Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра начертательной геометрии и графики

Составитель Т. Ф. Шумкина

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки:
21.05.04 «Горное дело» в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2023

Рецензенты:
Кобылянский М. Т.– д.т.н., профессор кафедры начертательной геометрии и графики
Аксенова О. Ю. – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой начертательной геометрии и графики

Шумкина Татьяна Федоровна
Начертательная геометрия : Курс лекций для обучающихся направления подготовки 21.05.04 Горное дело всех форм обучения / сост. Т. Ф. Шумкина ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2023. – Текст : электронный.

Содержит материал к практическим занятиям по разделам «Комплексные проекции геометрических образов и преобразования эпюра» и «Проекции с числовыми отметками», материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Начертательная геометрия» и организация практических работ.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов, Б. Ф. Начертательная геометрия / Б. Ф. Тарасов, Л. А. Дудкина, С. О. Немолотов. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 256 с. – ISBN 978-5-8114-1321-8. – URL: https://e.lanbook.com/book/3735 (дата обращения: 24.10.2021). – Текст : электронный.

2. Ломоносов, Г. Г. Инженерная графика : учебник для студентов горных специальностей вузов /Г. Г. Ломоносов. – Москва : Недра, 1984. – 287 с. – Текст : непосредственный.

3. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии : учебное пособие для студентов втузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский; под ред. В. О. Гордона. – 28-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2008. – 272 с. – Текст : непосредственный.

4. Единая система конструкторской документации : Общие правила выполнения чертежей. ГОСТ 2.301-68 (СТ СЭВ 1181-78)-ГОСТ 2.320-82 (СТ СЭВ 3332-81. – Москва, 1984. – 239 с. – (Государственные стандарты Союза ССР). – Текст : непосредственный.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие сведения. Виды проецирования. Эпюр Монжа. Комплексный чертеж точки и прямой, геометрические построения на чертежах

1.1. Классификация геометрических образов

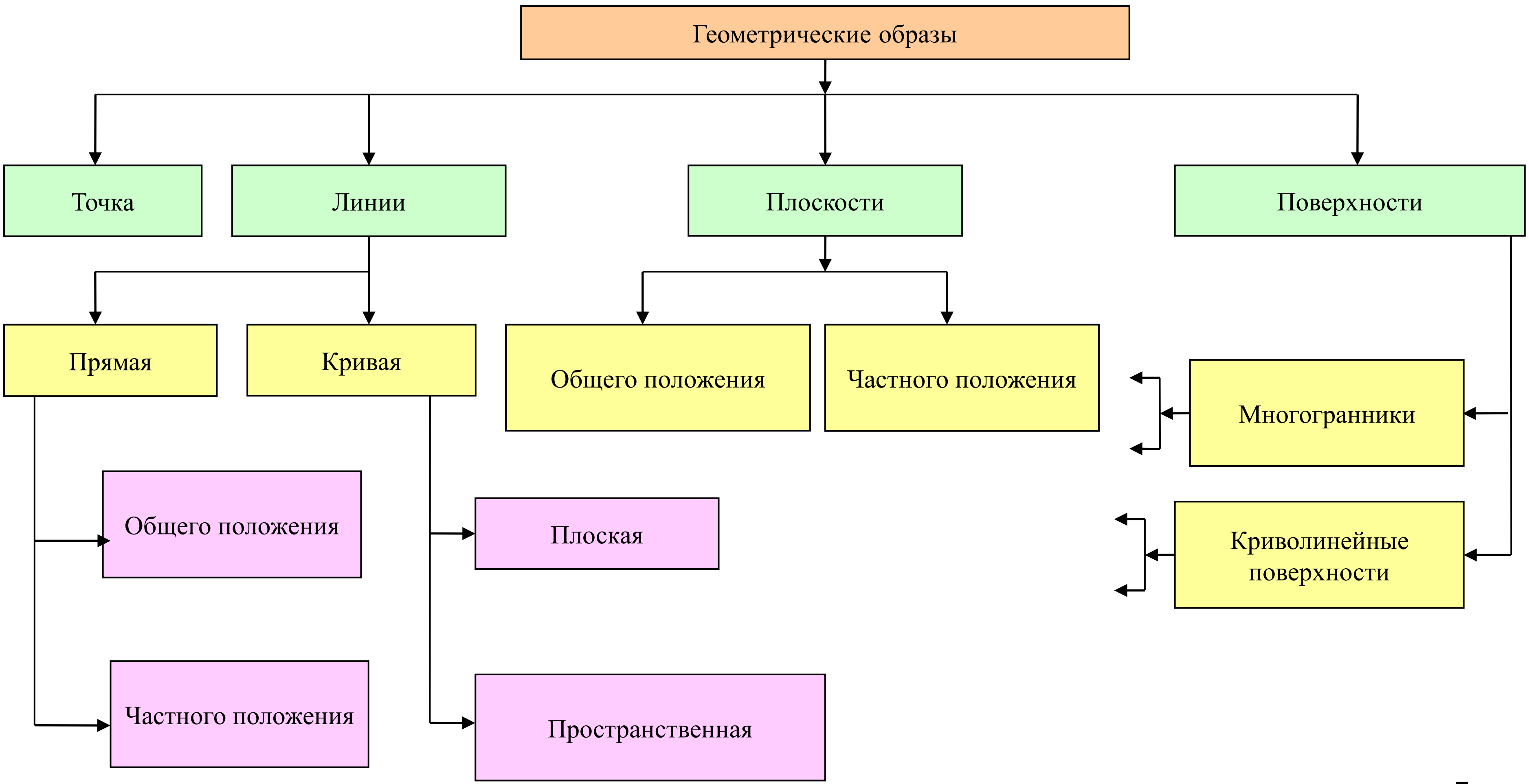


Рис. 1.1

1.2. Задачи, решаемые в начертательной геометрии

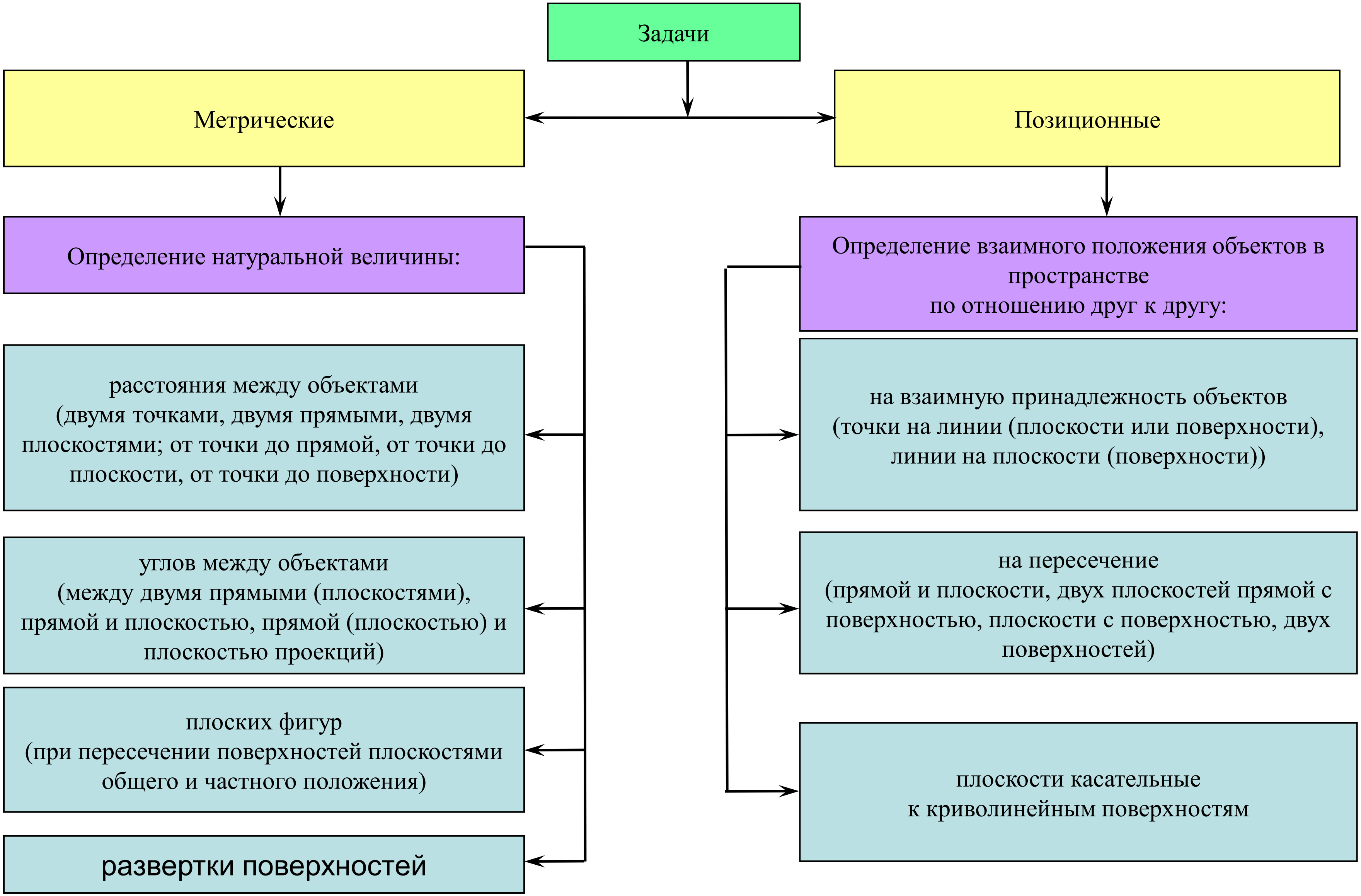


Рис. 1.2

1.3. Предмет начертательной геометрии и его задачи

Начертательная геометрия – базовая инженерная дисциплина, включающая в себя элементы начертательной геометрии - теоретические основы построения чертежей геометрических фигур.

Занятия инженерной графикой развивают способность к пространственному представлению. Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении начертательной геометрии и черчения необходимы для изучения общеинженерных и специальных технических дисциплин, а также в последующей инженерной деятельности.

Как любая наука начертательная геометрия изучает объективные законы природы. С ее помощью познаются геометрические свойства предметов (форма, размеры, положение в пространстве, взаимное положение).

Основные задачи начертательной геометрии

1.Изучение способов построения изображений существующих и вновь разрабатываемых изделий (*составление чертежей*).

2.Изучение способов определения при помощи чертежа формы и размеров предметов (*чтение чертежей*).

3.Изучение способов решения на плоскости задач, относящихся к пространственным геометрическим образам.

1.4. Краткая история развития начертательной геометрии

Зарождение начертательной геометрии связано с именем **Г. Монжа** (1746–1818 г.г.) (рис. 1.3) – инженера, общественного и государственного деятеля, одного из основателей Политехнической школы в Париже. Г. Монж участвовал в работах по введению метрической системы мер и весов.

В 1798 г. Г. Монж опубликовал книгу «Начертательная геометрия», в которой сформулировал принципы комплексного проецирования.

В Российских учебных заведениях систематическое преподавание начертательной геометрии внесли: проф. **Я. С. Севастьянов**, **А. Х. Редер** – теория проекций с числовыми отметками; русские математики **Н. И. Лобачевский** (1792–1856 г.г.) и **П. Л. Чебышев** (1821–1894г.г.). В дальнейшем (как учебная дисциплина) – проф. **Н.Ф. Четверухин**, **В. О. Гордон**, **Н. А. Глаголев**, **М. Л. Громов** и др.

Рис. 1.3

1.5. Виды проецирования

1.5.1. Центральное (коническое) проецирование

Правила построения изображений, изучаемые в начертательной геометрии, основаны на **методе проекций.**

Рассмотрение метода проекций удобнее начать с построения проекций точки, так как изображение любой пространственной фигуры есть совокупность изображений точек, принадлежащих этой фигуре.

Наиболее общим способом получения изображений является **центральное проецирование** (полярное, коническое).

Для получения центральных проекций нужно задать **аппарат проецирования**, т.е. задать центр проекций (S) и положение плоскости проекций (Π), причем центр проецирования не принадлежит плоскости проекций (рис. 1.4).

Возьмем некоторую точку A, не принадлежащую плоскости проекций и центру проецирования, и проведем через нее луч $[SA)$ до пересечения с плоскостью проекций: получаем $\boldsymbol{A_\Pi}$ - **центральную проекцию точки** $\boldsymbol{A}$.

Точка $\boldsymbol{A_\Pi}$ может быть центральной проекцией любой точки, принадлежащей прямой $[SA_\Pi]$. Поэтому одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении точки в пространстве.

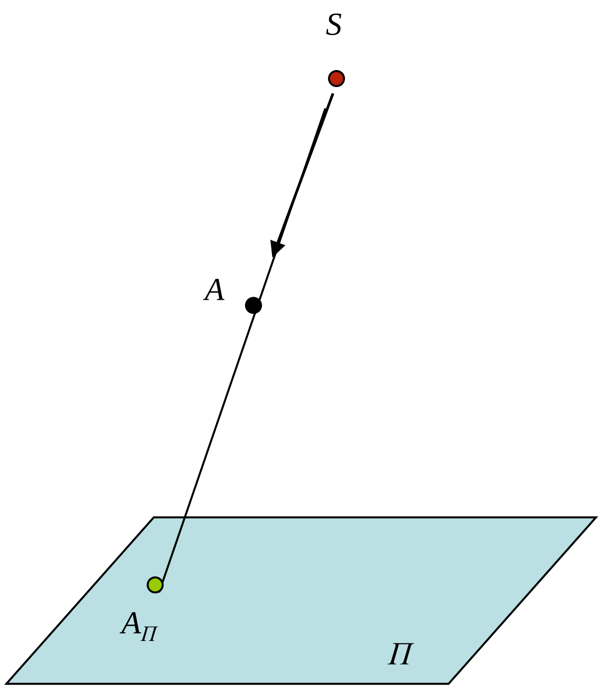


Рис. 1.4

Для того, чтобы однозначно судить о положении точки в пространстве необходимы две центральные проекции точки *A* из двух центров проецирования. Для этого достаточно провести проецирующие лучи $[S_1A^{!}{}_{\Pi})$ и $[S_2A^{!!}{}_{\Pi})$ и отметить точку их пересечения (рис. 1.5).

Таким образом, **две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве**.

Проекцию линии строят, проецируя ряд ее точек на плоскость проекций. При этом проецирующие лучи в своей совокупности образуют коническую поверхность – поэтому центральные проекции называются еще и коническими (рис. 1.6).

Проецирующие лучи могут оказаться и в одной проецирующей плоскости (при проецировании прямой не проходящей через центр проецирования *S* или ломаной линии все точки которой лежат в плоскости, совпадающей с проецирующей плоскостью).

Основной недостаток центральных проекций – отсутствие обратимости чертежа. Тем не менее, изображения в центральных проекциях наглядны, но неудобны для технического черчения.

Центральное проецирование применяется для построения изображений предметов в перспективе.

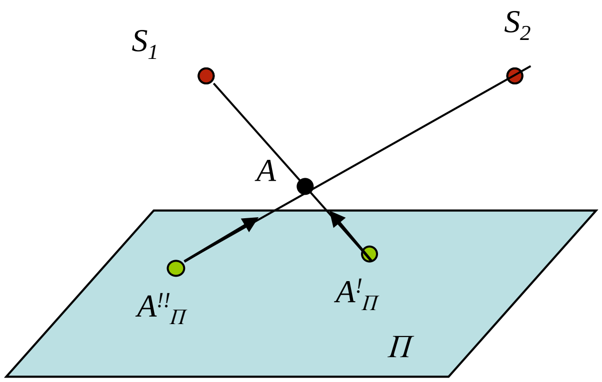


Рис. 1.5

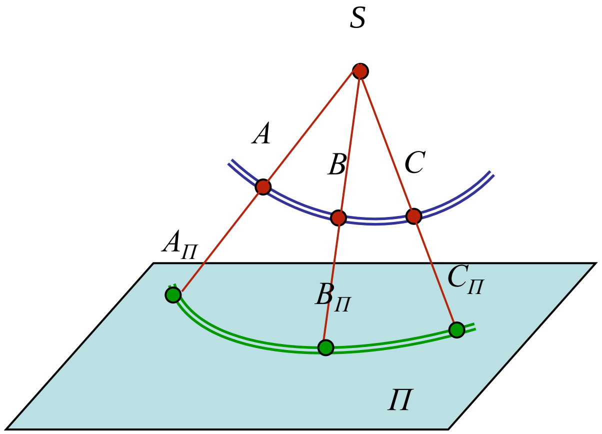


Рис. 1.6

Свойства центральных проекций

1. Проекция точки – есть точка.

2. Проекция прямой, не проходящей через центр проецирования, есть прямая; проходящей – точка.

3. Если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой.

4. Проекция плоской фигуры, не принадлежащей проецирующей плоскости, есть плоская фигура, принадлежащей проецирующей плоскости – прямая.

5. Проекция трехмерной фигуры – двумерная фигура (объемные тела проецируются в плоские).

6. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением.

1.5.2. Параллельные (цилиндрические) проекции

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центральных проекций, когда центр проецирования удален в бесконечность.

Аппарат проецирования полностью определяется положением плоскости проекций (*П*) и направлением проецирования (s_1^{∞}). В этом случае проекцией точки *A* на плоскость проекций *П* будет $A^1_{П}$, в которой проецирующий луч $[s_1^{\infty}A)$ пересечет плоскость проекций *П* (рис. 1.7).

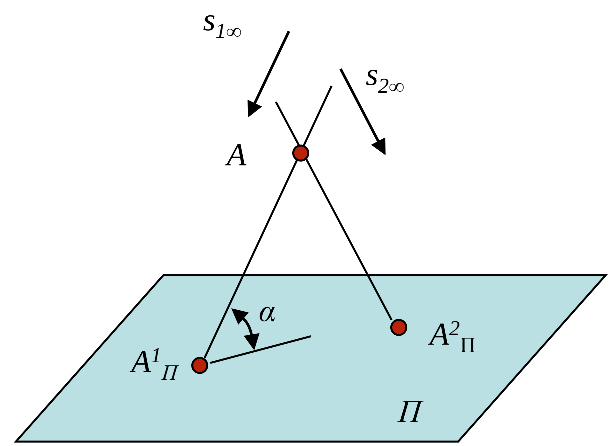


Рис. 1.7

Для определения положения точки *A* в пространстве необходимо иметь две ее параллельные проекции, полученные из двух различных направлений проецирования.

При проецировании кривой линии проецирующие прямые в своей совокупности образуют цилиндрическую поверхность (рис. 1.8).

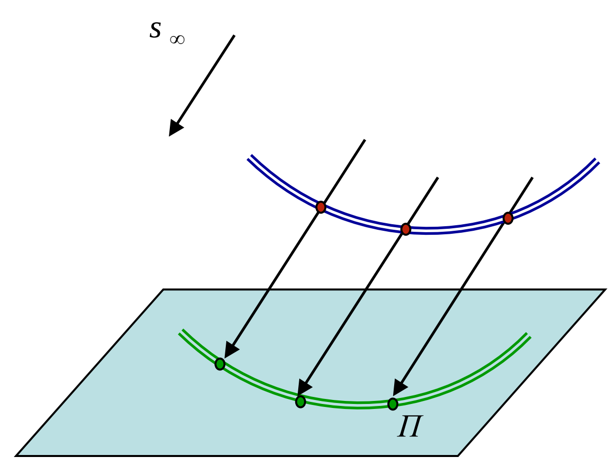


Рис. 1.8

В параллельных проекциях сохраняются все свойства центральных
и возникают новые:

1. Проекции взаимно параллельных прямых параллельны.
2. Отрезок прямой линии, параллельный плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.
3. Проекция фигуры параллельной плоскости проекций равна площади самой фигуры.
4. Параллельный перенос фигуры или плоскости проекций не изменяет формы и размеров ее проекции.
5. Недостаток параллельных проекций тот же, что и у центральных.
6. Параллельные проекции применяют для построения наглядных изображений.

1.5.2.1. Косоугольное и прямоугольное (ортогональное) проецирование

В зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости проецирования параллельные проекции подразделяются на косоугольные и прямоугольные (ортогональные).

Косоугольные проекции – направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол α не равный 90˚ (рис. 1.9). Если угол проецирования равен 90˚, то проецирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций. Такие проекции носят название ортогональных (прямоугольных (рис.1.10).

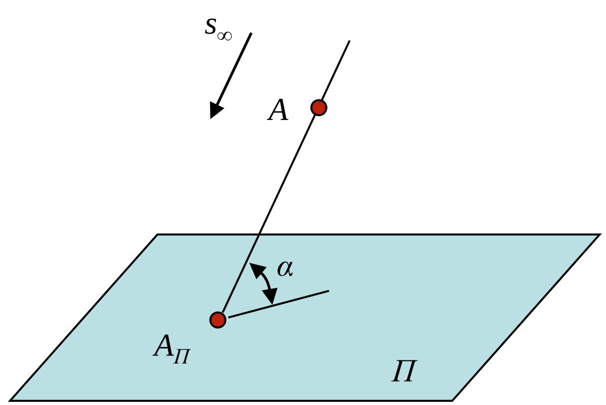


Рис. 1.9

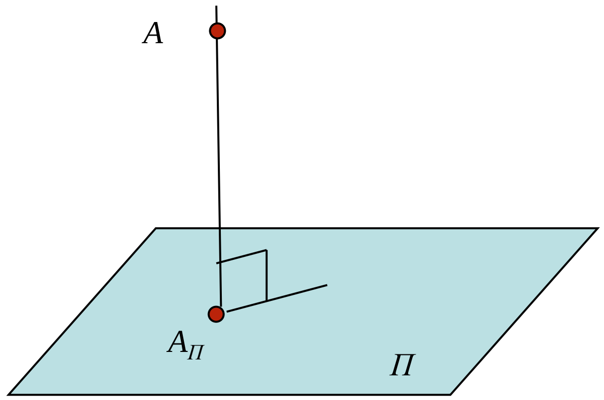


Рис. 1.10

Преимущества прямоугольных проекций

1. Простота построений.

2. Сохранение на проекциях, при определенных условиях, формы и размеров проецируемой фигуры.

Эти преимущества обеспечивают применение метода ортогонального проецирования для разработки чертежей во всех отраслях промышленности и в строительстве.

1.6. Эпюр Монжа

Чертеж должен быть обратимым, то есть должен давать возможность определить положение любой точки предмета относительно плоскости проекций или относительно другой данной точки. Это значит, что каждая точка, заданная на изображении, должна определять единственную точку изображенного объекта.

Обратимость – это такое свойство чертежа, которое дает возможность по графическому отображению воссоздать форму и размеры предмета в пространстве. Обратимость может быть достигнута путем построения наглядных проекций (аксонометрических проекций), проекций с числовыми отметками и т. д. Одним из них является комплексное ортогональное проецирование предмета на две или большее число взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Эпюр (комплексный чертеж) – комплексное (в двух или более) проекциях ортогональное изображение геометрических тел, выполненное с соблюдением проекционных связей между отдельными проекциями.

1.7. Комплексный чертеж точки и прямой

1.7.1. Комплексный чертеж точки

Рассмотрим построение проекции точки на **две** плоскости проекций. Одну плоскость располагают горизонтально и называют горизонтальной плоскостью проекций ($П_1$), другую – вертикально перед наблюдателем и называют фронтальной плоскостью проекций ($П_2$). Горизонтальная и фронтальная плоскости проекций пересекаются по оси x (ось абсцисс).

Плоскости $П_1$ и $П_2$ делят пространство на четыре части (квадранты), которые нумеруются против часовой стрелки (рис. 1.11).

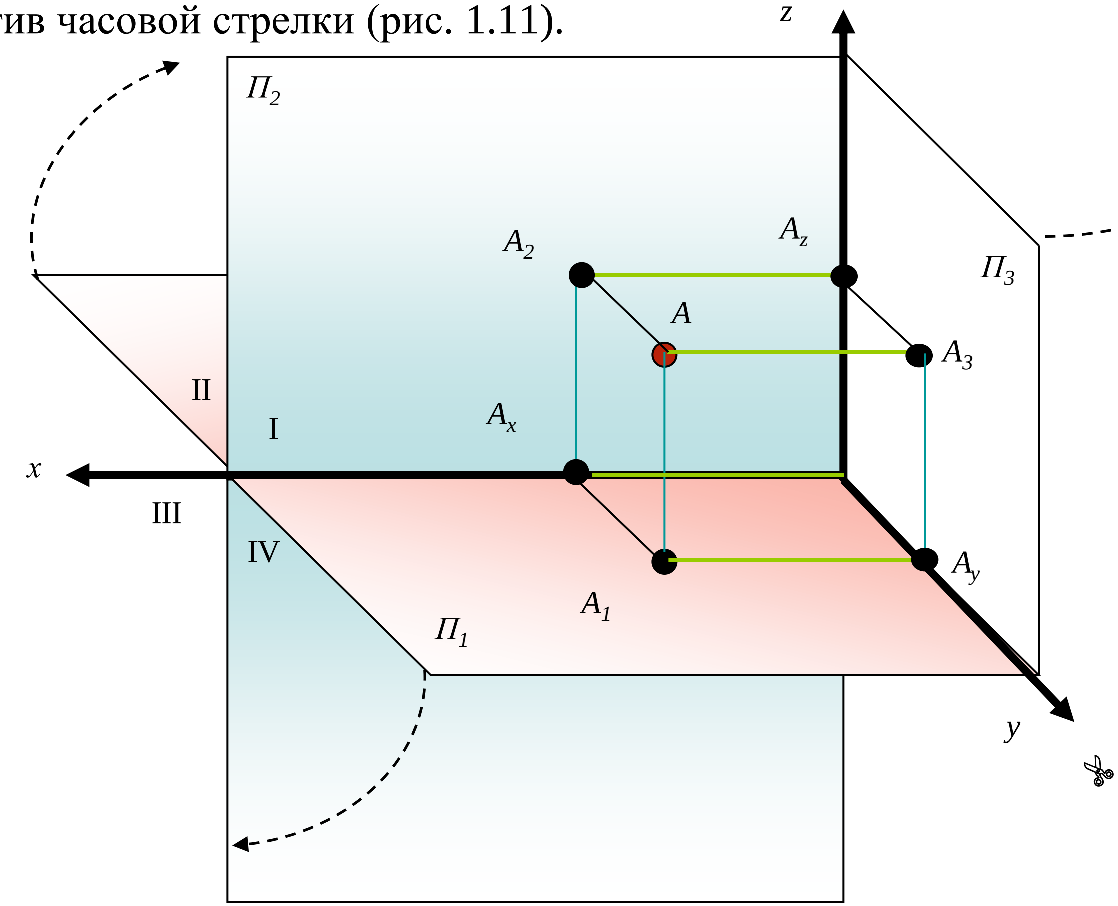


Рис. 1.11

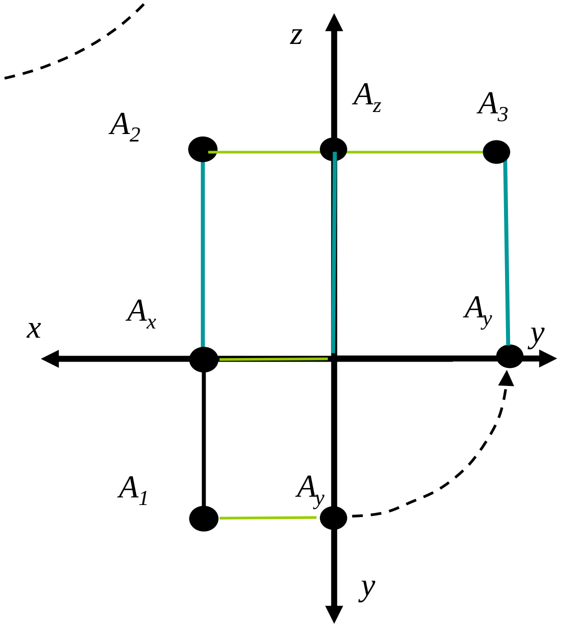


Рис. 1.12

Точку A ортогонально спроецируем на две взаимно перпендикулярные плоскости Π_1 и Π_2 . При этом точка A_1 – горизонтальная, а точка A_2 – фронтальная проекции точки A. Отрезок $[AA_1]$ определяет расстояние точки относительно плоскости Π_1, а отрезок $[AA_2]$ - относительно Π_2. Если из точек A_1 и A_2 опустить перпендикуляр на ось x, то они пересекутся в точке A_x.

Развернем плоскость Π_1 вокруг оси x таким образом, чтобы она совместилась с фронтальной плоскостью проекций: получаем чертеж на плоскости (**эпюр**) (рис. 1.12). Точка A исчезает, остаются только ее проекции. Отрезок $[A_1A_2]$ называется **линией связи**.

Две проекции одной точки всегда лежат на общей линии связи, перпендикулярной к оси проекций.

По сравнению с пространственным изображением на эпюре уменьшилась наглядность чертежа, но вместе с тем появились большие возможности для точного измерения, следовательно, и отображения. Для воссоздания на комплексном чертеже истинного положения точки в пространстве необходимо мысленно вернуть плоскость Π_1 в исходное положение и восстановить перпендикуляры из точек A_1 и A_2 на пересечении которых будет точка A.

Геометрические объекты могут располагаться не только в первом октанте. В этом случае какая-то координата (или две, или три) будут иметь отрицательное значение.

При изображении более сложных объектов может потребоваться введение дополнительной плоскости проекций. Дополнительная плоскость проекций, перпендикулярная двум имеющимся называется **профильной плоскостью проекций** (Π_3) (рис. 1.11, 1.12). Плоскость Π_3 пересекает плоскость Π_1 по оси y (ось ординат), а плоскость Π_2 – по оси z (ось аппликат).

Три плоскости проекций делят пространство на 8 частей, которые называются октантами.

Оси x, y и z – оси координат. За положительное направление осей принимается направление осей первого октанта.

Отрезки $[0A_x] = [A_zA_2] = [A_yA_1] = x$ – определяет расстояние до плоскости $П_3$,
$[0A_y] = [A_xA_1] = [A_zA_3] = y$ – определяет расстояние до плоскости $П_2$,
$[0A_z] = [A_xA_2] = [A_yA_3] = z$ – определяет расстояние до плоскости $П_1$.

Чтобы перейти от наглядного изображения к изображению на плоскости следует мысленно разрезать ось y вдоль и повернуть плоскость $П_1$ вокруг оси x, совместив ее с плоскостью $П_2$, а плоскость $П_3$ – вокруг оси z до совмещения с плоскостью $П_2$.

Вместе с плоскостями проекций переместятся и проекции точки A.

Линии связи всегда перпендикулярны осям проекций:

$$[A_1A_2] \perp x, \ [A_1A_3] \perp y, \ [A_2A_3] \perp z.$$

Отрезки, отсекаемые линиями связи по осям координат, называются **координатами точки**, которые записываются так: $A\,(x, y, z)$.

Положение точек в пространстве

По отношению к плоскостям проекций точка может находиться вне каждой плоскости, либо принадлежать одновременно одной, двум или трем плоскостям проекций.

Если точка принадлежит одной плоскости проекций, то одна координата ее будет равна нулю.

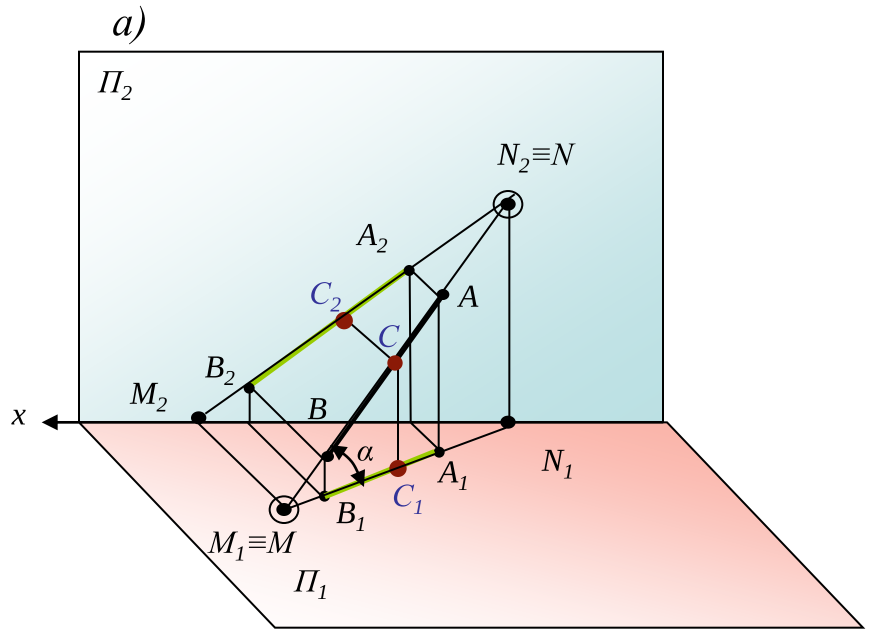
Если точка принадлежит сразу двум плоскостям проекций (точка находится на оси проекций), то две ее координаты будут равняться нулю, если одновременно трем плоскостям проекций – начало координат.

1.7.2. Комплексный чертеж прямой

Прямая линия в пространстве вполне определяется положением двух любых ее точек, либо двумя пересекающимися плоскостями.

Для того, чтобы построить эпюр прямой линии, достаточно построить проекции двух ее точек и провести через одноименные проекции точек проекции прямой (рис. 1.13, *а* и *б*).

При пресечении прямой с плоскостью проекций получается точка, называемая **следом прямой**. На рис. 1.13 точка *M* – горизонтальный, а точка *N* – фронтальный следы прямой *AB*.



Положение точки относительно прямой

Известно, что если точка принадлежит прямой, то одноименные проекции точки будут принадлежать одноименным проекциям прямой.

И если **точка делит отрезок в определенном соотношении, то проекции точки делят проекции отрезка прямой в том же соотношении**:

$$((\cdot)\ C \in [AB] \wedge C_1 \in [A_1B_1] \wedge C_2 \in [A_2B_2]) \Rightarrow AC/CB = A_1C_1/C_1B_1 = A_2C_2/C_2B_2 = m/n.$$

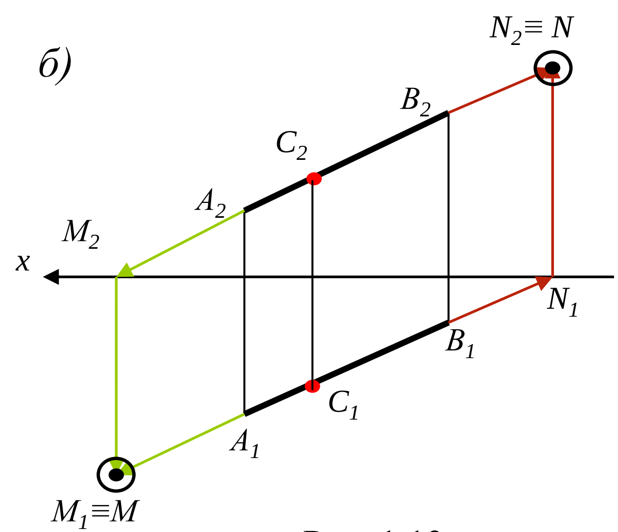


Рис. 1.13

2. Прямые общего и частного положения

2.1. Прямые общего положения

На рис. 1.13 отрезок прямой *AB* занимает произвольное положение относительно всех плоскостей проекций. Такая прямая называется **прямой общего положения**. У нее угол наклона к плоскостям проекций не равен 90° и она пересекает все плоскости проекций.

Отрезок прямой общего положения проецируется на плоскость проекций с искажением: $A_1B_1 = \cos\alpha \cdot AB$. Проекция отрезка прямой общего положения всегда меньше длины самого отрезка.

2.2. Прямые частного положения

Если прямая в пространстве параллельна и (или) перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такая прямая называется **прямой частного положения**.

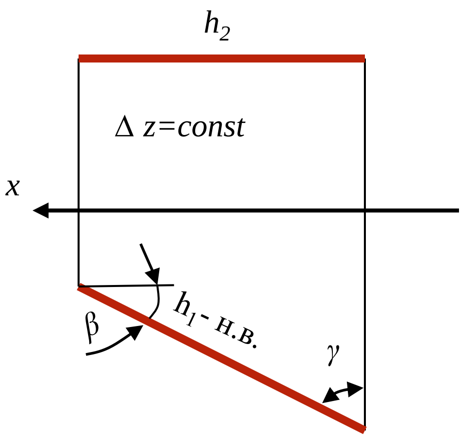
К прямым частного положения относятся прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямые уровня – прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций (рис. 2.1). В частных случаях прямые могут лежать в плоскостях проекций – линии нулевого уровня.

Проецирующие прямые – перпендикулярные какой-либо плоскости проекций (дважды прямые уровня) (рис. 2.2). Частный случай – прямые лежат на осях проекций

2.2.1. Прямые уровня

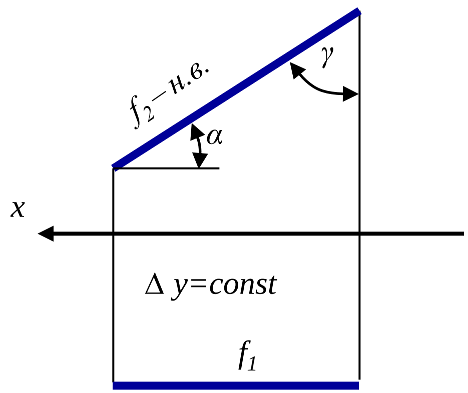
Горизонталь (*h*)



$h \parallel \Pi_1 (h_2 \parallel x;\ h_2, h_3 \perp z, \parallel y)$

Нет горизонтального следа

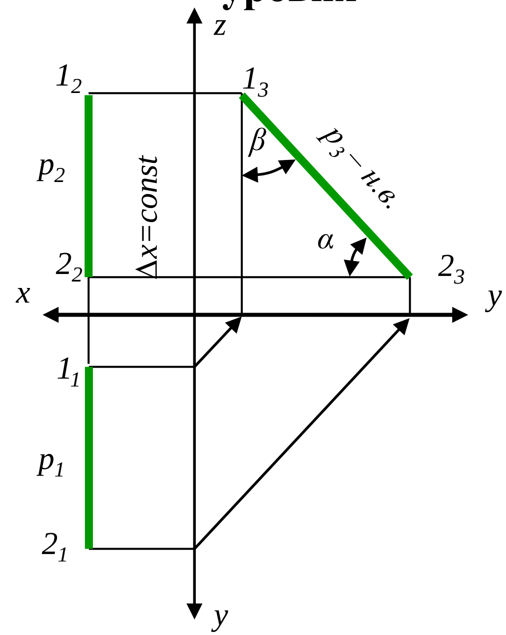
Фронталь (*f*)



$f \parallel \Pi 2\ (f1 \parallel x;\ f3 \perp y, \parallel z)$

Нет фронтального следа

Профильная прямая уровня



(задается только отрезком)

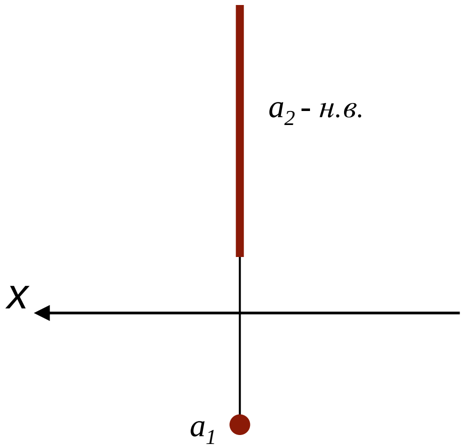
$p \parallel \Pi 3\ (p1, p2 \perp x;\ p1 \parallel y;\ p2 \parallel z)$

Нет профильного следа

Рис. 2.1

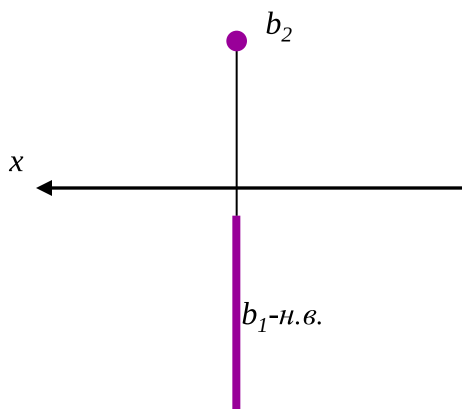
2.2.2. Проецирующие прямые

Горизонтально-проецирующая прямая



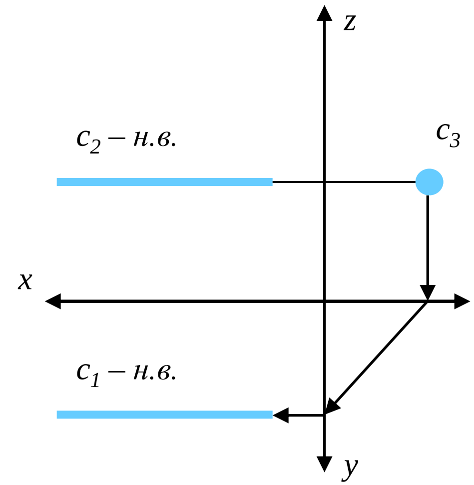
$a \perp \Pi_1$
$(a_2, a_3 \parallel z;\ a_2 \perp x)$
$\Delta y=const, \Delta x=const$

Фронтально-проецирующая прямая



$b \perp \Pi_2$
$(b_1, b_3 \parallel y;\ b_1 \perp x)$
$\Delta x=const, \Delta z=const$

Профильно-проецирующая прямая



$c \perp \Pi_3$
$(c_1, c_2 \parallel x;)$
$\Delta y=const, \Delta z=const$

Рис. 2.2

2.3. Натуральная величина отрезка прямой

Так как проекции отрезка прямой общего положения всегда меньше самой прямой (рис. 2.3), то для определения на эпюре его натуральной длины можно воспользоваться **правилом (способом) треугольника.**

Натуральная величина отрезка прямой общего положения, заданного проекциями, есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого – любая проекция, а второй – разность координат концов отрезка до той плоскости, с которой взят первый катет.

Угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (α) определяется как угол, составленный натуральной проекцией прямой с ее проекцией на этой плоскости проекций (рис. 2.3).

Углы наклона прямой к фронтальной и профильной плоскостям проекций (β и γ, соответственно) определяются аналогично.

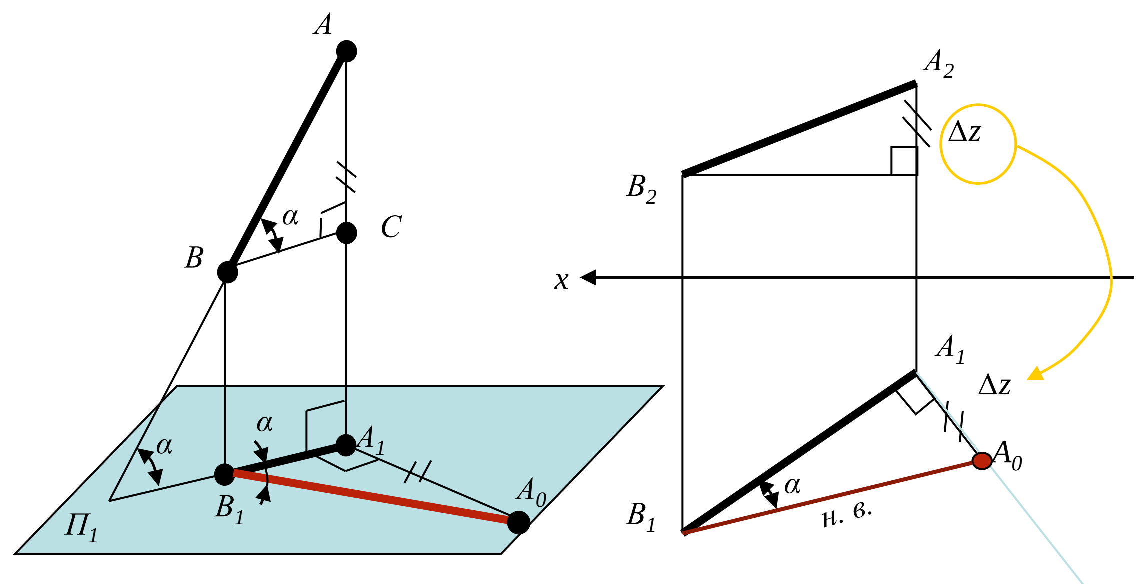


Рис. 2.3

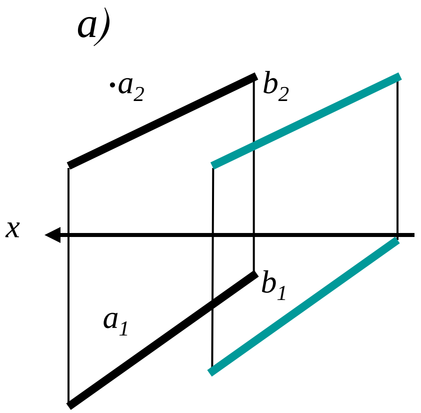
2.4. Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут быть взаимно параллельны, пересекаться или скрещиваться.

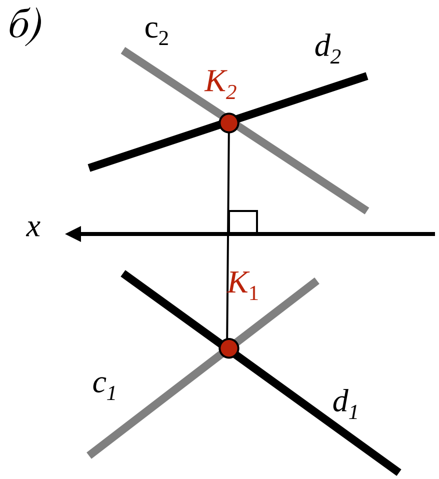
Параллельные прямые лежат в одной плоскости и не имеют общей точки. Их одноименные проекции параллельны (рис.2.4, *а*).

Пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку. Их одноименные проекции пересекаются (рис.2.4, *б*).

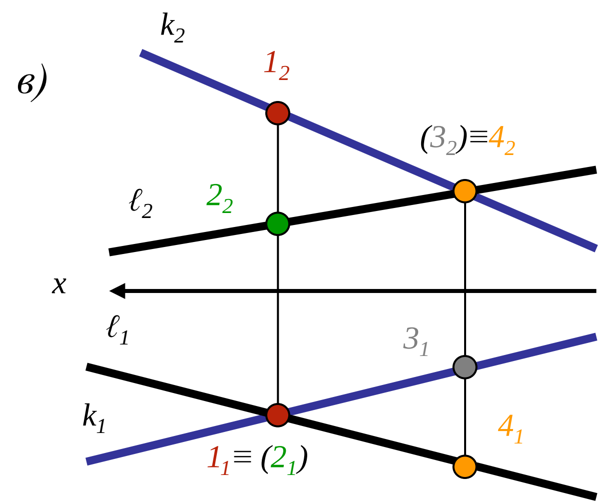
Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости и не имеют общей точки (рис.2.4, *в*).



$\boldsymbol{a \| b \Rightarrow a_1 \| b_1,\ a_2 \| b_2}$



$\boldsymbol{c \cap d \Rightarrow c_1 \cap d_1 = K_1,\ \ c_2 \cap d_2 = K_2}$



Точки ***1*** и ***2*** совпадают на $П_1$ – **горизонтально конкурирующие точки; *3* и *4* – фронтально конкурирующие точки** (совпадают на $П_2$). Видимой считается точка, наиболее удаленная от оси x. Точка, невидимая на какой-либо плоскости проекций, берется в круглые скобки.

Рис. 2.4

2.5. Проекции плоских углов

Для ортогонального проецирования справедлива **теорема о проецировании прямого угла**: *«Если одна из сторон прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, а другая ей не перпендикулярна, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения»* (рис. 2.5):

$$([AB]\perp[BC] \wedge [AB] \parallel \Pi,\ [BC] \not\perp \Pi) \Rightarrow [A_\Pi B_\Pi] \perp [B_\Pi C_\Pi]\ .$$

Если величина плоского угла составляет угол не равный 90°, то, при соблюдении условия параллельности одной из его сторон какой-либо плоскости проекций и неперпендикулярности второй стороны, он также проецируется на эту плоскость проекций без искажения.

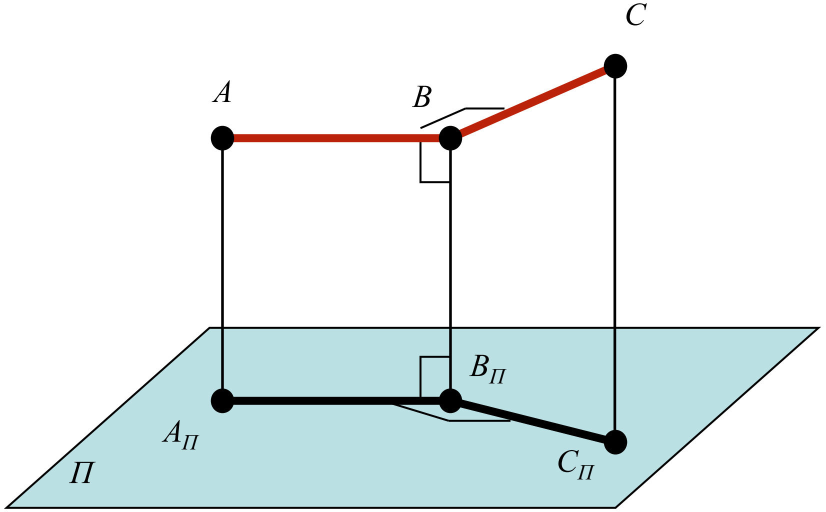


Рис. 2.5

3. Плоскость
3.1. Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость является простейшей поверхностью. Между декартовыми координатами, принадлежащих ей точек, существует зависимость:

$Ax+By+Cz+D=0$, т.е. **плоскость** – поверхность первого порядка.

На чертеже плоскость может быть задана:

а) проекциями 3-х точек, не лежащих на одной прямой (рис. 3.1, *а*);

б)проекциями прямой и точки, взятой вне прямой (рис. 3.1, *б*);

в) проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 2.4, *б*);

г) проекциями двух параллельных прямых (рис. 2.4, *а*);

д) проекциями плоской фигуры (рис. 3.5);

е) следами (рис. 3.2-3.4).

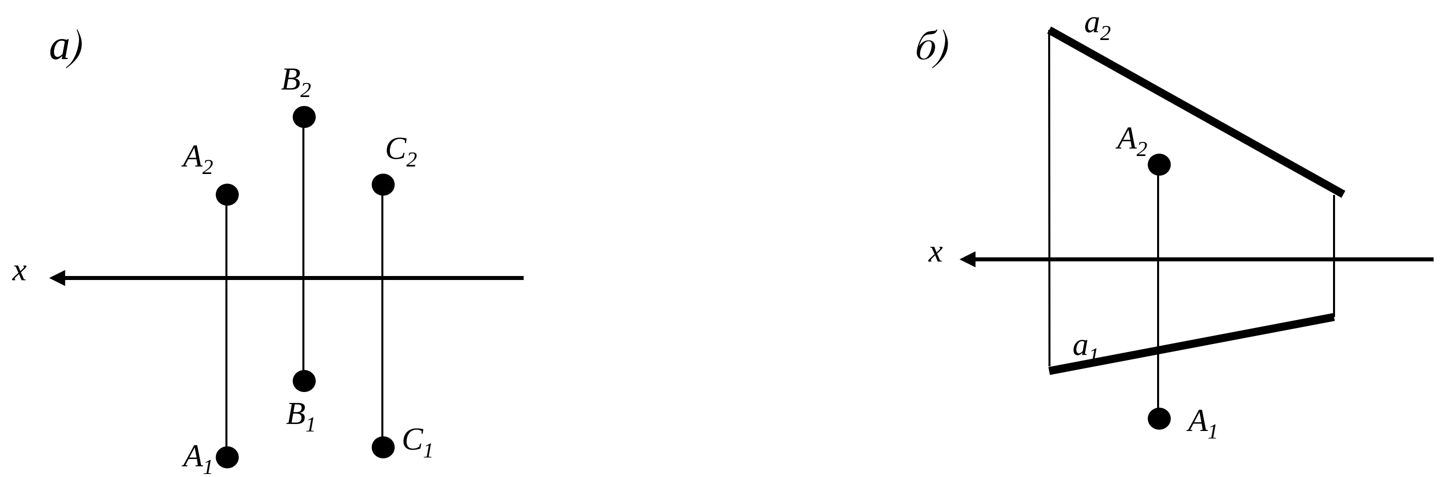


Рис. 3.1

Задание плоскостей следами – это частный случай задания плоскостей двумя пересекающимися прямыми, расположенными на плоскостях проекции.

Под **следом плоскости** понимают линию пересечения плоскости с плоскостью проекций. *Если плоскость не параллельна перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций (плоскость общего положения),* то плоскость пересекает все три плоскости проекций (рис. 3.2).

Горизонтальный след плоскости α ($\alpha_{П1}$) совпадает со своей проекцией на горизонтальной плоскости проекций $П_1$, фронтальный след плоскости α ($\alpha_{П2}$) совпадает со своей фронтальной проекцией на фронтальной плоскости проекций, а профильный след плоскости α ($\alpha_{П3}$) – со своей профильной проекцией на профильной плоскости проекций $П_3$. Следы плоскости пересекаются в точках, лежащих на осях проекций, α_X, α_Y, α_Z – точках схода следов плоскости.

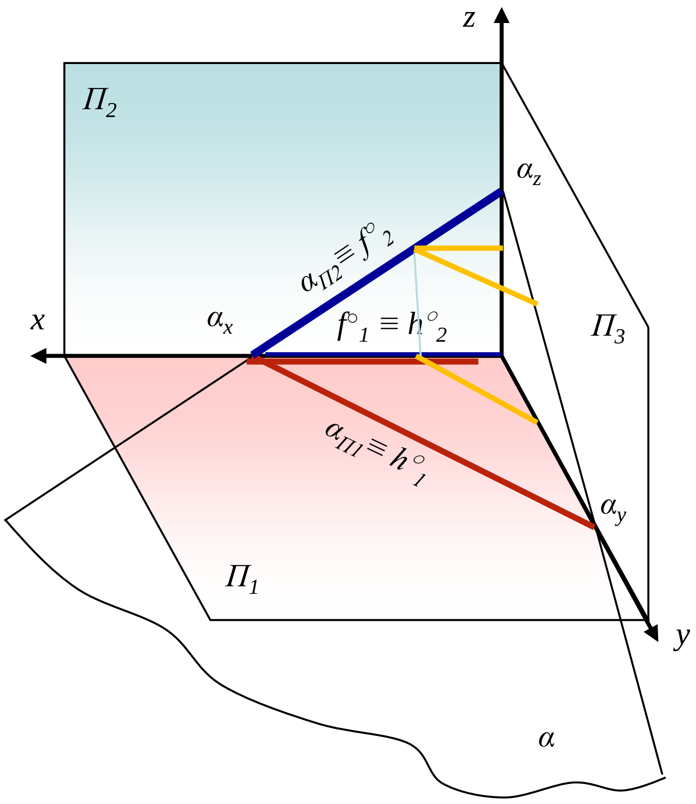


Рис. 3.2

Для построения соответствующего следа плоскости α на комплексном чертеже (рис. 3.3) необходимо построить горизонтальные и фронтальные следы двух прямых a и b, определяющих данную плоскость и, через одноименные следы прямых, на каждой плоскости проекций, провести следы плоскости ($\alpha_{П1}$, $\alpha_{П2}$).

Горизонтальный и фронтальный следы плоскости ($\alpha_{П1}$ и $\alpha_{П2}$) называют еще и **нулевой горизонталью** (h^o) и **нулевой фронталью** (f^o), соответственно, причем, не обозначаемые проекции нулевых линий уровня лежат на оси x (рис. 3.3, 3.4).

Все горизонтали (фронтали и профильные прямые) параллельны между собой и параллельны соответствующим следам плоскости (рис. 3.4).

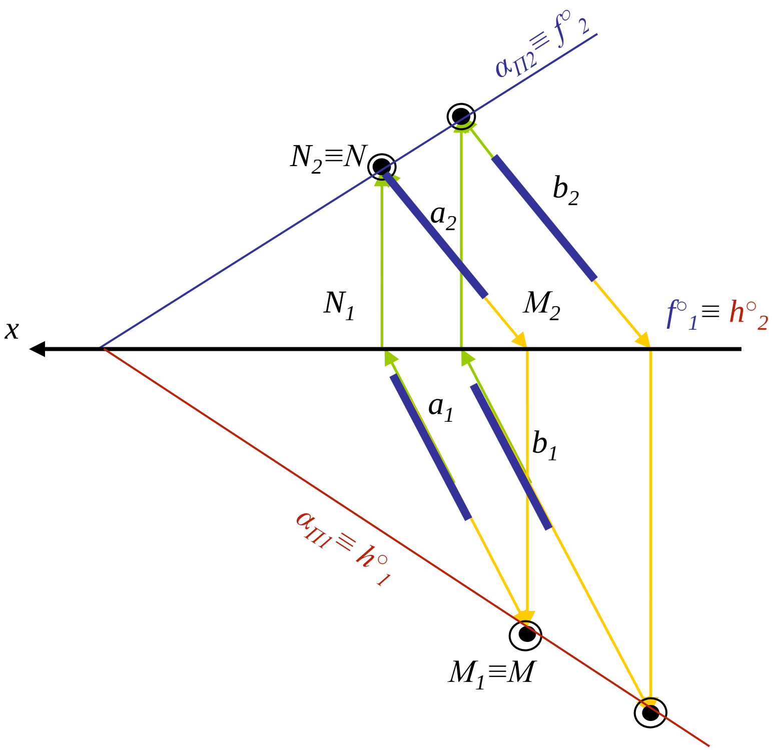


Рис. 3.3

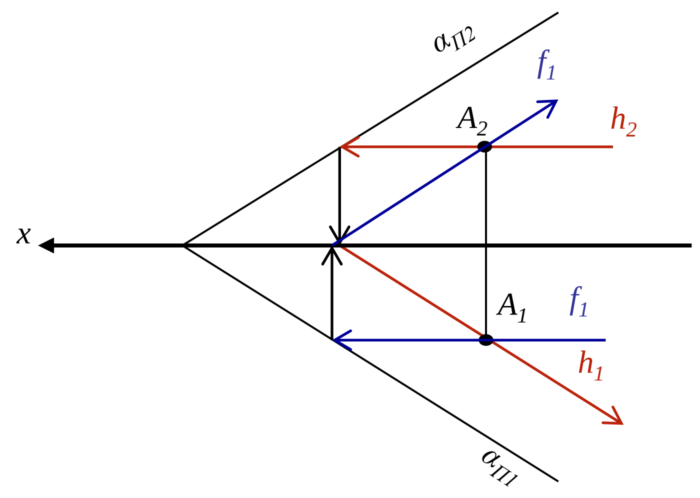


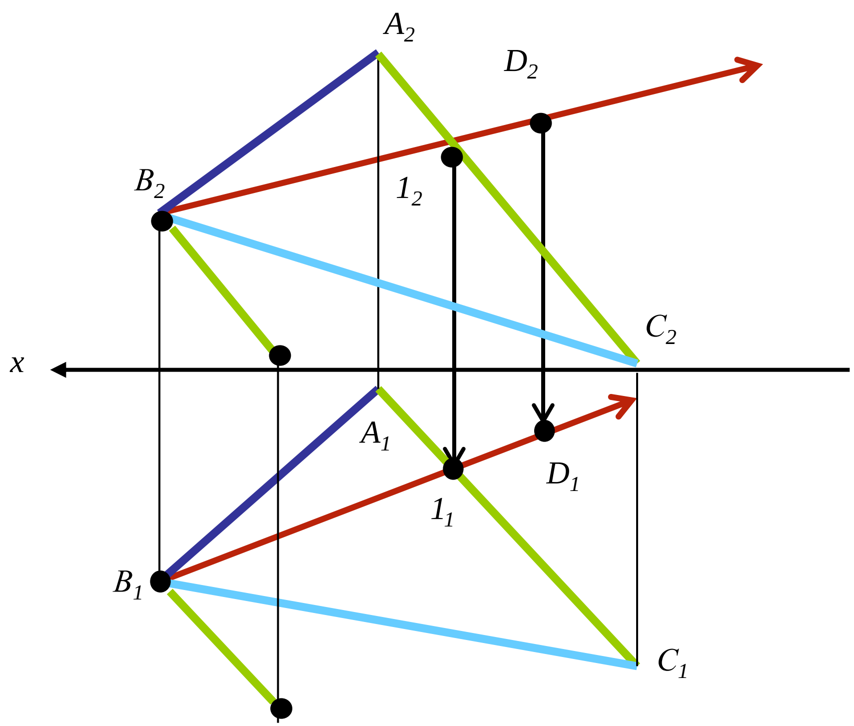
Рис. 3.4

3.2. Принадлежность точки и прямой плоскости

Построение линии в плоскости основано на свойстве принадлежности точки и линии плоскости:

1) **точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой, расположенной в этой плоскости**;

2) **прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки этой плоскости или проходит через точку плоскости и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости** (рис. 3.5).



Аксиома: Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней одну общую точку и параллельна другой прямой, лежащей в этой плоскости (прямая *BE* принадлежит плоскости треугольника, т.к. имеет с плоскостью общую точку *B* и параллельна стороне *AC*).

Рис. 3.5

В плоскости можно выделить линии, которые называются **особые (главные) линии плоскости.**

К главным линиям плоскости относят **линии уровня** и **линии наибольшего наклона**.

Прямые линии, лежащие в плоскости и параллельные плоскостям проекций, называют линиями уровня. Различают горизонтальную прямую (горизонталь), фронтальную прямую (фронталь) и профильную прямую.

Горизонталью (h) называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция горизонтали (h_2) параллельна оси x (рис. 3.6).

Фронталью (f) плоскости называется прямая, лежащая в этой плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций. У фронтали горизонтальная проекция (f_1) параллельна оси x (рис. 3.6).

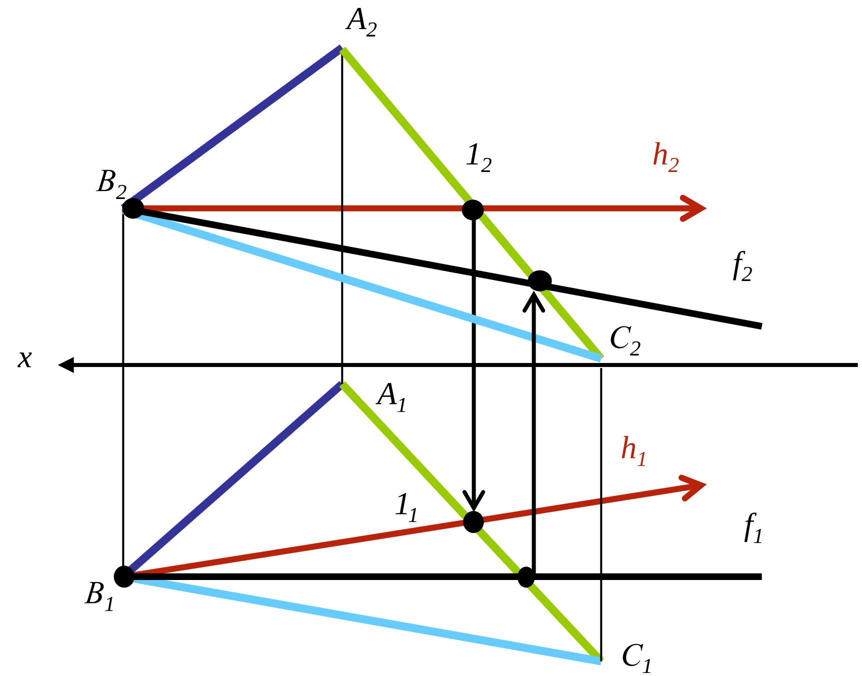


Рис. 3.6

Линиями наибольшего наклона плоскости называются линии, которые лежат в плоскости и перпендикулярны линиям уровня.

Линии наибольшего наклона применяют при определении углов наклона плоскости к плоскостям проекций (рис. 3.7).

К особым линиям плоскости относятся также следы плоскости.

Угол между линией наибольшего наклона и одноименной плоскостью проекций определяет наклон плоскости к соответствующей плоскости проекций (по правилу прямоугольного треугольника).

Линия перпендикулярная к горизонтали (ее еще называют линией наибольшего ската) позволяет определить угол наклона плоскости к Π_1 *(α), а* линия перпендикулярная к фронтали – угол наклона плоскости к $\Pi_{2.}$ (β)

Линия перпендикулярная к профильной прямой уровня – угол наклона плоскости к Π_3 (γ).

Следует помнить, что перпендикуляр проводят только к натуральной величине линии уровня.

Пример: Определить угол наклона плоскости (h ∩ f) к фронтальной плоскости проекций.

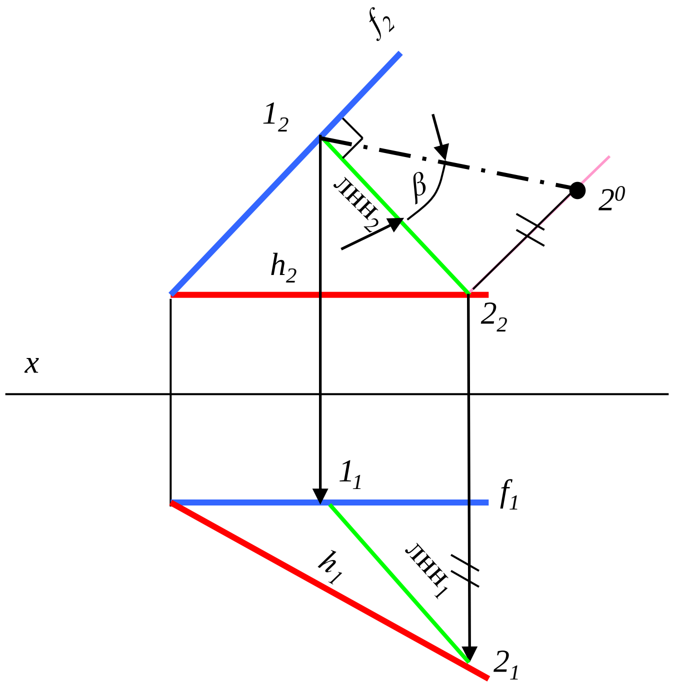


Рис. 3.7

3.3. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Под **плоскостями частного положения** понимают такие плоскости, которые перпендикулярны и параллельны плоскостям проекций.

Различают проецирующие плоскости и плоскости уровня.

3.3.1. Проецирующие плоскости

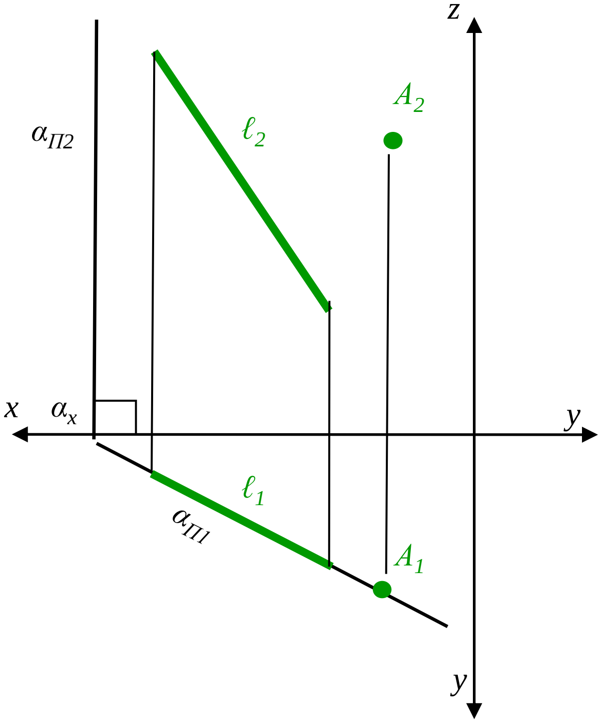
Проецирующие плоскости – это плоскости, проходящие через центр проецирования и перпендикулярные какой-либо плоскости проекций (рис. 3.8 – 3.10)..

Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1, называется горизонтально-проецирующей плоскостью Плоскости перпендикулярные фронтальной или профильной плоскости проекций называются фронтально- и профильно-проецирующими.

Соответствующие следы проецирующих плоскостей обладают **собирательным свойством**, которое может быть сформулировано следующим образом: **любой геометрический элемент, лежащий в проецирующей плоскости, проецируется на вырожденную проекцию плоскости.**

На рис. 3.8 – 3.10 точки A, B, C и прямые ℓ**,** a и b, лежащие в плоскостях α, β и δ, проецируются на след плоскости, на соответствующих плоскостях проекций «вырождаются» в прямую линию – след плоскости.

3.3.1.1. Горизонтально-проецирующая плоскость



$\alpha \perp П_1\,(\alpha_{П2} \perp x,\ \alpha_{П3} \perp y)$

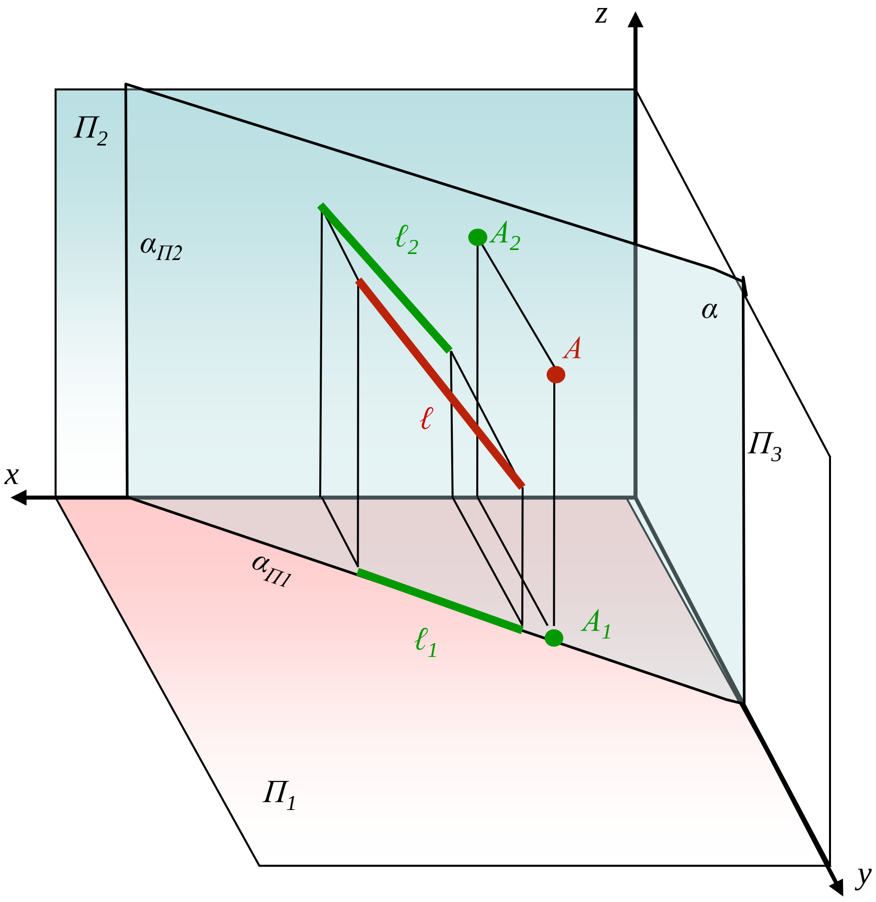
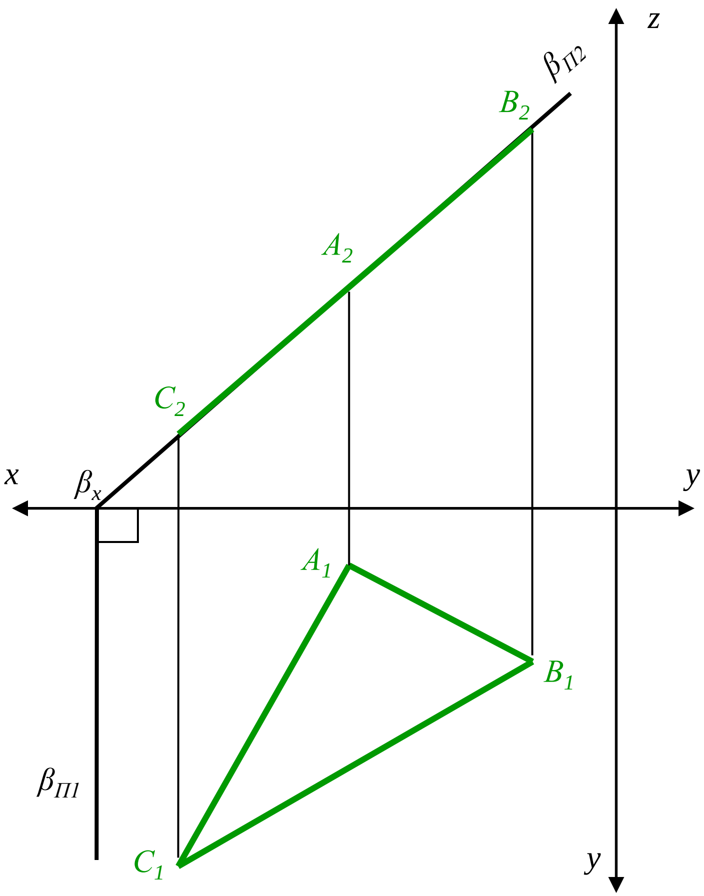


Рис. 3.8

3.3.1.2. Фронтально-проецирующая плоскость



$\beta \perp \Pi_2 (\beta_{\Pi 1} \perp x,\ \beta_{\Pi 3} \perp z)$

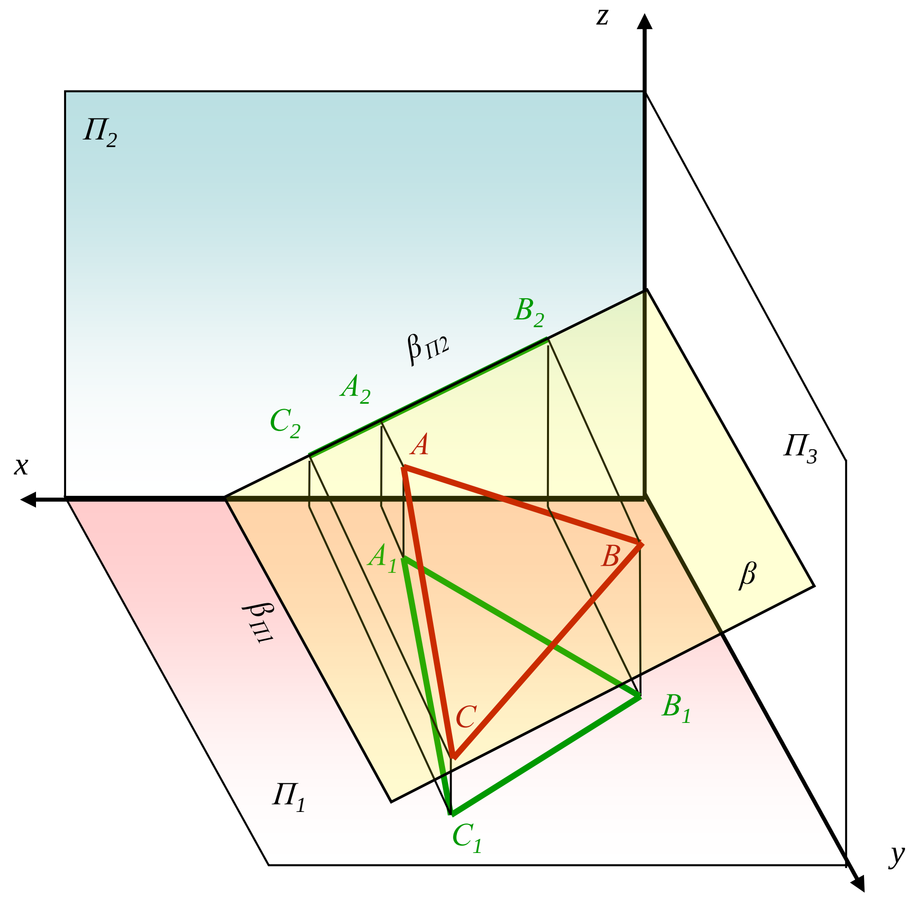
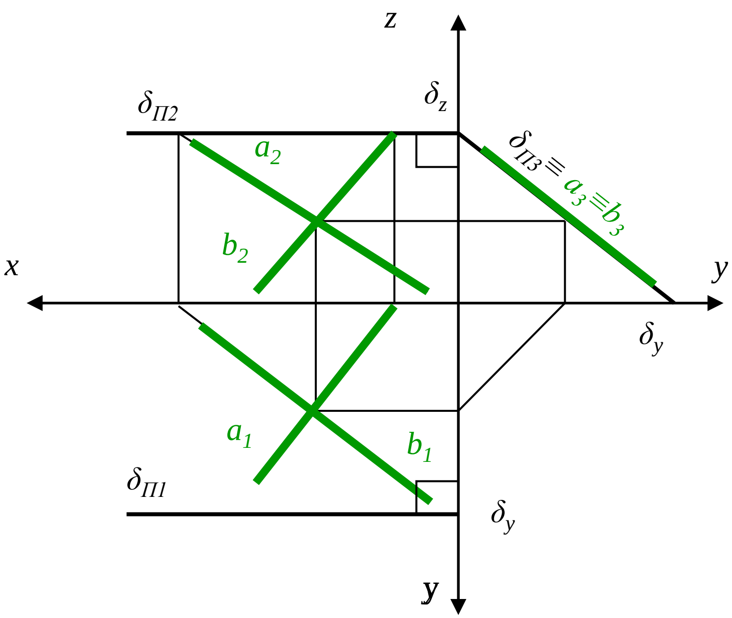
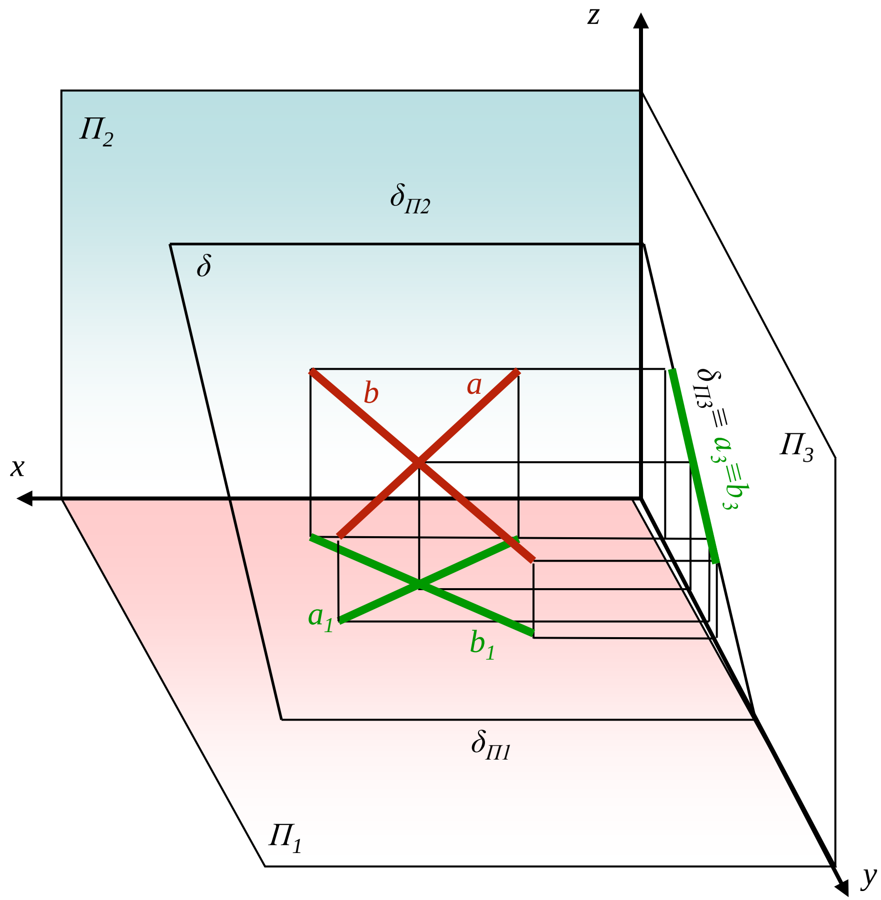


Рис. 3.9

3.3.1.3. Профильно-проецирующая плоскость





$\delta \perp П_3 (\delta_{П1} \perp y;\ \delta_{П2} \perp z;\ \delta_{П1}, \delta_{П2} \parallel x)$

Рис. 3.10

3.3.2. Плоскости уровня

Плоскости уровня – это плоскости параллельные какой-либо плоскости проекций.

Различают:

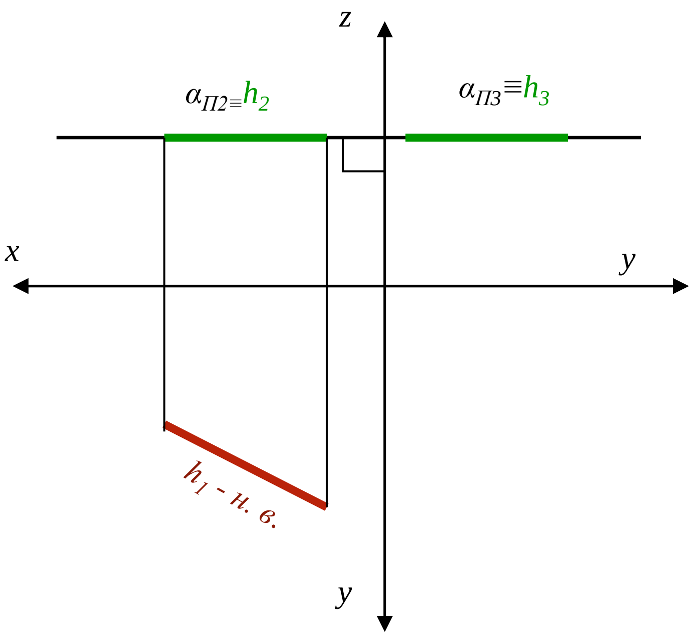
1) горизонтальную плоскость уровня $\alpha \parallel \mathit{\Pi}_1$ (рис. 3.11);

2) фронтальную плоскость уровня $\beta \parallel \mathit{\Pi}_2$ (рис. 3.12);

3) профильную плоскость уровня $\delta \parallel \mathit{\Pi}_3$ (рис. 3.13).

На той плоскости проекции, к которой параллельна заданная плоскость уровня, любой геометрический элемент, лежащий в ней, проецируется в натуральную величину.

3.3.2.1. Горизонтальная плоскость уровня



$\alpha \parallel П_1 (\alpha_{П2} \parallel x,\ \alpha_{П3} \parallel y)$

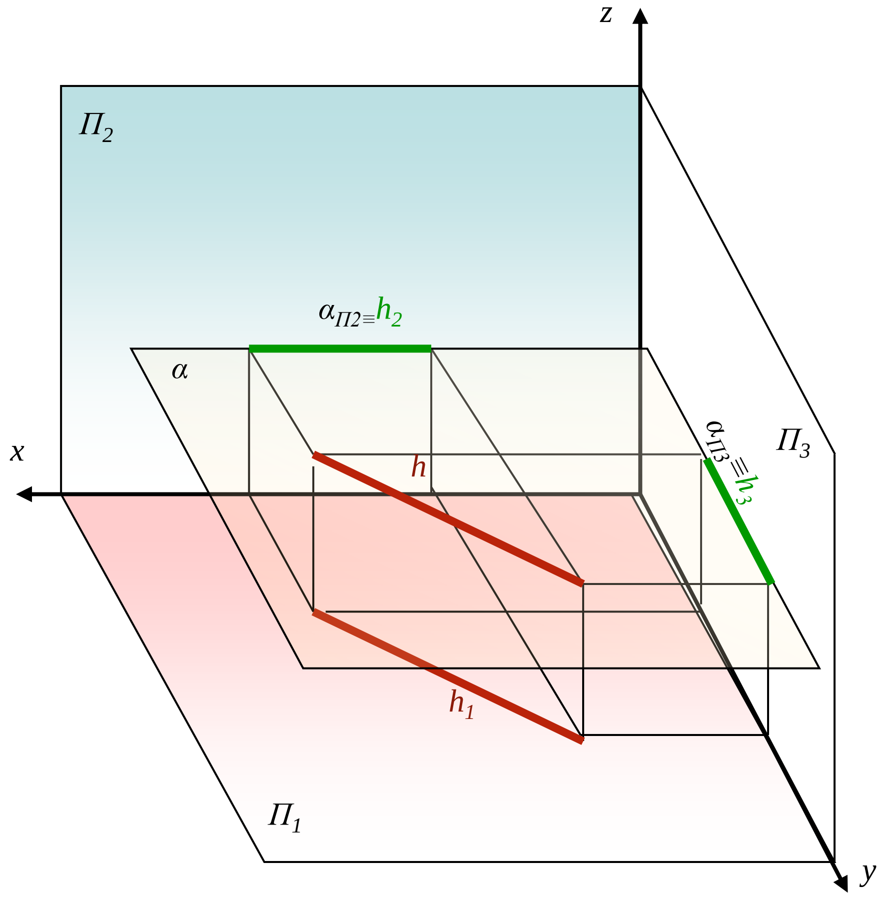
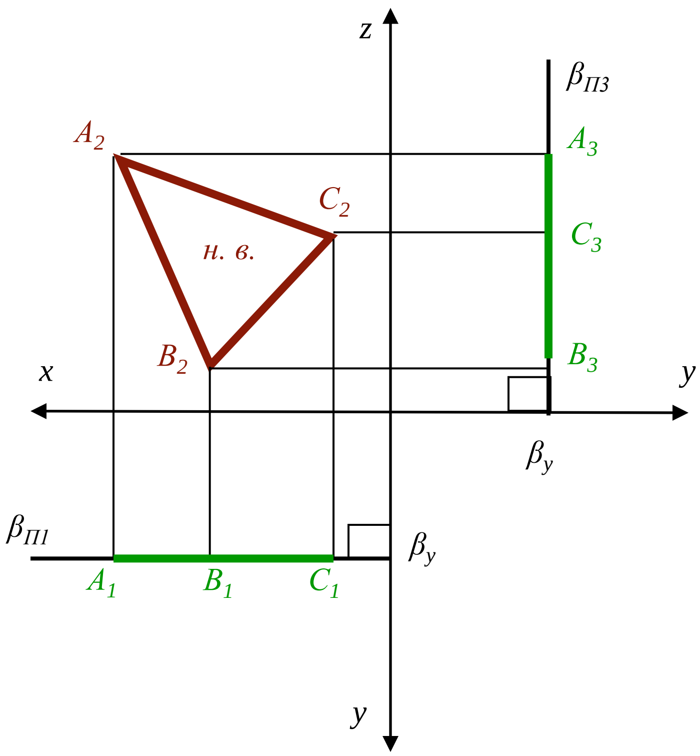


Рис. 3.11

3.3.2.2. Фронтальная плоскость уровня



$\beta \parallel П_2 (\beta_{П1} \parallel x, \beta_{П3} \parallel z)$

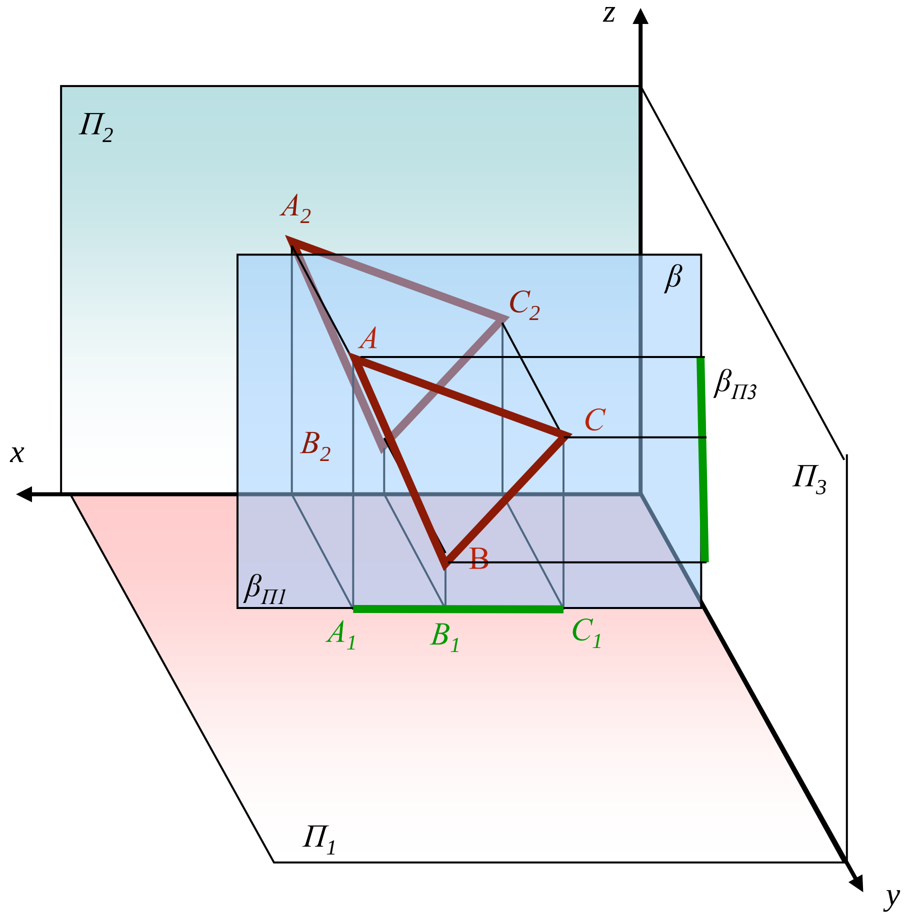
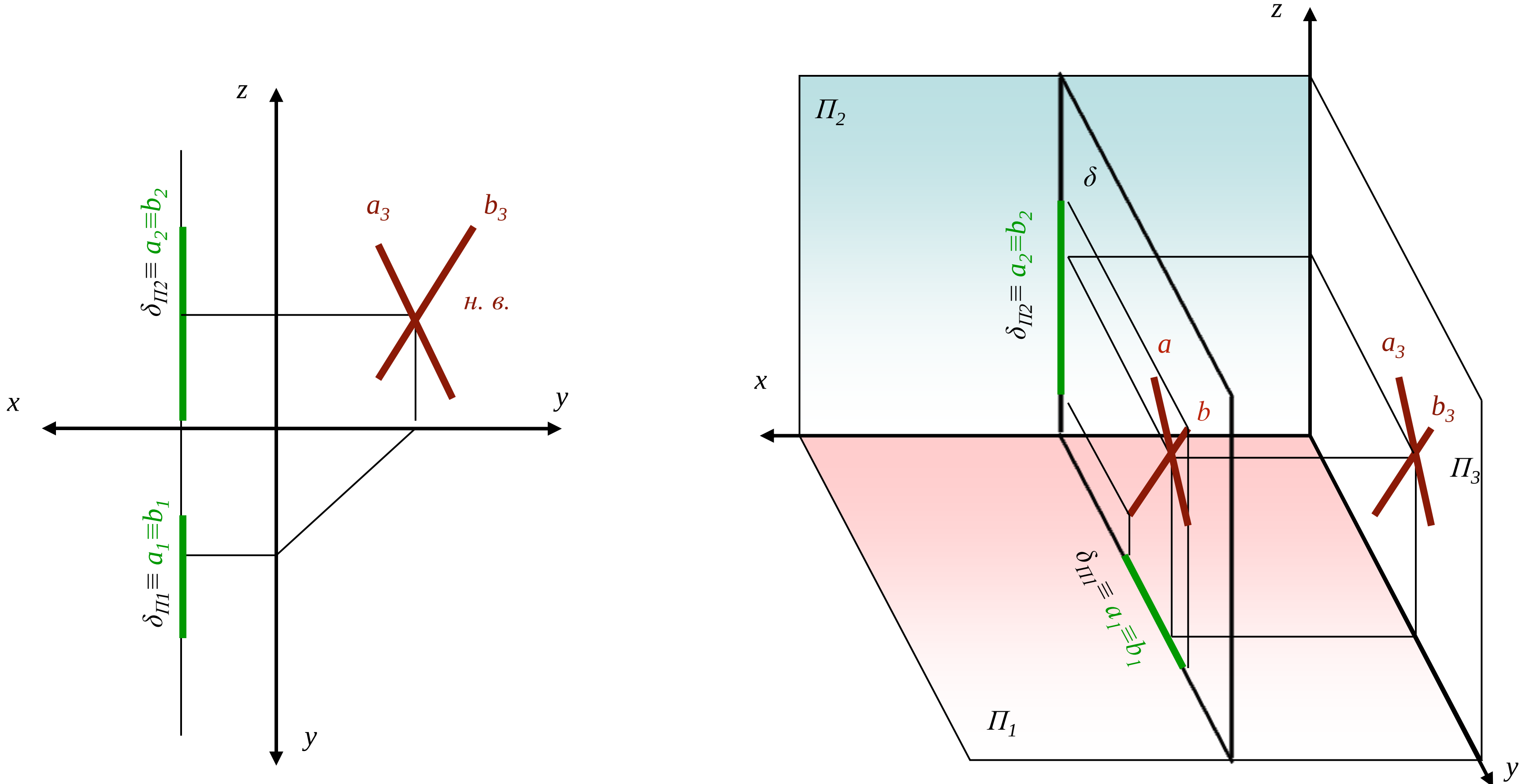


Рис. 3.12

3.3.2.3. Профильная плоскость уровня



$\delta \parallel \Pi_3\,(\delta_{\Pi 1}, \delta_{\Pi 2} \perp x)$

Рис. 3.13

3.4. Взаимное положение и пересечение двух плоскостей, прямой линии и плоскости

3.4.1. Параллельность прямой и плоскости

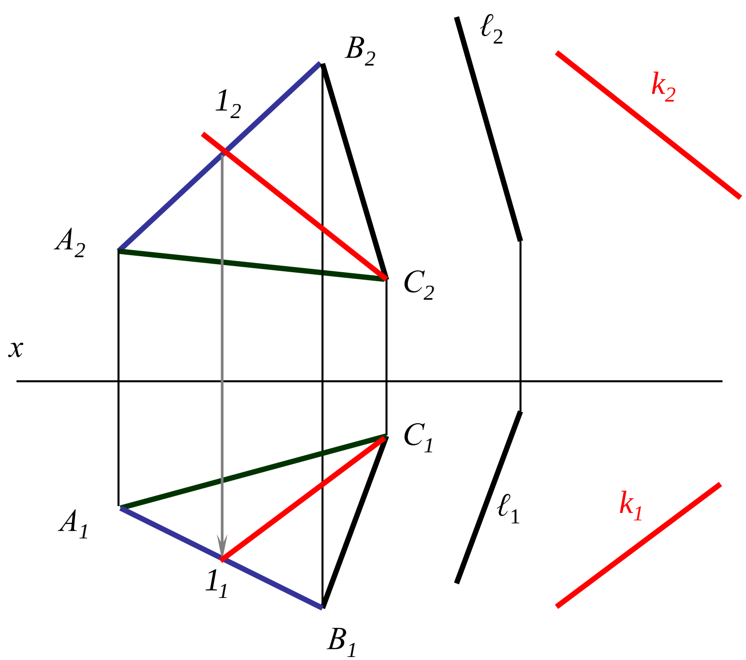


Рис. 3.14

Прямая параллельна плоскости, если в плоскости можно провести прямую, параллельную этой прямой.

Прямая ℓ (рис. 3.14) параллельна плоскости, заданной треугольником *ABC*, так как горизонтальная проекция прямой ℓ (ℓ_1) параллельна горизонтальной проекции прямой *BC* (B_1C_1), лежащей в плоскости треугольника. Фронтальная проекция этой прямой (ℓ_2) параллельна фронтальной проекции прямой *BC* (B_2C_2).

Прямая *k* параллельна плоскости, заданной треугольником, так как параллельна прямой *C-1* ($C_1 1_1$, $C_2 1_2$).

3.4.2. Параллельность двух плоскостей

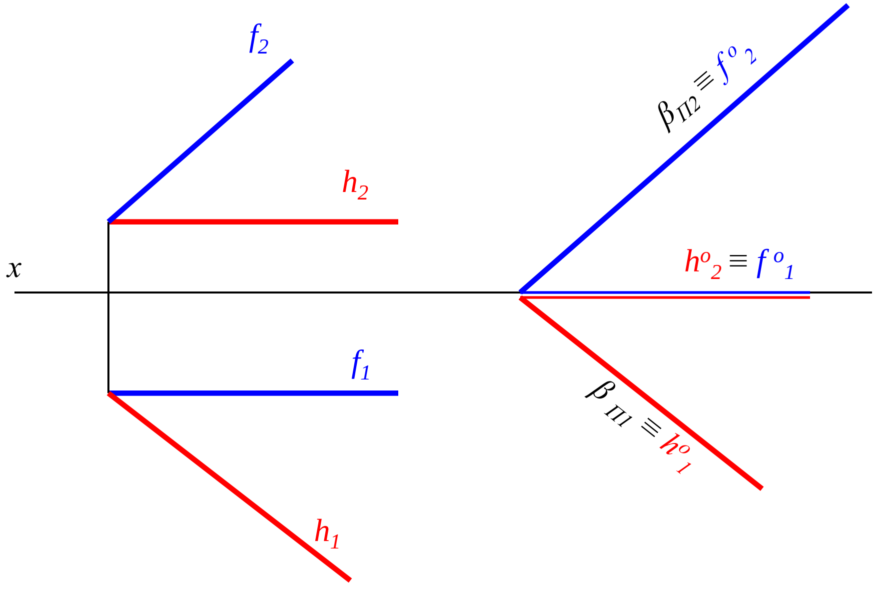


Рис. 3.15

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

На рис. 3.15 плоскость α, заданная двумя пересекающимися прямыми h и f, параллельна плоскости β, заданной следами $\beta_{П1}$ и $\beta_{П2}$.

Согласно определению о параллельности двух плоскостей:

$f_1 \parallel f^o{}_1$ (ось x), $f_2 \parallel f^o{}_2$ ($\beta_{П2}$), $h_1 \parallel h^o{}_1$ ($\beta_{П1}$), $h_2 \parallel h^o{}_2$ (ось x).

У параллельных плоскостей, заданных следами, одноименные следы параллельны.

3.4.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

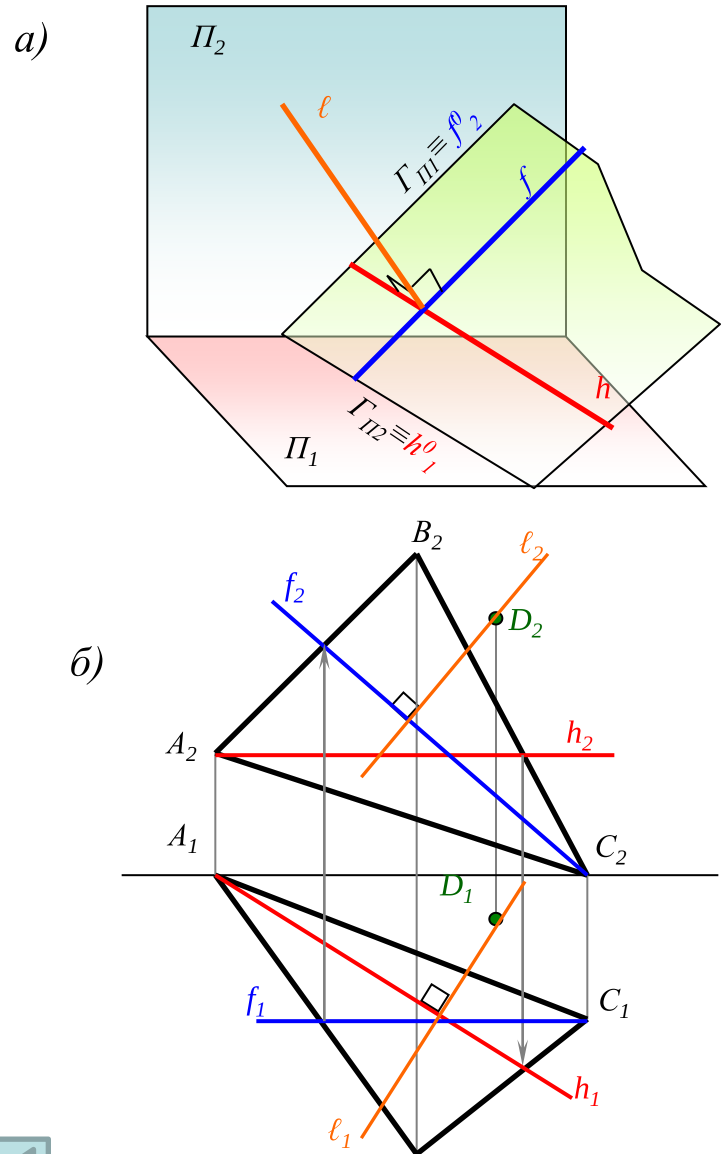


Рис. 3.16

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости.

В качестве пересекающихся прямых следует использовать горизонталь и фронталь плоскости.

На основании теоремы о проецировании прямого угла горизонтальная проекция перпендикуляра проецируется перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикуляра – перпендикулярно фронтальной проекции фронтали.

На рис. 3.16 прямая ℓ перпендикулярна плоскости заданной треугольником АВС. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций Π_2 фронтальная проекция прямой (ℓ_2) перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (f_2), а горизонтальная проекция прямой (ℓ_1) перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (h_1):

$$\ell \perp \Delta\, ABC \Rightarrow \ell \perp h, f \Rightarrow \ell_1 \perp h_1,\ \ell_2 \perp f_2.$$

3.4.4. Перпендикулярность двух плоскостей

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную к другой плоскости.

Построение начинается с проведения перпендикуляра к плоскости. В качестве второй прямой, если нет дополнительных условий, может выступить любая прямая (рис. 3.17, прямая *k*):

$$\ell \perp h, f \Rightarrow \Gamma(\ell \cap k) \perp \Delta ABC .$$

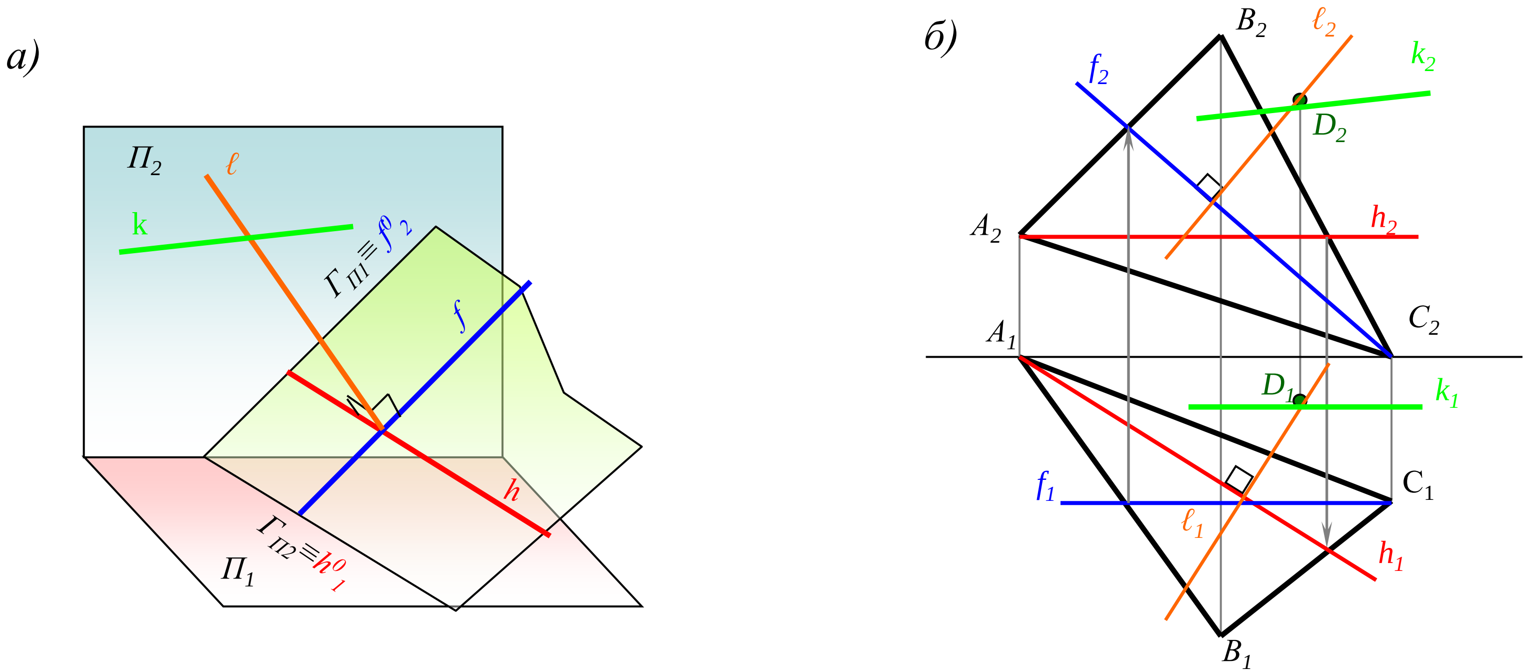


Рис. 3.17

3.4.5. Пересечение двух плоскостей

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой линии. Построение линии пересечения плоскостей – это первая основная позиционная задача начертательной геометрии на пересечение геометрических образов.

Все задачи на пересечение двух плоскостей можно разбить на две группы:

1) Нахождение двух точек, принадлежащих одновременно двум плоскостям. Эти точки определяют искомую линию пересечения плоскостей.
2) Определение одной общей точки и направления линии пересечения плоскостей.

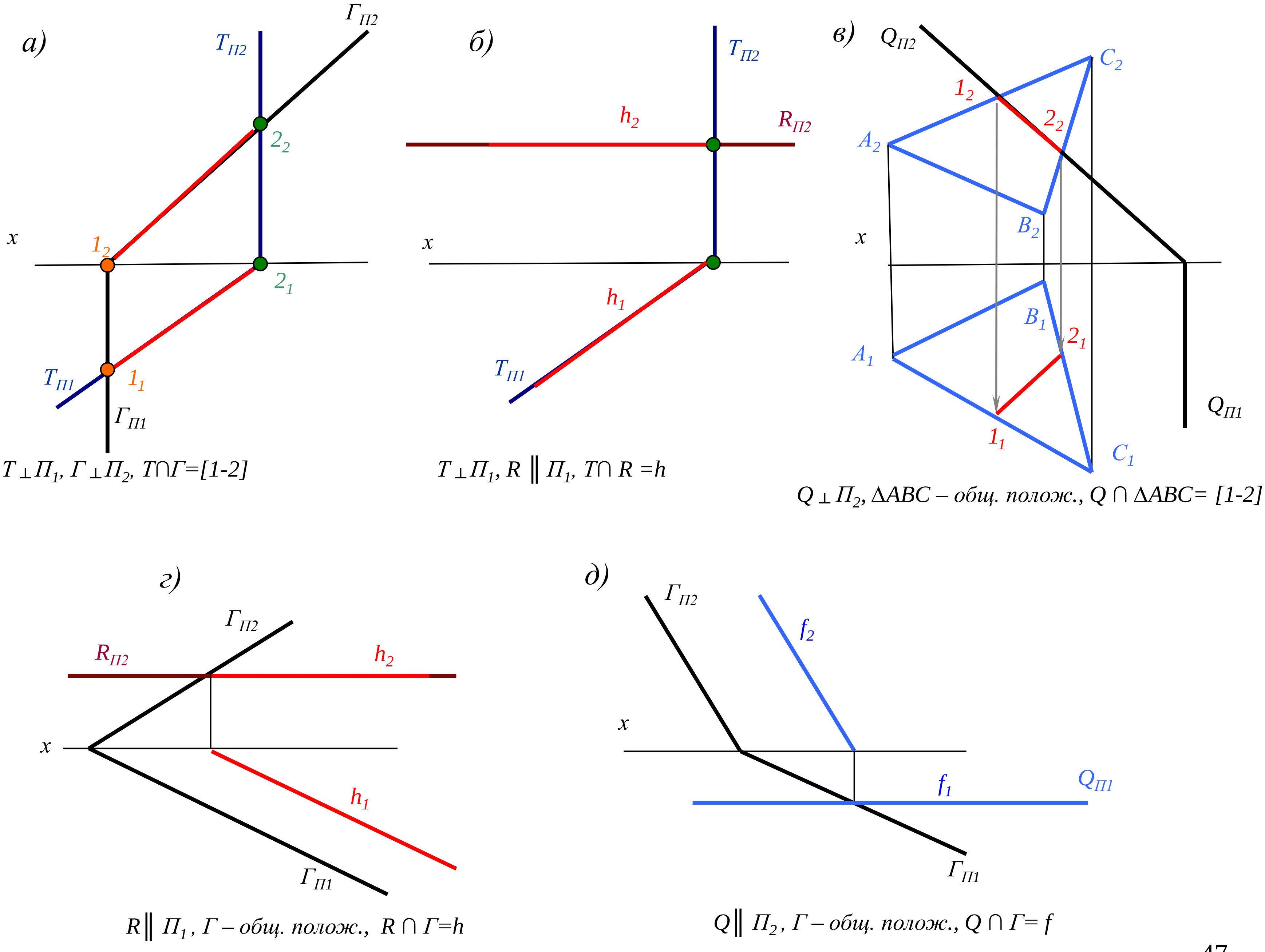
3.4.5.1. Пересечение плоскостей частного положения

При пересечении плоскостей частного положения проекции линии пересечения совпадают с соответствующими следами этих плоскостей (рис. 3.18, *а* и *б*).

Если одна из пересекающихся плоскостей занимает частное положение, то линию пересечения плоскостей находят без дополнительных построений.

На рис. 3.18, *в* плоскость *Q*, пересекающаяся с плоскостью, заданной треугольником, занимает фронтально проецирующее положение. Согласно собирательному свойству проецирующих плоскостей, линия пересечения заданных плоскостей лежит на следе проецирующей плоскости *Q* (отрезок *1-2*). Поэтому следует только найти горизонтальную проекцию линии *1-2*, которую определяют по признаку принадлежности прямой плоскости треугольника.

Плоскость уровня пересекает любую плоскость по прямой уровня. Горизонтальная плоскость уровня – по горизонтали (рис. 3.18, *г*), а фронтальная плоскость уровня – по фронтали (рис. 3.18, *д*). В этом случае достаточно определить только одну общую точку и направление линии пересечения плоскостей.



а)
$Г_{П2}$
$T_{П2}$
2_2
x
1_2
2_1
$T_{П1}$
1_1
$Г_{П1}$
$T \perp П_1$, $Г \perp П_2$, $T \cap Г = [1\text{-}2]$
б)
$T_{П2}$
h_2
$R_{П2}$
x
h_1
$T_{П1}$
$T \perp П_1$, $R \parallel П_1$, $T \cap R = h$
в)
$Q_{П2}$
C_2
1_2
2_2
A_2
B_2
x
B_1
2_1
A_1
$Q_{П1}$
1_1
C_1
$Q \perp П_2$, ΔABC – общ. полож., $Q \cap \Delta ABC = [1\text{-}2]$
г)
$Г_{П2}$
$R_{П2}$
h_2
x
h_1
$Г_{П1}$
$R \parallel П_1$, $Г$ – общ. полож., $R \cap Г = h$
д)
$Г_{П2}$
f_2
x
f_1
$Q_{П1}$
$Г_{П1}$
$Q \parallel П_2$, $Г$ – общ. полож., $Q \cap Г = f$

Рис. 3.18

3.4.5.2. Пересечение плоскостей общего положения

Построение линии пересечения плоскостей общего положения сводится к нахождению проекций двух точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся плоскостей.

Если плоскости заданы следами (рис. 3.19), то общими точками будут точки *M* и *N* – точки пересечения одноименных следов плоскостей. Линия *MN* – есть линия пересечения плоскостей *Г* и *T*.

В случае, когда обе плоскости занимают общее положение и заданы не следами (или одноименные следы плоскостей не пересекаются), линию пересечения плоскостей находят при помощи вспомогательных секущих плоскостей уровня (рис. 3.20, 3.21).

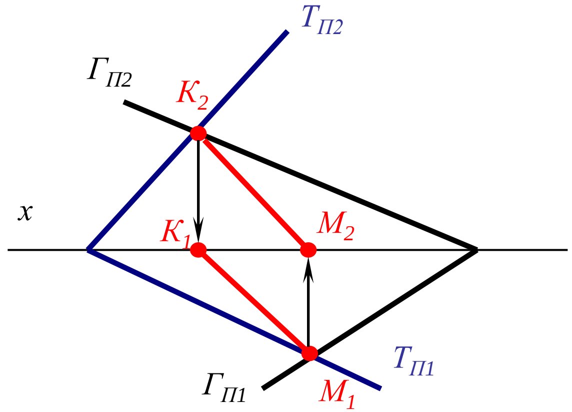


Рис. 3.19

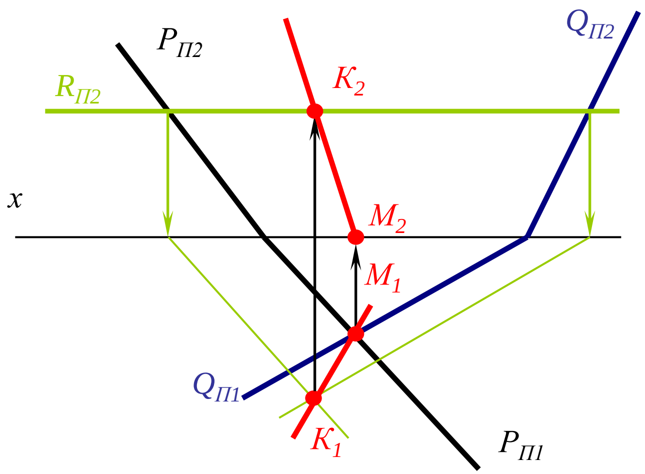


Рис. 3.20

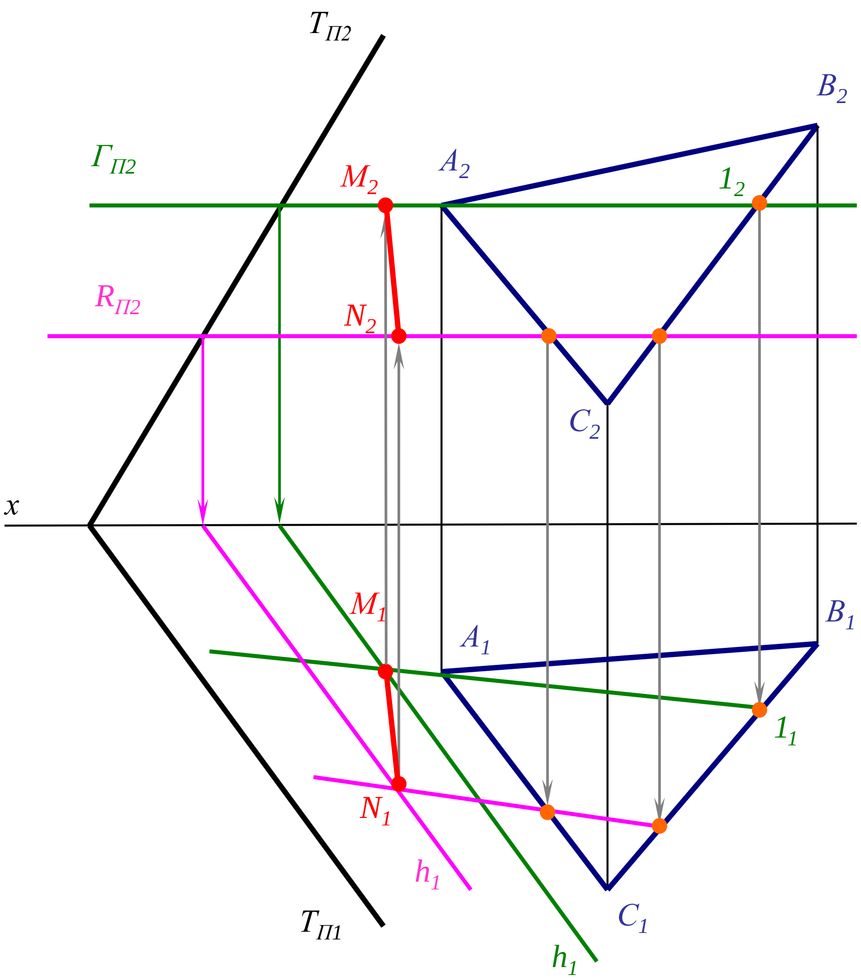


Рис. 3.21

Для нахождения точки M (рис. 3.21), принадлежащей линии пересечения плоскостей T ($T_{П1}$, $T_{П2}$) и ΔABC необходимо:

1) заданные плоскости пересечь вспомогательной плоскостью $Г$ ($Г \parallel П_1$);

2) построить линии пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостями:

$Г \cap T = h$;

$Г \cap \Delta ABC = [A\text{-}1]$;

3) на пересечении полученных линий найти точку M:

$h \cap [A\text{-}1] = M$.

Точка N находится аналогично;

4) определить видимость плоскостей.

Для построения линии пересечения плоскостей в качестве плоскостей посредников можно использовать также и проецирующие плоскости.

В случае, если обе плоскости заданы плоскими фигурами линию пересечения удобнее находить, дважды решая задачу на пересечение прямой и плоскости (см. далее).

3.4.6. Пересечение прямой с плоскостью

Данная задача является второй основной позиционной задачей начертательной геометрии на пересечение геометрических образов.

Очень много задач курса начертательной геометрии сводится к определению точки (точек в случае с поверхностью) пересечения прямой линии с плоскостью: пересечение прямой с многогранником, пересечение многогранника, конуса, цилиндра с плоскостью, взаимное пересечение многогранников.

В общем случае, для построения точки пересечения прямой ℓ с плоскостью Γ (рис. 3.22) необходимо выполнить следующие действия:

1) провести через прямую ℓ вспомогательную плоскость T (в качестве вспомогательной секущей плоскости следует использовать проецирующие плоскости);

2) определить линию пересечения (отрезок *1-2*) вспомогательной плоскости T и заданной Γ;

3) на пересечении заданной прямой ℓ и линии пересечения плоскостей (отрезок *1-2*) определить искомую точку K;

4) определить видимость прямой ℓ относительно плоскости Γ.

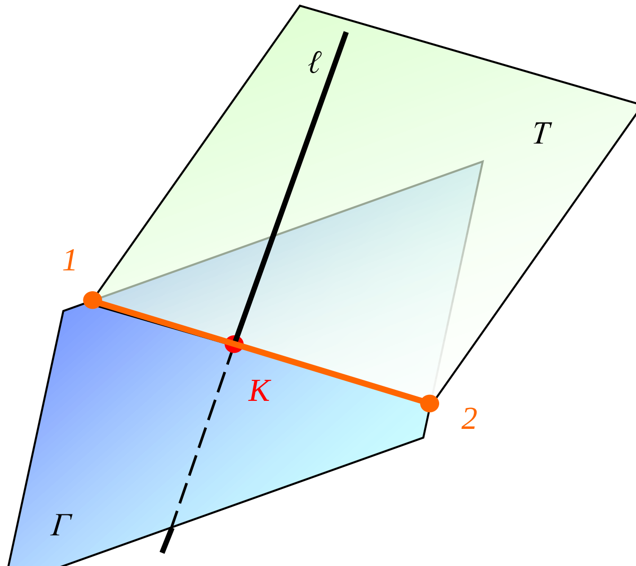
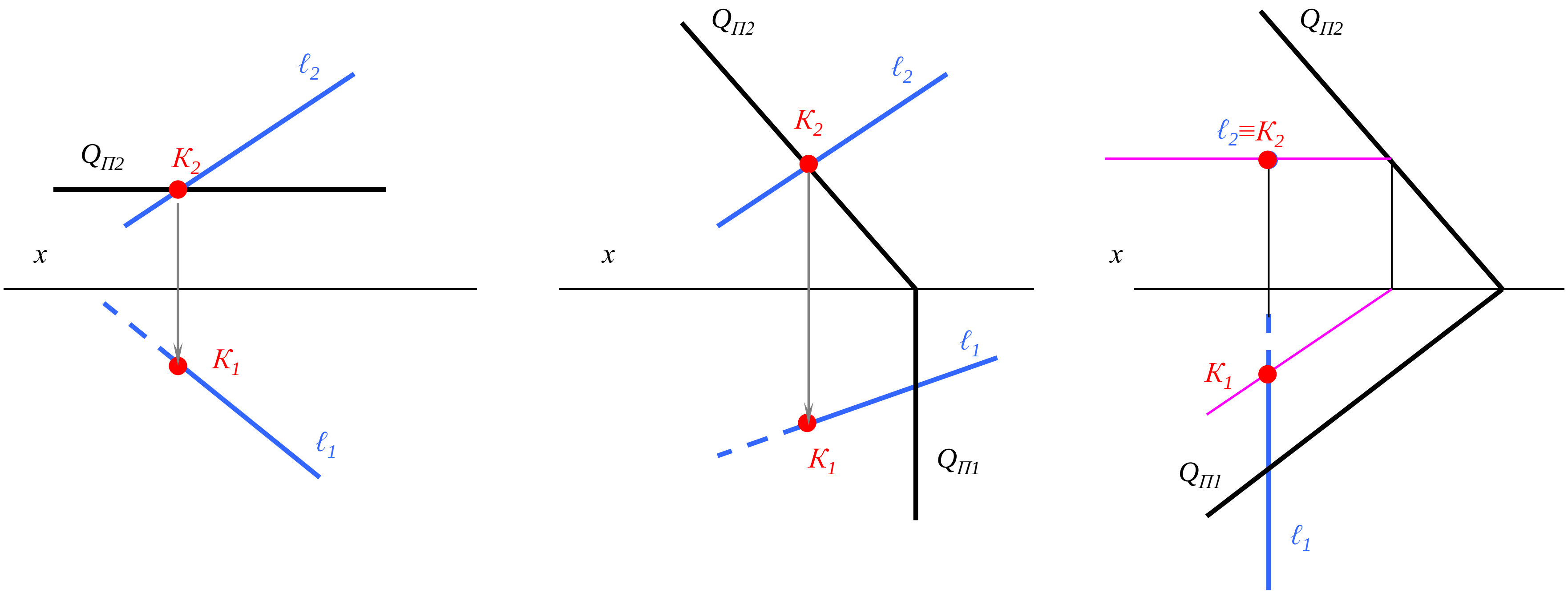


Рис. 3.22

Если прямая или плоскость занимают частное положение, то точка пересечения находится без дополнительных построений (рис. 3.23) на основании правила принадлежности точки прямой и плоскости.



$Q \parallel П_1 => Q \perp П_2 => K_2 = Q_{П2} \cap \ell_2$ $\quad$ $Q \perp П_2 => K_2 = Q_{П2} \cap \ell_2$ $\quad$ $\ell \perp П_2 => K_2 \equiv \ell_2, K_1 = h_1 \cap \ell_1$

Рис. 3.23

При пересечении прямой с плоскостью, занимающих общее положение относительно плоскостей проекций решение осуществляется согласно четырем шагам алгоритма (слайд №50).

На комплексном чертеже решение задачи выглядит следующим образом (рис. 3.24, *а* и *б*).

Алгоритм решения задачи:

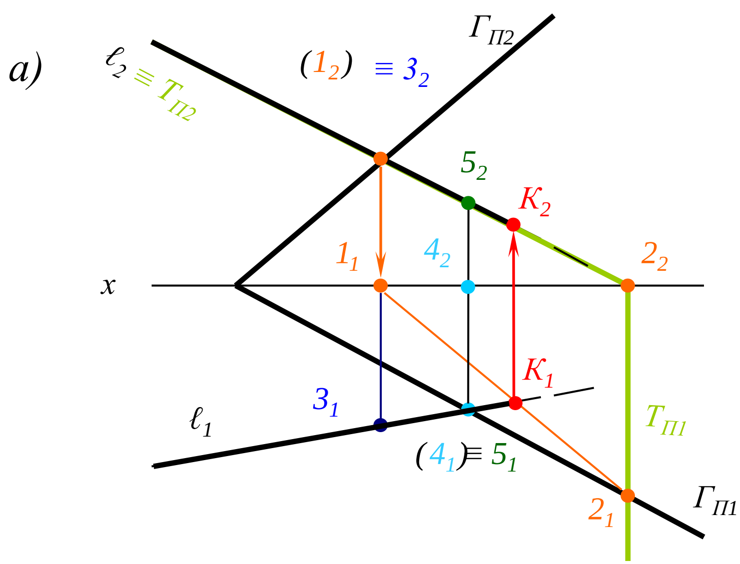
1) $\ell \in T\ (T \perp \Pi_2)$;

2) $T \cap \Gamma = [1\text{-}2]$;

3) $\ell \cap [1\text{-}2] = K$;

4) определить видимость прямой относительно плоскости *Г* на плоскостях проекций (методом конкурирующих точек).

На рис. 3.24, *б* плоскость *Г* задана *ΔABC*, но алгоритм решения от этого не меняется.



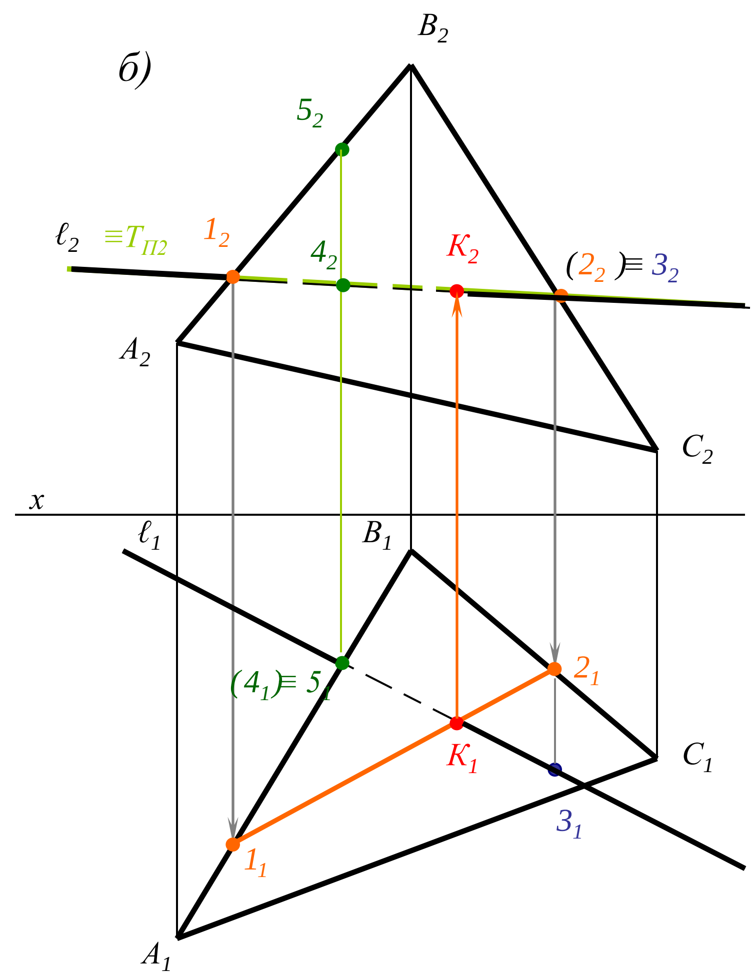


Рис. 3.24

4. Преобразования эпюра

Решение многих задач способами начертательной геометрии, в конечном счете, сводится к определению позиционных и метрических характеристик (см. слайд № 8).

Известно, что определение взаимного расположения геометрических элементов значительно проще при частном их расположении относительно плоскостей проекций.

Существует 2 метода преобразования чертежа:

1. метод перемены (замены) плоскостей проекций – проецируемые предметы не меняют своего положения в пространстве относительно плоскостей проекций, а вводятся новые плоскости проекций, относительно которых объект занимает частное положение.

2. Метод плоскопараллельного перемещения – плоскости проекций неподвижны, а проецируемые предметы перемещают относительно них до требуемого положения.

4 основные (исходные) позиционные задачи начертательной геометрии:

1. Прямую общего положения преобразовать в **прямую уровня**.
2. Прямую общего положения преобразовать в **проецирующую прямую**.
3. Плоскость общего положения преобразовать в **проецирующую**.
4. Плоскость общего положения преобразовать в **плоскость уровня**.

4.1. Метод перемены плоскостей проекций

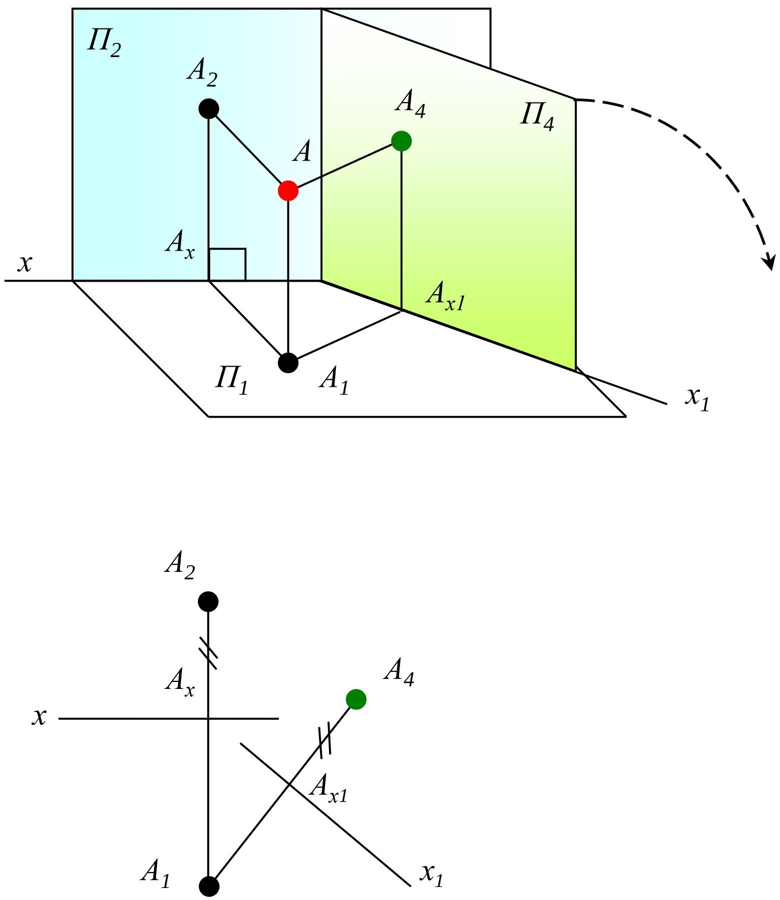


Рис. 4.1

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций достигается путем замены системы плоскостей $П_1$ и $П_2$ новыми плоскостями $П_4$, $П_5$ и т. д. Новую плоскость проекций выбирают перпендикулярно к остающейся. Проецируемые геометрические фигуры при этом не меняют своего положения в пространстве. Проецирование объекта на новую плоскость проекций также ортогональное.

Суть метода рассмотрена на примере точки A (рис. 4.1).

$[A_{x1}A_4] = [A_xA_2]$. Расстояние от оси до точки, на новой плоскости проекций, берется с той плоскости проекций, которую заменяют.

Решение 4 основных позиционных задач:

1 и 2 задачи (рис. 4.2)

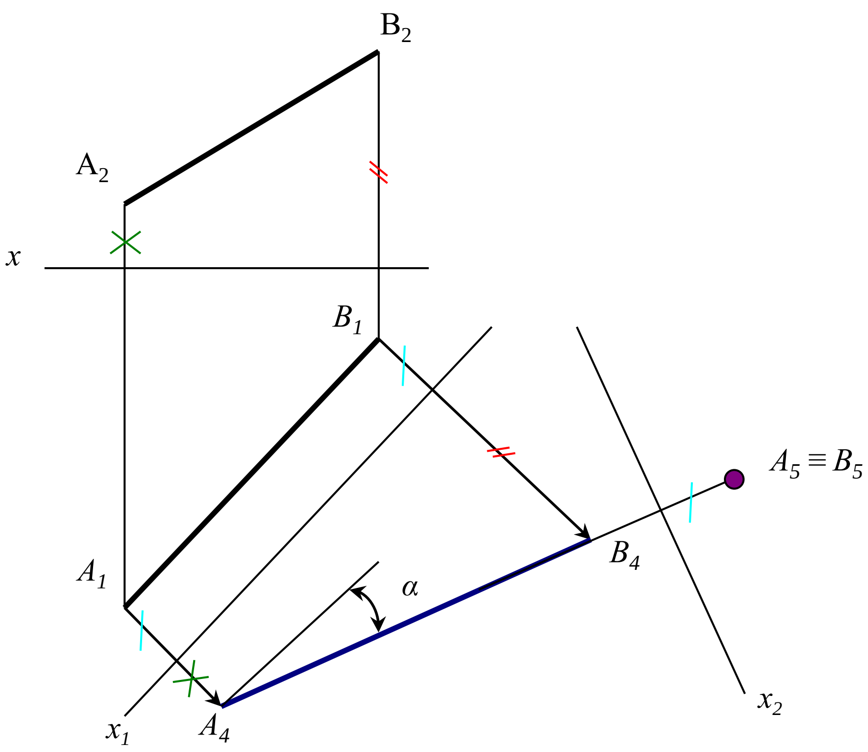


Рис. 4.2

Первая задача позволяет определить натуральную величину отрезка прямой и углы наклона его к плоскостям проекций.
$П_4 \parallel [AB]$ ($x_1 \parallel [A_1B_1]$) => $[A_4B_4]$ – натуральная величина.

Вторая задача позволяет определить расстояние между параллельными или скрещивающимися прямыми.

$П_5 \perp [AB]$ ($x_2 \perp [A_4B_4]$) => $A_5 \equiv B_5$ – точка.

3 и 4 задачи (рис. 4.3)

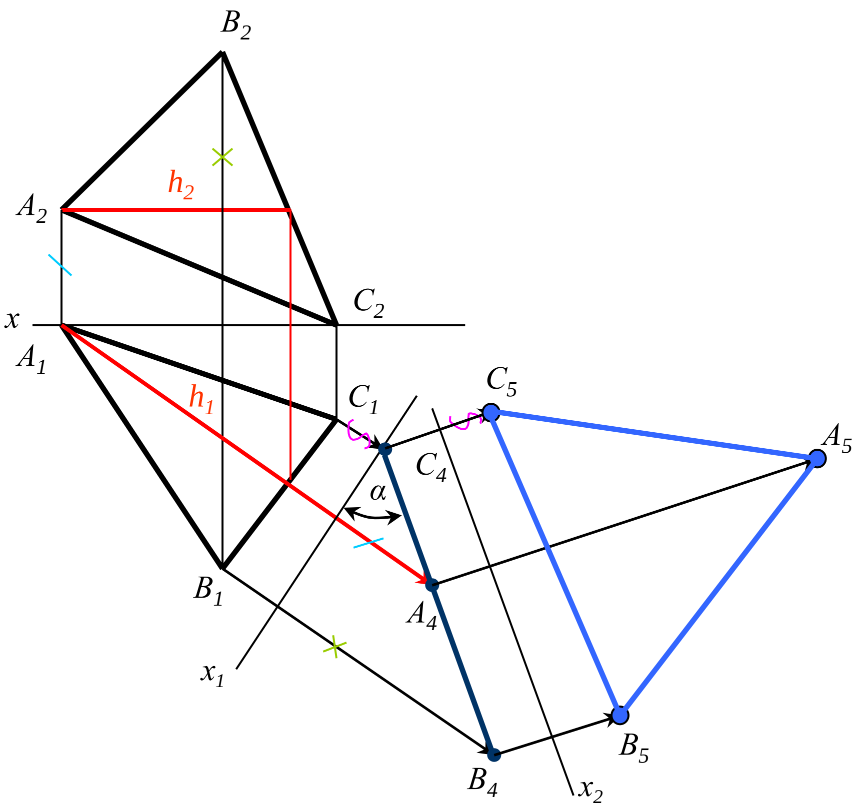


Рис. 4.3

Третья задача позволяет определить угол наклона плоскости к плоскостям проекций, расстояние от точки до плоскости.

$$\Pi_4 \perp \Pi_1, \Pi_4 \cap \Pi_1 = x_1,$$

$\Pi_4 \perp \Delta ABC$, $\Pi_4 \perp h, (x_1 \perp h_1) \Rightarrow \Delta A_4B_4C_4$ – *прямая линия.*

Четвертая задача позволяет определить натуральную величину плоскости.

$$\Pi_5 \perp \Pi_4, \Pi_5 \cap \Pi_4 = x_2,$$

$\Pi_5 \parallel \Delta ABC$ $(x_2 \parallel \Delta A_4B_4C_4) \Rightarrow \Delta A_5B_5C_5$ – *натуральная величина треугольника.*

Если плоскость задана следами, то для перевода ее в частное положение достаточно построить дополнительную проекцию точки, лежащей на следе плоскости (рис. 4.4).

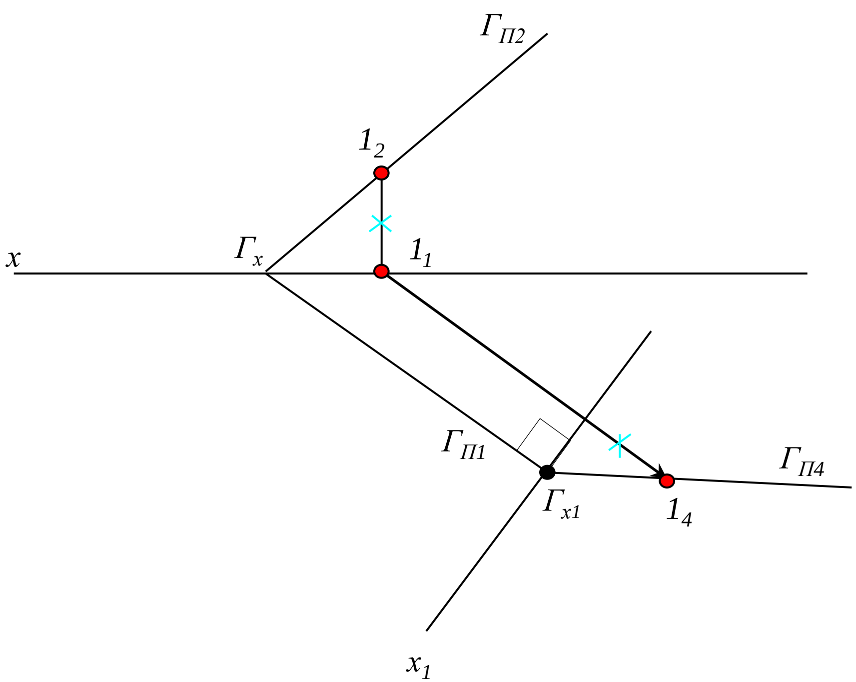


Рис. 4.4

При решении задачи на определение расстояния между параллельными прямыми следует решать первую и вторую позиционные задачи для этих прямых. Натуральная величина расстояния отображается на той плоскости проекций, где обе прямые проецируются в точки.

Решая задачу на определение расстояния между скрещивающимися прямыми, следует решить первую и вторую задачи для одной прямой.

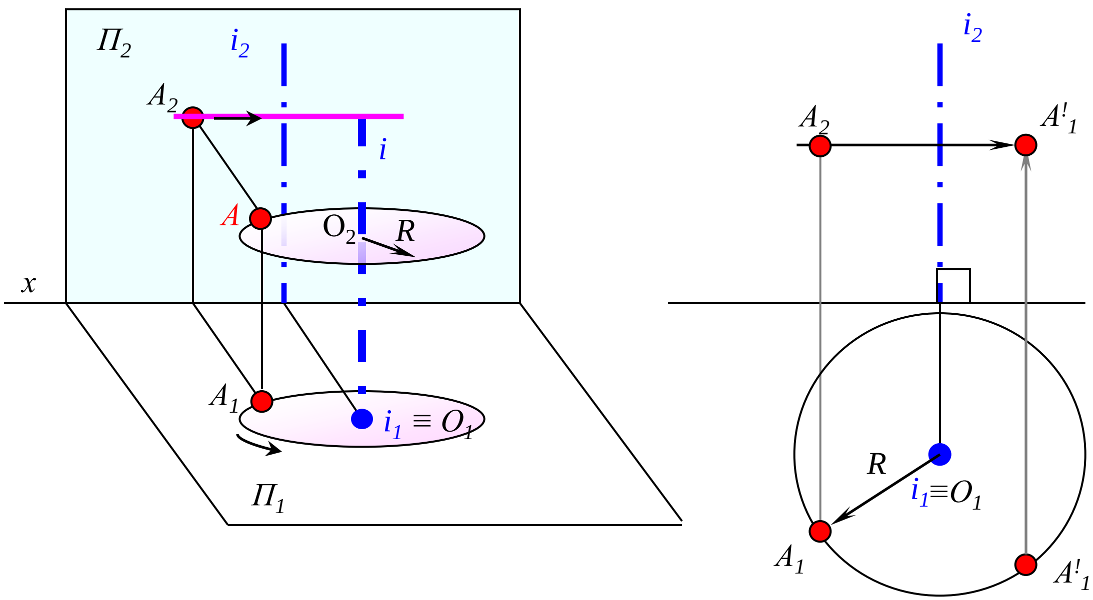
4.2. Метод плоскопараллельного перемещения

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций методом плоскопараллельного перемещения осуществляется путем перемещения геометрической фигуры в новое положение так, чтобы траектория перемещения точек находилась в параллельных плоскостях.

В зависимости от положения этих плоскостей по отношению к плоскостям проекций и вида траектории перемещения точек метод плоскопараллельного перемещения подразделяется на способы:

1) параллельного перемещения,
2) вращения вокруг проецирующих прямых,
3) вращения вокруг линии уровня,
4) вращения вокруг следа плоскости (способ совмещения).

4.2.1. Способ вращения вокруг проецирующей прямой



Проецируемые предметы перемещают вращением вокруг оси до требуемого положения. При этом ось вращения всегда перпендикулярна к какой-либо плоскости проекций (рис. 4.5).

Все точки описывают при перемещении вокруг оси окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения.

Рис. 4.5

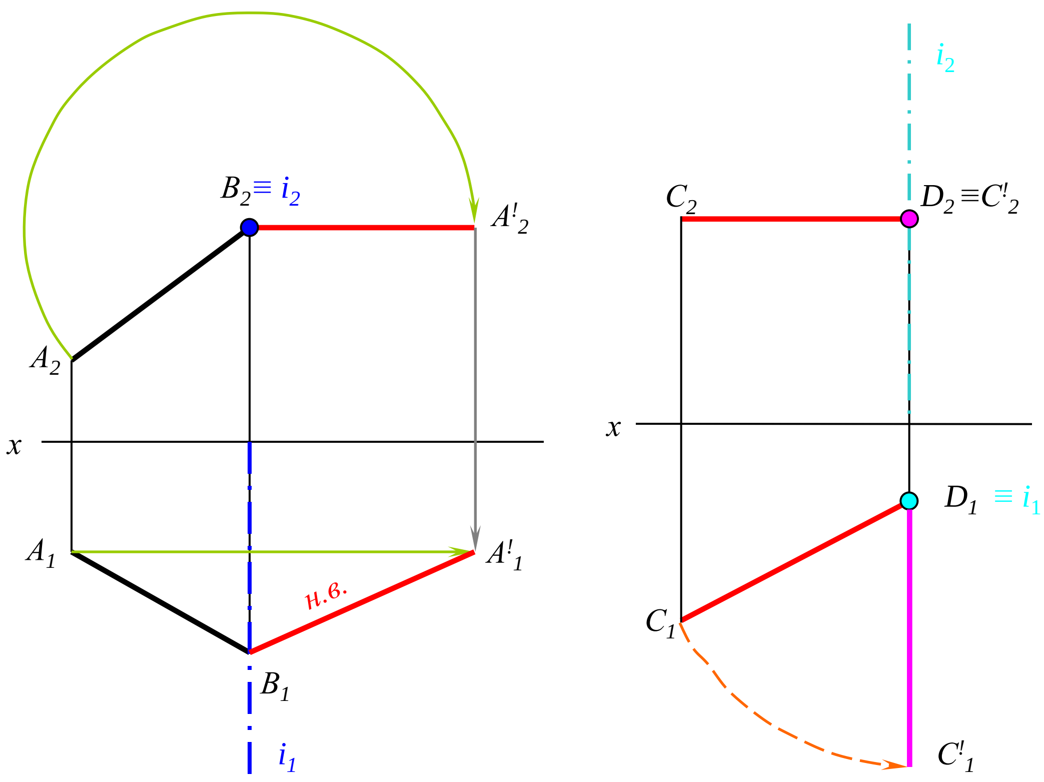


Рис. 4.6

Чтобы осуществить такое перемещение достаточно повернуть отрезок прямой вокруг оси до требуемого положения (рис. 4.6).

1-я позиционная задача.

$i \perp \Pi_2$, (.) $B \in i$, $[B_2A'_2] \parallel x$ => $[B_1A'_1]$ – натуральная величина.

2-я позиционная задача.

$i \perp \Pi_1$, (.) $D \in i$, $[D_1C'_1] \perp x$ => $D_2 \equiv C'_2$ – точка.

3 и **4** позиционные задачи.

Сначала необходимо повернуть на некоторый угол линию уровня (ее натуральную величину) до положения перпендикулярного оси *x* (рис. 4.7). Повернув все точки фигуры вокруг оси, строят фигуру конгруэнтную исходной. Так как линия уровня станет перпендикулярна плоскости проекций, то на другой плоскости проекций фигура проецируется в прямую линию (след плоскости). Повернув след плоскости до положения параллельного оси *x*, на соответствующей плоскости проекций получаем натуральную величину плоской фигуры.

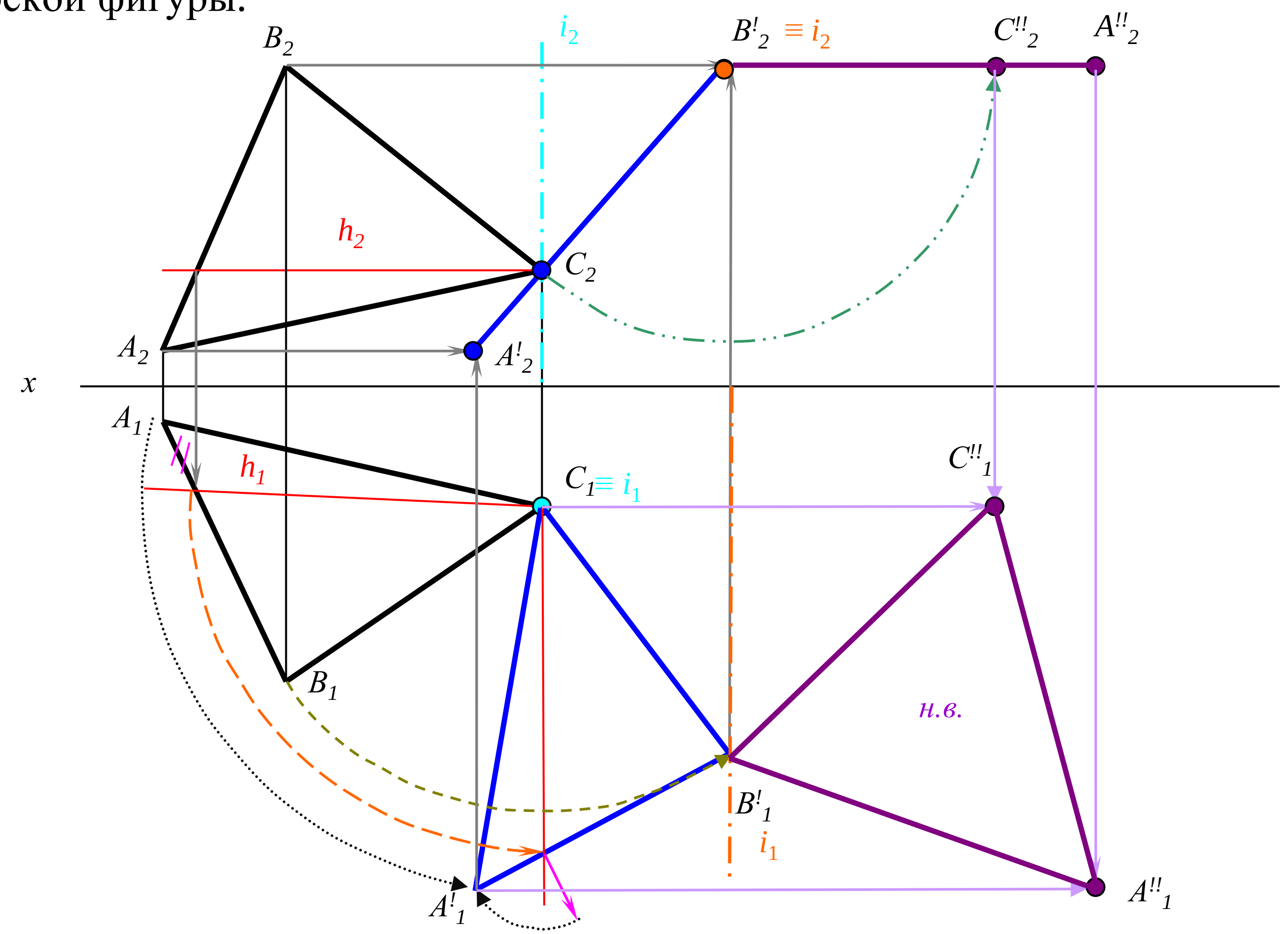


Рис. 4.7

5. Образование, изображение и классификация поверхностей. на чертеже. Линии и точки на поверхности. Сечение поверхностей плоскостями

В начертательной геометрии поверхность рассматривают как множество последовательных положений в пространстве **образующей** (движущейся линии или поверхности) по **направляющей** (определяющей закон перемещения образующей).

Способы задания поверхностей

1. Аналитический (уравнением). Если поверхность описывается алгебраическим уравнением, то она называется алгебраической. Если трансцендентной функцией – трансцендентной поверхностью.

2. Каркасный – задание поверхности множеством принадлежащим ей точек или линий, определяющих поверхность (*каркас* поверхности). Если каркас задается точками – точечный каркас. Если линиями – линейный.

Закон каркаса – закон образования линий каркаса.

Зависимость каркаса – зависимость, устанавливающая связь между его линиями (параметр – некоторая изменяемая величина, характеризующая зависимость каркаса).

Непрерывный линейный каркас – если параметр каркаса – непрерывная функция, иначе – дискретный.

Линии, образующие линии каркаса – семейство плоских линий получившихся сечением поверхности пучком параллельных плоскостей.

3. Кинематический. В качестве образующей *a* – плоская кривая. Закон перемещения кривой *a* задан *n* и *m* – направляющими и плоскостью α. Кривая а скользит по направляющим m и n все время оставаясь параллельными плоскости α (рис. 5.1).

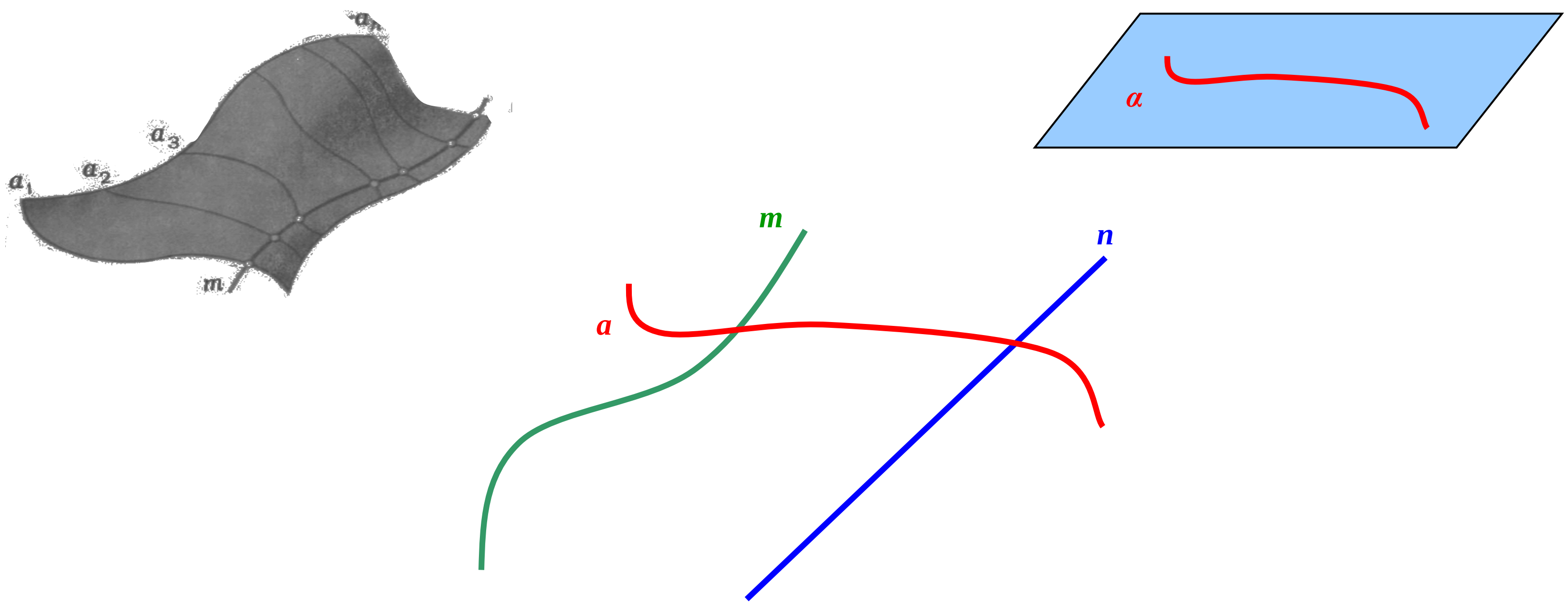


Рис. 5.1

В начертательной геометрии поверхность в основном рассматривают с позиции кинематического способа её образования, т. е. поверхности, образованные непрерывным перемещением образующей в пространстве.

При своем движении образующая может оставаться неизменной или непрерывно меняться. Поэтому для каждой поверхности необходимо знать некоторую совокупность исходных данных, которые бы однозначно определяли её.

Совокупность независимых условий, однозначно задающие поверхность – определитель поверхности.

Ф(Г)[А] – структурная формула определителя,

где ***(Г)*** – геометрическая часть – набор постоянных геометрических переменных (точек, линий, поверхностей) с помощью которых может быть образована поверхность.

[А] – алгоритмическая часть, описательная. Задает алгоритм формирования поверхности из геометрических фигур, включенных в состав определителя.

Для того, чтобы определитель задавал конкретный вид поверхности, необходимо в каждую часть вложить конкретное содержание.

На комплексном чертеже поверхность задают графическим способом, (каркасом, очерком или проекциями определителя).

Очерк поверхности – совокупность точек, ограничивающих поверхность на чертеже.

Для большей наглядности строят очерки поверхности на плоскостях проекций.

5.1. Классификация поверхностей

Все поверхности можно разделить на две группы – многогранники и криволинейные (кривые) поверхности.

Многогранник – поверхность, образованная конечным числом многоугольников.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника называются **гранями**, стороны многоугольников – **ребрами**, а вершины многоугольников – **вершинами** многогранников.

Совокупность всех ребер и вершин называется **сеткой**.

На чертеже многогранник задают проекциями его сетки.

Из всего многообразия многогранников можно выделить:

1) призмы;

2) пирамиды;

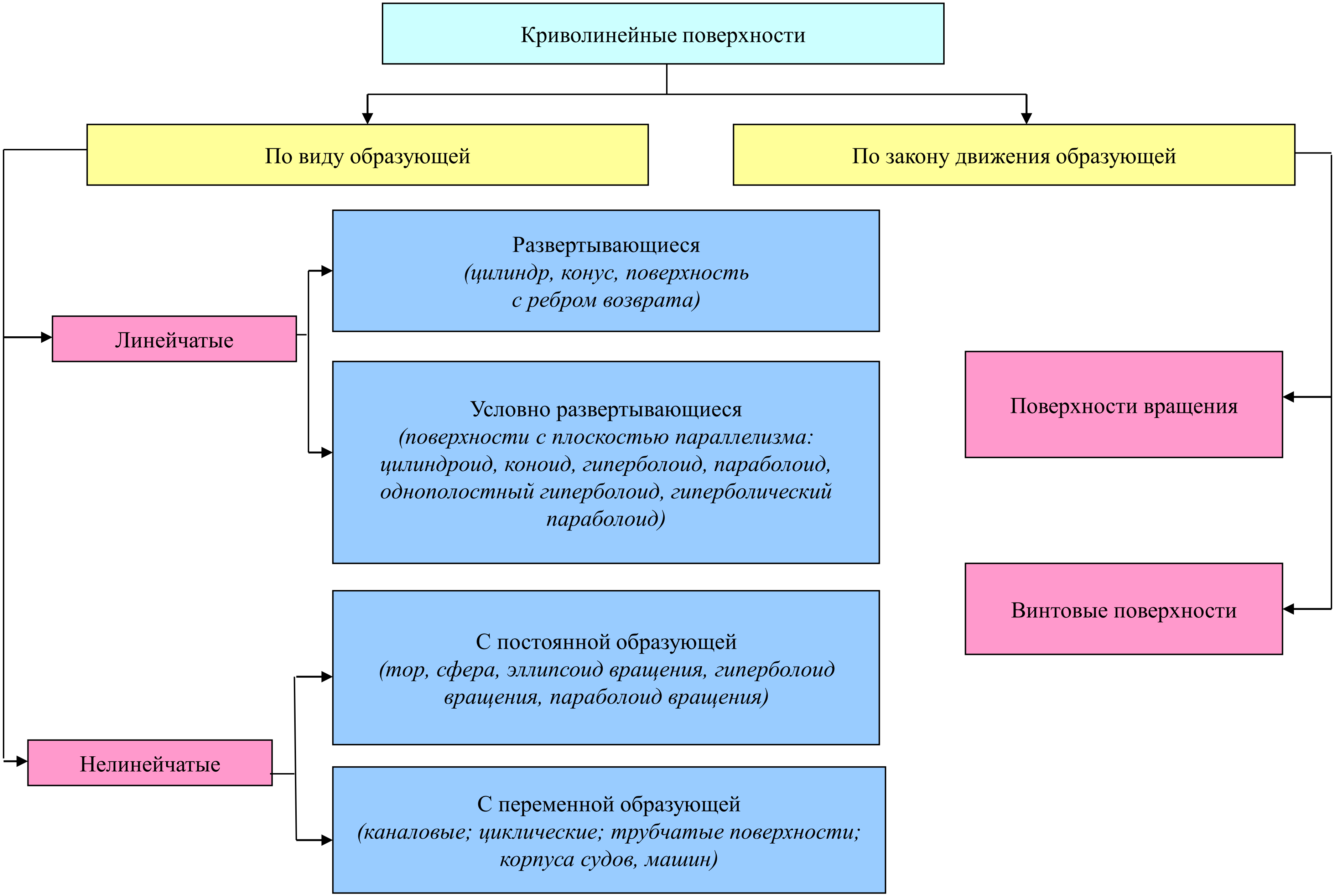
3) правильные многогранники.

Призма – многогранник две грани которого *n*-угольники лежащие в параллельных плоскостях (их называют основаниями, а остальные грани – параллелограммы или прямоугольники (боковые грани).

Пирамида – многоугольник, одна из граней *n*-угольник (основание), а остальные грани – треугольники с общей вершиной (боковые грани).

К правильным многогранникам относят многогранники у которых гранями являются равносторонние многоугольники (куб, тетраэдр, октаэдр и др).

Классификация криволинейных поверхностей показана на рис. 5.2.



Криволинейные поверхности
По виду образующей
По закону движения образующей
Развертывающиеся
(цилиндр, конус, поверхность
с ребром возврата)
Линейчатые
Условно развертывающиеся
(поверхности с плоскостью параллелизма:
цилиндроид, коноид, гиперболоид, параболоид,
однополостный гиперболоид, гиперболический
параболоид)
Поверхности вращения
Винтовые поверхности
С постоянной образующей
(тор, сфера, эллипсоид вращения, гиперболоид
вращения, параболоид вращения)
Нелинейчатые
С переменной образующей
(каналовые; циклические; трубчатые поверхности;
корпуса судов, машин)

Рис. 5.2

Каналовая поверхность – поверхность, образованная непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве. Площади этих сечений монотонно изменяются в процессе их перемещения по направляющей (рис. 5.3, *а*). Каналовые поверхности могут быть использованы для создания переходных участков между двумя поверхностями типа трубопроводов.

Частным случаем каналовой поверхности является циклическая поверхность.

Циклическая поверхность – поверхность, огибающая (обертывающая) множество (семейство) сфер или окружностей, закономерно движущихся по направляющей оси (рис. 5.3, *б*).

По характеру направляющей линии, условной оси, все циклические поверхности подразделяются на 4 группы:

1. С прямолинейной осью.
2. С криволинейной плоской направляющей.
3. С криволинейной пространственной направляющей.
4. С гибкой осью.

Винтовые поверхности (геликоиды) – образованы движением образующей прямой линии, которая вращается вокруг неподвижной оси и одновременно смещается вдоль неё.

Если образующая пересекается с осью вращения – закрытый геликоид (Архимедов, т.к. сечение такой поверхности плоскостью перпендикулярной к оси поверхности является спираль Архимеда). Закрытый геликоид можно рассматривать как множество прямых линий, параллельных образующим направляющего конуса φ и пересекающих две направляющие: винтовую линию и ось поверхности (рис. 5.3, *в*).

Если образующие прямые линии скрещиваются с осью, то получается открытый геликоид. Открытый геликоид можно рассматривать как множество прямых линий, касательных к винтовой линии, называемой ребром возврата. Если образующие винтовой поверхности пересекаются с осью под углом 90° - прямой геликоид, в противном случае – косой геликоид.

Примеры некоторых криволинейных поверхностей приведены на рис. 5.4 и 5.5.

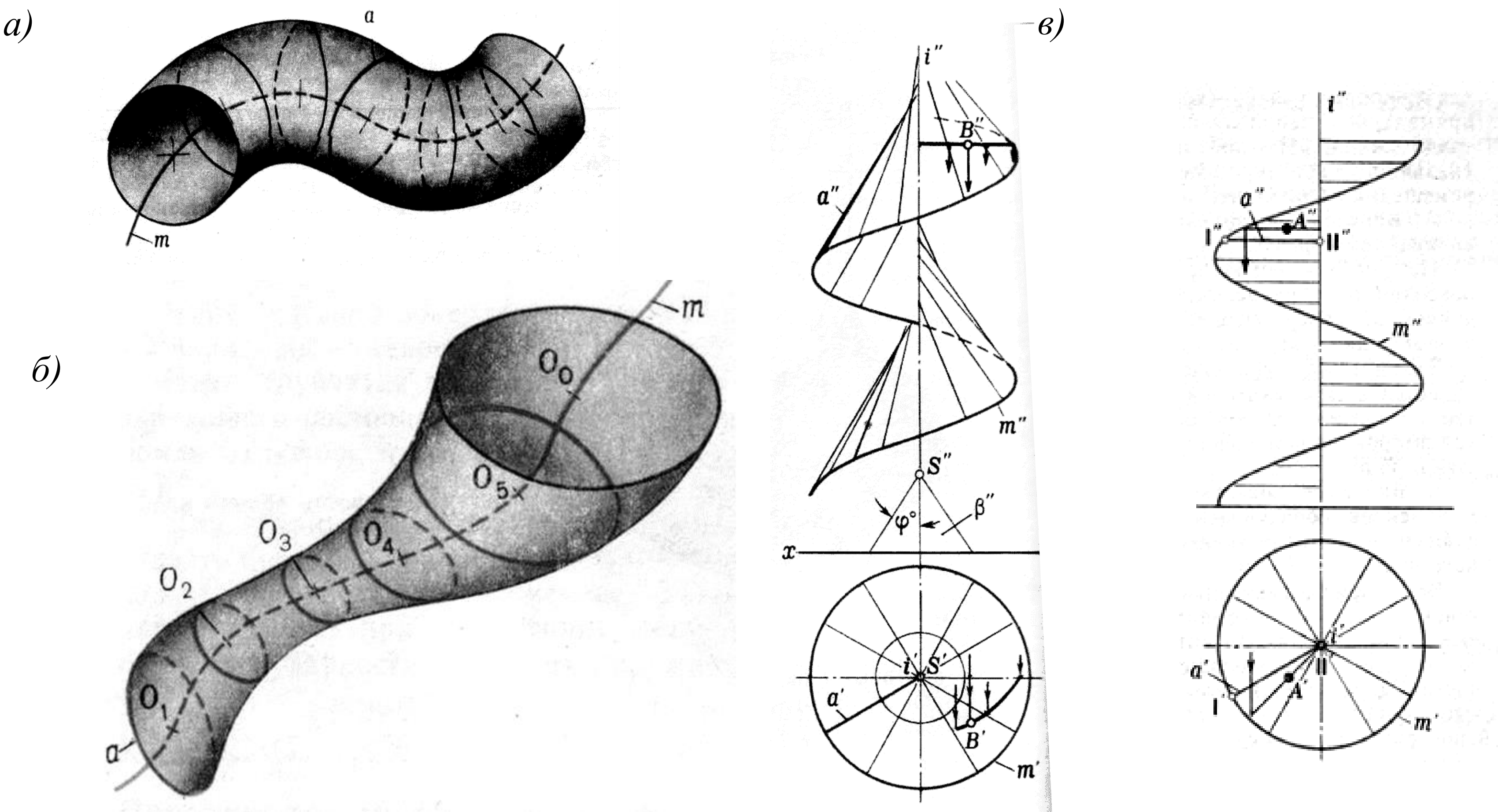
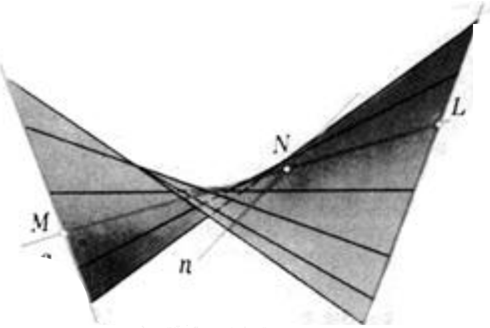
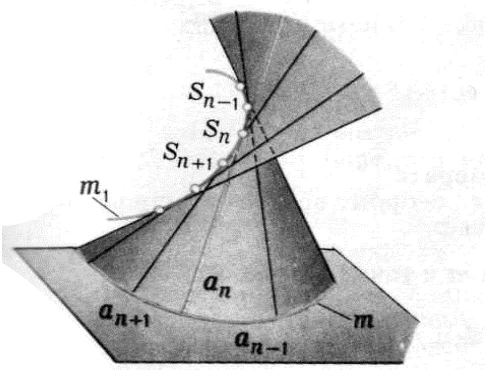


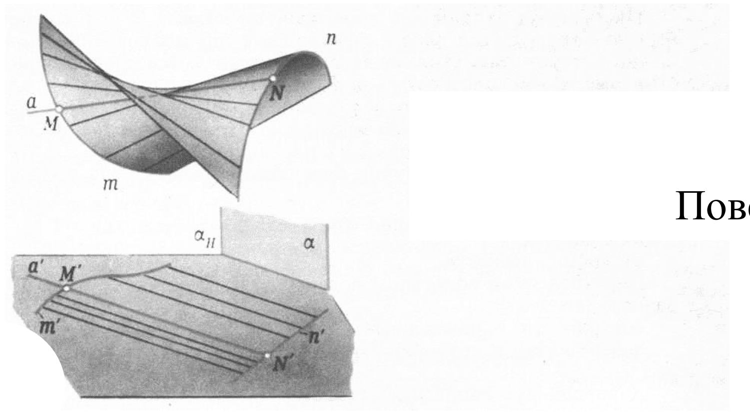
Рис. 5.3



Однополостный гиперболоид

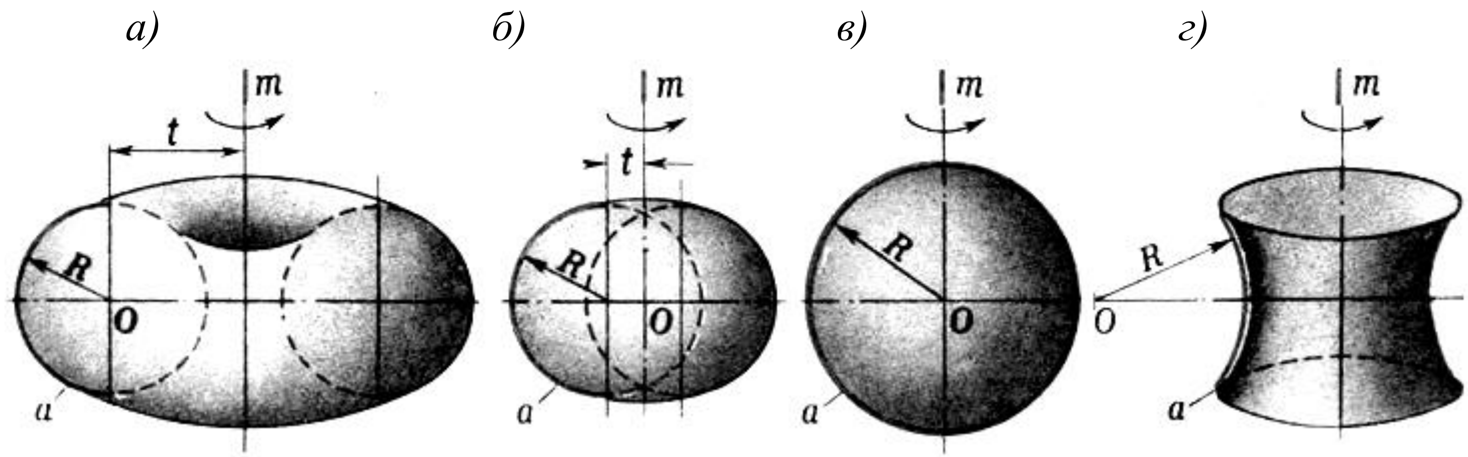


Поверхность с ребром возврата

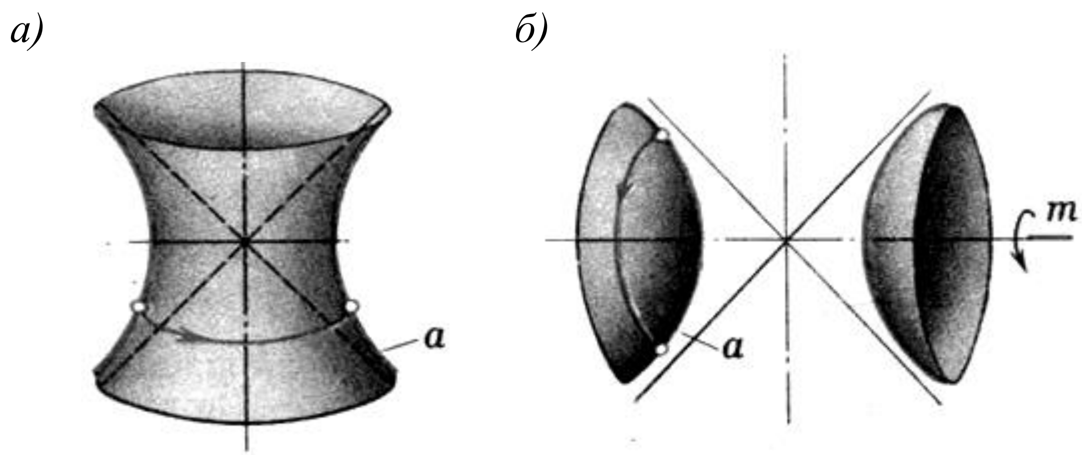


Поверхность прямого цилиндроида

Рис. 5.4



Тор (*а* – открытый, *б* – закрытый, *в* – сфера, *г* - глобоид)



Гиперболоид вращения (*а* – однополостный, *б* - двуполостный)

Рис. 5.5

5.2. Линии и точки на поверхности

Для построения точки на любой поверхности необходимо провести на этой поверхности произвольную линию и на ней взять точку. В качестве такой вспомогательной линии следует брать графически простые линии, т.к. это упрощает решение.

На многогранных и линейчатых поверхностях в качестве вспомогательных линий лучше выбирать прямые линии, а на поверхностях вращения - окружности (параллели).

Для построения произвольной линии или фигуры, лежащей на поверхности, необходимо построить несколько точек этой фигуры (линии), а затем их последовательно соединить, учитывая при этом их принадлежность одной грани и видимость.

5.2.1. Построение точек и линий на гранных поверхностях

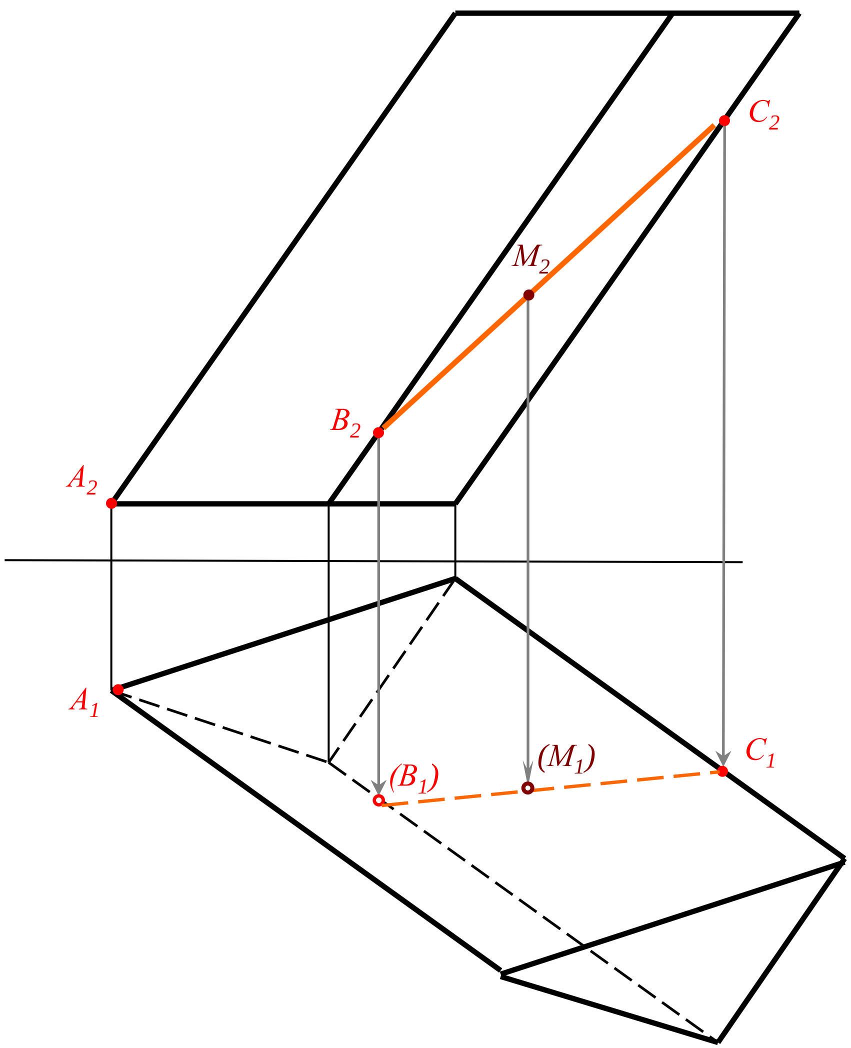


Рис. 5.6

В многогранниках можно встретить три варианта расположения точек: точка принадлежит одной из вершин (точка *A*, рис. 5.6), точка лежит на ребре (точка *B*, рис. 5.6) и точка лежит в плоскости грани (точка *M*, рис. 5.6).

В первом случае проекция точки совпадает с проекцией вершины многогранника. Во втором – недостающая проекция строится согласно определению принадлежности точки прямой линии поверхности многогранника.

В случае, если точка расположена на грани многогранника, используют правило принадлежности точки плоскости (см. слайд № 31) .

5.2.2. Построение точек и линий на поверхностях вращения

Поверхности вращения образуются вращением образующей ℓ (прямая или кривая) вокруг оси *í*.

Окружности, по которым перемещаются точки образующей при вращении вокруг оси – **параллели** поверхности (рис. 5.7). Наибольшая и наименьшая параллели называется **экватором** (*n*) и **горлом** поверхности (*p*), соответственно.

Линии поверхности, лежащие в осевых плоскостях (т. е. плоскости проходят через ось вращения) – **меридианы**. Меридиан, лежащий в Π_2 – **главный меридиан**, определяющий очерк поверхности на Π_2. На Π_1 очерк поверхности составляет горло и экватор. Множество параллелей и меридианов составляют каркас поверхности.

Если поверхность задана, то можно построить проекции точек или линий, согласно определению принадлежности точки и линии поверхности:

1. Точка принадлежит поверхности, если её проекции принадлежат проекциям какой-либо линии поверхности.

2. Линия принадлежит поверхности, если её проекции проходят через проекции точек поверхности.

Для построения на чертеже точки, принадлежащей поверхности, через неё проводят линию, принадлежащую поверхности. В качестве этой линии лучше использовать параллель или образующую поверхности.

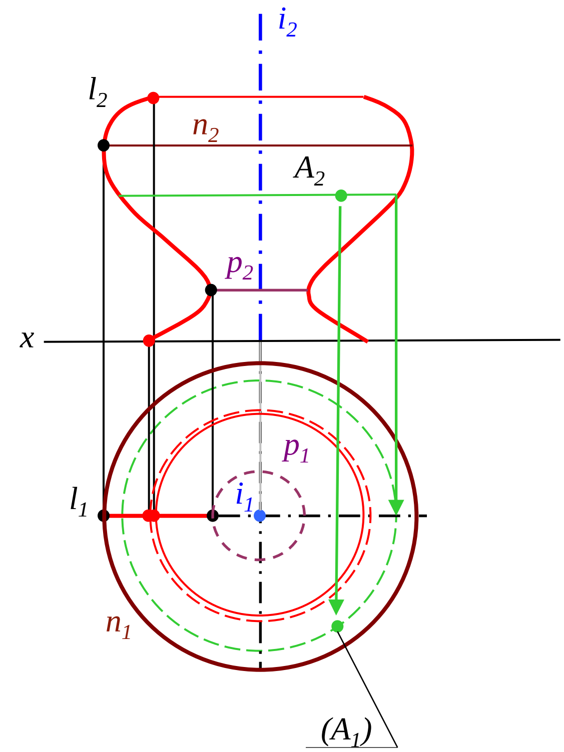


Рис. 5.7

5.3. Сечение поверхностей плоскостями

При пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура – **сечение**.

При пересечении многогранников плоскостью в сечении получается плоская фигура, многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам, а стороны – граням многогранника. Количество вершин зависит от количества пересеченных ребер многогранника секущей плоскостью.

При пересечении криволинейных поверхностей плоскостью получается лекальная кривая. Наиболее часто в технике выполняются сечения цилиндрических и конических поверхностей. Зная возможные виды кривых, которые образуются по контуру сечения этих поверхностей, можно значительно упростить их построение.

Построение фигуры сечения начинают с определения ***опорных (характерных) точек***, лежащих на крайних очерковых образующих поверхности и определяющих границы видимости проекций линии сечения, и удаленных на экстремальное расстояние от плоскостей проекций.

В случае сечения криволинейных поверхностей плоскостью, после определения характерных точек необходимо уточнить фигуру сечения с помощью промежуточных точек.

5.3.1. Сечение многогранников плоскостью

Если плоскость занимает проецирующее положение, то проекция сечения (линия) лежит на следе плоскости. Поэтому для построения проекции сечения многогранника плоскостью частного положения достаточно спроецировать точки пересечения следа секущей плоскости с проекциями ребер многогранника (рис. 5.8). Особое внимание при этом следует уделять установлению видимости геометрических элементов (методом конкурирующих точек).

Если проецирующее положение занимают грани многогранника (прямая призма) (рис. 5.9), то одна проекция фигуры сечения совпадает с проекцией самого многогранника и построение сводится к нахождению недостающей проекции этой фигуры (по принадлежности точки плоскости).

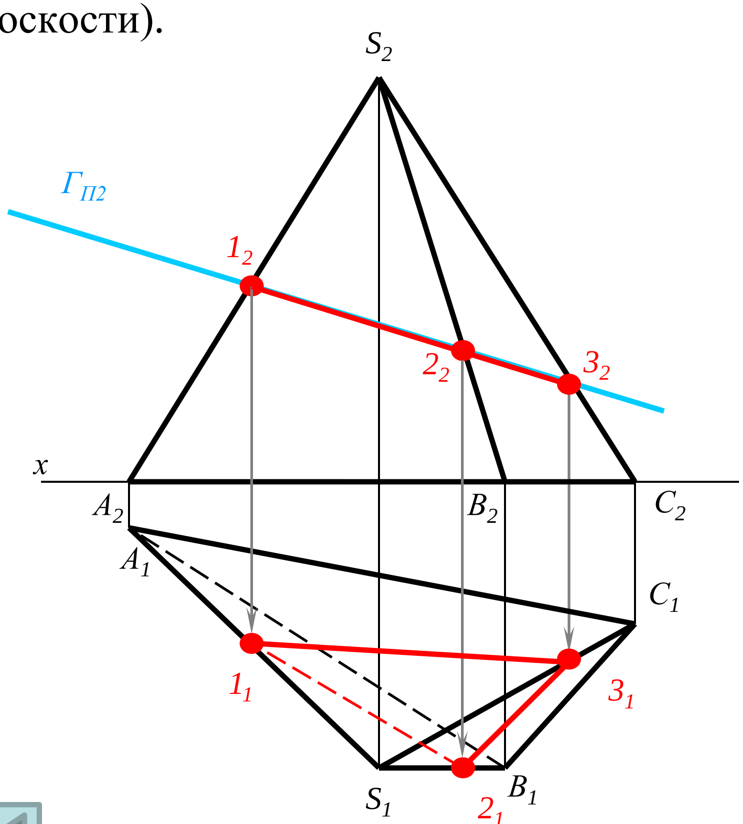


Рис. 5.8

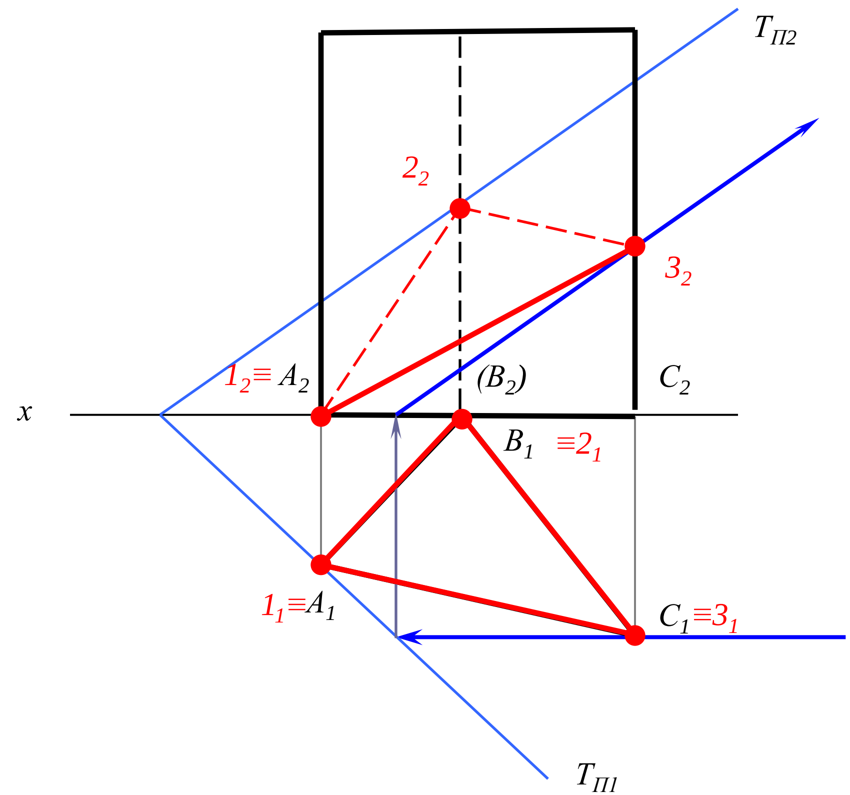


Рис. 5.9

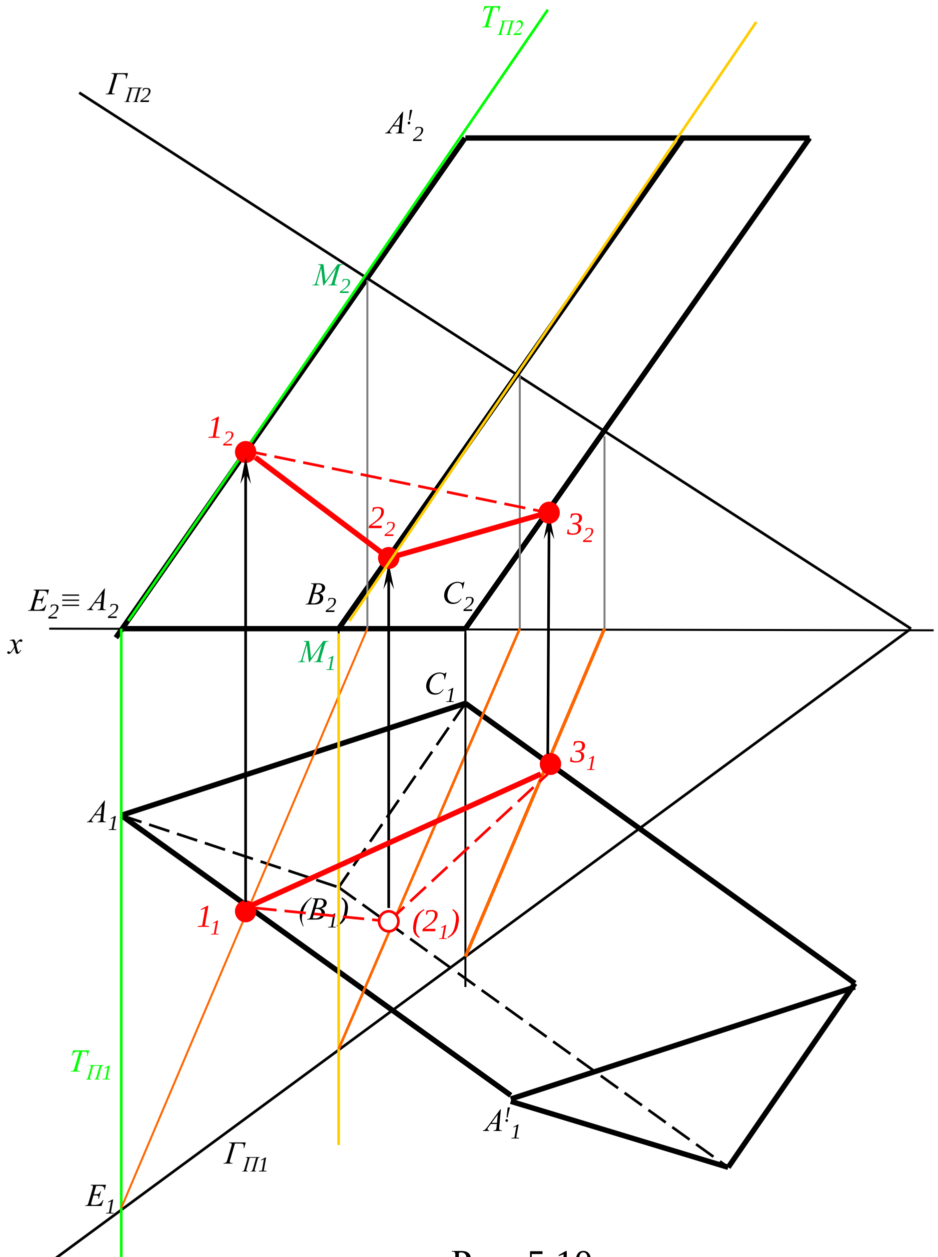


Рис. 5.10

При пересечении многогранника плоскостью общего положения фигура сечения на всех плоскостях проекций будет проецироваться с искажением и для ее нахождения следует применять либо методы преобразования чертежа (для перевода плоскости из общего положения в частное, **способ рёбер**, основанный на многократном решении задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью (где ребра многогранника - прямая) (рис. 5.10) и **способ граней**.

По количеству геометрических построений эти способы одинаковы и целесообразность применения каждого способа зависит от исходных условий.

Алгоритм решения задачи способом ребер:

I. 1. $[AA^!] \in T \ (T \perp П_2)$.

2. $T \cap Г = [EM]$.

3. $[EM] \cap [AA^!] = 1$ *(на* $П_1$*).*

II. Тоже для других ребер.

III. Соединить полученные точки по порядку с учетом видимости.

5.3.2. Сечение кривых поверхностей плоскостью

На рис. 5.11 – 5.17 рассмотрено построение точек, линий и проекций линии сечения на поверхностях вращения:

Прямой круговой цилиндр

Φ(ℓ, í) [í – ось вращения, ℓ – образующая прямая; ℓ ∥ í,].

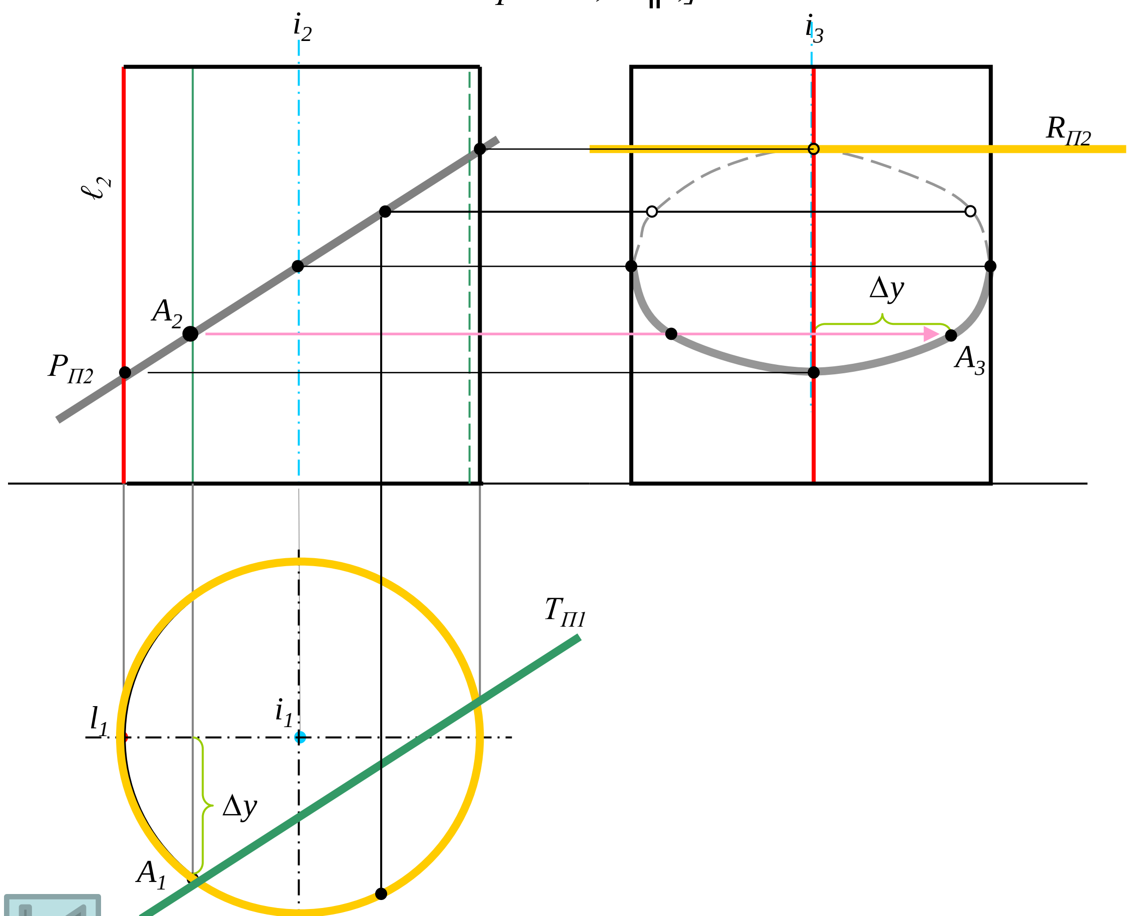


Рис. 5.11

.

При пересечении цилиндра плоскостью получается :

1. Окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра (рис. 5.11, плоскость *R*).

2. Прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 5.11 плоскость *T*).

3. Эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра под углом больше 0°, но меньше 90° (рис. 5.11, плоскость *P*).

Прямой круговой конус

Φ(i, ℓ) [i – ось вращения ,ℓ – образующая прямая; ℓ ∩ i = S].

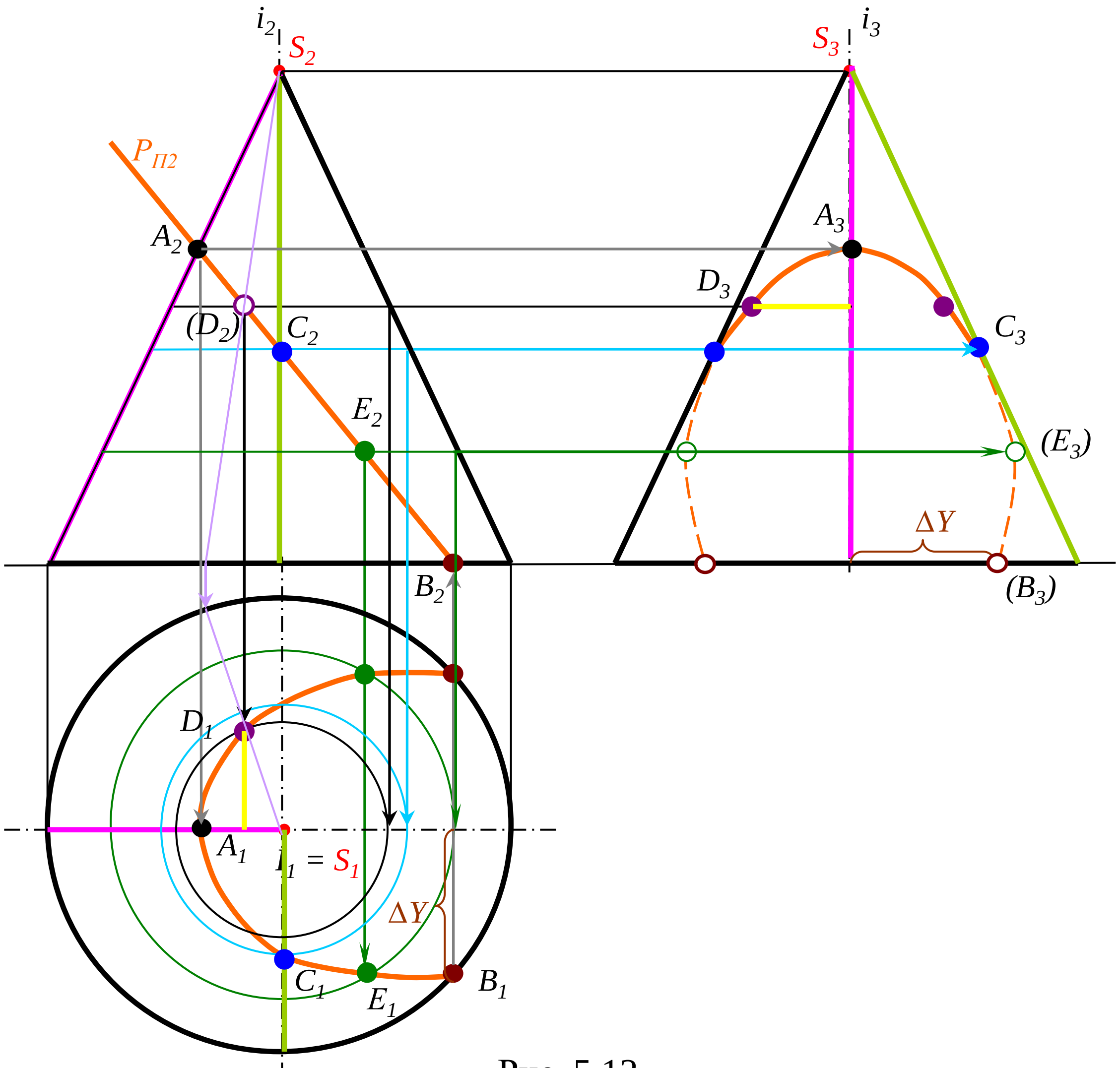


Рис. 5.12

При пересечении прямого кругового конуса получается:

1. Точка, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 5.13).

2. Прямые (образующие), если секущая плоскость проходит через вершину конуса (плоскость *P*).

3. Окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (плоскость *T*).

4. Эллипс, если секущая плоскость пересекает ось конуса под углом меньше 90°, но больше угла наклона образующей конуса к оси (плоскость *Г*).

5. Парабола, если секущая плоскость пересекает ось конуса под углом равным углу наклона образующей конуса (плоскость *R*).

6. Гипербола, если секущая плоскость пересекает ось конуса под углом большим либо равным нулю, но меньше угла наклона образующей конуса (плоскость *Q*).

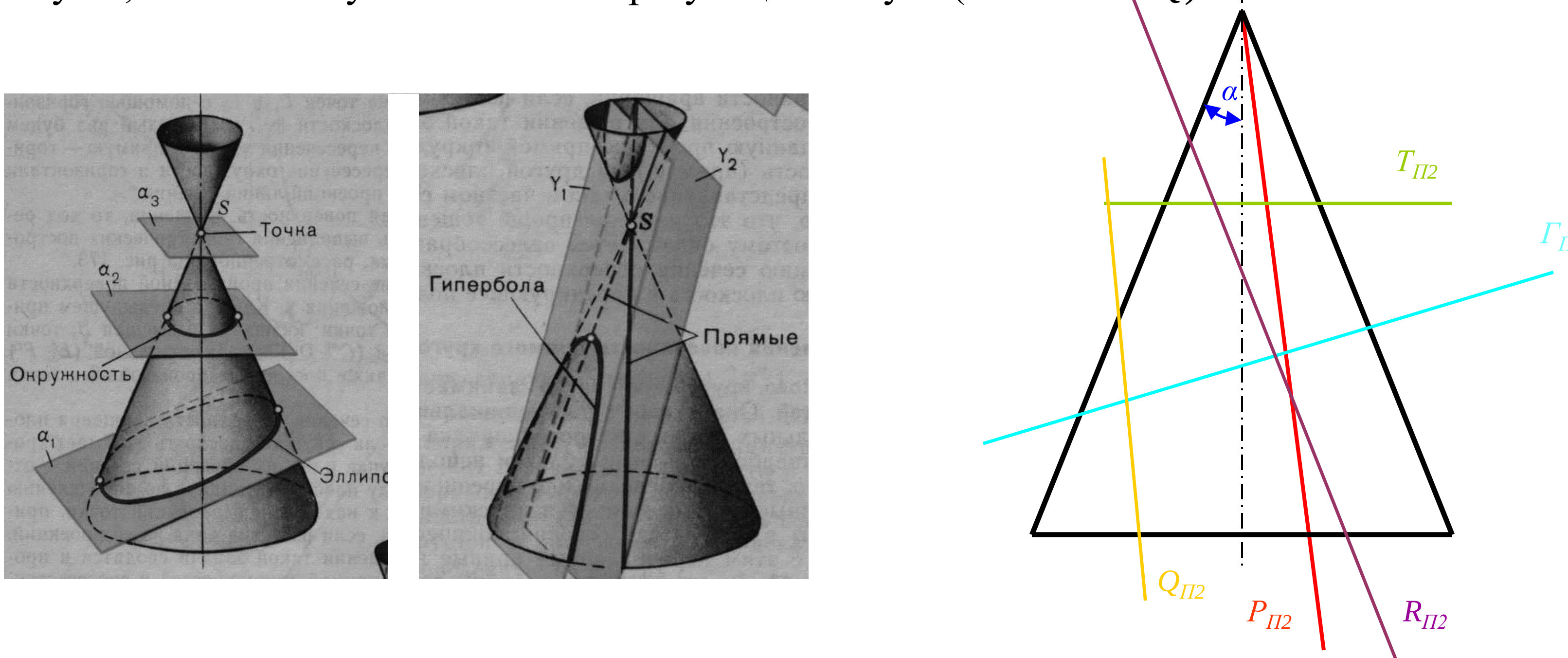


Рис. 5.13

При пересечении наклонного цилиндра плоскостью получается (рис. 5.14):

1. Окружность, если секущая плоскость пересекает ось и параллельна основанию (плоскость *Г*).

2. Четырехугольник, если секущая плоскость параллельна оси (плоскость *T*).

3. Эллипс, если секущая плоскость пересекает ось под углом не равным 90° (плоскость *R*, *Q*).

Цилиндрическая поверхность общего положения

Ф(ℓ, m) [ℓ – образующая, m – направляющая кривая, ℓ ∩ m; ℓ ∥ ℓ' ∥ …].

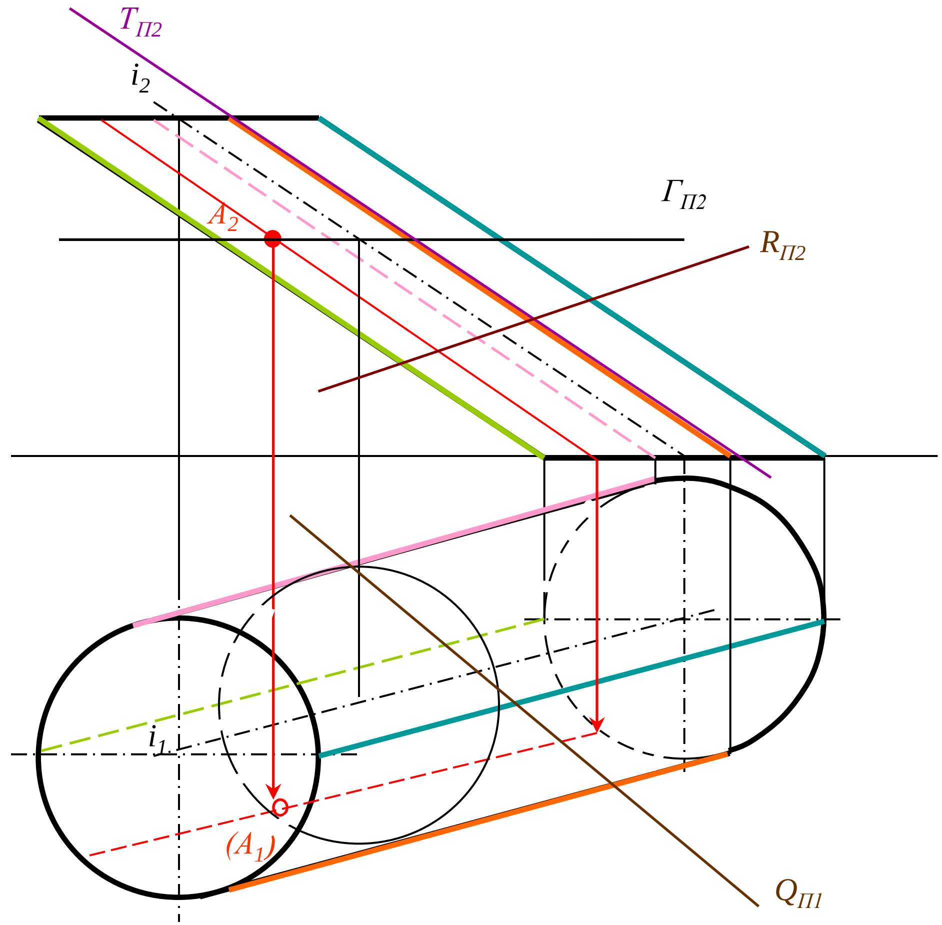


Рис. 5.14

При пересечении наклонного конуса плоскостью получается (рис. 5.15):

1. Окружность, если секущая плоскость пересекает ось и параллельна основанию (плоскость *P*).

2. Образующие, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (плоскость *T*).

3. Во всех остальных случаях получаются фигуры похожие на эллипс (полный или неполный).

Коническая поверхность общего положения

Ф (ℓ, m, S) [ℓ – образующая прямая, m – направляющая кривая, S – точка; ℓ ∩ m, S ϵ ℓ].

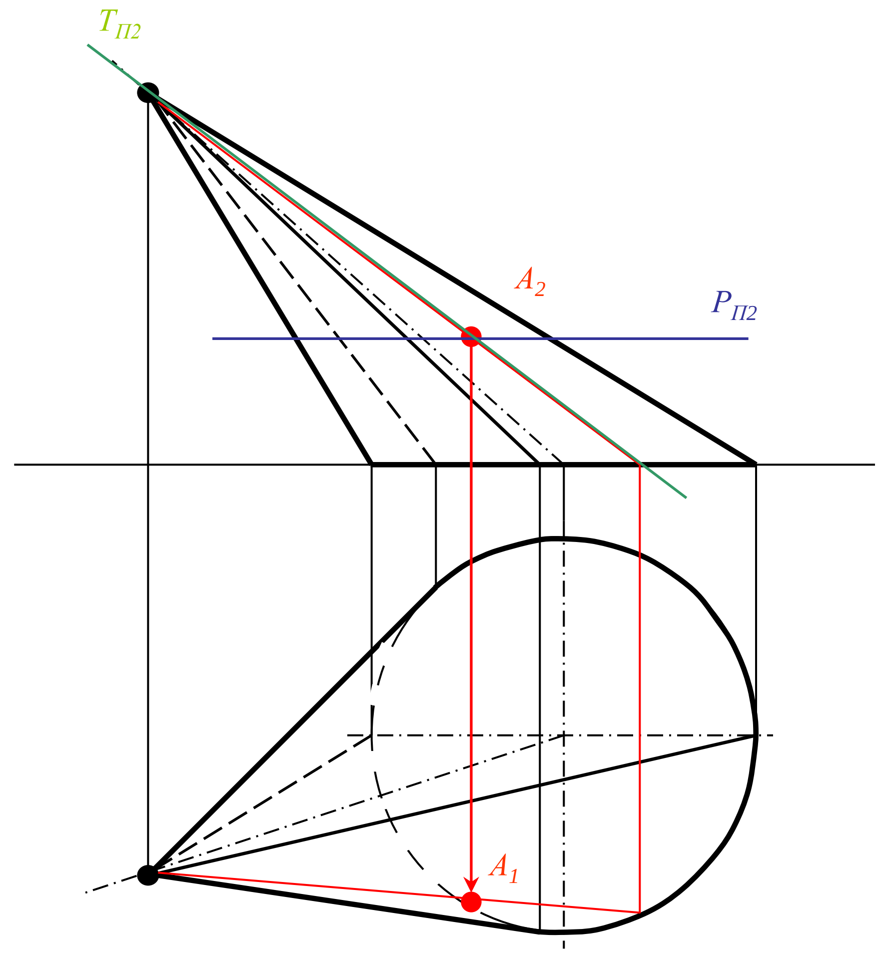


Рис. 5.15

Сфера

Φ(ℓ, í) [í – ось вращения, ℓ – образующая полуокружность,
O – центр образующей; ℓ вращается вокруг í, O є í,].

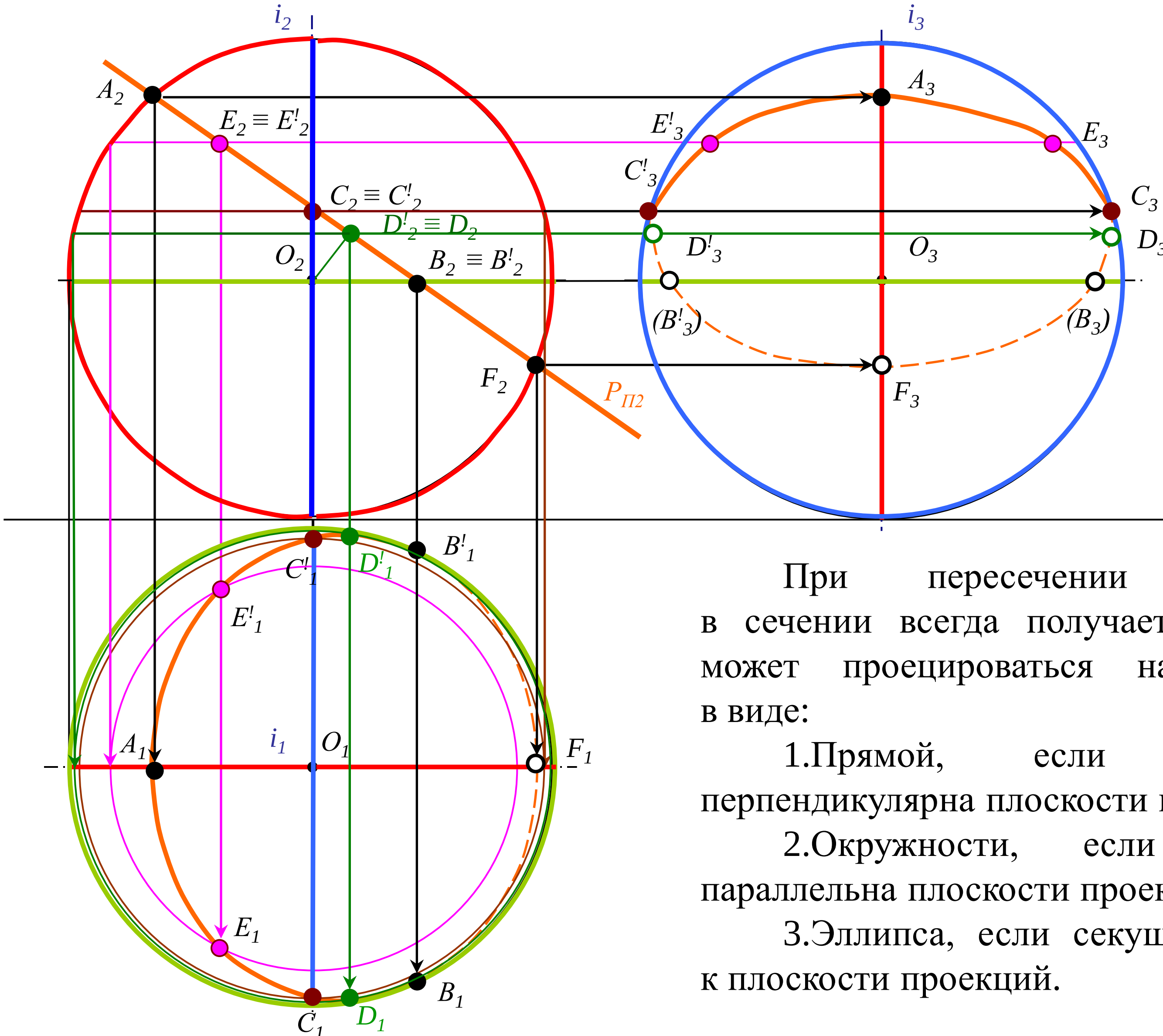


Рис. 5.16

При пересечении сферы плоскостью в сечении всегда получается окружность, которая может проецироваться на плоскости проекций в виде:

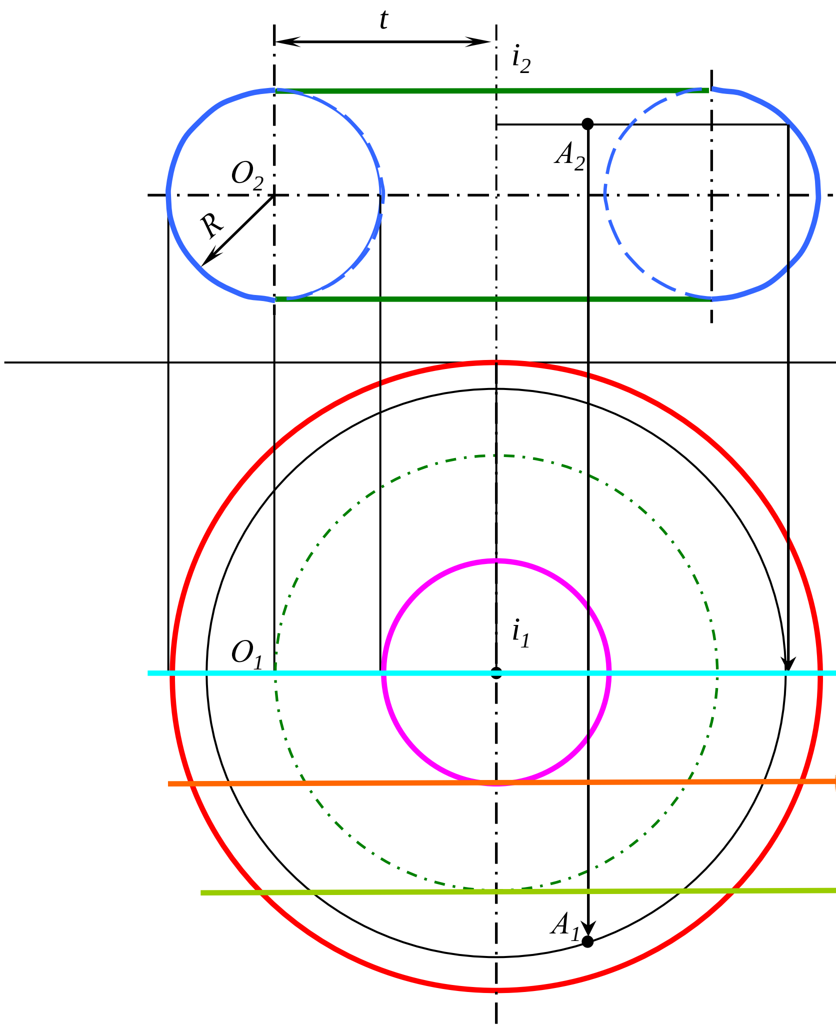
1.Прямой, если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций (рис. 5.16).

2.Окружности, если секущая плоскость параллельна плоскости проекций.

3.Эллипса, если секущая плоскость наклонена к плоскости проекций.

Тор

Ф(ℓ,í)[í – ось вращения; ℓ – образующая окружность,
О – центр окружности; ℓ вращается вокруг í; точка
О не принадлежит í).



Если $t > 2R$ – открытый тор (кольцо),
$R < t < 2R$ – закрытый, (см. слайд № 70),
$t < R$ – самопересекающийся.

При пересечении тора плоскостью получаются **кривые Персея.**

Кривые Персея:

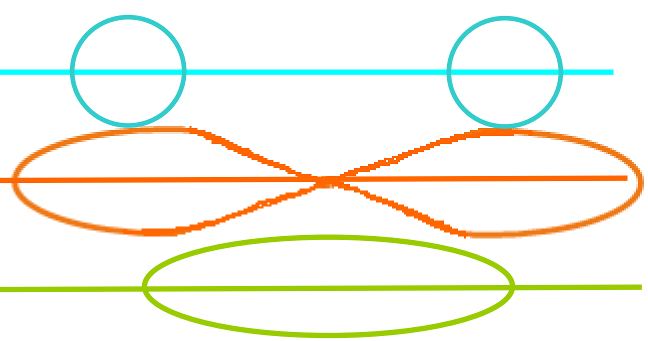


Рис. 5.17

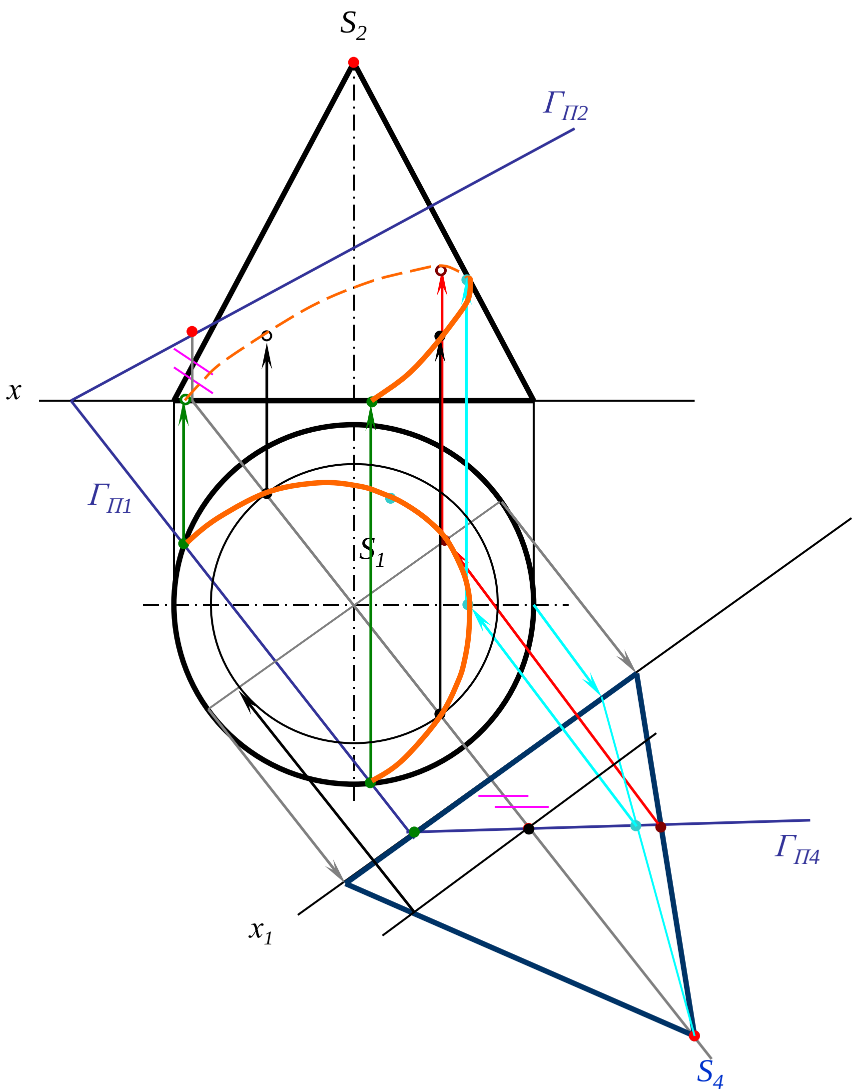


Рис. 5.18

При пересечении поверхности плоскостью общего положения фигура сечения на всех плоскостях проекций будет проецироваться с искажением и для ее нахождения следует применять либо методы преобразования чертежа (для перевода плоскости из общего положения в частное, либо метод секущих плоскостей.

Решение задачи с применением метода перемены плоскостей проекций сводится к переводу секущей плоскости в проецирующее положение, нахождению точек сечения на дополнительной плоскости проекций и их обратному проецированию в исходные плоскости проекций (рис. 5.18).

6. Взаимное пересечение поверхностей

Форма большинства технических изделий образована комбинацией различных элементарных поверхностей. Поэтому важным этапом выполнения чертежей этих изделий является построение линии пересечения поверхностей.

При взаимном пересечении двух многогранников получается пространственная ломаная линия (замкнутая или нет), которая может распадаться на две ломаные линии.

При пересечении криволинейных поверхностей получается пространственная кривая линия, которая тоже может распадаться на две и более линий.

При пересечении многогранника с криволинейной поверхностью получается пространственная линия, состоящая из ряда плоских кривых.

6.1. Частные случаи пересечения поверхностей

В случае, если одна или обе пересекающиеся поверхности проецирующие, а одна или две проекции искомой линии пересечения уже есть, хотя бы на одной из плоскостей проекций, решение задачи сводится к нахождению недостающей проекции линии пересечения поверхностей по принципу принадлежности точки и линии поверхности (рис. 6.1).

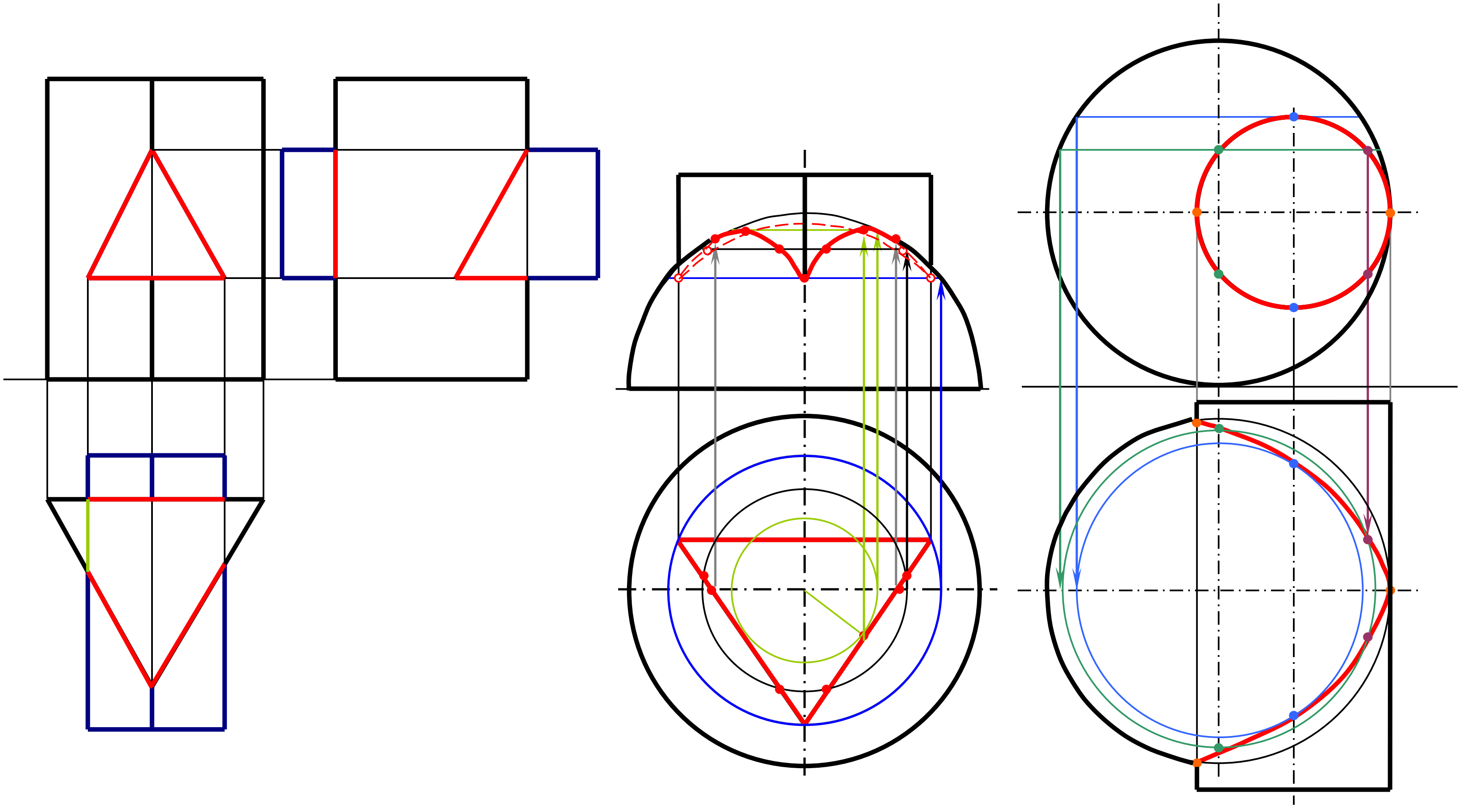


Рис. 6.1

Случаи пересечения криволинейных поверхностей, когда пространственная кривая линия распадается на плоские кривые или прямые, следующие:

1. При пересечении двух цилиндров с параллельными осями (рис. 6.2, *а*).
2. При пересечении двух конусов с общей вершиной (рис. 6.2, *б*).
3. При пересечении двух **соосных** поверхностей (рис. 6.2, *в*).
4. При пересечении двух криволинейных поверхностей, описанных вокруг сферы (рис. 6.2, *г*).

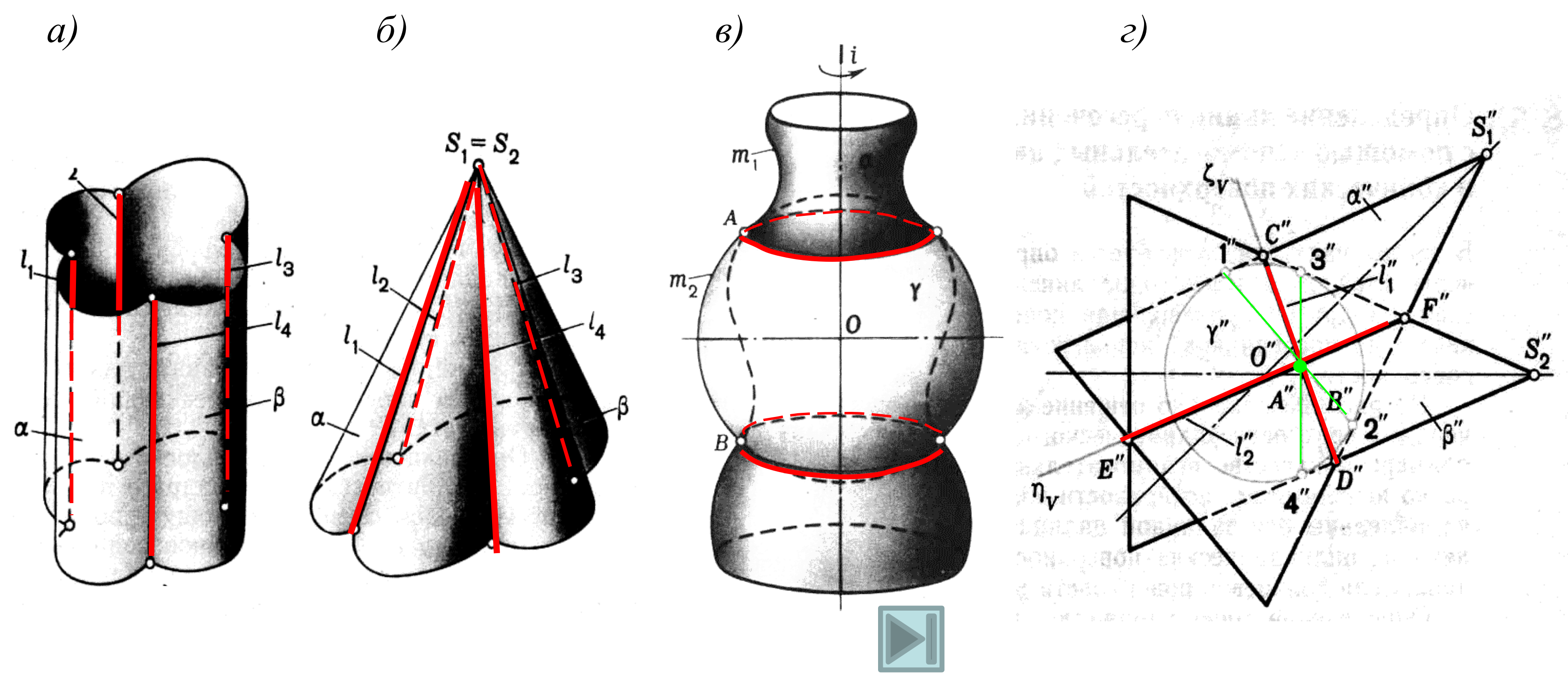


Рис. 6.2

Условия при которых линия пересечения криволинейных поверхностей распадается на две плоские кривые можно сформулировать в виде теорем.

Теорема о парности плоских сечений

Если две поверхности второго порядка* пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой (рис. 6.3).

Теорема о двойном прикосновении

Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

Частным случаем теоремы о двойном прикосновении является **теорема Монжа:**

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка, или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (рис. 6.2, *г*).

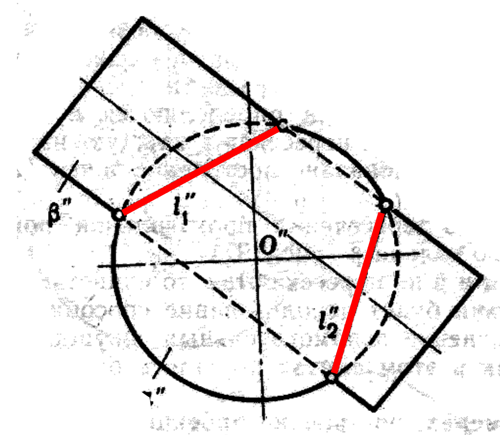


Рис. 6.3

*) *Порядок поверхности определяется порядком образующей и равен 2n. Порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей. Две поверхности вращения второго порядка пересекаются по кривой четвертого порядка. При распаде линии пересечения на линии сумма их порядков равна порядку самой линии.*

6.2. Общие случаи пересечения поверхностей

В общем случае линия пересечения криволинейных поверхностей – пространственная кривая, которая проецируется на плоскости проекций в плоские кривые.

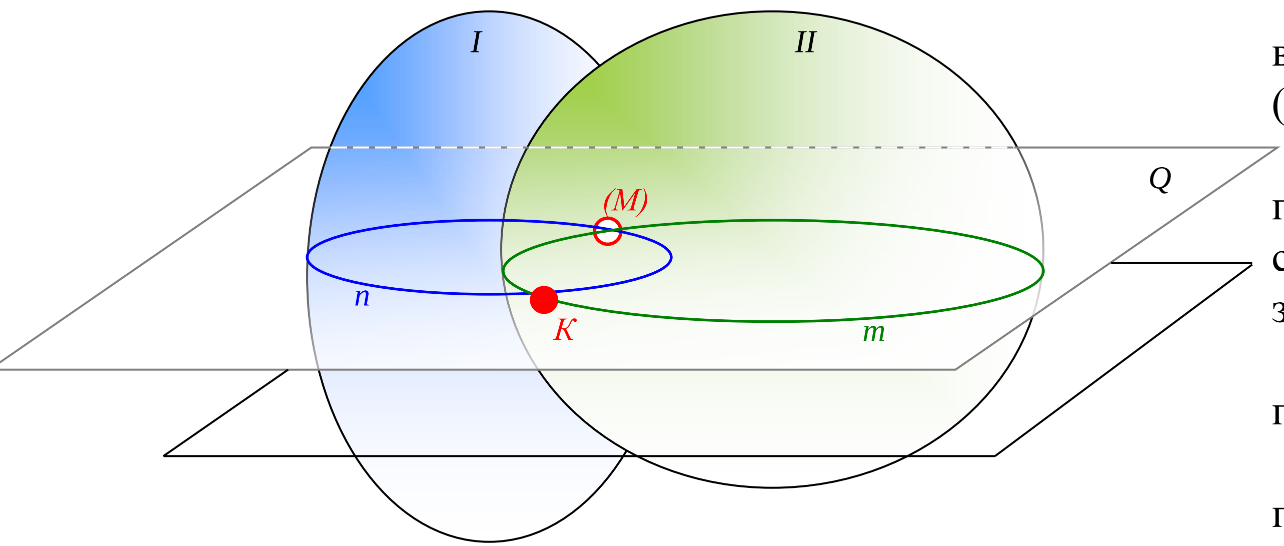


Рис. 6.4

Алгоритм решения задачи (рис. 6.4):

1.Выбрать вид вспомогательной поверхности (посредника) *Q*.

2.Построить линии пересечения посредника сначала с поверхностью *I*, затем с поверхностью *II*.

3.Определить точки пересечения $m \cap n = K, M$.

Многократно повторить построения пунктов 2 и 3.

4.Полученный ряд точек соединить, соблюдая порядок и видимость.

Проекции линии m и n должны быть простыми для построения (прямые или окружности). Поэтому в качестве поверхностей посредников принимают плоскости или сферы. При этом пользуются связками плоскостей или семействами сфер.

В связи с этим различают два варианта решения задач при использовании связок плоскостей:

1. Связки, в которых плоскости проходят через собственную прямую (способ вращающейся плоскости).

2. Связки, в которых плоскости проходят через несобственную прямую (метод секущих плоскостей) (рис. 6.5).

При использовании сферических поверхностей:

1. Семейство сфер различных радиусов, проведённых из одного центра (метод концентрических сфер) (рис. 6.7).

2. Семейство сфер различных радиусов, проведенных из разных центров (метод эксцентрических сфер).

6.2.1. Метод секущих плоскостей

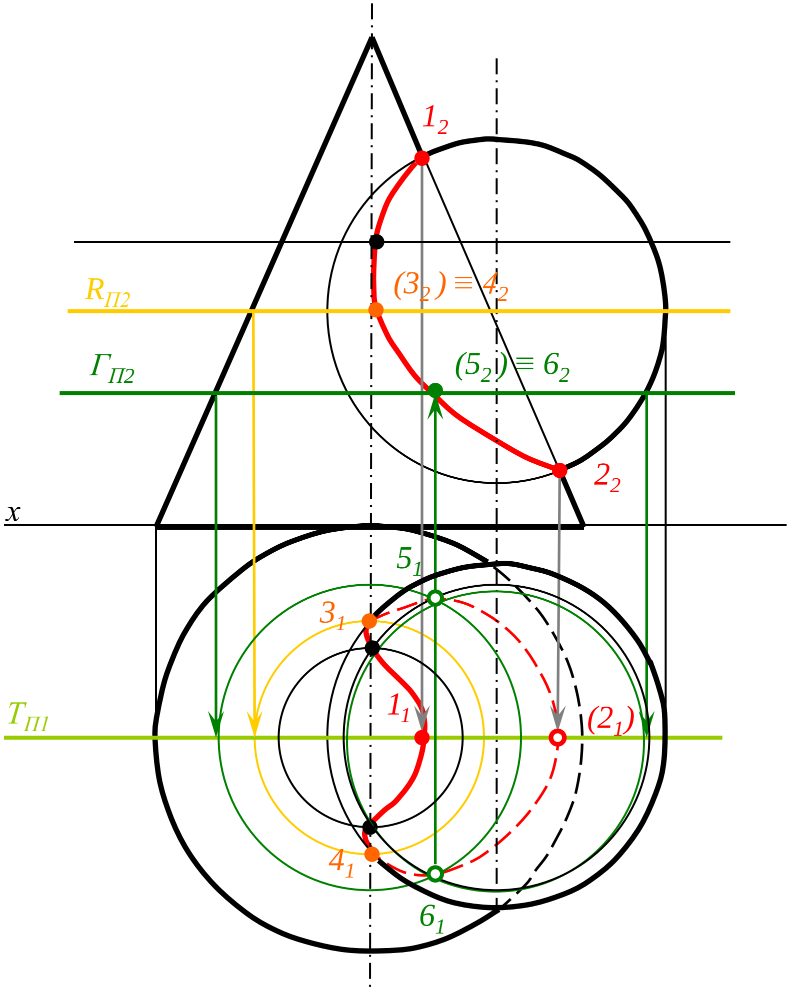


Рис. 6.5

Алгоритм решения:

1. В качестве вспомогательной секущей поверхности выбирают плоскость *Г*, параллельную $П_1$, так как в этом случае плоскость *Г* пересекает конус и сферу по окружностям (параллелям).

2. Определение опорных точек *1* и *2*, *3* и *4*. Опорные точки *1* и *2* принадлежат очерковым образующим поверхностей, которые лежат в плоскости симметрии *T* ($T \parallel П_2$) (на $П_2$).

Точки *3* и *4* принадлежат плоскости *R*, параллельной $П_1$. Плоскость *R* пересекает конус по окружности, а сферу – по экватору (на $П_1$).

4. Определение промежуточных точек с помощью семейства плоскостей.

5. Соединение точек по порядку и определение видимости линий пересечения.

6.2.2. Метод сфер

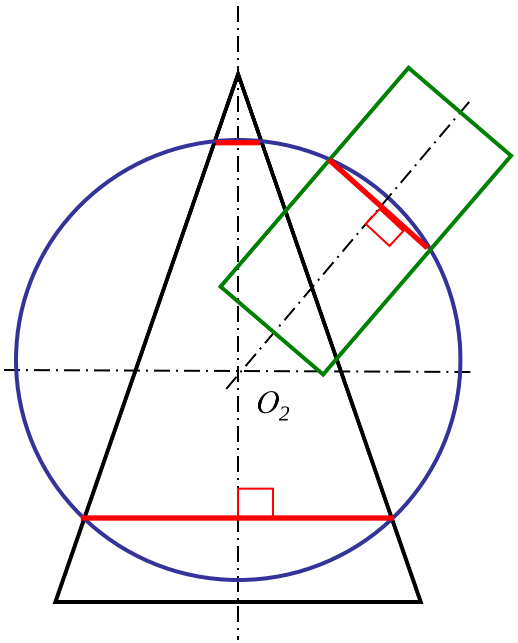


Рис. 6.6

Использование сферы в качестве вспомогательной секущей поверхности основано на следующем: если центр сферы находится на оси поверхности вращения, то линия пересечения сферы и поверхности вращения – окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения (см. слайд № 87, рис. 6.2, *в* и рис. 6.6). Если при этом ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то окружность проецируется на эту плоскость проекций в отрезок прямой линии.

Для возможности применения метода сфер необходимо соблюдение следующих условий:

1. Обе поверхности должны быть поверхностями вращения.
2. Оси этих поверхностей должны пересекаться или скрещиваться.
3. Оси вращения должны быть параллельны одной из плоскостей проекции (дополнительное условие). Если это условие не выполняется, то следует преобразовать чертёж.

Если оси поверхностей вращения пересекаются, то следует применить способ концентрических сфер.

Если оси поверхностей вращения скрещиваются, то следует применить способ эксцентрических сфер.

6.2.2.1. Метод концентрических сфер

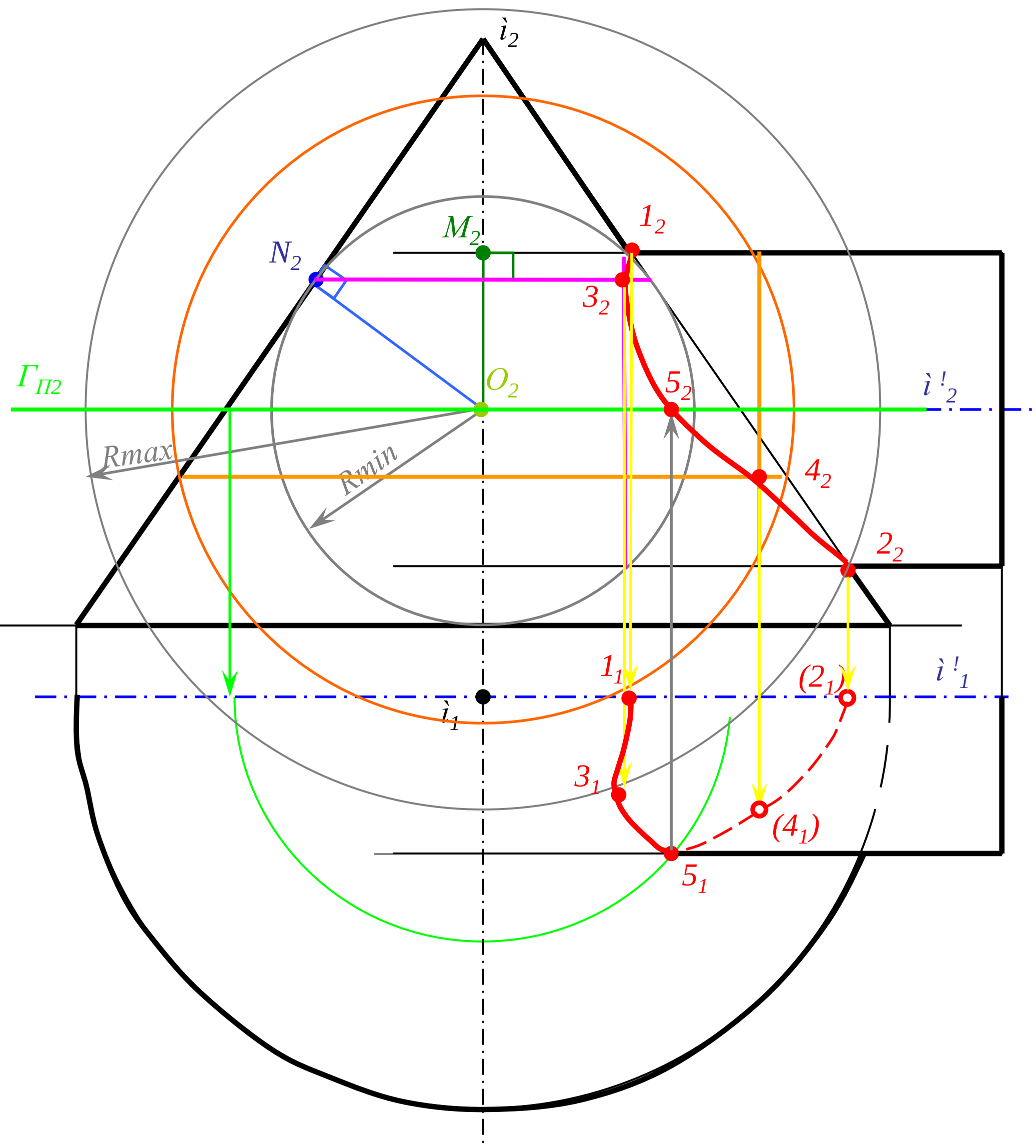


Рис. 6.7

Алгоритм решения:

1. Проверить условие задачи на возможность применения метода сфер.

2. Выбрать центр вспомогательных секущих поверхностей (точка *O* пересечения осей *ì* и *ì'*).

3. Определить характер линии пересечения – какая из поверхностей врезается в другую. *Меньшая поверхность врезается в большую*. Проводят из точки *O* к обеим поверхностям нормали и сравнивают их: $[O_2N_2] > [O_2M_2]$ => конус имеет большую поверхность.

4. Определить опорные точки на $П_2$, как точки пересечения очерковых образующих поверхностей (точки *1* и *2*).

5. Определить минимальный и максимальный радиусы секущих сфер. Принять $Rmin = [O_2N_2]$, (нормаль к большей поверхности). *Rmax* равняется расстоянию от центра *O* до наиболее удаленной опорной точки (отрезок $[O_22_2]$).

6. Построить промежуточные точки линии пересечения поверхностей с помощью сфер радиуса *R*, где $Rmax > R \geq Rmin$. Соединить точки линии пересечения поверхностей, соблюдая порядок и видимость.

7. Проекции с числовыми отметками

7.1. Сущность метода

В инженерной практике существуют такие объекты, для которых метод двух изображений не пригоден, так как изображения получаются мало наглядными. Точность графических построений на таких чертежах при решении позиционных и метрических задач оказывается недостаточной.

Способ проекций с числовыми отметками применяется для построения изображений объектов, у которых размеры по длине значительно превосходят размеры по высоте (насыпи, дамбы, плотины, дороги, строительные площадки, каналы и т. д). Кроме того, проекции с числовыми отметками используются для изображения рельефа земной поверхности. Чертежи этих объектов, выполненные в проекциях с числовыми отметками, свободны от указанных недостатков и поэтому широко используются в строительной практике.

Сущность метода проекций с числовыми отметками. Объект ортогонально проецируется на плоскость проекций (преимущественно горизонтальную). Рядом с проекциями характерных точек или линий ставятся числа, показывающие расстояние этих точек и линий от принятой плоскости проекций. Эти числа называются **числовыми отметками.**

7.2. Понятие точки и плоскости в проекциях с числовыми отметками

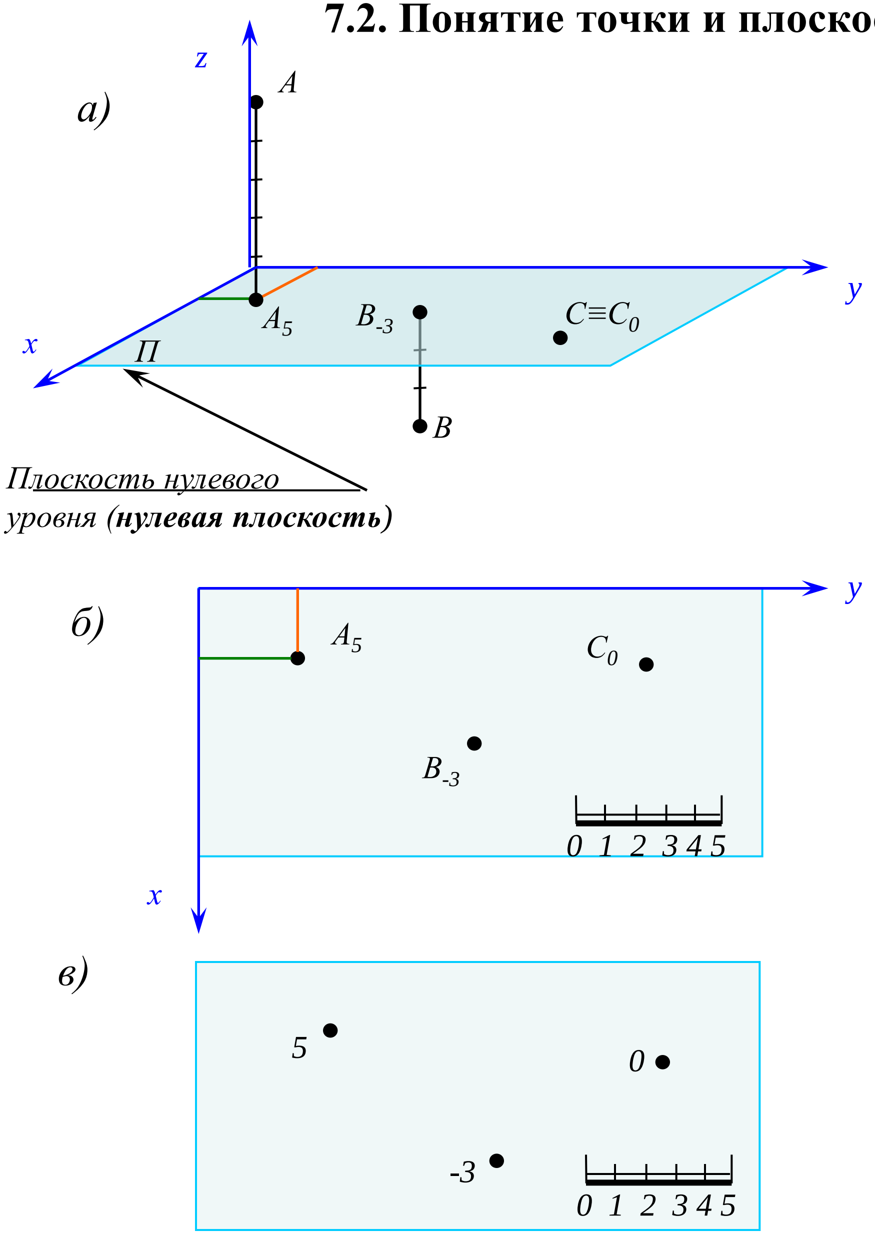


Рис. 7.1

Наглядное изображение и чертежи точек *A*, *B*, *C* показаны на (рис. 7.1, *а – в*).

Точки *A*, *B* и *C* ортогонально спроецированы на горизонтальную плоскость (**нулевая плоскость**). Рядом с проекцией каждой точки записывается число, указывающее расстояние точки (**в метрах**) до плоскости $П_1$.

Точки, расположенные выше плоскости $П_1$, имеют положительные, ниже – отрицательные отметки.

Точки, лежащие в плоскости проекций, имеют нулевые отметки.

Проекции точек обозначают буквами с соответствующими числами – *индексами* или одними числами, если это не затрудняет понимание чертежа. Построенный таким образом чертеж называется **планом**. На плане, как правило, указывается линейный или числовой масштаб.

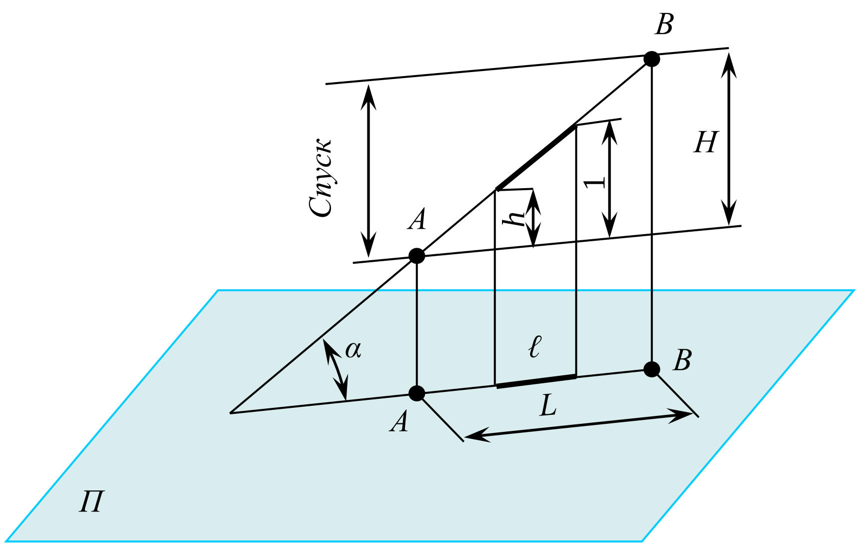


Рис. 7.2

Прямая может быть задана проекциями двух принадлежащих ей точек с указанием их отметок (рис. 7.2).

Длина проекции отрезка прямой называется его заложением (*L*).

Элементы залегания: интервал, уклон, угол подъема прямой (*H*).

Если подъем *H* равен единице, то заложение, ему соответствующее, называется *интервалом* (*ℓ*). Величина интервала характеризует крутизну прямой.

Уклон в этом случае равен $i = 1/\ell$. Следовательно, уклон и интервал прямой – величины обратные.

Разность отметок концов отрезка определяет *подъем (H)* или *спуск* прямой.

Направление спуска при необходимости указывается на чертеже стрелкой.

Прямая может быть задана одной точкой и углом наклона прямой к плоскости с указанием направления спуска (от точки с большей отметки к точке с меньшей) (рис. 7.3) или уклоном (рис. 7.4).

Уклон – это тангенс угла наклона прямой к плоскости.

$i = H/L\ tg\alpha$

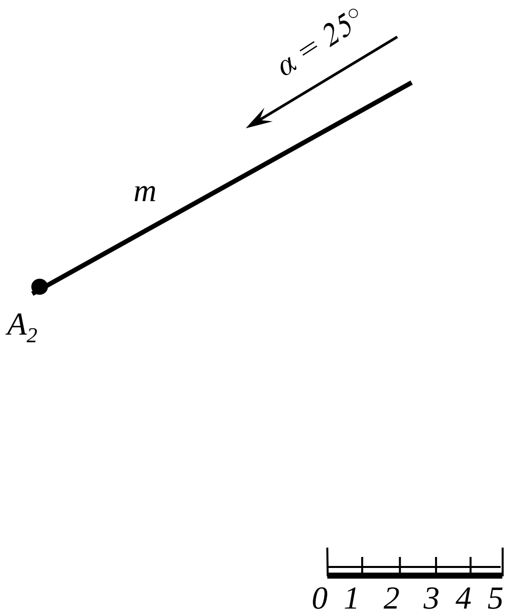


Рис. 7.3

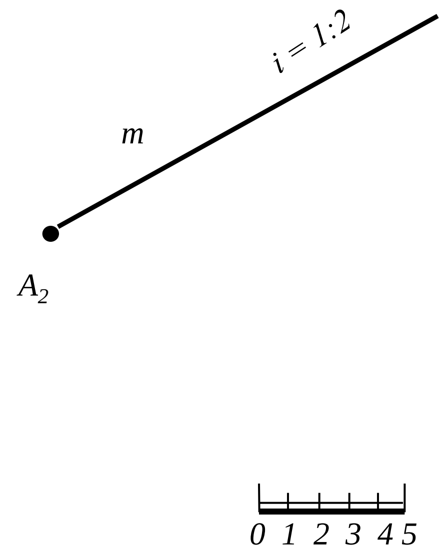


Рис. 7.4

Концы отрезка прямой часто задаются отметками, которые выражаются дробными числами. При решении задач надо знать положение точек с целыми отметками. Для этого следует **проградуировать** прямую.

1-й способ. Через произвольные равные интервалы, параллельные отрезку *AB*, проводят прямые, как горизонтали с целыми отметками (рис. 7.5). На перпендикуляре к прямой *AB* из точек *A* и *B,* в масштабе отмеряют 5,8 и 3,5 единиц, соответственно. Следовательно, отрезок *A'B'* дополнительная проекция прямой *AB*. Точки пересечения *A'B'* с построенными горизонталями дают положения искомых точек.

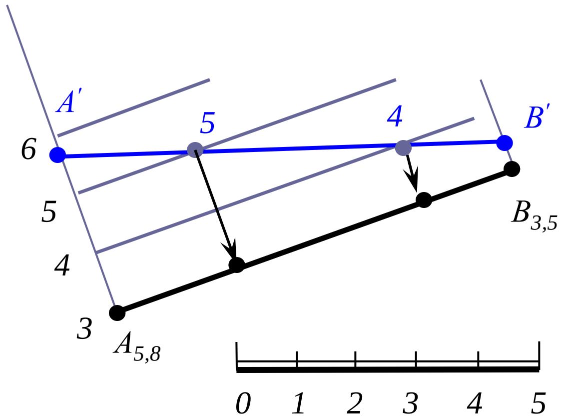


Рис. 7.5

2-й способ. На вспомогательной произвольной прямой, проведенной из конца отрезка откладывают величины, соответствующие превышению между концевыми и искомыми точками на прямой (рис. 7.6). Полученную точку *C* соединяют с прямой и через точки деления, на вспомогательной прямой, проводят прямые, параллельные замыкающей прямой *CB,* которые отсекают на прямой *AB* искомые точки.

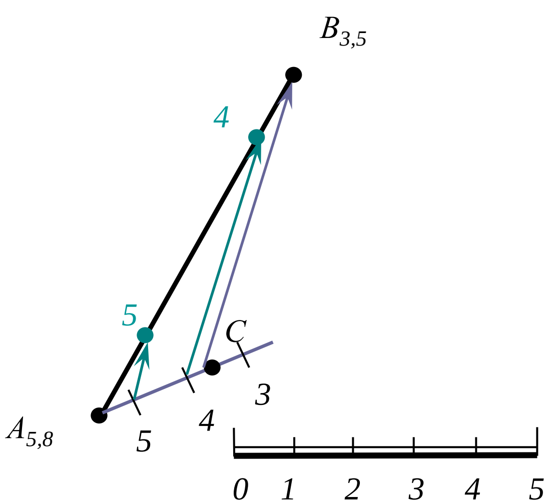


Рис. 7.6

3-й способ. Зная длину проекции прямой (заложение) *L*, определяют интервал $\ell = L/H$. Расстояние от конца отрезка *A* до ближайшей точки с целой отметкой $x/\ \ell = h/1$.

$H = 5{,}8 - 3{,}5 = 2{,}3$ *м.* $\ell = L/H = 11{,}5/2{,}3 = 5$ *м.* $H = 0{,}5$ *м.* $x = h\cdot \ell = 5\cdot 0{,}5 - 2{,}5$.

7.3. Взаимное положение двух прямых

Проекции с числовыми отметками представляют собой частный случай ортогональных проекций и все изложенные признаки, определяющие взаимное расположение прямых, справедливо и в этом случае. Но отсутствие второй проекции не дает возможности определить взаимное положение прямых непосредственно по чертежу.

Решение задачи можно осуществить несколькими способами.

1-й способ. Методом перемены плоскостей проекций строят дополнительные проекции прямых (рис. 7.7). Новые проекции, совместно с исходными, дают возможность установить взаимное расположение прямых (прямые не пересекаются).

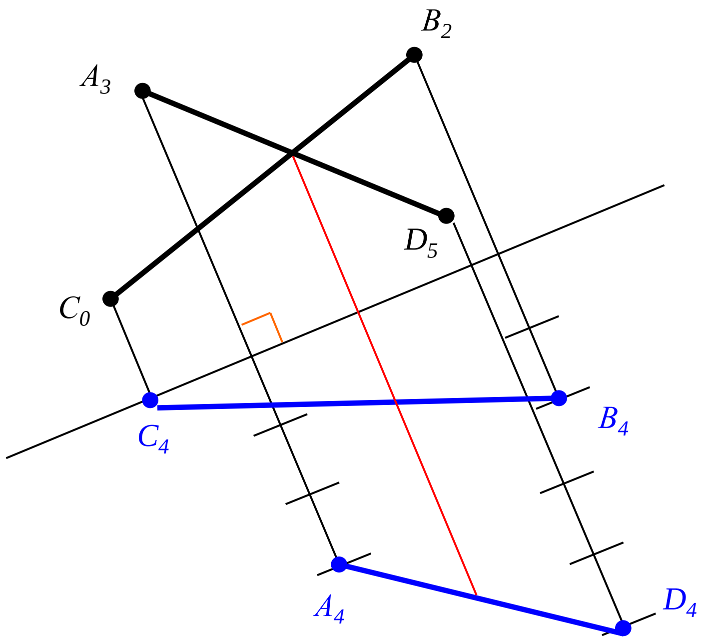


Рис. 7.7

2-й способ. Спроецировать прямые на две дополнительные плоскости проекций (рис. 7.8). Восстановить из точки пересечения исходных проекций перпендикуляры (*KN* и *KM*) к прямым *AD* и *BC* и сравнить их длину (прямые не пересекаются, т. к. $KN \neq KM$).

3-й способ. Проградуировать прямые и сравнить интервалы, уклоны и отметки точек пересечения проекций прямых (рис. 7.9 – 7.11).

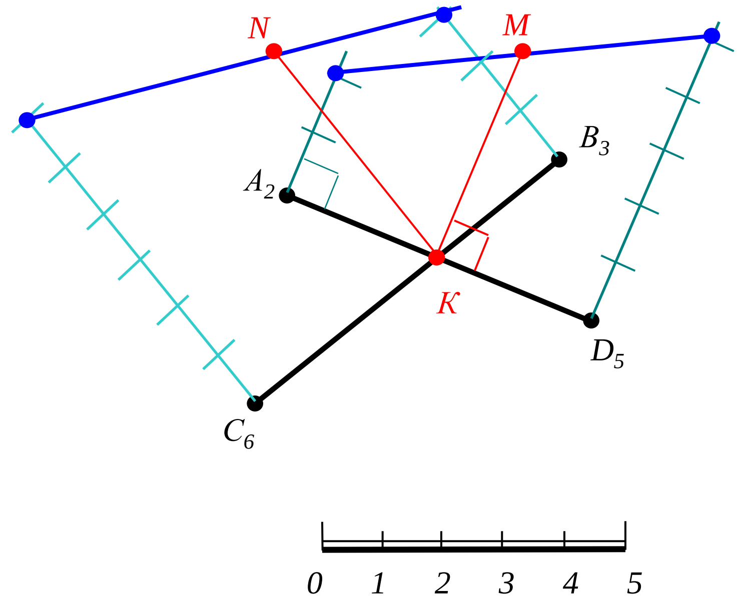


Рис. 7.8

Проекции заложения **параллельных прямых** параллельны, интервалы и уклоны равны, а их направления одинаковы (отметки убывают или возрастают в одном направлении) (рис. 7.9). Иначе: параллельные прямые имеют одинаковые элементы залегания. Прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны. Они являются горизонталями плоскости, проходящей через данную прямую.

Проекции заложения **пересекающихся прямых** пересекаются (рис. 7.10). Точка пересечения проекций двух пересекающихся прямых имеет одинаковые отметки на первой и на второй прямой. Это легко проверить, если проградуировать прямые. Прямые, соединяющие точки с одинаковыми отметками, параллельны между собой.

У **скрещивающихся прямых** отсутствуют признаки параллельности и пересечения прямых (рис. 7.11).

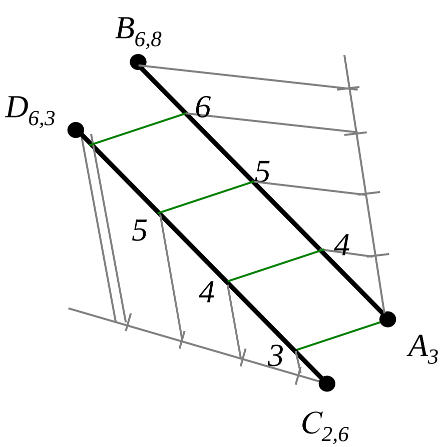


Рис. 7.9

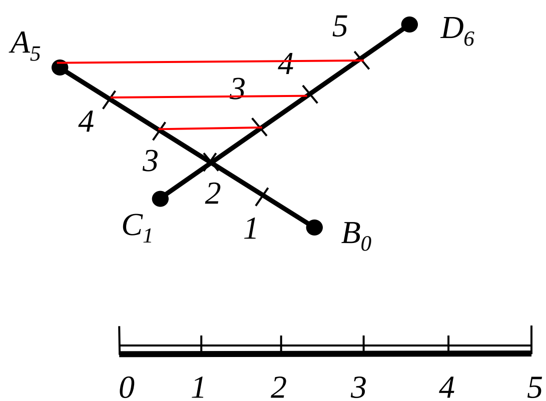


Рис. 7.10

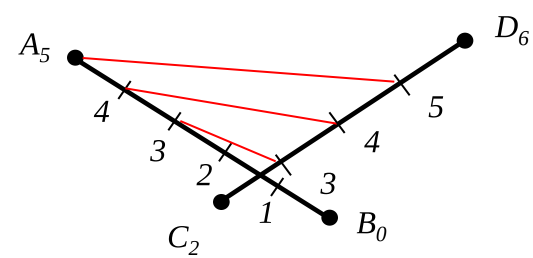


Рис. 7.11

Назад

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана:

1. Тремя точками (рис. 7.1).
2. Прямой и точкой (вне прямой) (рис. 7.12).
3. Параллельными прямыми (рис. 7.9).
4. Пересекающимися прямыми (рис. 7.10).
5. Масштабом заложения (уклонов) (рис. 7.13).

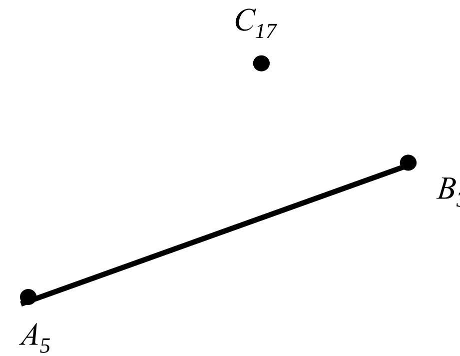


Рис. 7.12

Масштаб заложения (уклонов) – проградуированная проекция линии наибольшего ската плоскости (ЛНС).

Масштаб уклонов полностью определяет положение плоскости в пространстве и изображается на чертеже двумя параллельными прямыми: толстой и тонкой, с нанесенными на ней отрезками горизонталей плоскости. Расстояние между соседними делениями соответствует единице превышения (интервал ЛНС или интервал плоскости). ЛНС плоскости еще называется **линией падения**. Она определяет угол наклона или угол падения плоскости.

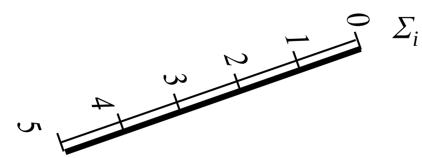


Рис. 7.13

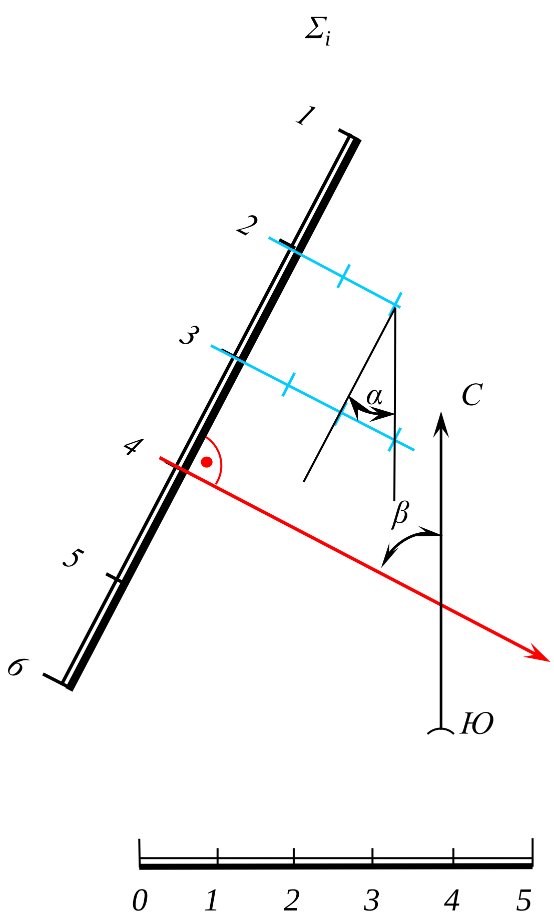


Рис. 7.14

Положение плоскости в пространстве можно установить с помощью **углов падения (восстания)** α и **простирания** β **плоскости** (рис. 7.14). α и β – элементы залегания плоскости). Угол падения плоскости определяется углом наклона ЛНС к горизонтальной плоскости проекций. Угол простирания β измеряется по часовой стрелке от северного меридиана до положительного направления простирания. При этом за положительное направление простирания в горной промышленности принято правое направление горизонталей плоскости, когда наблюдатель обращен в сторону восстания (увеличения числовых отметок).

Чтобы установить угол падения α плоскости необходимо из двух любых точек масштаба заложения восставить перпендикуляры и отложить на них (в масштабе чертежа) отрезки, равные высотным отметкам этих точек. Полученные точки соединить прямой. Угол между этой прямой и линией масштаба заложения равен искомому.

7.4. Взаимное положение плоскостей

Если **две плоскости параллельны**, то их масштабы уклонов и интервалы равны (отметки возрастают в одну сторону), направления спуска одинаковы (отметки убывают в одном направлении) (рис. 7.15). То есть параллельные плоскости имеют одинаковые элементы залегания. Признаком параллельности плоскостей является равенство их углов простирания и уклонов (углов падения).

Если хотя бы один из признаков параллельности плоскостей отсутствует, то **плоскости пересекаются**.

Линия пересечения плоскостей находится на основе метода сечения. Решение сводится к нахождению точек пересечения пар горизонталей с одинаковыми отметками (рис. 7.16).

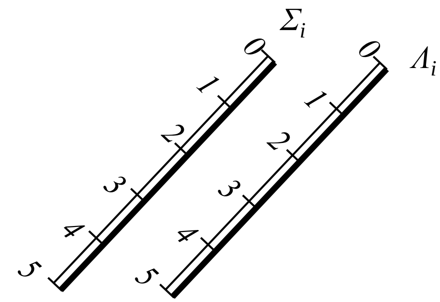


Рис. 7.15

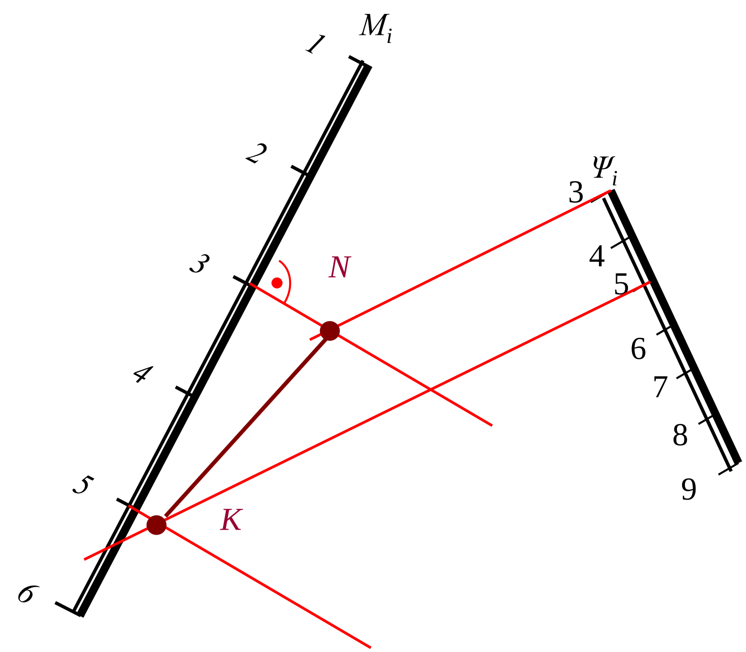


Рис. 7.16

Если масштабы уклонов пересекающихся плоскостей параллельны, но интервалы различны и отметки убывают в разные стороны, то плоскости пересекаются по общей горизонтали, которую находят, построив одну точку этой горизонтали, соединив точки с одинаковыми отметками у масштабов уклонов обеих плоскостей (рис. 7.17).

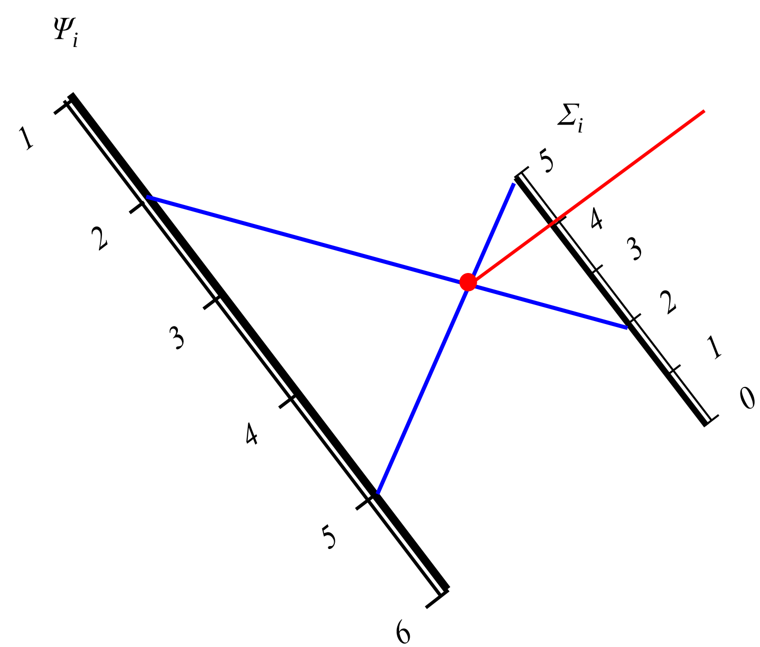


Рис. 7.17

7.5. Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая **принадлежит** плоскости, если две любые ее точки лежат на горизонталях плоскости, т.е. имеют соответственно одинаковые с горизонталями высотные отметки (рис. 7.18).

Прямая **параллельна** плоскости, если она параллельна любой прямой, принадлежащей плоскости (рис. 7.19).

В остальных случаях прямая и плоскость **пересекаются**.

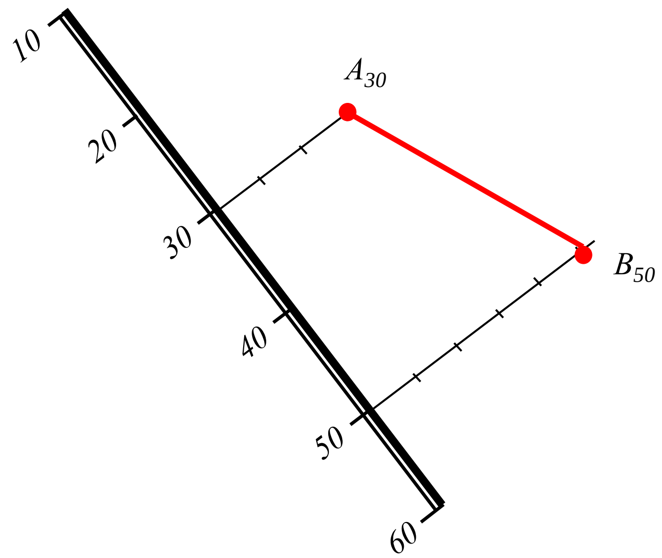


Рис. 7.18

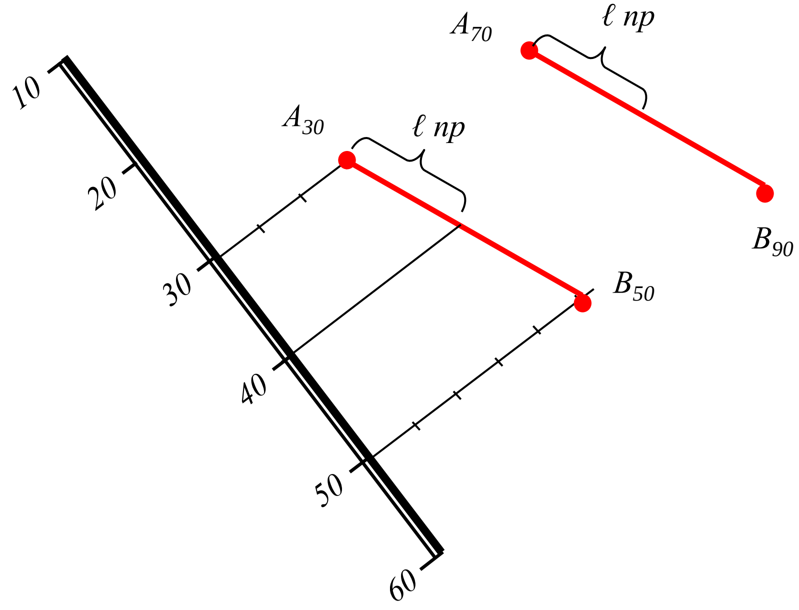


Рис. 7.19

Алгоритм решения задачи на пересечение прямой с плоскостью (рис. 7.20):

1. Через отрезок прямой провести вспомогательную плоскость общего положения. Для этого через две точки прямой, под любым удобным для построения углом, проводят две горизонтали, определяющие вспомогательную плоскость.
2. Строится линия пересечения заданной и вспомогательной плоскостей (отрезок $C_{13}D_{11}$).
3. На пересечении полученной линии и заданной прямой определяется искомая точка $K_{14,2}$.

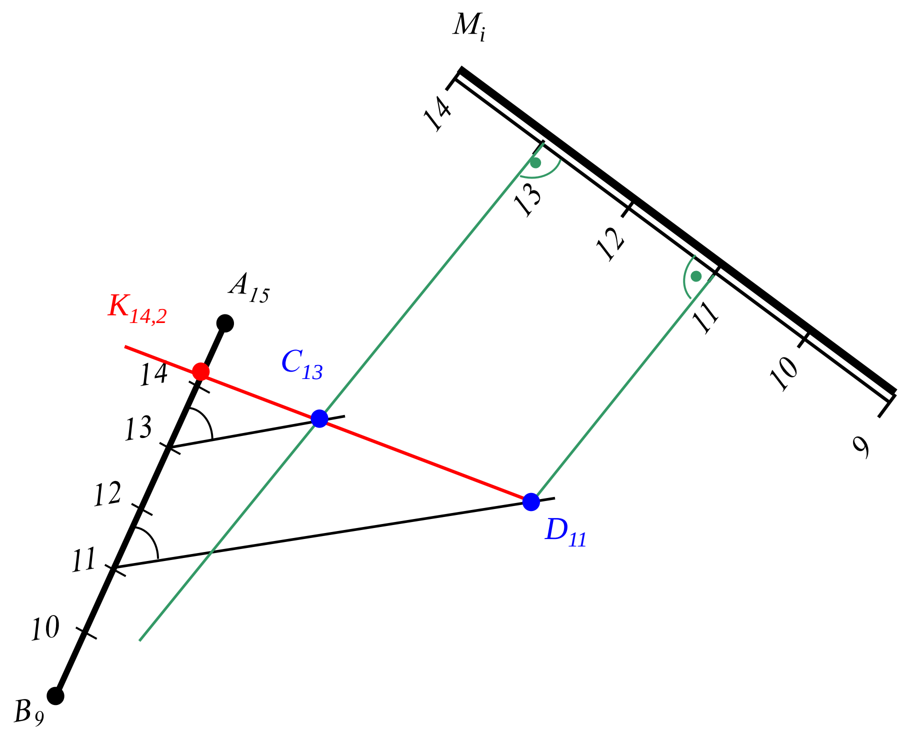


Рис. 7.20

Если прямая и плоскость взаимно **перпендикулярны**, то на плане (рис. 7.21) проекция прямой параллельна масштабу заложения и перпендикулярна к проекциям горизонталей плоскости. Числовые отметки прямой и плоскости увеличиваются в противоположных направлениях, а интервал прямой по величине обратно пропорционален интервалу плоскости:

ℓ пл $=\Delta h/$ *ℓ пр* $=1/$ *ℓ пр* .

*Е*сли известен интервал плоскости *(ℓ пл)*, то интервал прямой *(ℓ пр)* можно установить графически.

Пример: из точки A_8 опустить перпендикуляр на плоскость *Ψ* и найти его основание.

1. В плоскости *Ψ* проводят ЛНС B_3C_7.

2. Из точки A_8 проводят прямую *АК* перпендикулярно горизонталям плоскости и параллельно масштабу уклона плоскости.

3. С помощью разреза *А - А* строят перпендикуляр *(*A'_8K*)* к плоскости *Ψ*, которая проецируется в виде ЛНС B_3C_7.

4. Перпендикуляр графически градуируется и с помощью горизонтальных плоскостей определяется его интервал.

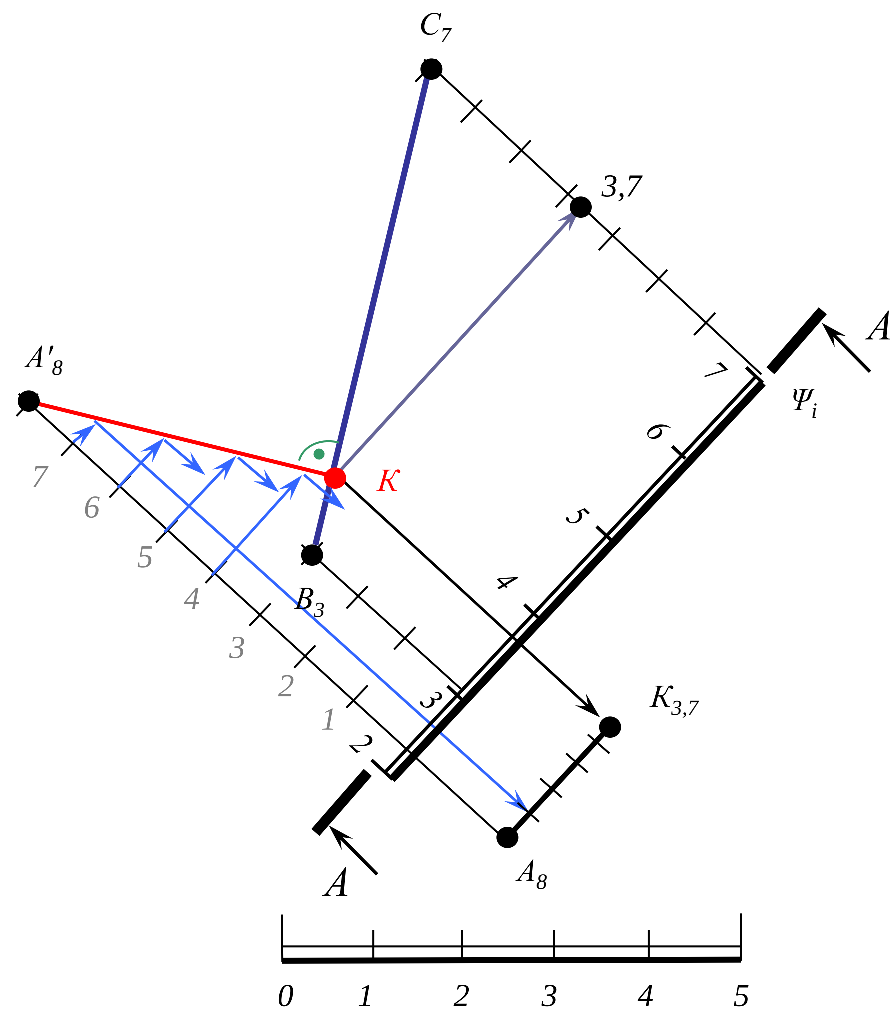


Рис. 7.21

8. Поверхности в проекциях с числовыми отметками

8.1. Гранные и кривые поверхности на плане. Понятие топографической поверхности

В проекциях с числовыми отметками форма любых поверхностей достаточно полно характеризуется их горизонталями.

На плане **многогранники** задаются проекциями вершин и их высотными отметками (рис. 8.1). Ребра, а следовательно, грани и вся поверхность многогранника может быть проградуирована.

Криволинейные поверхности на чертеже задаются с помощью проекций горизонталей этих поверхностей, а также – проекцией высотных отметок отдельных характерных точек поверхности (рис. 8.2). Горизонтали поверхности представляют собой линии сечения этой поверхности горизонтальными секущими плоскостями.

У цилиндрической поверхности проекции прямолинейных образующих параллельны, наклон их одинаков и интервалы равны. Горизонтали проходят через точки образующих, имеющих одинаковые отметки.

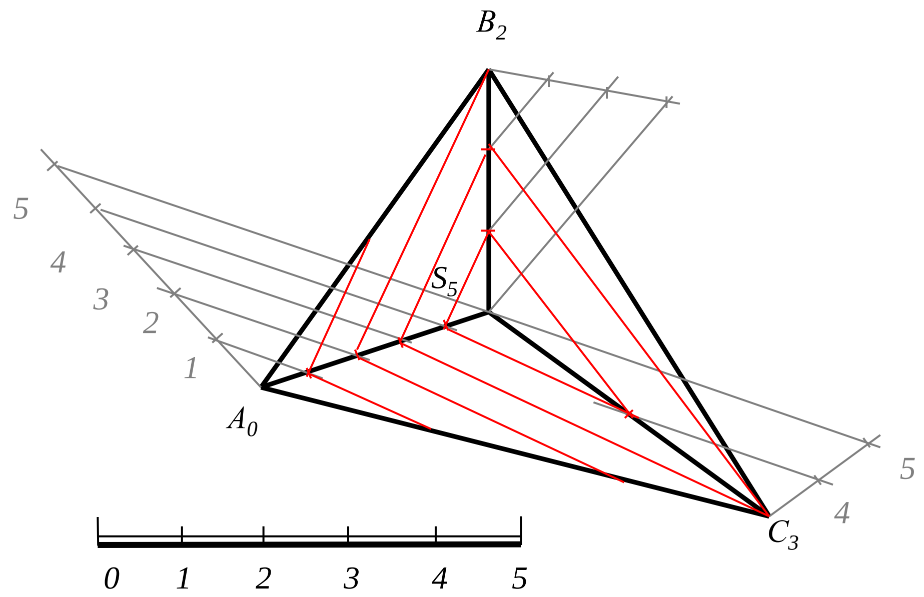


Рис. 8.1

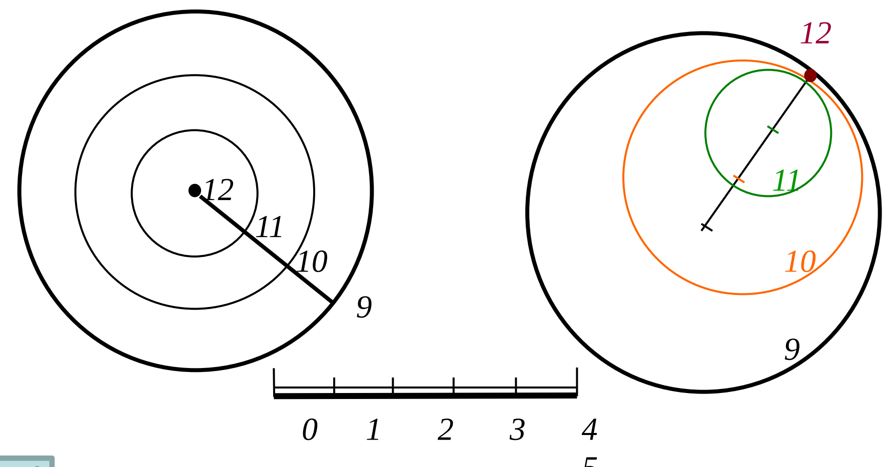


Рис. 8.2

Поверхность одинакового ската (равного уклона) – поверхность, огибающая семейства прямых круговых конусов, вершины которых лежат на одной пространственной кривой (рис. 8.3). Такие поверхности встречаются при сооружении откосов плотин, дорог, строительных площадок и т. д. Поверхность одинакового ската задается на чертеже проекциями горизонталей.

Построения выполняются в следующей последовательности:

1. В соответствии с масштабом чертежа выполняется вспомогательный график заложений, в котором проводится прямая под углом α (где α – угол наклона образующих конуса к горизонту). Полученный при этом отрезок ℓ характеризует интервал образующих конусов.

2. В соответствии с интервалом ℓ строятся образующие конусов с центрами в точках A_{15}, B_{14} и C_{13}.

3. Касательно к горизонталям конусов с одинаковыми высотными отметками проводятся лекальные кривые горизонталей поверхности одинакового ската.

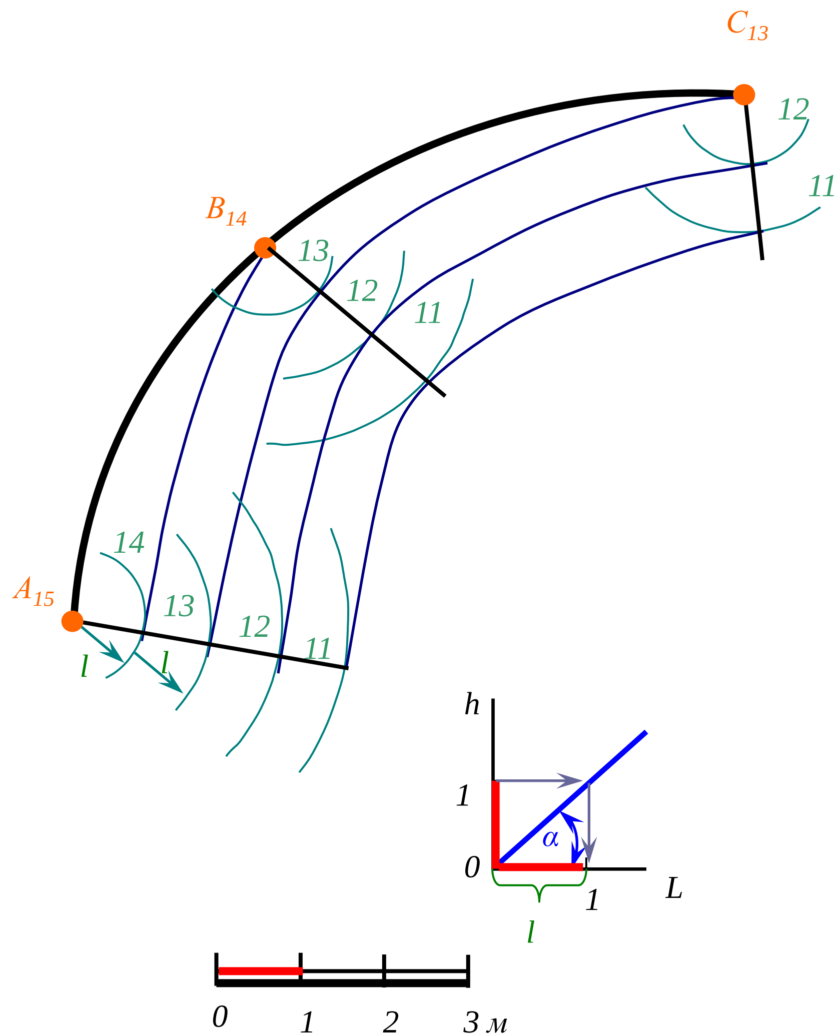


Рис. 8.3

Поверхности в образовании которых нет четкой геометрической закономерности называются каркасными или графическими и используются в авиастроении, судостроении, автостроении, а также других отраслях техники. К таким поверхностям относится земная поверхность, которую принято называть топографической.

Топографическая поверхность задается на плане горизонталями с номерами, которые соответствуют их отметкам (получаются при пересечении поверхности горизонтальными плоскостями) (рис. 8.4). Расстояние между секущими плоскостями (высота сечения Δh) выбирают в зависимости от характера рельефа местности и масштаба чертежа (обычно они кратны 1 или 5 метрам). Для удобства чтения чертежа каждая пятая или десятая горизонталь наносится утолщенной линией. Направление спуска обозначается **бергштрихом** – короткой чертой, примыкающей к горизонтали.

Если около какой-либо точки, взятой на горизонтали, провести окружность касательную к следующей горизонтали, а затем из полученной точки касания повторить построения к другой горизонтали и соединить эти точки, получится линия наибольшего ската на данной поверхности (рис. 108).

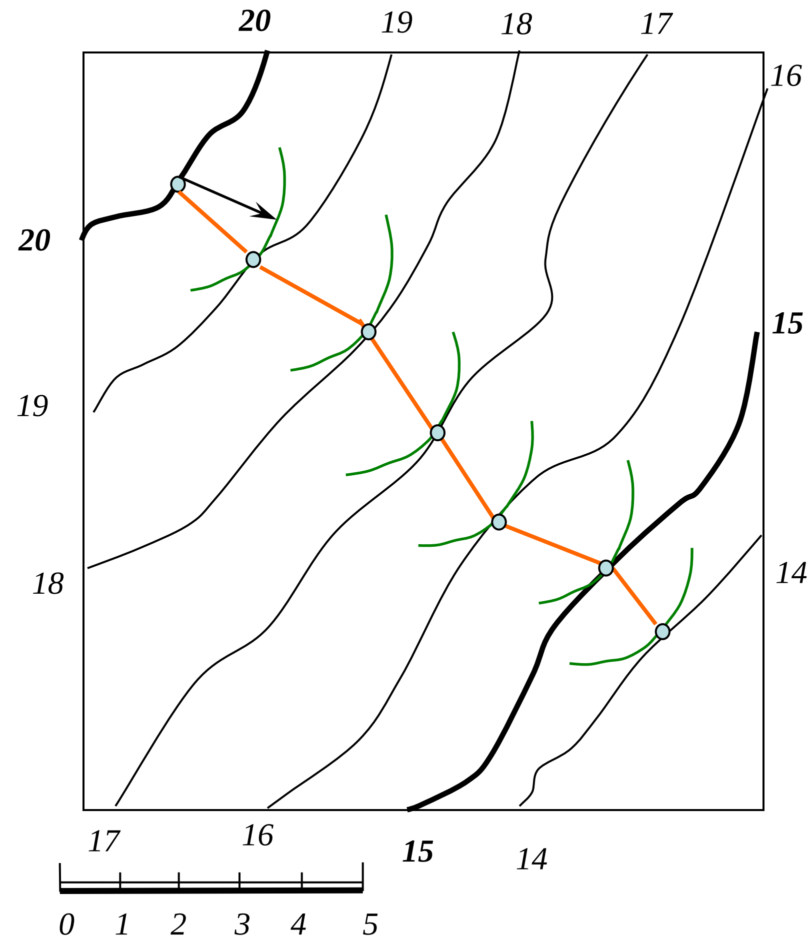


Рис. 8.4

Линия лежит на топографической поверхности, если все ее точки принадлежат этой поверхности.

8.2. Пересечение поверхностей на плане

При пересечении топографической поверхности вертикальной плоскостью получается линия, которая называется **профилем**.

Порядок построения профиля поверхности:

1. На плане фиксируются точки пересечения следа секущей плоскости *A* - *A* с горизонталями поверхности (рис. 8.5).

2. Из этих точек (в масштабе чертежа) восставляются перпендикуляры, равные высотным отметкам соответствующих горизонталей поверхности. Сечение может быть выполнено и на отдельном месте чертежа.

3. Полученные точки соединяются плавной кривой линией.

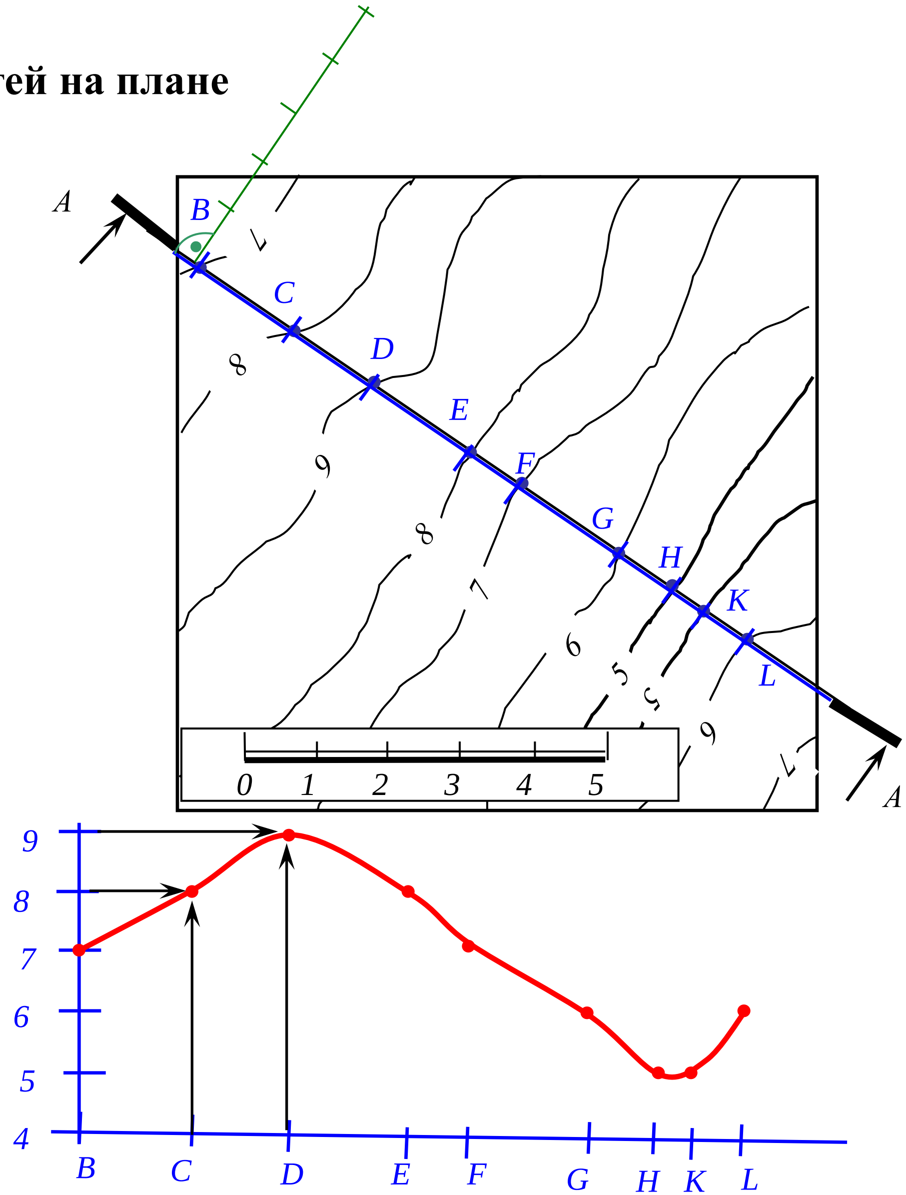


Рис. 8.5

Сечение топографической поверхности плоскостью общего положения строится по тому же принципу, что и сечение кривых поверхностей. Для этого находятся точки пересечения горизонталей поверхности и секущей плоскости с соответственно одинаковыми отметками, через которые и проводится линия сечения (рис. 8.6).

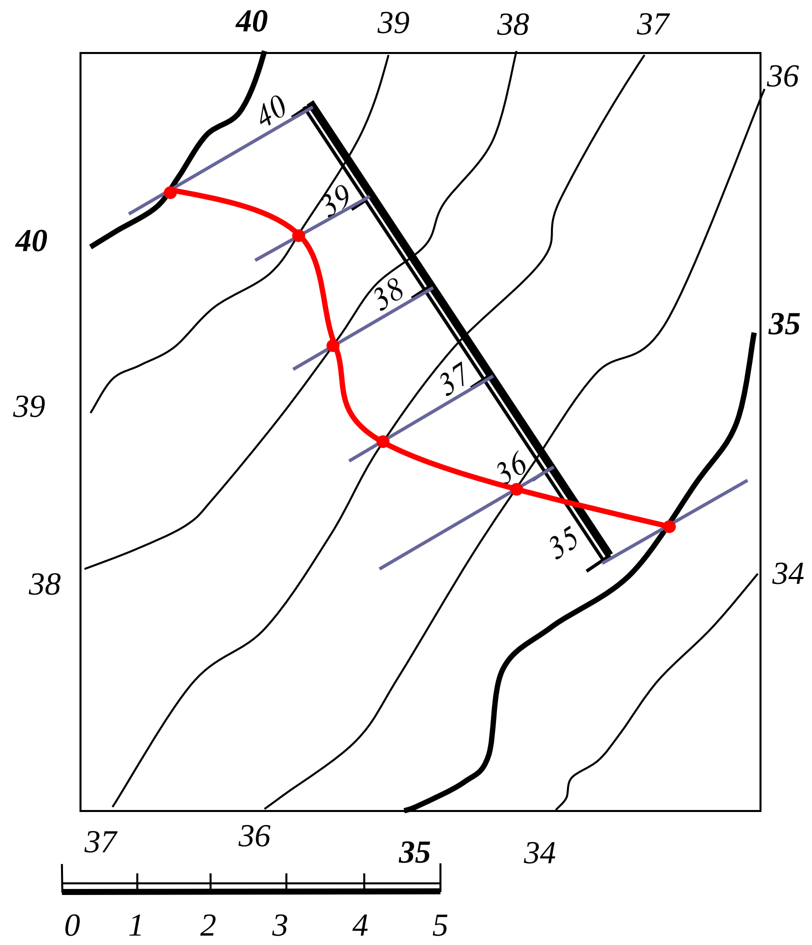


Рис. 8.6

Для определения объемов и границ земляных работ на чертеже необходимо найти линии пересечения откосов насыпей или выемок сооружений с поверхностью местности (рис. 8.7).

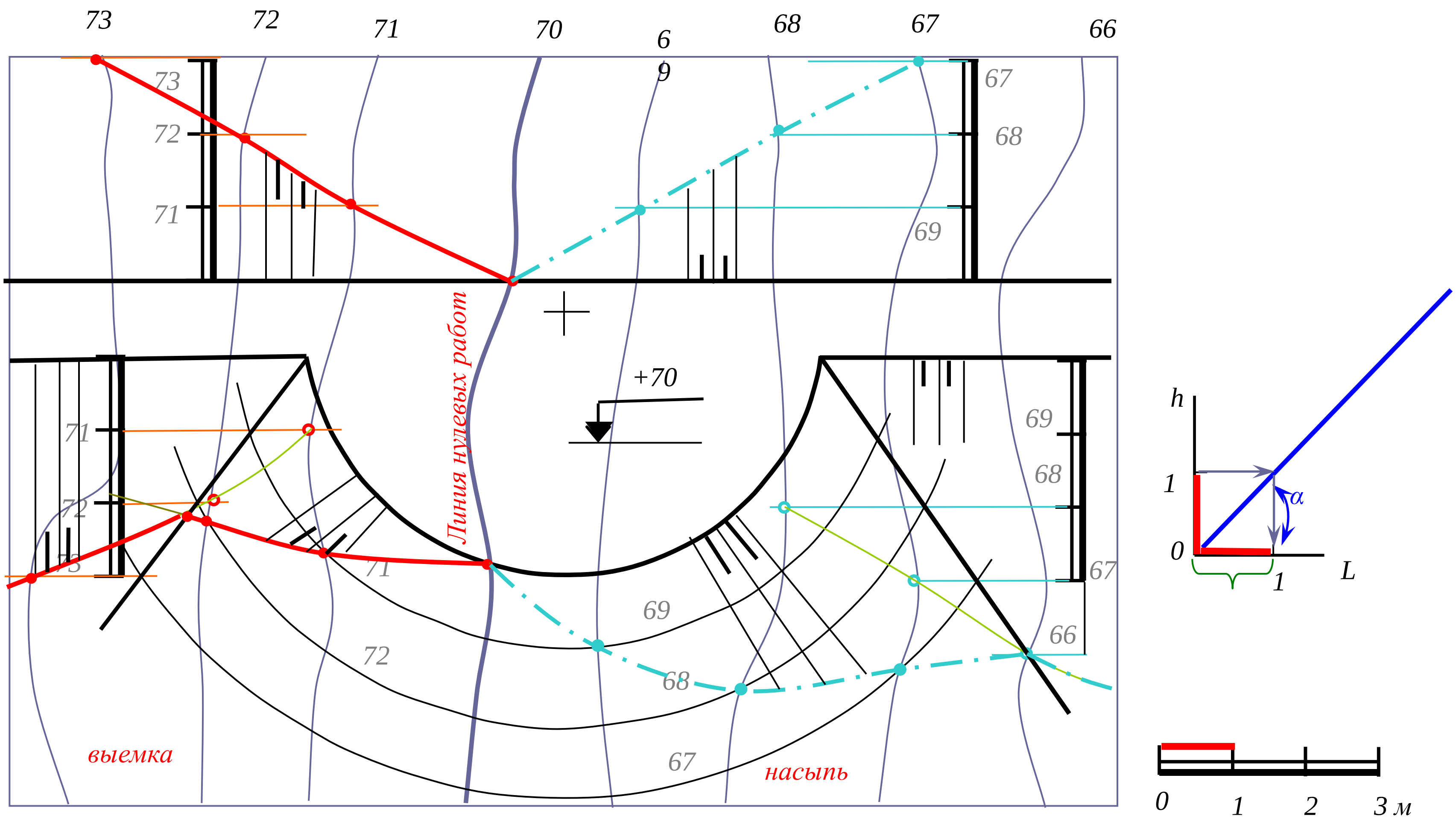


Рис. 8.7

В начало