МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Т.Ф.ГОРБАЧЕВА»
Филиал КузГТУ в г. Белово

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
________________ И.К. Костинец
«_31_»____08_____ 20_21_ г.

Подписано цифровой подписью: Долганова Жанна Александровна
DN: cn=Долганова Жанна Александровна, o=Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф.Горбачева, ou=Филиал КузГТУ в г.Белово, email=dolganovaja@kuzstu.ru, c=RU
Дата: 2023.11.21 11:12:04 +07'00'

Фонд оценочных средств по дисциплине

Математика

Направление подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»
Профиль 01 «Прикладная информатика в экономике»

Присваиваемая квалификация "Бакалавр"

Белово 2021

ФОС составил доцент, к.ф.-м.н. ________________ Р.С. Макарчук

ФОС обсужден на заседании кафедры горного дела и техносферной безопасности

Протокол № _10__ от «__15_»__06________ 2021 г.

Зав. кафедрой горного дела и техносферной безопасности _________ В.Ф. Белов

Согласовано учебно-методическим советом филиала КузГТУ в г. Белово

Протокол № ___11__ от «__22__»_06______ 2021 г.

Председатель учебно-методического совета _____________ Ж.А. Долганова

1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине "Математика", соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Освоение дисциплины направлено на формирование:
универсальных компетенций:
УК-1 - Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Результаты обучения по дисциплине определяются индикаторами достижения компетенций

Индикатор(ы) достижения:

Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи. Рассматривает возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

Результаты обучения по дисциплине:

Знает: основные понятия и теоремы математики.

Умеет: работать со справочной литературой; применять полученные знания в области математики для решения поставленных задач.

Владеет: основными техниками математических расчетов.

.

2. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине "Математика", структурированное по разделам (темам)

2.1. Паспорт фонда оценочных средств

Форма(ы) текущего контроля	Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)	Индикатор (ы) достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Уровень достижения компетенции
Опрос по контрольным вопросам и/или решение задач и/или тестирование	УК-1	Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи. Рассматривает возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.	Знает: основные понятия и теоремы математики. Умеет: работать со справочной литературой; применять полученные знания в области математики для решения поставленных задач. Владеет: основными техниками математических расчетов.	Высокий или средний
Высокий уровень достижения компетенции - компетенция сформирована частично, рекомендованные оценки: отлично, хорошо, зачтено. **Средний уровень достижения компетенции -** компетенция сформирована частично, рекомендованные оценки: хорошо, удовлетворительно, зачтено. **Низкий уровень достижения компетенции -** компетенция не сформирована частично, оценивается неудовлетворительно или не зачтено.				

2.2. Типовые контрольные задания или иные материалы

Текущий контроль успеваемости и промежуточная аттестация обучающихся могут проводиться как при непосредственном взаимодействии педагогического работника с обучающимися, так и с использованием ресурсов ЭИОС филиала КузГТУ, в том числе синхронного и (или) асинхронного взаимодействия посредством сети «Интернет».

Текущий контроль по темам дисциплины заключается в:

опросе по контрольным вопросам и/или решении задач и/или тестировании

2.3. Оценочные средства при текущем контроле

Опрос по контрольным вопросам

Проводится по результатам ответа на три вопроса.

Критерии оценивания:

100 баллов - при правильном и полном ответе на все три вопроса, приведены примеры в соответствии с теоретическим материалом, обучающийся владеет техникой применения полученных навыков расчетов;

99...90 баллов - при правильном ответе на все три вопроса, но в одном из примеров имеется неточность, в целом обучающийся владеет техникой применения полученных навыков расчетов и полученных теоретических знаний;

89...80 баллов - при правильном ответе на два вопроса, если приведены примеры применения теоретического материала, сформированы умения применения полученных знаний;

79...60 баллов - при правильном ответе на один-два вопрос и приведены примеры (пример) применения теоретического материала; или при правильном ответе на все теоретические вопросы, но не сформулирован пример применения теоретического материала; сформированы теоретические знания, в целом имеются теоретические навыки применения знаний, но нет комплексного владения применения теоретических знаний;

59-30 баллов - при правильном ответе на один вопрос и приведен пример применения теоретического материала к одному вопросу, при владении фрагментарным, но не структурированным знанием;

29...0 баллов - при неправильных ответах на все вопросы и не приведены примеры применения теоретического материала ни к одному вопросу, при отсутствии теоретических знаний, неумении применять их.

<table>
<tr><td>количество баллов</td><td>0-29</td><td>30-59</td><td>60-79</td><td>80-99</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="2">шкала оценивания</td><td colspan="2">Не зачтено</td><td colspan="3">Зачтено</td></tr>
<tr><td colspan="2">Неудовлетворительно</td><td>удовл</td><td>хорошо</td><td>отлично</td></tr>
</table>

Примерный перечень вопросов для проведения опроса:

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Группы, кольца, поля. Изоморфизм групп.
2. Определение линейного пространства. Теорема о линейно зависимых и независимых системах векторов.
3. Теорема о линейной зависимости системы из k векторов, каждый из которых является линейной комбинацией некоторой системы из m векторов (k>m).
4. Базис линейного пространства. Теорема об инвариантности числа элементов базиса. Теорема о количестве элементов линейно независимой системы .
5. Координаты вектора. Теоремы о координатах вектора .
6. Определение и свойства скалярного произведения. Угол между векторами.
7. Пространства R^n и R_n.
8. Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов.

9. Матрицы: определение; сложение и умножение на число. Размерность и базис пространства матриц одного размера.
10. Перемножение матриц. Свойства.
11. Обратные и транспонированные матрицы.
12. Перемножение матриц, разбитых на блоки.
13. Ортогональные матрицы.
14. Определитель матрицы: определение, разложение по первому столбцу. Определитель верхней и нижней треугольных матриц. Связь определителей A и A^T .
15. Перестановки.
16. Теорема о выражении определителя через сумму слагаемых, в каждом из которых содержится произведение элементов матрицы (по одному из каждой строки и каждого столбца), снабженных знаком по некоторому правилу .
17. Свойства определителей: перестановка строк (столбцов), разложение по произвольному столбцу (строке), сумма произведений элементов i-ой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов j-ой строки.
18. Линейность определителя по элементам строки или столбца. Определитель матрицы, строки (столбцы) которой являются линейно зависимыми. Определитель матрицы, к некоторой строке которой прибавлена другая, умноженная на число.
19. Определитель блочной матрицы. Определитель произведения матриц.
20. Обратная матрица. Следствия о треугольных матрицах.
21. Матрицы элементарных преобразований.
22. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы несовместны или имеют единственное решение.
23. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы имеют бесконечно много решений. Структура общего решения систем.
24. Однородные системы линейных уравнений.
25. Теорема Крамера.
26. Горизонтальный и вертикальный ранги матрицы. Ранг по минорам. Их совпадение для трапециевидной матрицы.
27. Неизменность ранга матрицы при умножении ее на невырожденную. Теорема о равенстве рангов для произвольной матрицы.
28. Теорема Кронекера-Капелли.
29. Собственные числа и векторы матрицы. Совпадение характеристических многочленов у подобных матриц. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.
30. Связь между линейной зависимостью системы векторов и соответствующей системы координатных столбцов. Связь координатных столбцов одного вектора в разных базисах.
31. Линейное отображение линейных пространств. Матрица отображения в некоторых базисах. Ее использование для вычисления образа вектора . Связь матриц отображения в разных базисах.
32. Ядро и образ отображения. Ранг отображения, его связь с рангом матрицы отображения.
33. Собственные числа и собственные векторы оператора. Матрица оператора в базисе из собственных векторов.
34. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам оператора. Собственные подпространства, их размерность. Следствия.
35. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
36. Теорема о собственных числах и собственных векторах вещественной симметричной матрицы.
37. Теорема об ортогональном подобии вещественной симметричной матрицы некоторой диагональной матрице. Следствия.
38. Определение билинейной и квадратичной форм. Матрица билинейной формы в некотором

базисе, ее использование для вычисления билинейной формы. Связь матриц одной билинейной формы в разных базисах.

39. Теорема о существовании ортогонального преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Практический метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса (метод собственных векторов). Построение кривой
$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 4 = 0.$$
40. Теорема о необходимом и достаточном условии положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
41. Теорема о существовании треугольного преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Критерий Сильвестра.

Доказательства, выводы

1. Теорема о линейно зависимых и независимых системах векторов.
2. Теорема о линейной зависимости системы из k векторов, каждый из которых является линейной комбинацией некоторой системы из m векторов (k>m).
3. Базис линейного пространства. Теорема об инвариантности числа элементов базиса. Теорема о количестве элементов линейно независимой системы .
4. Теоремы о координатах вектора.
5. Свойства скалярного произведения.
6. Размерность и базис пространства матриц одного размера.
7. Перемножение матриц. Свойства.
8. Перемножение матриц, разбитых на блоки.
9. Ортогональные матрицы (равносильность двух определений).
10. Определитель матрицы: определение, разложение по первому столбцу. Определитель верхней и нижней треугольных матриц. Связь определителей A и A^T.
11. Свойства перестановок.
12. Теорема о выражении определителя через сумму слагаемых, в каждом из которых содержится произведение элементов матрицы (по одному из каждой строки и каждого столбца), снабженных знаком по некоторому правилу .
13. Свойства определителей: перестановка строк (столбцов), разложение по произвольному столбцу (строке), сумма произведений элементов i-ой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов j-ой строки.
14. Линейность определителя по элементам строки или столбца. Определитель матрицы, строки (столбцы) которой являются линейно зависимыми. Определитель матрицы, к некоторой строке которой прибавлена другая, умноженная на число.
15. Определитель блочной матрицы. Определитель произведения матриц.
16. Обратная матрица. Следствия о треугольных матрицах.
17. Матрицы элементарных преобразований.
18. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы несовместны или имеют единственное решение.
19. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы имеют бесконечно много решений. Структура общего решения систем.
20. Однородные системы линейных уравнений.
21. Теорема Крамера.
22. Горизонтальный и вертикальный ранги матрицы. Ранг по минорам. Их совпадение для трапециевидной матрицы.
23. Неизменность ранга матрицы при умножении ее на невырожденную. Теорема о равенстве рангов для произвольной матрицы.
24. Теорема Кронекера-Капелли.
25. Собственные числа и векторы матрицы. Совпадение характеристических многочленов у подобных матриц. Линейная независимость собственных векторов,

соответствующих различным собственным числам.

26. Связь между линейной зависимостью системы векторов и соответствующей системы координатных столбцов. Связь координатных столбцов одного вектора в разных базисах.
27. Линейное отображение линейных пространств. Матрица отображения в некоторых базисах. Ее использование для вычисления образа вектора . Связь матриц отображения в разных базисах.
28. Ядро и образ отображения. Ранг отображения, его связь с рангом матрицы отображения.
29. Собственные числа и собственные векторы оператора. Матрица оператора в базисе из собственных векторов.
30. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам оператора. Собственные подпространства, их размерность. Следствия.
31. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
32. Теорема о собственных числах и собственных векторах вещественной симметричной матрицы.
33. Теорема об ортогональном подобии вещественной симметричной матрицы некоторой диагональной матрице. Следствия.
34. Матрица билинейной формы в некотором базисе, ее использование для вычисления билинейной формы. Связь матриц одной билинейной формы в разных базисах.
35. Теорема о существовании ортогонального преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Практический метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса (метод собственных векторов). Построение кривой
$$3x^2-2xy+3y^2+2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y+4=0 .$$
36. Теорема о необходимом и достаточном условии положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
37. Теорема о существовании треугольного преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Критерий Сильвестра.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Скалярное произведение двух векторов.
2. Векторное произведение двух векторов .
3. Смешанное произведение трех векторов .
4. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости .
5. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых .
6. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
7. Плоскость в пространстве. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки .
8. Расстояние от точки до плоскости.
9. Различные способы задания прямой линии в пространстве. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых .
10. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости .
11. Эллипс: определение, каноническое уравнение .
12. Парабола: определение, каноническое уравнение .
13. Гипербола: определение, каноническое уравнение, асимптоты.

Доказательства, выводы

1. Скалярное , векторное, смешанное произведение векторов (свойства, выражение в декартовых координатах).

2. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости .
3. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых .
4. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
5. Плоскость в пространстве. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки .
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. Различные способы задания прямой линии в пространстве. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых .
8. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости .
9. Эллипс: каноническое уравнение .
10. Парабола: каноническое уравнение .
11. Гипербола: каноническое уравнение, асимптоты .

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Предел числовой последовательности. Теорема о стабилизации знака.
2. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о сжатой последовательности.
3. Бесконечно малая последовательность. Ограниченность числовой последовательности, имеющей предел. Лемма о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей.
4. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми последовательностями. Бесконечно большие последовательности и арифметические операции.
5. Теорема о вложенных отрезках.
6. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества.
7. Число e.
8. Предел функции в точке. Равносильность двух определений предела.
9. Ограниченность функции, имеющей предел.
10. Теоремы о неравенствах и пределах.
11. Теорема об арифметических операциях и пределах.
12. Теорема о пределе суперпозиции функций.
13. Функции, имеющие бесконечные пределы, их связь с бесконечно малыми функциями. Арифметические операции над ними. Теорема о произведении бесконечно малой и ограниченной функций.
14. Односторонние пределы. Их связь с пределом функции.
15. Замена на эквивалентные при вычислении пределов. Необходимое и достаточное условия эквивалентности функций f(x) и g(x).
16. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to o} \frac{\sin x}{x}$.
17. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$. Следствия.
18. Определение функции, непрерывной в точке. Классификация точек разрыва.
19. Теорема о функциях , непрерывных в точке. Предел суперпозиции функций, одна из которых непрерывна. Следствия.
20. Теорема Кантора.
21. Первая теорема Вейерштрасса.
22. Вторая теорема Вейерштрасса.
23. Первая теорема Коши о значениях функции, непрерывной на отрезке.

24. Вторая теорема Коши о значениях функции, непрерывной на отрезке. Следствия.
25. Обратные функции. Непрерывность обратной к монотонной функции.

Доказательства, выводы

1.Теорема о стабилизации знака.

2.Теорема о предельном переходе в неравенствах.

3.Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми последовательностями.

4. Бесконечно большие последовательности и арифметические операции.

5.Теорема о вложенных отрезках.

6.Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества.

7.Число е.

8.Ограниченность функции, имеющей предел.

9.Теорема о пределе суперпозиции функций.

10.Односторонние пределы. Их связь с пределом функции.

11.Замена на эквивалентные при вычислении пределов. Необходимое и достаточное условия эквивалентности функций f(x) и g(x).

12.Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to o}\frac{\sin x}{x}$.

13.Следствия к второму замечательному пределу $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

14.Предел суперпозиции функций, одна из которых непрерывна. Следствия.

15.Первая теорема Вейерштрасса.

16.Вторая теорема Вейерштрасса.

17.Первая теорема Коши о значениях функции, непрерывной на отрезке.

18.Вторая теорема Коши о значениях функции, непрерывной на отрезке. Следствия.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Определение дифференцируемой функции. Теорема о связи производной и дифференциала функции.

2.Связь непрерывности и дифференцируемости. Геометрический смысл производной и дифференциала.

3.Производная и дифференциал суммы и произведения функций.

4.Теорема о производной сложной функции. Производная отношения двух функций.

5.Свойство инвариантности формы первого дифференциала.

6.Производная обратной функции. Производные функций $\arcsin x, \arccos x, arctgx$, $arcctgx$

7.Производные элементарных функций $a^x, x^a, \ln x, \sin x, \cos x, tgx, ctgx$.

8.Односторонние производные и их связь с производными.

9.Теорема Ферма.

10.Теорема Ролля.

11.Теорема Коши.

12.Теорема Лагранжа и следствия из нее.

13.Производные высших порядков. Примеры.

14.Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности формы у дифференциалов высших порядков.

15.Формула Лейбница.

16.Производная функции, заданной параметрически.

17.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Следствия.

18.Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.

19.Правило Лопиталя.

20.Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\beta}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\beta}{a^x}$, $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$, $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

21.Аналитические признаки поведения функции.

22.Необходимое условие существования экстремума. Первое достаточное условие существования экстремума.

23.Второе достаточное условие существования экстремума.

24.Выпуклые функции. Достаточное условие строгой выпуклости. Следствие о положении касательной

25.Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба.

26.Асимптоты. Условия существования вертикальных и наклонных асимптот к графику функции.

Доказательства, выводы

1.Теорема о связи производной и дифференциала функции.

2.Связь непрерывности и дифференцируемости. Геометрический смысл производной и дифференциала.

3.Производная и дифференциал суммы и произведения функций.

4.Теорема о производной сложной функции. Производная отношения двух функций.

5.Свойство инвариантности формы первого дифференциала.

6.Производная обратной функции. Производные функций $\arcsin x, \arccos x, arctgx$, $arcctgx$.

7.Производные элементарных функций $a^x, x^a, \ln x, \sin x, \cos x, tgx, ctgx$.

8.Односторонние производные и их связь с производными.

9.Теорема Ферма.

10.Теорема Ролля.

11.Теорема Коши.

12.Теорема Лагранжа и следствия из нее.

13.Отсутствие инвариантности формы у дифференциалов высших порядков.

14.Производная функции, заданной параметрически.

15.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Следствия.

16.Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.

17.Правило Лопиталя.

18.Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\beta}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\beta}{a^x}$, $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$, $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

19.Аналитические признаки поведения функции.

20.Необходимое условие существования экстремума. Первое достаточное условие существования экстремума.

21.Второе достаточное условие существования экстремума.

22.Выпуклые функции. Достаточное условие строгой выпуклости. Следствие о положении касательной

23.Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба.

24.Асимптоты. Условия существования вертикальных и наклонных асимптот к графику функции.

Комплексные числа, Многочлены и рациональные дроби

Определения, понятия ,формулировки теорем 1. Определение и свойства операций сложения и умножения комплексных чисел.

2.Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.
3.Свойства и неравенства для модуля комплексных чисел.
4.Свойства комплексно-сопряженных чисел.
5.Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Извлечение корня из комплексного числа.
6.Показательная функция комплексной переменной. Формула Эйлера.
7.Определение многочлена. Равенство многочленов.
8.Теорема о делении многочлена на многочлен с остатком.
9.Теорема Безу о кратных корнях многочлена.
10.Основная теорема алгебры и следствия из нее.
11.Разложение на вещественные множители многочлена с вещественными коэффициентами.
12.Разложение рациональной дроби в сумму простейших. Метод неопределенных коэффициентов разложения правильной дроби в сумму простейших.

Доказательства, выводы

1.Свойства операций сложения и умножения комплексных чисел.
2.Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.
3.Свойства и неравенства для модуля комплексных чисел.
4.Свойства комплексно-сопряженных чисел.
5.Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Извлечение корня из комплексного числа.
6.Теорема Безу о кратных корнях многочлена.
7.Следствия из основной теоремы алгебры.
Разложение на вещественные множители многочлена с вещественными коэффициентами.

Интегральное исчисление функции одной переменной

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Определение и свойства первообразной. Теорема о связи первообразных одной функции.
2.Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательствами).
3.Интегрирование с помощью замены переменной. Вычисление $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.
4.Интегрирование по частям. Вычисление $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$.
5.Интегрирование рациональных дробей..
6.Интегральные суммы Римана. Определение определенного интеграла. Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке.
7.Теорема об интегрируемости функции на более узком промежутке, о связи интегралов от f на промежутках [a,b], [a,c], [c,b].
8.Интегрируемость непрерывной функции, монотонной и ограниченной функции.
9.Действия над интегрируемыми функциями.
10.Теорема об интегрировании функции, равной нулю всюду, за исключением конечного числа точек, и функции, у которой изменены значения в конечном числе точек.
11.Свойства определенного интеграла.
12.Неравенства для определенных интегралов.
13.Теорема о среднем значении функции на промежутке. Следствия.
14.Непрерывность функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
15.Дифференцируемость функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Формула Ньютона – Лейбница.
16.Формулы интегрирования по частям и замены переменных в определенном интеграле.

17. Несобственные интегралы II рода: определение, главное значение. Критерий сходимости интеграла II рода от неотрицательной функции.

18. Первый и второй признаки сравнения. Сходимость интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$.

19. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов II рода .

20. Несобственные интегралы I рода: определение, главное значение. Признаки сходимости. Сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ (a>0).

21. Признак Дирихле. Сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ при p>0.

22. Основные формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. Гамма-функция.

23.Понятие площади. Площадь криволинейной трапеции. Вычисление площади эллипса с помощью параметризации кривой.

24. Площадь криволинейного сектора.

25. Понятие объема. Объем прямого кругового цилиндра.

26. Объем тела вращения. Объем тела с известными площадями поперечных сечений. Объем эллипсоида.

27. Длина кривой, заданной параметрически. Следствия. Вычисление длины окружности.

Доказательства, выводы

1.Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательствами).

2.Интегрирование с помощью замены переменной. Вычисление $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

3.Интегрирование по частям. Вычисление $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

4.Интегрирование рациональных дробей..

5.Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке.

6.Теорема об интегрировании функции, равной нулю всюду, за исключением конечного числа точек, и функции, у которой изменены значения в конечном числе точек.

7.Свойства определенного интеграла.

8.Неравенства для определенных интегралов.

9.Теорема о среднем значении функции на промежутке. Следствия.

10.Непрерывность функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

11.Дифференцируемость функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Формула Ньютона – Лейбница.

12.Формулы интегрирования по частям и замены переменных в определенном интеграле.

13. Первый и второй признаки сравнения для несобственного интеграла II рода. Сходимость интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$.

14. Признак Дирихле сходимости интеграла I рода. Сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ при p>0.

15. Основные формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов.

Гамма-функция.

16.Площадь криволинейной трапеции. Вычисление площади эллипса с помощью параметризации кривой.

17. Площадь криволинейного сектора.

18. Объем прямого кругового цилиндра

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Последовательность точек в R_p.Теорема о покоординатной сходимости.
2. Предел функции p переменных. Непрерывность функции p переменных. Теорема Вейерштрасса.
3. Дифференцируемость функции p переменных. Дифференцируемость суммы и произведения дифференцируемых функций.
4. Частные производные функции p переменных. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Пример функции, которая имеет частные производные в точке A, но не дифференцируема в этой точке.
5. Дифференцируемость функции в случае существования и непрерывности частных производных.
6. Производная сложной функции. Частные производные сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
7. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
8. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности формы у дифференциалов порядка выше первого.
9. Формула Тейлора функции p переменных.
10. Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции одной переменной. Вычисление первой и второй производных функции y(x), заданной неявно уравнением
$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\,\frac{y}{x}.$$
11. Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданных функций p переменных, заданных системой функциональных уравнений. Приемы вычисления производных . Вычисление первых и вторых производных функции z(x,y) , заданной неявно уравнением
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
12. Вычисление первых производных функций y(x), z(x), u(x), заданных неявно системой
$$\begin{cases} x+y+z+u=a \\ x^2+y^2+z^2+u^2=b^2 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=c^3 \end{cases}.$$
13. Определение точек экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования точек экстремума.
14. Определение точек условного экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования точек условного экстремума.

    Пример: найти точки условного экстремума функции $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$ при условии $x+y=0$.

Доказательства, выводы

1. Последовательность точек в R_p.Теорема о покоординатной сходимости.
2. Дифференцируемость функции p переменных. Дифференцируемость суммы и произведения дифференцируемых функций.
3. Частные производные функции p переменных. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Пример функции, которая имеет частные производные в точке A, но не дифференцируема в этой точке.
4. Дифференцируемость функции в случае существования и непрерывности частных производных.
5. Производная сложной функции. Частные производные сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
6. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
7. Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности формы у дифференциалов порядка выше первого.
8. Формула Тейлора функции p переменных.
9. Необходимые и достаточные условия существования точек экстремума.
10. Необходимые и достаточные условия существования точек условного экстремума.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Определение решения ОДУ. Эквивалентные дифференциальные уравнения. Задача Коши для ОДУ n-го порядка.
2. Общий интеграл ОДУ 1-го порядка.
3. Уравнение с разделяющимися переменными. Линейное уравнение 1-го порядка. Уравнение в полных дифференциалах.
4. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормального ДУ n-го порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (ЛДУ). Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
6. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородного ЛДУ. Теорема о свойствах ФСР.
7. Теорема о существовании ФСР однородного ЛДУ.
8. Определение общего решения ЛДУ n-го порядка. Теорема о связи ФСР и общего решения однородного ЛДУ.
9. Комплекснозначные функции действительной переменной. Лемма о комплекснозначном решении однородного ЛДУ.
10. Доказательство формулы для $L(e^{\lambda x} f(x))$, где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
11. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, если известны корни его характеристичекого многочлена.
12. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с вещественными постоянными коэффициентами, состоящей только из вещественнозначных функций.
13. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ.
14. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения решения неоднородного ЛДУ.
15. Нормальные системы дифференциальных уравнений (СДУ). Запись системы в векторной форме. Определение решения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальных систем.
16. Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений (СЛДУ). Запись в векторной форме. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Определение общего решения.

17.Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно независимых собственных векторов матрицы системы совпадает с порядком системы.

18.Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно независимых собственных векторов матрицы системы меньше порядка системы.

19.Построение вещественнозначной ФСР однородной СЛДУ в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные числа. Пример:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}.$$

20.Общее решение неоднородной СЛДУ. Метод Лагранжа нахождения решений неоднородных СЛДУ.

Доказательства, выводы

1. Общий интеграл ОДУ 1-го порядка. Необходимые и достаточные условия.
2. Уравнение с разделяющимися переменными. Линейное уравнение 1-го порядка. Уравнение в полных дифференциалах.
3. Теорема о свойствах ФСР.
4. Теорема о существовании ФСР однородного ЛДУ.
5. Теорема о связи ФСР и общего решения однородного ЛДУ.
6. Лемма о комплекснозначном решении однородного ЛДУ.
7. Доказательство формулы для $L(e^{\lambda x} f(x))$, где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
8. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, если известны корни его характеристичекого многочлена.
9. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с вещественными постоянными коэффициентами, состоящей только из вещественнозначных функций.
10. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ.
11. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения решения неоднородного ЛДУ.

12.Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно независимых собственных векторов матрицы системы совпадает с порядком системы.

13.Построение вещественнозначной ФСР однородной СЛДУ в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные числа. Пример:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}.$$

14.Общее решение неоднородной СЛДУ. Метод Лагранжа нахождения решений неоднородных СЛДУ.

Числовые и функциональные ряды

Определения, понятия ,формулировки теорем

1.Понятие числового ряда. Асимптотическая формула для частичной суммы гармонического ряда.

2.Теоремы о сходящихся рядах (возможность заключать элементы в скобки; сходимость ряда с элементами -линейными комбинациями элементов сходящихся рядов).

3.Остаток ряда. Связь между сходимостью ряда и его остатка. Необходимое условие сходимости ряда.

4.Первый и второй признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

5.Признак Даламбера.

6.Признак Коши.

7.Интегральный признак сходимости рядов. Сходимость обобщенного гармонического ряда.

8.Абсолютно сходящиеся ряды.

9. Признак Дирихле.

10. Признак Абеля. Признак сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

11.Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

12.Определение предела функциональной последовательности и суммы функционального ряда. Равномерная сходимость.

13.Признаки Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

14.Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности и суммы равномерно сходящегося ряда.

15.Теорема об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

16.Теорема о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

17.Степенные ряды. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда . Теорема о непрерывности суммы степенного ряда на концах интервала сходимости.

18.Теорема о дифференцировании и интегрировании суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Связь коэффициентов степенного ряда с производными его суммы.

19.Ряд Тейлора функции в точке. Пример: показать, что ряд Тейлора функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

в точке 0 сходится к значению $f(x)$ только при x=0.

20.Теорема о достаточных условиях сходимости ряда Тейлора некоторой функции к самой этой функции на промежутке.

21. Разложение в степенные ряды элементарных функций действительной переменной.

22. Предел последовательности с комплексными членами. Сходимость последовательностей действительных и мнимых частей.

23. Сумма ряда с комплексными членами, ее связь с суммой рядов действительных и мнимых частей. Связь сходимости и абсолютной сходимости.

24. Степенной ряд с комплексными членами, его круг сходимости.

25. Функция e^z при $z\in$C. Доказательство свойства $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

26. Функции $\cos z, \sin z$ при $z\in$C , их связь с комплексной экспонентой.

Доказательства, выводы

1. Асимптотическая формула для частичной суммы гармонического ряда.

2.Теоремы о сходящихся рядах (возможность заключать элементы в скобки; сходимость ряда с элементами -линейными комбинациями элементов сходящихся рядов).

3.Остаток ряда. Связь между сходимостью ряда и его остатка. Необходимое условие сходимости ряда.

4.Первый и второй признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

5.Признак Даламбера.

6.Признак Коши.

7.Интегральный признак сходимости рядов. Сходимость обобщенного гармонического ряда.

8.Связь между сходимостью и абсолютной сходимостью рядов.

9. Признак Дирихле.

10. Признак Абеля. Признак сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

11.Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

12.Признаки Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

13.Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности и суммы равномерно сходящегося ряда.

14.Теорема об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

15.Теорема о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

16.Степенные ряды. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда .

17.Теорема о дифференцировании и интегрировании суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Связь коэффициентов степенного ряда с производными его суммы.

18.Ряд Тейлора функции в точке. Пример: показать, что ряд Тейлора функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

в точке 0 сходится к значению $f(x)$ только при x=0.

19.Теорема о достаточных условиях сходимости ряда Тейлора некоторой функции к самой этой функции на промежутке.

20. Разложение в степенные ряды элементарных функций действительной переменной.

21. Степенной ряд с комплексными членами, его круг сходимости.

22. Функция e^z при $z\in$C. Доказательство свойства $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

23. Функции $\cos z, \sin z$ при $z\in$C , их связь с комплексной экспонентой.

Ряды Фурье

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Коэффициенты Фурье, свойство минимальности, неравенство Бесселя.

2. Определение полной системы элементов в пространстве. Связь полноты ортонормированной системы и сходимости ряда Фурье любого элемента к нему по норме пространства. Следствия : равенство Парсеваля .

3. Определение функционального пространства $L_2(\ [a,b]\ )$.

5. Пример ортонормированной системы в $L_2(\ [-\pi,\pi]\ )$.

4. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для его коэффициентов. Свойства ряда Фурье, вытекающие из полноты тригонометрической системы функций.

5. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-дифференцируемой на [-π, π] функции. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье 2π-периодической кусочно-дифференцируемой функции.

6. Тригонометрический ряд Фурье для 2l-периодических функций.

7. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.

Доказательства, выводы

1. Коэффициенты Фурье, свойство минимальности, неравенство Бесселя.

2. Определение полной системы элементов в пространстве. Связь полноты ортонормированной системы и сходимости ряда Фурье любого элемента к нему по норме пространства. Следствия : равенство Парсеваля .

3. Определение функционального пространства $L_2(\ [a,b]\ )$. Доказательство корректности определения.

4. Пример ортонормированной системы в $L_2(\ [-\pi,\pi]\ )$.

5. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для его коэффициентов. Свойства ряда Фурье, вытекающие из полноты тригонометрической системы функций.

6. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-дифференцируемой на [-π, π] функции. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье 2π-периодической кусочно-дифференцируемой функции.

7. Тригонометрический ряд Фурье для 2l-периодических функциях.

8. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.

Двойные интегралы.

Определения, понятия ,формулировки теорем

1. Определение площади плоской фигуры. Необходимое и достаточное условие измеримости плоской фигуры. Следствие.
2. Площадь кривой. Следствие.
3. Основные свойства площади.
4. Определение двойного интеграла.
5. Сведение двойного интеграла к повторному.
6. Площадь в криволинейных координатах.
7. Замена переменных в двойном интеграле.
8. Объем пространственного тела. Вычисление объема цилиндрического тела .

Доказательства, выводы

1 Необходимое и достаточное условие измеримости плоской фигуры.
2. Площадь кривой.
3. Основные свойства площади.
4. Сведение двойного интеграла к повторному.
50. Площадь в криволинейных координатах.
6. Замена переменных в двойном интеграле.

Решение задач

Здания по разделам

<u>**РАЗДЕЛ 1**</u> .Линейная алгебра.

Задание *(Вычисление определителей.)*

Вычислите определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & - \end{matrix} \right.$. **6.** $\left| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right.$. **7.** $\left| \begin{matrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{matrix} \right.$. **8.** $\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 2 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{matrix} \right.$.

Задание 2. *(Алгебра матриц, обратная матрица.)*

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Найдите: **а)** AB; **б)** AC; **в)** CA; **г)** BD; **д)** A^2.

2. Найдите матрицу X, удовлетворяющую уравнению: **а)** $CA - 3C = X$; **б)** $AC + 3X = A$.

3. При каких значениях λ матрицы D и F коммутируют, т.е. $DF = FD$?

4. Найдите матрицу, обратную: **а)** к матрице D; **б)$^{\text{O}}$** к матрице A; **в)** к матрице C.

Задание 3. *(Ранг матрицы.)*

3. Найдите ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Задание 4. *(Системы линейных уравнений.)*

1. МЕТОД КРАМЕРА.

Дана система AX=B, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Решите методом Крамера.
2. Найдите A^{-1} двумя способами.
3. Решите систему матричным методом.

2. МЕТОД ГАУССА.

Дана система AX=B, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$.

1. Решите методом Гаусса.
2. Укажите ранг A и ранг расширенной матрицы $\langle A|B \rangle$. Совместна ли система и каково количество ее решений согласно теореме Кронекера – Капелли?
3. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Какова размерность пространства решений однородной системы? Как она связана с рангом A и количеством неизвестных?

Задание 5. *(Линейные операторы).*

A – оператор проектирования на ось x-3y=0, z=0 , действующий в пространстве V_3 геометрических радиус-векторов.

1. Для произвольного вектора **x** с координатами (x,y,z) в базисе **i,j,k** найдите формулы, выражающие координаты вектора *A***x** в этом базисе.

2. Докажите линейность оператора *A*.

3. Найдите матрицу A оператора *A* в базисе **i,j,k**.

4. Найдите Im *A* , Ker *A*.

5.Найдите собственные подпространства оператора. Какие геометрические образы соответствуют собственным подпространствам оператора?

6. Если возможно, укажите ортонормированный базис i', j', k', в котором матрица оператора A' имеет диагональный вид. Выпишите A' . Сделайте проверку.

Задание 6. *(Квадратичные формы)*

1. Исследуйте квадратичные формы на знакоопределенность:

а) $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$, **б)** $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}\,x_2x_3$, **в)** $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$

2. Дана кривая второго порядка $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$**.** Приведите к каноническому виду алгебраическим способом (при помощи приведения квадратичной формы к каноническому виду). Постройте график кривой в плоскости ОХУ.

<u>РАЗДЕЛ 2</u> Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Задание 1 *(Векторная алгебра.)*

Даны четыре вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + \lambda\vec{k}$.

1. Найдите координаты вектора $\vec{e}$, если **а)** $\vec{e} = 4\vec{a} - 7\vec{b} + \vec{c}$; **б)** $\vec{e} = 15\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$.

2. Найдите косинус угла между векторами: **а)** $\vec{a}$ и $\vec{b}$; **б)** $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

3. Найдите длину вектора: **а)** $\vec{b} - \vec{c}$; **б)** $\vec{b} + \vec{c}$.

4. Найдите проекцию:

а) вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$;

б) вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{c}$.

Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах:

а) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; **б)** $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

6. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах:

а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; б) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ (при $\lambda = 3$).

7. При каком значении λ будут компланарными векторы: а) $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$; б) $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$

Задание 2 *(Векторная алгебра)*

. Параллелепипед построен на векторах $\vec{AB} = 3\vec{a} - \vec{в}$, $\vec{AC} = \vec{a} - 2\vec{в}$, $\vec{AД} = 2\vec{a} + \vec{в} - 3\vec{c}$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{в}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = 1$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\frac{\pi}{3}$, вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$. Найдите длину одной из его высот.

Задание 3. *(Прямая на плоскости.)*

Даны координаты трёх вершин треугольника на плоскости xOy: **а)** $A(-6; -4)$, $B(-10; -1)$, $C(6; 1)$; **б)** $A(12; 0)$, $B(18; 8)$, $C(0; 5)$. Требуется:

1. Вычислить длину стороны AB;

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

3. Составить уравнение высоты, проведённой из вершины C.

4. Найти расстояние от вершины B до стороны AC. Найти угол A.

Задание 4. (Прямая на плоскости.)

1.На прямой $2x + y + 11 = 0$ найдите точку, равноудалённую от двух данных точек $A(1; 1)$ $B(3; 0)$.

2.Найдите координаты точки, симметричной точке $(2; -4)$ относительно прямой $4x + 3y + 1 = 0$.

3.Вычислите координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x - y + 4 = 0$ и $2x - y + 10 = 0$, и уравнение одной из его диагоналей $x + y + 2 = 0$.

4.Даны уравнения двух сторон треугольника $4x - 5y + 9 = 0$ и $x + 4y - 3 = 0$. Найдите уравнение

третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке $(3; 1)$.

5. . Вычислите площадь ромба, зная одну из его вершин $A(0,-1)$, точку пересечения диагоналей $M(4,4)$, и точку $P(2,0)$ на стороне AB.

Задание 5. (*Линии второго порядка.)*

1. Приведите уравнения линий к каноническому виду и постройте линии, определяемые этими уравнениями.

а) $x^2 + 4x + 4y^2 - 5 = 0$. **б).** $4x^2 + 4y^2 + 8y = 0$. **в).** $x^2 + 8x - 4y^2 = 9$.

2. Дана кривая второго порядка $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.

Приведите к каноническому виду геометрическим способом (при помощи поворота осей). Постройте график кривой в плоскости ОХУ

Задание 6. *(Прямая и плоскость.)*

Задачи 1 – 9. Даны координаты четырёх точек в пространстве **а)** $A_1(1; 1; 3)$, $A_2(3; 1; 5)$, $A_3(2; 2; 1)$, $A_4(5; -2; 3)$; **б)** $A_1(4; 1; 6)$, $A_2(1; 1; 3)$, $A_3(5; 2; 3)$, $A_4(2; 2; 1)$. Требуется:

1. Составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки A_1, A_2, A_3.

2. Составить канонические уравнения прямой L_1, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости P

3.Составить уравнение плоскости P_2, проходящей через точку A_4 параллельно плоскости P

4.Составить уравнение прямой L_2, проходящей через точки A_1 и A_4.

Найти угол между прямой L_2 и плоскостью P_2.

6. Составить уравнение плоскости P_3, проходящей через прямую L_2 перпендикулярно плоскости P

7. Найти расстояние от точки A_3 до плоскости P_3.

8. Найти координаты точки пересечения прямой L_2 и плоскости P_2.

9. Найти расстояние от точки A_2 до прямой L_2.

10.Прямая L задана общими уравнениями: **а)** $\begin{cases} 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$ Напишите канонические уравнения прямой L.

11. Из всех прямых, пересекающих две прямые $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, найдите ту, которая параллельна прямой $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$**.**

Задание 7. Постройте поверхности, заданные уравнениями:

1) $-x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

2) $2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0$

3) $x^2 + z^2 + 2y - 1 = 0$

РАЗДЕЛ 3. Введение в анализ.

Задание 1 *(Нахождение пределов последовательностей)*

Найдите пределы последовательностей:

1.а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^8 - 3n^5 + 2} - \sqrt[3]{10n^{11} + 6n^8 - n})(\sqrt[3]{n^4 - n - 1} - \sqrt[3]{n^4 + 3n^2 + 2})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\cos n - 2}{\sqrt[3]{5n^6 - n} + 3n^2}$ **;** **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10}{n} - \frac{1}{(1.2)^n}}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n - \lg(n^2+1)}{\log_2(4^n + 2)}$ **.**

Задание 2 *(Построение графиков простейших элементарных функций.)*

Постройте графики функций, укажите область определения и множество значений функций:

1.а) У $y = \ln(x + 4)$; **б)** $y = 1 + e^{2x}$; **в)** $y = -\dfrac{4}{x}$; **г)** $y = \sqrt{x+2}$; д) $y = x^3$.

.2. а) $y = |x + 1|$;**б)** $y = |\ln x|$; **в)** $y = \ln|x + 5|$.

Задание 3 *(Нахождение пределов без применения правила Лопиталя.)*

Найдите пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^2+1}{2x^5+3x^3-x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$. **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

2.а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-3x}-\sqrt[4]{16-3x}}{7x}$. **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 4x}{x\sin 8x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin 2x}}{\mathrm{tg}\, x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln(x+3)\right]$; **г)** $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m,n – натуральные числа); **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg(\frac{\pi}{4}+ax)}{\sin bx}$; **г)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (a,b – положительные числа); **е)** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$; **ж)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}}$ **з)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{arctg(1+x)-arctg(1-x)}$; **и)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-arctg\,\dfrac{x}{x+1}\right)$; **к)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$; **л)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; **м)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

Задание 3. *(Односторонние пределы)*

1. Найдите пределы функций при $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$. Сделайте схематический чертёж графика функции.

а) $y = 2 + 4^{\frac{1}{x-3}}$, $a = 3$; **б)** $y = 1 + 8^{\frac{1}{x-2}}$, $a = 2$; **в)** $y = 1 - 3^{\frac{1}{x-4}}$, $a = 4$.

2. Функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найдите точки разрыва функции, если они существуют. Сделайте чертёж.

а) $y=\begin{cases}-x/3, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ x-\pi/2, & x>\pi/2.\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x\le \pi/2;\\ x-\pi/2, & x>\pi/2.\end{cases}$ **в)** $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 2;\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

3. Найдите точки разрыва функции и определите характер разрыва.

а) $y=\dfrac{12x+6}{x-1}$; **б)** $y=\dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)}$; **в)** $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$.

<u>РАЗДЕЛ 4.</u> Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задание 1 Найдите производные $\frac{dy}{dx}$ заданных функций.

1). $y = ctg\,(3x^2 + 2\cos x)$; **2).** $y = e^{x^2 - 3\arcsin x}$; **3).** $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$; **4)** . $y = \frac{1 + \mathrm{tg}3x}{1 - \mathrm{tg}3x}$;

5). $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; **6).** $y = x\arcsin\frac{2x+1}{3}$; **7)** $y = (\cos x)^{2x+1}$;

8) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

9). $y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$; **10).** $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$;

11). $y = \sin^3 2x$;

12). $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; **13).** $y = \frac{2x+9}{(x^2-1)^2}$; **14)** $y = (\mathrm{arctg}x)^{(1/2)\ln\mathrm{arctg}x}$;

15. $y = x^{tgx^{arctgx}}$.

Задание 2. Найдите производные второго порядка от заданных функций.

1). $y = 3\sqrt{2x+1} + 6x + 1$.; **2).** $y = x^2\ln x$. **3).** $y = \mathrm{arctg}\,x^2$;

4). $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. **5)** $y = xe^{1/x}$ **;** **6).** $y = \ln\mathrm{ctg}\,4x$ **;**

Задание 3. *(Производные от функций, заданных параметрически.)*

А) Найдите производные $\frac{dy}{dx}$ заданных функций.

1). $x = \frac{3t^2+1}{3t^3}, \quad y = \sin(\frac{t^3}{3} + t)$

2) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$ **3).** $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ **4).** $\begin{cases} x = t + \frac{\sin 2}{2} \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

Б). Найдите производные второго порядка от функций, заданных параметрически.

1). $\begin{cases} x = 1 + \ln\cos t, \\ y = 1 - \ln\sin t. \end{cases}$ **2).** $\begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 + 8t - 1. \end{cases}$ **3).** $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1 \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

Задание 4. *(Дифференциал функции.)*

Найдите дифференциал функции

1). $y = 4\sqrt{7x+6}$. **2).** $y = (x^2 + 1)^3$. **3).** $y = \ln(5x + 1)$. **4).** $y = e^{3x}$

Вычислите приближённо, заменяя приращение функции её дифференциалом

5) ln 1,01; **6)** $e^{0,2}$.

7). Выразите второй дифференциал d^2y функции $y(x) = arcctg\sqrt{u^2 + v}$ через дифференциалы функций *u(x)* и *v(x)*

Задание 5. *(Формула Тейлора)*

Напишите разложение по целым неотрицательным степеням переменной $\boldsymbol{x}$ до членов указанного порядка включительно следующих функций

1). ***Ln (cos x)*** до члена с x^6; **2).** $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

Вычислите пределы, используя формулу Тейлора

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$; **2).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{6}x^3}{x-thx}$

Задание 6. *(Правило Лопиталя)*

Вычислите пределы, используя правило Лопиталя

1). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{arctgx}{tgx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **2).** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

Задание 7.

1). Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{1-4x}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

2). Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\operatorname{arctg} x$ в точке с абсциссой $x_0=\sqrt{3}$.

3). Напишите уравнение нормали к графику функции $y=2^x$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

1). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^3+8}{x^5-x+20}$; **2).** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; **3).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; **4).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

Задание 8. *(Экстремумы функций)*

Задачи 1-4. Нахождение экстремумов функций

1). Исследовать на экстремум функцию $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

2). Исследовать на экстремум функцию $y=x^3-4x^2$.

3). Найдите точки локального минимума функции $y=(x-5)e^x$.

4). Найдите точки локального максимума функции $y=x^3-4x^2$.

Задачи 5 –7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

5) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+11}$; $[-3; 7]$.; **6).** $f(x)=\dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5; 5]$.; **7).** $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x$; $[-2\pi; -3\pi/2]$;.

Задачи 8 – 9. Текстовые задачи на отыскание наибольшего или наименьшего значения заданной величины

8). Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объёма V, причём стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление на бака, равна p_1 рублей, а стоимость квадратного метра материала идущего на стенки, равна p_2 рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материалы будут наименьшими?

9). Из полосы жести шириной 11 *см* требуется сделать открытый сверху жёлоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно жёлоба должно иметь ширину 7 *см*. Какова должна быть ширина жёлоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

Задание 9. *(Построение графиков функций.)*

Постройте графики функций::

1). $y=-\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$; **2).** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; **3)-** $y=\dfrac{e^x}{x}$; **4).** $y=x-\ln x$.

Проведите полное исследование и постройте график кривой, заданной параметрически

5). $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$; **6).** $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+1}{t+2} \end{cases}$

<u>РАЗДЕЛ 5</u> Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби

Задание 1. Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найдите: 1) $\mathrm{Im}(z_1-3z_2)$; 2) $\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; 3) $\arg z_1$, $\arg z_2$; 4) $|z_1|$, $|z_2|$.

а) $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}-3i$; **б)** $z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;

в) $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$.

Задание 2. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 и натуральное число n.

Найдите: 1) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$; 2) $z_1^n z_2$; 3) $\mathrm{Im}(z_1^n z_2)$.

а) $z_1=1+i$, $z_2=-\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$, $n=1$

б) $z_1=1-i$, $z_2=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$, $n=1$

в) $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$, $n=7$.

Задание 3. Выпишите в тригонометрической форме и изобразите на комплексной плоскости

1). $\sqrt[6]{-3-3\sqrt{3}i}$.

Задание 4. Решите уравнения и изобразите решения на чертеже.

а) $z^3+8=0$; **б)** $z^3-8=0$; **в)** $z^4+i=0$.

г) $x^2+4=0$; **д)** $x^2+4x+8=0$; **е)** $x^2-2x+4=0$.

Задание 5. (*Многочлены.)*

5.1. Найдите остаток от деления многочлена $P(z)$ на двучлен $z-z_0$.

а) $P(z)=z^3-2z^2+3z-5$, $z_0=2+i$;

б) $P(z)=z^{44}+z^{33}+z^{22}+z^{11}+1$, $z_0=i$;

в) $P(z)=z^3+z^2+4$, $z_0=-1+i$.

5.2. Разложите многочлен 1) на вещественные множители; 2) на линейные множители.

а) $P(z)=z^4+16$;

б) $P(z)=z^4+z^3+2z-4$;

в) $P(z) = z^3 + 8.$

5.3. Составьте приведённый многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами по его корням.

а) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_{3,4} = 1 \pm i;$

б) $z_1 = -1,\ z_{2,3} = 0,\ z_{4,5} = 1 \pm i;$

в) $z_1 = -1,\ z_2 = 2,\ z_{3,4} = 5 \pm i.$

Задание 6. (*Рациональные дроби.*)

1.Разложите на сумму простых дробей следующие рациональные дроби:

а) $\dfrac{x^2+9x-11}{(x+1)(x-3)^2}$; **б)** $\dfrac{3}{x^2-x^5}$; **в)** $\dfrac{3x}{(x^2-x+1)(x+1)}$ **г)** $\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

2. Выделите целую часть неправильной рациональной дроби:

а) $\dfrac{x^3}{x-2}$; **б)** $\dfrac{2x^3+x+1}{x+1}$; **в)** $\dfrac{x^5}{x^3+1}$

<u>РАЗДЕЛ 6.</u> Интегральное исчисление функции одной переменной

Задание 1 *(Использование таблицы интегралов)*

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{4+(3x+1)^2}$. **2.** $\displaystyle\int e^{7x-1}dx$. **3.** $\displaystyle\int\sin(13x+4)\,dx$.

4 . $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2(5x+3)}$. **5 .** $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+1}$. **6.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$. **7.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-(3x+5)^2}}$.

Задание 2.(*Подведение под знак дифференциала. (замена переменной*))

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. **2.** $\displaystyle\int\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$. **3.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$.

4. $\displaystyle\int\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. **5.** $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}dx$. **6.** $\displaystyle\int\frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

Задание 3. *(Интегрирование по частям.)*

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$. **2.** $\displaystyle\int(5x^2-2x+1)e^x dx$. **3.** $\displaystyle\int e^{3x}\sin x\,dx$.

4. $\displaystyle\int(x^2-1)e^{-x}dx$. **5.** $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx$. **6.** $\displaystyle\int x^2e^{-x/2}dx$.

Задание 4. *(Интегрирование рациональных и иррациональных выражений, содержащих квадратный трёхчлен.)*

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$. **2.** $\displaystyle\int\frac{8x-11}{\sqrt{5x+2x-x^2}}dx$. **3.** $\displaystyle\int\frac{(3-x)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

.4. $\displaystyle\int\frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$. **5.** $\displaystyle\int\frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{3x^2-6x-1}}$. **6.** $\displaystyle\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+5}$.

Задание 5. *(Интегрирование рациональных дробей.)*

Найдите интегралы:

1. $\int \frac{x^3+4x^2+5x+3}{x^2+4x\ +5}dx$ **2.** $\int \frac{(7x^2-1)\,dx}{(x^2+5)(x^2-1)}$ **.** **3.** $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$ **.**

4. $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4-5x^2+4}dx$ **.** **4.** $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx$. **6.** $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1}dx$.

Задание 6. *(Интегрирование иррациональных выражений.)*
Найдите интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$. **2.** . $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. **3.** $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt{x}+4\right)}dx$.

4. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^{7/2}}}dx$. **5.** $\int \sqrt{\frac{3+2x}{x-2}}dx$. **6.** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$.

Задание 7. *(Интегрирование тригонометрических функций.)*
Найдите интегралы:

1. $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$. **2.** $\int \frac{dx}{3+5\cos 2x}$. **3.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

.4. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$. 5. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

Задание 8. *(Интегралы от функций вида* $f(e^x)$)
Найдите интегралы:

1. $\int \frac{e^x dx}{(2+e^{-x}+e^x)^2}$. **2.** $\int \frac{e^x-1}{3e^{2x}+1}dx$. **3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

4. $\int \frac{(e^{x/2}+2)e^{x/2}}{e^x+4e^{x/2}+1}dx$. 5. $\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$.

Задание 9.
Используя различные методы, найдите интегралы

1. $\int x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$; **2.** $\int \frac{(x^3-5x)}{\sqrt{10-x^2}\sqrt{2x^2+1}}dx$; **3.** $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$.

Задание 10. *(Вычисление определённых интегралов.)*
Найдите интегралы:

1. $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ **.** **2.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}dx}{e^x-e^{-x}}$ **.** **3.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ **.**

4. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ **.5.** $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$ **.** **6.** $\int_0^2 x\ln(x+3)\,dx$ **.**

7. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$ **.** **8.** $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ **.** **9.** $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ **.** **10.** $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$ **.**

. **Задание 11.** *(Несобственные интегралы.)*
Исследуйте сходимость интегралов.

1 $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. 2. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}}dx$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^3+4x^2+x}dx$ 5. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. 6. $\int_1^3 \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}dx$

7. $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 9. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

10. $\int_0^{+\infty} xe^x dx$. 11. $\int_0^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$. 12. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

13.. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+4x^2}}dx$. 14. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x+1))^3}$. 15. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

16. На плоскости параметров (*p,g*) изобразите множества сходимости и расходимости интеграла $\int_0^1 x^p(1-x)^g \frac{\sqrt[5]{3+\sqrt[7]{x^2}}}{x^3\sqrt{x}}dx$.

17. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость интеграл
$$\int_5^{+\infty} \frac{3x+2}{x^2-3x+6}\sin x\,dx.$$

Задание 12.*(Нахождение площадей, длин дуг плоских кривых, обьемов тел вращения)*

1. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = \sin x + 2$, $y_2 = -1$, $x = 0$, $x = \pi$.

2. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ ($0 \le x \le 2$).

3. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y_2 = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4$ и прямой $x - y + 8 = 0$.

5. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$, осью Ox и прямыми $x = \pm 1$.

6. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x+1)^3$ от $x = 0$ до $x = 3$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ и осью Ox.

8. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox.

9.. Найдите длину астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 - \cos\varphi)$ и окружностью $r = 4$.

11. Найдите длину первого витка архимедовой спирали $r = 5\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

12. Постройте кривую $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$ и найдите объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной петлей кривой, вокруг оси ОУ.

<u>РАЗДЕЛ 7.</u> Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Задание 1 . *(Нахождение частных производных)*

А) **а)** Дана функция $z = \sin^2(3x - 4y)$. Вычислите $4\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}$.

б) Дана функция $z = \frac{xy}{x+y}$. Вычислите $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$.

в) Дана функция $z = \ln(x^2 - y^2)$. Вычислите $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.

Б). Найдите значения производных заданных функций в указанных точках.

а) Для функции $z = 3x^2 e^{-y^2}$ найдите значение $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $(1, 0)$.

б) Для функции $z = (x^2 + 4x)\, e^{2y}$ найдите значение $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ в точке $(1, 0)$.

в) Для функции $u = 2x + 4y^2 + xyz$ найдите значение $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ в точке $(1, 1, 1)$.

В) Частные производные сложных и неявных функций.

Найдите значения производных заданных функций в точке $u = 0$, $v = 0$.

а) Найдите значение $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ функции $z = 2e^{x/y^2}$, $x = 3u + v$, $y = 1 + \sin uv$.

б) Найдите значение $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ функции $z = 2e^{x/y^2}$, $x = 3u + v$, $y = 1 + \sin uv$.

в) Найдите значение $\frac{\partial z}{\partial u}$ функции $z = 2x^2 - \ln(x + 2y) + y^2$, $x = u - v + 1$, $y = u + v$.

г) Найдите $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = \frac{\varphi(x^2 + 3y) - \psi(x - 3y^2)}{x}$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - дважды дифференцируемые функции.

Г) Найдите указанные производные функций заданных неявно:

а). $x^3 + 3x - 2xy + xyz - z^2 = 4$, $z = z(x, y)$. Найдите z''_{xx}, z''_{xy}

б). $\sin(x^2 + y) - x = y$, $y = y(x)$. Найдите $y'(x)$, $y''(x)$.

в). $15x^3 + 16y^2 - 16xy + z + z^2 = 1$, $z = z(x, y)$. Найдите z''_{x^2}, z''_{y^2}, z''_{xy}

г). Уравнение $xzg(z) = \ln z + y$ определяет в окрестности точки x=2,y=2 функцию z(x,y) такую, что z(2,2)=1 (здесь g(z) –дважды дифференцируемая функция; g(1)=1, $g'(1) = 0$, $g''(1) = 4$). Вычислите в точке x=2,y=2 все частные производные функции z(x,y) до второго порядка включительно. Чему равно $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

Д) Найдите значения производных функций, заданных системами уравнений.

а). Пусть функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ заданы системой уравнений

$$3x^2 - 2xy + vy^2 = 0$$

$6x+5y-u^2+2v=0$. Найдите u_x', u_y', v_x', v_y'.

б). Пусть функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ заданы системой уравнений

$$xy-uv^2+xv=4$$
$$x^2-u^3+5y=0$$

. Найдите их вторые дифференциалы.

в). Пусть функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ заданы системой уравнений

$$x^2+3y+2u-3v=1$$

$x^3-y^2+6u-7v=0$. Найдите u_{x^2}'', u_{y^2}'', v_{x^2}'', v_{y^2}''.

Задание 2. *(Формула Тейлора)*

Выведите приближенную формулу с точностью до членов второго порядка для функции $f(x,y,z)=\dfrac{1}{2x+3y+z^2}$ в окрестности точки $A(0,1,-1)$.

Задание 3. *(Экстремумы ФНП. Наиб. и наим.е значения (sup и inf) функций нескольких переменных в замкнутой области.)*

1. Найдите экстремумы функций.

а) $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$; **б)** $z=4x^2+4xy-y^2-8y$; **в)** $z=x^2+2xy+4x-y^2$.

2. Найдите экстремумы функций : а) $u=x^2+2y^2+z^2-2x+4y-6z+6$.

б) $u=2x^2+2y^2+3z^2-2x+4y-6z+6$, **в)** $u=2x^2+2y^2+3z^2-2x+4xy-6z+6$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций в заданной области.

а) $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$ в прямоугольнике $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$;

б) $z=4x^2+4xy-y^2-8y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y=2x$, $y=2$, $x=0$;

в) $z=x^2+2xy+4x-y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y+2=0$.

Задание 4. *(Условный экстремум.)*

1 . Найдите условные экстремумы функции $z=(x,y)$:

а) $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$, если $x+2y=1$; **б)** $z=4x^2+4xy-y^2-8y$, если $2x=y$;

в) $z=x^2+2xy+4x-y^2$, если $x-y=2$.

г) Найдите расстояние между кривой $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$ и прямой $9x-7y+16=0$.

2. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объёма V, причём стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна p_1 рублей, а стоимость квадратного метра материала идущего на стенки, равна p_2 рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материалы будут наименьшими?

Задание 4. *(производная по направлению, градиент)*

1. Найти производную скалярного поля $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

2 Найти производную скалярного поля $u=x+\ln(z^2+y^2)$ в точке $M(2,1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

3 Найти градиент скалярного поля $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ в точке $M(-1,2,1)$.

4 Найти градиент скалярного поля $u=x+\ln(z^2+y^2)$ в точке $M(-2,1,-1)$

<u>РАЗДЕЛ 8.</u> Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задание 1. *(Дифференциальные уравнения I порядка)*

Найдите решения уравнений

1. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$
2. $y=xy'-x^2(y')^3$
3. $(y'')^2-2y'y'''+1=0$

Задание 2. *(Дифференциальные уравнения 1-го порядка.)*

Задачи 1– 5. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $(x+1)\,y\,dx+x\,(y-1)\,dy=0;\quad y\,(1)=2.$

2. $(\sqrt{xy}-x)\,dy+y\,dx=0$; $y(1)=$

3. $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$; $y(0)=0.$

4. $y'+4xy=2xe^{-x^2}y^{1/2}$; $y(0)=$

5. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$; $y(1)=$

Задание 3. *(Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.)*

1. $y'''=x^2+4$. **2.** $y''+\dfrac{1}{x}y'=0$.

3. $y''+y'+yx=\sin x\cos x$. **4.** $y^3y''=1$, $y>0.$

Задание 4. *(Однородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков.)*

1. $y''-7y'+12y=0$. **2.** $y''-4y'+5y=0$. **3.** $y''+2y'+y=0$.

4. $y'''-4y''=0$. **5** $y''+4y=0$. . **6.** $y''-5y'+6y=0$.

7. $y^{(4)}+18y''+81y=0$. **8.** Дан характеристический многочлен однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами $(t+2)^2(t^2-2t+5)^3$. Выписать общее решение уравнения.

Задание 4. (*Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков.)*

1. $y''-7y'+12y=xe^{3x}$. **2.** $y''-4y'+5y=2xe^{x}$.

3. $y''+2y'+y=3\sin x$. **4.** $y'''-4y''=3$.

5. $y''+4y=\cos 2x$ 5. . **6.** $y''-5y'+6y=x^2-x$.

Задание 5.*(Системы линейных дифференциальных уравнений.)*

1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y-t.\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+5y.\end{cases}$ **.3.** $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=y+3x+t.\end{cases}$

1. **4.** Решить однородную СЛДУ

$$Y' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 3 \\ 10 & -7 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} Y$$

РАЗДЕЛ 9. **Числовые и функциональные ряды**

Задание 1. *(Сходимость числовых рядов.)*

1. Исследуйте сходимость числовых рядов с помощью признаков сравнения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{3n^3+4}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^4+\sqrt{n}+1}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sqrt{n}+3}{n\sqrt{n}}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+1}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{3}{n^2}\right)$; **е)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,(1/\sqrt{n})}{n^2+n-1}$.

2. Исследуйте сходимость рядов с помощью признаков Даламбера и Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+6n+3}{3^{n-1}(2n+7)}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{3^{5n+1}(n^2+3)}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; **е)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; **ж)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$.

3. Исследуйте сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$; **в)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln n}}$.

Задание 2. Исследуйте сходимость (абсолютную и условную) знакопеременных рядов.:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^2+4n-1}{3n^3+4}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{4n^4+\sqrt{n}+1}$; **в)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}$; **д)** $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^3-1}\sin 3n$

Задание 3. *(Функциональные и степенные ряды.)*

Найдите область сходимости функциональных рядов. Указажите, для каких x ряд сходится абсолютно, для каких условно и для каких x расходится

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+3}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2x^2-3x+2}}$; **в)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x+3)^n$. **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n+x\right)^n}{n^n}$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}$ ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1}\frac{1}{\left(3x^2+8x+6\right)^n}$

з) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2+1}+4}$, **и)** $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}$, **к)** $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^n$.

Задание 4. Найдите радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n(n+1)} x^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{\sqrt{n}+1} (x+3)^n$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{3^n (n+1)(n+2)}$.

е) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ **ж)** $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln n}$ **з)** $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$

Задание 5. *(Разложение функций в степенные ряды.)*

1 Найдите несколько первых (отличных от 0) членов разложения в ряд по степеням x функций.

а) $arctg^2 x$ **б)** $\ln \cos x$ **в)** $\ln^2(1-x)\sin^3 x$

2.Разложите заданные функции в степенные ряды (по степеням x). Укажите интервал сходимости полученных рядов.

а) $f(x) = x \ln(1 + x^2)$; **б)** $f(x) = x \operatorname{arctg} x$; **в)** $f(x) = x \sin x^2$;

г) $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$; **д)** $f(x) = \dfrac{x+4}{(x-1)(x+5)}$. **е)** $\ln(1 - x - 6x^2)$

ж) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ **з)** $\dfrac{5x-5}{x^2-x-6}$ **и)** $\ln(4+3x)$ к) $\sqrt{16-5x}$

л) $f(x) = arctg\, \dfrac{8x^4}{16-x^8}$

Задание 6. Разложите заданные функции в степенные ряды по степеням $x - x_0$. Укажите интервал сходимости полученных рядов

а) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$; $x_0 = -4$ **б)** $\ln(x+2)$; $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ **в)** $\dfrac{1}{x^2+4x+7}$; $x_0 = -2$.

г) $\sqrt{x-1}$; $x_0 = 2$. **д)** $\cos x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Задание 7. Найдите сумму ряда и укажите промежуток сходимости. Укажите, к каким значениям сходится ряд на концах промежутка сходимости и в проблемных точках (если сходится)

а) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$, **б)** $\sum\limits_{3}^{\infty} (n+4)x^{n-3}$.

Задание 8. *(Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.)*

1.Вычислите приблизительно с точностью ε.

а) $\sin\dfrac{\pi}{4}$; $\varepsilon = 0{,}0001$ **б)** $\ln 1{,}07$; $\varepsilon = 0{,}0001$ **в)** $\sqrt[5]{250}$; $\varepsilon = 0{,}001$ **г)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$; $\varepsilon = 0{,}00001$

.2.Вычислите интеграл, разлагая подынтегральную функцию в ряд и ограничиваясь двумя первыми, отличными от нуля, членами разложения.

а) $\int\limits_0^1 e^{\frac{x^2}{3}} dx$; **б)** $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$; **в)** $\int\limits_0^{0,8} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} dx$. **г)** $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ **д)** $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

Задание 9. Найдите три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции

$y = y(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному

начальному условию:

а) $y' = 2e^y + xy$, $y(0) = 0$; **б)** $y' = \cos x + y^2$, $y(0) = 1$; **в)** $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$. **г)** $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$;

д) $y'' = 2e^y + xy$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$ **е)** $y'' = y + x^2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

РАЗДЕЛ 10. Ряды Фурье

Задание *(Разложение функций в ряд Фурье.)*

Представьте периодическую функцию $f(x)$, заданную на периоде $[0,\pi]$ рядом Фурье. Постройте график суммы полученного ряда.

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2, \\ -\cos x, & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$

в) Пользуясь полученным разложением, найдите сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Задание 2. Представьте периодическую функцию $f(x)$, заданную на полупериоде $[0, l]$ рядом

Фурье по синусам или косинусам. Постройте график суммы полученного ряда.

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2, \\ -\cos x, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$ по косинусам;

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2, \\ -\cos x, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$ по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$ по косинусам.

г) Пользуясь разложением пункта а), найдите сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Задание 3. Разложите в ряд Фурье функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в промежутке $[0; \pi]$:

а) по синусам;

б) по косинусам. Постройте графики функции и сумм рядов.

Задание 4. Найдите преобразование Фурье функции: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & |x| \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

РАЗДЕЛ 11 Двойные интегралы.

ТЕМА: (Двойные интегралы)

Задание 1. Вычислите повторные интегралы.

а) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)\, dy$; **б)** $\int_{-3}^{8} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx$; **в)** $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.

Задание 2. Расставьте пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, если известно, что область интегрирования (D):

а) ограничена прямыми $x = 1$, $x = 4$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y - 1 = 0$;
б) ограничена линией $x^2 + y^2 - 4x = 0$;
в) является треугольной областью с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(1; 3)$, $B(1; 5)$;
г) ограничена линиями $y = x^3 + 1$, $x = 0$, $x + y = 4$.

Задание 3. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Область интегрирования изобразите на чертеже.

а) $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$;**б)** $\int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$; **в)** $\int_0^1 dx \int_{2x}^{5x} f(x,y)\,dy$; г) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$.

Задание 4. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $x = y^2$;
б) $\iint_D x^3 y^2\,dx\,dy$, если область D ограничена линией $x^2 + y^2 = 9$;
в) $\iint_D x\cos((x + y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$;
г) $\iint_D y\,dx\,dy$**,** если область D ограничена первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Задание 5. *(Замена переменных в двойном интеграле.)*

1. Перейдя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4x$.

2. С помощью подходящей замены вычислите интеграл $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, где D – часть кольца, ограниченного линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}\cdot x$.

Задание 6. *(Геометрические и физические приложения двойного интеграла.)*

Вычислите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$;
б) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;
в) $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}\cdot x$.
г) $\rho = a\sin 2\varphi$, $a > 0$.

2. Вычислите объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:
а) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$;
б) цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$;
в параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.
г) цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y + 10$.

Критерии оценивания:

- 85–100 баллов – при правильном и полном решении всех задач;
- 65–84 баллов – при правильном и полном решении двух задач и правильном, но не полном решении третьей задачи;

- в прочих случаях – 0–64 балла.

Количество баллов	0…64	65…74	75…84	85…100
Шкала оценивания	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
	Не зачтено	Зачтено		

Тестирование:

При выполнении текущего контроля обучающимся будет предложено выполнить 30 тестовых заданий. **Примерный перечень тестовых заданий:**

1 семестр

1. Линейная алгебра

1. Система линейных уравнений называется совместной, если:
- коэффициенты правой части равны нулю;
- система имеет множество решений;
- система имеет хотя бы одно решение;
- определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных не равен нулю.

2. Система линейных уравнений называется несовместной, если:
- коэффициенты правой части равны нулю;
- система имеет одно решение;
- система не имеет решения;
- коэффициенты правой части равны нулю.

3. Система линейных уравнений называется однородной, если:
- коэффициенты правой части равны нулю;
- система не имеет решения;
- коэффициенты правой части не равны нулю;- система имеет хотя бы одно решение.

4. Система n линейных уравнений с n неизвестными, имеет единственное решение, если:
- все свободные коэффициенты равны нулю;
- определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных равен 0;
- коэффициенты при неизвестных- пропорциональны;
- определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных не равен нулю.

5. Однородная система линейных уравнений всегда имеет:
- множество решений;
- одно решение;
- не имеет решения;
- три решения.

6. Определитель n-ого порядка равен:
- сумме всех элементов определителя;
- произведению элементов на диагонали;
- сумме произведений элементов строки на их алгебраическое дополнение;
- сумме всех алгебраических дополнений.

7. Определитель не изменится, если:
- переставить две строки местами;
- умножить строку определителя на какое-то число;
- к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки;
- элементы одного столбца умножить на соответствующие элементы другого столбца.

8. Какие операции можно провести над матрицами A и B, если A имеет размерность 2 строки и 3 столбца, а B – 3 строки и 2 столбца:
- только умножение;
- сложение и умножение;
- только сложение;
- умножение на число и сложение.

9. Когда можно найти произведение матриц A и B, если A имеет n-строк и m-столбцов, а матрица B имеет k-строк и r-столбцов:

- $n = 3$, $m = 3$, $k = 4$, $r = 3$;
- $n = 2$, $m = 1$, $k = 2$, $r = 2$;
- $n = 5$, $m = 2$, $k = 3$, $r = 4$;
- $n = 3$, $m = 4$, $k = 4$, $r = 2$.

10. Пусть E- единичная матрица, тогда:
- при умножении E на матрицу A, будет матрица A;
- при умножении E на любое число, будет матрица E;
- при сложении E с матрицей A, будет матрица A;
- строка матрицы E состоит из единиц.

2. Векторная алгебра

1. Два вектора равны если
- равны длины векторов;
- совпадают направления;
- совпадает длина и направления.

2. Два вектора параллельные одной прямой называются
- компланарными;
- коллинеарными;
- равными.

3. Три вектора параллельные одной плоскости называются
- компланарными;
- коллинеарными;
- линейно независимыми.

4. Длинна одного вектора равна 4, другого 5 и угол между векторами равен 120^0 тогда скалярное произведение равно
- 10;
- -10;
- 0.

5. Три вектора образуют базис в трехмерном пространстве, если они
- компланарны;
- не компланарны;
- коллинеарны;
- не коллинеарны.

6. Два вектора образуют базис в двухмерном пространстве, если они
- компланарны;
- не компланарны;
- коллинеарны;
- не коллинеарны.

7. Задано три вектора с координатами {1;2;3}, {3;4;2} и {2;3;5} тогда их смешанное произведение равно
- 5;
- -5;
- 6;
- -8.

8. Скалярное произведение векторов {3;4;2} и {2;3;-5} равно
- 7;
- 8;
- 9.

9. Модуль векторного произведения векторов {4;2;3} и {5;4;3} равен
- 9;
- 10;
- 11;
- 8.

10. Параллелограмм построен на векторах имеющих длины 6 и 3, угол между этими векторами равен 30^0. Тогда площадь параллелограмма равна

- 18;
- 9;
- 12.

3. Аналитическая геометрия

1. В общем уравнении плоскости коэффициенты A, B, C определяют координаты…

- точки, принадлежащей плоскости;
- вектора, лежащего в плоскости;
- вектора, перпендикулярного плоскости.

2. Если две плоскости перпендикулярны, то … произведение их нормальных векторов равно нулю.

- смешанное;
- векторное;- скалярное.

3. Угловые коэффициенты параллельных прямых …

- равны;
- противоположны по знаку;
- обратны по величине.

4. Одна из полярных координат точки определяется её расстоянием до…

- оси абсцисс;
- оси ординат;
- начала координат.

5. Если точка лежит на оси ординат в верхней полуплоскости, то одна из её полярных координат равна…

- нулю;
- единице;
- девяносто градусам.

6. Если в общем уравнении плоскости свободный член равен нулю, то плоскость …

- проходит через начало координат;
- параллельна оси абсцисс;
- параллельна оси ординат.

7. Нормальный вектор плоскости 2x+y-15z=0 имеет координаты…

- (1;2;1);
- (2;1;–15);
- (1;2;–15);
- (1;1;–15).

8. Даны точки A(2; 3) и B(– 6; 5). Тогда координаты середины отрезка AB равны...:

- (– 4 ; 8);
- (–4 ; 1);
- (– 2 ; 8);
- (– 2 ; 4).

9. Расстояние между точками B(–3; –4) и D(6; 8) равно…:

- 15;
- 5;
- 11.

10. Координата x_0 точки $A(x_0; 1; 7)$, принадлежащей плоскости 5x+y–z+1=0, равна…:

- 1;
- -1;
- 0.

4. Введение в математический анализ функции одной переменной

1.Функция y=ln(2x-3) имеет нуль в точке

- x =1,5;

- $x = 0$;
- $x=2$.

2. Функция $y=(3x-6)/(2x-1)$ имеет нуль в точке
- $x =1$;
- $x = 0$;
- - $x=2$.

3. График функция $y=\ln(2x-3)$ имеет вертикальную асимптоту с уравнением
- $x =2$;
- $x=1$;
- $x =1,5$.

4. График функции $y=(3x-6)/(2x-1)$ имеет горизонтальную асимптоту с уравнением
- $y=1$;
- $y=-0,5$;
- $y=1,5$.

5. График функции $y=(3x-6)/(2x-1)$ имеет вертикальную асимптоту с уравнением
- $x=1$;
- $x=-0,5$;
- $x=0,5$.

6. Производная функции $y=(3x-6)/(2x-1)$
- положительная
- отрицательная
- знакопеременная

7. Производная функции $y=2e^{3x+2}$ имеет вид
- $2e^{x+2}/3$;
- $2\cdot e3x+2$;
- $6\cdot e3x+2$.

8. Производная функции $y=-2e^{-3x}$ в точке $x=0$ равна
- 6;
- 3;
- -3.

9. Функция $y=3x^2-6x+1$ имеет минимум в точке
- $x =1$;
- $x = 0$;
- $x=2$.

10. Максимум функция $y=2x^3-6x^2+1$ равен
- 1;
- 0;
- 2.

5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. В чем состоит физический смысл производной функции одной переменной?
- показывает скорость изменения функции в данной точке;
- показывает траекторию движения данной точки;
- показывает перемещение данной точки.

2. В чем состоит геометрический смысл производной функции одной переменной?
- производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции;
- производная равна значению максимума функции;
- производная показывает точку пересечения графика функции с осью OX.

3. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y=\ln x$ в точке $x=2$ равен
- 1;
- 0,5;
- e.

4. Найти первую производную функции $y=x^2\sin x$

- 2x+cosx;
- 2xsinx+x^2cosx;
- 2xcosx.

5. Производная функции $y = (2x–1)^3$ в точке M(0; -1) равна
- (–1); - 10; - 6.

6. График функции y=ln(x+1) пересекает ось OX под углом (в градусах)
- 30;
- 45;
- 60.

7. Число экстремумов функции $y=x^3–2x^2+1$ равно
- 1; -:2; - 0.

8. Экстремумы функции $y=3x–x^3$
- только отрицательные; - только положительные; - разных знаков.

9. Функция $y=1–x^3$ имеет точку перегиба при x равном
- 1;
- 0;- (–1).

10. Наименьшее значение функции $y=x^2e^{–x}$ на отрезке [–1; 1] равно
- 1;
- 0;
- (–2).

2 семестр

6. Функции нескольких переменных

1. Что называется интегрированием?
- операция нахождения интеграла;
- преобразование выражения с интегралами;
- операция нахождения производной;
- предел приращения функции к приращению её аргумента.

2. Множество первообразных для данной функции f(x) называется…
- функцией;
- неопределенным интегралом;
- постоянным множителем;
- частной производной.

3. Операция нахождения неопределенного интеграла называется…
- дифференцированием функции;
- преобразованием функции;
- интегрированием функции;
- нет верного ответа.

4. Производная от неопределенного интеграла равна…
- подынтегральной функции;
- постоянной интегрирования;- переменной интегрирования;
- любой функции.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен…
- произведению интегралов этих функций;
- разности этих функций;
- алгебраической сумме их интегралов;
- интегралу частного этих функций.

6. Чему равен неопределенный интеграл от 1 (единицы)?
- x+C;
- 0;
- 1+C;
- const C.

7. Чему равен неопределенный интеграл sin(x)?

- – cos(x)+C;
- cos(x)+C;
- tg(x)+C;
- arcsin(x)+C.

8.С помощью, какой формулы, в основном, решаются задания по нахождению определенного интеграла:

- формулы Римана;
- формулы Коши;
- используя формулы преобразования интеграла
- формулы Ньютона - Лейбница.

9. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл…

- остается прежним
- меняет знак
- увеличивается в два раза
- равен нулю

10. Определенный интеграл используется при вычислении…

- площадей плоских фигур
- объемов тел вращения
- пройденного пути
- всех перечисленных элементов

7. Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Областью определения функции двух переменных z=f(x,y) называется?

- Вся координатная плоскость XoY;
- закон, по которому каждой паре значений (x,y) соответствует значение зависимой переменной;
- множество всех пар (x,y), для которых существует значение z.

2. Сколько переменных в функции u=sin (x) +cos (2y)-z?

- 2;
- 3;
- 4;
- 1.

3. Графиком функции двух переменных является?

- линия;
- поверхность.

4. Частной производной функции нескольких переменных называется?

- производная от частного аргумента функции;
- производная от произведения аргументов функции;
- производная от логарифма частного аргументов функции;
- производная от функции при условии, что все аргументы кроме одного остаются постоянными.

5. Производной второго порядка называется?

- квадрат производной первого порядка;
- производная от производной первого порядка;
- корень квадратный от производной первого порядка;- первообразная производной первого порядка.

6. Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется?

- главная линейная часть приращения функции при изменении логарифма одного из аргументов;
- главная линейная часть приращения функции при изменении всех аргументов;
- приращения функции при изменении всех аргументов;
- главная линейная часть приращения функции при изменении логарифма всех аргументов.

7. Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются?

- стационарными;

- максимумом функции;
- минимумом функции.

8. Значение функции двух переменных z=2x-y+15 в точке A(-2,1) равно?
- 10;
- 11;
- 12;
- 13.

9. Функция нескольких переменных является дифференцируемой, если?
- существует полное приращение функции;
- существует полный дифференциал функции;
- частная производная по одной из переменных равна нулю;
- частная производная по одной из переменных не существует.

10. Уравнение касательной плоскости в точке M(1,-1) к поверхности z=yln(x)
- x+z=0;
- x+z=1;
- x+y=0;
- x+y=1.

8. Комплексные числа

1. При каких значениях x, y комплексное число z=3y-x-6+2yi-3xi+10i будет равно 0?
- x=5; y=3;
- x=4; y=6;
- x=6; y=4.

2. Частное от деления комплексного числа z=4+i на комплексное число z=1+i равно:
- z=3/2+5/2i;
- z= 5-2i;
- 5/2-3/2i.

3. Произведение комплексных чисел z=3+2i и z=1+5i равно:
- z= 5+2i;
- z=3-4i;
- z= -7+17i.

4. Модуль комплексного числа z=4+3i равен:
- 4;
- 3;
- 5.

5. Модуль комплексного числа z=2i равен:
- 3;
- 2i;
- 2.

6. Аргумент комплексного числа z = 5i равен:
- 45 градусов;
- 180 градусов;
- 90 градусов.

7. Аргумент комплексного числа z = -1+i равен:
- 45 градусов;
- (-45) градусов;
- 135 градусов.

8. Комплексное число z=4exp(180^0 i) в алгебраической форме имеет вид:
- z=4;
- z=8;
- z=-4.

9. Комплексное число z=2exp(90^0 i) в алгебраической форме имеет вид:

-2 ;

- (-2);
- 2i.

10. Корни уравнения z*z-8z+20=0 на множестве комплексных чисел равны:

- 2+2i, 2-2i;
- 4+4i, 4-4i;
- 4+2i, 4-2i

9. Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

- $F(x,y,y'')=0$;
- $F(x,y,y')=0$;
- $F(x,y)=0$;- $F(x,y,y''')=0$.

2. Среди решений дифференциального уравнения $y''-5y'+6y=0$ нет функции

- y=exp{2x};
- y=exp{3x};
- y=exp{4x};
- y=exp{2x}+exp{3y}.

3. Какое уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?

- (x+y)dx+ydy=0;
- xydx-ydy=0;
- ydx+(y-x)dy=0;
- (x+y)dx-(y-x)dy=0.

4. Какая функция является решением дифференциального уравнения $y'+y\text{ctg}x-2\cos x=0$?

- y=sinx;
- y=cosx;
- y=tgx;
- y=ctgx.

5. Правая часть дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ задает:

- направление нормали к этой кривой;
- направление касательной к этой кривой;
- направление поднормали к этой кривой;- направление изоклины к этой кривой.

6. Теорема существования и единственности решения дифференциально уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию называется:

- теоремой Лагранжа;
- теоремой Коши;- теоремой Ферма;
- теоремой Лейбница.

7. Множество всех точек плоскости, в которых поле имеет одно направление называется:

- интегральной кривой;
- дифференциальной кривой;
- изоклиной;
- общим решением.

8. Для дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ уравнение изоклины имеет вид:

- y=cost;
- f(x,y)=cost;
- y''=cost;
- x=cost.

9. Какое уравнение является однородным дифференциальным уравнением?

- (x+y)dx+ydy=0;
- xydx-ydy=0;
- ydx+dy=0;
- (x+y)dx-dy=0.

10. Для линейного дифференциального уравнения второго порядка $y''-5y'+6y=0$ характеристическое уравнение имеет вид:
- k^2-5k+6=0;
- k^3-5k^2+6k=0;
- k-5k=0;- 5k+6=0.

Количество баллов	0…64	65…74	75…84	85…100
Шкала оценивания	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
	Не зачтено	Зачтено		

Критерии оценивания:

100 баллов – при правильном ответе на 30 вопросов.

75-99 баллов – при правильном ответе на 25-29 вопросов.

50-74 балла – при правильном ответе на 20-24 вопроса.

25-49 баллов – при правильном ответе на ответе на 15-19 вопросов.

0-24 балла – при правильном ответе на 1-14 вопросов.

2.4. Оценочные средства при промежуточной аттестации

1 семестр

Формой промежуточной аттестации является экзамен, в процессе которого оцениваются результаты обучения по дисциплине и соотносятся с установленными в рабочей программе индикаторами достижения компетенций. Инструментом измерения результатов обучения по дисциплине является устный ответ обучающегося на 2 теоретических вопроса, выбранных случайным образом и (или) решение трех задач и (или) ответ на 20 тестовых заданий.

Опрос может проводиться в письменной и (или) устной, и (или) электронной форме (2 вопроса).

Критерии оценивания:
- 85–100 баллов – при правильном и полном ответе на все вопросы;
- 65–84 баллов – при правильном и полном ответе на один из вопросов и правильном, но не полном ответе на другой из вопросов;
- 25–64 баллов – при правильном и неполном ответе только на один из вопросов;
- 0–24 баллов – при отсутствии правильных ответов на вопросы.

Задачи могут быть представлены в письменной либо в электронной форме (три задачи).

Критерии оценивания:
- 85–100 баллов – при правильном и полном решении всех задач;
- 65–84 баллов – при правильном и полном решении двух задач и правильном, но не полном решении третьей задачи;
- в прочих случаях – 0–64 балла.

Тестирование может проходить письменно либо в электронной форме (20 тестовых вопросов). За каждый правильно данный ответ обучающийся получает 5 баллов.

Примерный перечень вопросов к экзамену:
1. Определители второго и третьего порядка, их свойства.
2. Алгебраическое дополнение к элементу матрицы.
3. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Условие существования единственного решения системы уравнений по методу Крамера.
5. Определение матрицы, элемент матрицы, размерность матрицы.
6. Виды матриц (треугольная, диагональная, единичная матрица).
7. Действия над матрицами: сложение матриц.
8. Действия над матрицами: умножение матрицы на число.
9. Действия над матрицами: умножение матриц.

10. Определение обратной матрицы, свойства.

Примерный перечень задач к экзамену:

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.
2. Даны точки с координатами. Найти угол между векторами.
3. Даны три точки. Найти точку пересечение высоты и медианы.
4. Исследовать на непрерывность функции.
5. Найти ассиптоты к графику функции.

Примерный перечень тестовых заданий:

1. Система линейных уравнений называется несовместной, если:
- коэффициенты правой части равны нулю;
- система имеет одно решение;
- система не имеет решения;
- коэффициенты правой части равны нулю.
2. Определитель n-ого порядка равен:
- сумме всех элементов определителя;
- произведению элементов на диагонали;
- сумме произведений элементов строки на их алгебраическое дополнение;
- сумме всех алгебраических дополнений.
3. Два вектора равны если
- равны длины векторов;
- совпадают направления;
- совпадает длина и направления.
4. Длинна одного вектора равна 4, другого 5 и угол между векторами равен 120^0 тогда скалярное произведение равно
- 10;
- -10;
- 0.
5. Скалярное произведение векторов {3;4;2} и {2;3;-5} равно
- 7;
- 8;
- 9.
6. Если две плоскости перпендикулярны, то … произведение их нормальных векторов равно нулю.
- смешанное;
- векторное;
- скалярное.
7. Производная функции $y=2e^{x+2}$ имеет вид
- e^{x+2}; - $2{\cdot}e^{x+2}$; - $4{\cdot}e^{x+2}$.
8. Функция $y=3x^2-6x+1$ имеет минимум в точке
- x =1;
- x = 0;
- x=2.
9. Угловой коэффициент касательной к графику функции y=lnx в точке x=2 равен
- 1;
- 0,5;
- e.
10. Наименьшее значение функции $y=x^2e^{-x}$ на отрезке [–1; 1] равно
- 1;
- 0;
- (–2).

2 семестр

Формой промежуточной аттестации является зачет, в процессе которого оцениваются результаты обучения по дисциплине и соотносятся с установленными в рабочей программе индикаторами достижения компетенций. Инструментом измерения результатов обучения по дисциплине является устный ответ обучающегося на 2 теоретических вопроса, выбранных случайным образом и (или) решение трех задач и (или) ответ на 20 тестовых заданий.

Опрос может проводиться в письменной и (или) устной, и (или) электронной форме (2 вопроса).

Критерии оценивания:

- 85–100 баллов – при правильном и полном ответе на все вопросы;
- 65–84 баллов – при правильном и полном ответе на один из вопросов и правильном, но не полном ответе на другой из вопросов;
- 25–64 баллов – при правильном и неполном ответе только на один из вопросов;
- 0–24 баллов – при отсутствии правильных ответов на вопросы.

Задачи могут быть представлены в письменной либо в электронной форме (три задачи).

Критерии оценивания:

- 85–100 баллов – при правильном и полном решении всех задач;
- 65–84 баллов – при правильном и полном решении двух задач и правильном, но не полном решении третьей задачи;
- в прочих случаях – 0–64 балла.

Тестирование может проходить письменно либо в электронной форме (20 тестовых вопросов). За каждый правильно данный ответ обучающийся получает 5 баллов.

Примерный перечень вопросов к зачету:

1. Определение и геометрическая интерпретация комплексного числа.
2. Свойства комплексно- сопряженных чисел. Модуль комплексного числа.
3. Арифметические операции над комплексными числами.
4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
5. Формула Эйлера. Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.
6. Выполнить действия над комплексными числами.
7. Перевести комплексные числа из одной формы в другую.
8. Выполнить операцию возведения в целую степень.
9. Выполнить операцию извлечение корня.
10. Построить область на комплексной плоскости.

Примерный перечень задач к зачету:

1. Найти и построить область определения функции двух переменных.
2. Исследовать на экстремум функцию.
3. Найти неопределенные интегралы.
4. Выполнить действия с комплексными числами.
5. Найти решение дифференциального уравнения.

Примерный перечень тестовых заданий:

1. Сколько переменных в функции u=sin (x) +cos (2y)-z?
- 2;
- 3;
- 4;- 1.
2. Уравнение касательной плоскости в точке M(1,-1) к поверхности z=yln(x)
- x+z=0;
- x+z=1;
- x+y=0;- x+y=1.
3. Производная от неопределенного интеграла равна…
- подынтегральной функции;
- постоянной интегрирования;
- переменной интегрирования;

- любой функции.
4. Чему равен неопределенный интеграл от 1 (единицы)?
- x+C;
- 0;
- 1+C;
- const C.
5. Модуль комплексного числа z=2i равен:
- 3;
- 2i;
- 2.
6. Аргумент комплексного числа z = -1+i равен:
- 45 градусов;
- (-45) градусов;
- 135 градусов.
7. Множество всех точек плоскости, в которых поле имеет одно направление называется:
- интегральной кривой;
- дифференциальной кривой;
- изоклиной;
- общим решением.
8. Для дифференциального уравнения первого порядка y′=f(x,y) уравнение изоклины имеет вид:
- y=cost;
- f(x,y)=cost;
- y″=cost;
- x=cost.
9. Какое уравнение является однородным дифференциальным уравнением?
- (x+y)dx+ydy=0;
- xydx-ydy=0;
- ydx+dy=0;- (x+y)dx-dy=0.
10. Для линейного дифференциального уравнения второго порядка y″-5y′+6y=0 характеристическое уравнение имеет вид:
- k^2-5k+6=0;
- k^3-5k^2+6k=0;
- k-5k=0;- 5k+6=0.

Количество баллов	0…64	65…74	75…84	85…100
Шкала оценивания	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
	Не зачтено	Зачтено		

2.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

При проведении текущего контроля успеваемости в форме опроса по распоряжению педагогического работника обучающиеся убирают все личные вещи, электронные средства связи, печатные и (или) рукописные источники информации, достают чистый лист бумаги любого размера и ручку. На листе бумаги записываются Фамилия, Имя, Отчество (при наличии), номер учебной группы и дата проведения текущего контроля успеваемости. Педагогический работник задает вопросы, которые могут быть записаны на подготовленный для ответа лист бумаги. В течение установленного педагогическим работником времени обучающиеся письменно формулируют ответы на заданные вопросы. По истечении установленного времени лист бумаги с подготовленными ответами обучающиеся передают педагогическому работнику для последующего оценивания результатов текущего контроля успеваемости.

Результаты текущего контроля успеваемости доводятся до сведения обучающихся в течение трех учебных дней, следующих за днем проведения текущего контроля успеваемости, и могут быть учтены педагогическим работником при промежуточной аттестации. Результаты промежуточной аттестации доводятся до сведения обучающихся в день проведения промежуточной аттестации. При подготовке ответов на вопросы при проведении текущего контроля успеваемости и при прохождении промежуточной аттестации обучающимся запрещается использование любых электронных средств связи, печатных и (или) рукописных источников информации. В случае обнаружения педагогическим работником факта использования обучающимся при подготовке ответов на вопросы указанных источников информации – оценка результатов текущего контроля успеваемости и (или) промежуточной аттестации соответствует 0 баллов.

При прохождении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающимися с ограниченными возможностями здоровья и инвалидами, допускается присутствие в помещении лиц, оказывающим таким обучающимся соответствующую помощь, а для подготовки ими ответов отводится дополнительное время с учетом особенностей их психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья.