

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра физики

**ФИЗИКА.
МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ**

Лабораторный практикум К-304.4
по дисциплине «Физика»
для обучающихся всех специальностей
и направлений бакалавриата

Составители Г. К. Кошкина
И. В. Цвеклинская

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 6 от 29.01.2020

Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
направления подготовки 20.03.01
Протокол № 7 от 25.02.2020

Электронная копия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	2
Лабораторная работа № 1 «Определение момента инерции при помощи крутильного маятника».....	3
Лабораторная работа № 2 «Определение ускорения свободного падения с помощью универсального маятника».....	10
Лабораторная работа № 3 «Определение момента инерции методом качаний».....	17
Лабораторная работа № 4 «Определение скорости пули с помощью баллистического крутильного маятника».....	22
Вопросы для самоподготовки.....	30
Тестовые задания.....	31
Список рекомендуемой литературы.....	35

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый комплекс представляет собой необходимый перечень лабораторных работ, предусмотренных рабочей программой курса физики в техническом вузе.

Согласно рабочей программе 50 % от объема часов, отводимых для изучения дисциплины, приходится на самостоятельную работу, целью которой является изучение лекционного курса, подготовка к практическим и лабораторным работам, а также формирование у студентов самостоятельности в приобретении новых знаний и навыков.

При подготовке к лабораторным работам необходимо внимательно прочесть описание работы; изучить теоретические основы данной работы, используя указанную литературу; познакомиться с экспериментальной установкой и порядком работы на ней; разобраться с алгоритмом вычислений и оценкой погрешности измерений; составить конспект, содержащий титульный лист определенного образца, рабочие формулы, схему экспериментальной установки и таблицы для записи результатов.

Студент будет допущен к выполнению лабораторной работы после обсуждения с преподавателем цели работы, теоретической взаимосвязи измеряемых и расчетных величин и расчета погрешностей их измерений.

По окончании эксперимента нужно обработать полученные результаты, построить соответствующие графики (где это требуется), проанализировать результаты проведенного эксперимента и сделать соответствующий вывод, касающийся сути проверенной закономерности и указания на то, каким образом это сделано.

Для сдачи отчета студент должен подписать у преподавателя полученные результаты и ответить на теоретические вопросы по данной теме.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Определение момента инерции при помощи крутильного маятника

1. Цель работы: освоение метода экспериментального определения момента инерции тела при помощи крутильных колебаний.

2. Подготовка к работе: прочитать в учебнике [1] разделы 4.3 и 27.1 и в учебнике [2] §§ 16, 18, 140. Для выполнения лабораторной работы студент должен знать: а) основное уравнение динамики вращательного движения; б) определения вектора момента силы относительно точки и оси, модуля вектора момента силы; в) физический смысл момента инерции тела и порядок его расчета; г) дифференциальные уравнения гармонических колебаний, их виды и решения; д) дифференциальное уравнение крутильных колебаний и его решение; е) порядок работы с измерительными приборами и расчет погрешностей измерений; ж) ответы на контрольные вопросы 1–8, 12, 13 (с. 30–31).

3. Выполнение работы

3.1. Описание установки

Стандартный крутильный маятник FPM-05 представлен на рис. 1. В основании закреплена колонка 1, на которой укреплены кронштейны 2, 3, 4. Между кронштейнами 2 и 3 натянута стальная проволока, на которой подвешена рамка 5. При помощи подвижной балки, перемещающейся между неподвижными балками, в рамке можно закреплять грузы 6 различной величины и формы. Подвижная балка закрепляется при помощи винтов. На кронштейне 4 закреплена стальная плита 7, к которой прикреплены электромагнит 8, фотоэлектрический датчик 9 и угловая шкала 10. Электромагнит можно перемещать по плите, его положение относительно фотоэлектрического датчика фиксируется по угловой шкале. На основании закреплен миллисекундомер 11. Фотоэлектрический датчик и электромагнит соединены с миллисекундомером при помощи разъема. На лицевой панели кроме цифровых индикаторов секундомера и счетчика периодов размещены кнопки «Сеть», «Сброс», «Пуск», «Стоп».

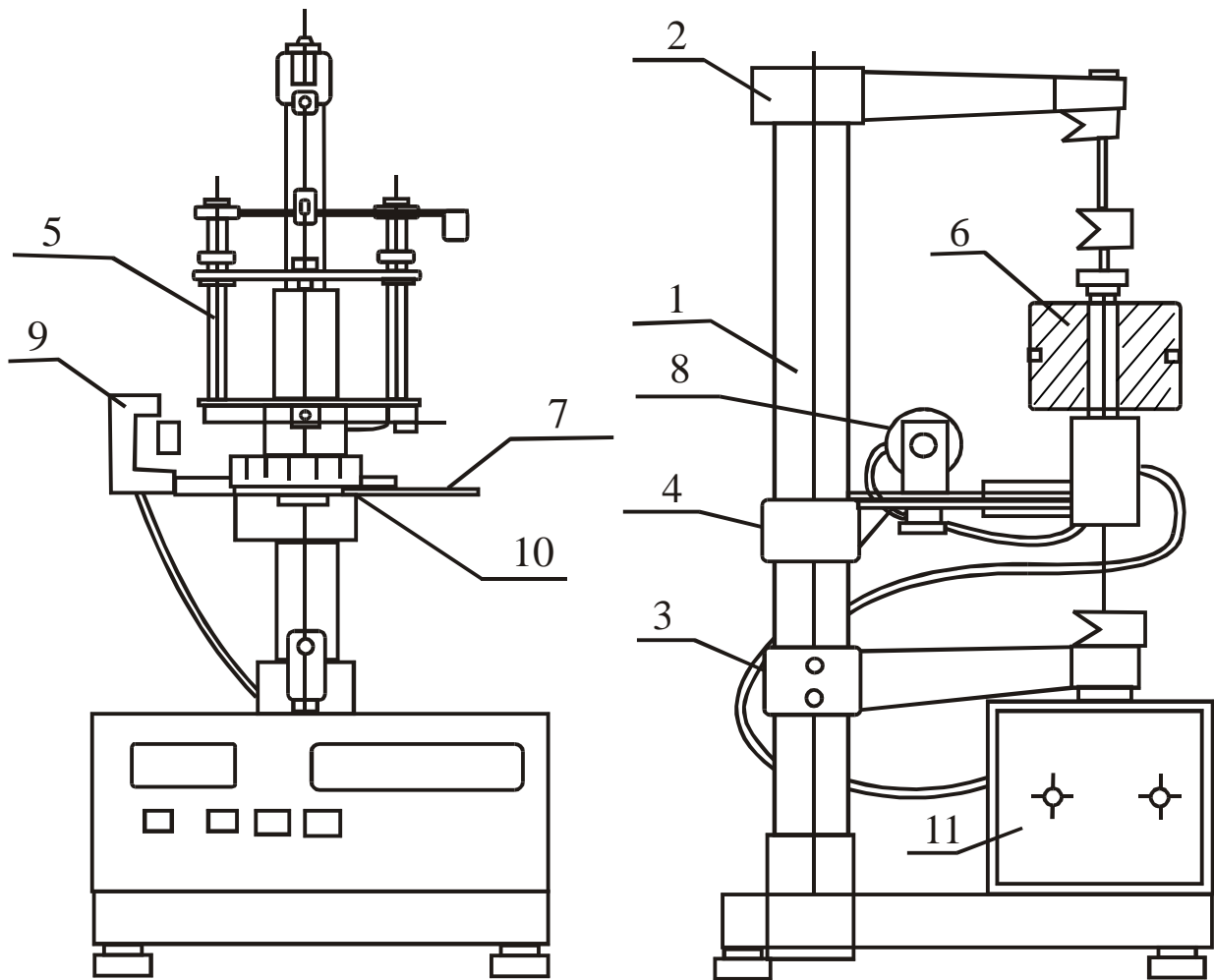


Рис. 1. Крутильный маятник:

1 – колонка; 2, 3, 4 – кронштейны; 5 – рамка; 6 – груз;
 7 – стальная плита; 8 – электромагнит; 9 – фотоэлектрический датчик; 10 – угловая шкала; 11 – миллисекундомер со счетчиком и кнопками управления

«Сеть» – выключатель сети. Нажатие этой кнопки включает питающее напряжение, при этом одновременно включается электромагнит, а на световых индикаторах миллисекундомера и счетчика периодов высвечивается нуль.

«Сброс» – сброс измерителя. Нажатие этой кнопки вызывает сброс показаний миллисекундомера и счетчика и генерирует сигнал разрешения на новое измерение. Если перед нажатием этой кнопки рамка не была зафиксирована при помощи электромагнита, счет новых периодов и измерение времени миллисекундомера

ром начинается сразу после прохождения рамкой фотоэлектрического датчика.

«Пуск» – запуск колебаний. Нажатие этой кнопки выключает электромагнит.

«Стоп» – окончание измерений. Нажатие этой кнопки вызывает генерирование сигнала на окончание процесса счета. Счет периодов и времени заканчивается после завершения очередного колебания. По окончании счета на индикаторах секундомера и счетчика периодов остаются показания, соответствующие моменту завершения счета.

3.2. Методика измерений и расчетов

Метод измерения момента инерции тел при помощи крутильного маятника основан на применении основного закона вращательного движения:

$$\vec{M} = J\vec{\epsilon}, \quad (1)$$

где \vec{M} – вектор момента силы; J – момент инерции; $\vec{\epsilon}$ – вектор углового ускорения.

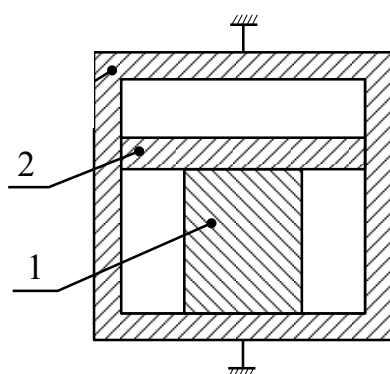


Рис. 2. Рамка крутильного маятника: 1 – тело, момент инерции которого определяется; 2 – подвижная балка

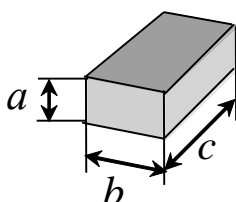


Рис. 3. Геометрическая форма исследуемых тел

Основная часть прибора – рамка 5 (см. рис. 1) – подвешена на упругой стальной проволоке. Конструкция рамки показана на рис. 2. Эта конструкция позволяет закреплять внутри рамки измеряемые тела 1 при помощи подвижной балки 2, которая может перемещаться вдоль направляющих. Исследуемые тела представляют собой прямоугольные параллелепипеды (рис. 3).

При отклонении рамки относительно положения равновесия на угол φ на нее действует вращающий момент:

$$M = -K\varphi, \quad (2)$$

где K – модуль кручения – коэффициент, определяемый упругими свойствами проволоки. Знак минус показывает, что момент силы вызывает поворот рамки в сторону уменьшения угла φ .

Дифференциальное уравнение колебаний рамки записывается в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{K}{J}\varphi = 0, \quad (3)$$

где J – момент инерции рамки с телом, определяется выражением

$$J = J_T + J_0, \quad (4)$$

где J_0 – момент инерции ненагруженной рамки; J_T – момент инерции закрепленного в ней тела.

Период колебаний рамки определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}, \quad (5)$$

где ω – циклическая частота колебаний.

Измеряя периоды колебаний и используя формулы (4) и (5), легко определить

$$J = \frac{KT^2}{4\pi^2}; \quad (6)$$

$$J_T = \frac{KT^2}{4\pi^2} - J_0. \quad (7)$$

Для нахождения момента инерции тела необходимо рассчитать модуль кручения K и момент инерции J_0 ненагруженной рамки, которые можно определить, зная периоды колебаний ненагруженного маятника T_0 и нагруженного эталонным телом (T_1).

Момент инерции эталонного тела $J_1 = 4,08 \cdot 10^{-4}$ кг·м².

Периоды колебаний ненагруженной рамки и рамки с эталонным телом соответственно:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{K}}; \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1 + J_0}{K}}. \quad (8)$$

Из данных соотношений получаем, что

$$K = 4\pi^2 \frac{J_1}{T_1^2 - T_0^2} \quad (9)$$

и момент инерции J_0 ненагруженной рамки равен

$$J_0 = J_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (10)$$

3.3. Измерение периода колебаний рамки с телом и без него

3.3.1. Закрепите исследуемое тело. Включите прибор в сеть.

3.3.2. Поверните рамку к электромагниту таким образом, чтобы притяжение электромагнита фиксировало положение рамки, и нажмите кнопку «Пуск».

3.3.3. После того, как измеритель насчитает девять крутильных колебаний, нажмите кнопку «Стоп».

3.3.4. Перед началом нового измерения снова зафиксируйте рамку при помощи электромагнита и нажмите кнопку «Сброс».

3.3.5. Период крутильных колебаний рассчитайте по формуле

$$T = \frac{t}{N},$$

где t – время колебаний; N – число колебаний ($N = 10$).

3.4. Определение момента инерции рамки и коэффициента K

3.4.1. В соответствии с пунктами, изложенными в предыдущем разделе, определите период колебаний T_0 ненагруженной рамки. Измерения повторите пять раз. Результаты измерений занесите в табл. 1. Рассчитайте среднее значение периода колебаний ненагруженной рамки.

3.4.2. Закрепите в рамке эталонное тело кубической формы так, чтобы ось вращения тела была параллельна одному из его ребер, и определите период колебаний T_1 . Результаты измерений занесите в табл. 1.

3.4.3. По формулам (9) и (10) рассчитайте модуль кручения K и момент инерции ненагруженной рамки J_0 .

3.5. Определение момента инерции прямоугольного параллелепипеда относительно различных осей

3.5.1. Закрепите в рамке измеряемое тело ($m_1 = 1884$ г, $(40 \times 60 \times 100)$ мм³ или $m_2 = 1962$ г, $(50 \times 50 \times 100)$ мм³). Определите периоды колебаний относительно трех взаимно перпендикулярных осей, параллельных ребрам a , b , c . Результаты измерений занесите в табл. 2.

Таблица 1

Расчет коэффициента K и момента инерции ненагруженной рамки J_0

№ п/п	t_{0i}	N	T_{0i}	$\langle T_0 \rangle$	t_{1i}	T_{1i}	$\langle T_1 \rangle$	K	J_0
	с		с	с	с	с	с		
1		10							
2									
3									
4									
5									

Таблица 2

Расчет моментов инерции параллелепипеда относительно осей, параллельных ребрам a , b , c

№ п/п	$J_a =$				$J_b =$				$J_c =$			
	кг·м ²				кг·м ²				кг·м ²			
	t_{ai}	N	T_{ai}	$\langle T_a \rangle$	t_{bi}	N	T_{bi}	$\langle T_b \rangle$	t_{ci}	N	T_{ci}	$\langle T_c \rangle$
с		с	с	с		с	с	с		с	с	
1		10				10				10		
2												
3												
4												
5												

3.5.2. По формуле (7) рассчитайте моменты инерции измеряемого тела относительно каждой оси. Объясните различие моментов инерции измеряемого тела относительно этих осей.

3.5.3. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции параллелепипеда со сторонами a , b , c относительно оси a , проходящей через центр масс:

$$J_a = m \frac{b^2 + c^2}{12}.$$

То же самое сделайте относительно осей b , c , проходящих через центр масс и параллельных сторонам b , c .

3.5.4. Сравните теоретические значения с экспериментальными и оцените расхождение между ними по формуле

$$\varepsilon = \frac{|J - J_T|}{J_T} \cdot 100\%.$$

4. Сделайте вывод

5. Контрольные вопросы

5.1. В чем заключаются особенности экспериментальной установки?

5.2. В чем суть метода крутильных колебаний для определения момента инерции тела относительно неподвижной оси?

5.3. Каким образом получено дифференциальное уравнение колебаний?

5.4. Что такое период колебаний? Частота?

5.5. Как можно определить момент инерции тела, имеющего правильную геометрическую форму?

5.6. Как экспериментально определяется модуль кручения K ?

5.7. В чем заключается физический смысл модуля кручения K ?

5.8. Какова последовательность измерений и расчетов момента инерции исследуемого тела?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Определение ускорения свободного падения с помощью универсального маятника

1. Цель работы: освоение метода определения ускорения свободного падения с помощью обратного физического и математического маятников.

2. Подготовка к работе: изучить в учебниках [1] §§ 27.1, 27.2, [2] §§ 140–142 и методические указания к данной лабораторной работе. Для выполнения лабораторной работы студент должен знать: а) основное уравнение динамики вращательного движения; б) уравнения свободных колебаний физического и математического маятников; в) метод определения ускорения свободного падения; г) порядок работы с измерительными приборами в данной работе и расчет погрешностей произведенных измерений; д) ответы на контрольные вопросы, помещенные в конце работы; ж) ответы на контрольные вопросы 1–8, 14–22 (с. 30–31).

3. Выполнение работы

3.1. Описание экспериментальной установки

Универсальный маятник (рис. 1) имеет основание 1 с регулируемыми винтами 2 для выравнивания прибора. В основании закреплена вертикальная стойка 3, на которой зафиксированы кронштейны 4 и 5.

В нижний кронштейн вмонтирован фотоэлектрический датчик 6. На кронштейне 4 закреплены математический маятник 7 и обратный физический маятник 8. Длина ℓ математического маятника определяется по шкале на стойке 3, а регулировать ее можно с помощью винта 9. Обратный маятник выполнен в виде стального стержня с двумя подвижными грузами D и E . На стержне расположены призмы A и B , ребра которых повернуты друг к другу. Для изменения длины физического маятника через каждые 10 мм на стержне нанесены кольцевые нарезки, т. е. призмы A и B , грузы D и E можно перемещать вдоль стержня.

Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком перемещается вдоль вертикальной стойки и фиксируется в нуж-

ном положении. Фотоэлектрический датчик соединен с универсальным миллисекундомером 10, который включается с помощью кнопки «Сеть». После нажатия кнопки «Сброс» секундомер начинает отсчитывать время t и число N полных колебаний маятника. Закончив измерения, нужно нажать кнопку «Стоп».

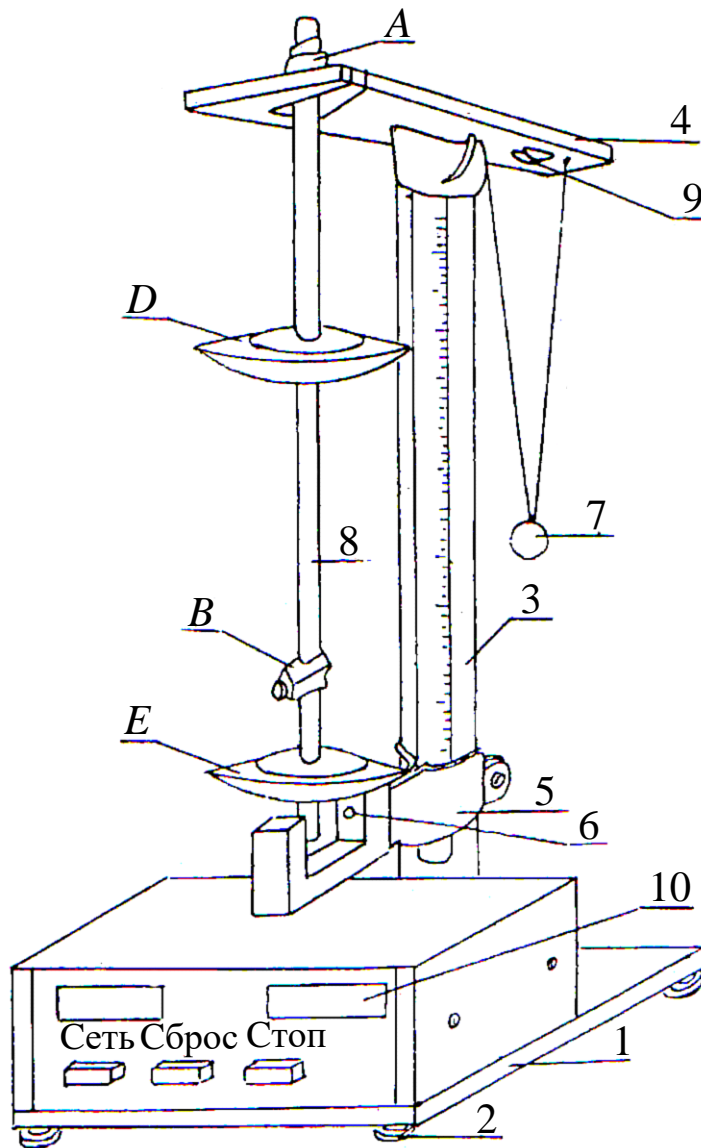


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – основание; 2 – регулирующие винты; 3 – вертикальная стойка; 4, 5 – верхний и нижний кронштейны; 6 – фотодатчик; 7 – математический маятник; 8 – оборотный маятник; 9 – винт для изменения длины нити; 10 – миллисекундомер

3.2. Методика измерений и расчетов

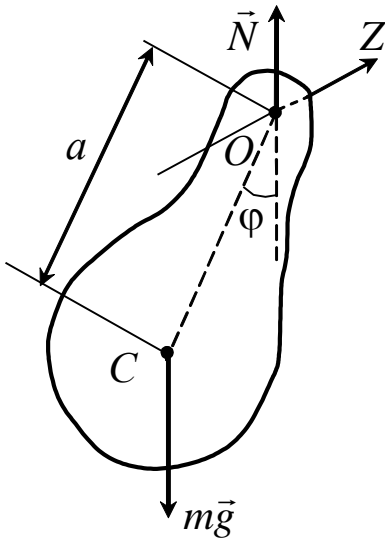


Рис. 2. Физический маятник:
 Z – ось, относительно которой маятник колеблется; C – центр масс маятника; φ – угол отклонения; a – расстояние от оси вращения до центра масс; \vec{N} – сила реакции опоры

Физическим маятником называется любое твердое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести относительно оси, не проходящей через его центр масс (рис. 2). При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ сила тяжести $m\vec{g}$ будет создавать вращающий момент M_z :

$$M_z = J_z \varepsilon = -m g a \sin \varphi, \quad (1)$$

где J_z – момент инерции маятника относительно оси Z , не проходящей через его центр масс; ε – угловое ускорение; a – расстояние от оси вращения Z до центра масс тела C .

При малых углах отклонения ($\sim 5^\circ$) $\sin \varphi \approx \varphi$ и уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{m g a}{J_z} \quad (2)$$

ω – циклическая частота колебаний.

Из (2) следует, что период T колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{m g a}}. \quad (3)$$

Для математического маятника период колебаний запишется в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

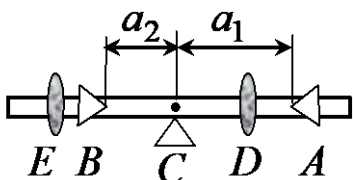
Полученная формула используется для определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}. \quad (4)$$

Период колебаний обратного физического маятника относительно осей, проходящих через ребра призм A и B (рис. 3):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{z1}}{m g a_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{z2}}{m g a_2}},$$

где a_1, a_2 – расстояния от центра масс до ребер призм A и B соответственно; J_{z1}, J_{z2} – моменты инерции обратного маятника относительно указанных осей, которые определяются по теореме Штейнера $J_z = J_{zC} + m a^2$. Тогда



$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{zC} + m a_1^2}{m g a_1}}, \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{zC} + m a_2^2}{m g a_2}}, \end{cases} \quad (5)$$

Рис. 3. Схема к определению положения центра масс обратного маятника:

a_1, a_2 – расстояния от центра масс маятника до призм; E, D – диски; A, B – призмы; C – центр масс маятника

где J_{zC} – момент инерции обратного маятника относительно оси, проходящей через его центр масс C параллельно оси колебаний.

Из выражений (5) получим

$$g = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)(a_1 - a_2)}{T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2}, \quad (6)$$

где $a_1 + a_2 = L$ – расстояние между призмами.

Для физического маятника можно подобрать такой математический маятник, который колеблется с ним синхронно (периоды колебаний одинаковы). При этом длина полученного маятника

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{J_z}{m a} \quad (7)$$

называется приведенной длиной физического маятника.

3.3. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

3.3.1. Для математических маятников с различными длинами ℓ_i определите время t_i десяти полных колебаний. Результаты измерений запишите в табл. 1.

3.3.2. По формуле $T = \frac{t}{N}$ вычислите периоды T_i колебаний математических маятников заданной длины, рассчитайте их среднее значение $\langle T_i \rangle$.

3.3.3. По формуле (4) рассчитайте ускорение $g_{\text{эксп}}$ свободного падения и его среднее значение $\langle g_{\text{эксп}} \rangle$.

3.3.4. Для оценки точности полученных результатов сравните $\langle g_{\text{эксп}} \rangle$ с теоретическим значением $g_{\text{теор}} = g_\varphi$, рассчитанным по формуле

$$g_\varphi = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi}{GM} \right).$$

Широту φ местности примите равной 55° , значения гравитационной постоянной, массы и радиуса Земли возьмите равными:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}; \quad M_3 = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ кг}; \quad R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Циклическая частота вращения рассчитывается по формуле

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T – период вращения Земли (24 часа).

3.3.5. Вычислите относительное отклонение $\langle g_{\text{эксп}} \rangle$ от теоретического значения $g_{\text{теор}}$ по формуле

$$\varepsilon = \frac{|g_{\text{теор}} - \langle g_{\text{эксп}} \rangle|}{g_{\text{теор}}} \cdot 100\%.$$

Таблица 1

Расчет периода колебаний математического маятника
и ускорения свободного падения

№ П/П	ℓ	N	t	T	$\langle T \rangle$	$g_{\text{эксп}}$	$\langle g_{\text{эксп}} \rangle$	$g_{\text{теор}}$	ε		
	м		с	с	с	м/с ²	м/с ²	м/с ²	%		
1		10									
2			10								
3				10							

3.4. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

3.4.1. Определите время t_1 и t_2 десяти полных колебаний оборотного маятника относительно осей, проходящих через призмы A и B .

3.4.2. По формуле $T = \frac{t}{N}$ вычислите периоды T_1 и T_2 колебаний оборотного маятника относительно данных осей.

3.4.3. Определите расстояния a_1 и a_2 от центра масс до призм A и B соответственно. Опыт повторите 3 раза.

3.4.4. По формуле (6) рассчитайте ускорение свободного падения.

3.4.5. Измените положение дисков (одного или двух) еще два раза и повторите пункты 3.4.1–3.4.4.

3.4.6. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 2.

3.4.7. Вычислите относительное отклонение теоретического и экспериментального значений ускорения свободного падения.

4. Сделайте вывод

Таблица 2

Расчет периода колебаний обратного маятника
и ускорения свободного падения

№ П/П	N	a_1	t_1	T_1	$\langle T_1 \rangle$	a_2	t_2	T_2	$\langle T_2 \rangle$	$g_{\text{эксп}}$	$\langle g_{\text{эксп}} \rangle$	ε
		м	с	с	с	м	с	с	с	м/с ²	м/с ²	%
1	10											
2												
3												
1	10											
2												
3												
1	10											
2												
3												

5. Контрольные вопросы

5.1. Какой маятник называют физическим? Математическим?

5.2. Как записывается дифференциальное уравнение колебаний физического маятника? Математического?

5.3. При каком условии колебания физического и математического маятников можно считать гармоническими?

5.4. От чего зависит период колебаний математического и физического маятников?

5.5. Что называется центром масс системы?

5.6. Как определяется положение центра масс физического маятника?

5.7. Какой физический маятник называется обратным?

5.8. Каково устройство обратного физического маятника?

5.9. Как с помощью обратного физического маятника определяют ускорение свободного падения?

5.10. Каков порядок выполнения работы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Определение момента инерции методом качаний

1. Цель работы: освоение экспериментального метода определения момента инерции диска с вырезом относительно оси, не проходящей через центр масс.

2. Подготовка к работе: прочитать в [1] § 2.6, §§ 4.1–4.3, § 27.2 и [2] §§ 16, 18. Для выполнения лабораторной работы студент должен знать: а) уравнение гармонического колебательного движения и его характеристики; б) дифференциальное уравнение колебаний физического и математического маятников; в) понятие момента инерции и теорему Штейнера для расчета момента инерции маятника относительно произвольной оси; г) понятие и метод определения положения центра масс тела;

д) порядок работы с измерительными приборами и расчета погрешностей проведенных измерений; е) ответы на контрольные вопросы 1–8, 11, 12 (с. 30–31).

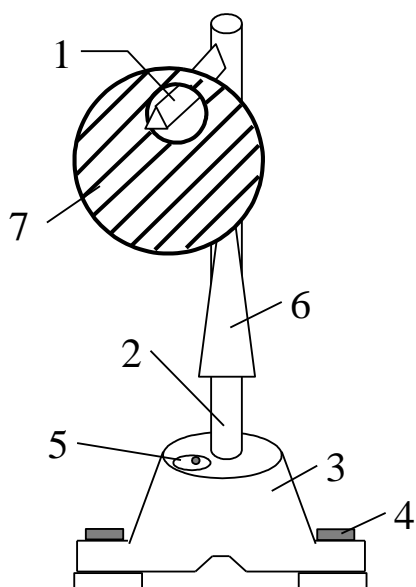


Рис. 1. Схема установки:

1 – призма; 2 – вертикальная стойка; 3 – тренога; 4 – винты; 5 – уровень; 6 – клиновидная планка; 7 – диск с вырезом

ное ребро призмы приняло горизонтальное положение. Ось качаний тела, имеющего отверстие, опирается на ребро призмы 1. К стойке прикреплена планка 6 клиновидной формы с углом при

3. Выполнение работы

3.1. Описание установки

Установка для определения момента инерции методом качаний (рис. 1) состоит из призмы 1, прикрепленной с помощью штифта к вертикальной стойке 2. Стойка установлена в литой чугунной треноге 3, две ножки которой снабжены винтами 4. Это позволяет регулировать установку по уровню 5 так, чтобы опор-

вершине 4° , которая является визиром, позволяющим следить за тем, чтобы размах колебаний не превышал 5° .

На призму 1 устанавливается диск с вырезом, колебания которого исследуются в данной работе.

3.2. Методика измерений и расчетов

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси равен сумме моментов инерции всех материальных точек относительно этой же оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то его момент инерции определяется по теореме Штейнера:

$$J = J_c + m\ell^2,$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно данной; ℓ – расстояние от произвольной оси до центра масс.

Момент инерции тела может быть определен экспериментально по методу качаний. В данной работе тело представляет собой однородный диск радиусом R , в котором вырезано отверстие радиусом R_0 (рис. 2). Если диск с вырезом отклонить от положения равновесия на угол $\sim 5^\circ$, то он может совершать гармонические колебания под действием силы тяжести относительно оси (опора D), не проходящей через центр масс (точка C). Такое тело называется физическим маятником.

Вращающий момент, возникающий под действием силы тяжести при отклонении маятника на угол φ , равен

$$M = -m g \ell \sin\varphi = -m g \ell \varphi, \quad (2)$$

поскольку при малых углах отклонения ($\sim 5^\circ$) $\sin\varphi \approx \varphi$.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения абсолютно твердого тела, вращающий момент равен

$$M = J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (3)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний;
 ε – угловое ускорение; ω – угловая скорость.

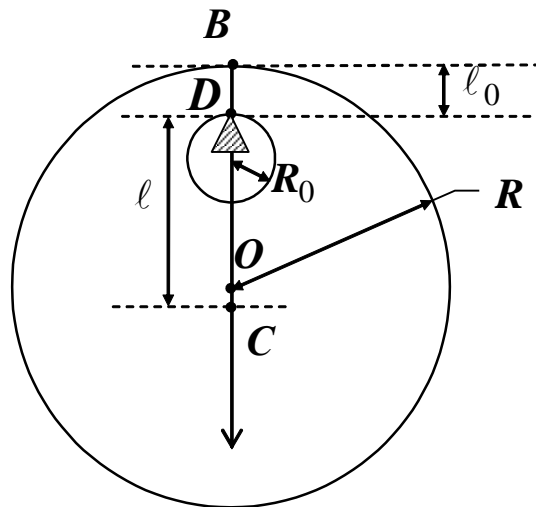


Рис. 2. Диск с вырезом, совершающий колебания относительно оси, не проходящей через центр масс: O – центр диска; C – центр масс диска с вырезом; D – точка опоры, через которую проходит ось колебаний; R – радиус диска; R_0 – радиус отверстия

Под действием вращающего момента диск совершает колебательное движение, дифференциальное уравнение которого можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m g \ell}{J} \varphi = 0, \quad (4)$$

где m – масса маятника; $\omega_0 = \sqrt{\frac{m g \ell}{J}}$ – циклическая частота колебаний маятника.

Период колебаний T физического маятника определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g \ell}}, \quad (5)$$

из которой можно определить экспериментальное значение момента инерции:

$$J_{\text{э}} = \frac{m g \ell T^2}{4\pi^2}. \quad (6)$$

Расстояние ℓ от оси вращения диска до центра его масс рассчитывается по формуле

$$\ell = \frac{[R^2(R - \ell_0) - R_0^3]}{R^2 - R_0^2}, \quad (7)$$

где ℓ_0 – расстояние от оси колебаний D до края диска B .

Момент инерции диска с вырезом можно рассчитать и теоретически, используя свойство аддитивности момента инерции:

$$J_{\text{T}} = J_1 - J_2, \quad (8)$$

где J_1 – момент инерции сплошного диска (без выреза) относительно оси вращения; J_2 – момент инерции вырезанной части относительно той же оси.

Моменты инерции J_1 и J_2 определяют по теореме Штейнера:

$$J_1 = \frac{(m + m_0)R^2}{2} + (m + m_0)(R - \ell_0)^2, \quad (9)$$

$$J_2 = \frac{m_0 R_0^2}{2} + m_0 R_0^2. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим теоретическое значение момента инерции диска с вырезом относительно оси вращения:

$$J_{\text{T}} = \frac{m[R^4 + 2R^2(R - \ell_0)^2 - 3R_0^4]}{2(R^2 - R_0^2)}. \quad (11)$$

3.3. Определение момента инерции диска с вырезом относительно оси, не проходящей через центр масс

3.3.1. Измерьте секундомером время десяти полных колебаний. По формуле $T = \frac{t}{N}$ (где N – число полных колебаний) рассчитайте период колебаний T маятника.

3.3.2. Опыт повторите 5 раз и найдите среднее значение периода колебаний $\langle T \rangle$.

3.3.3. С помощью штангенциркуля и масштабной линейки измерьте радиус диска R , радиус вырезанной части R_0 и $\ell_0 = BD$ (рис. 2). Результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

Расчет момента инерции диска с вырезом

№ п/п	t	T	$\langle T \rangle$	m	R	R_0	ℓ	ℓ_0	$J_э$	J_T
	с	с	с	кг	м	м	м	м	кг·м ²	кг·м ²
1										
2										
3										
4										
5										

3.3.4. По формуле (7) рассчитайте расстояние ℓ от центра масс диска до оси качаний.

3.3.5. По полученным значениям ℓ и $\langle T \rangle$ вычислите момент инерции диска $J_э$, используя формулу (6).

3.3.6. По формуле (11) рассчитайте теоретическое значение момент инерции J_T диска с вырезом и сравните его с $J_э$.

3.3.7. Найдите отклонение результатов эксперимента от теоретического значения:

$$\varepsilon = \frac{|J_T - J_э|}{J_T} \cdot 100 \%$$

4. Сделайте вывод

5. Контрольные вопросы

- 5.1. Какой маятник называется физическим?
- 5.2. Как можно рассчитать момент инерции тела относительно произвольной оси?
- 5.3. Какой физический смысл имеет момент инерции?
- 5.4. Что называется центром масс системы и как рассчитывается расстояние от оси вращения до центра масс?

5.5. Какие измерения необходимо произвести, чтобы определить расстояние от оси вращения до центра масс диска с вырезом?

5.6. Что называется периодом колебаний? Как определяется период колебаний диска с вырезом в работе?

5.7. При каком условии колебания диска с вырезом можно считать гармоническими?

5.8. Как рассчитывается отклонение экспериментального значения момента инерции диска от рассчитанного теоретически?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Определение скорости пули с помощью баллистического крутильного маятника

1. Цель работы: освоение экспериментального метода определения скорости пули и экспериментальная проверка законов вращательного и колебательного движений.

2. Подготовка к работе: изучить в учебнике [1] §§ 5.2, 5.3, 27.2 Для выполнения лабораторной работы студент должен знать: а) понятие вектора момента силы относительно точки и оси, а также момента инерции твердого тела; б) момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси и закон сохранения момента импульса для системы взаимодействующих тел; в) закон сохранения механической энергии; г) гармонические колебания и их характеристики; д) понятие деформации кручения, физический смысл постоянной кручения; е) метод измерения скорости пули на установке и расчет погрешности проведенных измерений; ж) ответы на контрольные вопросы 1–10, 13 (с. 30–31).

3. Выполнение работы

3.1. Описание экспериментальной установки

Общий вид баллистического крутильного маятника представлен на рис. 1.

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют выравнивать прибор. В основании закреплена колонна 3, на которой крепятся верхний кронштейн 4, нижний кронштейн 5 и средний кронштейн 6.

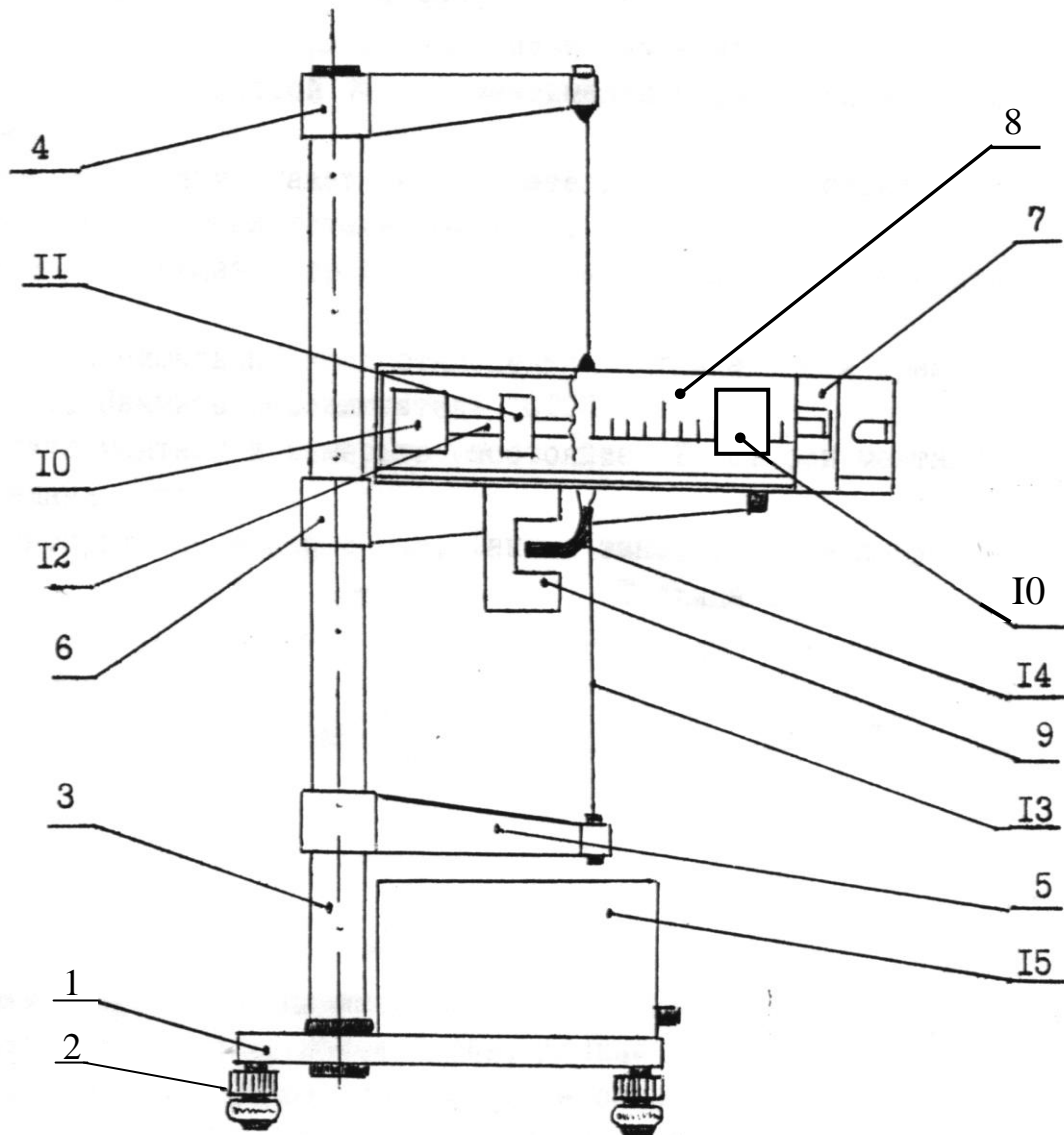


Рис. 1. Баллистический крутильный маятник (вид сбоку):

1 – основание установки; 2 – регулируемые ножки; 3 – колонна; 4, 5, 6 – кронштейны; 7 – пружинный пистолет; 8 – экран с угловой шкалой; 9 – фотоэлектрический датчик; 10 – мисочки, наполненные пластилином; 11 – два перемещающихся грузика; 12 – стержень, на котором перемещаются грузики; 13 – стальная проволока; 14 – штанга; 15 – приборная панель

К среднему кронштейну прикреплен пружинный пистолет 7, а также прозрачный экран с нанесенной на него угловой шкалой 8 и фотоэлектрический датчик 9. Кронштейны 4 и 5 имеют зажимы, служащие для крепления стальной проволоки 13, на которой подвешен маятник, состоящий из двух мисочек 10, наполненных пластилином, двух перемещаемых грузов 11 и штанги 14. Фотоэлектрический датчик соединен разъемом с универсальным мил-

лисекундомером 15. Миллисекундомер после нажатия клавишных переключателей «сеть» и «сброс» фиксирует число и время колебаний маятника. В конце измерений нажать клавишу «стоп».

На приборной панели (рис. 2) размещены: табло секундомера, табло счетчика периодов колебаний, кнопки «сеть», «стоп», «сброс». Начало отсчета начинается автоматически после нажатия кнопок «сеть», «сброс». При нажатии кнопки «стоп» отсчет времени прекращается по окончанию последнего периода.

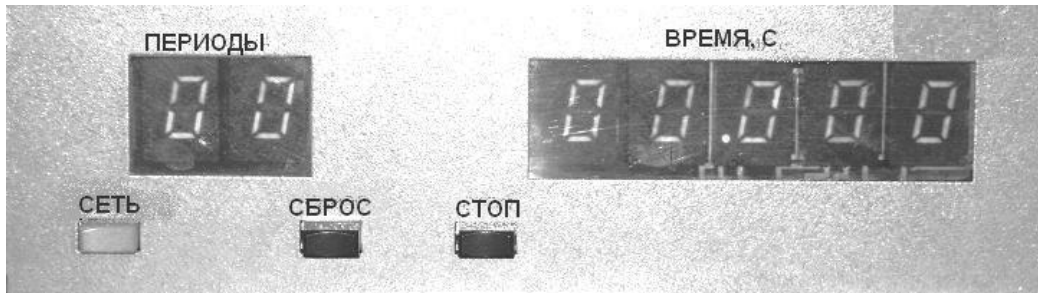


Рис. 2. Приборная панель блока управления

3.2. Методика измерений и расчетов

Баллистический крутильный маятник представляет собой массивное тело со значительным моментом инерции J . В пластилин маятника попадает летящая горизонтально со скоростью \vec{V} пуля и застревает в нем. Такой удар пули о маятник называют неупругим, а систему «пуля – маятник» можно считать замкнутой системой. Для данной системы выполняется закон сохранения момента импульса, который записывается в виде

$$mVr = (J + J')\omega, \quad (1)$$

где m – масса пули; V – ее скорость; r – расстояние от оси маятника до точки попадания пули; J – момент инерции маятника относительно оси вращения; J' – момент инерции пули относительно той же оси; ω – начальная угловая скорость маятника. Так как момент инерции J' пули значительно меньше момента инерции J маятника $J' \ll J$, то им можно пренебречь, и $mVr = J\omega$.

Отсюда скорость пули V будет равна

$$V = \frac{J\omega}{mr}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что для расчета V необходимо знать массу m пули, а также ω , J и r , которые определяют в процессе выполнения работы.

3.2.1. Определение начальной угловой скорости ω

После удара пули маятник отклоняется на некоторый угол α . При этом кинетическая энергия вращательного движения маятника с пулей W_K полностью переходит в потенциальную энергию закручивающейся нити W_{Π} :

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{K\alpha^2}{2},$$

где K – модуль кручения.

Отсюда начальная угловая скорость ω маятника (сразу после удара)

$$\omega = \alpha \sqrt{\frac{K}{J}}, \quad (3)$$

где α – угол закручивания нити.

Для баллистического крутильного маятника дифференциальное уравнение колебаний запишется в виде

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + K\alpha = 0,$$

где $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – угловое ускорение; $M = -K\alpha$ – момент сил упругости.

Величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$ называется циклической частотой колебаний маятника.

Тогда период гармонических колебаний маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K}}. \quad (4)$$

Из выражений (3) и (4) можно рассчитать начальную угловую скорость:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \alpha_{\max}, \quad (5)$$

где α_{\max} – максимальный угол отклонения маятника сразу после удара пули.

3.2.1. Определение момента инерции J маятника

Момент инерции J маятника можно определить косвенным путем через период колебаний. Для этого нужно экспериментально определить два значения J для различных положений грузиков, например, перемещая их на максимальное (R_1) и минимальное (R_2) расстояния от оси вращения. Тогда моменты инерции маятника в первом и втором положениях равны

$$J_1 = J_0 + 2m_0R_1^2; \quad J_2 = J_0 + 2m_0R_2^2. \quad (6)$$

где J_0 – момент инерции маятника без грузиков, m_0 – масса грузиков.

Из выражения (4) следует, что для моментов инерции J_1 и J_2 периоды колебаний маятника, запишутся следующим образом:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2m_0R_1^2}{K}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2m_0R_2^2}{K}}.$$

Исключив J_0 , получим модуль кручения

$$K = 8\pi^2 m_0 \frac{R_1^2 - R_2^2}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2}. \quad (7)$$

Подставив модуль кручения K в формулу (4), получим

$$J_1 = \frac{2m_0\langle T_1 \rangle^2 (R_1^2 - R_2^2)}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2};$$

$$J_2 = \frac{2m_0\langle T_2 \rangle^2 (R_1^2 - R_2^2)}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2}. \quad (8)$$

Из формулы (2) с учетом формул (5) и (8) определим скорости полета пули через экспериментально определяемые величины для случая максимального расстояния между грузами:

$$V = \frac{4\pi m_0 \langle \alpha_1 \rangle \langle T_1 \rangle (R_1^2 - R_2^2)}{m \langle r_1 \rangle (\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2)}, \quad (9)$$

где m – масса пули; α_1 – максимальный угол отклонения маятника при R_1 и T_1 .

При минимальном расстоянии между грузами

$$V = \frac{4\pi m_0 \langle \alpha_2 \rangle \langle T_2 \rangle (R_1^2 - R_2^2)}{m \langle r_2 \rangle (\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2)}, \quad (10)$$

где α_2 – максимальный угол отклонения маятника при R_2 и T_2 .

Выражения (9) и (10) являются рабочими формулами для определения скорости полета пули.

3.3. Определение момента инерции маятника и модуля кручения

3.3.1. Установите грузы массой m_0 на максимальном расстоянии R_1 от оси вращения.

3.3.2. Включите установку, нажав переключатель «сеть». Деблокируйте миллисекундомер (переключатель «сброс»).

3.3.3. Зарядите пружинный пистолет пулей массой m_1 и произведите выстрел.

3.3.4. Измерьте время t десяти полных колебаний (занесите в табл. 1) и максимальный угол отклонения маятника α (занесите в табл. 2). Нажмите кнопку «стоп».

3.3.5. Измерьте расстояние r от оси вращения маятника до места попадания пули (занесите в табл. 2).

3.3.6. Опыт повторите не менее 3 раз. Данные занесите соответственно в табл. 1 и 2.

3.3.7. Установите грузы на минимальном расстоянии R_2 от оси вращения.

3.3.8. Повторите пп. 3.3.3–3.3.6.

Таблица 1

Результаты измерения и расчета момента инерции маятника
и модуля кручения для пули разной массы

$$m_0 = \quad \text{кг}$$

m_i	№ п/п	$R_1 = 0,095 \text{ м}$				$R_2 = 0,02 \text{ м}$				К
		t_1	T_1	$\langle T_1 \rangle$	J_1	t_2	T_2	$\langle T_2 \rangle$	J_2	
кг		с	с	с	кг·м ²	с	с	с	кг·м ²	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$
$m_1 =$	1									
	2									
	3									
$m_2 =$	1									
	2									
	3									
$m_3 =$	1									
	2									
	3									

$$\langle J_1 \rangle = \quad ; \quad \langle J_2 \rangle = \quad ; \quad \langle K \rangle = \quad .$$

3.3.9 Для пули массами m_2 и m_3 повторите пп. 3.3.3–3.3.8. Результаты измерений и расчетов для этих пули занесите в табл. 1 и 2.

3.3.10. Для каждого значения R рассчитайте момент инерции J маятника по формуле (8) и модуль кручения k по формуле (7).

3.3.11. Данные расчетов занесите в табл. 1.

3.4. Определение скорости пули

3.4.1. Используя данные табл. 1 и 2, для каждого значения R рассчитайте начальную угловую скорость маятника ω по формуле (5) и скорость пули V по формулам (9), (10). Результаты расчетов занесите в табл. 2.

Таблица 2

Результаты измерений и определения скорости пуль
различной массы

Полож. грузиков	Изм. велич.	Ед. изм.	$m_1 =$	кг	$m_2 =$	кг	$m_3 =$	кг
		$\frac{1}{\sqrt{m_i}}$	кг ^{-1/2}					
$R_1 = 0,095$ м	α_{1i}	град						
	$\langle \alpha_1 \rangle$	рад						
	r_{1i}	м						
	$\langle r_1 \rangle$	м						
	ω_1	с ⁻¹						
	V_{1i}	м/с						
$R_2 = 0,02$ м	α_{2i}	град						
	$\langle \alpha_2 \rangle$	рад						
	r_{2i}	м						
	$\langle r_2 \rangle$	м						
	ω_2	с ⁻¹						
	V_{2i}	м/с						

3.4.2. По полученным результатам постройте график зависимости $V = f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

4. Сделайте вывод

5. Контрольные вопросы

5.1 Удар пули о маятник является упругим или неупругим?

5.2. Какие законы сохранения применяются при неупругом ударе? при упругом ударе?

5.3. Как определяется модуль кручения? Каков его физический смысл?

5.4. Как определяется начальная угловая скорость маятника?

5.5. Зачем в работе используются два грузика, которые располагаются на минимальном и максимальном расстояниях друг от друга?

5.6. Как, зная периоды колебаний T_1 и T_2 , определить момент инерции маятника?

5.7. Будет ли одинаковой скорость пули, если определяются периоды T_1 и T_2 ?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Почему при вращательном движении твердого тела не используют понятия «силы», «массы», «импульса»? Какие величины являются их аналогами при вращательном движении?

2. Что называется вектором момента силы относительно точки и оси?

3. Что такое момент инерции твердого тела относительно оси? В чем заключается физический смысл этой величины?

4. Почему при конструировании механических устройств необходимо знать моменты инерции вращающихся и колеблющихся деталей?

5. Какие существуют методы измерения момента инерции?

6. Зависит ли момент инерции тела относительно заданной оси от момента сил, приложенных к телу?

7. Зависит ли момент инерции тела от выбора оси вращения?

8. Как формулируются законы сохранения момента импульса и энергии?

9. Возможно ли применение закона сохранения момента импульса для системы «маятник – пуля» в том случае, если маятник совершает гармонические колебания? Рассмотреть случаи:

а) пуля попадает в мисочку с пластилином в момент прохождения маятником положения равновесия;

б) пуля попадает в мисочку в тот момент, когда маятник не находится в положении равновесия.

10. При каком положении грузов период колебаний маятника максимален:

а) при максимальном расстоянии между грузами R_1 ;

б) при минимальном расстоянии между грузами R_2 ?

11. Что называют центром масс системы? Как определить центр масс диска с вырезом?

12. Какие колебания называются гармоническими? Как записывается уравнение гармонических колебаний?

13. Какие колебания называются крутильными? Как записывается уравнение крутильных колебаний? Зависит ли период крутильных колебаний от их амплитуды?

14. Какой маятник называют физическим? Как определяется период колебаний физического маятника?

15. Что называется приведенной длиной физического маятника?

16. От чего зависит период колебаний физического маятника?

17. Какой маятник называют обратным?

18. Как, пользуясь обратным физическим маятником, можно определить ускорение свободного падения?

19. Какой маятник называют математическим?

20. От чего зависит период колебаний математического маятника?

21. Зависит ли ускорение свободного падения от широты местности?

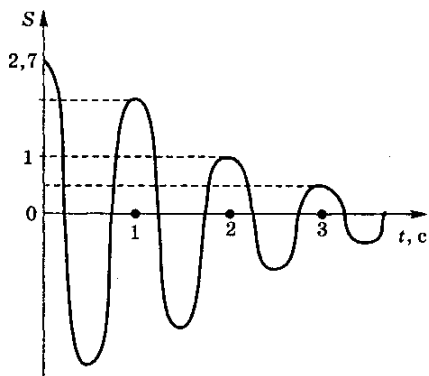
22. Как изменяется период колебаний математического маятника, если его точку подвеса перемещать:

а) вертикально вверх с ускорением a ; б) вертикально вниз с ускорением a ; в) горизонтально с ускорением a ?

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Тест 1

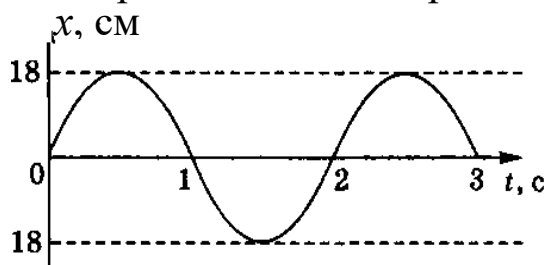
На рисунке изображен график затухающих колебаний, где S – колеблющаяся величина, описываемая уравнением $x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \varphi)$. Определите время релаксации τ (в секундах).



- 1) 2 2) 3 3) 0,5 4) 1

Тест 2

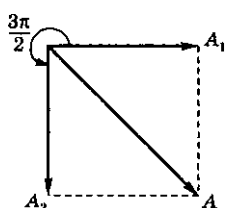
Из графика колебаний материальной точки следует, что модуль скорости в момент времени $t = 1/3$ с равен ...



- 1) 9 см/с
- 2) $9\pi\sqrt{3}$ см/с
- 3) 9π см/с
- 4) 0

Тест 3

Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 . При разности $\Delta\varphi = 3\pi/2$ амплитуда результирующего колебания равна ...



- 1) $A_0\sqrt{2}$
- 2) 0
- 3) $\frac{5}{2}A_0$
- 4) $2A_0$

Тест 4

Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами $A_1 = 10$ см и $A_2 = 6$ см складываются в одно колебание с амплитудой $A_{рез} = 14$ см. Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний равна ...

- 1) 0
- 2) $\pi/6$
- 3) $\pi/4$
- 4) $\pi/3$
- 5) $\pi/2$

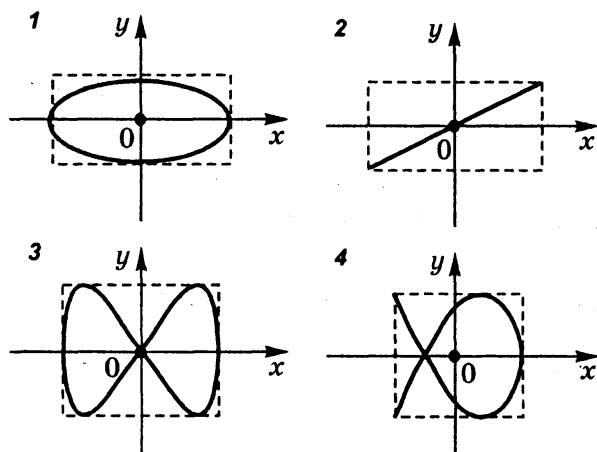
Тест 5

Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,04$ м и периодом $T = 2$ с. Если смещение точки в момент времени, принятый за начальный, равно нулю, то точка колеблется в соответствии с уравнением ...

- 1) $x = 0,04\cos\pi t$
- 2) $x = 0,04\cos 2t$
- 3) $x = 0,04\sin 2t$
- 4) $x = 0,04\sin\pi t$

Тест 6

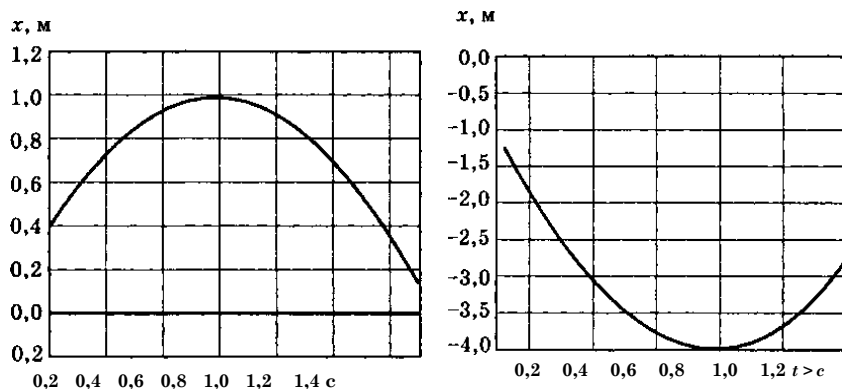
Точка M одновременно колеблется по гармоническому закону вдоль осей координат Ox и Oy с различными амплитудами, но одинаковыми частотами. При разности фаз $\pi/2$ траектория точки M имеет вид:



- 1) 3
- 2) 4
- 3) 1
- 4) 2

Тест 7

На рисунках изображены зависимости от времени координаты и ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону. Циклическая частота колебаний точки равна ...



- 1) 3 с^{-1}
- 2) 1 с^{-1}
- 3) 2 с^{-1}

Тест 8

Маятник совершает вынужденные колебания со слабым коэффициентом затухания $\beta < \omega_0$, которые подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 400x = 0,1 \cos 100t.$$

Амплитуда колебаний будет максимальна, если частоту вынуждающей силы ...

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) увеличить в 5 раз | 3) уменьшить в 4 раза |
| 2) увеличить в 4 раза | 4) уменьшить в 5 раз |

Тест 9

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Максимальное значение ускорения точки равно ...

- 1) $0,6\pi \text{ м/с}^2$
- 2) $0,4\pi \text{ м/с}^2$
- 3) $4\pi^2 \text{ м/с}^2$
- 4) $\frac{2\pi}{3} \text{ м/с}^2$

Тест 10

К спиральной пружине жесткостью k , расположенной горизонтально, прикрепили груз массы m и поместили всю систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления b . Если тело сместить из положения равновесия и отпустить, то закон его движения имеет вид ...

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ | 2) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ |
| 3) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ | 4) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ |

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детлаф, А. А. Курс физики : учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва : Академия, 2007. – 720 с. – (Высшее образование). – ISBN 9785769538018. – Текст : непосредственный.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для инж.-техн. специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 17-е изд., стер. – Москва : Академия, 2008. – 560 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 5769557828. – Текст : непосредственный.

Составители

Кошкина Галина Кронидовна
Цвеклинская Ирина Валентиновна

**ФИЗИКА.
МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ**

Лабораторный практикум К-304.4
по дисциплине «Физика»
для обучающихся всех специальностей
и направлений бакалавриата

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 27.04.2020. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л. 1,9.

Тираж 20 экз. Заказ _____.

Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева,
650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.

Издательский центр УИП Кузбасского государственного технического
университета имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4 а.