Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра открытых горных работ

Составитель Д. Ю. Сирота

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СТАТИКА

Методические материалы
к практическим и самостоятельным работам

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления подготовки 21.05.04. Горное дело
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2025

Рецензенты:
Баёв М. А. – канд. техн. наук, доцент кафедры открытых горных работ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева»

Сирота Дмитрий Юрьевич
Теоретическая механика. Статика : методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся специальности 21.05.04 Горное дело / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра открытых горных работ; составитель Д. Ю. Сирота. – Кемерово : КузГТУ, 2025. – 1 файл (1146 Кб). – Текст : электронный.

Приведено содержание практических и самостоятельных работ, материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.
Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика» и организация практических и самостоятельных работ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В разделе КИНЕМАТИКА мы рассмотрели такое понятие теоретической механики, как **механическое движение** – изменение положения выбранного тела относительно других тел с течением времени.

Вполне очевидно, что для появления механического движения или смены одного его вида на другое, на тело необходимо оказать некое воздействие. В рамках теоретической механики изучается самое простейшее, но при этом фундаментальное из них.

Механическое воздействие – это такой тип воздействия одного тела на другое, при котором меняется вид его механического движения.

Теоретическая взаимосвязь между механическим воздействием и механическим движением осуществляется с помощью трёх законов Ньютона. Эти законы являются своеобразным аналогом аксиом Евклида в геометрии: с одной стороны они формализуют некие наблюдаемые явления окружающего мира, с другой стороны они формируют фундамент модельной конструкции, в рамках которой происходит анализ явлений окружающего мира.

I ЗАКОН. Если на выбранное тело не воздействуют другие тела, то оно остаётся неподвижным либо движется прямолинейно с постоянной скоростью.

II ЗАКОН. Воздействие одного тела на другое прямо пропорционально ускорению, с которым второе тело начнёт перемещаться:

$$\overline{F} = m \times \overline{a}, \tag{1}$$

где m – коэффициент пропорциональности (масса), кг; $\overline{a}$ – ускорение, м/с^2.

III ЗАКОН. При контакте два тела воздействуют друг на друга так, что эти воздействия равны по величине, направлены в противоположные стороны и расположены на одной прямой:

$$\overline{F}_{AB} = -\overline{F}_{BA} \text{ (2).} \tag{2}$$

Эти три закона в совокупности являются определением **силы** – меры воздействия одного тела на другое. Единицей измерения силы является искусственная величина «Ньютон» или «Н», которая фактически определяется по формуле (1): Н = кг$\times$м/с^2.

Сила характеризуется тремя элементами: точкой приложения, величиной воздействия и направлением воздействия. Если меняется одно из них, то меняется и сила. Математическим инструментом анализа взаимодействия различных механических воздействий является вектор.

ПРИМЕР 1. Частным случаем силы является вес тела – сила притяжения Землёй выбранного тела. Она определяется согласно закону гравитационного взаимодействия Ньютона $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$, где $G = 66{,}656 \times 10^{-12}$, м$^3\times$кг/с^2 – гравитационная постоянная; m_1 – масса выбранного тела, кг; $m_2 = 5{,}9722 \times 10^{24}$, кг – масса Земли; $r = 6{,}3713 \times 10^6$, м – радиус Земли. Учитывая (1), получим выражение для ускорения свободного падения: $g = \frac{G \times m_2}{r^2} = 9{,}80665$ м/с^2 и формулу для веса тела: $W = m \times g$.

Равновесие – состояние, при котором все части абсолютно жёсткого тела не перемещаются (остаются неподвижными) относительно некоторой системы координат.

На основе первого и второго закона Ньютона можно сделать вывод, что неподвижность тела (отсутствие его движения) эквивалентна отсутствию внешнего воздействия на тело.

В инженерной практики ситуация полного отсутствия внешних воздействий на выбранное тело, разумеется, невозможна.

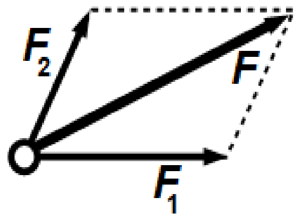
СТАТИКА – это раздел теоретической механики, который изучает условия равновесия одного или нескольких тел в заданных условиях.

2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Рассмотренные в первом пункте три закона Ньютона описывают внешние воздействия на одну материальную точку. Рассмотрим эту ситуацию более детально.

Система сходящихся сил – это набор сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Общее воздействие системы сходящихся сил можно заменить эквивалентным воздействием **равнодействующей** силы. Постулируется, что в простейшем случае воздействия двух сил вектор равнодействующей направлен вдоль диагонали параллелограмма, а её длина определяется по формуле



–рисунок 2.1

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \text{ и } F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \times F_1 \times F_2 \times \cos(\gamma). \qquad (3)$$

ПРИМЕР 2. Пусть точка «А» массой 1 кг движется по окружности радиуса 0,5 м. Закон движения точки определяется формулой $s = 0{,}125 \times t^3$. Определить величину действующей силы в момент времени 3 с.

Найдём величину скорости в данный момент времени:

$$v\big|_{t=3} = \frac{ds}{dt} = 0{,}125 \times 3 \times t^2\big|_{t=3} = 3{,}375 \text{ м/с}.$$

Найдём касательную и нормальную компоненты ускорения:

$$a_k\big|_{t=3} = \frac{dv}{dt} = 0{,}125 \times 3 \times 2 \times t\big|_{t=3} = 2{,}25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n\big|_{t=3} = \frac{v^2}{R} = 22{,}781 \text{ м/с}^2.$$

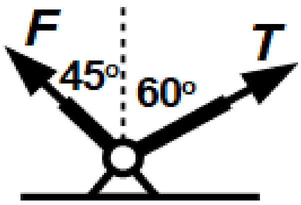
Согласно второму закону Ньютона компоненты вектора силы:

$$F_k = m \times a_k = 2{,}25 \text{ Н}; \; F_n = m \times a_n = 22{,}781 \text{ Н}.$$

Таким образом, величина силы, которая привела к появлению такого ускорения при движении, по формуле (5) равна:

$$F^2 = F_k^2 + F_n^2 = 22{,}892^2, \text{ Н}^2.$$

ПРИМЕР 3. Определить величину неизвестной силы F, если величина силы $T = 200$ Н, а равнодействующая двух сил направлена вертикально вверх? Найти величину равнодействующей.



–рисунок 2.2

Так как равнодействующая направлена вертикально, то при проектировании векторного равенства $\overline{R} = \overline{F} + \overline{T}$ на горизонталь, получим уравнение: $0 = -F \times \sin(45^{\circ}) + T \times \sin(60^{\circ})$. Откуда получим: $F \times \sin(45^{\circ}) = T \times \sin(60^{\circ}) \Rightarrow F = 244{,}979$ Н.

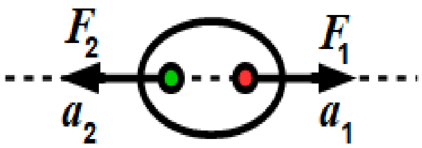
Найдём величину равнодействующей:

$R^2 = F^2 + T^2 + 2 \times F \times T \times \cos(\gamma) = 273{,}226^2$, Н^2.

В разделе КИНЕМАТИКА были разобраны фактически три вида движения тела: **поступательное** (прямолинейное и криволинейное), **вращательное и плоское**.

СЛУЧАЙ 1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

а) прямолинейное движение. Пусть на тело действует только одна сила $\overline{F}_1$. Тогда тело движется по прямой с неким ускорением $\overline{a}_1$, которое определится по формуле (1). Для компенсации этого ускорения необходимо направить другую силу $\overline{F}_2$, которая породит своё ускорение $\overline{a}_2$, которое также будет направлено в противоположную сторону.



–рисунок 2.3

Аналитически эту ситуацию можно записать следующим образом:

$$\overline{F}_2 = -\overline{F}_1 \Leftrightarrow \overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0. \qquad (4)$$

б) криволинейное движение. Пусть на тело действуют две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, каждая из которых породит своё ускорение $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

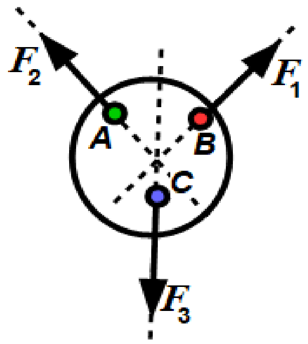
Эти две силы можно заменить одной силой – равнодействующей $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, а ускорения – одним ускорением: $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

Для компенсации этого ускорения необходимо направить в противоположную сторону от равнодействующей силу $\overline{F}_3$, которая породит своё ускорение $\overline{a}_3$, которое также будет направлено в противоположную сторону от равнодействующего ускорения.

Аналитически эту ситуацию можно записать следующим образом:

$$\overline{F}_3 = -\overline{R} \Leftrightarrow \overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0. \qquad (5)$$

Практическая, расчётная реализация этой формулы основана на проектировании векторного равенства на оси координат. В результате получаем систему из двух уравнений, единственное решение которой возможно, если она будет содержать две неизвестные.

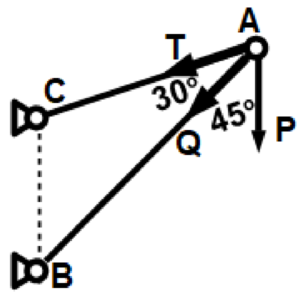


–рисунок 2.4

Для реализации этого векторного равенства надо знать, как именно реализуется третий закон Ньютона в различных практических случаях (стержнях, шарнирах, поверхностях) и какие силы он порождает.

ПРИМЕР 4. Дана стержневая конструкция, которая нагружена силой $P = 450$ Н. Найти реакции стерней «АС» и «АВ».

Активная внешняя сила P воздействует на **стержни**, порождая в них реакции, которые противодействуют внешним воздействиям и направлены вдоль прямой, которая соединяет концы стержня.



–рисунок 2.5

Направим реакции стержней от точки «А» к точкам «В» и «С». Условие равновесие имеет вид: $\overline{F} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{Q} = 0$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат, одну из которых направим вдоль «АВ»:

$$\begin{matrix} F_x = P_x + T_x + Q_x = 0 \\ F_y = P_y + T_y + Q_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_x = -P \times \cos 45^{\circ} - T \times \cos 30^{\circ} - Q = 0 \\ F_y = -P \times \sin 45^{\circ} + T \times \sin 30^{\circ} = 0 \end{matrix}$$

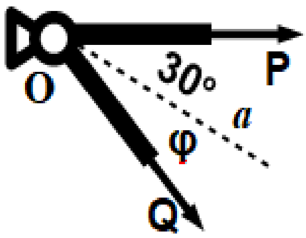
$$\Rightarrow \begin{matrix} Q = -P \times \cos 45^{\circ} - T \times \cos 30^{\circ} = -869{,}186 \\ -P \times \sin 45^{\circ} + T \times \sin 30^{\circ} = 0 \Rightarrow T = 636{,}3 \end{matrix}$$

Отрицательное значение силы Q означает, что вектор силы направлен в противоположную сторону от указанного на рисунке. Сделаем проверку, найдя равнодействующую двух сил T, Q:

$$\overline{S} = \overline{T} + \overline{Q} \text{ и } S^2 = T^2 + Q^2 + 2 \times T \times Q \times \cos(\gamma) = 449{,}921^2, \text{ Н}^2.$$

Совпадение величины равнодействующей S с величиной третьей силы P указывает на правильность решения.

ПРИМЕР 5. Равнодействующая двух сил направлена вдоль оси «Оа» и равна 5 кН. Найти неизвестную силу Q и угол φ, если $P = 3$ кН.



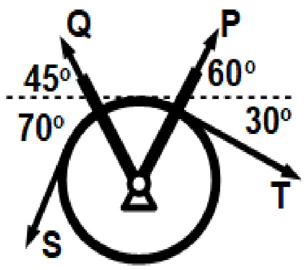
–рисунок 2.6

Запишем равнодействующую двух сил P и Q: $\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$. Спроектируем это векторное равенство на оси координат:

$$\begin{matrix} F_a = P_a + Q_a \\ F_b = P_b + Q_b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5 = 3 \times \cos 30^{\circ} + Q \times \cos(\varphi) \\ 0 = 3 \times \sin 30^{\circ} - Q \times \sin(\varphi) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Q \times \cos(\varphi) = 2{,}402 \\ Q \times \sin(\varphi) = 1{,}5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} tg(\varphi) = 0{,}624 \Rightarrow \varphi = 31{,}984 \\ Q = 2{,}852 \end{matrix}$$

ПРИМЕР 6. Растяжимая верёвка перекинута через блок, который удерживается в равновесии двумя стержнями. Найти реакции стержней P, Q, если известно, что в данный момент времени внешние силы $S = 100$ Н, $T = 150$ Н, а углы указаны на рисунке.



–рисунок 2.7

Условие равновесия имеет вид $\overline{F} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{Q} + \overline{S} = 0$. Спроектируем это векторное равенство на стандартные оси координат:

$$\begin{matrix} F_x = P_x + T_x + Q_x + S_x = 0 \\ F_y = P_y + T_y + Q_y + +S_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} F_x = -Q \times \cos 45^{\circ} - S \times \cos 70^{\circ} + P \times \cos 60^{\circ} + T \times \cos 30^{\circ} = 0 \\ F_y = Q \times \sin 45^{\circ} - S \times \sin 70^{\circ} + P \times \sin 60^{\circ} - T \times \sin 30^{\circ} = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} Q\times 0{,}707 - P\times 0{,}5 = T\times 0{,}866 - S\times 0{,}342 \\ Q\times 0{,}707 + P\times 0{,}866 = T\times 0{,}5 + S\times 0{,}939 \end{array}.$$

Решая данную систему уравнений: $P = 53{,}587$ Н и $Q = 173{,}258$ Н.

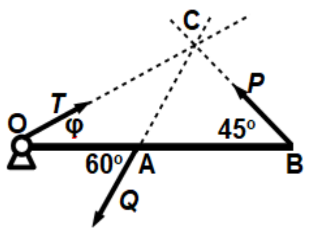
Сделаем проверку, найдя равнодействующую сил *P, Q, S, T*.

$\overline{R}_1 = \overline{P} + \overline{Q}$ и $R_1^2 = P^2 + Q^2 + 2\times P\times Q\times\cos(75^{\circ}) = 194{,}154^2$, Н^2.

$\overline{R}_2 = \overline{S} + \overline{T}$ и $R_2^2 = S^2 + T^2 + 2\times S\times T\times\cos(80^{\circ}) = 194{,}189^2$, Н^2.

Совпадение величины двух равнодействующих друг с другом указывает на правильность решения.

ПРИМЕР 7. Дана балка, которая в точке «О» опирается на неподвижный шарнир. Найти неизвестную реакцию шарнира «О», если на балку действуют две внешние силы $P = 3$ кН и $Q = 5$ кН, которые приложены в точках на расстояниях $OA = 0{,}75$ м и $AB = 1{,}25$ м.



–рисунок 2.8

При решении данной задачи используется **теорема о трёх силах**: если под действием трёх непараллельных сил, которые лежат в одной плоскости, твёрдое тело находится в равновесии, то линии действия всех этих сил пересекаются в одной точке.

Активные внешние силы воздействуют на **неподвижный шарнир**, порождая в ней реакцию, которая направлена в произвольном направлении, и произвольной величины, значения которых определяются внешней нагрузкой.

Таким образом, на основе теоремы о трёх силах, линии действия всех трёх сил должны пересекаться в одной точке «С».

Условие равновесие имеет вид: $\overline{F} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{Q} = 0$. Спроектируем это векторное равенство на оси координат, одну из которых направим вдоль «ОВ»:

$$\begin{array}{c} F_x = -P\times\cos 45^{\circ} + T\times\cos\varphi - Q\times\cos 60^{\circ} = 0 \\ F_y = P\times\sin 45^{\circ} + T\times\sin\varphi - Q\times\sin 60^{\circ} = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} T\times\cos\varphi = P\times 0{,}707 + Q\times 0{,}5 = 4{,}621 \\ T\times\sin\varphi = -P\times 0{,}707 + Q\times 0{,}866 = 2{,}209 \end{array} \Rightarrow$$

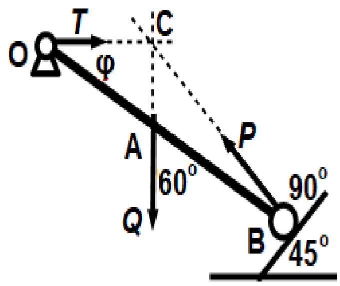
$$\Rightarrow \begin{matrix} tg(\varphi) = 0{,}478 \Rightarrow \varphi = 25{,}549 \\ T = 5{,}122 \end{matrix}.$$

Сделаем проверку, найдя равнодействующую двух сил P, Q:
$\overline{S} = \overline{P} + \overline{Q}$ и $S^2 = P^2 + Q^2 + 2 \times P \times Q \times \cos(105^o) = 5{,}122^2$, Н^2.

Совпадение величины равнодействующей S с величиной третьей силы T указывает на правильность решения.

ПРИМЕР 8. Дана балка, которая в точке «О» опирается на неподвижный, а в точке «В» на подвижный шарниры. Найти неизвестные реакции шарниров «О» и «В», если на балку действуют сила $Q = 3$ кН. Точка «А» расположена так, что расстояния $OA = 0{,}75$ м и $AB = 1{,}25$ м.

Активные внешние силы воздействуют на **подвижный шарнир (гладкую опору)**, порождая в ней реакцию, которая направлена перпендикулярно опоре, на которой стоит шарнир.



–рисунок 2.9

На основе теоремы о трёх силах, линии действия всех трёх сил должны пересекаться в одной точке «С».

В отличии от предыдущего примера здесь неизвестных формально три: силы P и T, а также угол φ.

Найдём угол φ исходя из геометрических соображений. Рассмотрим треугольник «АВС». Применим теорему синусов:

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \Rightarrow \frac{\sin 15^o}{AC} = \frac{\sin 45^o}{1{,}25} \Rightarrow AC = 0{,}458.$$

Рассмотрим треугольник «ОАС».
Найдём длину отрезка «ОС»: по теореме косинусов:

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2 \times OA \times AC \times \cos(60^o) = 0{,}655^2.$$

Применим теорему синусов:

$$\frac{\sin O}{AC} = \frac{\sin A}{OC} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{0{,}458} = \frac{\sin(60^o)}{0{,}655} \Rightarrow \sin\varphi = 0{,}606 \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}795.$$

Дальнейшее решение будем находить по аналогии. Условие равновесие имеет вид $\overline{F} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{Q} = 0$. Спроектируем это векторное равенство на оси координат, одну из которых направим вдоль «ОВ»:

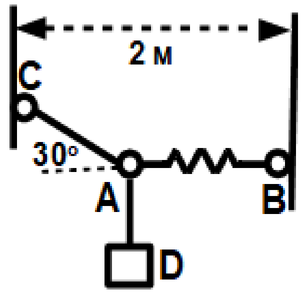
$$\begin{aligned} F_x &= -P \times \cos 15^{\circ} + T \times \cos \varphi + Q \times \cos 60^{\circ} = 0 \\ F_y &= P \times \sin 15^{\circ} + T \times \sin \varphi - Q \times \sin 60^{\circ} = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} T \times 0{,}795 - P \times 0{,}966 &= -Q \times 0{,}5 = -1{,}5 \\ T \times 0{,}606 + P \times 0{,}259 &= Q \times 0{,}866 = 2{,}598 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} T &= 2{,}681 \\ P &= 3{,}758 \end{aligned}$$

Сделаем проверку, найдя равнодействующую двух сил P, Q: $\overline{S} = \overline{P} + \overline{Q}$ и $S^2 = P^2 + Q^2 + 2 \times P \times Q \times \cos(135^{\circ}) = 2{,}679^2$, Н^2.

Совпадение величины равнодействующей S с величиной третьей силы T указывает на правильность решения.

ПРИМЕР 9. Определить длину растянутого троса «АС», который поддерживает груз весом 80 Н. Первоначальная длина пружины «АВ» равна 0,4 м, а коэффициент её жёсткости – 300 Н/м.



–рисунок 2.10

При решении примеров на равновесие конструкции, которая содержит пружины или другие потенциально подвижные элементы, используют **принцип отвердевания**: если нетвёрдое тело находится в равновесии, то оно не изменится, если тело станет абсолютно жёстким.

В данном случае мы полагаем, что растянутая пружина является абсолютно жёстким телом и не деформируется в процессе решения задачи.

Составим и решим систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} -T_C \times \cos 30^{\circ} + T_B &= 0 \\ T_C \times \sin 30^{\circ} - T_D &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} T_C &= 160 \\ T_B &= 138{,}56 \end{aligned}$$

Взаимосвязь силы, которая появляется в пружине при её деформации (силы упругости), с деформацией пружины определяется формулой $T_B = k \times s_B \Rightarrow s_B = 0{,}462$ м.

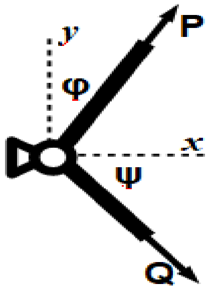
Тогда $L_{AB} = l_{AB} + s_B = 0{,}862$ м. Из геометрических соображений получим, что $L_{AB} + l_{AC} \times \cos 30^{\circ} = 2 \Rightarrow l_{AC} = 1{,}314$ м.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК С1. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СИЛА

Задача 1. Определить величину равнодействующей силы, если $\varphi = 25^{\circ}$, $\psi = 55^{\circ}$, $P = 6$ кН, $Q = 8$ кН.

Ответ: $F_x = 7{,}124$, $F_y = -1{,}115$, $F = 7{,}211$ кН.

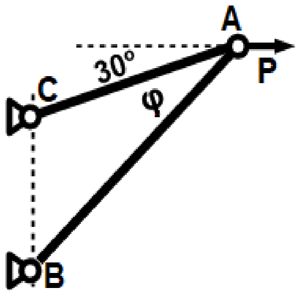


Задача 2. Определить величину угла φ и силу P, если равнодействующая сила равна 10 кН направлена по горизонтали, а $\psi = 75^{\circ}$ и $Q = 8$ кН.

Ответ: $\varphi = 45{,}739^{\circ}$, $P = 11{,}0719$ кН.

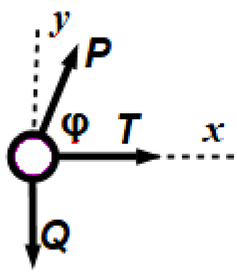
Задача 3. Определить угол между стержнями, при условии, что сила $P = 400$ Н является равнодействующей реакций стержней «AB» и «AC». Реакция стержня «AC» равна 600 Н.

Ответ: $\varphi = 38{,}262^{\circ}$, $Q = 322{,}967$ кН.



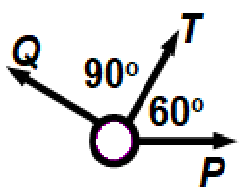
Задача 4. Определить величину неизвестного угла φ и величину силы P, если $T = 350$ Н, $Q = 100$ Н, а равнодействующая направлена под углом в 30° к горизонтали и равна 600 Н.

Ответ: $\varphi = 67{,}023^{\circ}$, $P = 434{,}469$ кН.



Задача 5. Определить величину силы P, если величины сил $T = 800$ Н, $Q = 3000$ Н, а величина равнодействующей равна 2400 Н.

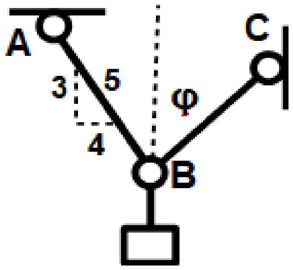
Ответ: $P = 1222{,}7031$ кН, $P = 3173{,}297$ кН.



БЛОК С2. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Задача 1. Определить натяжение тросов «АВ» и «ВС», если вес груза равен 600 Н, а угол $\varphi = 45^{\circ}$.

Ответ: $T_C = 484{,}946$ Н, $T_A = 428{,}571$ Н.

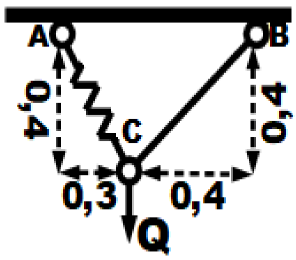


Задача 2. Определить угол φ и натяжение каната «ВС», если натяжение каната $T_{AB} = 100$ Н и вес груза равен 600 Н.

Ответ: $\varphi = 8{,}427^{\circ}$, $T_C = 545{,}894$ кН.

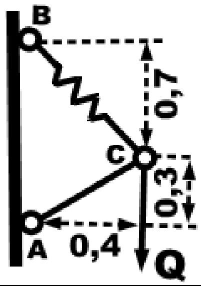
Задача 3. Определить первоначальную длину пружины «АС», если сила $Q = 100$ Н, а коэффициент жёсткости пружины $k = 1000$ Н/м.

Ответ: $l_{AC} = 0{,}429$ м.



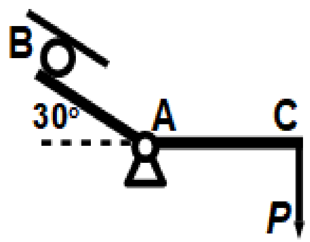
Задача 4. Определить жёсткость пружины «ВС», если её первоначальная длина была равна $l_{BC} = 0{,}7812$ м, а сила $Q = 100$ Н.

Ответ: $k = 3225{,}64$ Н/м.



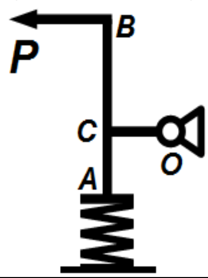
Задача 5. На рычаг воздействует внешняя сила $P = 60$ Н. Определить реакции в шарнире «А» и опоре «В», если $AC = 1$ м, $AB = 0{,}75$ м.

Ответ: $T_B = 80{,}362$ Н, $T_A = 135{,}747$ Н.



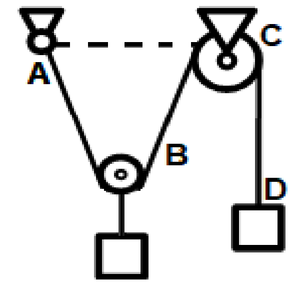
Задача 6. Сила P интенсивностью 300 Н воздействует на пружину в точке «А». Определить реакцию шарнира «О» и деформацию пружины «А», если её жёсткость равна $k = 8000$ Н/м, а расстояния $BC = 0{,}4$ м, $OC = 0{,}3$ м.

Ответ: $T_A = 400$ Н, $Q_O = 500$ Н, $s_A = 0{,}05$ м.



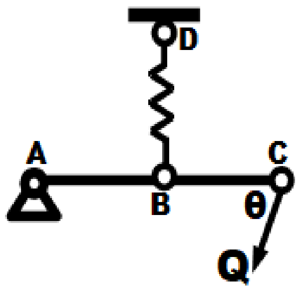
Задача 7. Дан полиспастный механизм. Вес поднимаемого груза 100 Н. Общая длина троса 4 м; расстояние $AC = 1$ м, $CD = 1{,}5$ м. Определить минимально необходимый вес груза «D», а также реакцию шарнира блока «C». Участок «ABC» при расчётах считать треугольником.

Ответ: $T_D = 47{,}133$ Н, $Q_C = 93{,}049$ Н.



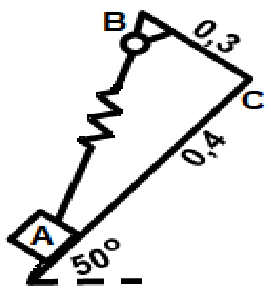
Задача 8. Балка «AC» находится в равновесии под действием растянутой пружины «BD». Определить реакцию шарнира и необходимую деформацию пружины, если $Q = 100$ Н, угол $\theta = 50^{\circ}$, коэффициент жёсткости пружины $k = 2000$ Н/м, расстояния $AB = 0{,}65$ м и $BC = 0{,}35$ м.

Ответ: $s_{BD} = 0{,}0589$ м, $S_A = 76{,}378$ Н.



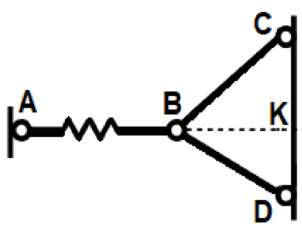
Задача 9. Груз весом 50 Н находится в равновесии на гладкой поверхности под углом 50°. Определить натяжение в пружине, деформацию пружины и длину пружины до её растяжения, если коэффициент жёсткости $k_{AB} = 200$ Н/м.

Ответ: $T_{AB} = 47{,}878$ Н, $s_{AB} = 0{,}239$, $l_{AB} = 0{,}261$



Задача 10. Жёсткость пружины равна 800 Н/м, а первоначальная длина – 200 мм. Определить усилия в тросах «BC» и «BD», если длины $AB = 500$ мм, $CK = BK = 400$ мм, $KD = 300$ мм.

Ответ: $T_{BD} = 171{,}429$ Н, $T_{BC} = 145{,}484$ Н.



ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

С-1. Равновесие тела под действием системы сходящихся сил.

ЗАДАНИЕ 1. Груз весом $P = 100 + i \times j$ Н находится в равновесии под действием троса, который перекинут через блок. Определить реакцию неподвижного шарнира блока.

ЗАДАНИЕ 2. Груз весом $P = 100 - i \times j$ Н находится в равновесии под действием троса, который перекинут через блок. Определить величины деформаций пружин, благодаря которым блок находится в равновесии.

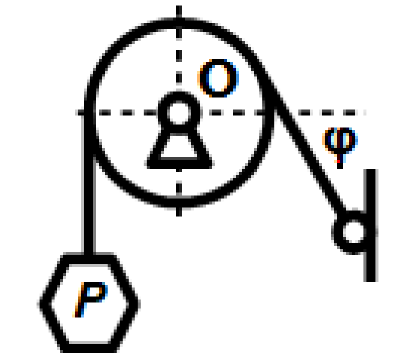
ЗАДАНИЕ 3. Внешняя сила $P = 100 + i \times j - i - j$ Н воздействует на жёсткую балку. Определить первоначальную длину пружины и деформацию, на которую необходимо её растянуть, чтобы балка находилась в равновесии.

Все необходимые числовые данные приведены в таблицах.

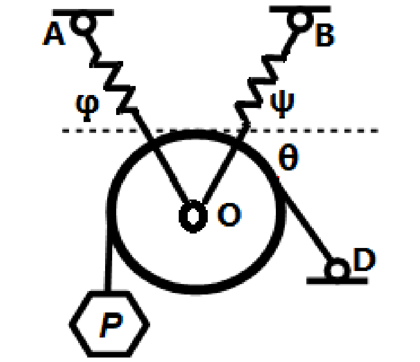
Сделать проверку, по аналогии с приведённой в образцах ниже.

Таблица 1.
Группа данных, которая соответствует 1-й цифре зачётки

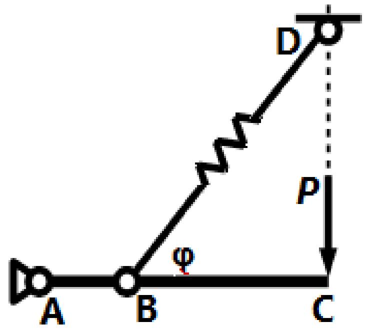
i – 1-я цифра	φ	ψ	θ	k_{OA}, Н/м
0	60	43	51	1850
1	65	48	56	1950
2	70	53	61	2300
3	64	58	66	1950
4	68	44	54	2500
5	72	40	59	1760
6	65	55	63	1550
7	70	52	68	2470
8	75	47	73	2410
9	56	56	78	2100



– рисунок к ЗАДАНИЮ 1



– рисунок к ЗАДАНИЮ 2



– рисунок к ЗАДАНИЮ 3

Таблица 2.

Группа данных, которая соответствует 2-й цифре зачётки

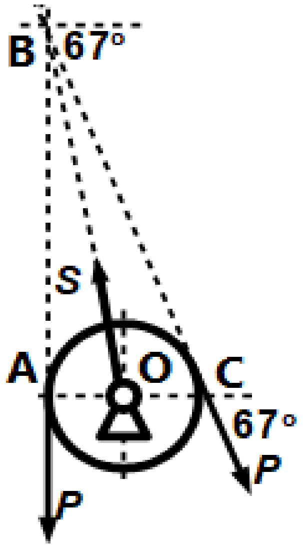
j – 2-я цифра	AB, м	BC, м	k_{BD}, Н/м	k_{OB}, Н/м
0	3	4,5	1550	1900
1	3,5	5,0	1655	1850
2	4,0	5,5	1560	1700
3	4,5	6,0	1665	1950
4	5,0	6,5	1850	1700
5	3,2	4,3	1550	1900
6	3,7	5,4	1755	1850
7	4,5	5,8	1960	1700
8	4,7	6,6	1665	1950
9	5,2	7,2	1850	1700

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ.

ЗАДАНИЕ 1. Груз весом $P = 100$ Н находится в равновесии под действием троса, который перекинут через блок. Определить реакцию неподвижного шарнира блока, если $\varphi = 67^{\circ}$.

Так как трос, на котором держится груз, является нерастяжимым, то силы натяжения по разные стороны от блока совпадают друг с другом.

Продлим линии действия сил вверх, получив треугольник «АВС». Шарнир «О» породит реакцию, которая направлена вверх, вдоль прямой «ОВ». Тогда величина уравновешивающей силы должна совпадать с величиной равнодействующей двух активных внешних сил. Тогда



–рисунок ИДЗ_С_1_1

$$S^2 = R^2 =$$

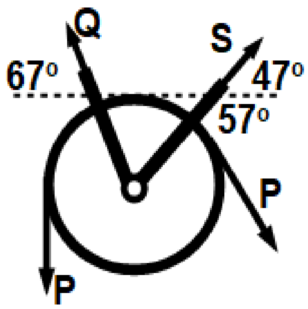
$$= P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \times \cos(90^{\circ} - \varphi) = 195{,}985^2$$

Сделаем **проверку.** На основе векторного уравнения равновесия, найдём неизвестные проекции реакции шарнира на стандартные оси координат.

$$\begin{matrix} S_x + P \times \cos(\varphi) = 0 \\ S_y - P - P \times \sin(\varphi) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} S_x = -39{,}073 \\ S_y = 192{,}051 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^2 = S_x^2 + S_y^2 = 195{,}985^2.$$

ЗАДАНИЕ 2. Груз весом $P = 100$ Н находится в равновесии под действием троса, который перекинут через блок. Определить величины деформаций пружин, благодаря которым блок находится в равновесии. При расчётах принять, что углы $\varphi = 67^{\circ}$, $\psi = 47^{\circ}$, $\theta = 57^{\circ}$, а коэффициенты жёсткости $k_{OB} = 500$ Н/м и $k_{OA} = 700$ Н/м.



–рисунок ИДЗ_С_1_2

Так как трос, на котором держится груз, является нерастяжимым, то силы натяжения по разные стороны от блока совпадают друг с другом.

Условие равновесие имеет вид: $\overline{F} = \overline{P} + \overline{P} + \overline{S} + \overline{Q} = 0$. Спроектируем это векторное равенство на стандартные оси координат:

$$\begin{matrix} F_x = P \times \cos 57^{\circ} + S \times \cos 47^{\circ} - Q \times \cos 67^{\circ} = 0 \\ F_y = -P - P \times \sin 57^{\circ} + S \times \sin 47^{\circ} + Q \times \sin 67^{\circ} = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} S \times 0{,}682 - Q \times 0{,}391 = -54{,}464 \\ S \times 0{,}731 + Q \times 0{,}921 = 183{,}867 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} S = 23{,}7768 \\ Q = 180{,}7667 \end{matrix}$$

Деформации пружин под действие сил реакций определим следующим образом: $S = k_{OB} \times s_{OB} \Rightarrow s_{OB} = 0{,}0476$ м и

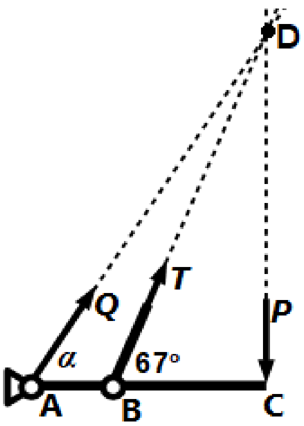
$$Q = k_{OA} \times s_{OA} \Rightarrow s_{OA} = 0{,}2582 \text{ м.}$$

Сделаем **проверку**: найдём равнодействующие верхней и нижней группы сил; если основное решение правильное, то они должны совпасть между собой.

$$R_1^2 = P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \times \cos(90^{\circ} - \theta) = 191{,}764^2.$$

$$R_2^2 = Q^2 + S^2 + 2 \times Q \times S \times \cos(180^{\circ} - \varphi - \psi) = 191{,}672^2$$

ЗАДАНИЕ 3. Внешняя сила $P = 100$ Н воздействует на жёсткую балку. Определить первоначальную длину пружины и её деформацию, на которую необходимо её растянуть, чтобы балка находилась в равновесии. При расчётах принять, что угол $\varphi = 67^{\circ}$, коэффициент жёсткости $k_{BD} = 1470$ Н/м, $AB = 0{,}37$ мм и $BC = 0{,}53$ мм.



–рисунок ИДЗ_С_1_3

Шаг 1. Найдём значения тригонометрических функций угла α.

$$tg(\varphi) = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DC = BC \times tg(\varphi) = 1{,}2486 \text{ мм.}$$

$$tg(\alpha) = \frac{DC}{AC} = 1{,}3873 \Rightarrow \alpha = 54{,}216^{\circ} \Rightarrow \begin{matrix} \cos(\alpha) = 0{,}5847 \\ \sin(\alpha) = 0{,}8112 \end{matrix}$$

Шаг 2. Найдём длину растянутой пружины:

$$L_{BD}^2 = L_{DC}^2 + L_{BC}^2 = 1{,}3564^2 \Rightarrow L_{BD} = 1{,}3564 \text{, м.}$$

Шаг 3. Найдём реакции опор. Условие равновесие имеет вид $\overline{F} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{Q} = 0$. Спроектируем это векторное равенство на стандартные оси координат:

$$\begin{matrix} F_x = Q \times \cos\alpha + T \times \cos 67^{\circ} = 0 \\ F_y = -P + Q \times \sin\alpha + T \times \sin 67^{\circ} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0{,}5847 \times Q + 0{,}3907 \times T = 0 \\ 0{,}8112 \times Q + 0{,}9205 \times T = 100 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} Q = -176{,}548 \\ T = 264{,}212 \end{matrix}.$$

Отрицательное значение величины реакции шарнира указывает на то, что его реакция должна быть направлена в противоположную сторону.

Шаг 4. Найдём деформацию пружины под действием силы реакции: $T = k_{BD} \times s_{BD} \Rightarrow s_{BD} = 0{,}1797$ м, найдём также исходную длину пружины: $l_{BD} = L_{BD} - s_{BD} = 1{,}1767$ м.

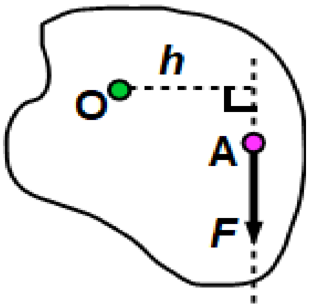
Сделаем **проверку**: найдём равнодействующую двух сил; если основное решение правильное, то она должна совпасть с третьей силой:

$$R^2 = P^2 + T^2 + 2 \times P \times T \times \cos(90^{\circ} + \varphi) = 176{,}539^2.$$

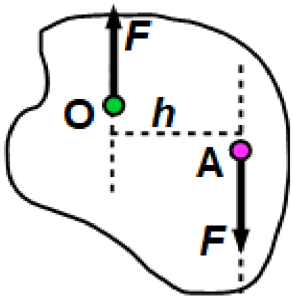
3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

СЛУЧАЙ 2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Вращательное движение абсолютно жёсткого тела или движение точки по окружности возможно в двух случаях силового воздействия.



–рисунок 2.11



–рисунок 2.12

а) действует одна сила *F*, приложенная в точки «А», а тело вращается вокруг неподвижной фиксированной точки «О».

б) действуют две силы, которые образуют специальную модельную конструкцию – **пару сил**: две равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны силы.

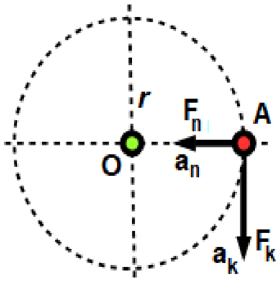
В обоих случаях мерой механического воздействия, которое порождает вращательное движение, является **момент силы или момент пары сил**, которые определяются по одной и той же формуле:

$$M_O(\overline{F}) = \pm h \times F, \qquad (6)$$

где h – кратчайшее расстояние от точки «О» до линии действия силы $\overline{F}$, м; F – величина силы, Н; знак «+» соответствует повороту против часовой стрелки; знак «–» – повороту по часовой стрелке.

Получим выражение для закона Ньютона в случае движения точки по окружности радиуса *r*.

Пусть дана произвольно направленная сила $\overline{F}$. Разложим векторное равенство второго закона Ньютона $\overline{F} = m \times \overline{a}$ на касательную и нормальную компоненты:



$$\overline{F} = m \times \overline{a} \Rightarrow \overline{F}_k + \overline{F}_n = m \times (\overline{a}_k + \overline{a}_n).$$

–рисунок 2.13

Найдём момент силы относительно точки «О». Для этого применим **теорему Вариньона**: момент равнодействующей относительно фиксированной точки равен сумме моментов компонент этой равнодействующей относительно той же фиксированной точки:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \Rightarrow M_O(\overline{F}) = M_O(\overline{F}_1) + M_O(\overline{F}_2). \qquad (7)$$

Тогда для нормальной компоненты по формуле (7) получим, что $M_O(\overline{F}_n) = \pm h \times F_n = 0$, так как линия действия компоненты силы $\overline{F}_n$ проходит через точку «О».

Для касательной компоненты по той же формуле (7) получим, что: $M_O(\overline{F}_k) = \pm r \times F_k = \pm r \times m \times a_k = \pm m \times r^2 \times \varepsilon$, где ε – угловое ускорение мгновенного вращательного движения отрезка «ОА» вокруг точки «О». Величина $I_O = m \times r^2$ получила название момента инерции точки относительно центра вращения «О», кг×м^2. Тогда второй закон Ньютона для вращательного движения примет вид

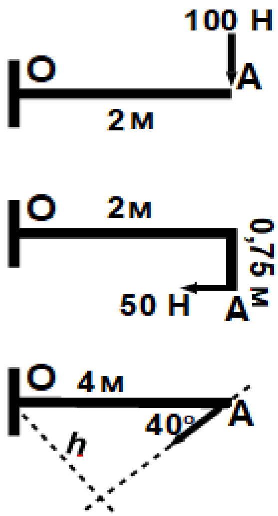
$$M_O(\overline{F}) = I_O \times \varepsilon. \qquad (8)$$

ПРИМЕР 10. Определить момент силы относительно фиксированной точки для следующих трёх случаев.

а) $M_O(\overline{F}) = -100 \times 2 = -200$, Нм.

б) $M_O(\overline{F}) = -50 \times 0{,}75 = -37{,}5$, Нм.

в) $M_O(\overline{F}) = -40 \times 4 \times \cos 50^{\circ} = -102{,}846$, Нм.



–рисунок 2.14

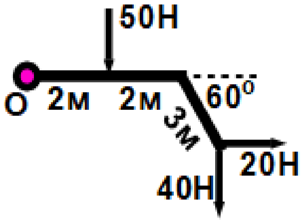
ПРИМЕР 11. Определить сумму моментов всех сил, приложенных к балке, относительно точки «О».

$M_1 = M_O(\overline{F_1}) = -50 \times 2 = -100$ Нм;

$M_2 = M_O(\overline{F}2) = +20 \times 3 \times \sin 60^{\text{o}} = +51{,}96$ Нм;

$M_3 = M_O(\overline{F}3) = -40 \times (4 + 3 \times \cos 60^{\text{o}}) = -220$ Нм;

$M_O(\overline{F}) = M_1 + M_2 + M_3 = -268{,}04$ Нм.



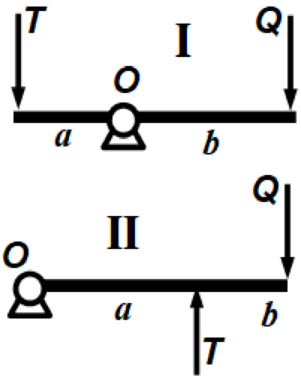
–рисунок 2.15

Пусть на тело действует только одна сила или пара сил с моментом M_1. Тогда тело совершает вращательное движение вокруг некоторой точки с угловым ускорением ε_1, которое определится по формуле (10). Для компенсации этого ускорения необходимо направить другую силу или пару сил с моментом M_2, которая породит своё ускорение ε_2, которое также будет направлено в противоположную сторону.

Аналитически эту ситуацию можно записать следующим образом:

$$M_2 = -M_1 \Leftrightarrow M = M_1 + M_2 = 0. \qquad (9)$$

ПРИМЕР 12. Определить соотношения расстояний от шарнира до точек приложения сил, если величины сил $Q = 50$ Н и $T = 75$ Н.



–рисунок 2.16

Каждая из сил порождает некоторое вращательное воздействие, которое характеризуется моментами:

случай I: $M_O(\overline{T}) = +a \times T$ и $M_O(\overline{Q}) = -b \times Q$.

случай II: $M_O(\overline{T}) = +a \times T$ и $M_O(\overline{Q}) = -(a+b) \times Q$.

По формуле (12) получим $M_O(\overline{T}) + M_O(\overline{Q}) = 0$.

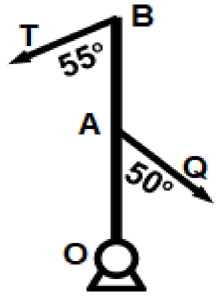
Тогда для рисунка I: $a \times T - b \times Q = 0 \Rightarrow d_{\text{I}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{T}{Q} = 1{,}5$.

Тогда для рисунка II: $a \times T - (a+b) \times Q = 0 \Rightarrow d_{\text{II}} = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{T}{Q} = 1{,}5$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК С3. МОМЕНТ СИЛЫ И ПАРЫ СИЛ

Задача 1. Определить величину силы Q, необходимую для равновесия балки «ОВ», если величина силы $T = 50$ Н и расстояния $OA = 4$ м и $OB = 5$ м.

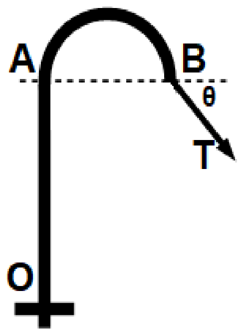


Ответ: $Q = 66{,}833$ Н.

Задача 2. Определить величину силы Q, необходимую для равновесия балки «ОВ», если величина силы $T = 50$ Н, расстояния $OA = 4$ м, $OB = 5$ м, а в шарнире «О» действует пара сил с моментов $M = +500$, Нм.

Ответ: $Q = 230{,}009$ Н.

Задача 3. Определить величину момента пары сил, который появляется в заделке «О», чтобы компенсировать вращательное воздействие силы $T = 50$ Н, если угол $\theta = 65^{\circ}$, отрезок $OA = 2$ м, а диаметр полуокружности $AB = 1$ м.

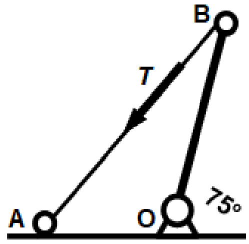


Ответ: $M_O = -87{,}577$, Нм.

Задача 4. Определить угол θ приложения силы $T = 50$ Н, при котором достигается минимальная и максимальная абсолютная величина момента силы относительно точки «О». Отрезок $OA = 2$ м, диаметр полуокружности $AB = 1$ м.

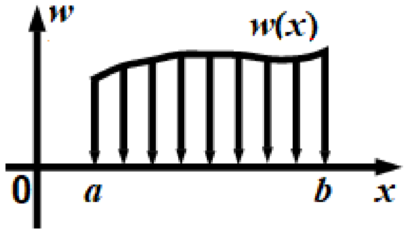
Ответ: $\theta = \{0,\ \pi\}$ – углы максимума, $\theta = 63^{\circ}$ – угол минимума.

Задача 5. Определить необходимую силу T, если $OA = 3$ м, $OB = 7$ м, равновесный момент в шарнире «О» $M_O = 500$ Нм.



Ответ: $T = 204{,}549$ Н.

Выше всюду рассматривалось сосредоточенное механическое воздействие одного тела на другое, которое характеризовалось силой, которая в свою очередь моделировалась вектором. Вообще говоря, это не совсем так, и полностью сосредоточенного в одной точке механического воздействия не существует. Каждое воздействие одного тела на другое как-то распределено в пространстве. Рассмотрим произвольно распределённую на участке $x \in [a, b]$ нагрузку $w = w(x)$, Н/м. Для анализа взаимодействий этой нагрузки с другими необходимо заменить распределённую нагрузку на сосредоточенную, так называемую равнодействующую – W. Её величина будет определяться по формуле $W = \int_a^b w(x)dx$, а точка



–рисунок 2.17

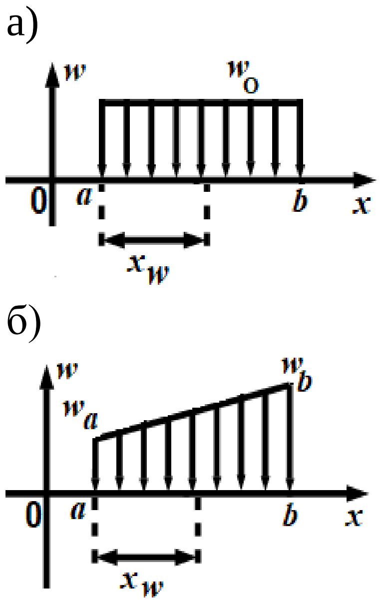
приложения определяется по аналогии с решением примера 12: момент равнодействующей относительно граничной точки отрезка должен совпадать с моментом распределённой нагрузки относительно той же граничной точки: $M_a(\overline{W}) = M_a(\overline{w})$, откуда получаем равенство:

$$x_w \times W = \int_a^b x \times w(x)dx. \qquad (10)$$

Рассмотрим два важных частных случая:

а) равномерную нагрузку вида $w(x) = w_O$, для которой

$W = w_O \times (b-a)$, $x_w = \dfrac{(b+a)}{2}$.



–рисунок 2.18

б) линейную нагрузку вида $w(x) = \dfrac{(x-a)\times(w_b - w_a)}{b-a} + w_a$, для которой $W = \dfrac{(w_a + w_b)\times(b-a)}{2}$, $x_w = \dfrac{(b-a)\times(w_a + 2\times w_b)}{3\times(w_b + w_a)}$.

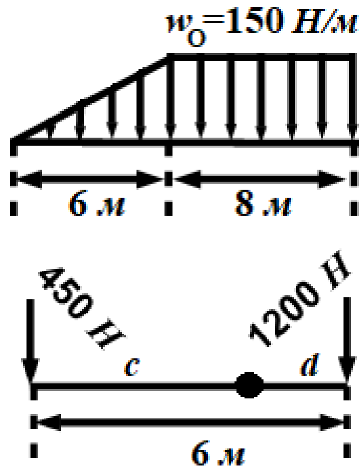
ПРИМЕР 13. Определить величину равнодействующей и точку её приложения для нагрузки, указанной на чертеже.

Нагрузка состоит из двух частей.

Параметры первой части: $a=0$, $b=6$, $w_a=0$, $w_b=150$. Тогда $W=450$, Н; $x_w=4$.

Параметры второй части: $a=0$, $b=8$. Тогда $W=1200$, Н; $x_w=4$.

Таким образом, получили условия примера 12 для случая I.



–рисунок 2.19

$$\begin{matrix} c\times 450-d\times 1200=0 \\ c+d=6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d=0{,}375\times c \\ c+d=6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d=1{,}6363 \\ c=4{,}3636 \end{matrix},$$ величина равнодействующей 1650 Н.

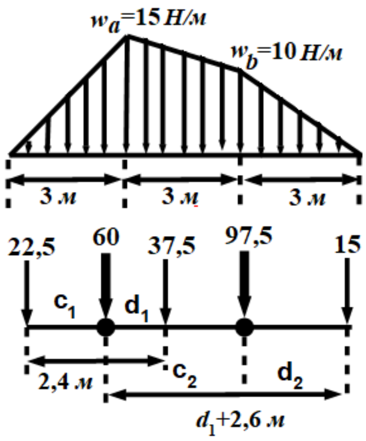
ПРИМЕР 14. Определить величину равнодействующей и точку её приложения для нагрузки, указанной на чертеже.

Нагрузка состоит из трёх частей.

Параметры первой части: $a=0$, $b=3$, $w_a=0$, $w_b=15$. Тогда $W=22{,}5$, Н; $x_w=2$.

Параметры второй части: $a=0$, $b=3$, $w_a=15$, $w_b=10$. Тогда $W=37{,}5$, Н; $x_w=1{,}4$.

Параметры третьей части: $a=10$, $b=0$. Тогда $W=15$, Н; $x_w=1$.



–рисунок 2.20

Таким образом, для первой и второй равнодействующей:

$$\begin{matrix} c_1\times 22{,}5-d_1\times 37{,}5=0 \\ c_1+d_1=2{,}4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_1=0{,}6\times c_1 \\ c_1+d_1=2{,}4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_1=0{,}9 \\ c_1=1{,}5 \end{matrix},$$ величина равнодействующей 60 Н.

Для новой равнодействующей и третьей:

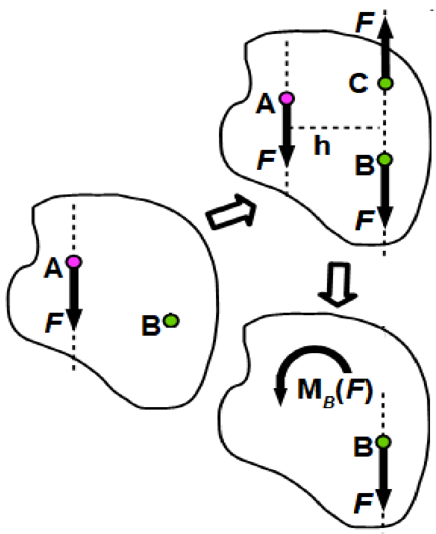
$$\begin{matrix} c_2\times 60-d_2\times 15=0 \\ c_2+d_2=3{,}5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_2=4\times c_2 \\ c_2+d_2=3{,}5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_2=0{,}7 \\ c_2=2{,}8 \end{matrix},$$ величина равнодействующей 97,5 Н.

СЛУЧАЙ 3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

В общем случае произвольного плоского движения на тело действует произвольный набор сил и пар сил.

Анализ их воздействия основан на двух теоремах.

Теорема (правило Пуансо). Любую силу можно перенести параллельно самой себе в произвольную точку абсолютно жёсткого тела, добавив для компенсации пару сил с моментом, который равен моменту исходной силы относительно новой точки приложения.



–рисунок 2.21

Теорема о сложении пар сил. Механическое воздействие на абсолютно жёсткое тело нескольких пар сил можно заменить механическим воздействием одной пары сил с суммарным моментом исходных пар сил.

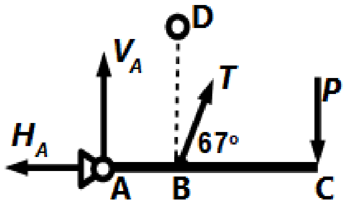
Таким образом, последовательно применим к каждой силе вначале теорему Пуансо, а затем к полученным и исходным парам сил теорему об их сумме. В результате появляется суммарная сила (**главный вектор**) и суммарная пара сил (**главный момент**).

Важное отличие главных сил и моментов от равнодействующих заключается в том, что их отдельное механическое воздействие на тело не совпадает с механическим воздействием исходной системы сил и пар сил.

Как и выше, суммарная сила порождает линейное ускорение, а суммарная пара сил – угловое ускорение. Для их компенсации надо добавить уравновешивающие силу и пару сил. Аналитически это будет выглядеть следующим образом:

$$M_2 = -M_1 \Leftrightarrow M = M_1 + M_2 = 0.$$
$$\overline{F}_2 = -\overline{F}_1 \Leftrightarrow \overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0. \qquad (11)$$

ПРИМЕР 15. Внешняя сила $P = 100$ Н воздействует на жёсткую балку. Определить реакции в шарнире и силу натяжения пружины при условии, что балка находится в равновесии. При расчётах принять, что угол $\varphi = 67^{\circ}$, $AB = 370$ мм и $BC = 530$ мм.



–рисунок 2.22

Как указано выше, **шарнир** «А» порождает силу реакции, величина которой и направление заранее не известны. Разложим её на две компоненты: $\overline{Q} = \overline{V}_A + \overline{H}_A$. Их указывают произвольно.

Тогда формула (13) в проекциях на оси координат даст следующие уравнения:

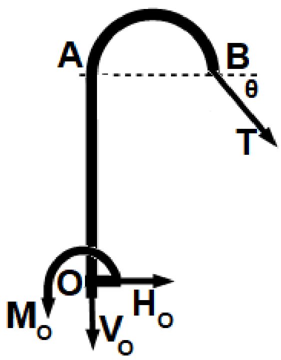
$$\begin{array}{lll} F_x = -H_A + T \times \cos 67^{\circ} = 0 & H_A = 103{,}2506 & \\ F_y = V_A + T \times \sin 67^{\circ} - P = 0 \Rightarrow & T = 264{,}2498 & \Rightarrow \begin{array}{l} T = 264{,}2498 \\ Q = 176{,}5766 \end{array} \\ M_B = -V_A \times AB - P \times BC = 0 & V_A = -143{,}2432 & \end{array}$$

Сделаем **проверку**, вычислив сумму моментов всех сил относительно точки «D», такой что $BD = 1000$ мм.

$$M_D = -V_A \times AB - H_A \times BD + T \times \cos 67^{\circ} \times BD - P \times BC = 0{,}0066.$$

ПРИМЕР 16. Определить реакции в заделке «О», чтобы компенсировать воздействие силы $T = 50$ Н, если угол $\theta = 65^{\circ}$, отрезок $OA = 2$ м, а диаметр полуокружности $AB = 1$ м.

Заделка порождает силу и пару сил реакции, величины которых и направление заранее не известны. Их указывают произвольно.



–рисунок 2.23

Тогда формула (13) в проекциях на оси координат даст следующие уравнения:

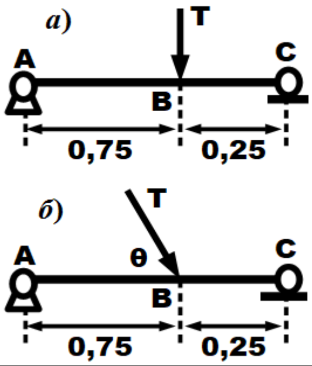
$$\begin{array}{lll} F_x = H_O + T \times \cos 65^{\circ} = 0 & H_O = -21{,}1309 & \\ F_y = -V_O - T \times \sin 65^{\circ} = 0 & \Rightarrow V_O = -45{,}3154 & \Rightarrow \begin{array}{l} M_O = 87{,}5772 \\ Q = 50 \end{array} \\ M_B = V_O \times AB + H_O \times OA + M_O = 0 & M_O = 87{,}5772 & \end{array}$$

Проверка для данной задачи была реализована выше в задаче 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

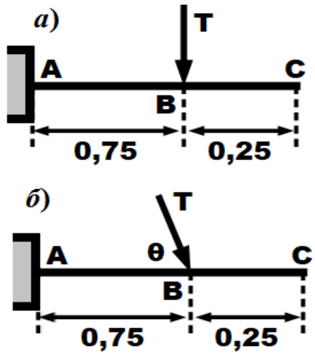
БЛОК С4. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Задача 1. Определить реакции опор нагруженной балки. При расчётах принять, что $T = 100$ Н, $\theta = 50^{\circ}$



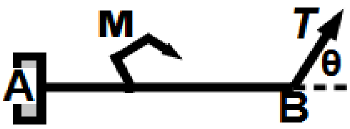
Ответ: а) $V_C = 75$ Н, $V_A = 25$ Н, $H_A = 0{,}0$ Н.
б) $V_C = 57{,}453$ Н, $V_A = 19{,}151$ Н, $H_A = 64{,}279$ Н.

Задача 2. Определить реакции опор нагруженной балки. При расчётах принять, что $T = 100$ Н, $\theta = 50^{\circ}$.



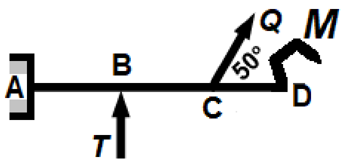
Ответ: а) $V_A = 100$ Н, $H_A = 0{,}0$ Н, $M_A = 75$ Нм.
б) $V_A = 76{,}604$ Н, $H_A = 64{,}279$ Н, $M_A = 57{,}453$ Нм.

Задача 3. Определить реакции опор нагруженной балки. При расчётах принять, что $AB = 1$ м, $DE = 0{,}5$ м, $T = 40$ Н, $\theta = 65^{\circ}$, $M = 20$ Нм. Сделать проверку, вычислив сумму моментов относительно произвольной точки плоскости.



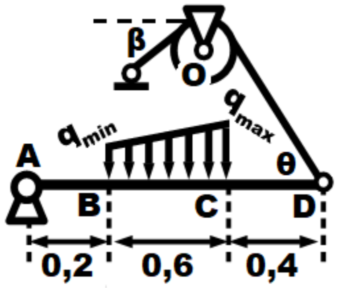
Ответ: $V_A = 36{,}252$ Н, $H_A = 16{,}905$ Н, $M_A = 16{,}252$ Н.

Задача 4. Определить реакции опор нагруженной балки. При расчётах принять, что $AB = 1$ м, $BC = CD = 0{,}5$ м $T = 200$ Н, $Q = 100$ Н, $M = 250$ Нм. Сделать проверку, вычислив сумму моментов относительно произвольной точки плоскости.



Ответ: $V_A = 276{,}604$ Н, $H_A = 64{,}279$ Н, $M_A = 335{,}093$ Нм.

Задача 5. Определить реакцию шарниров «О» и «А», если на балку действует линейная распределённая нагрузка. Углы $\theta = 50^{o}$, $\beta = 30^{o}$



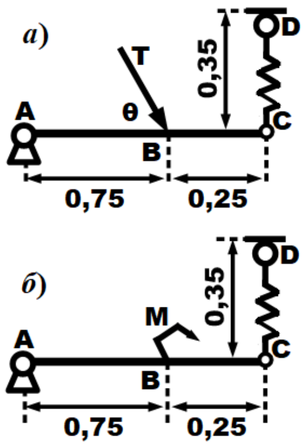
Рассмотреть три варианта нагружения: **а)** $q_{\min} = 0$, $q_{\max} = 4$ Н/м; **б)** $q_{\min} = q_{\max} = 4$, Н/м; **в)** $q_{\min} = 2$, $q_{\max} = 4$ Н/м.

Ответ: а) $V_A = 0{,}6$ Н, $H_A = 0{,}503$ Н; $H_O = 0{,}175$ Н, $V_O = 0{,}992$ Н.

б) $V_A = 1{,}4$ Н, $H_A = 0{,}839$ Н; $H_O = 0{,}291$ Н, $V_O = 1{,}653$ Н.

в) $V_A = 1{,}0$ Н, $H_A = 0{,}671$ Н; $H_O = 0{,}233$ Н, $V_O = 1{,}322$ Н.

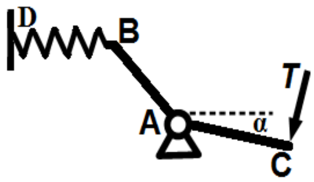
Задача 6. Нагруженная балка находится в равновесии под действием пружины. Определить реакцию шарнира «А» и первоначальную длину пружины «DC». Параметры нагрузки: $T = 100$ Н, угол $\theta = 40^{o}$; $M = 50$ Нм. Параметры пружины: $k_{DC} = 1000$ Н/м.



Ответ: а) $V_A = 16{,}069$ Н, $H_A = 76{,}604$ Н; $l_{DC} = 0{,}302$ м.

б) $V_A = 50$ Н, $H_A = 0$ Н; $l_{DC} = 0{,}3$ м.

Задача 7. Рычаг «САВ» служит для растяжения пружны «CD». Пружина находилась в недеформированном состоянии при $\alpha = 0^{o}$. Определить компоненты реакции шарнира «А» и величину приложенной силы T после поворота рычага на угол $\alpha = 15^{o}$, если пружина до и после поворота была в горизонтальном положении. Величины $AB = 0{,}3$ м, $AC = 0{,}4$ м, угол $\angle CAB = 150^{o}$, жёсткость $k_{BD} = 2000$ Н/м.



Ответ: $V_A = 92{,}653$ Н, $H_A = 182{,}268$ Н, $T = 83{,}301$ Н.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

С-2. Равновесие тела под действием произвольной системы сил.

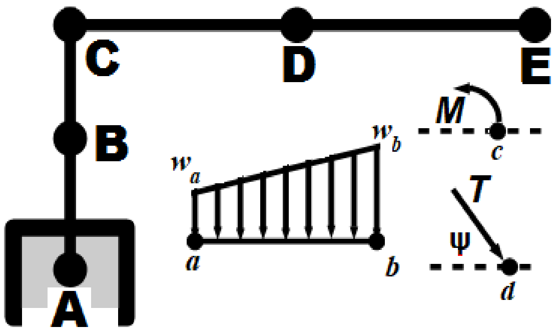
ЗАДАНИЕ 1. Жёсткая консольная балка находится в равновесии под действием внешней нагрузки. Вид нагрузки указан на рисунке. Определить реакцию опор. Сделать проверку.

ЗАДАНИЕ 2. Жёсткая балка на двух опорах находится в равновесии под действием внешней нагрузки. Вид нагрузки указан на рисунке. Определить реакцию шарнирной опоры, так же определить первоначальную длину пружины и деформацию, на которую необходимо её растянуть, чтобы балка находилась в равновесии. Сделать проверку.

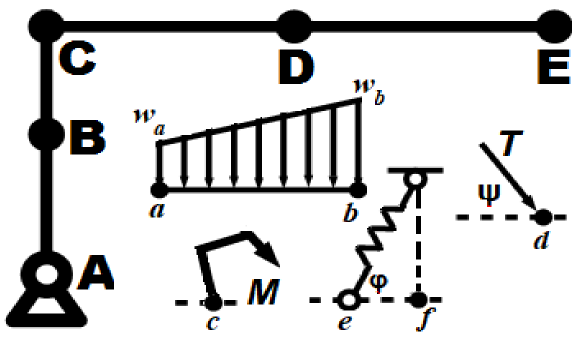
Все необходимые числовые данные приведены в таблицах.

Таблица 1.
Группа данных, которая соответствует 1-й цифре зачётки

1-я цифра	AB, см	BC, см	CD, см	DE, см	k, Н/м
0	63	43	51	18	1800
1	68	48	56	19	1950
2	73	53	61	21	2100
3	78	58	66	19	1950
4	63	43	51	20	2070
5	68	48	56	18	1800
6	73	53	61	19	1950
7	78	58	66	21	2150
8	63	43	51	50	1950
9	68	48	56	10	2130



– рисунок к ЗАДАНИЮ 1



– рисунок к ЗАДАНИЮ 2

Таблица 2.

Группа данных, которая соответствует 2-й цифре зачётки

2-я цифра	a	b	c	d	e	f
0	A	B	C	D	C	D
1	B	C	B	E	D	E
2	C	D	D	C	C	E
3	D	E	D	B	C	D
4	C	E	B	C	D	E
5	A	B	C	D	C	E
6	B	C	B	E	C	D
7	C	D	C	D	D	E
8	D	E	D	E	C	E
9	C	E	B	D	C	D

Таблица 3.

Группа данных, которая соответствует 3-й цифре зачётки

3-я цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M, КНм	2,0	3,0	4,0	5	2,5	3,5	4,5	5,5	2,0	3,0
T, КН	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
φ	50	55	60	65	70	50	55	60	65	70
ψ	35	40	45	50	55	35	40	45	50	55
w_a КН/м	15	10	14	11	12	37	42	37	44	45
w_b, КН/м	27	20	24	21	22	15	10	14	11	12

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ.

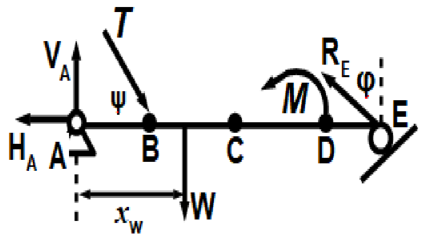
ЗАДАНИЕ 1. Жёсткая балка на двух шарнирных опорах находится в равновесии под действием внешней нагрузки. Вид нагрузки указан на рисунках. Определить реакцию опор.

Числовые данные (после перевода в СИ): $AB = 0{,}45$ м; $BC = 0{,}53$ м; $CD = 0{,}32$ м; $DE = 0{,}27$ м; $k = 1367$ КН/м; $a = A$; $b = C$; $c = D$; $d = B$; $e = B$, $f = D$; $M = 4$ КНм; $T = 50$ КН; $\varphi = 67^{\circ}$; $\psi = 37^{\circ}$; $w_a = 13$ КН/м; $w_b = 23$ КН/м.

Шаг 1. Заменим распределённую нагрузку на сосредоточенную:

$$W = \frac{(w_a + w_b)\times(b-a)}{2} = 17{,}64 \text{ КН},$$

$$x_w = \frac{(b-a)\times(w_a + 2\times w_b)}{3\times(w_b + w_a)} = 0{,}5354 \text{ м}.$$



–рисунок ИДЗ_С_2_1

Шаг 2. Укажем на чертеже все силы: активные силы; найденную сосредоточенную нагрузку; реакции опор.

Шаг 3. Составим и решим систему уравнений равновесия.

$$V_A - T\times\sin(\psi) - W + R_E\times\cos(\varphi) = 0$$

$$-H_A + T\times\cos(\psi) - R_E\times\sin(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$M_A = -T\times\sin(\psi)\times AB - W\times x_w + M + R_E\times\cos(\varphi)\times AE = 0$$

$$V_A = T\times\sin(\psi) + W - R_E\times\cos(\varphi) = 35{,}6373$$

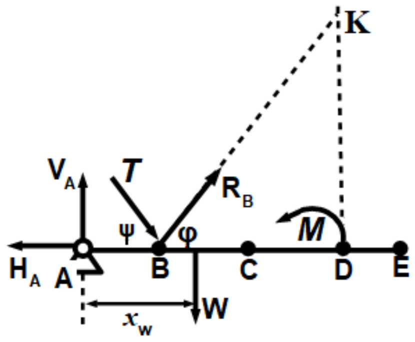
$$\Rightarrow \qquad H_A = +T\times\cos(\psi) - R_E\times\sin(\varphi) = 11{,}4413$$

$$R_E = \frac{T\times\sin(\psi)\times AB + W\times x_w - M}{\cos(\varphi)\times AE} = \frac{18{,}9853}{0{,}6134} = 30{,}9509$$

Шаг 4. Сделаем **проверку**, вычислив сумму моментов всех сил и пар сил относительно точки, которая расположена в метре над точкой «С»:

$$M_O = -H_A\times 1 - V_A\times AC + T\times\sin(\psi)\times BC + T\times\cos(\psi)\times 1 +$$
$$+W\times(AC - x_w) + M + R_E\times\cos(\varphi)\times CE - R_E\times\sin(\varphi)\times 1 = 0{,}00139$$

ЗАДАНИЕ 2. Жёсткая балка на двух опорах находится в равновесии под действием внешней нагрузки. Вид нагрузки указан на рисунках. Определить реакцию шарнирной опоры, так же определить первоначальную длину пружины и деформацию, на которую необходимо её растянуть, чтобы балка находилась в равновесии.



–рисунок ИДЗ_С_2_2

Числовые данные аналогичны заданию 1.

Шаг 1. Совпадает с шагом 1 задания 1.

Шаг 2. Совпадает с шагом 2 задания 1.

Шаг 3. Составим и решим систему уравнений равновесия.

$$V_A - T\times\sin(\psi) - W + R_B\times\sin(\varphi) = 0$$
$$-H_A + T\times\cos(\psi) + R_B\times\cos(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$M_A = -T\times\sin(\psi)\times AB - W\times x_w + M + R_B\times\sin(\varphi)\times AB = 0$$

$$V_A = T\times\sin(\psi) + W - R_B\times\sin(\varphi) = -29{,}899$$
$$\Rightarrow \qquad H_A = T\times\cos(\psi) + R_B\times\cos(\varphi) = 72{,}884$$
$$R_B = \frac{T\times\sin(\psi)\times AB + W\times x_w - M}{\sin(\varphi)\times AB} = \frac{18{,}9853}{0{,}4142} = 84{,}334$$

Шаг 4. Сделаем **проверку**, вычислив сумму моментов всех сил и пар сил относительно точки, которая расположена в метре над точкой «С»:

$$M_O = -H_A\times 1 - V_A\times AC + T\times\sin(\psi)\times BC + T\times\cos(\psi)\times 1 +$$
$$+ W\times(AC - x_w) + M - R_B\times\sin(\varphi)\times BC + R_B\times\cos(\varphi)\times 1 = 0{,}0056$$

Шаг 5. Найдём первоначальную длину пружины.

Длина пружины в растянутом состоянии $L_{BK} = \dfrac{BD}{\cos(\varphi)} = 2{,}1754$ м;

Деформация пружины: $R_B = k\times s_{AB} \Rightarrow s_{AB} = \dfrac{R_B}{k} = 0{,}0335$ м;

Первоначальная длина пружины: $l_{BK} = L_{BK} - s_{BK} = 2{,}1419$ м.

Рецензенты:
Баёв, М. А. – к.т.н. доцент, кафедра ОГР КуЗГТУ.

Сирота Дмитрий Юрьевич

Теоретическая механика . Статика: методические материалы к практическим и самостоятельным работам для обучающихся направления подготовки 21.05.04 Горное дело / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра математики ; составитель Д.Ю. Сирота; – Кемерово, 2025. – 1 файл (856 Кб). – Текст : электронный.

Приведено содержание практических и самостоятельных работ, материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика» и организация практических и самостоятельных работ.