

# Транспортная задача

# **Постановка транспортной задачи**

## Пример

Имеются три поставщика и четыре потребителя. Мощности поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» сведены в таблицу. Построить математическую модель задачи.

| Поставщи<br>ки | Мощность<br>поставщи<br>ков | Потребители и их спрос |               |               |               |
|----------------|-----------------------------|------------------------|---------------|---------------|---------------|
|                |                             | 1                      | 2             | 3             | 4             |
|                |                             | 20                     | 110           | 40            | 110           |
| 1              | 60                          | 1<br>$x_{11}$          | 2<br>$x_{12}$ | 5<br>$x_{13}$ | 3<br>$x_{14}$ |
| 2              | 120                         | 1<br>$x_{21}$          | 6<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 2<br>$x_{24}$ |
| 3              | 100                         | 6<br>$x_{31}$          | 3<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 4<br>$x_{34}$ |

В левом верхнем углу произвольной  $(i, j)$  клетки ( $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца) стоит коэффициент затрат – затраты на перевозку единицы груза от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю.

### **Постановка задачи**

Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы:

- 1) мощности всех поставщиков были реализованы;
- 2) спросы всех потребителей были удовлетворены;
- 3) суммарные затраты на перевозку были минимальными.

## Решение

Пусть  $x_{ij}$  – объем перевозки от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю, который называют поставкой клетки  $(i, j)$ .

Заданные мощности поставщиков и спросы потребителей накладывают ограничения на значения неизвестных  $x_{ij}$ .

Таким образом, чтобы мощность каждого из поставщиков была реализована, необходимо составить систему уравнений баланса для каждой строки таблицы поставок.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100. \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично, чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен составим уравнения баланса для каждого столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110. \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что объем перевозимого груза не может быть отрицательным, поэтому  $x_{ij} \geq 0$ .

Суммарные затраты  $L$  на перевозку выражаются через коэффициенты затрат и поставки:

$$L = 1 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 3 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22} + \\ + 5 \cdot x_{23} + 2 \cdot x_{24} + 6 \cdot x_{31} + 3 \cdot x_{32} + 7 \cdot x_{33} + 4 \cdot x_{34} \quad (3)$$

Таким образом, на множестве неотрицательных решений системы ограничений (1) и (2) найти такое решение  $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33}, x_{34})$ , при котором линейная функция (3) примет минимальное значение.

Особенности математической модели транспортной задачи состоят в следующем:

- транспортная задача задана в канонической форме;
- коэффициенты при переменных системы ограничений равны 1 или 0;
- каждая переменная входит в систему ограничений два раза: один раз в систему (1) и один раз в систему (2).



# **Математическая формулировка транспортной задачи**

Обозначим через  $c_{ij}$  коэффициенты затрат,  $M_i$  – мощности поставщиков,  $N_j$  – мощности потребителей, где  $i = 1, \dots, m$ ,  $m$  – число поставщиков;  $j = 1, \dots, n$ ,  $n$  – число потребителей. Тогда система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = M_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = N_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

Система (4) включает в себя уравнения баланса по строкам, а система (5) – по столбцам таблицы поставок.

Линейная функция имеет вид:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

**Математическая формулировка транспортной задачи в общей постановке:** на множестве неотрицательных решений системы ограничений (4) и (5) найти такое решение  $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ , при котором линейная функция (6) примет минимальное значение.

Произвольное допустимое (неотрицательное) решение  $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$  системы ограничений (4) и (5) называется **распределением поставок**.

**Определение:** Если суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей, то есть  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m x_{ij}$ , то транспортная задача называется закрытой. В противном случае транспортная задача называется открытой.

Число основных (базисных) переменных закрытой транспортной задачи равно:  $m + n - 1$ , где  $m$  — число поставщиков,  $n$  — число потребителей.

Распределение поставок называется базисным, если переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за основные переменные.

В процессе решения транспортной задачи будем переходить от одного базисного распределения поставок к другому в сторону невозрастания целевой функции вплоть до оптимального решения.

Для начала такого движения потребуется исходное базисное распределение поставок (**опорный план**).

Определение базисного распределения поставок (исходного опорного решения) возможно двумя способами: методом «северо-западного» угла и методом наименьших затрат.

# **Метод «северо-западного» угла**

## Метод «северо-западного» угла

На вышерассмотренном примере составим опорный план.

Переменной  $x_{11}$  дадим максимально возможное значение или максимально возможную поставку в клетку (1, 1) – «северо-западный» угол таблицы поставок:  $x_{11} = \min \{60; 20\} = 20$ .

|     | 20      | 110 | 40 | 110 |
|-----|---------|-----|----|-----|
| 60  | 1<br>20 | 2   | 5  | 3   |
| 120 | 1       | 6   | 5  | 2   |
| 100 | 6       | 3   | 7  | 4   |



После этого спрос первого потребителя полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы поставок выпадает из последующего рассмотрения.

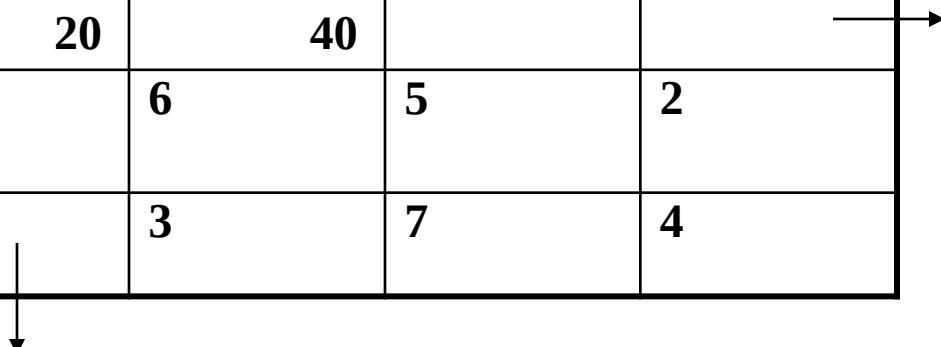
Далее заполним таблицу, двигаясь или по строке вправо или по столбцу вниз, то есть найдем новый «северо-западный» угол — это клетка (1, 2). В эту клетку дадим максимально возможную поставку.

Учитывая, что первый поставщик уже отдал 20 единиц груза и у него осталось только:  $60 - 20 = 40$  единиц груза, то получаем, что  $x_{12} = \min\{40; 110\} = 40$ .



После этого мощность первого поставщика полностью реализована и из рассмотрения выпадает первая строка таблицы поставок.

|     | 20      | 110     | 40 | 110 |
|-----|---------|---------|----|-----|
| 60  | 1<br>20 | 2<br>40 | 5  | 3   |
| 120 | 1       | 6       | 5  | 2   |
| 100 | 6       | 3       | 7  | 4   |



В оставшейся таблице снова находим «северо-западный» угол и так далее. В результате получаем исходное распределение поставок, которое представлено в следующей таблице.

|     | 20      | 110     | 40      | 110      |   |
|-----|---------|---------|---------|----------|---|
| 60  | 1<br>20 | 2<br>40 | 5       | 3        | → |
| 120 | 1       | 6<br>70 | 5<br>40 | 2<br>10  | → |
| 100 | 6       | 3       | 7       | 4<br>100 |   |
|     | ↓       | ↓       | ↓       |          |   |

Этому плану соответствуют затраты в количестве:

$$L = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 70 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 100 = 1140 \text{ ед.}$$

Число заполненных клеток в полученном распределении:  $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ , то есть равно числу основных (базисных) переменных.

Метод «северо-западного» угла имеет существенный недостаток, так как опорный план построен без учета значений коэффициентов затрат.

Данный метод допускает модификацию, лишенную этого недостатка: на каждом шаге максимально возможную поставку следует давать не в «северо-западную» клетку оставшейся таблицы, а в клетку с наименьшим коэффициентом затрат. При этом распределение поставок оказывается ближе к оптимальному.

Такой метод получения опорного плана называется методом наименьших затрат.

# **Метод наименьших затрат**

# Метод наименьших затрат

На данном примере составим опорный план.

В таблице поставок найдем клетки с наименьшим коэффициентом затрат.

Таких клеток две: (1, 1) и (2, 1) с коэффициентами затрат  $c_{11} = c_{21} = 1$ .

Сравним максимально возможные поставки для этих клеток:

$$x_{11} = \min \{60; 20\} = 20$$

$$x_{21} = \min \{120; 20\} = 20$$

Поскольку получили равные максимально возможные поставки, то выбираем любую из этих клеток, например, клетку (1, 1).

В клетку (1, 1) заносим  $\min\{60; 20\} = 20$ . Остатки по строке и столбцу записываем в соответствующие клетки строки и столбца остатков. Первый столбец закрыт.

|         | 20      | 110 | 40 | 110 | Остаток |
|---------|---------|-----|----|-----|---------|
| 60      | 1<br>20 | 2   | 5  | 3   | 40      |
| 120     | 1       | 6   | 5  | 2   |         |
| 100     | 6       | 3   | 7  | 4   |         |
| Остаток | 0       |     |    |     |         |



Переходим к следующей клетке с наименьшим коэффициентом затрат. Таких клеток опять две.

Это клетки (1, 2) и (2, 4) с коэффициентами затрат равными 2.

$$x_{12} = \min \{40; 110\} = 40 \quad x_{24} = \min \{120; 100\} = 100$$

Выбираем  $\max \{40; 100\} = 100$ .

В клетку (2, 4) заносим  $x_{24} = 110$ . Четвертый столбец закрыт. Затем переходим к клетке (1, 2):

$$x_{12} = \min \{60 - 20; 110\} = 40$$

и первая строка закрыта.

Следующая клетка с наименьшим коэффициентом затрат (3, 2) и  $c_{32} = 3$ . В клетку (3, 2) заносим  $x_{32} = 70$ , так как  $x_{32} = \min \{100; 110 - 40\} = 70$ . Второй столбец закрыт.

Следующая клетка с наименьшим коэффициентом затрат (2, 3) и  $c_{23} = 5$ . В клетку (2, 3) заносим  $x_{23} = 10$ , так как  $x_{23} = \min \{120 - 110; 40\} = 10$ . Вторая строка закрыта. И наконец переходим к клетке (3, 3), в которую заносим  $x_{33} = 30$ .

|         | 20      | 110     | 40      | 110      | Остаток |
|---------|---------|---------|---------|----------|---------|
| 60      | 1<br>20 | 2<br>40 | 5       | 3        | 40 →    |
| 120     | 1       | 6       | 5<br>10 | 2<br>110 | 10 →    |
| 100     | 6       | 3<br>70 | 7<br>30 | 4        | 30      |
| Остаток | 0<br>↓  | 70<br>↓ | 30      | ↓        |         |



$$L = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 70 + 7 \cdot 30 = 790 \text{ ед.}$$

Таким образом, сравнивая результаты, полученные с использованием метода «северо-западного» угла  $L = 1140$  ед. и метода наименьших затрат  $L = 790$  ед., приходим к выводу, что с использованием метода наименьших затрат сумма затрат ближе к оптимальному плану.

# **Критерий оптимальности базисного распределения поставок**

Определение: Коэффициент  $m_{ij}$  при свободной переменной  $x_{ij}$  называется оценкой свободной клетки  $(i, j)$ .

**Критерий оптимальности:** Базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны.

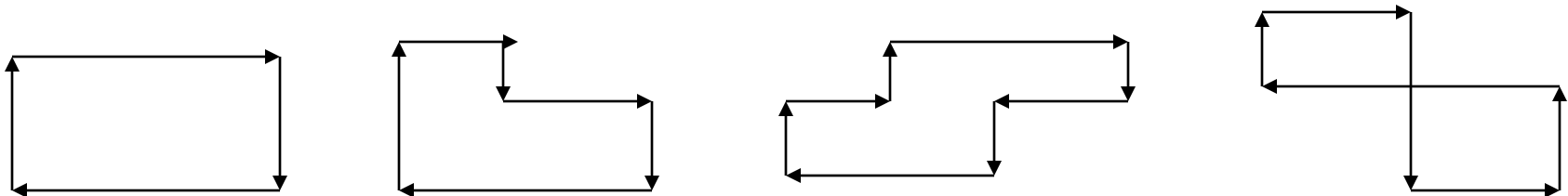
Таким образом, первоначально необходимо найти оценки свободных клеток для фиксированного базисного распределения поставок.

**Определение:** Циклом в матрице называется ломаная с вершинами в клетках и звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы удовлетворяющая условиям:

- ломаная должна быть связной, то есть из любой ее вершины можно попасть в любую другую вершину по звеньям ломаной;
- в каждой вершине ломаной встречаются два звена, одно из которых располагается по строке, а другое по столбцу.

**Определение:** Циклом пересчета называется такой цикл в таблице с базисным распределением поставок, при котором одна из его вершин лежит в свободной клетке, а остальные в заполненных.

### Виды циклов



**Замечание:** Если ломаная линия, образующая цикл пересекается (последний пример), то точка самопересечения вершиной цикла не является.

**Определение:** Цикл пересчета называется означенным, если в его вершинах знаки «+» и «-» расставлены таким образом, что в свободной клетке стоит знак «+», а соседние вершины имеют противоположные знаки.

Для каждой свободной клетки базисного распределения поставок существует, и при том, единственный цикл пересчета.

# **Решение транспортной задачи. Метод потенциалов**

1. Для данного базисного распределения поставок нужно найти потенциалы строк и столбцов таблицы так, чтобы коэффициенты затрат заполненных клеток стали равны 0:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Составляют матрицу:

$$m_{ij} = 0 \quad \text{— для заполненных клеток;}$$

$$m_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad \text{— для свободных клеток.}$$



2. Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то найденное распределение поставок оптимально и решение закончено.

Если среди оценок свободных клеток есть отрицательные, то выбирают одну из них для передачи в нее поставки.

Для определенности берут одну из клеток с наименьшей оценкой.

3. Для избранной свободной клетки строят означенный цикл пересчета. Поставка  $z$ , передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках со знаком « $-$ ».

Найденная поставка передвигается по циклу. При этом поставка в клетках цикла со знаком « $+$ » увеличивается на  $z$ , а в клетках со знаком « $-$ » уменьшается на  $z$ .

Клетка, поставка в которой станет равной 0 считается свободной, а остальные клетки цикла заполненными.

Таким образом получено новое базисное распределение поставок.

4. Переходят к пункту 1, рассмотренного алгоритма решения закрытой транспортной задачи.

Рассмотрим решение рассмотренной ранее транспортной задачи.

## Пример

Имеются три поставщика и четыре потребителя. Мощности поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» приведены в таблице. Найти оптимальное распределение поставок.

| Поставщи<br>ки | Мощность<br>поставщи<br>ков | Потребители и их спрос |               |               |               |
|----------------|-----------------------------|------------------------|---------------|---------------|---------------|
|                |                             | 1                      | 2             | 3             | 4             |
|                |                             | 20                     | 110           | 40            | 110           |
| 1              | 60                          | 1<br>$x_{11}$          | 2<br>$x_{12}$ | 5<br>$x_{13}$ | 3<br>$x_{14}$ |
| 2              | 120                         | 1<br>$x_{21}$          | 6<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 2<br>$x_{24}$ |
| 3              | 100                         | 6<br>$x_{31}$          | 3<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 4<br>$x_{34}$ |

## Решение

Рассмотрим базисное распределение поставок, полученное методом наименьших затрат, так как при использовании этого метода сумма затрат ближе к оптимальному плану.

$$L_0 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 70 + 7 \cdot 30 = 790$$

|         | $B_1$   | $B_2$   | $B_3$   | $B_4$    | Производители |
|---------|---------|---------|---------|----------|---------------|
| $A_1$   | 1<br>20 | 2<br>40 | 5       | 3        | 60            |
| $A_2$   | 1       | 6       | 5<br>10 | 2<br>110 | 120           |
| $A_3$   | 6       | 3<br>70 | 7<br>30 | 4        | 100           |
| Потреб. | 20      | 110     | 40      | 110      | <b>280</b>    |

Найдем оценки свободных клеток, следуя выше указанной последовательности действий. Изменение коэффициентов затрат можно начинать с любого столбца (строки).

Потенциал столбца (строки), избранного для начала, может быть произвольным, например,  $u_1 = 1$ , но после его фиксации потенциалы остальных столбцов и строк будут определены однозначно.

Начнем с потенциала первой строки. Пусть  $u_1 = 1$ ,

тогда  $u_1 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 0, \quad u_1 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 1,$

$$u_3 + v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 2, \quad u_3 + v_3 = 7 \Rightarrow v_3 = 5,$$

$$u_2 + v_3 = 5 \Rightarrow u_2 = 0, \quad u_2 + v_4 = 2 \Rightarrow v_4 = 2.$$

|           | $v_1 = 0$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 5$ | $v_4 = 2$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $u_1 = 1$ | 1<br>20   | 2<br>40   | 5         | 3         |
| $u_2 = 0$ | 1         | 6         | 5<br>10   | 2<br>110  |
| $u_3 = 2$ | 6         | 3<br>70   | 7<br>30   | 4         |

Измененные коэффициенты затрат запишем в виде отдельной матрицы оценок:  $m_{ij} = 0$  — для заполненных и  $m_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$  — для свободных клеток.

$$m_{13} = 5 - (1 + 5) = -1$$

$$m_{14} = 3 - (1 + 2) = 0$$

$$m_{21} = 1 - (0 + 0) = 1$$

$$m_{22} = 6 - (0 + 1) = 5$$

$$m_{31} = 6 - (2 + 0) = 4$$

$$m_{34} = 4 - (2 + 2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



В оценочной матрице есть отрицательный элемент, следовательно, план не оптимален.

С отрицательной оценки начнем пересчет в новой таблице. Построим цикл пересчета и увеличим поставку  $x_{13}$  в клетке (1, 3).

|           | $v_1 = 0$ | $v_2 = 1$             | $v_3 = 5$             | $v_4 = 2$ |
|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------|
| $u_1 = 1$ | 1<br>20   | 2<br>(-)<br>40        | 5<br>* <b>(+)</b>     | 3         |
| $u_2 = 0$ | 1         | 6                     | 5<br>10               | 2<br>110  |
| $u_3 = 2$ | 6         | 3<br><b>(+)</b><br>70 | 7<br>30<br><b>(-)</b> | 4         |

Если в клетку (1, 3) передать поставку равную  $z$ , то поставка в клетках цикла со знаком «+» увеличивается на  $z$ , а в клетках со знаком «-» уменьшается на  $z$ . Поэтому искомая поставка определяется как  $\min\{30; 40\} = 30$ .

Передадим эту поставку по циклу с учетом знаков. Теперь клетка (1, 3) заполненная, а — (3, 3) свободная.

Получили новое базисное распределение поставок:

|       | $B_1$   | $B_2$    | $B_3$   | $B_4$    |
|-------|---------|----------|---------|----------|
| $A_1$ | 1<br>20 | 2<br>10  | 5<br>30 | 3        |
| $A_2$ | 1       | 6        | 5<br>10 | 2<br>110 |
| $A_3$ | 6       | 3<br>100 | 7       | 4        |

Вновь возникает вопрос об оптимальности базисного распределения поставок. Вычислим потенциалы так, чтобы коэффициенты затрат заполненных клеток стали равными нулю. Найдем оценки свободных клеток и запишем матрицу оценок.

Пусть  $u_1 = 1$ , тогда  $u_1 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 0$ ,

$$u_1 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 1, \quad u_1 + v_3 = 5 \Rightarrow v_3 = 4,$$

$$u_2 + v_3 = 5 \Rightarrow u_2 = 1, \quad u_2 + v_4 = 2 \Rightarrow v_4 = 1,$$

$$u_3 + v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 2.$$

|           | $v_1 = 0$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 1$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $u_1 = 1$ | 1<br>20   | 2<br>10   | 5<br>30   | 3         |
| $u_2 = 1$ | 1         | 6         | 5<br>10   | 2<br>110  |
| $u_3 = 2$ | 6         | 3<br>100  | 7         | 4         |

Заполним матрицу оценок:

$$m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{23} = m_{24} = m_{32} = 0$$

$$m_{14} = 3 - (1 + 1) = 1 \qquad m_{21} = 1 - (1 + 0) = 0$$

$$m_{22} = 6 - (1 + 1) = 4 \qquad m_{31} = 6 - (2 + 0) = 4$$

$$m_{33} = 7 - (2 + 4) = 1 \qquad m_{34} = 4 - (2 + 1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В оценочной матрице нет отрицательных элементов, следовательно, план оптимален.

Суммарные затраты на перевозку этого распределения поставок составляют:

$$L_{\min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 100 = 760.$$

Экономия

$$\Delta L = L_0 - L_{\min} = 790 - 760 = 30.$$

## Замечания

1. Поставка, передаваемая по циклу, не может быть ни меньше, ни больше минимальной поставки из клеток цикла со знаком «—».
2. Оптимальное распределение поставок, найденное в примере, не единственное, так как среди оценок свободных клеток в оценочной матрице есть нулевая клетка — это клетка (2, 1).

Рассмотрим **особые случаи**, которые могут возникнуть при решении транспортной задачи.

1. Поставка, переводимая по циклу, может оказаться равной 0. Это возможно, когда клетка цикла со знаком «—» содержала нулевую поставку.

Тогда по циклу передается нулевая поставка. В результате та свободная клетка, для которой был построен цикл становится заполненной нулевой поставкой, а клетка с нулевой поставкой — свободной.



2. Если при переводе поставки по циклу поставка обращается в 0 сразу в нескольких заполненных клетках, то свободной из них следует считать только одну (любую), остальные клетки, поставка в которых стала равной 0, следует считать заполненной нулевой поставкой.

## Пример

В резерве трех автотранспортных предприятий А, В, С находятся соответственно 30, 30 и 10 грузовых автомобилей. Составить оптимальный план распределения этих автомобилей к трем пунктам погрузки сельскохозяйственной продукции, если стоимость перевозки каждого из предприятий приведены в таблице.

|          | Резерв<br>предприятия | 1  | 2  | 3  |
|----------|-----------------------|----|----|----|
|          |                       | 20 | 10 | 40 |
| <i>A</i> | 30                    | 1  | 3  | 3  |
| <i>B</i> | 30                    | 3  | 3  | 2  |
| <i>C</i> | 10                    | 4  | 1  | 2  |

## Решение

Построим базисное распределение поставок методом «северо-западного угла».

|    | 20      | 10      | 40      |
|----|---------|---------|---------|
| 30 | 1<br>20 | 3<br>10 | 3       |
| 30 | 3       | 3<br>0  | 2<br>30 |
| 10 | 4       | 1       | 2<br>10 |

$$L_0 = 1 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 130$$

Установим оптимально ли полученное распределение поставок.

Вычислим потенциалы строк и столбцов таблицы поставок и составим матрицу оценок.

|           | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 1$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $u_1 = 1$ | 1<br>20   | 3<br>10   | 3         |
| $u_2 = 1$ | 3         | 3<br>0    | 2<br>30   |
| $u_3 = 1$ | 4         | 1         | 2<br>10   |

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как среди свободных клеток таблицы есть клетка (3, 2) с отрицательной оценкой, то данное базисное распределение поставок не оптимально.

Переведем поставку в клетку с отрицательной оценкой – (3, 2).

Для клетки (3, 2) построим означенный цикл пересчета.

|           | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 1$      |
|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $u_1 = 1$ | 1<br>20   | 3<br>10   | 3              |
| $u_2 = 1$ | 3         | 3<br>(-)  | 2<br>(+)<br>30 |
| $u_3 = 1$ | 4         | 1<br>*(+) | 2<br>(-)<br>10 |

Объем передаваемой поставки в данном случае

$$x_{32} = \min \{0; 10\} = 0.$$

Передавая по циклу нулевую поставку, приходим к новому базисному распределению поставок.

Подбирая потенциалы строк и столбцов таблицы поставок и составим матрицу оценок данного распределения.

|            | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 3$ |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| $u_1 = 1$  | 1<br>20   | 3<br>10   | 3         |
| $u_2 = -1$ | 3         | 3         | 2<br>30   |
| $u_3 = -1$ | 4         | 1<br>0    | 2<br>10   |

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как среди свободных клеток таблицы есть клетка (1, 3) с отрицательной оценкой, то данное базисное распределение поставок не оптимально.

Найдем новое базисное распределение, передавая поставку в клетку (1, 3).

Построим цикл пересчета для клетки (1, 3).

|            | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 3$      |
|------------|-----------|-----------|----------------|
| $u_1 = 1$  | 1<br>20   | 3<br>(-)  | 3<br>*(+)      |
| $u_2 = -1$ | 3         | 3         | 2<br>30        |
| $u_3 = -1$ | 4         | 1<br>(+)  | 2<br>(-)<br>10 |

Поставка, передаваемая в клетку (1, 3):

$$x_{13} = \min \{10; 10\} = 10.$$

При передаче по циклу 10 единиц груза станут равными 0 поставки в клетках (1, 2) и (3, 3). Свободной станет только одна клетка, например, (3, 3), а клетка (1, 2) заполнена нулевой поставкой.

Вычислим потенциалы строк и столбцов таблицы поставок и составим матрицу оценок нового распределения.

|            | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 2$ |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| $u_1 = 1$  | 1<br>20   | 3<br>0    | 3<br>10   |
| $u_2 = 0$  | 3         | 3         | 2<br>30   |
| $u_3 = -1$ | 4         | 1<br>10   | 2         |

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Среди оценок свободных клеток найденного распределения нет отрицательных, следовательно, базисное распределение поставок оптимально.

$$L_{\min} = 1 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 = 120.$$