Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачёва»

Кафедра математики

Владимир Иванович Грибков
Любовь Евстафьевна Мякишева

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Электронное учебное пособие

Кемерово 2017

УДК 51(075.8)(086.76)+519.21(075.8)(086.76)

Рецензенты: Смоленцев Н. К. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики КемГУ
Глухова О. Ю. – заведующая кафедрой фундаментальной математики КемГУ

Грибков В. И. **Математика. Теория вероятностей** [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов направления 20.03.01 «Техносферная безопасность» / В. И. Грибков, Л. Е. Мякишева; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – 1 оптический диск (2,3 Мб)

Предназначено для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов второго курса направления 20.03.01 «Техносферная безопасность» по разделу «Теория вероятностей» учебной дисциплины «Математика». Основное содержание работы представляет собой разбор базовых понятий теории вероятностей на примере решений практических заданий. Приведены задания для самостоятельной работы и тестовые задания для контроля знаний студентов. В конце пособия размещены таблицы, необходимые для проведения расчётов.

Текстовое (символьное) электронное издание

Минимальные системные требования: Частота процессора не менее 1,0 ГГц; ОЗУ 512 Мб; 20 Гб HDD; операционная система Windows XP; CD-ROM 4-скоростной; ПО для чтения файлов PDF-формата; SVGA-совместимая видеокарта; мышь.

Сведения о программном обеспечении, которое использовано для создания электронного издания	MS Word, MathType
Сведения о технической подготовке материалов для электронного издания	Редактор З. М. Савина
Объем издания в единицах измерения объема носителя, занятого цифровой информацией (байт, Кб, Мб)	2,3 мегабайта
Наименование и контактные данные юридического лица, осуществившего запись на материальный носитель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачёва» 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28 Тел./факс: 8(3842) 68-25-84

Оглавление

Данное методическое издание соответствует учебной программе по дисциплине «Математика» для студентов второго курса направления 20.03.01 «Техносферная безопасность» по разделу «Теория вероятностей».

Цель пособия – помочь студентам при освоении раздела теории вероятностей в приобретении навыков решения заданий, подготовке к тестам и, как следствие, более качественному усвоению основных понятий и методов.

Основное содержание работы представляет собой разбор базовых понятий теории вероятностей на примере решений большого числа практических заданий. Приведены задания для самостоятельной работы, контрольные вопросы и тестовые задания. В конце пособия размещены таблицы, систематизирующие знания по темам, а также необходимые для проведения расчётов.

Пособие состоит из двух частей: случайные события и законы распределения случайных величин.

ЧАСТЬ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Первая часть предлагаемого издания направлена на проработку тем понятия «*случайное событие*»:

1. Классическая формула вероятности.
2. Геометрическая вероятность.
3. Алгебра событий.
4. Вероятность произведения и суммы событий.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

ТЕМА 1.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Основные понятия:

- *испытания, исходы, события;*
- *равновозможные исходы, благоприятствующие;*
- *правила произведения и суммы;*
- *элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания, принципы сложения и умножения.*

Литература: [1] – гл. 1, §3, 4, 5.

Классическая формула определения вероятности события A имеет вид:

$$P(A)=\frac{m}{n}\ , \tag{1}$$

где n – общее число исходов испытания, а m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Пример 1.1.1.

Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, наудачу извлекается один шар. Найти вероятности событий: A – «шар белый», B – «шар чёрный».

Решение: $P(A)=3/5$, $P(B)=2/5$.

Пример 1.1.2.

Определить вероятность события А – «выпадения хотя бы одного «орла» при бросании 2-х монет».

Решение: $n = 4$ (оо, ор, ро, рр), $m = 3$ (оо, ор, ро), $P(A) = 3/4$.

Пример 1.1.3.

Куб, окрашенный в синий цвет, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые тщательно перемешаны. Определить вероятность события А – «кубик извлечённый наудачу, имеет две синие грани».

Решение: $n = 1000$, $m = 96$ (12 рёбер × 8 кубиков на ребре).
$P(A) = 96/1000 = 0{,}096$.

Пример 1.1.4.

Даны 5 карточек с буквами О, П, Р, С, Т, выложенных в ряд в случайном порядке. Какова вероятность события А – «получится слово СПОРТ»?

Решение: В данном случае исходы испытания представляют собой комбинации различных элементов. Для определения числа исходов необходимо использовать элементы комбинаторики, к которым относятся виды комбинаций и правила их подсчёта.

Правило суммы: если нужно выполнить одно из двух взаимоисключающих действий, и первое из них можно выполнить n_1 способами, а второе – n_2 способами, то одно из них можно выполнить n_1+n_2 способами. Это правило можно распространить на любое число действий.

Правило произведения: если нужно последовательно выполнить k действий, и первое из них можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, и т.д. и действие под номером k – n_k способами, то все k действий можно выполнить $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Виды соединений:

ПЕРЕСТАНОВКА – это упорядоченное множество из $\boldsymbol{n}$ элементов. Число всех перестановок определяется по формуле

$$P_n = n! = n(n-1)! \qquad (2)$$

РАЗМЕЩЕНИЕ – это упорядоченное подмножество $\boldsymbol{m}$ элементов из множества $\boldsymbol{n}$ элементов. Число всех размещений определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!} \qquad (3)$$

СОЧЕТАНИЕ – это неупорядоченное подмножество $\boldsymbol{m}$ элементов из множества $\boldsymbol{n}$ элементов. Число всех сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!\boldsymbol{m}!} \qquad (4)$$

Пример 1.1.5.

Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, наудачу извлекаются два. Найти вероятности событий: А – оба шара белые; В – первый шар чёрный, второй белый; С – один шар белый, другой чёрный.

Решение: Исходами этого эксперимента являются различные комбинации двух шаров. Общее число таких исходов равно числу размещений из 5 элементов по 2, $n = A_5^2 = \dfrac{5!}{3!} = 20$. Здесь мы используем размещения, так как различаем, например комбинации: «чёрный-белый» и «белый-чёрный». При этом все исходы эксперимента равновероятны, следовательно, можно воспользоваться классической формулой вероятности.

Число исходов, составляющих событие A: $m_A = A_3^2 = 6$, так как два белых шара могут быть извлечены из трёх белых. Число исходов, составляющих событие B: $m_B = C_3^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$. Здесь мы использовали правило произведения: число способов извлечь белый шар умножили на число способов извлечь чёрный шар. Кроме того, использовали сочетания, так как порядок шаров уже учли порядком множителей C_3^1 и C_2^1. Число исходов, составляющих событие C, найдём, используя и правило произведения и правило суммы, $m_C = C_3^1 C_2^1 + C_2^1 C_3^1 = 12$, так как возможно, что первый шар белый, второй чёрный и наоборот, первый чёрный, второй белый. Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{6}{10}.$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.1

1. Из букв слова *«уравнение»* случайным образом извлекается одна буква. Какова вероятность того, что она: *а*) гласная; *б*) согласная; *в*) буква «е»; *г*) буква «с»?
2. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 пишутся на 5 карточках. Случайным образом выбираются три карточки. Определить вероятности следующих событий для трёхзначного числа, составленного из выбранных цифр: A – «число чётно»; B – «число нечётно»; C – «число кратно 5»; D – «на двух выбранных карточках цифры нечётны».
3. Слово *«книга»*, собранное из букв разрезной азбуки рассыпано и собрано снова. Какова вероятность того, что вновь собранное слово *«книга»*?
4. Слово «*алгебра*», собранное из букв разрезной азбуки рассыпано и собрано снова. Какова вероятность того, что вновь собранное слово «*алгебра*»?
5. Из букв слова *«статистика»* случайным образом выбирается 5 букв и составляется в ряд. Какова вероятность того, что полученное слово *«такси»*?
6. Полная колода карт делится на две равные части. Найти вероятность того, что: *а*) в каждой по два туза; *б*) один и три туза.

ТЕМА 1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Литература: [1] – гл. 1, §8.

Если пространство событий содержит бесконечное множество исходов эксперимента и ему можно поставить в соответствие некоторое геометрическое пространство, то вероятность события A:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(S)}. \qquad (5)$$

где S – пространство событий, $mes(A)$ – мера события A, $mes(S)$ – мера всего пространства событий, Под мерой понимается: в одномерном пространстве – длина; в двумерном пространстве – площадь; в трёхмерном пространстве – объем.

Пример 1.2.1.

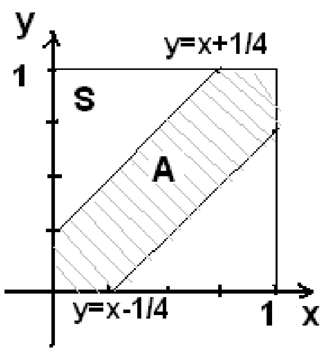
В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадёт в этот треугольник.

Решение:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(S)}=\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Пример 1.2.2.

Два друга договорились о встрече между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждёт появления другого до истечения часа, но не более 15 минут. Какова вероятность их встречи?



Решение: Обозначим: x – время прихода одного из друзей, y – другого; события: A – встреча состоялась, S – событие $A+\overline{A}$ (пространство событий). Событию S на рисунке соответствует квадрат со стороной, равной 1, следовательно, $mes(S)$ равна его площади, т.е. равна 1. Так как каждый ждёт другого не более 15 минут, то $|x-y|\le 1/4$. Решением этого неравенства является область A. Площадь этой области есть мера события A, $mes(A)=7/16$. Тогда $P(A)=7/16$.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.2

1. На перекрёстке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зелёный свет и полминуты – красный. В случайный момент времени к перекрёстку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекрёсток без остановки?
2. Какова вероятность, не целясь бесконечно малой пулей в прутья квадратной решётки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?
3. В условиях задачи 2 найти вероятности событий $B-$ встреча состоялась после $11^{\underline{30}}$; $C-$встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут.
4. Внутри квадрата с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события A: $x^2 + y^2 \le a^2$, $a > 0$.
5. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и может принять любое равновозможное значение в течение данных суток. Какова вероятность того, что одному из пароходов придётся ждать освобождения причала, если время стоянки пароходов у причала ровно 1 час?

ТЕМА 1.3. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Основные понятия:

- *сумма событий*
- *произведение событий*
- *противоположные события*
- *независимые события*

Литература: [1] – гл. 2, §1; гл. 3, §1.

Часто бывает удобно представить интересующее нас событие, как произведение или сумму двух или большего числа событий. Это позволяет, используя вероятности одних событий, определить вероятности других событий.

Пример 1.3.1.

Три стрелка производят по одному выстрелу в цель. Обозначим события A_i – попадание i-го стрелка. Выразить через A_i события: A – «все три попадания», B – «все три промаха», C – «хотя бы одно попадание», D – «хотя бы один промах», M – «не менее двух попаданий», F – «не более одного попадания», G – «попадание не раньше третьего выстрела», H – «ровно одно попадание», K – «ровно два попадания».

<u>Решение:</u>

$$A = A_1 A_2 A_3,$$
$$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},$$
$$C = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3},$$
$$M = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3,$$
$$F = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3},$$
$$G = \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3,$$
$$H = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3},$$
$$K = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$$

Сумму, произведение событий и противоположное событие хорошо демонстрируют диаграммы Эйлера-Вена. **Диаграмма Эйлера-Вена** – это рисунок, содержащий все множество возможных исходов в виде прямоугольника, с размещёнными в нём событиями в виде кругов, овалов или других фигур. Каждая точка внутри прямоугольника представляет собой возможный исход. Каждое выполнение случайного эксперимента приводит к случайному выбору одной из точек. Если эта точка попадает в обозначающий событие круг, то это событие произошло.

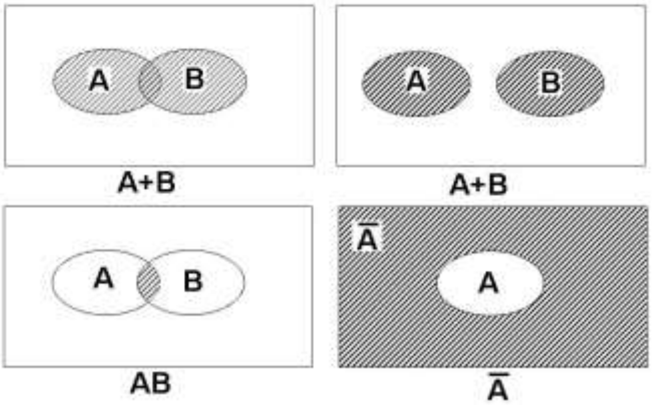


Рис. 1. Диаграммы Эйлера-Вена

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.3

1. Бросили медную и серебряную монеты. Обозначим события: A – «герб выпал на медной монете»; B – «цифра выпала на медной монете»; C – «герб выпал на серебряной монете»; D – «цифра выпал на серебряной монете»; M – «выпал хотя бы один герб»; F – «выпала хотя бы одна цифра»; G – «выпал один герб и одна цифра»; H – «не выпало ни одного герба»; K – «выпало два герба». Каким событиям из этого списка равны события: $A+C$, AC, MF, $G+M$, GM, BD, $M+K$?
2. Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из двух однотипных деталей и работает при исправности хотя бы одной из них. Второй блок состоит из трёх однотипных деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Выразите через события A_i – «исправна i-я деталь первого блока», $i=1,2$ и B_j – «исправна j-я деталь второго блока», $j=1,2,3$, следующие события: A – «работает первый блок»; B – «работает второй блок»; C – «первый блок не работает», D – «второй блок не работает»; F – «прибор работает»; H – «прибор не работает».
3. Пусть A, B, C – три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить через них следующие события: E – «из трёх событий A, B, C произойдёт ровно одно»; F – «произойдёт хотя бы одно»; G – «произойдут хотя бы два».

ТЕМА 1.4. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Основные понятия и формулы:

- *условная вероятность*
- *вероятность произведения двух и более событий*
- *вероятность произведения независимых событий*
- *вероятность суммы двух и более событий*
- *вероятность суммы несовместимых событий*
- *вероятность наступления хотя бы одного события*

Литература: [1] – гл. 2, §1, 2, 3; гл. 3.

Условная вероятность события A при условии наступления события B определяется по формуле:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (6)$$

Вероятность произведения двух событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (7)$$

И то же самое для независимых событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (8)$$

Формулы 7 и 8 используются для вычисления вероятности совместного появления событий A и B. Их можно обобщить на случай трёх и более событий. Например, вероятность совместного наступления трёх событий равна

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB).$$

Вероятность суммы двух событий A и B

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (9)$$

Для несовместимых событий A и B

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (10)$$

Для противоположного события

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (11)$$

Вероятность наступления хотя бы одного события:

$$P(A+B+C)=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}) \qquad (12)$$

Пример 1.4.1.

Подбрасывается игральная кость. События: $A-$число очков есть простое число, $B-$число очков чётно. Вычислить условную вероятность $P(A/B)$.

Решение: Воспользуемся формулой (4). Вероятность совместного наступления событий A и B $P(AB)=1/6$, так как только на одной грани из шести число очков одновременно чётно и является простым числом, $P(B)=3/6=1/2$. Тогда $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1/6}{1/2}=1/3$.

Пример 1.4.2.

Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наудачу извлекаются два шара. Найти вероятности событий: $A-$ «оба шара белые»; $B-$ «первый шар чёрный, второй белый»; $C-$ «один шар белый, другой чёрный», $D-$ «хотя бы один шар белый».

Решение: Обозначим события: A_1 – «первый извлечённый шар белый», A_2 – «второй белый». Запишем через A_1, A_2 события A,B,C,D:

$$A=A_1A_2,\ B=\overline{A_1}A_2,\ C=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2,\ \ D=A_1+A_2.$$

1. Рассмотрим сначала случай, когда после извлечения шар в урну не возвращается (выборка без возвращения).

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)=3/5\cdot 2/4=6/20=0.3,$$

$$P(B)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})=2/5\cdot 3/4=6/20=0.3.$$

При вычислении вероятностей событий A и B мы воспользовались формулой произведения вероятностей (7). События A_1, A_2 и $\overline{A_1}, A_2$ не являются независимыми, так как вероятность извлечения белого шара при втором испытании (события A_2) зависит от того, какой шар был извлечён при первом испытании.

Событие C есть сумма двух несовместимых событий, каждое из которых есть произведение зависимых событий.

$$P(C)=P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2}/A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})=$$
$$=3/5\cdot 2/4+2/5\cdot 3/4=12/20=0.6.$$

$$P(D)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=3/5+3/5-3/10=9/10$$

Для вычисления вероятности события D мы воспользовались формулой (12) для суммы совместных событий, но тот же результат можно получить, используя формулу для вероятности противоположного события $\overline{D}$. $\overline{D}$ – «в двух последовательных испытаниях не извлечено ни одного белого шара».

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(\overline{A_1}\overline{A_2})=1-2/5\cdot 1/4=9/10=0.9.$$

2. После извлечения шар возвращается в урну (выборка с возвращением). В этом случае события $A_1\ A_2$, $A_1\ \overline{A_2}$ и $\overline{A_1}\ A_2$ независимы, и мы воспользуемся формулой произведения вероятностей для независимых событий.

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=3/5\cdot 2/5=6/25=0.24$$

$$P(B)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=2/5\cdot 3/5=6/25=0.24$$

$$P(C)=P\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=$$
$$=3/5\cdot 2/5+2/5\cdot 3/5=12/25=0.48.$$
$$P(D)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=$$
$$=3/5+3/5-6/25=24/25=0.96.$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.4

1. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.05, в девятку с вероятностью 0.2, а в восьмёрку с вероятностью 0.6. Сделан один выстрел. Какова вероятность следующих событий: A – «выбито не менее восьми очков»; B – «выбито более восьми очков».
2. Три поздравительные открытки расположены по конвертам с адресами случайным образом. Найти вероятности событий: A – «ни одна открытка не попала в свой конверт», B – «хотя бы одна открытка попала в свой конверт», С – «ровно одна открытка попала в свой конверт».
3. Монета бросается либо до выпадения герба, либо до четырёхкратного выпадения цифры. При условии, что результатом первого бросания была цифра, найти вероятность того, что монета была подброшена 4 раза.
4. В мастерской работает три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0.15. Для второго станка эта вероятность равна 0.1, а для третьего 0.12. Найдите вероятность того, что за смену хотя бы один станок потребует наладки.
5. Имеется две урны. В первой 3 белых и два черных шара, во второй 4 белых и два черных. Из каждой урны случайным образом извлекается по шару. Какова вероятность того, что они одного цвета?

ТЕМА 1.5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Основные понятия и формулы:

- *полная группа событий и события-гипотезы*
- *формула полной вероятности*
- *априорные (доопытные) и апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез*
- *формула Байеса*

Литература: [1] – гл. 4, §1, 2, 3.

Вероятность события A, которое может наступить при условии реализации одного из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, определяется формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \tag{13}$$

при этом события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу.

Условные вероятность событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ при условии наступления события A определяется формулой Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i)P(A/H_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{14}$$

Пример 1.5.1.

Магазин закупает оптом половину всех компьютеров у фирмы L, треть – у фирмы M и остальные – у фирмы N. У фирмы L 1% компьютеров с браком, *у фирмы M брак составляет 5%, у фирмы N – 2%. Какова вероятность того, что наудачу выбранный в магазине компьютер оказался бракованным?*

<u>Решение:</u> Обозначим события: A – «случайно выбранный компьютер оказался бракованным».

H_1 – «компьютер получен от фирмы L», $P(H_1) = 1/2$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой L: $P(A/H_1) = 0.01$.

H_2 – от фирмы M», $P(H_2) = 1/3$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой M: $P(A/H_2) = 0.05$.

H_3 – «от фирмы N», $P(H_3) = 1 - (1/3 + 1/2) = 1/6$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой N: $P(A/H_3) = 0.02$.

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{2}0.01 + \frac{1}{3}0.05 + \frac{1}{6}0.02 = 0.03.$$

В приведённом примере вопрос может быть поставлен иначе. Случайно выбранный компьютер оказался бракованным. Какова вероятность того, что он получен от фирмы L?

По формуле Байеса $P(H_1 / A) = \dfrac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \dfrac{0.005}{0.03} = \dfrac{1}{6}$.

Формула Байеса позволяет уточнять вероятность интересующего события-гипотезы по некоторой дополнительной информации о появлении или не появлении события, как-то связанного с событием-гипотезой. Такое уточнение позволяет находить более удачное решение. Продемонстрируем это на примере.

Пример 1.5.2.

Урна содержит четыре шара, относительно которых известно, что все они белые или два белых и два чёрных. Из урны случайным образом вынимается шар и обнаруживается, что он белый. Какова вероятность того, что все шары в урне белые?

Решение: Возможны две альтернативные гипотезы: $H_1 -$ «все шары в урне белые», $H_2 -$ «в урне два белых и два чёрных шара». Событие $A -$ «вынутый шар белый».

Поскольку нам ничего неизвестно о содержимом урн, примем начальные шансы обеих гипотез равными: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$. Эти вероятности назовём доопытными или *априорными* вероятностями гипотез H_1 и H_2. Вероятность извлечь белый шар из урны, где все шары белые, $P(A / H_1) = 1$ (достоверное событие), вероятность извлечь белый шар из урны, где 2 белых и два чёрных шара, $P(A / H_2) = 1/2$. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Условные вероятности событий-гипотез H_1 и H_2 вычислим по формуле Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{1 \cdot 1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \quad P(H_2 / A) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Вероятности $P(H_1 / A)$ и $P(H_2 / A)$ назовём послеопытными или *апостериорными* вероятностями гипотез H_1 и H_2. Таким образом, по имеющейся информации о наступлении события A мы уточнили вероятности гипотез H_1 и H_2.

Возвращаем шар в урну и повторяем эксперимент, принимая в качестве доопытных вероятностей гипотез H_1 и H_2 вероятности, равные $2/3$ и $1/3$. Если вновь вынутый шар окажется черным (событие $\overline{A}$), то принимается гипотеза H_2. Но, если шар окажется белым, то вычисляем новые апостериорные вероятности гипотез H_1 и H_2 с их априорными вероятностями $2/3$ и $1/3$. Получим: $P(H_1 / A) = 4/5$, $P(H_2 / A) = 1/5$. Ясно, что если мы повторим этот процесс и вновь получим белый шар, вероятность гипотезы H_1 увеличится, гипотезы H_2 ещё более уменьшится.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.5

1. В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных. Взят один билет, содержание которого неизвестно. Какова вероятность того, что второй взятый билет выигрышный?
2. Детали на сборку попадают из трёх автоматов. Известно, что первый автомат даёт 0.3% брака, второй – 0.2% и третий – 0.4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если из первого автомата поступило 1000 деталей, из второго – 2000 и из третьего – 2500.
3. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8, 7 – с вероятностью 0.7 и 2 – с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвёл выстрел и в цель не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежит стрелок?

ТЕМА 1.6. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Основные понятия:

- *независимые испытания и альтернативные исходы*
- *схема и формула Бернулли*
- *приближение Пуассона (формула Пуассона)*
- *нормальное приближение (формулы Муавра-Лапласа)*

Литература: [1] – гл. 5, §1, 2, 3.

Схема Бернулли. Рассмотрим случайный эксперимент, состоявший из последовательности n независимых испытаний, в каждом из которых возможно два альтернативных исхода, которые мы назовём условно «успех» и «неуспех», при этом – вероятность «успеха» в каждом испытании остаётся постоянной, равной p; вероятность «неуспеха» равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что в n испытаниях «успех» наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{15}$$

Пример 1.6.1.

Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.7. Найти вероятности событий: B – ни одного попадания, H – одного, K – двух, A – трёх попаданий, C – хотя бы одного попадания.

<u>Решение:</u> $p = 0.7,\ q = 0.3,\ n = 3,\ k = 0,1,2,3$

$$P_3(k) = C_3^k (0.7)^k (0.3)^{3-k}.$$

$$P(B) = P_3(0) = C_3^0 (0.7)^0 (0.3)^3 = (0.3)^3 = 0.027.$$

$$P(H) = P_3(1) = C_3^1 (0.7)^1 (0.3)^2 = 0.189.$$

$$P(K) = P_3(2) = C_3^2 (0.7)^2 (0.3)^1 = 0.441.$$

$$P(A) = P_3(3) = C_3^3 (0.7)^3 (0.3)^0 = (0.7)^3 = 0.343.$$

$$P(C) = P(k \ge 1) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 0.973.$$

Вероятность события C можно найти также по формуле для вероятности противоположного события, учитывая, что $\overline{C} = B$, $P(C) = 1 - P(B) = 0.973$. События B, H, K, A образуют полную группу событий, и сумма их вероятностей равна 1.

Заметим, что в примере 5.2 мы получим такие же значения вероятностей соответствующих событий, если вероятности попадания для всех трёх стрелков будут одинаковы и равны 0.7.

Важно помнить условия, при которых получена формула Бернулли: 1) число испытаний ограничено; 2) испытания и результаты испытаний независимы; 3) вероятность успеха во всех испытаниях постоянна. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, формула Бернулли не применима.

Пример 1.6.2.

В урне три белых и два черных шара. Из урны производится выборка трёх шаров так, что перед выбором следующего предыдущий шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в выборке 0, 1, 2, 3 белых шаров?

Решение: $p = 3/5,\ q = 2/5,\ n = 3,\quad k = 0,1,2,3$.

$P_3(k) = C_3^k (3/5)^k (2/5)^{3-k}$,

$P_3(0) = C_3^0 (3/5)^0 (2/5)^3 = (2/5)^3 = 8/125$,

$P_3(1) = C_3^1 (3/5)^1 (2/5)^2 = 36/125$,

$P_3(2) = C_3^2 (3/5)^2 (2/5)^1 = 54/125$,

$P_3(3) = C_3^3 (3/5)^3 (2/5)^0 = (3/5)^3 = 27/125$.

Рассмотрим схему Бернулли при условии, что проводится большое число испытаний ($n \to \infty$) при очень малой вероятности появления «успеха» в каждом испытании ($p \to 0$), так, что $np \to \lambda$. Тогда для любого $k \ge 0$ вероятность получить k успехов в n испытаниях стремится к величине $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, т.е.

$$P(k) \approx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{16}$$

Формула Пуассона (12) является приближением формулы Бернулли при большом числе испытаний с маленькой вероятностью одного из исходов.

Пример 1.6.3.

В партии из 200 изделий каждое изделие независимо от другого может быть браковано с вероятностью 0.01. Оценить вероятность того, что число бракованных изделий в партии равно 3.

Решение: Условия задачи удовлетворят условиям схемы Бернулли. По формуле Бернулли $P_{200}(3) = C_{200}^3 (0.01)^3 (0.99)^{197} = 0.181$. По формуле Пуассона $P(k = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.180$.

Другим приближением формулы Бернулли является формула Лапласа (нормальное приближение), если число испытаний в схеме Бернулли велико и при этом вероятности обоих исходов p и q имеют одинаковый порядок (npq – велико)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{17}$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Вероятность того, что в n испытаниях число «успехов» k заключено между k_1 и k_2 определяется формулой:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=P_n(x_1\le x\le x_2)=\varPhi(x_2)-\varPhi(x_1), \qquad (18)$$

где $\varPhi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$, $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функции $\varphi(x)$ и $\varPhi(x)$ табулированы, т.е. вычислены при многих положительных значениях x (см. в разделе Таблицы в конце пособия). Функция $\varphi(x)$ чётна, следовательно, для отрицательных значений аргумента $\varphi(-x)=\varphi(x)$, функция $\varPhi(x)$ нечётна: $\varPhi(-x)=-\varPhi(x)$. В некоторых таблицах приводятся значения функции $\varPhi(x)=\varPhi_{0;1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$, тогда $\varPhi(-x)=1-\varPhi(x)$.

Пример 1.6.4.

В партии из 22500 изделий каждое изделие может быть браковано с вероятностью 0.2. Найти вероятности событий: 1) число бракованных изделий в партии ровно 4590; 2) число бракованных изделий в партии заключено между 4380 и 4560.

Решение: Число $n=22500$ велико, поэтому можно воспользоваться нормальным приближением.

1) $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4590-22500\cdot 0.2}{60}=1.5$

$$P(k=4590)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(1.5)=\frac{1}{60}0.12952\approx 0.0022$$

2) $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=-2,\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4560-22500\cdot 0.2}{60}=1$

$$P(4380\le k\le 4560)=P(-2\le x\le 1)=\varPhi(1)-\varPhi(-2)=$$
$$=\varPhi(1)+\varPhi(2)=0.3413+0.4772=0.8135.$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.6

1. Подбрасывается три игральных кости. Какова вероятность того, что «единица» выпадет: *а*) ровно два раза? *б*) хотя бы один раз?
2. Экзамен состоит из шести вопросов, на каждый из которых дано три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что путём простого угадывания удастся правильно ответить на 4 вопроса?

3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равно 0.001. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий ровно 4 не выдержит испытание?
4. Издательство выпускает 30% книг в мягком переплёте. Какова вероятность того, что из 210 книг, поступивших в магазин, 80 книг в мягком переплёте?
5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для стрелка равна 0.7. Какова вероятность того, что при 40 выстрелах он попадёт от 20 до 28 раз?
6. Из 60 вопросов, входящих в билеты (билет содержит 2 вопроса) студент подготовил 30. Какова вероятность того, что билет, взятый студентом, содержит два подготовленных им вопроса?
7. В партии 5% бракованных изделий. Какова вероятность того, что из 5, взятых на проверку изделий менее 2 бракованных?
8. Вероятность того, что изделие не пройдёт контроль, равна 0.02. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных изделий более двух не пройдут контроль?

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ 1.1

1. Вероятность события не может быть меньше ###.

2. Стандартная колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берётся 1 карта наудачу. Вероятность того, что взятая карта окажется червовой масти, равна ###.

3. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берётся 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта окажется картой черви или пики равна ###.

4. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берётся 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта – король равна ###.

5. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берётся 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта – король червей равна ###.

6. Каждый опыт завершается одним и только одним ###.

7. Возможность наступления чего-либо в результате опыта (испытания) называют ###.

8. Вероятность – это число, которое находится в пределах
от ### и до ###.

9. Если испытание завершается наступлением исхода определённого рода, то говорят что наступило ###.

10. Численная мера объективной возможности наступления события называется ###.

11. Вероятность события не может быть больше ###.

12. Деятельность, направленная на получение или проверку определённого результата называется ###.

13. В корзине имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Вероятность того, что это яйцо некачественное равна ###.

14. Комбинаторный тип, к которому относится случайное расположение книг на полке в определённом порядке, называется ###.

15. Комбинаторный тип, к которому относится набор трёх карандашей разных цветов, взятый из пяти имеющихся разных по цвету, называется ###.

16. Комбинаторный тип, к которому относится составленное наудачу расписание из трёх пар, выбранных из десяти различных предметов, называется ###.

17. События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не могущие произойти в одно и тоже время
(в результате одного и того же испытания), называются ###.

18. Если появление события $\boldsymbol{A}$ влечёт за собой изменение вероятности наступления события $\boldsymbol{B}$, или наоборот, появление события $\boldsymbol{B}$ влечёт за собой изменение вероятности наступления события A, то они называются ###.

19. Если вероятность наступления события A равна 0.3, то вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ равна ###.

20. Вероятность появления события A, определяемая при условии, что событие B уже наступило, называется ###.

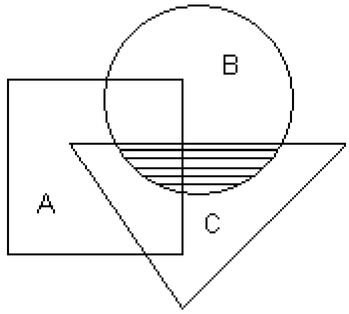
21. Отношение числа благоприятных исходов событию к числу всех равновозможных исходов эксперимента определяется как ### вероятность события.

Ответы к тестовым заданиям по теме 1.1

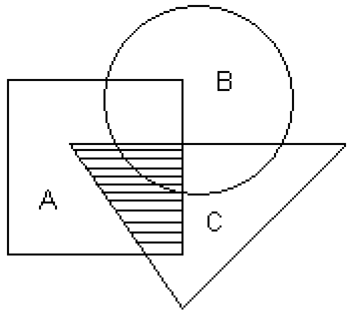
1. 0; ***2.*** 13/52, ¼; ***3.*** 26/52, 1/2; ***4.*** 1/13, 4/52; ***5.*** 1/52; ***6.*** исходом; ***7.*** событием; ***8.*** 0% и 100%, 0 и 1; ***9.*** событие; ***10.*** вероятностью; ***11.*** единицы; ***12.*** экспериментом, испытанием, опытом, наблюдением; ***13.*** 0,05, 5/100, 1/20; ***14.*** перестановка (книг); ***15.*** сочетание (цветов-красок); ***16.*** размещение (предметов); ***17.*** несовместными; ***18.*** зависимыми; ***19.*** 0,7; ***20.*** условная вероятность; ***21.*** классическая.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ 1.2–1.5

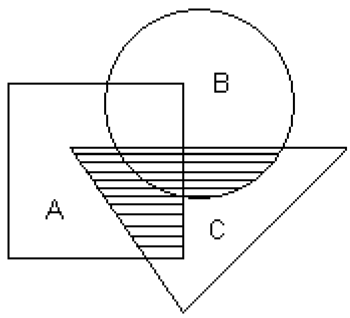
1. Даны события: A – «точка попадает в квадрат», B – «точка попадает в круг», C – «точка попадает в треугольник». Заштрихованная область соответствует событию ###.



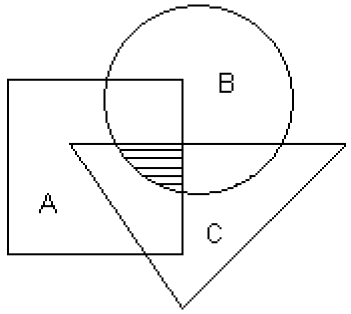
2. Даны события: A – «точка попадает в квадрат», B – «точка попадает в круг», C – «точка попадает в треугольник». Заштрихованная область соответствует событию ###.



3. Даны события: A – «точка попадает в квадрат», B – «точка попадает в круг», C – «точка попадает в треугольник». Заштрихованная область соответствует событию ###.



4. Даны события: A – «точка попадает в квадрат», B – «точка попадает в круг», C – «точка попадает в треугольник». Заштрихованная область соответствует событию ###.



5. Пусть A, B, C – события, наблюдаемые в эксперименте. Тогда, событие E – «из трёх событий произойдёт ровно одно событие» задаётся выражением ###.

6. Пусть A, B, С – события, наблюдаемые в эксперименте. Тогда, событие E – «из трёх событий произойдёт ровно два события» задаётся выражением ###.

7. Пусть A, B, C – события, наблюдаемые в данном эксперименте. Тогда, событие E – «из трёх событий произойдёт не меньше двух событий» задаётся выражением ###.

8. Пусть A, B, C – события, наблюдаемые в данном эксперименте. Тогда, событие Е – «из трёх событий произойдёт хотя бы одно событие» задаётся выражением ###.

9. События A и B несовместны. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$. Тогда вероятность $\mathrm{P}(A+B)$ = ###.

10. События A и B независимы: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$. Тогда вероятность $P(AB)$ = ###.

11. События A и B совместные и независимые. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$. Тогда вероятность $P(A+B)$ = ###.

12. События A и B совместные. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(AB) = 0.05$. Тогда вероятность $P(A+B)$ = ###.

13. События A и B зависимые. $P(B) = 0.3$, $P(A/B) = 0.2$. Тогда вероятность $P(AB)$ = ###.

14. Данная формула $P(B_i / A) = \dfrac{P(B_i)P(A / B_i)}{P(A)}$ называется формулой ###.

15. Данная формула $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A / B_i)$ называется формулой ###.

16. В урне 3 белых и 2 красных шара. Наудачу из урны вынули 2 шара. Расположить следующие события в порядке возрастания их вероятностей: а) оба шара – красные; б) один из вынутых шаров – синий; в) вынутые шары разного цвета; г) среди вынутых шаров нет чёрного шара; д) оба шара – белые.

17. События A и B несовместные, а вероятности их появления равны 0,3 и 0,4 соответственно. Тогда, значение вероятности появления события AB равняется ###

18. Вероятность появления события A равна 0.3, вероятность появления B равна 0.4; события A и B несовместные. Вероятность появления события A+B равна ###...

Ответы к тестовым заданиям по темам 1.2-1.5

1. BC; **2.** AC; ***3.*** $AC+BC$; ***4.*** ABC; ***5.*** $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;
6. $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$; ***7.*** $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$;
8. $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$, $A+B+C$; ***9.*** 0.5;
10. 0.12; **11.** 0.44; ***12.*** 0.45; ***13.*** 0.06; ***14.*** Байеса;
15. полной вероятности; ***16.*** б), а), д), в), г); ***17.*** 0; ***18.*** 0.70.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ 1.6

1. Если число опытов в серии повторных независимых испытаний невелико, то для вычисления вероятности k «успехов» используется формула ###

2. Испытание происходит 7 раз. Вероятность того, что оно ровно 2 раза завершиться успешно, Вы будете вычислять, используя формулу ###.

3. Вероятность появления события в одном испытании 0,001. Испытание происходит 7000 раз. Вероятность того, что событие произойдёт не более двух раз, Вы будете вычислять, используя формулу ###.

4. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,6. Вероятность наступления ровно 50 успехов вычисляется по формуле ###.

5. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0.4. Тогда вероятность того, что событие наступит от 30 до 50 раз, вычисляется по формуле ###.

6. В корзине с розами красные розы составляют 75% от общего количества. Для букета взяли 3 розы. Расположить события в порядке убывания их вероятностей: а) в букете нет красных роз; б) букет состоит из роз; в) в букете только 1 красная роза; г) букет состоит только из красных роз; д) в букете нет роз.

7. В лотерее на каждые 100 билетов 10 выигрышных. Вы покупаете 2 билета. Расположить события в порядке возрастания их вероятностей: а) хотя бы один Ваш билет выиграл; б) все три билета выиграли; в) среди Ваших билетов нет выигрышных; г) оба Ваших билета выиграли; д) выиграл только один Ваш билет.

8. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,8. Вероятность наступления ровно 50 успехов (с точностью до сотых) равна ###.

9. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность успеха в одном испытании равна 0,5. Определите вероятность (до 4-го знака после запятой) того, что событие появится от 25 до 50 раз.

10. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,5. Вероятность наступления ровно 50 успехов (с точностью до второго знака после запятой) равна ###.

11. Параметры n, p, k, q, n-k определяющие вероятность по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ означают соответственно ###.

12. Проводится серия из 10 независимых испытаний. По формуле $P_{10}(9) + P_{10}(10)$ находится вероятность события ###.

Ответы к тестовым заданиям по теме 1.6

1. Бернулли; ***2.*** Бернулли; ***3.*** Пуассона; ***4.*** Лапласа (локальная теорема Муавра-Лапласа); ***5.*** Лапласа (интегральная формула Муавра-Лапласа); ***6.*** б), г), в), а), д); ***7.*** *б*), г), д), а), в); ***8.*** 0.00; ***9.*** 0.5000; ***10.*** 0.08; ***11.*** а) число независимых испытаний, б) вероятность «успеха» в одном испытании, в) число «успехов» в серии испытаний, г) вероятность «неуспеха», д) число «неуспехов»; ***12.*** «из 10 испытаний событие наступит более 8 раз», «из 10 испытаний событие наступит хотя бы 9 раз».

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМАМ 1.1–1.6

1. Что такое случайный эксперимент?
2. Что представляет собой исход случайного эксперимента?
3. Что такое пространство событий (исходов)?
4. Что такое случайное событие?
5. Может ли в результате случайного эксперимента реализоваться более одного исхода?
6. Может ли в результате случайного эксперимента наступить более одного события?
7. Что такое вероятность события?
8. Что такое относительная частота события?
9. Чем относительная частота отличается от вероятности события? О чем говорит закон больших чисел?
10. Что представляет собой невозможное событие?
11. Что такое достоверное событие?
12. Что представляют собой противоположные события?
13. Как связаны между собой вероятности противоположных событий?
14. В чем заключается правило равной вероятности?
15. Какие события описывает классическая формула вероятностей?
16. Когда применяется геометрическая вероятность?
17. Что такое несовместные события?
18. Что такое пересечение или произведение событий?
19. Что такое условная вероятность?
20. Чему равна вероятность произведения двух событий?
21. Какие события называются независимыми?
22. Чему равна условная вероятность для двух независимых событий?
23. Что такое объединение или сумма событий?
24. Чему равна вероятность суммы двух событий?
25. Чему равна вероятность суммы двух несовместимых событий?
26. Что такое диаграмма Эйлера-Венна?
27. Что такое полная группа событий?
28. Какое событие описывает формула полной вероятности?
29. Сформулируйте условия применения формулы Бернулли.
30. Сформулируйте условия, при которых верна формула Пуассона.
31. Сформулируйте условия, при которых верно нормальное приближение (формулы Лапласа).

ЧАСТЬ 2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель второй части пособия – помочь студентам в освоении понятия *случайной величины (с.в.)*. Она способствует приобретению навыков при решении задач, подготовке к тестированию и, как следствие, к более качественному усвоению предмета.

В данной части приведены примеры решения типовых задач по двум основным темам:

1. Дискретные законы распределения.
2. Непрерывные законы распределения.

Пособие содержит также примеры тестовых заданий, задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы. Все основные формулы приводятся при решении примеров и имеют нумерацию.

Основные понятия, которые нужно освоить при изучении этих тем:

- *случайная величина и её закон распределения,*
- *функция распределения и плотность распределения,*
- *параметры распределения*
- *числовые характеристики распределения:*
  - *математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение,*
  - *квантили распределения, мода и медиана.*

ТЕМА 2.1. ДИСКРЕТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия:

- *таблица распределения и функция распределения,*
- *индикаторная (бернулевская) и биномиальная с.в.,*
- *геометрическое и гипергеометрическое распределения,*
- *формулы для определения числовых характеристик с.в. дискретного типа, частные формулы для конкретных распределений.*

Литература: [1] – гл. 6, 7, 8, 10; [2] – гл. 4, [5] – гл. 2, п. 2.1; 2.2; 2.3; 2.5; 2.7.

Пример 2.1.1.

Дана таблица распределения дискретной случайной величины (д.с.в.) X.

x_i	-2	1	3
$p_i = P(X = x_i)$	0.2	0.5	0.3

а) построить функцию распределения случайной величины X;
б) найти числовые характеристики распределения: математическое ожидание и дисперсию.

Решение: а) По определению, *функция распределения* случайной величины X в точке x есть вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(-\infty, x)$, т.е.

$$F_X(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

В нашем случае случайная величина принимает дискретные значения с заданными вероятностями. Вероятности остальных значений равны нулю. Тогда для всех значений $x \le -2$: $F(x) = 0$. Для значений x в интервале $(-2,1]$ $F(x) = P(X = -2) = 0,2$. В интервале $(1,3]$:

$$F(x) = P(X = -2) + P(X = 1) = 0,2 + 0,5 = 0,7.$$

Для $x > 3$:

$$F(x) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 3) = 0.2 + 0.5 + 0.3 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le -2; \\ 0.2, & при\ -2 < x \le 1; \\ 0.7, & при\ 1 < x \le 3. \\ 1 & при\ x > 3 \end{cases}.$$

График функции распределения имеет вид (рис. 2):

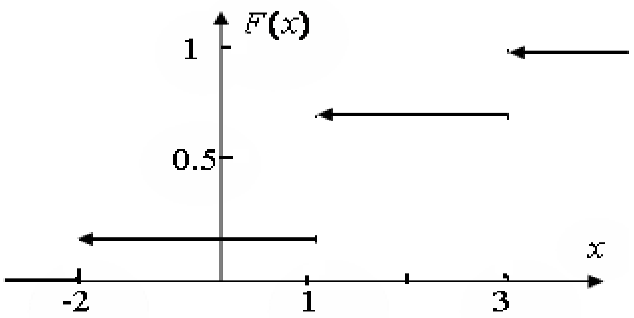


Рис. 2. График функции распределения

Заметим, что функция распределения д.с.в. X имеет ступенчатый вид, при этом в точках разрыва функция непрерывна слева и не определена справа, а величина скачка функции распределения в этих точках равна вероятностям этих значений.

б) *Математическое ожидание* или *среднее* (ожидаемое) значение дискретной случайной величины X определяется как взвешенное среднее всех возможных значений X, в которых в качестве весов выступают соответствующие вероятности:

$$MX = \sum_i x_i p_i \,. \qquad (2)$$

Для заданного распределения $MX = -2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 1$.

Дисперсия случайной величины X характеризует разброс значений случайной величины относительно среднего значения и определяется как математическое ожидание квадратов отклонений значений X от их среднего:

$$DX = M\left(x_i - MX\right)^2 = \sum_i \left(x_i - MX\right)^2 p_i \,. \qquad (3)$$

Для вычисления дисперсии, воспользуемся свойством:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2. \qquad (4)$$

Пример 2.1.2.

Дана функция распределения д.с.в X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 1; \\ 0.4, & при\ 1 < x \le 3; \\ 0.9, & при\ 3 < x \le 4; \\ 1, & при\ x > 4. \end{cases}$$

Построить таблицу распределения случайной величины X, представить это распределение графически. Найти числовые характеристики распределения.

<u>Решение:</u> Из условия задачи следует, что функция распределения имеет ступенчатый вид и терпит разрывы в точках 1, 3, 4. Из свойств функции распределения следует (см. пример 1.1), что случайная величина

X дискретна и принимает значения 1, 3, 4, при этом, величина скачка функции $F(x)$ в этих точках равна вероятностям этих значений:

$$p_1 = P(X=1) = F(1+0) - F(1) = 0.4,$$

$$p_2 = P(X=3) = F(3+0) - F(3) = 0.9 - 0.4 = 0.5,$$

$$p_3 = P(X=4) = F(4+0) - F(4) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

Таблица распределения:

x_i	1	3	4
$p_i = P(X = x_i)$	0.4	0.5	0.1

<u>Сумма вероятностей всех возможных значений X должна быть равна единице</u> (свойство нормировки):

$$\sum_i p_i = 1. \qquad (5)$$

Проверка: $\sum_i p_i = 0.4 + 0.5 + 0.1 = 1.$

График функции вероятностей $p(x)$ случайной величины X представлен на рисунке 3. Длины вертикальных линий на этом графике равны вероятностям соответствующих значений. Сам график состоит из трёх точек в конце этих линий.

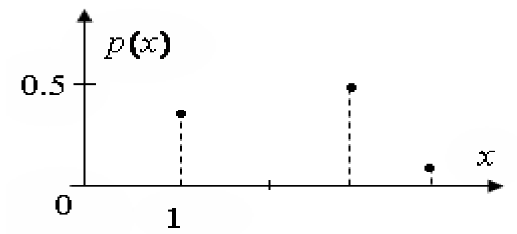


Рис. 3. График функции вероятностей

Математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсия:

$$MX = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1 = 2.3,$$

$$M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,3 = 9.7,$$

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 9.7 - 2.3 = 7.4.$$

Видим, что для данного распределения мода $M_0 X = 3$ не совпадает с математическим ожиданием.

Рассмотрим подробнее понятия математического ожидания и дисперсии случайной величины и их свойства.

Пример 2.1.3. *Дана таблица распределения д.с.в. X*

x_i	-1	0	1
$p_i = P(X = x_i)$	0.2	0.3	0.5

Вычислить следующие математические ожидания:

$$MX\,,\ M\left(2X\right), M\left(2X+1\right), M(X^2), M\left(X-0.3\right)^2.$$

Решение: $MX=\sum_i x_i p_i=(-1)\cdot 0,2+0\cdot 0,3+1\cdot 0,5=0.3$.

Математическое ожидание функции случайной величины $H\left(X\right)$:

$$M\left[H\left(X\right)\right]=\sum_i^n H\left(X\right)\cdot p\left(x_i\right). \tag{6}$$

Тогда:

$$M\left(2X\right)=\sum_i 2x_i p_i=(-2)\cdot 0,2+0\cdot 0,3+2\cdot 0,5=0.6\,,$$

$$M\left(2X+1\right)=\sum_i\left(2x_i+1\right)p_i=(-1)\cdot 0,2+1\cdot 0,3+3\cdot 0,5=1.6\,.$$

Видим, что $M\left(2X+1\right)=2MX+1$. Удвоение значений случайной величины и прибавление к ним единицы приводит к удвоению математического ожидания и увеличению результата на единицу. Таким образом, мы убедились в выполнении свойства математического ожидания:

$$M\left(aX+b\right)=aMX+b\,. \tag{7}$$

$$M(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,5=0.7\neq\left(MX\right)^2.$$

Заметим, что математическое ожидание квадрата случайной величины не совпадает с квадратом математического ожидания этой величины.

$$M\left(X-0.3\right)^2=\sum_i\left(x_i-0.3\right)^2 p_i=(-1,3)^2\cdot 0,2+(-0,3)^2\cdot 0,3+$$
$$+(0,7)^2\cdot 0,5=0.61=0.7-(0.3)^2.$$

Здесь мы продемонстрировали свойство дисперсии (4)

$$DX=M\left(X-MX\right)^2=MX^2-(MX)^2.$$

Пример 2.1.4.

Таблица распределения д.с.в. X имеет вид:

x_i	2025	2050	2075
p_i	0.3	0.2	0.5

Найти дисперсию $DX=\sigma_X^2$.

Решение: Чтобы при вычислениях не оперировать большими числами, введём случайную величину $Y=\dfrac{X-2050}{25}$, таблица распределения которой проще, причём $P\left(X=x_i\right)=P\left(Y=y_i\right)$.

y_i	-1	0	1
p_i	0.3	0.2	0.5

$$MY=\sum_i y_i p_i=(-1)\cdot 0,3+0\cdot 0,2+1\cdot 0,5=0.2\,,$$

$$MY^2 = \sum_i y_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 = 0.8,$$
$$DY = MX^2 - \left(MX\right)^2 = 0.8 - 0.04 = 0,76.$$

Так как $X = 25Y + 2050$, для вычисления DX воспользуемся свойствами дисперсии:

$$D\left(aX\right) = a^2 DX; \; D\left(X + b\right) = DX.$$

Тогда $DX = D\left(25Y + 2050\right) = 625DY = 625 \cdot 0,76 = 475$.

Дисперсия есть величина, имеющая размерность квадрата случайной величины. Поэтому для характеристики изменчивости случайной величины используется также среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{DX}, \tag{9}$$

имеющее ту же размерность, что и случайная величина.

Стандартное отклонение используется в качестве мерки для выражения реальных отклонений, и приблизительно показывает, насколько реальные значения случайной величины могут отличаться от среднего.

Во многих случаях, например, в коммерческой деятельности стандартное отклонение характеризует риск, показывая, насколько неопределённой может быть ситуация.

При решении задач 2.1.5 – 2.1.10 можно воспользоваться таблицей 4, в которой приведены основные дискретные распределения, указаны параметры распределения и связь числовых характеристик распределения с параметрами.

Пример 2.1.5.

Три раза подбрасывается игральная кость. Построить распределение числа выпавших единиц. Найти числовые характеристики распределения.

Решение: В приведённом случайном эксперименте выполняются все условия схемы Бернулли: испытания независимы, вероятность «успеха» (выпадения единицы) во всех испытаниях одинакова и равна $1/6$. Следовательно, случайная величина X – число выпавших единиц в трёх испытаниях имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами $n = 3, \; p = 1/6$. X принимает целые значения $k = 0,1,2,3$ с вероятностями

$$p_k = P_3\left(X = k\right) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k} \tag{10}$$

Применяя формулу (10), получим:

$$p_0 = P_3\left(X = 0\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}; \quad p_1 = P_3\left(X = 1\right) = 3\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$$

$$p_2 = P_3\left(X = 2\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} = \frac{15}{216}; \quad p_3 = P_3\left(X = 3\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Таблица распределения вероятностей имеет вид:

$X=k$	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Проверка свойства нормировки: $\sum_{k=1}^{3} p_k = \frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1.$

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$MX = np,\ DX = np(1-p). \tag{11}$$

Применяя формулы (11), получаем:

$$MX = 3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\ DX = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{36}.$$

Заметим, что математическое ожидание близко к моде с.в.

Пример 2.1.6.

Игральная кость подбрасывается до выпадения «единицы». Построить распределение числа испытаний. Найти числовые характеристики распределения.

Решение: Пусть X – случайная величина, равная числу испытаний. Очевидно, оно равно номеру испытания, в котором впервые выпала единица. X может принимать значения $1, 2, 3, \dots$ и имеет ***геометрическое+1 распределение*** с параметром $p = 1/6$. Вероятности этих значений

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p. \tag{12}$$

Применив формулу (12), получим:

$$P(X=1)=p=1/6,\ P(X=2)=(1-p)p=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6},\ \dots$$

Таблица распределения вероятностей имеет вид:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	…	$p(1-p)^{k-1}$	…

Математическое ожидание и дисперсия геометрического+1 распределения:

$$MX = 1/p,\ DX = (1-p)/p^2. \tag{12.1}$$

Применяя (12.1), имеем: $MX = 6, DX = 30$, $\sigma_X \approx 5.5$. Величина σ_X говорит о том, что возможные значения X имеют достаточно большой разброс.

Пример 2.1.7.

В партии из 200 изделий каждое изделие может быть браковано с вероятностью 0.01. Составить закон распределения числа бракованных изделий в партии. Найти числовые характеристики распределения.

Решение: Обозначим X – число бракованных изделий в партии. В этом случайном эксперименте выполняются все условия схемы Бернулли, при этом число испытаний n велико, а вероятность появления бракованного изделия p мала. Следовательно, случайная величина X имеет ***распределение Пуассона*** с параметром $\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$. Вероятности данного закона определяются по формуле для $k = 0,1,2,\ldots$:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{13}$$

При вычислениях будем округлять полученные значения вероятностей до тысячных. Тогда

$$P(X=0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}\approx 0.137,\quad P(X=1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}\approx 0.274,$$

$$P(X=2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}\approx 0.274,\quad P(X=3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx 0.183,$$

$$P(X=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}\approx 0.090,\quad P(X=5)=\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0.040,$$

$$P(X=6)=\frac{2^6}{6!}e^{-2}\approx 0.010,\quad P(X=7)=\frac{2^7}{7!}e^{-2}\approx 0.000.$$

Последнее значение с заданной точностью равно нулю. Вероятности всех последующих значений тоже равны нулю. Таблица распределения:

$X=k$	0	1	2	3	4	5	6	$k\geq 7$
$P(X=k)$	0.137	0.274	0.274	0.183	0.09	0.04	0.01	0

Числовые характеристики распределения Пуассона: $MX=\lambda$, $DX=\lambda$. Получаем: $MX=2$, $DX=2$. Этот результат означает, что в среднем в длинной серии таких испытаний среднее число бракованных изделий в партии из 200 изделий равно 2.

Пример 2.1.8.

В урне 5 шаров, из которых 3 белых и 2 черных. Из урны наудачу выбирается 3 шара (выборка без возвращения). Построить распределение числа белых шаров в выборке. Найти числовые характеристики распределения. Рассмотреть случай выборки с возвращением.

Решение: Обозначим X – число белых шаров в выборке. Случайная величина, равная числу элементов одного типа в выборке, состоящей из n элементов N – множества с двумя типами элементов (K элементов одного типа и $N-K$ – другого), имеет ***гипергеометрическое распределение*** с параметрами n, N, K и принимает значения от $\max\{0,\ |N-K-n|\}$ до $\min\{n,K\}$ с вероятностями

$$P(X=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}. \qquad (14)$$

В нашем случае $n=3$, $N=5$, $K=3$, $N-K=2$. X принимает значения 1, 2, 3. с вероятностями: $P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

Таблица распределения вероятностей имеет вид:

$X=k$	1	2	3
$P(X=k)$	0.3	0.6	0.1

Проверка: $\sum p_k=1$.

Числовые характеристики гипергеометрического распределения:

$$MX=\frac{nK}{N},\ DX=\frac{nK}{N-1}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right). \qquad (15)$$

Получаем: $MX=1.8$, $DX=0.36$.

В случае выборки с возвращением случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметром $p=3/5$. Рассмотрите этот случай самостоятельно.

Гипергеометрическое распределение также используется при контроле качества продукции. Например, при поступлении партии товара в магазин проверяется не вся партия, а только выборка из неё. Если количество бракованных изделий в выборке превышает некоторое заданное значение, вся партия бракуется. При этом допустимое количество бракованных изделий определяется по заданной допустимой вероятности брака из гипергеометрического распределения. При поступлении больших партий товара для контроля качества можно использовать геометрическое распределение.

Задачи для самостоятельного решения по теме 2.1 (д.с.в.)

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 1; \\ 0.3, & при\ 1 < x \le 3; \\ 0.7, & при\ 3 < x \le 4; \\ 1, & при\ x > 4. \end{cases}$$

   Построить таблицу распределения случайной величины X, найти её числовые характеристики: числовые характеристики: математическое, моду, дисперсию, стандартное отклонение.

2. Дан закон распределения случайной величины X

x_i	-1	0	1
p_i	0.20	0.35	0.45

   Построить её функцию распределения. Найти числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию.

3. В лотерее на 100 билетов разыгрывается два выигрыша на сумму 2000 рублей и 600 рублей. Стоимость билета 100 рублей. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета. Найти математическое ожидание выигрыша.

4. Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи в час равно 30. Составить закон распределения случайной величины X – числа вызовов в минуту. Найти математическое ожидание и дисперсию распределения. Найти вероятность того, что а) в течение минуты поступит не менее двух вызовов, в) не более трёх вызовов.

5. Вероятность появления брака на автоматической линии равна 0.001. Линия работает без прерывания до появления первого бракованного изделия. Составить закон распределения числа произведённых изделий между двумя последовательными прерываниями. Найти его числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию.

ТЕМА 2.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные *понятия:*

- *свойства функции и плотности непрерывных распределений,*
- *формулы для числовых характеристик*
- *квантиль и критические точки распределения*
- *основные типы распределений (равномерное, показательное и (стандартное) нормальное),*
- *гауссова кривая и функция Лапласа,*
- *выражение характеристик через параметры*
- *правило трёх сигм.*

Литература: [1] – гл. 10, 11, 12, 13; [2] – гл. 6; [5] – гл. 2, п. 2.4; 2.5; 2.7;

Пример 2.2.1.

Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ x^2/4, & \text{при } 0<x\le 2;\\ 1, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти: а) функцию плотности и числовые характеристики распределения; б) $P(X\ge 1)$, $P(1<X<3)$*; в) уровень* δ *для квантиля случайной величины* $x_\delta = 1/2$.

Решение: а) Функция распределения случайной величины X непрерывна во всей области определения. Согласно свойствам функции плотности, функция распределения является её первообразной, т.е.

$$F'(x)=f(x). \qquad (16)$$

Тогда $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1;\\ x/2, & \text{при } 0<x\le 2;\\ 0, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Для непрерывной случайной величины *математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсия* определяются формулами:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad (17)$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx, \qquad (18)$$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty} (x-MX)^2 f(x)dx. \qquad (19)$$

Так как плотность задана различными выражениями на интервалах $(-\infty,1]$, $(1,2]$ и $(2,\infty)$, разобьём каждый из интегралов на три интеграла:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{\infty} 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^2}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2} x^2\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{\infty} 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^3}{2}dx=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2=2.$$

Дисперсию найдём, используя свойство $DX=MX^2-(MX)^2$.

$DX=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$.

б) События $\{X\ge 1\}$ и $\{X<1\}$ несовместимы и образуют полную группу, поэтому

$$P(X\ge 1)=1-P(X<1). \qquad (20)$$

$P(X<1)=F(1)=1/2$, $P(X\ge 1)=1-F(1)=1-1/2=1/2$.

Из свойств функции распределения следует, что вероятность попадания случайной величины X в интервал $[a,b)$ равна:

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a). \qquad (21)$$

При этом для непрерывных случайных величин из условия, что $P(X=a)=P(Y=b)=0$ следует, что

$$P(a\le X<b)=P(a<X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b) \qquad (22)$$

Тогда вероятность попадания X в интервал $(1,3)$:

$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=1-1/4=3/4$.

в) Квантиль уровня δ распределения случайной величины X определяется как число x_δ, такое что $F(x_\delta)=P(X<x_\delta)=\delta$. Следовательно, искомый уровень $\delta=F(1/2)=\left.\left(x^2/4\right)\right|_{x=1/2}=1/16$. Квантиль уровня 1/2 $x_{1/2}$ называется *медианой* распределения. Для данного распределения $x_{1/2}=1$, так как $F(1)=P(X<1)=1/2$.

Пример 2.2.2.

Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, & при\ |x|\le\pi/2; \\ 0, & при\ |x|>\pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) константу c, б) функцию распределения, в) математическое ожидание и дисперсию распределения, г) моду и медиану распределения, д) вероятность попадания в интервал $(\pi/6,\pi)$.

Решение: а) Для определения константы c, воспользуемся свойством функции плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (23)$$

Так как плотность задана различными аналитическими выражениями на интервалах $(-\infty,-\pi/2)$, $(-\pi/2,\pi/2)$ и $(\pi/2,\infty)$, разобьём интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ на три интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos x dx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = c\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2c = 1,$$

откуда $c = 1/2$.

б) Из определения плотности распределения случайной величины следует, что функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (24)$$

Так как функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями на отрезках $(-\infty,\pi/2]$, $(-\pi/2,-\pi/2]$ и $(-\pi/2,\infty]$, найдём функцию распределения на каждом из этих отрезков.

$$x \le -\pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$$

$$-\pi/2 < x \le \pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{x} \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{\sin x + 1}{2}$$

$$x > \pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{x} 0dx = \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1$$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\pi/2; \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}, & \text{при } -\pi/2 < x \le \pi/2; \\ 1, & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$

в) $$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x dx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = 0, \qquad (25)$$

Так как определённый интеграл с симметричными пределами от нечётной функции равен нулю и $\int_a^b 0dx = 0$.

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos x dx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = \qquad (26)$$

$$= \left(x^2\sin x + 2x\cos x + 2\sin x\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2/2 + 4$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \pi^2/2 + 4. \qquad (27)$$

г) Модальное значение (мода) непрерывной случайной величины определяется как значение $x_{мод.}$, при котором функция плотности достигает максимума. Необходимым условием экстремума функции является равенство нулю её первой производной: $f'(x) = (\cos x)' = \sin x$, $f'(x) = 0$ в точках $x = k\pi$. В области определения функции $f(x)$ лежит только значение $x = 0$, следовательно, $x_{мод.} = 0$.

Медиана определяется как значение случайной величины $x_{мед.}$, такое что $P(X > x_{мед.}) = P(X < x_{мед.}) = 0.5$. С помощью функции распределения это условие можно записать в виде:

$$F(x_{мед.}) = 1 - F(x_{мед.}), \qquad (28)$$

откуда $F(x_{мед.}) = 0.5$.

В данном случае $F(x_{мед.}) = 0.5(\sin x_{мед.} + 1) = 0.5$, откуда $\sin x_{мед.} = 0$ и $x_{мед.} = 0$. Получаем, что $x_{мед.} = x_{мод.} = MX$.

Для симметричного распределения значение моды и медианы всегда совпадает с математическим ожиданием.

д) $P(\pi/6 \le X < \pi) = F(\pi) - F(\pi/6) = 1 - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

При решении задач 2.2.3 – 2.2.6 можно воспользоваться таблицей 2, в которой приведены основные непрерывные распределения, их функции распределения, функции плотности, параметры распределений, формулы для вычисления вероятностей, связь числовых характеристик с параметрами.

Пример 2.2.3.

Единица шкалы прибора равна 0.1. Записать функцию распределения, функцию плотности случайной величины X, построить их графики. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что систематические ошибки измерения X не превышают 0.01.

Решение: Показания прибора обычно округляются до ближайшего целого деления шкалы. Поэтому систематическая ошибка прибора есть случайная величина X, имеющая ***равномерное распределение*** на отрезке $[0; 0.05]$. Параметры распределения $a = 0,\ b = 0.05$. Функция распределения и плотность

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 20x, & 0 \le x \le 0.05; \\ 1, & x > 0.05. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 20, & 0 \le x \le 0.05; \\ 0, & x > 0.05. \end{cases}$$

Графики этих функций показаны на рис. 3.

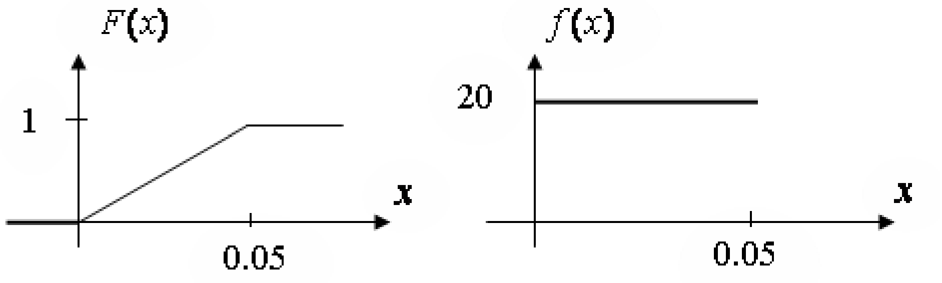


Рис. 3. Графики функций распределения и плотности

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025,\ DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0.05)^2}{12} = 0.002.$$

Используя определение функции распределения $F(x) = P\left(X < x\right)$, получим $P\left(X < 0,01\right) = F(0,01) = 20 \cdot 0,01 = 0.2$. Вероятность $P\left(X < 0,01\right)$ можно вычислить, как вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; 0,01\right)$: $P\left(0 < X < 0,01\right) = \dfrac{0,01}{0,05} = 0,2$.

Равномерное распределение имеют также систематические ошибки округления, время ожидания транспорта, имеющего определённый интервал движения. Если, например, количество сбоев в сложной системе имеют распределение Пуассона, то затраты на восстановление – равномерное распределение.

Пример 2.2.4.

Время между двумя ***с****боями вычислительной машины T есть случайная величина, имеющая* ***показательное распределение****, с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию распределения, функцию плотности случайной величины T, построить их графики. Найти вероятность того, что время между двумя сбоями: а) не превысит 300 часов, б) составит от 100 до 200 часов.*

Решение: Из формулы для математического ожидания параметр показательного распределения $\alpha = 1/MT = 1/400$. Функция распределения и плотность:

$$F(t) = P(T < t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t/400}, & t \ge 0 \end{cases}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{400} e^{-t/400}, & t \ge 0. \end{cases}$$

Графики функций распределения и плотности (рис. 4):

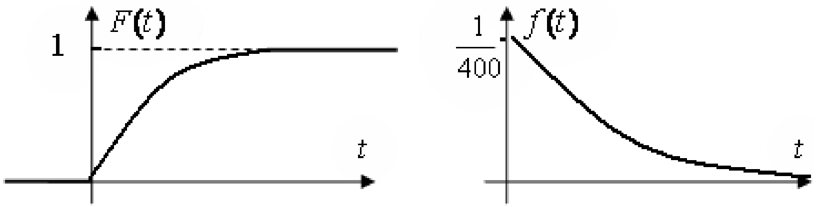


Рис. 4. Графики функций распределения и плотности

$$P(T<300)=F(300)=e^{-300/400}=e^{-3/4}=0,4724$$
$$P(100<T<200)=F(200)-F(100)=e^{-1/4}-e^{-2/4}=0,1723$$

Показательное распределение имеет, например, срок службы технических изделий.

Пример 2.2.5.

Средний процент выполнения плана предприятиями некоторой отрасли равен 106% со стандартным отклонением 3%. Полагая, что процент выполнения плана есть случайная величина, имеющая ***нормальное распределение****, записать ее функцию плотности. Найти долю предприятий: а) не выполняющих плана, б) выполняющих план от 110 до 150%, в) для которых отклонение от среднего составляет 2%.*

Решение: Пусть $X-$ процент выполнения плана. По условию, $MX=106$. Параметры распределения: $a=MX=106,\ \sigma^2=DX=9$. Тогда функция плотности $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-106)^2}{18}}$.

а) Доля предприятий, не выполняющих плана.

Вероятность $P(X<x)=\Phi_{a,\sigma^2}(x)=\Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. (29)

Тогда $P(X<100)=\Phi_{0,1}\left(\frac{100-106}{3}\right)=\Phi_{0,1}(-2)=1-\Phi_{0,1}(2)=$ $=1-0.9772=0.0228$. Следовательно, в среднем около 2,3% предприятий не выполняют план.

б) Доля предприятий, выполняющих план от 110 до 150%. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал задается формулой:

$$P(x_1<X<x_2)=\Phi_{0,1}\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi_{0,1}\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) \tag{30}$$

$$P(110<X<150)=\Phi_{0,1}\left(\frac{150-106}{3}\right)-\Phi_{0,1}\left(\frac{110-106}{3}\right)=$$
$$=\Phi_{0,1}(1.46)-\Phi_{0,1}(1.33)=0.4279-0.4082=0.0197.$$

В среднем 2% предприятий выполняют план от 110 до 150%.

в) Вероятность отклонения значений X от математического ожидания a задается формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi_{0,1}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-1. \tag{31}$$

Тогда доля предприятий, для которых отклонение от среднего значения составляет 2%, определяется вероятностью

$$P\left(|X-100|<2\right)=2\Phi_{0,1}\left(\frac{2}{3}\right)-1=2\Phi_{0,1}\left(0.66\right)-1=2\cdot 0.7454-1\approx 0.49$$

<u>Замечание 1.</u> Функция $\Phi_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ есть функция распределения стандартного нормального распределения с параметрами; $a=0$ и $\sigma^2=1$. Эта функция табулирована [3]. Во многих учебниках табулирована не функция распределения, а функция $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt$ [1], [2]. Связь между ними: $\Phi_{0,1}(x)=0.5+\Phi(x)$. $\Phi(x)$ – нечётная функция, поэтому $\Phi(0)=0$; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. В конце данного пособия приводится в разделе Таблицы вторая функция, т.е. $\Phi(x)$.

При этом

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \tag{32}$$

$$P(x_1<X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{33}$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 2.2 (н.с.в.)

1. Задана функция распределения случайной величины X
$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0;\\ x/4, & при\ 0<x\le 4;\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$$
Найти: а) функцию плотности и числовые характеристики распределения; б) $P(X\ge 1)$; в) $P(3<X<5)$.
2. Задана плотность распределения случайной величины X
$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0\ и\ x>\pi;\\ c\sin x, & при\ 0<x\le \pi.\end{cases}$$
Найти: а) константу c; б) функцию распределения $F(x)$;
в) числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию распределения, д) вероятность попадания в интервал $(\pi/3, 3\pi/2)$.
3. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Записать функции распределения и плотности случайной величины X – времени ожидания автобуса пассажиром, подошедшим к остановке в произвольный момент времени. Построить их графики. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X. Вычислить вероятность того, что время ожидания: а) не превысит трёх минут; б) составит от двух до четырёх минут.
4. Случайная величина T – время работы радиолампы имеет показательное распределение. Среднее время работы радиолампы 400 часов. Записать функции распределения и плотности распределения. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов.
5. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 нм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением $\sigma=5$ нм. Считая, что X имеет нормальное распределение: а) записать функцию плотности случайной величины X; б) выяснить, сколько процентов годных деталей изготавливает автомат; в) определить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ 2.1–2.2

1. Соответствие характеристик с.в. их определениям:

1)	Математическое ожидание	a)	значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность;
2)	Дисперсия	b)	взвешенное среднее всех возможных значений X, в которых в качестве весов выступают соответствующие вероятности;
3)	Медиана	c)	математическое ожидание квадратов отклонений значений X от их среднего;
		d)	средневероятное значение случайной величины.

2. Соответствие характеристик ДСВ определяющим их формулам:

1)	Математическое ожидание	a)	$\sum_i (x_i - MX)^2 p_i;$
2)	Дисперсия	b)	$\sum_i x_i p_i;$
3)	Медиана	c)	$P(X < x_\delta) = \delta;$
		d)	$P(X > x_{мед.}) = P(X < x_{мед.}) = 0.5.$

3. Соответствие закона распределения его аналитическому заданию:

1) Биномиальный	a)	$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$
2) Гипергеометрический	b)	$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k};$
3) Пуассона	c)	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1};$
	d)	$P(X = k) = \dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$

4. Соответствие закона распределения случайной величины формуле определяющей её математическое ожидание:

1) $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

2) $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$

3) $P\left(X=k\right)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

4) $P(X=k)=\dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

a) $MX=\dfrac{nK}{N}$

b) $MX=\lambda$

c) $MX=np$

d) $MX=1/p$.

5. Числовыми характеристиками центра диапазона значений с.в. являются:

a) математическое ожидание;
b) медиана;
c) мода;
d) стандартное отклонение.

6. Числовыми характеристиками разброса значений случайной величины являются:

a) дисперсия,
b) стандартное отклонение,
c) математическое ожидание.

7. При увеличении всех значений случайной величины в ***a*** раз, её математическое ожидание:

a) не изменится;
b) увеличится в a раз;
c) увеличится в a^2 раз.

8. При увеличении всех значений случайной величины на ***a*** единиц, её математическое ожидание:

a) не изменится;
b) увеличится на a единиц;
c) уменьшится на a единиц.

9. При увеличении всех значений случайной величины в ***a*** раз, её дисперсия:

a) не изменится; b) увеличится в a раз;
c) увеличится в a^2 раз.

10. При увеличении всех значений случайной величины на ***a*** единиц, её дисперсия:

a) увеличится на a единиц ;
b) увеличится на a^2 единиц;
c) не изменится.

11. Соответствие между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом _______ случайной величины.

12. Функция, задающая вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(-\infty, x)$, называется функцией _______ случайной величины.

13. Неотрицательная функция $f(x)$, через которую выражается функция распределения $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, называется функцией _______ распределения.

14. Свойствами функции распределения являются:

a) $0 \le F(x) \le 1$

b) $-\infty < F(x) < \infty$

c) функция $F(x)$ неубывающая

d) функция $F(x)$ возрастающая

e) $F(x_0+0)-F(x_0)=P(X=x_0)$.

15. Свойствами функции плотности не являются:

a) $f(x)<0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

c) $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$

d) $\int F(x)dx = f(x)$

e) $P(a \le X < b)=\int_a^b f(x)dx$.

16. Соответствие характеристик н.с.в. выражениям (или формулам), их определяющим:

1)	Математическое ожидание	a)	$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x-MX\right)^2 f(x)dx$
2)	Медиана	b)	$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
3)	Дисперсия	c)	$\int_{-\infty}^{x_\delta} f(x)dx=\delta$
4)	Квантиль уровня 1/2	d)	$\int_{-\infty}^{x_{me}} f(x)dx=0.5$.

17. Соответствие (закона) распределения его аналитическому выражению (плотности распределения):

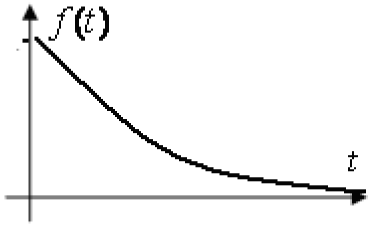
1)	Равномерное	a)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
2)	Показательное	b)	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$
3)	Нормальное	c)	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0. \end{cases}$

18. Соответствие закона распределения случайной величины её математическому ожиданию:

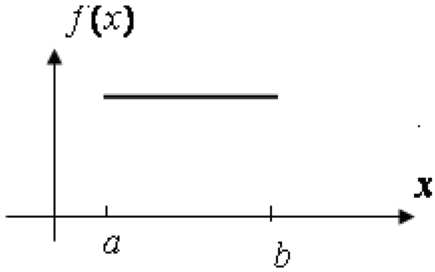
1)	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$	a)	$MX = \alpha$
2)	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0. \end{cases}$	b)	$MX = \frac{a+b}{2}$
3)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$	c)	$MX = a.$

19. Соответствие функции плотности распределения с.в. её графику:

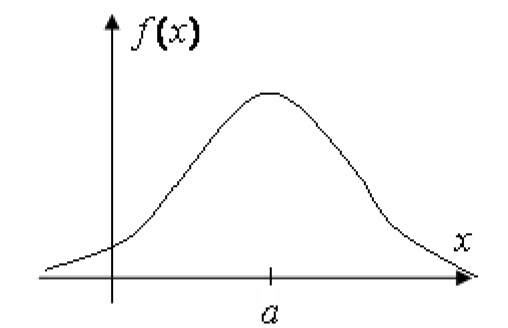
1) $$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

a) 

2) $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

b) 

3) $$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

c) 

Контрольные вопросы к теме 2.1 (д.с.в.)

1. Что называется случайной величиной (с.в.)?
2. Какие события могут происходить со случайной величиной?
3. Что представляет собой закон распределения с.в.?
4. Что такое функция распределения с.в. и какие её свойства?
5. Что отличает дискретные с.в. от непрерывных?
6. Как называются и как выглядят основные виды законов д.с.в.?
7. Что представляют собой параметры распределения?
8. Что определяют основные числовые характеристики?
9. Чем параметры отличаются от числовых характеристик?
10. Как определяются основные числовые характеристики д.с.в.?
11. Что представляет собой биномиальный закон распределения и как его числовые характеристики выражаются через параметры?

Контрольные вопросы к теме 2.2 (н.с.в.)

1. Что такое функция плотности для н.с.в., и какие она имеет свойства?
2. Какой геометрический смысл вероятности на «языке» функции распределения и функции плотности?
3. По каким формулам определяются числовые характеристики законов распределения н.с.в?
4. Как выглядят функции распределения и функции плотности для равномерного, показательного и нормального распределений?
5. Что называется «гауссовой кривой» и что она собой определяет?
6. Как выглядит функция Лапласа (выражение и график) и какие она имеет свойства?
7. В чём состоит правило 3-х сигм?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: Высшее образование, 2006. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Москва : Высшее образование, 2007. – 404 с.
3. Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А. Е. Ефимова. – Москва: Наука, 1990. – 431 с.
4. Малыхин В. И. Математика в экономике: учеб. пособие. – Москва: ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва: Высшая школа, 2000. – 480 с.
6. Вся высшая математика. Т. 5 / М. Л. Краснов [и др.]. – Москва, 2001. – 294 с.
7. Андронов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика / А. М. Андронов [и др.]. – Москва: Питер, 2004. – 460 с.

ТАБЛИЦЫ

Таблица 1.

Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	Десятые доли x									
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020

Таблица 2.

Значение функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0365
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3464	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508	0,3533	0,3554	0,3577	0,3599	0,2621
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3980	0,3997	0,4015
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,8908	0,4812	0,4817
2,2	0,4860	0,4864	0,4867	0,4871	0,4874	0,4877	0,4880	0,4883	0,4886	0,4889
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4926	0,4928	0,4930	0,4932	0,4934	0,4936
2,6	0,4953	0,4954	0,4956	0,4954	0,4958	0,4959	0,4960	0,4962	0,4963	0,4964
2,8	0,4974	0,4975	0,4975	0,4976	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980
3,0	0,4886	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989

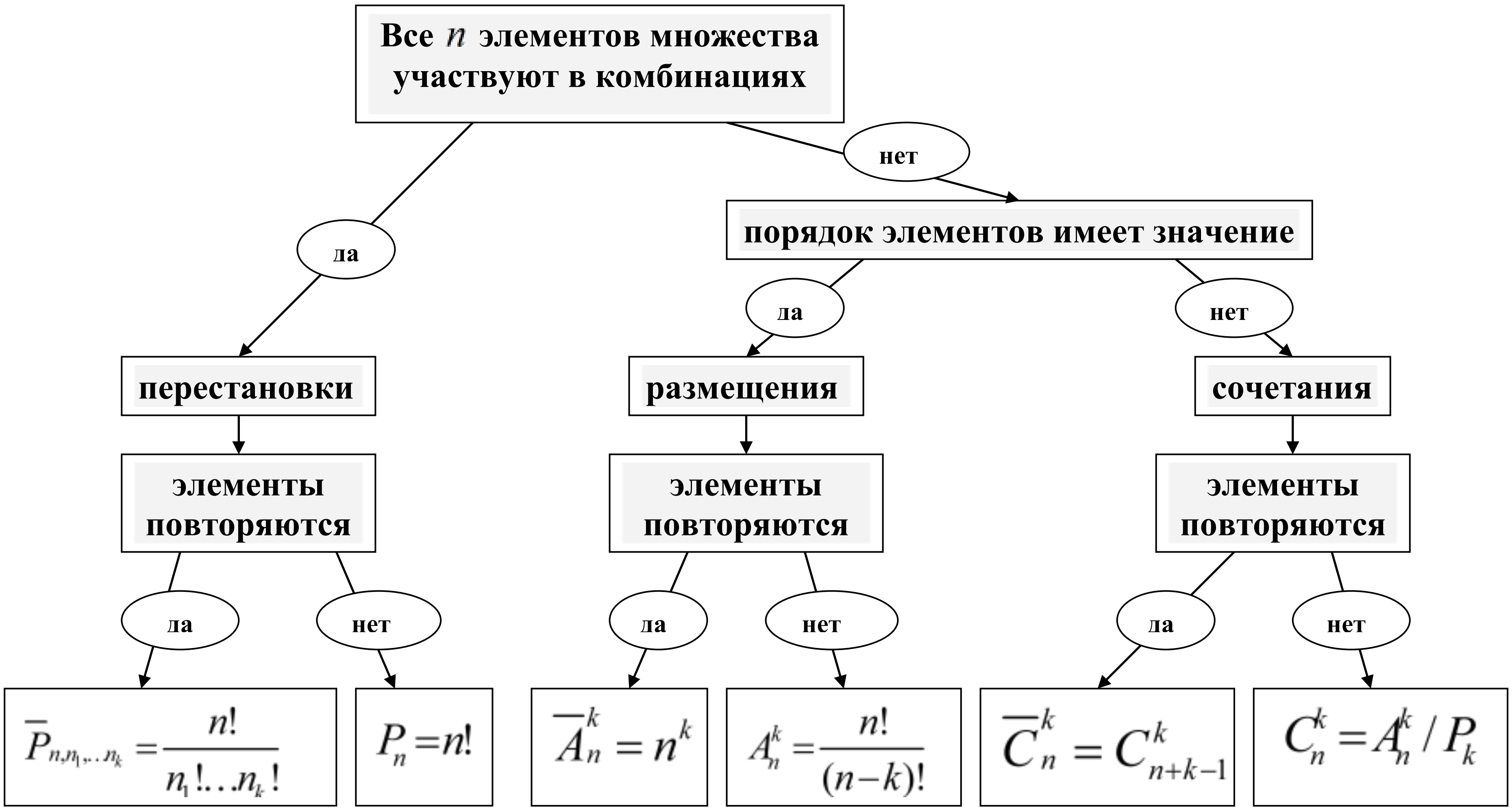


Таблица 3.

Блок-схема: выбор подходящей комбинаторной формулы

Таблица 4.

Дискретные законы распределения

ВИД (НАЗВАНИЕ) ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	*ДИАПАЗОН ЗНАЧЕНИЙ С.В. X*	*ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ* $p_k = P(X = k)$	*ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*	*СВЯЗЬ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПАРАМЕТРАМИ*
Бернулли	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q$	$p \quad (q=1-p)$	$MX = p$ $DX = pq$
Биномиальное	$\{0,1,2,\ldots,n\}$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$n,\ p \quad (q=1-p)$	$MX = np$ $DX = npq$
Пуассона	$\{0,1,2,3,\ldots,n,...\}$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	$MX = \lambda$ $DX = \lambda$
Геометрическое	$\{0,1,2,3,\ldots,n,...\}$	pq^k	$p \quad (q=1-p)$	$MX = q/p$ $DX = q/p^2$
Геометрическое +1	$\{1,2,3,\ldots,n,...\}$	pq^{k-1}	$p \quad (q=1-p)$	$MX = 1/p$ $DX = q/p^2$
Гипергеометри-ческое	от $\max\{0,\ \|N-K-n\|\}$ до $\min\{n,K\}$	$\dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$	n, N, K	$MX = \dfrac{nK}{N}$, $DX = \dfrac{nK}{N-1}\left(1-\dfrac{K}{N}\right)\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$

Таблица 5.

Непрерывные законы распределения

ВИД ЗАКОНА	ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ F(x)	ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $F(x)$	ПАРАМЕТРЫ, ОБОЗНАЧЕНИЕ	ИНТЕРВАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	СВЯЗЬ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПАРАМЕТРАМИ
Равномерный	$\begin{cases} 0, \; x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, \; a \le x \le b \\ 0, \; x > b \end{cases}$	$\begin{cases} 0, \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \; a \le x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}$	$R[a, b]$	$\dfrac{x_2 - x_1}{b-a}$	$MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Показательный	$\begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \ge 0 \end{cases}$	$E(\alpha)$	$e^{-\alpha x_1} - e^{-\alpha x_2}$	$MX = \dfrac{1}{\alpha}$, $DX = \dfrac{1}{\alpha^2}$
Нормальный	$\dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$	$\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$	$N(a, \sigma)$	$\Phi\left(\dfrac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_1-a}{\sigma}\right)$	$MX = a$, $DX = \sigma^2$
Стандартный нормальный	$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$	$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$	$N(0,1)$	$\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$	$MX = 0$, $DX = 1$