Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель Е. Н. Грибанов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические материалы

Рекомендовано цикловой комиссией специальности СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование
в качестве электронного издания для использования
в образовательном процессе

Кемерово 2024

Рецензенты:

Николаева Е. А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Струкова Ю. В., председатель цикловой методической комиссии математических и естественнонаучных дисциплин СПО

Грибанов Евгений Николаевич

Численные методы: методические материалы для обучающихся специальности СПО 09.02.07 Информационные системы и программирование очной формы обучения / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; Кафедра математики ; составитель Е. Н. Грибанов. – Кемерово : КузГТУ, 2024. – 1 файл (1316 Кб). – Текст : электронный.

Приведены методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Численные методы», позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

Численные методы решения нелинейных уравнений

Будем рассматривать задачу приближенного нахождения нулей функции одной переменной $f(x)=0$.

Теорема 1 (Больцано–Коши). Если непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ на концах его имеет противоположные знаки, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$, то на интервале $(a;b)$ она, хотя бы один раз обращается в ноль.

Слабость теоремы:

1. Не дает ответа на вопрос о количестве корней на $[a;b]$ в случае выполнения условия $f(a)\cdot f(b)<0$.

2. Если условие $f(a)\cdot f(b)<0$ не выполнено, то не позволяет утверждать, что корней на $[a;b]$ нет.

Теорема 2. Непрерывная, строго монотонная функция $f(x)$ имеет и при том единственный ноль на отрезке $[a;b]$тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков. Установить монотонность на данном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянства ее производной на всем отрезке.

Метод половинного деления

Для применения метода половинного деления необходимо установить окрестность или отрезок $[a;b]$, на котором расположен один из корней уравнения. Для этого строим график функции, используя калькулятор DESMOS, и определяем интервал содержащий корень уравнения. То есть интервал на котором график функции пересекает ось Ox. Длину первоначального интервала берем равной **1**, а границы целые числа. Пусть дано уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$и $f(a)\cdot f(b)<0$, и производная является знакопостоянной на этом интервале. Метод половинного деления, или дихотомии, заключается в следующем. Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку $[a;b]$, делим отрезок пополам, т.е. выбираем начальное приближение, равное: $x_1=\dfrac{a+b}{2}$и вычисляем значение функции $f(x_1)$. Если $f(x_1)=0$, то x_1 является корнем уравнения. Если $f(x_1)\neq 0$, то выбираем, одну из двух частей отрезка $[a;x_1]$ или $[x_1;b]$ для дальнейшего уточнения корня. Естественно, что корень будет находиться в той половине отрезка, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки, а именно проверяем условия: $f(a)\cdot f(x_1)<0$ и $f(x_1)\cdot f(b)<0$ и выбираем тот интервал, на котором функция меняет знак. Итерационный (повторяющийся) процесс деления будет продолжаться до тех пор, пока не будет выполнено условие, что длина интервала, содержащего искомое значение, будет меньше, чем заданная точность.

Пример 1. Найти методом половинного деления с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ решение уравнения $x^3+x-3=0$.

Решение. Построим график. Точка пересечения данной функции с осью Ox находится в интервале $[1;2]$. Составим таблицу в Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	1,5	-1	7	1,875	1
2	1	1,5	1,25	-1	1,875	0,203	0,5
3	1	1,25	1,125	-1	0,203	-0,451	0,25
4	1,125	1,25	1,1875	-0,451	0,203	-0,138	0,125
……….	……….	……….	……….	……….	……….	……….	……….
9	1,21093	1,214843	1,21289063	-0,013	0,0077	-0,0028	0,0039
10	1,210938	1,212891	1,211914	-0,0133	-0,0028	-0,0081	0,001953
11	1,211914	1,212891	1,212402	-0,008	-0,0028	-0,0054	0,000977

Пояснение к таблице. В ячейку A1 ставим 1, в ячейку B1 ставим 2, в ячейку C1 записываем $=\dfrac{A1+B1}{2}$, в ячейку D1 записываем $=(A1)^3+A1-3$. Используя автозаполнение, заполняем ячейки E1 и F1. В ячейку G1 записываем $=B1-A1$. Так как значение в ячейке F1 положительно то в ячейку A2 записываем $=A1$ в ячейку B2 записываем $=C1$. Выделяя ячейки C1, D1, E1, F1 и G1 и используя автозаполнение, получаем значения ячеек C2, D2, E2, F2 и G2. Так как значение в ячейке F2 положительно, то в ячейку A3 записываем $=A2$, в ячейку B3 записываем $=C2$. Выделяя ячейки C2, D2, E2, F2 и G2 и используя автозаполнение, получаем значения ячеек C3, D3, E3, F3 и G3. Так как значение в ячейке F3 отрицательно, то в ячейку A4 записываем $=C3$, в ячейку B4 записываем $=B3$. Выделяя ячейки C3, D3, E3, F3 и G3 и используя автозаполнение, получаем значения ячеек C4, D4, E4, F4 и G4. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в ячейке G не появится число, меньшее требуемой точности. На 11 итерации получили в ячейке G число, меньшее требуемой точности, следовательно, за ответ берется значение ячейки C11 с тремя знаками после запятой. Следовательно, $x \approx 1{,}212$.

Метод Ньютона

Возьмем точку x_0 отрезка $[a;b]$и проведем в точке $P_0(x_0; f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$ до пересечения с осью Ox. Получим значение x_1, в котором касательная пересекает ось Ox. Угловой коэффициент касательной равен значению производной от функции $y = f(x)$ в точке касания. Следовательно, уравнение касательной, имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Полагая $y = 0$, находим точку пересечения касательной с осью Ox, которую обозначим через $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Абсциссу x_1 точки пересечения можно взять в качестве приближенного значения корня. Проведя касательную через новую точку с координатами $(x_1; f(x_1))$и находя точку ее пересечения с осью Ox, получим второе приближения корня $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Аналогично определяются последующие приближения. Процесс продолжают до тех пор, пока модуль отношения $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ не станет меньше требуемой точности, или разность между двумя последовательными расчетными значениями станет меньше требуемой точности.

Пример 2. Найти решение рассмотренного ранее уравнения методом Ньютона с точность 10^{-6}. Решение. Составим расчетную таблицу в Excel. Для этого найдем значение производной $f'(x)=3x^2+1$.

	A	B	C
1	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
2	1	-1	4
3	1,25	0,203125	5,6875
4	1,214286	0,004738	5,423469
5	1,213412	2,78E-06	5,417107
6	1,213412	9,58E-13	5,417104
7	1,213412	0	5,417104

Пояснение к таблице. В ячейку А2 записываем одну из границ интервала, содержащего искомое решение. В ячейку В2 записываем значение функци, в нашем случае $=(A2)^3+A2-3$. В ячейку С2 записываем значение производной $=3(A2)^2+1$. В ячейку А3 записываем $=A2-\frac{B2}{C2}$. Выделяем ячейки В2 и С2, затем используя автозаполнение находим значения ячеек В3 и С3. Выделяем ячейки А3, В3 и С3, используя автозаполнение, находим значения ячеек А4, В4 и С4. Продолжаем до тех пор, пока в ячейке В не появится 0 или разность между двумя последовательными ячейками А не будет меньше требуемой точности. В нашем примере должны совпадать шесть знаков после запятой. Следовательно, $x=1{,}213412$.

Метод секущих

Далеко не всегда бывает удобно находить аналитическое выражение для производной функции, в таком случае можно использовать метод секущих. Для начала итерационного процесса необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1. Тогда $x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}$ и $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_{n-1}-x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}$. За начальное приближение можно взять ранее определенный интервал $[a;b]$ положить $x_0=b, x_1=a$. Процесс продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными значениями не станет меньше требуемой точности.

Пример 3. Найти решение рассмотренного ранее уравнения методом секущих с точностью 10^{-6}. Составим таблицу.

	A	B	C	D
1	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
2	1	2	–1	7
3	2	1,125	7	–0,45117

4	1,125	1,177982	-0,45117	-0,1874
5	1,177982	1,215624	-0,1874	0,012003
6	1,215624	1,213358	0,012003	-0,00029
7	1,213358	1,213412	-0,00029	-4,3E-07
8	1,213412	1,213412	-4,3E-07	1,54E-11
9	1,213412	1,213412	1,54E-11	0
9	1,213412	1,213412	0	0

Пояснения к таблице. В ячейки A2 и B2 записываем границы интервала, содержащего искомый корень. В ячейку C2 записываем значение функции, в нашем примере $=(A2)^3+A2-3$. Затем, используя автозаполнение, находим значение найдем значение ячейки D2. В ячейку A3 записываем $=B2$, в ячейку B3 записываем $A2-\dfrac{C2\cdot(B2-A2)}{(D2-C2)}$. Используя ячейки C2 и D2, с помощью автозаполнения найдем значения ячеек C3 и D3. Затем, используя ячейки A3, B3, C3 и D3, находим с помощью автозаполнения значения ячеек A4, B4, C4 и D4. И так до тех пор, пока в ячейках C и D не появится 0, или разность между двумя последовательными ячейками B не будет меньше точности, или в нашем примере не будут совпадать 6 знаков после запятой. Следовательно, $x=1{,}213412$.

Решение систем линейных уравнений

При решении большого класса прикладных задач возникает необходимость в нахождении корней СЛАУ. Методы решения СЛАУ можно разделить на два больших класса: точные и итерационные.

Точные методы решения, например метод Гаусса, дают, вообще говоря, точное значение корней СЛАУ; при этом при корректном составлении программы точность определяется только погрешностями, связанными с округлением и представлением чисел в ЭВМ.

Метод Гаусса

Суть метода Гаусса – свести систему уравнений к треугольному виду, затем из последнего уравнения выражают одну переменную и подставляют в предпоследнее, и так далее. Разберем на примере.

Пример 4. Используя Excel решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-4x_4=4 \\ 3x_1-x_2-2x_3-4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+2x_4=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+8x_4=-3 \end{cases}.$$

Решение. Составим таблицу

	A	B	C	D	E
1	1	1	-2	-4	4
2	3	-1	-2	-4	0
3	2	3	3	2	7
4	3	2	1	8	-3

Пояснения к таблице. В ячейку A6 записываем =A1 затем используя автозаполнение заполняем ячейки B6, C6, D6 и E6. В ячейку A7 записываем $=A2-A1\cdot\dfrac{\$A2\$}{\$A1\$}$, затем используя автозаполнение

5					
6	1	1	-2	-4	4
7	0	-4	4	8	-12
8	0	1	7	10	-1
9	0	-1	7	20	-15
10					
11	1	1	-2	-4	4
12	0	-4	4	8	-12
13	0	0	8	12	-4
14	0	0	6	18	-12
15					
16	1	1	-2	-4	4
17	0	-4	4	8	-12
18	0	0	8	12	-4
19	0	0	0	9	-9

заполняем ячейки B7, C7, D7 и E7. В ячейку A8 записываем $= A3 - A1 \cdot \frac{\$A3\$}{\$A1\$}$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B8, C8, D8 и E8. В ячейку A9 записываем $= A4 - A1 \cdot \frac{\$A4\$}{\$A1\$}$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B9, C9, D9 и E9. В ячейку A11 записываем =$A6$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B11, C11, D11 и E11 и A12, B12, C12, D12 и E12. В ячейку A13 записываем $= A8 - A7 \cdot \frac{\$B8\$}{\$B7\$}$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B13, C13, D13 и E13. В ячейку A14 записываем $= A9 - A7 \cdot \frac{\$B9\$}{\$B7\$}$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B14, C14, D14 и E14.

В ячейку A16 записываем =A11 затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B16, C16, D16 и E16 и A17, B17, C17, D17 и E17 и A18, B18, C18, D18 и E18. В ячейку A19 записываем $= A14 - A13 \cdot \frac{\$C14\$}{\$C13\$}$, затем, используя автозаполнение, заполняем ячейки B19, C19, D19 и E19. Последнее полученное уравнение можно записать в виде $9x_4 = -9 \to x_4 = -1$, и с использованием ячеек это можно записать, как $x_4 = \frac{E19}{D19}$. Затем из предпоследнего имеем $x_3 = \frac{(E18 - x_4 \cdot D18)}{C18}$. Из следующего имеем $x_2 = \frac{(E17 - x_4 \cdot D17 - x_3 \cdot C17)}{B17}$. Аналогично $x_1 = \frac{(E16 - x_4 \cdot D16 - x_3 \cdot C16 - x_2 B16)}{A16}$. Получаем $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

Метод Крамера

Метод Крамера применим только к системам уравнений, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. По правилу Крамера $x_k = \frac{\Delta_{xk}}{\Delta}$, где

Δ – определитель матрицы коэффициентов, Δ_{xk} получается из Δ путем замены k-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Используя Excel, решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 = -3 \end{cases}.$$

Решение. Используя МОПРЕД, вычисляем полученные определители.

	A	B	C	D	E	F	G	H	J	I	K	L
1		1	1	-2	-4	4		4	1	-2	-4	
2		3	-1	-2	-4	0		0	-1	-2	-4	
3		2	3	3	2	7		7	3	3	2	
4		3	2	1	8	-3		-3	2	1	8	
5			МОПРЕД	-288					МОПРЕД	0		
6												
7		1	4	-2	-4			1	1	-2	-4	
8		3	0	-2	-4			3	-1	-2	-4	
9		2	7	3	2			2	3	3	2	
10		3	-3	1	8			3	2	1	8	
11			МОПРЕД	-576					МОПРЕД	-288		
12												
13		1	1	-2	4			$x_1 =$	0			
14		3	-1	-2	0			$x_2 =$	2			
15		2	3	3	7			$x_4 =$	1			
16		3	2	1	-3			$x_4 =$	-1			
17			МОПРЕД	288								

Пояснение к таблице. В ячейки B1-4, C1-4, D1-4 и E1-4 записываем коэффициенты при неизвестных. В столбец F1-4 записываем столбец свободных членов. Используя функции математические, находим функцию МОПРЕД, определяем ее в ячейку D5, выделяем при этом массив B1-4, C1-4, D1-4 и E1-4. Затем копируем прямоугольник с вершинами в ячейках B1 ,B5, E1 и E5 и вставляем его 4 раза в прямоугольники с вершинами в ячейках H1, H5, K1, K5 и B7, B11, E7, E11 и H7, H11, K7, K11 и B13, B17, E13, E17. Копируем столбец F1-4 и вставляем его поочередно в столбцы H1-4 и C1-4 и I1-4 и E1-4. В ячейку J13 записываем $\frac{I5}{D5}$, в ячейку J14 записываем $\frac{D11}{D5}$, в ячейку J15 записываем $\frac{I11}{D5}$, в ячейку J16 записываем $\frac{D17}{D5}$.

Линейная и нелинейная регрессия

Задача линейной регрессии состоит в том, что по конкретной выборке $(x_i; y_i)$, $i = 1,2,\dots n$ найти оценки a и b неизвестных параметров β_0 и β_1 так, чтобы построенная линия являлась бы наилучшей в определенном смысле среди всех других прямых, то есть при нахождении уравнения вида $y = a + bx$.

Линейная регрессия

Методом наименьших квадратов можно получить следующую формулу для нахождения параметра $b = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$. Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу. Параметр a находится по формуле $a = \dfrac{1}{n}\left(\sum y_i - b\sum x_i\right)$.

Пример 6. Методом наименьших квадратов найти параметры линейной зависимости по следующей выборке.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	12	10	6	8	4

Решение: Для упрощения расчетов используем Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2			
2	1	12	12	1		*b*=	-1,8
3	2	10	20	4			
4	3	6	18	9		*a*=	13,4
5	4	8	32	16			
6	5	4	20	25			
7	15	40	102	55			

Пояснение к таблице. В ячейки A2-6 и B2-6 записываем данные выборки. Ячейки C2-6 и D2-6 рассчитываем по предложенным формулам. В ячейки A7, B7, C7 и D7 рассчитываем суммы. Ячейку G2 рассчитываем по формуле $\dfrac{(5\cdot C7 - A7\cdot B7)}{\left(5\cdot D7 - (A6)^2\right)}$. Ячейку G4 рассчитываем по формуле $\dfrac{(B7 - G2\cdot A7)}{5}$.

Параболическая регрессия

Уравнение параболической регрессии имеет вид $y = a + bx + cx^2$. Параметры a, b и c находятся как решение системы уравнений
$$\begin{cases} an + b\sum x_i + c\sum x_i^2 = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 = \sum y_i x_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2 \end{cases}$$
. Полученную систему уравнений решаем по правилу Крамера.

Пример 7. Составить уравнение параболической регрессии по выборке

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	19	14	11	10	11	14	19	26

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	J	I	K	L
1	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$					
2	1	19	19	1	1	1	19		8	36	204	124
3	2	14	28	4	8	16	56		36	204	1296	600
4	3	11	33	9	27	81	99		204	1296	8772	3708
5	4	10	40	16	64	256	160			$\Delta =$	56448	
6	5	11	55	25	125	625	275					
7	6	14	84	36	216	1296	504					
8	7	19	133	49	343	2401	931					
9	8	26	208	64	512	4096	1664					
10	36	124	600	204	1296	8772	3708					
11												
12	124	36	204		8	124	204		8	36	124	
13	600	204	1296		36	600	1296		36	204	600	
14	3708	1296	8772		204	3708	8772		204	1296	3708	
15		$\Delta_a =$	1467648			$\Delta_b =$	-451584			$\Delta_c =$	56448	
16												
17		$a =$	26			$b =$	-8			$c =$	1	

Пояснение к таблице. В ячейки A2-9 записываем заданные x_i, В ячейки B2-9 записываем заданные y_i. Столбец C2-9 рассчитываем по формуле $x_i \cdot y_i$, столбец D2-9 рассчитываем по формуле x_i^2, столбец E2-9 рассчитываем по формуле x_i^3, столбец F2-9 рассчитываем по формуле x_i^4, столбец G2-9 рассчитываем по формуле $x_i^2 \cdot y_i$. В ячейки A10, B10, C10, D10, E10, F10 и G10 записываем суммы соответствующих столбцов. В ячейки J2-4, I2-4, K2-4 и L2-4 записываем коэффициенты системы уравнений. Используя функцию МОПРЕД, вычисляем определитель, используя при этом массив J2-4, I2-4, K2-4. Затем копируя прямоугольник с вершинами J2, J5, K2 и K5 вставляем его три раза в прямоугольники с вершинами A12, A15, C12 и C15, E12, E15, G12 и G15, J12, J15, K12 и K15. Копируя столбец L2-5, вставляем его поочередно вместо столбцов C12-15, G12-15 и K12-15. Ячейку C17 рассчитываем по формуле $= \frac{C15}{K4}$. Ячейку G17 рассчитываем по формуле $= \frac{G15}{K4}$. Ячейку K17 рассчитываем по формуле $= \frac{K15}{K4}$.

Получаем уравнение параболической регрессии $y = 26 - 8x + x^2$.

Нелинейная парная регрессия

Различаются два типа нелинейных парных зависимостей. Первый тип – нелинейные относительно переменных, но линейные относительно параметров. Общий вид этих зависимостей можно представить в виде $g(y)=a+b\cdot f(x)$. Вводя новые переменные $Y=g(y)$ и $X=f(x)$, эту зависимость можно представить в виде линейной $Y=a+bX$, параметры которой находим по известным формулам.

Пример 8. Найти параметры зависимости $y=a+b\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ по выборке

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	8	7,3	6,5	5,9	5,5	5,1	4,9	4,7	4,6	4,4

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
1	x_i	y_i	X_i	Y_i	$X_i\cdot Y$	X_i^2			
2	2	8	1	8	8	1			
3	3	7,3	0,866025	7,3	6,321985	0,75		*b*=	4,969841
4	4	6,5	0,707107	6,5	4,596194	0,5			
5	5	5,9	0,587785	5,9	3,467933	0,345492		*a*=	3,00119
6	6	5,5	0,5	5,5	2,75	0,25			
7	7	5,1	0,433884	5,1	2,212807	0,188255			
8	8	4,9	0,382683	4,9	1,875149	0,146447			
9	9	4,7	0,34202	4,7	1,607495	0,116978			
10	10	4,6	0,309017	4,6	1,421478	0,095492			
11	11	4,4	0,281733	4,4	1,239623	0,079373			
12			5,410254	56,9	33,49266	3,472036			

Пояснение к таблице. В ячейки A2-11 и B2-11 записываем исходные данные. Значение ячейки C2 находим по формуле $=\sin\left(\frac{\pi}{A2}\right)$, затем, используя автозаполнение, находим значения ячеек C3-11. Значение ячеек D2-11 совпадает со значением ячеек B2-11. Значение ячейки E2 находим по формуле $C2\cdot D2$, затем, используя автозаполнение, находим значения ячеек E3-11. Значение ячейки F2 находим по формуле $(C2)^2$, затем, используя автозаполнение, находим значения ячеек F3-11. Значения ячеек C12, D12, E12 и F12 находим как сумму соответствующих столбцов. Значение ячейки J3 найдем по формуле $\frac{(10\cdot E12-C12\cdot D12)}{\left(10\cdot F12-(C12)^2\right)}$. Значение ячейки J5 найдем по формуле $\frac{(D12-J3\cdot C12)}{10}$.

Ко второму типу относятся зависимости нелинейные относительно параметров, но которые путем преобразования и замены переменных могут быть приведены к линейному виду. Основные типы таких зависимостей $y=ab^x$,

$y = ax^b$ и $y = \dfrac{ax}{b+x}$. Первую зависимость путем логарифмирования можно привести к виду $\ln y = \ln a + x\ln b$, в этом случае $Y = \ln y$, $X = x$, $A = \ln a \to a = \exp A$, $B = \ln b \to b = \exp B$. Вторую зависимость также прологарифмируем, получим $\ln y = \ln a + b\ln x$ в этом случае $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = \ln a \to a = \exp A$, $B = b$. Третью зависимость представим в виде $\dfrac{1}{y} = \dfrac{b+x}{ax} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{x}$, в этом случае $Y = \dfrac{1}{y}$, $X = \dfrac{1}{x}$, $A = \dfrac{1}{a} \to a = \dfrac{1}{A}$, $B = \dfrac{b}{a} \to b = \dfrac{B}{A}$.

Пример 9. Найти параметры зависимости $y = \dfrac{ax}{b+x}$ по выборке

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_i	3	4	4,8	5,4	6	6,5	6,8	7,2	7,5	7,8	8	8,2	8,4

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel .

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
1	x_i	y_i	X_i	Y_i	$X_i \cdot Y$	X_i^2			
2	2	3	0,5	0,333333	0,166667	0,25			
3	3	4	0,333333	0,25	0,083333	0,111111		B=	0,500276
4	4	4,8	0,25	0,208333	0,052083	0,0625			
5	5	5,4	0,2	0,185185	0,037037	0,04		A=	0,083419
6	6	6	0,166667	0,166667	0,027778	0,027778			
7	7	6,5	0,142857	0,153846	0,021978	0,020408		b=	5,997135
8	8	6,8	0,125	0,147059	0,018382	0,015625			
9	9	7,2	0,111111	0,138889	0,015432	0,012346		a=	11,98766
10	10	7,5	0,1	0,133333	0,013333	0,01			
11	11	7,8	0,090909	0,128205	0,011655	0,008264			
12	12	8	0,083333	0,125	0,010417	0,006944			
13	13	8,2	0,076923	0,121951	0,009381	0,005917			
14	14	8,4	0,071429	0,119048	0,008503	0,005102			
15			2,251562	2,21085	0,47598	0,575996			
16									

Нелинейная регрессия

Иногда фактор y зависит не от одной функции, а от нескольких. Рассмотрим зависимость $y = a + bf(x) + cg(x)$. Параметры этой зависимости находятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} an + b\sum f(x) + c\sum g(x) = \sum y \\ a\sum f(x) + b\sum f^2(x) + c\sum f(x)g(x) = \sum yf(x) \\ a\sum g(x) + b\sum f(x)g(x) + c\sum g^2(x) = \sum yg(x) \end{cases}$$

Пример 10. Найти параметры зависимости $y = a + b \cdot \ln x + c \cdot arctgx$ по выборке

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	3	4
y_i	5,1	7,7	9,5	11	12,2	13,2	14,1	14,9	15,7	16,3	16,9	17,4	5,1	7,7

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel, полагая при этом $f(x)=\ln x$ и $g(x)=arctgx$

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
1	x_i	y_i	$f(x_i)$	$g(x)$	$f(x_i)\cdot g(x_i)$	$f^2(x_i)$	$g^2(x)$	$y_i\cdot f(x_i)$	$y_i\cdot g(x_i)$
2	3	5,1	1,098612	1,24904	1,372217	1,20694	1,560115	5,602923	6,370133
3	4	7,7	1,386294	1,32581	1,837974	1,92181	1,757792	10,67447	10,2088
4	5	9,5	1,609438	1,37340	2,210403	2,59029	1,88623	15,28966	13,04731
5	6	11	1,791759	1,40564	2,518582	3,21040	1,975845	19,70935	15,46212
6	7	12,2	1,94591	1,42889	2,78051	3,78656	2,041753	23,7401	17,43257
7	8	13,2	2,079442	1,44644	3,00779	4,32407	2,092193	27,44863	19,09303
8	9	14,1	2,197225	1,46013	3,208254	4,82779	2,132006	30,98087	20,58796
9	10	14,9	2,302585	1,47112	3,387397	5,30189	2,164217	34,30852	21,9198
10	11	15,7	2,397895	1,48013	3,549212	5,74990	2,190804	37,64696	23,23814
11	12	16,3	2,484907	1,48765	3,696684	6,17476	2,213118	40,50398	24,24878
12	13	16,9	2,564949	1,49402	3,832097	6,57896	2,232109	43,34764	25,24901
13	14	17,4	2,639057	1,49948	3,957237	6,96462	2,248467	45,9196	26,09111
14		154	24,49807	17,1218	35,35836	52,6380	24,49465	335,1727	222,9488
15									
16	12	24,4980	17,12182	154		154	24,49807	17,12182	
17	24,49807	52,6380	35,35836	335,172		335,172	52,63804	35,35836	
18	17,12182	35,3583	24,49465	222,948		222,948	35,35836	24,49465	
19			0,085686					-0,99118	
20									
21	12	154	17,12182		12	24,4980	154		
22	24,49807	335,172	35,35836		24,49807	52,6380	335,1727		
23	17,12182	222,948	24,49465		17,12182	35,3583	222,9488		
24			0,58064				0,634585		
25	$a=$	-11,567							
26	$b=$	6,77634							
27	$c=$	7,40591							

Пояснение к таблице. В ячейки A2-13 и B2-13 записываем данные выборки. Ячейку C2 заполняем по формуле $=\ln A2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек C3-13. Ячейку D2 заполняем по формуле $=arctg(A2)$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек D3-13. Ячейку E2 заполняем по формуле $=C2\cdot D2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек E3-13. Ячейку F2 заполняем по формуле $=(C2)^2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек F3-13. Ячейку G2 заполняем по формуле $=(D2)^2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек G3-13. Ячейку H2 заполняем по формуле $=B2\cdot C2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек H3-13. Ячейку J2 заполняем по формуле $=B2\cdot D2$ и используя автозаполнение получаем значение ячеек J3-13. Ячейки B14, C14, D14, E14, F14, G14, H14, J14 есть суммы соответствующих столбцов. В ячейку A16 записываем количество наблюдений. Ячейку A17 заполняем по формуле $=C14$. Ячейку A18 заполняем по формуле $=D14$. Ячейку B16 заполняем по формуле $=C14$. Ячейку B17 заполняем по формуле $=F14$. Ячейку B18 заполняем по формуле $=E14$. Ячейку C16 заполняем по формуле $=D14$. Ячейку C17 заполняем по формуле $=E14$. Ячейку C18 заполняем по формуле $=G14$. Ячейку D16 заполняем по формуле $=B14$. Ячейку D17 заполняем по формуле $=H14$. Ячейку D18 заполняем по формуле $=J14$. В ячейку C19, используя МОПРЕД, записываем определитель матрицы A16-C18. Ячейку F16 заполняем по формуле $=D16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек F17 и F18. Ячейку G16 заполняем по формуле $=B16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек G17 и G18. Ячейку H16 заполняем по формуле $=C16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек H17 и H18. Ячейка H19 есть определитель матрицы F16-H18. Ячейку A21 заполняем по формуле $=A16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек A22 и A23. Ячейку B21 заполняем по формуле $=D16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек B22 и B23. Ячейку C21 заполняем по формуле $=C16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек C22 и C23. Ячейка C24 есть определитель матрицы A21-C23. Ячейку E21 заполняем по формуле $=A16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек E22 и E23. Ячейку F21 заполняем по формуле $=B16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек F22 и F23. Ячейку G21 заполняем по формуле $=D16$, затем, используя автозаполнение и эту ячейку, получаем значения ячеек G22 и G23. Ячейка G24 есть определитель матрицы E21-G23. Значение ячейки B25 найдем по формуле $=\frac{H19}{C19}$. Значение ячейки B26 найдем по формуле $=\frac{C24}{C19}$. Значение ячейки B27 найдем по формуле $=\frac{G24}{C19}$.

Интерполяционные многочлены

Метод наименьших квадратов позволяет найти линию, имеющую наименьшее отклонение от данных выборки. Но иногда возникает задача нахождения многочлена, проходящего через все точки выборки. Для решения этой задачи можно использовать многочлены Лагранжа и Ньютона. Для многочлена Ньютона требуется, чтобы все результаты наблюдений были расположены на одинаковом расстоянии. Метод Лагранжа не имеет таких ограничений.

Многочлен Лагранжа

Метод построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

Пусть в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ таких, что $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ известны значения функции $y = f(x)$, то есть на отрезке $[a;b]$ задана табличная функция

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a;b]$, если её значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $y = f(x)$, то есть с $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно.

Для аппроксимации будем использовать многочлен степени n в виде линейной комбинации $L(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$, где базисные многочлены имеют вид $L_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$ и $f(x_i) = y_i$. При $n=5$ многочлен имеет вид $L(x) = y_1L_1(x_1) + y_2L(x_2) + y_3L(x_3) + y_4L(x_4) + y_5L(x_5)$. При нахождении $L_i(x_i)$ можно применять формулу $(x-a)(x-b)(x-d)(x-c) =$ $= x^4 + (-a-b-c-d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (-abd-abc-bcd-acd)x + abcd$

Разберем построение многочлена Лагранжа на примере.

Пример 11. Построить многочлен Лагранжа по выборке

x_i	3	5	7	9	10
y_i	5,06	7,8	19,42	50	76,6

и вычислить его значение при $x = 4$.

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
1		x_i	$y(x)$	k	x^4	x^3	x^2	x	x^0
2	$L(x_1)$	3	5,06	336	1	-31	353	-1745	3150
3	$L(x_2)$	5	7,8	-80	1	-29	301	-1299	1890
4	$L(x_3)$	7	19,42	48	1	-27	257	-1005	1350
5	$L(x_4)$	9	50	-48	1	-25	221	-815	1050
6	$L(x_5)$	10	76,6	105	1	-24	206	-744	945
7	$L(x)$				0,01	-0,03	0,02	-0,04	5
8		$L(4)=$	5,8						

Пояснение к таблице. Ячейки B2-6 и C2-6 заполняем исходными данными. Ячейку D2 заполняем по формуле $=(B2-B3)(B2-B4)(B2-B5)(B2-B6)$. Ячейку D3 заполняем по формуле $=(B3-B2)(B3-B4)(B3-B5)(B3-B6)$. Ячейку D4 заполняем по формуле $=(B4-B2)(B4-B3)(B4-B5)(B4-B6)$. Ячейку D5 заполняем по формуле $=(B5-B2)(B5-B3)(B5-B4)(B5-B6)$. Ячейку D6 заполняем по формуле $=(B6-B2)(B6-B3)(B6-B4)(B6-B5)$. Ячейки E2-6 заполняем 1. Ячейку F2 заполняем по формуле $=-(B3+B4+B5+B6)$. Ячейку F3 заполняем по формуле $=-(B2+B4+B5+B6)$. Ячейку F4 заполняем по формуле $=-(B2+B3+B5+B6)$. Ячейку F5 заполняем по формуле $=-(B2+B3+B4+B6)$. Ячейку F6 заполняем по формуле $=-(B2+B3+B4+B5)$. Ячейку G2 заполняем по формуле $=B3\cdot B4+B3\cdot B5+B3\cdot B6+B4\cdot B5+B4\cdot B6+B5\cdot B6$. Ячейку G3 заполняем по формуле $=B2\cdot B4+B2\cdot B5+B2\cdot B6+B4\cdot B5+B4\cdot B6+B5\cdot B6$. Ячейку

G4 заполняем по формуле $=B2\cdot B3+B2\cdot B5+B2\cdot B6+B3\cdot B5+B3\cdot B6+B5\cdot B6$. Ячейку G5 заполняем по формуле $=B2\cdot B3+B2\cdot B4+B2\cdot B6+B3\cdot B4+B3\cdot B6+B4\cdot B6$. Ячейку G6 заполняем по формуле $=B2\cdot B3+B2\cdot B4+B2\cdot B5+B3\cdot B4+B3\cdot B5+B4\cdot B5$. Ячейку H2 заполняем по формуле $=-(B3\cdot B4\cdot B5+B3\cdot B4\cdot B6+B3\cdot B5\cdot B6+B4\cdot B5\cdot B6)$. Ячейку H3 заполняем по формуле $=-(B2\cdot B4\cdot B5+B2\cdot B4\cdot B6+B2\cdot B5\cdot B6+B4\cdot B5\cdot B6)$. Ячейку H4 заполняем по формуле $=-(B2\cdot B3\cdot B5+B2\cdot B3\cdot B6+B2\cdot B5\cdot B6+B3\cdot B5\cdot B6)$. Ячейку H5 заполняем по формуле $=-(B2\cdot B3\cdot B4+B2\cdot B3\cdot B6+B2\cdot B4\cdot B6+B3\cdot B4\cdot B6)$. Ячейку H6 заполняем по формуле $=-(B2\cdot B3\cdot B4+B2\cdot B3\cdot B5+B2\cdot B4\cdot B5+B3\cdot B4\cdot B5)$. Ячейку J2 заполняем по формуле $=B3\cdot B4\cdot B5\cdot B6$. Ячейку J3 заполняем по формуле $=B2\cdot B4\cdot B5\cdot B6$. Ячейку J4 заполняем по формуле $=B2\cdot B3\cdot B5\cdot B6$. Ячейку J5 заполняем по формуле $=B2\cdot B3\cdot B4\cdot B6$. Ячейку J6 заполняем по формуле $=B2\cdot B3\cdot B4\cdot B5$. Ячейку E7 заполняем по формуле $=\frac{C2\cdot E2}{D2}+\frac{C3\cdot E3}{D3}+\frac{C4\cdot E4}{D4}+\frac{C5\cdot E5}{D5}+\frac{C6\cdot E6}{D6}$. Ячейку F7 заполняем по формуле $=\frac{C2\cdot F2}{D2}+\frac{C3\cdot F3}{D3}+\frac{C4\cdot F4}{D4}+\frac{C5\cdot F5}{D5}+\frac{C6\cdot F6}{D6}$. Ячейку G7 заполняем по формуле $=\frac{C2\cdot G2}{D2}+\frac{C3\cdot G3}{D3}+\frac{C4\cdot G4}{D4}+\frac{C5\cdot G5}{D5}+\frac{C6\cdot G6}{D6}$. Ячейку H7 заполняем по формуле $=\frac{C2\cdot H2}{D2}+\frac{C3\cdot H3}{D3}+\frac{C4\cdot H4}{D4}+\frac{C5\cdot H5}{D5}+\frac{C6\cdot H6}{D6}$. Ячейку J7 заполняем по формуле $=\frac{C2\cdot J2}{D2}+\frac{C3\cdot J3}{D3}+\frac{C4\cdot J4}{D4}+\frac{C5\cdot J5}{D5}+\frac{C6\cdot J6}{D6}$. Получаем многочлен Лагранжа $y=0{,}01x^4-0{,}03x^3+0{,}02x^2-0{,}04x+5$.

Значение ячейки C8 найдем по формуле $=E7\cdot 4^4+F7\cdot 4^3+G7\cdot 4^2+H7\cdot 4+J7$.

Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция $y=f(x)$ задана таблично значениями $y_0, y_1, \dots, y_n$ на системе равностоящих узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$, причем любое x_k представимо в виде $x_k=x_0+kh$ где h – шаг сетки.

Конечной разностью 1-го порядка называется $\Delta^1 f_k=f_{k+1}-f_k$, конечной разностью n-го порядка $\Delta^n f_k=\Delta^{n-1} f_{k+1}-\Delta^{n-1} f_k$.

Свойства:

$\Delta^n P_n(x)=const$ (конечная разность n-го порядка от полинома n-й степени равна константе).

$\Delta^{n+1} P_n(x)=0$ (конечная разность $n+1$-го порядка от полинома n-й степени равна нулю).

Пусть $y=f(x)$ имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k\approx f^{(n)}(x_k)\cdot h^n$.

Определение. Разделенной разностью $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ n-го порядка называется $f(x_0, x_1, x_2, \dots x_n)=\frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)-f(x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1})}{x_n-x_0}$. Разделенная разность первого порядка: $f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, разделенная разность второго порядка: $f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$.

Для функции, заданной таблично, можно записать интерполяционный полином Ньютона имеет вид

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Замечание: Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Примечание. При увеличении или уменьшении точек интерполирования полином Лагранжа строится заново, а в полиноме Ньютона меняются несколько слагаемых.

Пример 12. Построить полином Ньютона для выборки

x_i	3	5	7	9	11
y_i	5,06	7,8	19,42	50	113,46

Решение. Для упрощения расчетов используем Excel в котором составим две таблицы.

	A	B	C	D	E	F
1	x_i	y_i	1 порядка	2 порядка	3 порядка	4 порядка
2	3	5,06	1,37	1,11	0,21	0,01
3	5	7,8	5,81	2,37	0,29	
4	7	19,42	15,29	4,11		
5	9	50	31,73			
6	11	113,46				
7						
8	N	x^4	x^3	x^2	x	x^0
9	x^0					1
10	$(x-3)$				1	-3
11	$(x-3)(x-5)$			1	-8	15
12	$(x-3)(x-5)(x-7)$		1	-15	71	-105
13	$(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)$	1	-24	206	-744	945
14						
15	$N(x)=$	0,01	-0,03	0,02	-0,04	5

Пояснение к таблице. Ячейки A2-6 и B2-6 заполняем данными исходной выборки. Ячейку C2 заполняем по формуле $= \frac{B3 - B2}{A3 - A2}$. Затем используя ячейку C2 и автозаполнение находим значения ячеек C3, C4 и C5. Значение ячейки D2 находим по формуле $= \frac{C2 - C3}{A2 - A4}$. Затем используя ячейку D2 и автозаполнение находим значения ячеек D3 и D4. Значение ячейки E2 находим по формуле

$= \dfrac{D2 - D3}{A2 - A5}$. Затем, используя ячейку E2 и автозаполнение, находим значения ячеек E3. Значение ячейки E2 находим по формуле $= \dfrac{E2 - E3}{A2 - A6}$. Для дальнейшего заполнения таблицы найдем произведения $(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$, $(x-3)(x-5)(x-7) = (x^2 - 8x + 15)(x-7) = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$ и $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) = (x^3 - 15x^2 + 71x - 105)(x-9) = x^4 - 24x^3 + 206x^2 - 744x + 945$. Полученными коэффициентами заполняем соответствующие ячейки. Значение ячейки F15 найдем по формуле $= B2 \cdot F9 + C2 \cdot F10 + D2 \cdot F11 + E2 \cdot F12 + F2 \cdot F13$. Значение ячейки E15 найдем по формуле $= C2 \cdot E10 + D2 \cdot E11 + E2 \cdot E12 + F2 \cdot E13$. Значение ячейки D15 найдем по формуле $= D2 \cdot D11 + E2 \cdot D12 + F2 \cdot D13$. Значение ячейки C15 найдем по формуле $= E2 \cdot C12 + F2 \cdot C13$. Значение ячейки B15 найдем по формуле $= B13 \cdot F2$. Получаем многочлен Ньютона $y = 0{,}01x^4 - 0{,}03x^3 + 0{,}02x^2 - 0{,}04x + 5$.

Численное интегрирование

Очень часто в процессе решения конкретных задач, как в научной, так и в инженерной практике возникает необходимость вычисления определенных интегралов вида: $\int_a^b f(x)dx$

Подынтегральная функция $f(x)$ может быть задана одним из трех способов:

1. Задается явная формула для $f(x)$, например, $f(x) = \cos\left(xe^{-x^2}\right)$

2. Функция $f(x)$ явно не задана, но ее значение может быть вычислено при любом x из отрезка $[a;b]$.

3. Для некоторого фиксированного конечного набора точек x_i из отрезка $[a;b]$ задается таблица значений $x_i; f(x_i)$.

Интегралы от функций первого типа иногда удается вычислить аналитически, либо вручную, либо с помощью численных методов. Интегралы от функций второго и третьего типа (а также первого, если не используются символьные методы) обычно находят численными методами, то есть методами, позволяющими найти численное значение определенного интеграла приближенно с любой степенью точности.

Все методы приближенного вычисления определенных интегралов основаны на геометрическом смысле интеграла Ньютона–Лейбница. Он заключается в том, что определенный интеграл численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.

Процедура численного интегрирования заключается в том, что отрезок $[a;b]$ разбивается на n частичных отрезков, а затем подынтегральная функция аппроксимируется некоторой другой функцией $\varphi(x)$, интеграл от которой вычисляется сравнительно просто. Для аппроксимации $f(x)$ может быть использо-

ван любой класс простых функций, таких как полиномы, кусочные полиномы, тригонометрические, экспоненциальные или логарифмические функции. Конкретный выбор класса аппроксимирующих функций может зависеть от некоторых определенных свойств подынтегральной функции, но в наиболее распространенном случае, который здесь и рассматривается, в качестве таких функций используются полиномы. Заменяя подынтегральную функцию на каждом шаге отрезками линий нулевого, первого и второго порядков, получаем соответственно приближенные формулы для вычисления интеграла:
метод прямоугольников;
метод трапеций;
метод Симпсона.

Метод прямоугольников

Для подсчета интеграла разделим интервал интегрирования $[a;b]$ на n равных отрезков длины $h=\frac{b-a}{n}$. На каждом из отрезков функция $f(x)$ заменяется некоторым постоянным значением и, следовательно, получаем сумму прямоугольников с отрезками как основаниями, равными h и вертикальными боковыми сторонами высотой $f(x_i)$. При этом точка x_i выбирается, как середина каждого элементарного отрезка. Метод «средних» прямоугольников (метод средних) является более точным, чем методы «левых» и «правых» прямоугольников, когда в качестве точек x_i могут выбираться левые или правые границы элементарных отрезков. С геометрической точки зрения означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямоугольников с основаниями $h=\frac{b-a}{n}$ и высотами $f(x_i)$. Для интервала $[a;b]$ и шага интегрирования h полная формула будет записана в виде: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)+\frac{h}{2}$, где n – число разбиений для интервала $[a;b]$, и точка x_0 совпадает с a.

Метод трапеции

Следующим простейшим полиномом является линейная функция. Если она выбрана совпадающей с $f(x)$ в концах отрезка a и b, то получаем трапецию. Площадь этой трапеции (интеграл от линейной функции), используемая в качестве приближения к значению интеграла от $f(x)$, определяется по формуле $I(f)\approx T(f)=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$. Для того чтобы найти приближенное значение площади S, разделим отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей длины $h=\frac{b-a}{n}$. В точках разбиения $x_0=a$, $x_k=a+kh$ проводим ординаты $y_0, y_1,\ldots, y_n$ до пересечения с кривой $y=f(x)$, т. е. $y_0=f(a)$, $y_k=f(x_k)$. Концы ординат соединяем прямолинейными отрезкам, то есть на каждом отрезке разбиения дугу графика подынтегральной функции $y = f(x)$ заменяем стягивающей ее хордой (линейная интерполяция) и получим трапецию. Таким образом, для интервала $[a;b]$ и шага интегрирования h полная формула приближенного значения интеграла будет записана в виде

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

где n – число разбиений для интервала $[a;b]$ и точка x_0 совпадает с a, а точка x_n совпадает с b.

Метод Симпсона

Более высокая точность определения численного значения определенного интеграла получается при аппроксимации функции $f(x)$ квадратичным интерполяционным полиномом, который совпадает с $f(x)$ в крайних точках a и b, а также в средней точке $\frac{a+b}{2}$. Интеграл от этого квадратичного полинома выражается формулой: $I(f) \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$, которая называется формулой Симпсона. В методе Симпсона площадь криволинейной трапеции рассчитывается как сумма площадей ряда криволинейных трапеций, у которых криволинейная сторона представляет собой участок параболы. Каждая парабола может быть проведена только через три граничные точки, принадлежащие двум соседним отрезкам. Поэтому число участков разбиения отрезка $[a;b]$ в отличие от предыдущих методов обязательно должно быть четным. Таким образом, вместо каждых двух элементарных прямолинейных трапеций будем рассматривать одну элементарную трапецию, ограниченную параболической дугой. Исходя из этого, определенный интеграл на случай разбиения интервала $[a;b]$ на n участков с шагом h приближенно вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right)$$

Таким образом, для реализации метода прямоугольников, трапеции и Симпсона для вычисления определенного интеграла необходимо: Задать в явном виде определенный интеграл, площадь которого необходимо определить. После этого задаются пределы интегрирования, и шаг интегрирования. Затем проводится расчет по формулам. Для метода Симпсона число разбиений n должно быть четным.

Оценка точности.

Для формулы трапеций оценка погрешности находится по формуле

$|R_n| \le M \frac{|b-a|h^2}{12}$, где $M = \max|f''(x)|;\ x \in [a;b]$.

Для формулы Симпсона $|R_n| \le M \frac{|b-a|h^4}{180}$, где $M = \max|f''''(x)|;\ x \in [a;b]$.

Как следует из оценочных формул погрешностей интегрирования, вычисление R_n возможно лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически, что не всегда известно. На практике широко применяется следующий эмпирический прием.

Искомый интеграл вычисляется дважды при делении отрезка $[a;b]$ на n и на $2n$ частей. Затем полученные значения интеграла (обозначим $I(n)$и $I(2n)$) сравниваются и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными. Можно получить выражения, позволяющие хотя бы грубо контролировать точность численного интегрирования на основе двойного счета с шагом h и $2h$:

$I - I^p(h) \approx \dfrac{\left|I^p(h) - I^p(2h)\right|}{2^p - 1}$, где p – порядок метода.

Для формулы трапеций $p = 2$ и, следовательно, $I - I^{TP}(h) \approx \dfrac{\left|I^{TP}(h) - I^{TP}(2h)\right|}{3}$.

Для формулы Симпсона $p = 4$, следовательно, $I - I^C(h) \approx \dfrac{\left|I^C(h) - I^C(2h)\right|}{15}$.

Пример 13.

1) Найдите шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int_1^3 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

2) Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами h и $2h$. Дайте уточненную оценку погрешности.

3) Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами h и $2h$. Дайте уточненную оценку погрешности.

4) Вычислите определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Сравните приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точные результаты?

Решение.

1) Найдем вторую производную $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^3 + 6x}{\left(x^2+1\right)^3}$. Максимум второй производной на интервале $[1;3]$ равен $0{,}5$ при $x = 1$. Получаем $0{,}5\dfrac{2 \cdot h^2}{12} < 0{,}01 \Rightarrow h^2 < 0{,}12 \Rightarrow h < 0{,}347$. Найдем количество интервалов $n > \dfrac{b-a}{h} = 5{,}7$. Возьмем число интервалов кратное 4, т.е. $n = 8$. Следовательно, шаг интегрирования $h = \dfrac{2}{8} = 0{,}25$.

Найдем значения в узловых точках

i	x_i	$y(x_i)$
0	1	0,5
1	1,25	0,762195
2	1,5	1,038462
3	1,75	1,319231
4	2	1,6
5	2,25	1,878866
6	2,5	2,155172
7	2,75	2,428832
8	3	2,7

2) Вычислим интеграл по формуле трапеций с шагом $h = 0{,}25$. Получим $I(h) \approx 0{,}25\left(\frac{0{,}5+2{,}7}{2} + 0{,}762 + 1{,}038 + \ldots + 2{,}429\right) \approx 0{,}25 \cdot 11{,}18276 \approx 3{,}195689$. Увеличим шаг в два раза и посчитаем $I(2h)$, $2h = 0{,}5$, $n = 4$.

$I(2h) \approx 0{,}0716\left(\frac{0{,}5+2{,}7}{2} + 1{,}0384 + 1{,}6 + 2{,}1552\right) \approx 3{,}196817$. Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге. $I - I^{TP}(h) \approx \frac{|3{,}195689 - 3{,}196817|}{3} \approx 0{,}000376$.

Итак, по формуле трапеций $\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2+1} = 3{,}1956 \pm 0{,}000376$.

3) Вычислим интеграл по формуле Симпсона с шагом h и $2h$.
Интеграл с шагом $h = 0{,}25$ получаем

$$\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2+1} \cong \frac{0{,}25}{3}\left(0{,}5 + 2{,}7 + 4\cdot(0{,}7622 + 1{,}419 + 1{,}8789 + 2{,}4288) + 2\cdot(1{,}0385 + 1{,}6 + 2{,}1552)\right)$$

$\approx 3{,}195313$

с шагом $h = 0{,}5$ получаем

$$\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2+1} \approx \frac{0{,}0716}{3}\left(0{,}5 + 2{,}7 + 4\cdot(1{,}0384 + 2{,}1552) + 2\cdot 1{,}6\right) \approx 3{,}195756.$$

Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге.

$$I - I^{C}(h) \approx \frac{3{,}195313 - 3{,}195756}{15} \approx 0{,}0000294.$$

Итак, по формуле Симпсона $\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2+1} = 3{,}1953 \pm 0{,}0000294$.

Найдем точное значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \left\langle \begin{array}{l} x^2+1 = t,\ 2xdx = dt \\ x = 3 \to t = 10 \\ x = 1 \to t = 2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2}(t - \ln t)\Big|_2^{10} = \frac{1}{2}(8 - \ln 5) \approx 3{,}195281.$$

Сравним с методом трапеций, получим $\Delta = |3{,}195281 - 3{,}195689| = 0{,}000408$, с методом Симпсона $\Delta = |3{,}195281 - 3{,}195313| = 0{,}000032$. Наиболее точен метод Симпсона.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши: $y' = f(x;y), \quad x \in [x_0;b], \quad y(x_0) = y_0$. Пусть требуется найти решение $y(x)$ на отрезке $[a;b]$, где $x_0 = a$. Применим к отрезку $[a;b]$ равномерное разбиение, т. е. получим $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh$, где $x_n = b$, x_k – узлы сетки, h – шаг сетки. Обозначим через $y(x_k)$ точное значение функции $y(x)$ в точке x_k, через y_k приближенное вычисленное значение функции $y(x)$ в точке x_k.

Метод Эйлера

Разложим в ряд Тейлора в точке x_k значение функции $y(x_k + h) = y(x_{k+1})$. Получим $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \dfrac{h^2}{2} y''(\varepsilon)$, где $x_k < \varepsilon < x_{k+1}$. Согласно задаче Коши $y'(x_k) = f(x_k; y(x_k))$ тогда разложение Тейлора $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k; y(x_k)) + \dfrac{h^2}{2} y''(\varepsilon)$. Полагая, что значение функции в следующем узле получается, таким образом, $y_{k+1} = y_k + hf(x_k; y_k)$. Эта формула и определяет *метод Эйлера*.

Методы Рунге–Кутта

Проинтегрируем дифференциальное уравнение на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, получим $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x;y)dx$, $y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x;y)dx$. Воспользуемся формулой трапеций, тогда получим $y(x_{k+1}) = y(x_k) + \dfrac{h}{2}\left(f(x_k; y(x_k)) + f(x_{k+1}; y(x_{k+1}))\right)$.

Заменим $y(x_{k+1})$ в правой части равенства по формуле Эйлера на $y_{k+1} = y_k + hf(x_k; y_k)$, получим $y(x_{k+1}) = y(x_k) + \dfrac{h}{2}\left(f(x_k; y(x_k)) + f(x_{k+1}; y_k + hf(x_k; y_k))\right)$ это – явная формула Рунге–Кутта II порядка.

Метод Рунге четвертого порядка использует формулу $y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$, где $F_1 = f(x_k; y_k)$, $F_2 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}; y_k + \dfrac{h}{2}F_1\right)$, $F_3 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}; y_k + \dfrac{h}{2}F_2\right)$, $F_4 = f(x_{k+1}; y + hF_3)$. Точность метода $O(h4)$. Выбор шага интегрирования. Точность расчетов существенным образом зависит от величины шага интегрирования h, поэтому важно правильно выбрать его начальное значение h_0. Выбор начального шага h_0 проведем на примере метода Рунге–Кутта IV порядка. Итак, пусть ε – заданная точность счета. Поскольку метод Рунге–Кутта имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4=\varepsilon$. Кроме того, отрезок $[a;b]$ должен быть разбит на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий: $h_0=\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\dfrac{b-a}{h_0}$ – четно. Наибольшее h_0, удовлетворяющее указанным условиям является грубым приближением начального шага. Для его уточнения поступаем следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке x_0+2h_0 по формулам Рунге–Кутта с шагами h_0 и $2h_0$, получаем два значения y_2 и $\tilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение h_0, при котором будет выполнено неравенство $|y_2-\tilde{y}_2|<\varepsilon$. Это и будет величина шага h, с которым решается задача Коши методом Рунге–Кутта.

Пример 14. Для уравнения $xy'+y=2y^2\ln x,\quad y(1)=1{,}5$.

1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

2. Найти решение задачи Коши на отрезке $[1;3]$методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}. Построить приближенную интегральную кривую.

3. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

4. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

Решение: найдём шаг интегрирования $h=\sqrt[4]{10}=0{,}1$. Для расчетов желательно составить таблицу вида

x_k	x_p	y_p	F	
x_k	x_k	y_k	$F_1=f(x_k;y_k)$	$\Delta=\dfrac{h}{6}(F_1+2F_2+2F_3+F_4)$
	$x_k+\dfrac{h}{2}$	$y_k+\dfrac{h}{2}F_1$	$F_2=f\left(x_k+\dfrac{h}{2};y_k+\dfrac{h}{2}F_1\right)$	
	$x_k+\dfrac{h}{2}$	$y_k+\dfrac{h}{2}F_2$	$F_3=f\left(x_k+\dfrac{h}{2};y_k+\dfrac{h}{2}F_2\right)$	
	x_k+h	y_k+hF_3	$F_3=f(x_k+h;y_k+hF_3)$	
$x_{k+1}=x_k+h$	x_{k+1}	$y_{k+1}=y_k+\Delta$		
…	…	…	…	…

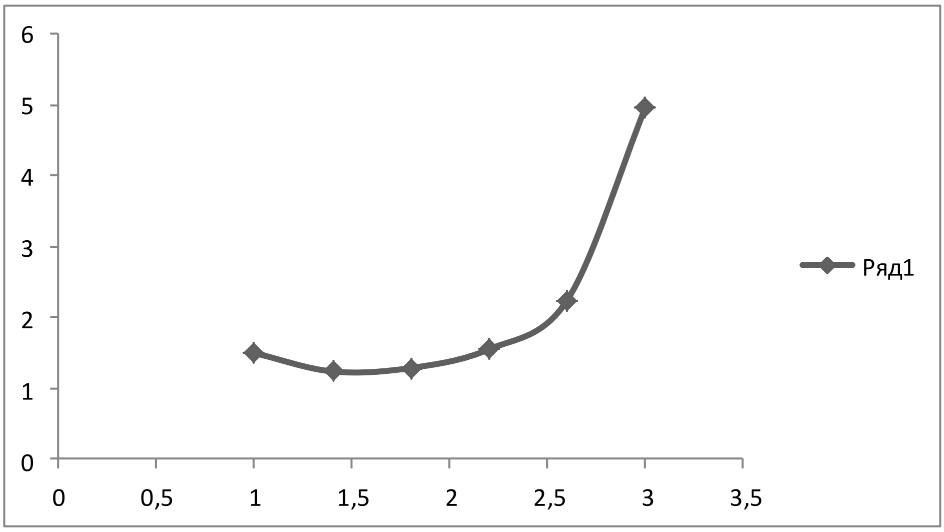
Для уточнения шага воспользуемся правилом удвоения. Для этого вычислим значение решение задачи Коши y_2 в точке x_0+2h_1 с шагом $h=0{,}1$ и y_1 в точке x_0+h_2 с шагом $h=0{,}2$ получим $y_2=1{,}307798$ и $y_1=1{,}307773$ их разность по модулю равна 0,0000257 меньше требуемой точности поэтому шаг равный 0,1 является избыточным. Повторим процедуру: вычислим значение решение задачи Коши y_2 в точке x_0+2h_1 с шагом $h=0{,}2$ и y_1 в точке x_0+h_2 с шагом $h=0{,}4$

получим $y_2 = 1{,}240236$ и $y_1 = 1{,}240102$ их разность по модулю равна 0,000134. Следовательно, для заданной точности достаточно $h = 0{,}4$.

Заполним таблицу

x_k	x_p	y_p	F	Δ
1	1	1,5	-1,5	-0,259897812
	1,2	1,2	-0,562428264	
	1,2	1,387514	-0,57125405	
	1,4	1,271498	-0,131102556	
1,4	1,4	1,240102	-0,146580155	0,048967967
	1,6	1,210786	0,104542134	
	1,6	1,261011	0,146087395	
	1,8	1,298537	0,379840609	
1,8	1,8	1,28907	0,369101244	0,264041903
	2	1,36289	0,606055067	
	2	1,410281	0,673454973	
	2,2	1,558452	1,032507222	
2,2	2,2	1,553112	1,023024512	0,69394107
	2,4	1,757717	1,52163543	
	2,4	1,857439	1,743098135	
	2,6	2,250351	2,856624404	
2,6	2,6	2,247053	2,846990353	2,721819469
	2,8	2,816451	4,827946244	
	2,8	3,212642	6,443181401	
	3	4,824326	15,43804639	
	3	4,968873		

Построим приближенную интегральную кривую



Найдем точное решение задачи Коши.

$y'x + y = 2y^2 \ln x$ положим $y = uv \to y' = u'v + uv'$, $u'vx + uv'x + uv = 2u^2v^2 \ln x$,

$uv'x + uv = 0$, $v' = -\dfrac{v}{x} \to \ln v = -\ln x \to v = \dfrac{1}{x}$,

$u' = 2u^2 \dfrac{\ln x}{x^2} \to -\dfrac{1}{u} = -\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2}{x} - C \to u = \dfrac{x}{2\ln x + 2 + Cx}$, $y = \dfrac{1}{2\ln x + 2 + Cx}$ найдем значение константы C используя начальное условие
$\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2+C} \to 6 + 3C = 2 \to C = -\dfrac{4}{3}$. Следовательно, искомое частное решение
$y = \dfrac{1}{2\ln x + 2 - \frac{4}{3}x}$. Найдем значения функции в узловых точках $y(x_k)$ и сравним со значениями, полученными по методу Рунге–Кута y_k.

x_k	$y(x_k)$	y_k	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
1	1,5	1,5	2,22045E-16
1,4	1,240267302	1,240102188	0,000165114
1,8	1,289368731	1,289070155	0,000298576
2,2	1,553805035	1,553112058	0,000692976
2,6	2,250446708	2,247053128	0,00339358
3	5,070361988	4,968872597	0,101489391

Максимум модуля отклонения точного значения от приближенного: $\delta = 0{,}1015$.
Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.
Рассмотрим задачу Коши $y' = f(x;y)$ $\quad y(x_0) = y_0$ тогда если функция $f(x;y)$ является аналитической то решение задачи Коши можно представить в виде ряда Тейлора $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$, где $c_k = \dfrac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$. Коэффициент $c_o = y(x_0) = y_0$, следующий коэффициент c_1 находится из заданного уравнения
$c_1 = y'(x_0) = f(x_0; y_0)$, что касается остальных коэффициентов c_k то они находятся путем последовательного дифференцирования заданного дифференциального уравнения. Разберем на примере.
Пример. Записать четыре первых члена решения дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{x+y}$, $\quad y(1) = 2$ и найти значение $y(1{,}5)$.
Решение. Полагая, $x_0 = 1$ можем записать ряд Тейлора
$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dfrac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \ldots$ найдем
$y'(x_0) = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$, $y'' = \dfrac{y'(x+y) - y(1+y')}{(x+y)^2} = \dfrac{y'x + y'y - y - yy'}{(x+y)^2} = \dfrac{y'x - y}{(x+y)^2}$,
$y''(x_0) = y''(1) = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot 1 - 2}{9} = -\dfrac{4}{27}$, $y''' = \dfrac{y''x(x+y) - 2(y'x - y)(1+y')}{(x+y)^3}$,
$y'''(x_0) = y'''(1) = \dfrac{-\frac{4}{27}\cdot(1+2) - 2\left(\frac{2}{3} - 2\right)\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{27} = \dfrac{-\frac{4}{9} + \frac{40}{9}}{27} = \dfrac{4}{27}$, следовательно, ряд Тейлора

$y(x)=2+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{2}{27}(x-1)^2+\frac{2}{81}(x-1)^3$. Вычислим значение при $x=1{,}5$ получим $y(1{,}5)=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{54}+\frac{1}{324}=\frac{648+108-6+1}{324}=2{,}3179$.

Изложенный метод позволяет находить решение задачи Коши для уравнений любого порядка. Покажем на примере уравнения второго порядка.

Пример. Записать четыре первых отличных от нуля члена решения дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0 \quad y(0)=0 \quad y'(0)=1$.

Полагая, $x_0=0$ запишем ряд Тейлора

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)x+\frac{y''(x_0)}{2}x^2+\frac{y'''(x_0)}{6}x^3+\frac{y^{(4)}}{24}x^4+\dots$$

найдем $y''(x_0)=y''(0)=-xy'-y=0-0=0$, $y'''=-y'-xy''-y'=-2y'-xy''$, $y'''(x_0)=y'''(0)=-2$, $y^{(4)}=-2y''-y''-xy'''=-3y''-xy'''$, $y^{(4)}(x_0)=y^{(4)}(0)=0$, $y^{(5)}=-3y'''-y'''-xy^{(4)}=-4y'''-xy^{(4)}$, $y^{(5)}(x_0)=y^{(5)}(0)=8$, $y^{(6)}=-5y^{(4)}-xy^{(5)}$, $y^{(6)}(x_0)=y^{(6)}(0)=0$, $y^{(7)}=-6y^{(5)}-xy^{(6)}$, $y^{(7)}(x_0)=-48$ следовательно, ряд Тейлора $y(x)=x-\frac{2}{6}x^3+\frac{8}{5!}x^5-\frac{48}{7!}x^7+\dots$ или $y(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}-\frac{x^7}{105}+\dots$

Список источников

1. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс]. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 336 с. – Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=672966 – Загл. с экрана.
2. Зенков, А. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 122 с. – Режим доступа: https://biblio online.ru/book/chislennye-metody-41502. – Загл. с экрана.
3. Манюкова, Н. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Москва : Юрайт, 2018. – 140 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/book/chislennye-metody-423132 – Загл. с экрана.