сорта будет не менее 682 и не более 760 изделий.

314. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет ровно три и не более трех негодных изделий.

315. Вероятность того, что саженец приживется, равна 0,8. Посажено 400 саженцев. Какова вероятность того, что приживутся не менее 250 деревьев?

316. Вероятность разрушения бетонного образца при испытании на сжатие равна 0,01. Определить вероятность того, что в партии из 300 образцов разрушатся: а) ровно 2 образца; б) не более 4 образцов.

317. Из поступившей партии зерна, в которой доля крупных зерен составляет 25%, отбирают для пробы 1000 зерен. Определить вероятность того, что число крупных зерен в этой пробе окажется не менее 240 и не более 270.

318. Контролер проверяет партию панелей. Вероятность того, что наудачу взятая панель стандартна, равна 0,9. Определить вероятность того, что из 100 проверенных панелей стандартных окажется не менее 84.

319. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Вычислить вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в 5 веретенах.

320. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена от 200 до 250 раз в серии из 600 выстрелов.

321. Вероятность повреждения облицовочной плитки при погрузочных работах и транспортировке, равна 0,02. Какова вероятность того, что среди доставленных 200 плиток негодных окажется только 5?

322. Столяр за рабочий день вставил 100 рам. Зная, что вероятность брака 0,2, найти вероятность того, что среди вставленных рам без брака не менее 72 и не более 84.

323. Семена содержат 0,1% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

324. При транспортировке и погрузочно-разгрузочных работах 3% поступившего кирпича оказывается битым. Найти вероятность того, что из партии в 10000 кирпичей битыми окажется не более 340?

325. На фабрике имеется 625 станков. Вероятность того, что станок работает с полной нагрузкой, равна 0,64. Найти вероятность того, что не менее 400 и не более 430 станков работают с полной нагрузкой.

326. Слесарь за смену поставил 400 кранов. Вероятность того, что кран не имеет дефекта 0,9. Определить вероятность того, что среди поставленных кранов не менее 345 и не более 372 не имеют дефектов.

327. В магазин поступило 150 телевизоров. Вероятность того, что телевизор требует регулировки перед продажей, равна 0,4 для каждого из них. Какова вероятность того, что потребуют регулировки не менее 50 и не более 80 аппаратов?

328. Вероятность выхода из строя одного телевизора равна 0,02. Определить вероятность того, из 600 телевизоров, выпущенных заводом, потребуют ремонта 20.

329. Оптовая база обслуживает 100 магазинов. Вероятность заявки на данный день от каждого магазина равна 0,04. Найти вероятность того, что 22 декабря будет обслужено пять магазинов.

330. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

331. Вероятность того, что любой абонент позвонит в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 700 абонен-

тов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

332. Известно, что 70% всего числа, изготавливаемых заводом кирпичей выпускается первым сортом. Определить вероятность того, что из партии 2100 кирпичей первого сорта: а) ровно 1600 штук, б) не менее 1470 штук.

333. Из поступившей партии зерна, в которой доля крупных зерен составляет 20%, отбирают для пробы 1000 зерен. Определить вероятность того, что число крупных зерен в этой пробе окажется не менее 190 и не более 210.

334. Вероятность доставки на стройку панели с браком равна 0,008. Найти вероятность того, что при отборе случайным образом 100 панелей устранить брак потребуется: а) в 4 панелях, б) не менее, чем в пяти панелях.

335. При массовом производстве изделий вероятность появления брака равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 600 изделий бракованными будут: а) не более трех, б) ровно три изделия.

336. Стеновая панель подвергается на испытаниях воздействию нагрузок. Вероятность разрушения панели при этих нагрузках равна 0,4. Какова вероятность того, что при испытаниях из 100 панелей будет разрушено не более двадцати?

337. Вероятность выживания бактерий после радиактивного облучения равна 0,004. Какова вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не менее трех?

338. 80% производимого кирпича удовлетворяет стандартам. Определить вероятность того, что среди сотни, подвергшихся проверке кирпичей, стандартными окажутся: а) 70 кирпичей; б) не менее 70 и не более 80 кирпичей.

339. Для испытания на прочность строительного материала изготовлено 50 образцов. Вероятность разрушения образца из-за случайных дефектов его структуры при данной нагрузке равна 0,08. Какова вероятность того, что при испытании будет разрушено 6 образцов?

340. В здании института имеется 2100 электроламп, вероятность включения которых равна 0,7. Определить вероятность того, что число одновременно включенных электроламп будет равно 1700 и не более 1470 (два случая).

341. Вероятность разрушения бетонного образца при испытании на сжатие равна 0,001. Определить вероятность того, что в партии из 300 образцов разрушится: а) ровно два; б) не более четырех образцов.

342. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

343. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

344. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470; в) не более 1469.

345. В лотерее разыгрывается в среднем один выигрыш на 1000 номеров. Какова вероятность, имея 100 билетов, получить хотя бы два выигрыша?

346. Фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено в пределах между 652 и 760?

347. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

348. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случае отобранной партии из 75 изделий?

349. В камере хранения ручного багажа 80% составляют чемоданы. Было выдано 50 мест багажа. Какова вероятность того, что среди выданных вещей было 38 чемоданов?

350. На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся 3 студента с одним и тем же днем рождения.

351. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, равна 0,003.

Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно 2; б) не более трех; в) более двух; г) хотя бы одну.

352. Корректура в 500 страниц содержит 1300 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа. Какова вероятность, что на первых двух страницах не будет ни одной опечатки?

353. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,002 отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

354. Вероятность того, что студент – девушка, равна 0,4. Найти вероятность, что из 800 студентов девушек меньше 200; более 500.

355. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени T равна 0,005. Найти вероятность того, что произойдет не более 3 обрывов.

356. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров опоздают не более двух?

357. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42 размера, равна 0,4. Найти вероятность того, что из 900 покупателей не более 160 потребуют обувь этого размера.

358. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха от 400 до 520 раз?

359. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 200 новорожденных окажется: а) 100 мальчиков; б) 90 девочек; в) более половины мальчиков; г) не более 95 девочек; д) не менее 105 и не более 125 мальчиков.

360. Магазин получил 2000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность того, что магазин получит более трех разбитых бутылок.

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Закон распределения случайной величины

Теоретическое введение

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное (но при этом только одно) возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

В отличие от случайного события, являющегося качественной характеристикой случайного результата испытания, случайная величина характеризует результат испытания количественно.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает конечное или бесконечное счетное множество значений.

Примером дискретной случайной величины могут являться: число дефектных деталей в партии, число заявок, число отказов элементов за определенное время и так далее.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала. Примером непрерывной случайной величины могут являться время безотказной работы отдельных элементов системы, погрешность измерения физических величин.

Случайные величины обычно обозначаются заглавными буквами конца латинского алфавита – $X, Y, Z, ...$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами – x, y, z,...

Для задания случайной величины недостаточно перечислить все ее возможные значения. Необходимо также знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытаний при одних и тех же условиях, то есть нужно задать вероятности их появления.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Две случайные величины называются *независимыми*, если распределение вероятности одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Таблица, содержащая возможные значения случайной величины и соответствующие вероятности, называется *рядом распределения* случайной величины, и выглядит она следующим образом:

X	x_1	x_2	x_3	….	x_i	….
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	….	p_i	….

Примеры задач с решением

Пример 29. Составить закон распределения чисел появлений герба при трех бросаниях монеты.

Решение. Случайная величина X – число появлений герба – может принимать значения: 0; 1; 2; 3. Соответствующие вероятности $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$, $p(X=3)$ найдем по формуле Бернулли, используя тот факт, что вероятность появления герба в одном испытании равна $p = \frac{1}{2}$. Находим

$$q = 1 - p = \frac{1}{2};$$

$$p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

$$p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8};$$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8};$$

$$p(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, ряд распределения имеет вид

X	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Пример 30. Вероятности того, что студент сдаст экзамен в сессию по математическому анализу и органической химии соот-

ветственно равны 0,7 и 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа экзаменов, которые сдаст студент.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X в результате экзамена может принять одно из следующих значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятность этих значений. Обозначим события:

A – студент сдает экзамен по математическому анализу;

$\overline{A}$ – студент не сдает экзамен по математическому анализу;

B – студент сдает экзамен по органической химии;

$\overline{B}$ – студент не сдает экзамен по органической химии.

По условию: $p(A) = 0{,}7$ тогда $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $p(B) = 0{,}8$, тогда $p(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Тогда

$$p(X = 0) = p(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 02 = 0{,}06;$$

$$p(X = 1) = p(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(A) \cdot p(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot p(B) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38;$$

$$p(X = 2) = p(A \cdot B) = P(A) \cdot p(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Следовательно, ряд распределения имеет вид

X	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,06	0,38	0,56

Контроль: $0{,}06 + 0{,}38 + 0{,}56 = 1$.

Задачи для самостоятельной работы (361–380)

361. В урне 3 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимаются 3 шара. Составить закон распределения числа черных шаров среди отобранных.

362. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения числа появления 5 очков.

363. В урне лежат 5 шаров. Из них 3 белых и 2 черных. Построить закон распределения случайной величины X – числа белых шаров среди 2 отобранных.

364. Два стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.

365. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

366. Устройство состоит из 3-х независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

367. Составить закон распределения вероятностей для суммы очков, выпавших при бросании 2-х игральных костей.

368. Составить закон распределения для числа попаданий в мишень при 3-х выстрелах, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 2/3.

369. Два спортсмена кидают мяч в корзину. Вероятность попадания в нее первым спортсменом равна 0,5; вторым – 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в корзину.

370. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Производится шесть выстрелов. Составить закон распределения числа: а) попаданий; б) непопаданий в цель.

371. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более трех выстрелов. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6.

372. В коробке 9 фломастеров, из которых 2 фломастера уже не пишут. Наудачу берут 3 фломастера. Случайная величина X – число пишущих фломастеров среди взятых. Составить закон распределения случайной величины.

373. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 6 учебников, причем 4 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 4 учебника. Случайная величина X – число учебников в переплете среди взятых. Составить закон распределения случайной величины.

374. В среднем по 60% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения случайной величины X – числа договоров, по которым была выплачена страховая сумма среди наудачу отобранных четырех договоров.

375. Радиостанция через определенные промежутки времени посылает позывные сигналы (не более четырех) до установления двусторонней связи. Вероятность получения ответа на позывной сигнал равна 0,3. Случайная величина X – число посланных позывных сигналов. Составить закон распределения.

376. В двух ящиках находятся по 10 пронумерованных шаров. В первом ящике три шара имеют номер 1, четыре шара имеют номер 2, два шара имеют номер 3 и один шар имеет номер 4. Во втором ящике четыре шара имеют номер 1, пять шаров имеют номер 2 и один шар имеет номер 3. Из этих ящиков наугад берут по одному шару и вычисляют произведение их номеров. Найти ряд распределения вероятностей получения числа, равного произведению номеров.

377. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

378. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым – 0,8. Вначале сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками (т. е. ограничиться возможными значениями X, равными 1, 2, 3 и 4).

379. Игра состоит в набрасывании колец на колышки. Игрок получает четыре кольца и бросает по одному из этих колец до первого попадания на колышек. Вероятность попадания при каждом бросании равна 0,1. Составить закон распределения случайной величины X – числа неизрасходованных игроком колец.

380. Среди 7 микросхем 3 – неисправные. Наугад берут 4 микросхемы. Составить закон распределения случайной величины X – числа неисправных микросхем среди отобранных.

2.2. Функция распределения. Плотность распределения

Теоретическое введение

Функция распределения является наиболее общей формой задания закона распределения случайной величины. Она используется как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Обозначается $F(x)$.

Функция распределения задает вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше фиксированного действительного числа x, то есть $F(x) = p(X < x)$.

Свойства функции распределения

1. Функция распределения $F(x)$ есть неотрицательная функция, заключенная в промежутке: $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения $F(x)$ случайной величины есть неубывающая функция, то есть из $x_2 > x_1$ следует $F(x_2) > F(x_1)$.

3. На минус бесконечности функция $F(x)$ распределения равна нулю, а на плюс бесконечности функция $F(x)$ распределения равна единице, то есть $F(-\infty) = 0;\ F(\infty) = 1$.

Следует отметить, что в то время, как каждая случайная величина однозначно задает функцию распределения, одну и ту же функцию распределения могут иметь различные случайные величины. Отсюда следует второе определение случайной величины.

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случая и для которой задана функция распределения вероятностей.

Теорема 5. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha, \beta]$ равна разности значений функции распределения $F(x)$ на концах этого интервала:

$$p(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Следствие. Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

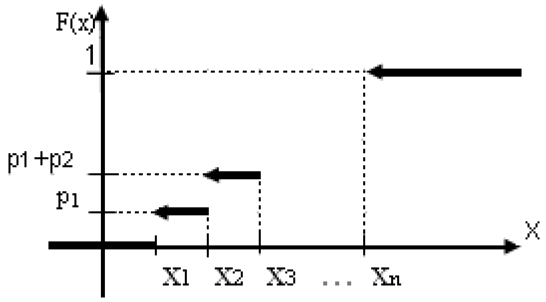
Если закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

то функция распределения *F(x)* определяется аналитически и графически следующим образом:

Аналитическое представление Графическое представление

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ .... & .... \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$



Плотность распределения.

Непрерывную случайную величину можно задать не только интегральной функцией распределения, но и дифференциальной функцией. Рассмотрим эту форму задания распределения случайной величины. Пусть задана непрерывная случайная величина X с функцией распределения $F(x)$. Тогда, если существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x),$$

то функция $f(x)=F'(x)$ называется дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения.

Используя методы интегрального исчисления, можно записать формулу для нахождения интегральной функции распределения по плотности:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения больше либо равна нулю для любого значения аргумента, то есть $f(x)\ge 0$.

2. Так как интегральная функция распределения неубывающая, следовательно, ее производная неотрицательная.

3. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[\alpha, \beta]$ находится по формуле

$$p(\alpha \le x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4. Условие нормировки: интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Примеры задач с решением

Пример 31. Составить функцию распределения для ряда распределения из примера 20.

Решение. Случайная величина X – число появлений герба. Из примера 19 имеем

$$p(X=0)=\frac{1}{8};\ p(X=1)=\frac{3}{8};\ p(X=2)=\frac{3}{8};\ p(X=3)=\frac{1}{8}.$$

По определению функции распределения $F(x)$ можем записать:

$$F(x)=0 \text{ для } x<0;$$

$$F(x)=\frac{1}{8} \text{ для } 0 \le x < 1;$$

$$F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8} \text{ для } 1 \le x < 2;$$

$$F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8} \text{ для } 2 \le x < 3;$$

$$F(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1 \text{ для } 3 \le x.$$

Классически функция распределения $F(x)$ записывается следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0; \\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1; \\ \frac{4}{8} & 1 \le x < 2; \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3; \\ 1 & 3 \le x. \end{cases}$$

Пример 32. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0;\\ c\cdot\sin x & 0\le x\le\pi;\\ 0 & \pi<x.\end{cases}$$

Определить коэффициент c. Найти функцию распределения и вероятность попадания случайной величины на интервал от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Согласно условию нормировки имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1,$$

отсюда можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{\infty} f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi} c\cdot\sin x dx+\int_{\pi}^{\infty} 0dx=$$

$$=c\cdot\int_{0}^{\pi}\sin x dx=-c\cdot\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-c(-1-1)=2c,$$

тогда $2c=1;\quad c=\frac{1}{2}$.

Вероятность попадания в интервал найдем по формуле

$$p\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin x dx=\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

Функцию распределения $F(x)$ найдем по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Для $x<0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$; для $0\le x<\pi$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin x dx=0-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$; для $\pi\le x$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x dx+\int\limits_{\pi}^{\infty}0dx=0-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{\pi}+0=-\frac{1}{2}(-1-1)=1$.

Таким образом получаем

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le\pi;\\ 1, & x\ge\pi.\end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы (381–400)

381. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & -1<x\le\frac{1}{3}\\ 1, & x>\frac{1}{3}\end{cases}$. Найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

382. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$. Найти дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности).

383. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0{,}5x, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньшее 0,2; б) меньшее трех; в) не меньшее трех; г) не меньшее пяти.

384. Функция распределения случайной величины задана интегральной функцией: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. Вычислить $p\{|\, x\ge 1\}$.

385. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{8}x^3, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, то есть $p(\alpha\le X\le\beta)$. Построить $F(x)$ и $f(x)$.

386. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{33}(2x^2+5x), & 0\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, то есть $p(\alpha\le X\le\beta)$. Построить $F(x)$ и $f(x)$.

387. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, то есть $p(\alpha\le X\le\beta)$. Построить $F(x)$ и $f(x)$.

388. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\cos x, & 0\le x\le \pi/2 \\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, то есть $p(\alpha\le X\le\beta)$. Построить $F(x)$ и $f(x)$.

389. Составить функцию распределения для числа выпадений герба при 2-х подбрасываниях монеты и построить ее график.

390. На пути движения автомобиля находятся четыре светофора. Вероятность остановки автомобиля перед любым светофором одинакова и равна 0,45. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа пройденных автомобилем светофоров до первой остановки.

391. Случайная величина X имеет плотность распределения: $f(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ 5e^{-5x}, x\ge 0 \end{cases}$. Построить график функции $F(x)$.

392. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{3}{2}\sin 3x$ в интервале $(0;\dfrac{\pi}{3})$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4})$.

393. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью распределения вероятностей вида: $f(x)=\begin{cases} c\cdot\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x|\ge 0 \end{cases}$. Найти константу c, вычислить $p\left\{|x|<\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

394. Случайная величина X имеет плотность $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$. Найти коэффициент A. Записать функцию распределения данной случайной величины.

395. Случайная величина X имеет плотность $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^2+0{,}1, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$. Найти коэффициент A. Записать функцию распределения данной случайной величины.

396. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=\dfrac{4C}{e^x+e^{-x}}$. Найти постоянный множитель C.

397. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=C\cdot\operatorname{arctg}x$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный множитель C.

398. Производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p=0{,}6$. Построить а) ряд распределения числа попаданий; б) найти и построить функцию распределения числа попаданий.

399. Можно ли выбрать постоянную A так, чтобы функция $f(x)=\dfrac{A}{x^4}$ была плотностью вероятности на множестве: а) $[1;\infty)$; б) $[0;\infty)$; в) $[-2;-1]$; г) $[-3;0]$.

400. Точка брошена наугад внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.

2.3. Числовые характеристики случайной величины

Теоретическое введение

Математическое ожидание определяет положение случайной величины на числовой оси, показывая центр распределения (некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины).

Математическое ожидание дискретной случайной величины – это число, равное сумме произведений всех возможных значений на их вероятности, то есть

$$M(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k .$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X находится по формуле

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x).$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной, то есть $M(c)=c$, где c = const.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания, то есть $M(c \cdot x)=c \cdot M(x)$.

3. Математическое ожидание суммы двух независимых случайных величин равно сумме их математических ожиданий, то есть $M(x+y)=M(x)+M(y)$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то есть $M(x \cdot y)=M(x) \cdot M(y)$.

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю, то есть $M(x-M(x))=0$.

Мода

Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее значение, имеющее наибольшую вероятность.

Модой M_0 непрерывной случайной величины называется такое ее значение, при котором плотность распределения имеет максимум.

Геометрически моду можно интерпретировать как абсциссу точки максимума кривой распределения. Бывают *двухмодальные* и *многомодальные* распределения. Встречаются распределения, которые имеют минимум, но не имеют максимума. Такие распределения называются *антимодальными*.

Медиана

Медианой случайной величины M_e называют такое ее значение, для которого справедливо равенство $p(X < M_e) = p(X > M_e)$, то есть равновероятно, что случайная величина окажется больше или меньше медианы.

С геометрической точки зрения, медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам. Так как вся площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице, то функция распределения в точке, соответствующей медиане, равна 0,5, то есть

$F(M_e) = p(X < M_e)$.

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(x) = M(x - M(x))^2$.

Дисперсия характеризует меру рассеяния случайной величины вокруг математического ожидания. Недостатком дисперсии является то, что она имеет размерность квадрата случайной величины и ее неудобно использовать для характеристики разброса.

Этих недостатков лишено *среднее квадратическое отклонение* случайной величины, которое представляет собой квадратный корень из дисперсии $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Основные свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю, $D(c) = 0$, где c = const.

2. Постоянный множитель случайной величины можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат $D(c \cdot x) = c^2 \cdot D(x)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(x + y) = D(x) + D(y)$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, $D(x-y)=D(x)+D(y)$.

Дисперсия случайной величины X, равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания, $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)$.

Начальные и центральные моменты

Начальным моментом k-го порядка случайной величины называют математическое ожидание величины X^k, то есть $V_k=M\left(X^k\right)$.

Начальный момент для дискретной случайной величины

$$V_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i .$$

Начальный момент для непрерывной случайной величины

$$V_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx .$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины называют математическое ожидание *k-й* степени отклонения случайной величины от его математического ожидания, то есть $\mu_k=M^k(x-M(x))$.

Центральный момент для дискретной случайной величины находится по формуле $\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x-M(x))^k \cdot p_i$.

Центральный момент для непрерывной случайной величины находится по формуле $\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^k \cdot f(x)dx$.

Соотношения между начальными и центральными моментами $\mu_0=1$: $\mu_1=0$; $\mu_2=V_2-V_1^2$; $\mu_3=V_3-3V_2\cdot V_1+2V_1^3$; $\mu_4=V_4-4V_3\cdot V_1+6V_2\cdot V_1^2-3V_1^4$.

Начальный момент первого порядка представляет собой математическое ожидание $V_1=M(x)$, а центральный момент второго порядка – дисперсию случайной величины $\mu_2=D(x)$.

Нормированный центральный момент третьего порядка служит характеристикой скошенности или асимметрии распределения (*коэффициент асимметрии*): $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$.

Нормированный центральный момент четвертого порядка служит характеристикой островершинности или плосковершинности распределения (*эксцесс*), $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$.

Примеры задач с решением

Пример 33. Найти математическое ожидание для случайной величины, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - \cos x & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 1 & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения по формуле

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sin x & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины находим по формуле

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = \left\langle \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Пример 34. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Решение. Для дискретной случайной величины используем формулу

$$M(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k=\sum_{k=1}^{4} x_k \cdot p_k=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}2=1{,}7.$$

Для нахождения дисперсии вычислим:

$$M\left(x^2\right)=\sum_{k=1}^{4} x_k^2 \cdot p_k=0^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}4+3^2\cdot 0{,}2=3{,}7.$$

Тогда дисперсия равна $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)=3{,}7-1{,}7^2=0{,}81$ Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}81}=0{,}9$.

Пример 35. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(x)=4$ и $D(x)=1$.

Решение. По условию нормировки имеем $p_1+p_2=1$, отсюда $p_2=1-p_1=1-0{,}5=0{,}5$.

Так как $M(x)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2=0{,}5\cdot x_1+0{,}5\cdot x_2=4$, можем записать $x_1+x_2=8$. Выразим одну неизвестную через другую $x_2=8-x_1$.

По пятому свойству дисперсии $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)$, отсюда можем записать $M\left(x^2\right)=D(x)+M^2(x)=1+4^2=17$, тогда $M\left(x^2\right)=x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2=x_1^2\cdot 0{,}5+x_2^2\cdot 0{,}5=17$. Отсюда $x_1^2+x_2^2=34$. Подставим $x_2=8-x_1$ в полученное уравнение $x_1^2+x_2^2=34$, получим $x_1^2+\left(8-x_1\right)^2=34$, преобразуем полученное соотношение $x_1^2-8x_1+15=0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим корни $x_{1,1}=5$ и $x_{1,2}=3$. Тогда $x_{2,1}=3$ и $x_{2,2}=5$.

По условию задачи $x_1 < x_2$, следовательно: $x_1 = 3$, а $x_2 = 5$ и искомый закон распределения имеет вид

x_i	3	5
p_i	0,5	0,5

Пример 36. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ a \cdot x^2 & 0 \le x \le 2; \\ 0 & x \ge 2. \end{cases}$

Найти коэффициент a, математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Решение. Площадь, ограниченная плотностью распределения, численно равна $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} a \cdot x^2 dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$. Учитывая, что эта площадь должна быть равна единице, получим $a = \frac{3}{8}$.

Найдем начальные моменты:

$$V_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8} \cdot x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{2};$$

$$V_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8} \cdot x^4 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{12}{5};$$

$$V_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8} \cdot x^5 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^6}{6}\Big|_0^2 = 4;$$

$$V_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8} \cdot x^6 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{48}{7}.$$

Найдем центральные моменты:

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20};$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_2 \cdot V_1 + 2V_1^3 = 4 - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{1}{20};$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3 \cdot V_1 + 6V_2 \cdot V_1^2 - 3V_1^4 =$$

$$= \frac{48}{7} - 4 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{39}{560}.$$

Вычислим остальные характеристики:

математическое ожидание $M(x) = V_1 = \frac{3}{2}$;

дисперсия равна $D(x) = \mu_2 = \frac{3}{20}$;

асимметрия $A = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{20}{3} \cdot \sqrt{\frac{20}{3}} = -\frac{\sqrt{20}}{3 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}86$;

эксцесс $E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{39}{560} \cdot \frac{400}{9} - 3 = \frac{2}{21}$.

Задачи для самостоятельной работы (401–430)

401. Студент сдает экзамены с вероятностями 0,8; 0,7; 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию числа сданных экзаменов.

402. Охотник, имеющий три патрона, стреляет по зайцу, пока не попадет или не кончатся патроны. Составить закон распределения числа использованных патронов, если вероятность попадания при одном выстреле равна 1/3. Найти математическое ожидание и дисперсию.

403. Игральная кость брошена три раза. Составить закон распределения числа выпадений 5 и найти все числовые характеристики.

404. В партии из 5 изделий 2 имеют скрытый дефект. Реализовано 4 изделия. Составить закон распределения числа качественных изделий среди реализованных. Найти математическое ожидание и дисперсию для данного распределения.

405. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ ax^2 + b, & 1 \le x < 4 \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$. Найти: a и b, математическое ожидание, дисперсию.

406. Сколько раз нужно бросить игральную кость, для того, чтобы дисперсия выпадения 6 очков была равна 10.

407. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 0{,}9$.

408. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании 2-х игральных костей.

409. Найти математическое ожидание случайной величины X – числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 6 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

410. Для приведенного закона распределения $p(X = x_i)$ дискретной случайной величины X, требуется: а) определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X; б) построить график этого распределения.

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,02	0,20	?	0,22	0,21	0,12	0,03

411. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша одного билета 0,1. Найти дисперсию числа успехов в данном опыте.

412. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0;1)$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ величины X.

413. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{x}{2}$ в интервале $(0;2)$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ величины X.

414. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану величины X.

415. Случайная величина X в интервале $(2;4)$ задана плотностью распределения $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

416. Найти математической ожидание случайной величины $Z = 2X + 4Y + 5$, если известно математическое ожидание X и Y: $M(X) = 3$, $M(Y) = 5$.

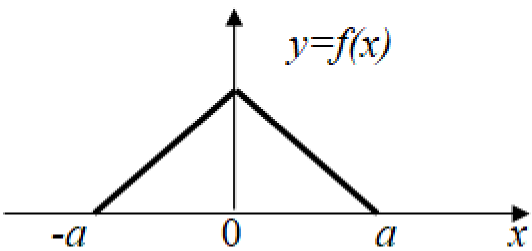
417. Дискретная случайная величина X имеет три возможных значения $x_1 = 1$, x_2 и x_3. Причем $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятность того, что X примет значения x_1 и x_2, соответственно равны 0,3 и 0,2. Математическое ожидание этой величины $M(X) = 2{,}2$, дисперсия $D(X) = 0{,}76$. Найти ряд распределения величины X.

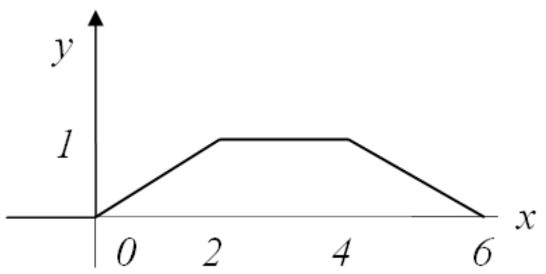
418. Событие A может появиться в одном испытании с вероятностью 0,4. Случайная величина X – число появлений событий A в пяти испытаниях. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$.

419. Из урны содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекается 3 шара. Случайная величина X – число белых шаров в выборке. Составить закон распределения и найти $M(X)$.

420. В лотереи один выигрыш по 1000 р., два по 500 р. и 5 выигрышей по 100 р. Определить общее количество билетов, если математическое ожидание суммы выигрыша равно 5 р.

421. Случайная величина X распределена по закону равнобедренного треугольника в интервале $(-a;a)$ (закон Симпсона), если она непрерывного типа и ее плотность распределения вероятностей имеет вид, изображенный на рисунке. Написать выражение для $f(x)$ и $F(x)$. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X.





422. Случайная величина X задана графически плотностью распределения. Найти функцию распределения математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X.

423. Найти математическое ожидание случайной величины X – числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 6 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

424. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	2	3
p	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
p	0,2	0,8

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

425. Даны законы распределения 2-х независимых случайных величин:

X	1	2
p	0,4	0,6

Y	0	1	2
p	0,5	0,25	0,25

Составить закон распределения их разности, а затем проверить выполнение следующего свойства дисперсии:
$D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

426. Даны законы распределения 2-х независимых случайных величин:

X	–1	0	1
p	0,1	0,6	0,2

Y	0	2
p	0,1	0,9

Найти закон распределения их произведения. Проверить: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

427. Найти функцию распределения для числа выпадений герба при 2-х подбрасываниях монеты и построить ее график. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

428. Дан закон распределения случайной величины X:

X	–2	0	3	1
p	0,1	0,5	0,1	0,3

Составить законы распределения случайных величин x^2 и $3x$. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

429. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди 2-х отобранных и дисперсию.

430. Для приведенного закона распределения $p(X = x_i)$ дискретной случайной величины X, требуется: а) определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X; б) построить график этого распределения.

X	0	1	2	3	4	5
p	0,34	0,09	0,06	0,01	?	0,32

2.4. Основные законы дискретной случайной величины

Теоретическое введение

Биноминальное распределение

Биномиальным является распределение вероятностей появления m числа событий в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события постоянна и равна p. Вероятность возможного числа появлений события вычисляется по формуле Бернулли:

$$p(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

где $q = 1 - p$.

Постоянные n и p, входящие в это выражение, параметры биномиального закона. Биномиальным распределением описывается распределение вероятностей дискретной случайной величины.

Основные числовые характеристики биномиального распределения:

математическое ожидание равно $M(x) = n \cdot p$;

дисперсия равна $D(x) = n \cdot p \cdot q$;

коэффициент асимметрии $A = \dfrac{q - p}{\sqrt{npq}}$;

коэффициент эксцесса равен $E = \dfrac{1 - 6pq}{npq}$.

При неограниченном возрастании числа испытаний коэффициенты асимметрии и эксцесса стремятся к нулю, следовательно, можно предположить, что биномиальное распределение сходится к нормальному с возрастанием числа испытаний.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона описывает число событий m, происходящих за одинаковые промежутки времени при условии, что события происходят независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью (λ). При этом число испытаний n велико, а вероятность появления события в каждом испытании p мала. Поэтому распределение Пуассона называют законом редких явлений или простейшим потоком. Параметром распределения Пуассона является величина $\lambda = np$, характеризующая интенсивность появления событий в n испытаниях. Вероятность возможного числа появлений события вычисляется по формуле распределения Пуассона:

$$p_n(x = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Пуассоновским распределением хорошо описываются: число требований на выплату страховых сумм за год, число вызовов, поступивших на телефонную станцию за определенное время, число отказов элементов при испытании на надежность, число бракованных изделий и так далее.

Основные числовые характеристики для распределения Пуассона.

Математическое ожидание совпадает с дисперсией и равно a, то есть $M(x) = D(x) = a$. Это является отличительной особенностью данного распределения.

Коэффициент асимметрии $A = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Коэффициент эксцесса $E = \dfrac{1}{a}$.

Геометрическое распределение

Пусть проводится серия испытаний, в каждом из которых случайное событие A может появиться с вероятностью p, причем, испытания заканчиваются при первом же появлении данного события. Тогда случайная величина X, характеризующая количество совершенных попыток, как раз и имеет геометрическое распределение. При этом $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте событие A не произошло.

В общем виде закон распределения записывается следующим образом:

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{m-1} p$	…

Вероятности p_i представляют собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и основанием q. Отсюда и название – геометрическое распределение вероятностей. Как известно, сумма такой прогрессии равна

$$p + qp + q^2 p + q^3 p + ... = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

что полностью соответствует вероятностному смыслу задачи.

Основные числовые характеристики для геометрического распределения:

математическое ожидание равно $M(x) = \dfrac{1}{p}$;

дисперсия равна $D(x) = \dfrac{q}{p^2}$.

Примеры задач с решением

Пример 37. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A в одном испытании, если дисперсия числа появлений в трех испытаниях равна 0,63.

Решение. Для биномиального распределения дисперсия равна $D(x) = n \cdot p \cdot q$. Подставим имеющиеся значения, получим: $0{,}63 = 3p(1-p)$. Отсюда $p^2 - p + 0{,}21 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим: $p_1 = 0{,}7, \quad p_2 = 0{,}3$.

Пример 38. Среднее число выплат страховых сумм в день равно двум. Найти вероятность того, что за пять дней придется выплатить: 1) шесть страховых сумм; 2) менее шести сумм; 3) не менее шести.

Решение. Среднее число выплат за пять дней $5 \cdot 2 = 10$.

Вероятность того, что придется выплачивать шесть сумм, равна $p(k=6)=\dfrac{10^6}{6!}e^{-10}\approx 0{,}063055$.

Обозначим за событие A – выплачено менее шести сумм. Тогда по теореме сложения несовместных событий получим

$$p(A)=p(k=0)+p(k=1)+p(k=2)+p(k=3)+p(k=4)+p(k=5)=$$

$$=\frac{10^0}{0!}e^{-10}+\frac{10^1}{1!}e^{-10}+\frac{10^2}{2!}e^{-10}+\frac{10^3}{3!}e^{-10}+$$

$$+\frac{10^4}{4!}e^{-10}+\frac{10^5}{5!}e^{-10}\approx 0{,}067$$

Событие $\overline{A}$ – выплачено не менее шести сумм является противоположным для события A, следовательно,

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}067=0{,}933.$$

Задачи для самостоятельной работы (431–460)

431. Два станка с числовым программным управлением обрабатывают по одной одинаковой детали. Вероятность изготовления стандартной детали для первого станка – 0,95; для второго – 0,9. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди изготовленных двух и вычислить его числовые характеристики.

432. Электронное устройство содержит 4 предохранителя. Каждый предохранитель срабатывает с вероятностью 0,8. Составить закон распределения числа сработавших предохранителей и найти его числовые характеристики.

433. Монета подбрасывается три раза. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа выпавших гербов. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

434. На пути движения автомобиля находятся четыре светофора. Вероятность остановки автомобиля перед любым светофором одинакова и равна 0,45. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа пройденных автомобилем светофоров до первой остановки.

Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X

435. В нашем распоряжении имеется четыре лампочки, каждая из них с вероятностью 0,1 имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа испробованных лампочек. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

436. Вероятность выигрыша по лотерейному билету 0,2. Случайная величина X – число выигравших билетов из трех купленных. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

437. Студент сдает в сессию экзамены с вероятностями: математику – 0,8, физику – 0,7, историю – 0,9. Случайная величина X – число сданных экзаменов. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

438. Студент может сдавать экзамен 3 раза, после чего его отчисляют. Вероятность сдать с 1-го раза равна 0,6, со 2-го – 0,7, с 3-го – 0,8. Случайная величина X – число приходов на экзамен. Записать функцию распределения. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

439. Студент получает «5» за экзамен: по математике с вероятностью 0,2, по физике – 0,1, по истории – 0,4, по геологии – 0,3. Случайная величина X – число «пятерок» в сессию. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

440. Студент ищет нужную формулу в 3 справочниках, причем если нашел, то дальше не ищет. Вероятность найти формулу в 1-м справочнике – 0,4, во 2-м – 0,5, в 3-м – 0,7. Случайная величина X – число просмотренных справочников. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

441. Студент выучил 30 вопросов из 40. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Составить закон распределения числа

правильных ответов на вопросы билета, найти его математическое ожидание и дисперсию.

442. Шахматист должен сыграть с тремя другими шахматистами. Он знает, что вероятность выиграть у 1-го равна 0,9, у 2-го – 0,7, у 3-го – 0,3. Случайная величина X – число выигранных партий. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

443. У студента в сумке учебники по математике, физике, истории, геологии. Ему нужно достать учебник по математике, и он наугад достает по одному, пока не достанет нужный. Случайная величина X – число вынутых учебников. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

444. Студент посещает занятия с вероятностями: первую пару с вероятностью – 0,6, 2-ю – 0,9, 3-ю – 0,8. Случайная величина X – число пар, на которых был студент. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

445. У охотника 3 патрона и он стреляет в дичь пока не попадет, или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число израсходованных патронов. Записать функцию распределения. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

446. В колоде 36 карт, сдают 6 карт. Случайная величина X – число тузов среди сданных карт. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

447. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,4. Случайная величина X – число студентов, получающих стипендию из 4-х наугад выбранных. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

448. У дежурного гостиницы в кармане 4 различных ключа. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь комнаты. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не возвращается обратно. Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

449. В партии из шести деталей имеется две дефектных. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения и

построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа дефектных среди отобранных деталей. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

450. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,85. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа библиотек, которые посетит студент, если ему доступны в городе три библиотеки. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

451. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,7. Производится четыре выстрела. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа попаданий в цель. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

452. Игральная кость брошена два раза. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа появлений трех очков. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

453. Обрыв связи произошел на одном из пяти звеньев телефонного кабеля. Монтер последовательно проверяет звенья для обнаружения места обрыва. Составить закон распределения и построить функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа обследованных звеньев, если вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев. Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

454. Вероятность сдачи экзамена по математике для каждого из 4 студентов равна 0,7. Составить закон распределения числа студентов, не сдавших экзамен. Найти его числовые характеристики.

455. Имеется 4 микросхемы, каждая из которых с вероятностью 0,2 имеет дефект. При включении в цепь дефектная микросхема перегорает и подключается следующая. Составить закон рас-

пределения числа подключенных микросхем. Найти его числовые характеристики.

456. В компьютерном зале 3 компьютера. Вероятность того, что в течение часа первый компьютер будет свободен, равна 0,1; второй – 0,15; третий – 0,2. Составить закон распределения числа свободных компьютеров в течение часа и найти его числовые характеристики.

457. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок не потребует регулировки, равна 0,8; второй – 0,7; третий – 0,9. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа потребуют регулировки, и найти его числовые характеристики.

458. Два стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Составить таблицу распределения для числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

459. Пассажир может ждать летной погоды трое суток, после чего едет поездом. По прогнозам метеорологов вероятность летной погоды в первые сутки равна 0,5; во вторые – 0,6; в третьи – 0,8. Пусть X – число полных суток до отъезда пассажира. Составить ряд распределения случайной величины X, найти математическое ожидание и дисперсию.

460. Для распределения Пуассона известно, что $A = \frac{1}{2}$. Найти $p\{x > 2\}$.

2.5. Основные законы непрерывной случайной величины

Теоретическое введение

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на интервале $[a, b]$, если на этом интервале плотность распределения постоянна, а вне его равна нулю, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ c & a \le x \le b; \\ 0 & x > b. \end{cases}$$

Найдем значение постоянной c. Так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице и все значения случайной величины принадлежат интервалу $[a,b]$, то должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

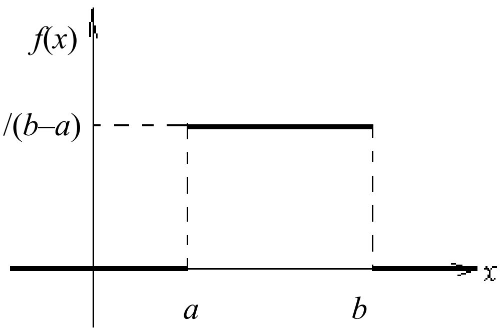
или

$$\int_a^b c dx = c \cdot x \Big|_a^b = c \cdot (b-a) = 1; \qquad c = \frac{1}{b-a}.$$

Следовательно, аналитическое и графическое представление плотности распределения будет выглядеть следующим образом:

аналитическое представление графическое представление

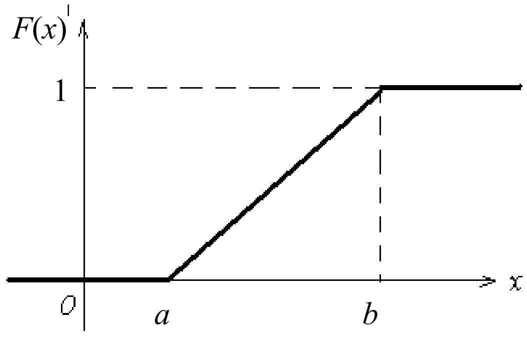
$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}; & a \le x \le b, \\ 0; & x > b. \end{cases}$$



Аналитическое и графическое представление интегральной функции распределения можно ппредставить в следующем виде:

аналитическое представление графическое представление

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b; \\ 1 & x > b. \end{cases}$$



Определим основные числовые характеристики случайной величины, имеющей равномерное распределение.

Математическое ожидание

$$M(x) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

В силу симметричности распределения медиана совпадает с математическим ожиданием, то есть

$$M_e = \frac{b+a}{2}.$$

Моды равномерное распределение не имеет. Дисперсия равномерного распределения равна

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В силу симметричности коэффициент асимметрии равен нулю. Коэффициент эксцесса равен

$$E = -1{,}2.$$

Нормальное распределение

Нормальное распределение – наиболее часто встречающийся вид распределения. С ним приходится встречаться при анализе погрешностей измерений, контроле технологических процессов и режимов, а также при анализе и прогнозировании различных явлений в биологии, медицине и других областях знаний.

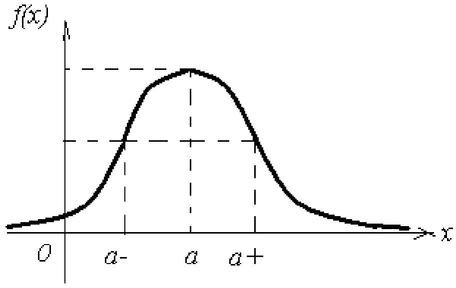
Термин «нормальное распределение» применяется в условном смысле как общепринятый в литературе, хотя и не совсем удачный. Так, утверждение, что какой-то признак подчиняется нормальному закону распределения, вовсе не означает наличие каких-либо незыблемых норм, якобы лежащих в основе явления, отражением которого является рассматриваемый признак, а подчинение другим законам распределения не означает какую-то анормальность данного явления.

Главная особенность нормального распределения состоит в том, что оно является предельным, к которому приближаются другие распределения. Нормальное распределение впервые открыто Муавром в 1733 году. Нормальному закону подчиняются только непрерывные случайные величины. Аналитическое и графическое представление плотности нормального закона распределения будет выглядеть следующим образом:

аналитическое представление

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

графическое представление



Математическое ожидание для этого распределения равно $M(x)=a$. Дисперсия равна $D(x)=\sigma^2$.

Основные свойства нормального распределения

1. Функция плотности распределения определена на всей числовой оси Ox, то есть каждому значению x соответствует вполне определенное значение функции.

2. При всех значениях x (как положительных, так и отрицательных) функция плотности принимает положительные значения, то есть нормальная кривая расположена над осью Ox.

3. Предел функции плотности при неограниченном возрастании x равен нулю $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

4. Функция плотности нормального распределения в точке $x=a$ имеет максимум $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. График функции плотности $y=f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a$.

6. Кривая распределения имеет две точки перегиба с координатами $\left(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$.

7. Мода и медиана нормального распределения совпадают с математическим ожиданием a.

8. Форма нормальной кривой не изменяется при изменении параметра a.

9. Коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения равны нулю.

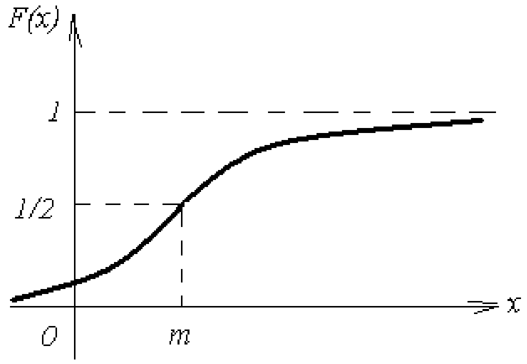
Очевидна важность вычисления этих коэффициентов для эмпирических рядов распределения, так как они характеризуют скошенность и крутость данного ряда по сравнению с нормальным.

Вероятность попадания в интервал $(\beta;\ \gamma)$ находится по формуле

$$p(\beta \le x \le \gamma) = \Phi\left(\frac{\gamma - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нечетная табулированная функция (см. приложение 2).

Графически функция распределения выглядит следующим образом:



Определим вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклоняется от своего математического ожидания на величину, меньшую ε, то есть найдем вероятность осуществления неравенства $|x - M(x)| < \varepsilon$ или вероятность двойного неравенства $M(x) - \varepsilon < x < M(x) + \varepsilon$. Подставляя в формулу, получим

$$p(a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - \alpha}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Выразив отклонение случайной величины X в долях среднего квадратического отклонения, то есть положив $\varepsilon = t \cdot \sigma$ в последнем равенстве, получим: $p(|x - M(x)| < t \cdot \sigma) = 2\Phi(t)$. Тогда при различных значениях t получим

$$t = 1 \quad p(|x - M(x)| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6827;$$

$$t = 2 \quad p(|x - M(x)| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545;$$

$$t = 3 \quad p(|x - M(x)| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Из последнего соотношения следует, что практически рассеяние нормально распределенной случайной величины заключено на участке $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Вероятность того, что случайная величина не попадет на этот участок, очень мала, а именно равна $0{,}0027$, то есть это событие может произойти лишь в трех случаях из 1000. Такие события можно считать практически невозможными. На приведенных рассуждениях основано правило трех сигм, которое формулируется следующим образом: *если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой величины от математического ожидания по абсолютной величине не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения*.

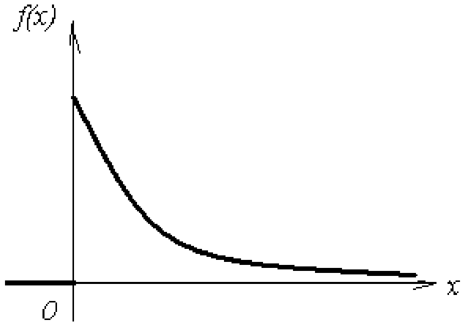
Показательное распределение

Непрерывную случайную величину, плотность вероятности которой определяется выражением:

аналитическое представление

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda} & x \ge 0;\\ 0 & x<0,\end{cases}$$

графическое представление



называют величиной, имеющей показательное или экспоненциальное распределение.

Это распределение часто наблюдается при изучении сроков службы различных устройств, времени безотказной работы отдельных элементов, частей системы и системы в целом, при рассмотрении случайных промежутков времени между появлениями двух последовательных редких событий.

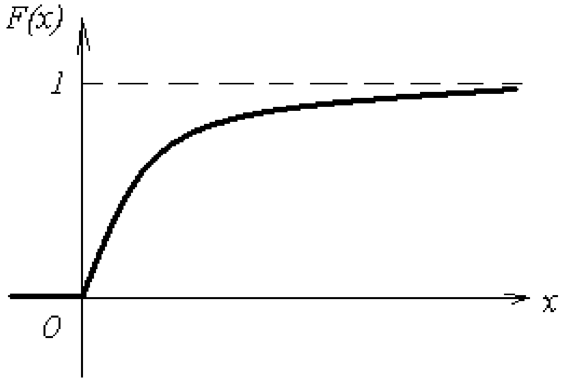
Плотность показательного распределения определяется параметром λ, который называют интенсивностью отказов. Этот термин связан с конкретной областью приложения – теорией надежности.

Выражение интегральной функции показательного распределения можно найти, используя свойства дифференциальной функции:

аналитическое представление

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0;\\ 0; & x<0.\end{cases}$$

графическое представление



Основные числовые характеристики показательного распределения:

Математическое ожидание $M(x)=\frac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(x)=\frac{1}{\lambda^2}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma=\frac{1}{\lambda}$.

Таким образом, для этого распределения характерно, что среднее квадратическое отклонение численно равно математическому ожиданию. При любом значении параметра λ коэффициенты асимметрии и эксцесса – постоянные величины $A=2, \quad E=9$.

Примеры задач с решением

Пример 39. Цена деления амперметра равна $0{,}1\ A$. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая $0{,}02\ A$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Ошибку округления можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)=\frac{1}{(b-a)}$, где $(b-a)$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения, вне этого интервала $f(x)=0$. В рассматриваемом примере длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому

$f(x)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$. Ошибка отсчета превысит $0{,}02$, если она будет заключена в интервале $(0{,}02;\,0{,}08)$. По формуле

$$p(\alpha<x<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

получим

$$p(0{,}02<x<0{,}08)=\int\limits_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=10\cdot(0{,}08-0{,}02)=0{,}6.$$

Математическое ожидание равно

$$M(x)=\frac{b+a}{2}=\frac{0{,}1+0}{2}=0{,}05.$$

Дисперсия равна

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(0{,}1-0)^2}{12}=\frac{1}{1200}.$$

Пример 40. Среднее время работы телевизора до первого отказа равно 500 часов. Найти вероятность того, что наудачу взятый телевизор проработает без поломок более 1000 часов.

Решение. Так как среднее время работы до первого отказа равно 500, то $\dfrac{1}{\lambda}=500$ отсюда $\lambda=\dfrac{1}{500}$. Искомую вероятность найдем по формуле

$$p(t>1000)=\int\limits_{1000}^{\infty}\frac{1}{500}e^{-\frac{t}{500}}dt=-e^{-\frac{t}{500}}\Big|_{1000}^{\infty}=e^{-2}\approx 0{,}135.$$

Задачи для самостоятельной работы (460–500)

461. Вес груза одного вагона – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 65 т и средним квадратическим отклонением 2 т. Найти вероятность того, что вес очередного вагона не превышает 70 т.

462. Вес вылавливаемых в реке рыб есть случайная величина с нормальным распределением, среднее значение $a=375$ г, отклонение 25 г. Найти вероятность того, что вес одной выловленной рыбы будет находиться в пределах от 300 до 425 грамм.

463. Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Найти вероятность того, что взвешивание произведено с ошибкой, не превышающей 10 г.

464. Известно, что детали по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартный размер диаметра детали (математическое ожидание) равна 50 мм, среднее квадратическое отклонение – 5,5 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет находиться в пределах от 45 до 52 мм.

465. Диаметр выпускаемой детали – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 50 мм и средним квадратическим отклонением 0,09 мм. В каких границах, симметричных относительно математического ожидания, следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,92?

466. Завод изготавливает стержни, длина которых является случайная величина, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 3 м и средним квадратическим отклонением 0,02. Найти вероятность того, что длина наугад выбранного стержня не превосходит 3 м 5 см.

467. Длина обоев в рулоне – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 18 м, средним квадратическим отклонением – 0,3 м. Найти вероятность того, что длина обоев в случайно выбранном рулоне не превзойдет 18,5 метров.

468. Прочность изделия – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 200 кг/см^2, средним квадратическим отклонением – 20 кг/см^2. В каких границах, симметричных относительно математического ожидания, следует ожидать прочность изделия, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,92?

469. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полета распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 м, найти вероятность того, что выпускаемый снаряд даст перелет от 60 до 80 м.

470. Вычислить вероятность того, что случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения, при трех испыта-

ниях хотя бы один раз окажется в интервале (1,2), если математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ее соответственно равны 1,5 и 1,2.

471. Рост людей имеет нормальное распределение. При обследовании 100 человек нашли, что средний рост 165,33 см, с средним квадратическим отклонением 6,048 см. Какова вероятность того, что рост прохожего будет от 170 до 180 см?

472. Вес вылавливаемых в прудах зеркальных карпов X – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 500 г, и средним квадратическим отклонением – 75 г. Записать плотность вероятности случайной величины X. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа: а) заключен в пределах от 425 г до 550 г; б) более 700 г; в) менее 400 г.

473. Некоторая категория работников имеет среднюю зарплату 16 тыс. рублей и среднее квадратическое отклонение зарплаты 4 тыс. рублей. Предполагая, что зарплата X – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить процент работников, получающих зарплату: а) более 20 тыс. руб.; б) менее 8 тыс. рублей; в) от 15 до 18 тыс. рублей.

474. Длина изготавливаемых станком-автоматом деталей представляет собой случайную величину X, имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 200 см, и среднеквадратическим отклонением – 0,2 см. Записать плотность распределения случайной величины X. Определить вероятность брака, если допустимые размеры детали $20 \pm 0,3$ см.

475. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Предполагая, что вес M – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека: а) отличается от среднего не более чем на 5 кг; б) находится в пределах от 62 до 66 кг; в) менее 50 кг.

476. В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12, а 40% значений X больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

477. Случайная величина X распределена равномерно на интервале (2;8). Записать функцию плотности вероятности, функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и медиану. Найти вероятности $p\{x<3\}$; $p\{x>5\}$; $p(4<x<6)$.

478. Число дней, проведенных больным в больнице, T – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Наименьшее число дней, необходимое для обследования, равно 5; наибольшее – 12. Записать плотность распределения случайной величины T. Найти ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что время пребывания больного в больнице: а) не превысит 7 дней; б) превысит 10 дней; в) будет в пределах от 6 до 8 дней.

479. Автобусы идут с интервалом 10 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса имеет равномерное распределение, найти: а) функции плотности и распределения, построить их графики; б) среднее время ожидания, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания; в) вероятности того, что время ожидания автобуса будет не более 3 минут; более 4 минут; от 5 до 8 минут.

480. Записать функцию плотности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$; построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вероятности $p\{x<7\}$; $p\{x>3\}$; $p(2<x<5)$.

481. Время между двумя сбоями вычислительной машины t – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение: а) менее 300 часов; б) более 500 часов.

482. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время T, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятности случайной величины T. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит: а) самое большее 1,5 часа; б) от 1 до 2 часов; в) более 2,5 часов.

483. Функция распределения случайной величины t – времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид $F(t)=1-e^{-\frac{t}{3}}$. Найти: а) вероятность безотказной работы радиоаппаратуры в течение трех лет; б) плотность вероятности $f(t)$; в) математическое ожидание и дисперсию.

484. Время между двумя сбоями вычислительной машины t – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение не менее чем 300 часов.

485. Средний процент выполнения плана некоторыми предприятиями составляет 106%, среднее квадратическое отклонение – 9%. Полагая, что процент выполнения плана – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность вероятности. Найти долю предприятий: а) не выполняющих план; б) выполняющих план от 110 до 150%.

486. Для показательного закона распределения известно, что $p\{x \geq 3\} = 0{,}2231$. Найти дисперсию данного распределения.

487. В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12 и 40% значений X больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

488. Для нормального закона распределения известно математическое ожидание $a=3$ и $p\{x>5\}=0{,}1587$. Найти вероятность $p(0 \leq x < 5)$.

489. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно на указанном интервале, найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.

490. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна p = 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

491. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение на отрезке [19,20]. Найти ве-

роятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 час 22 минут до 19 часов 46 минут.

492. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

493. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется выборочным средним отклонением σ. Считая, что для данной технологии $\sigma = 5$ и X нормально распределена, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.

494. Единица шкалы прибора равна 0,1. Записать функцию распределения, функцию плотности случайной величины *X*, построить их графики. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что систематические ошибки измерения *X* не превышают 0,01.

495. Время между двумя сбоями вычислительной машины *T* есть случайная величина, имеющая показательное распределение, с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию распределения, функцию плотности вероятности случайной величины *T*, построить их графики. Найти вероятность того, что время между двумя сбоями: а) не превышает 300 часов; б) составит от 100 до 200 часов.

496. Поезда метрополитена идут с интервалом в 2 минуты. Время ожидания поезда пассажиром *T* – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Записать плотность распределения этой случайной величины *T*, определить ее математическое ожидание и дисперсию, найти вероятность того, что время ожидания не превышает полторы минуты.

497. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время *T*, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятность случайной величины *T*. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит самое большее 2 часа.

498. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. *T* – время ожидания очередной машины контролером имеет показательное распределение.

Найти математическое ожидание, дисперсию случайной величины T, если среднее время ожидания равно 0,2 часа. Найти вероятность того, что время ожидания не превышает 15 минут.

499. Из пункта С ведется стрельба из орудия вдоль прямой CK. Предполагается, что дальность полета распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и среднем квадратическим отклонением 5 м. Определить (в процентах), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 метров.

500. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{32}}$. Записать математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение. Найти вероятности: а) $p(6<x<12)$; б) $p(8<x<14)$; в) $p\{x<4\}$ г) $p\{x>10\}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2261	2637	2613	2589	2565	2541	256	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Функция $\varphi(x)$ является четной, $\varphi(x)\approx 0$ при $x>4$.

Таблица 2. Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4306	1,94	0,4738
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761
0,19	0,753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772
0,21	0,0832	0,66	0,2452	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898
0,37	0,1443	0,82	0,2930	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934
2,50	0,4938	2,64	0,4959	2,78	0,4973	2,92	0,4982	3,60	0,499841
2,52	0,4941	2,66	0,4961	2,80	0,4974	2,94	0,4984	3,80	0,499928
2,54	0,4945	2,68	0,4963	2,82	0,4976	2,96	0,4985	4,00	0,499968
2,56	0,4948	2,70	0,4965	2,84	0,4977	2,98	0,4986	4,50	0,499997
2,58	0,4951	2,72	0,4967	2,86	0,4979	3,00	0,4986		
2,60	0,4953	2,74	0,4969	2,88	0,4980	3,20	0,4993		
2,62	0,4956	2,76	0,4971	2,90	0,4981	3,40	0,4996		

Функция $\Phi(x)$ является нечетной и $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \geq 0{,}5$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Симушкин, С. В. Методы теории вероятностей : учебное пособие / С. В. Симушкин. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 548 с. – ISBN 978-5-8114-3442-8. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/110911
2. Ганичева, А. В. Теория вероятностей / А. В. Ганичева. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 144 с. – ISBN 978-5-8114-2380-4. – URL: https://e.lanbook.com/book/91078
3. Николаева Е. А. Математика: Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / Е. А. Николаева, Е. Н. Грибанов ; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – 116 с. – ISBN 978-5-906969-15-6.

Дополнительная литература

4. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 472 с. – ISBN 978-5-3940-2108-4. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=453249
5. Болотюк, В. А. Теория вероятностей. Практикум и индивидуальные задания по комбинаторике (типовые расчеты): учебное пособие / В. А. Болотюк, Л. А. Болотюк. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 72 с. – ISBN 978-5-8114-3332-2. – URL: https://e.lanbook.com/book/109502
6. Шведов, А. С. Теория вероятностей и математическая статистика / А. С. Шведов. – Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2017. – 281 с. – ISBN 978-5-7598-1301-9 (в пер.). – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=486562
7. Иванов, Б. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Б. Н. Иванов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 224 с. – ISBN 978-5-8114-3636-1. – URL: https://e.lanbook.com/book/113901

Кузнецова Алла Валериевна
Грибанов Евгений Николаевич
Николаева Евгения Александровна
Гутова Елена Владимировна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 23.06.2020. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman»
Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр УИП Кузбасского государственного технического
университета имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а