Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет»

.

МАТЕМАТИКА
Интегралы
Дифференциальные уравнения
Аналитическая геометрия

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления 120700.62 в качестве учебного пособия

Кемерово 2012

Рецензенты:

Фадеев Ю. А., профессор кафедры математики

Трубчанинов А. Д., председатель УМК направления 120700.62 «Землеустройство и кадастр»

Золотарева Эрна Францевна. Математика. Интегралы. дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия. [Электронный ресурс]. Для студентов направлений 120700.62 «Землеустройство и кадастр» и 280700.62 «Техносферная безопасность». / Э. Ф. Золотарева. – Электрон. дан. – Кемерово: ГУ КузГТУ, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) ; зв. ; цв.; 12 см. – Систем. требования : Pentium IV; ОЗУ 3 Мб; Windows 95; (CD-ROM-дисковод); мышь. - Загл. с экрана.

Данное издание представляет собой электронное учебное пособие, включающее разделы, читаемые во втором семестре курса математики: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия. В этой части курса рассматриваются: понятия неопределенного интеграла, определенного интеграла, некоторые геометрические приложения определенного интеграла, простейшие типы дифференциальных уравнений, основные понятия векторной алгебры и геометрии. Пособие содержит примеры и графики, иллюстрирующее теоретический материал.

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Математика» для студентов направлений 120700.62 и 280700.62.

Оглавление

Раздел 1. Интегральное исчисление функции одной переменной

Тема 1. Неопределенный интеграл

1.1. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке интервала (a,b) $F'(x) = f(x)$.

Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на бесконечной прямой $(-\infty,\infty)$ и на бесконечных полупрямых $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.

Примеры. Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на бесконечной прямой, так как $(\sin x)' = \cos x$. Функция $F(x)=\ln x$ является первообразной для функции $f(x)=1/x$ на полупрямой $(0,\infty)$, так как $(\ln x)' = 1/x$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то и функция $F(x)+C$ также является первообразной для той же функции $f(x)$. Действительно, $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - любые две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то всюду на этом интервале $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C - некоторая постоянная. Иными словами, любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на константу.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то функция $\Phi(x)$ также дифференцируема на интервале (a,b), и $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)= f(x)-f(x)=0$, а, следовательно, $\Phi(x)=const$, и $F_1(x)-F_2(x)= const$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$ на интервале (a,b), то любая первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a,b) имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C - некоторая постоянная.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx-$ подынтегральным выражением, $f(x)-$подынтегральной функцией.

Если $F(x)-$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то в силу следствия из теоремы 1:

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1.1}$$

Примеры. 1. $\int\cos x dx=\sin x+C$ на бесконечной прямой, так как $F(x)=\sin x$ одна из первообразных для функции $f(x)=\cos x$.

2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$, $F(x)=\ln|x|$ - одна из первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Операцию нахождения первообразной для функции $f(x)$ или неопределенного интеграла называют интегрированием функции $f(x)$.

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

$F'(x) = f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1. $(C)' = 0$ 2. $(x)' = 1$	1. $\int 0dx = C$ 2. $\int 1dx = x + C$
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\dfrac{(x^{\alpha+1})'}{(\alpha+1)} = x^\alpha$	3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$	4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
5. $(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x$ $0 < a \neq 1$	5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C$
6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $(-\cos x)' = \sin x$	7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$
9. $(-\mathrm{ctg}x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x} = (1 + \mathrm{ctg}^2 x)$	9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \mathrm{ctg}^2 x)dx = -\mathrm{ctg}x + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$
10. $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (-1 < x < 1)$
11. $(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = (-\mathrm{arc\,ctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.	11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C \\ -\mathrm{arcctg}x + C \end{cases}$
	12. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
	13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 \pm x^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{1 \pm x^2}\right\rvert + C$

Каждая формула этой таблицы, устанавливающая, что та или иная функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$, приводит нас к соответствующей формуле интегрального исчисления $\int f(x)dx = F(x) + C$.

1.3. Свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство. 1. Возьмем дифференциал от обеих частей формулы (1.1) $d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Интегрируя, получим $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где $A = const.$

Для доказательства свойства 3 достаточно показать, что, если функции $F(x)$ и $G(x)$ есть первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$, то функция $F(x) \pm G(x)$ есть первообразная для функции $f(x) \pm g(x)$.

Рассмотрим $[F(x) \pm G(x)]' = [F(x)]' \pm [G(x)]' = f(x) \pm g(x)$.

Для доказательства свойства 4 нужно показать, что функция $AF(x)$ есть первообразная для функции $Af(x)$. Действительно, $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$.

1.4. Методы интегрирования

1. Замена переменной под знаком интеграла.

Рассмотрим интеграл $\int f(x)dx$. В ряде случаев, когда этот интеграл не табличный и ***подынтегральная функция может быть представлена в виде произведения некоторой сложной функции*** $g[\varphi(x)]$ ***и производной аргумента этой сложной функции,*** т.е. когда $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$, удобно выбрать в качестве новой переменной функцию $t = \varphi(x)$. Тогда $dt = \varphi'(x)dx$ и

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G[\varphi(x)] + C \qquad (1.2)$$

При этом предполагается, что интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$ легко вычисляется. Этот прием интегрирования называется ***интегрированием путем замены переменной***. Конечно, он применим не ко всякому интегралу.

Примеры.

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \left\langle \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right\rangle = \int e^t dt + C = e^{\sin x} + C$$

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\langle \begin{matrix} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right\rangle = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\langle \begin{matrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Интеграл $\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ можно представить в виде $\int g[\varphi(x)]\,d\varphi(x) = G[\varphi(x)] + C$. Такой прием называется ***подведением под знак дифференциала***. Можно найти этот интеграл, не вводя новой переменной. Например,

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\langle xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = -\frac{1}{2}d(1-x^2) \right\rangle = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Здесь мы ввели под знак дифференциала $-x$, а затем прибавили 1 (мы можем это сделать, так как дифференциал константы равен нулю) с тем, чтобы под знаком дифференциала получить выражение $1-x^2$, являющееся аргументом сложной функции $(1-x^2)^{-1/2}$

Рассмотрим случай, когда сложная функция под знаком интеграла представляет собой функцию линейного аргумента $ax+b$.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (1.3)$$

Примеры. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C,\quad x\neq a$$
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{1}{a^2}\frac{dx}{1+x^2/a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{1}{a}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2/a^2}}=\int\frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\,.$$

2. Интегрирование по частям.

В ряде случаев, когда интеграл не табличный, и подынтегральное выражение можно представить в виде произведения некоторой функции u и дифференциала другой функции v, удобно свести его к вычислению другого интеграла, табличного или интеграла, который легко вычисляется.

Рассмотрим дифференциал произведения двух функций
$$d[u(x)v(x)]=u'(x)v(x)dx+u(x)v'(x)dx\,,$$
откуда
$$u(x)v'(x)dx=d[u(x)v(x)]-v(x)u'(x)dx$$
Интегрируя обе части и используя свойство 1 интеграла, получим формулу
$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \quad \text{или} \quad \int udv=uv-\int vdu \qquad (1.4)$$

Эта формула сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$. В ряде конкретных случаев этот интеграл без труда вычисляется. Этот прием называется методом интегрирования по частям. Он используется в основном в двух частных случаях.

1). Подынтегральная функция содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$. При использовании формулы (1.4) следует взять в качестве $u(x)$ одну из указанных выше функций.

2). Интегралы вида $\int(ax+b)^n\sin\beta x dx$, $\int(ax+b)^n\cos\beta x dx$, $\int(ax+b)^n e^{\beta x}dx$, подынтегральная функция которых равна ***произведению степенной и тригонометрической или показательной функции***. Эти интегралы берутся путем $n-$кратного применения формулы интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ следует брать степенную функцию $(ax+b)^n$. После каждого интегрирования по частям степень n понижается на единицу.

Примеры.
$$\int x^2\ln x dx=\left\langle\begin{array}{l|l} u=\ln x & du=dx/x \\ dv=x^2dx & v=x^3/3\end{array}\right\rangle=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{3}+C$$
$$\int x\operatorname{arctg}x\,dx=\left\langle\begin{array}{l|l} u=\operatorname{arctg}x & du=\dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv=xdx & v=x^2/2\end{array}\right\rangle=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}x-x+\operatorname{arctg}x)+C$$
$$\int x^2\cos 2x\,dx=\left\langle\begin{array}{l|l} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos 2x\,dx & v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right\rangle=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx=$$
$$=\left\langle\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\sin 2x\,dx & v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right\rangle=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$\int xe^{2x}dx=\left\langle \begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=e^{2x}\,dx & v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\rangle=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

Рассмотрим примеры, которые не входят в описанную классификацию, но подынтегральное выражение может быть представлено в виде произведения некоторой функции u и дифференциала другой функции v, и при этом интеграл $\int vdu$ оказывается либо табличным, либо легко берется другим путем.

$$\int\frac{xdx}{\cos^2 x}=\left\langle \begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} & v=\mathrm{tg}x \end{array}\right\rangle=x\,\mathrm{tg}x-\int\mathrm{tg}x\,dx=x\mathrm{tg}x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=$$

$$=x\,\mathrm{tg}x+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=x\,\mathrm{tg}x+\ln(\cos x)+C.$$

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\left\langle \begin{array}{l|l} u=\sqrt{1+x^2} & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{array}\right\rangle=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\left\langle\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\rangle=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Мы получили рекуррентную формулу для интеграла $\int\sqrt{1+x^2}dx$. Перенося слагаемое с ним в левую часть и, учитывая, что $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$, получим

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}-\ln(x+\sqrt{1+x^2}))+C \qquad (1.5)$$

Этот же интеграл можно взять иначе: с помощью стандартной подстановки $x=\mathrm{tg}t$.

Тема 2. Определенный интеграл

2.1. Интегральные суммы. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a,b]$. Разобьем сегмент $[a,b]$ точками $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ на n частичных сегментов $[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n = b]$. На каждом сегменте шириной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку ξ_i.

Определение 1. Число $I_n(x_i, \xi_i) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению сегмента $[a,b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометрический смысл интегральной суммы.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник высотой $f(\xi_i)$ (рис. 2.1). Площадь каждого такого прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. ***Интегральная сумма*** $I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ равна сумме площадей построенных прямоугольников, или площади полученной ступенчатой фигуры. Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения на частичные сегменты и выбора точек ξ_i.

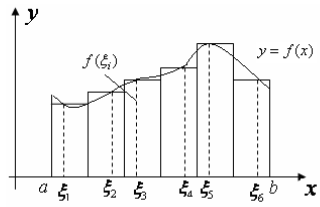

Рис.2.1

Определение 2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на сегменте $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta = \max\Delta x_i \to 0$ для любого разбиения T сегмента $[a,b]$ независимо от выбора точек ξ_i. Указанный предел I называется ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по сегменту*** $[a,b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x)dx$.

Таким образом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2.1)$$

Пример. Покажем, что функция $f(x) = c$ интегрируема на любом сегменте $[a,b]$. $I(x_i, \xi_i) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + ... + c\Delta x_n = c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = c(b - a)$. Поэтому

$$I = \int_a^b cdx = \lim_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = c(b-a) \qquad \int_a^b cdx = c(b-a)$$

Геометрический смысл определенного интеграла. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции $f(x)$, осью абсцисс и ординатами точек a и b.

2.2. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Эта формула рассматривается как распространение понятия определенного интеграла на сегмент нулевой длины.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Эта формула есть распространение понятия определенного интеграла на случай, когда сегмент $[a,b]$ при $a<b$ пробегается в направлении от b к a. В этом случае в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ отрицательны.

3. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Это свойство очевидно, если $a<c<b$, но оно верно и в случае, когда точка c лежит вне сегмента $[a,b]$.

2.3. Основная формула интегрального исчисления. Методы интегрирования

Без доказательства запишем формулу для вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (2.2)$$

Эта формула называется основной формулой интегрального исчисления или формулой Ньютона – Лейбница. Из нее следует, что ***для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ нужно составить разность значений любой ее первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.***

Таким образом, задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче нахождения первообразной функции. Формулу $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ иногда записывают в другом виде. Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ обозначают $\Phi(x)\Big|_a^b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Примеры. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$, $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$.

Основные правила интегрирования.

При вычислении определенного интеграла используются те же приемы, которые мы использовали для неопределенного интеграла.

1. **Замена переменной под знаком определенного интеграла.**

Примеры. 1. $\int\limits_1^2 \ln x \frac{dx}{x} = \left\langle \begin{matrix} \ln x = t,\ x = e^t \\ dx = e^t dt \end{matrix} \left| \begin{matrix} t = 0,\ x = 1 \\ t = \ln 2,\ x = 2 \end{matrix} \right. \right\rangle = \int\limits_0^{\ln 2} t dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln^2 2$.

2. $\int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \left\langle \begin{matrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi^2}{4} \\ t = \pi,\ x = \pi^2 \end{matrix} \right. \right\rangle = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t dt = -2\cos t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -2(-1-0) = 2$.

Замечание. При вычислении определенного интеграла путем замены переменной, необходимо вычислить пределы интегрирования для новой переменной. Здесь также можно использовать подведение под знак дифференциала. В этом случае пределы остаются прежними.

2. Формула интегрирования по частям.

$$\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (2.3)$$

Примеры. $\int_1^2 xe^x dx = \left\langle \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\rangle = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2$.

$$\int_0^1 \text{arctg}x\, dx = \left\langle \begin{array}{l|l} u = \text{arctg}x & du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\rangle = x\,\text{arctg}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = [x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2}$$

2.4. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a,b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, ординатами точек a и b, и отрезком оси абсцисс между точками a и b (рис.2.2). Площадь P криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

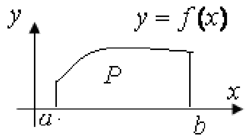

Рис. 2.2

$$P = \int_a^b f(x)dx \qquad (2.4)$$

Эта формула следует из определения определенного интеграла, как предела интегральных сумм функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ при $\Delta \to 0$.

Если функция $f(x)$ не положительна на сегменте $[a,b]$, то значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равно взятой с противоположным знаком площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $f(x)$, ординатами точек a, b и отрезком оси Ox между точками a и b (рис.2.3). Поэтому, если $f(x)$ меняет знак на сегменте $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен сумме, взятых с определенным знаком площадей криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox, причем площади первых берутся со знаком +, а вторых со знаком –. Для того чтобы получить сумму площадей, нужно вычислить интеграл

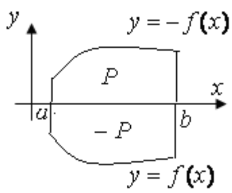

Рис. 2.3

$$P = \int_a^b |f(x)| dx \qquad (2.5)$$

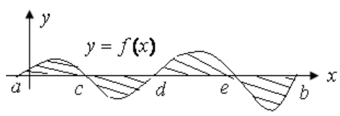

Рис.2.4

Например, сумма заштрихованных на рисунке 2.4 площадей равна

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx - \int_e^b f(x)dx.$$

Площадь между двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и ординатами точек a и b в случае, если одна кривая лежит над другой и обе кривые лежат выше оси абсцисс, т.е. $f(x) \ge g(x) \ge 0$ (рис.2.5), определяется интегралом

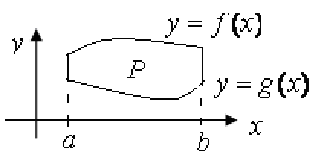

Рис. 2.5

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \qquad (2.6)$$

Действительно, площадь P может быть представлена в этом случае, как разность площадей $P_1 - P_2$, где $P_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$, $P_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$. Учитывая свойство 3 определенного интеграла, получим формулу (2.6).

Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$ (рис.2.6).

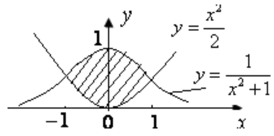

Рис. 2.6

Точки пересечения кривых найдем из уравнения $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2}$ или $x^4 + x^2 - 2 = 0$, откуда $a = -1,\ b = 1$. По формуле (2.6)

$$P = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \pi - \frac{1}{3}$$

Если кривые переплетаются так, что одна кривая лежит частью ниже, частью выше другой, то сумма площадей, лежащих между ними и ординатами точек a и b, равна

$$P = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|dx. \qquad (2.7)$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана на сегменте $[a,b]$, при этом $f(a) = c$, $f(b) = d$. Иногда, как, например, в случае, показанном на рисунке 2.7, при нахождении площади удобно воспользоваться функцией, обратной $f(x)$. Площадь в этом случае определяется формулой

$$P = \int\limits_c^d (f^{-1}(y) - a)dy \qquad (2.8)$$

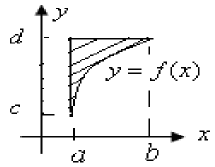

Рис. 2.7

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$, осью ординат и прямой $y = \pi/2$ (рис. 2,8).

По формуле (2.6) эта площадь равна $P = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)dx$. Согласно формуле (2.8) эта же площадь равна $P = \int\limits_0^{\pi/2} \sin y dy = -\cos y\Big|_0^{\pi/2} = 1$. Второй интеграл табличный, в то время как интеграл от функции $\arcsin x$ нужно вычислять по частям.

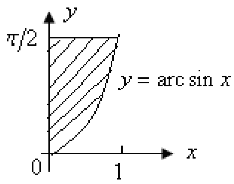

Рис. 2.8

Если плоская фигура ограничена простой замкнутой кривой (не имеющей точек самопересечения), заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ и обход ее границы совершается против хода часовой стрелки при изменении параметра t от α до β, площадь ее может быть вычислена по одной из формул

$$P = -\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (2.9)$$

$$P = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\psi'(t)dt. \qquad (2.10)$$

и с противоположным знаком, если обход границы совершается по часовой стрелке.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс (рис. 2.9).

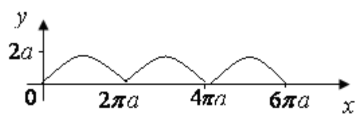

Рис. 2.9

Воспользуемся формулой (2.9) со знаком «плюс», так как обход кривой при изменении t от 0 до 2π происходит по часовой стрелке. Эти значения находим из условия $y=0$ или $\cos t=1$, откуда $\alpha=0,\ \beta=2\pi$. $\varphi'(t)=x'=a(t-\sin t)'=a(1-\cos t)$. Тогда

$$P=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Объем тела вращения

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, ординатами точек a, b и отрезком оси Ox между точками a и b может быть найден по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2.11)$$

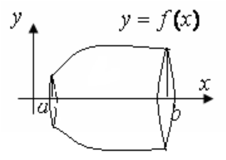

Рис. 2.10

Пример 1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox синусоиды $y=\sin x$ на сегменте $[0,\pi]$ (рис. 2.11).

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

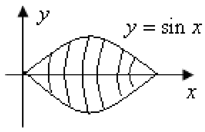

Рис. 2.11

Пример 2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, осью ординат и прямой $y=4$ (рис. 2,12).

Поскольку вращение криволинейной трапеции происходит вокруг оси Oy, воспользуемся формулой

$$V=\pi\int_c^d (f^{-1}(y))^2dy \qquad (2.12)$$

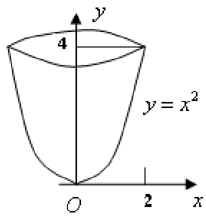

Рис. 2.12

где $c=f(a)$, $d=f(b)$. Функция, обратная $y=x^2$: $x=\sqrt{y}$, $c=0$, $d=4$.

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^4 ydy=\frac{\pi y^2}{2}\Bigg|_0^4=8\pi.$$

3. Площадь поверхности

Площадь поверхности П тела, образованного вращением вокруг оси Ox графика функции $y=f(x)$, заданной на сегменте $[a,b]$ определяется формулой

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (2.13)$$

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси абсцисс (рис. 2.11).

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=-2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos x)=$$

$$=\left\langle \cos x=t\,\middle|\,\begin{matrix}x=0,t=1\\ x=\pi,t=-1\end{matrix}\right\rangle=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi[t\sqrt{1+t^2}-\ln(t+\sqrt{1+t^2})]\Big|_{-1}^1=$$

$$= 2\pi[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)] = 2\pi\left(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Здесь мы воспользовались результатом интегрирования (1.5).

4. Длина дуги кривой

Если кривая L задана параметрически, то есть координаты произвольной точки кривой заданы как функции переменной t (параметра): $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$, длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad \text{или} \qquad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \tag{2.14}$$

Если кривая L является графиком функции $y=f(x)$, имеющей на сегменте $[a,b]$ непрерывную производную, то длина дуги может быть вычислена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad \text{или} \qquad l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{2.15}$$

Примеры. 1. Найти длину линии $y=\ln(1-x^2)$ от $x_1=0$ до $x_2=1/2$.

Областью определения функции является интервал $(-1,1)$, так как аргумент логарифма $1-x^2>0$. Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (2.15).

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}. \quad 1+y'^2(x) = 1+\frac{4x^2}{1-2x+x^2} = \frac{1+2x+x^2}{1-2x+x^2} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}, \quad \sqrt{1+y'^2(x)} = \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

В области определения функции $y=\ln(1-x^2)$ получим $\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1+x}{1-x}$. Тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x}{1-x}\,dx = \int_0^{1/2}\left(\frac{2}{1-x}-1\right)dx = -2\ln|1-x|\Big|_0^{1/2} - x\Big|_0^{1/2} = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \ln 4 - \frac{1}{2}.$$

2. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Воспользуемся формулой (2.14). $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$, $x'^2(t)+y'^2(t) = a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t) = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2(t/2)$.

Согласно формуле (2.16) длина одной арки циклоиды (рис. 2.9)

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\ t/2\ \ dt = -4a\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi a$$

Раздел 2. Дифференциальные уравнения

Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы уравнений

3.1. Дифференциальные уравнения 1 порядка. Общие понятия

Уравнения, которые кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержат производные этих функций или их дифференциалы называются дифференциальными уравнениями.

Примеры. 1) $\frac{dx}{dt} = -kx$ - уравнение радиоактивного распада (k - постоянная распада, x - количество неразложившегося вещества в момент времени t), скорость распада $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству распадающегося вещества.

2) $m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ - уравнение движения материальной точки массой m под действием силы F, зависящей от времени, положения точки x и ее скорости $\frac{dx}{dt}$, известное, как второй закон Ньютона.

Пусть x - независимая переменная, а y - искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 . \tag{3.1}$$

Наивысший порядок n производных неизвестной функции называется ***порядком дифференциального уравнения.***

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием*** дифференциального уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{3.2}$$

Разрешив его относительно y', получим

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) . \tag{3.3}$$

Если некоторая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.3), т.е. это уравнение обращается в тождество относительно x при замене y и y' на $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, то функция $y = \varphi(x)$ называется решением этого дифференциального уравнения.

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (3.3) не содержит переменную y, получается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{3.4}$$

и множество его решений задается формулой

$$y = \int f(x)dx + c \tag{3.5}$$

где c - произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (3.4) имеет бесконечное множество решений, содержащее произвольную постоянную. В общем случае дифференциального уравнения первого порядка мы также будем иметь семейство решений, содержащее произвольную постоянную

$$y = \varphi(x, c) \tag{3.6}$$

Семейство решений (3.6) называется ***общим интегралом*** или ***общим решением*** уравнения. Общий интеграл может выражаться в неявной форме или в форме решения относительно c:

$$\psi(x,y,c)=0 \quad \text{или} \quad c=\upsilon(x,y) \tag{3.7}$$

Придавая произвольной постоянной c различные числовые значения, будем получать различные решения уравнения, так называемые *частные решения* уравнения.

Геометрическая интерпретация. Если рассматривать x и y как координаты точек плоскости, то дифференциальное уравнение (3.3) $y'=f(x,y)$ определяет в каждой точке (x,y), где определена функция $f(x,y)$, угловой коэффициент касательной y' к некоторой линии. Искомое решение (3.6) есть такая кривая, которая в каждой своей точке имеет угловой коэффициент касательной y', определяемый равенством (3.3). Такая кривая называется ***интегральной кривой*** дифференциального уравнения. Общий интеграл (3.3) дает бесчисленное множество интегральных кривых или семейство кривых, зависящее от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение (3.3) $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)} \tag{3.8}$$

Если оба уравнения имеют смысл, то они эквивалентны, так как, если функция $y=\varphi(x)$ является решением уравнения (3.3), то обратная ей функция $x=\varphi^{-1}(y)$ является решением уравнения (3.8) и, следовательно, уравнения (3.3) и (3.8) имеют общие интегральные кривые. Если же в некоторых точках одно из уравнений теряет смысл, то в таких точках естественно заменить одно уравнение другим.

3.2. Определение решения по начальному условию

Дифференциальное уравнение (3.3) имеет бесконечное множество решений. Мы получим вполне определенное решение, если зададим ***начальное условие***, а именно, потребуем, чтобы искомая функция y принимала заданное значение y_0 при заданном значении $x=x_0$. Это начальное условие можно записать в виде

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \quad \text{или} \quad y(x_0)=y_0 \tag{3.6}$$

Тогда константа c найдется из условия

$$y_0=\varphi(x_0,c) \text{ или } \psi(x_0,y_0,c)=0\,.$$

Пример. Найти частное решение уравнения $y'=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=e^x$, откуда $dy=e^x dx$, $y=e^x+c$ - общее решение. Подставив в это решение начальное условие, получим $1=e^0+c$, откуда $c=0$. Решение, соответствующее заданному начальному условию $y=e^x$.

3.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Предположим, что правая часть уравнения (3.3) $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ есть произведение функции переменной x и функции переменной y

$$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y) \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) называется уравнением с разделяющимися переменными. Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Последнее равенство есть равенство двух дифференциалов, откуда следует, что их интегралы отличаются лишь постоянным слагаемым

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c \tag{3.10}$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим решение $\psi(x, y, c) = 0$, как неявную функцию x. Выразив отсюда y, получим решение в явном виде $y = \varphi(x, c)$.

Решение $y = \varphi(x, c)$ содержит произвольную константу c, поэтому мы получаем бесконечное число решений. Придавая c произвольные значения, получим частные решения дифференциального уравнения. Множество частных решений составляют общее решение уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2+1}{xy}$.

Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{xy}$ или $\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя обе части, получим решение в неявном виде $\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln|x| + c$ или $\sqrt{y^2+1} = cx$, где $c-$ константа интегрирования. Выразив y, запишем решение в явном виде $y = \pm\sqrt{cx-1}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} y}$.

Разделив переменные, получим уравнение $\operatorname{tg} y\, dy = \sin x\, dx$. Интегрируя обе части уравнения, получим общее решение $\ln|\cos y| = \cos x + c$, откуда $\cos y = e^{\cos x + c}$. или $y = \arccos(ce^{\cos x})$.

Мы рассмотрели здесь только простейший тип дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения с разделяющимися переменными. Все остальные типы дифференциальных уравнений (однородные, линейные и другие), сначала с помощью стандартных подстановок сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, а затем интегрируются.

Пример 3. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $10\,км/ч$. На полном ходу ее мотор был выключен. Через 20 секунд скорость лодки уменьшилась до $6\,км/ч$. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки прямо пропорциональна ее скорости, определить скорость лодки через две минуты после остановки мотора.

<u>Начальное условие</u>: в момент времени $t = 0$ скорость лодки равна $10\,км/ч$. Учитывая, что на лодку действует только сила сопротивления воды, запишем уравнение движения лодки (второй закон Ньютона) в виде: $m\frac{dv}{dt} = -kv$, где $m-$ масса лодки, $k-$ коэффициент пропорциональности. Разделив переменные, получим уравнение: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$. Интегрируя, получим общее решение в виде $\ln v = -\frac{k}{m}t + c$ или $v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t}$. Подставив в общее решение начальное условие $v_0 = v(t=0) = 10\,км/ч$, получим $c = 10$. Тогда частное решение, соответствующее данному начальному условию, имеет вид $v(t) = 10e^{-\frac{k}{m}t}$. Отношение

$\frac{k}{m}$ найдем из условия: $v(t=20\,сек)=6\,км/ч$. $6=10e^{-\frac{k}{m}20}$, откуда $-\frac{k}{m}=\frac{\ln(0.6)}{20}$. Скорость через две минуты после остановки мотора $v(t=120)=10e^{6\cdot\ln 0.6}\approx 0.5\,км/ч$.

3.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y'+p(x)y=f(x) \qquad (3.11)$$

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\text{, откуда }\quad \frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+c_1, \qquad y=ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3.12)$$

Для интегрирования неоднородного дифференциального уравнения (3.11)

$$y'+p(x)y=f(x)$$

может быть применен ***метод вариации постоянной***. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее однородное уравнение $y'+p(x)y=0$, общее решение которого задается формулой (3.12). Будем искать решение неоднородного уравнения в виде

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

где $c(x)$ - неизвестная функция x. Т.е. по существу мы совершаем замену переменных. Вычисляя производную

$$y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляя y и y' в исходное неоднородное уравнение (3.11), получим уравнение для нахождения $c(x)$

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx}=f(x)e^{\int p(x)dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x)=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1$$

а, следовательно

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}=c_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (3.13)$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения (3.13) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $c_1e^{-\int p(x)dx}$ и частного решения неоднородного уравнения $e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$, получающегося из (3.13) при $c_1=0$.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$.

Соответствующее однородное уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$ есть уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Его решение $\ln|y|=\ln|x|+c$ или $y=cx$, где *c=const*. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y=c(x)\cdot x$. Подставив y и $y'=c'(x)x+c(x)$ в исходное неоднородное уравнение, получим уравнение для $c(x)$: $c'(x)=x$. Интегрируя его, получим $c(x)=\frac{x^2}{2}+c$ и $y=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)x$.

3.5. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Рассмотрим самые простые уравнения более высокого порядка. Порядок уравнения определяется наибольшим порядком производных, входящих в уравнение. Общий вид дифференциального уравнения, например, третьего порядка

$$F(x, y, y', y'', y''')=0$$

Выражая отсюда производную третьего порядка (старшую производную), получим уравнение в виде

$$y'''=f(x, y, y', y'')$$

Рассмотрим случай, когда функция в правой части зависит только от x.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=12x+4$.

Чтобы найти неизвестную функцию y, трижды проинтегрируем уравнение.

$y''=\int y'''dx=\int(12x+4)dx=6x^2+4x+c_1$,

$y'=\int y''dx=\int(6x^2+4x+c_1)dx=2x^3+2x^2+c_1x+c_2$,

$y=\int y'dx=\int(2x^3+2x^2+c_1x+c_2)dx=\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит уже три произвольные постоянные.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $xy''=y'$ при начальных условиях $y(1)=1$, $y'(1)=2$.

Найдем общее решение уравнения. Сведем его к уравнению первого порядка заменой $y'=p$: $xp'=p \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$. Его общее решение $\ln|p|=\ln|x|+c_1$ или $p=c_1x$. Возвращаясь к переменной y, получим уравнение $y'=c_1x$, откуда $y=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$. Подставляя в общее решение начальные условия, получим для c_1, c_2 уравнения: $c_1=2$, $c_1/2+c_2=1$, откуда $c_1=2$, $c_2=0$. Тогда частное решение, соответствующее заданному начальному условию, имеет вид $y=2x^2$.

3.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных. Линейное дифференциальное уравнение $n-го$ порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x) \tag{3.6}$$

Если правая часть $f(x)\equiv 0$, уравнение называется однородным. В противном случае уравнение называется неоднородным. Однородное линейное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (3.7)$$

Запишем его в виде

$$L[y] = 0$$

Свойства решений линейного однородного уравнения.

1. Если y_1 является решением линейного дифференциального уравнения $L[y] = 0$, то и cy_1, где c - произвольная постоянная, является решением того же уравнения.

Действительно, $L[cy_1] = (cy_1)^{(n)} + p_1(cy_1)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(cy_1)' + p_n cy =$

$= c[y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y_1{}' + p_n y_1] = cL[y_1] = 0$

2. Сумма $y_1 + y_2$ решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения.

Действительно,

$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + p_n(y_1 + y_2) =$

$y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_1' + p_n y_1 + y_2^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_2' + p_n y_2 = L[y_1] + L[y_2] = 0$

Следствие свойств 1, 2: линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ решений $y_1, y_2, ..., y_m$ линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения, так как $L[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i]$

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются линейно зависимыми на некотором отрезке изменения $a \le x \le b$, если существуют постоянные величины $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad (3.8)$$

причем хотя бы одно $\alpha_i \ne 0$. Если же тождество (3.8) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y(x)_n$ называются *линейно независимыми* на отрезке $a \le x \le b$.

Пример 1. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на любом отрезке $a \le x \le b$, так как тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n \equiv 0$$

возможно лишь, когда все $\alpha_i = 0$.

Пример 2. Функции $e^{k_1 x},\ e^{k_2 x}, \ldots,\ e^{k_n x}$, где $k_i \ne k_j$, являются линейно независимыми на любом отрезке $a \le x \le b$. Это справедливо и при комплексных k.

Пример 3. Функции $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2 e^{kx}, \ldots, x^n e^{kx}$, где $k_i \ne k_j$, линейно независимы на любом отрезке $a \le x \le b$.

Теорема 1. Общим решением линейного однородного уравнения (3.7) является линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ n линейно независимых частных решений y_i с произвольными коэффициентами.

Следствие. Максимальное число линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения равно его порядку.

Теорема 2. Если линейное однородное уравнение (3.7) имеет комплексное решение $y(x) = u(x) + iv(x)$, то действительная часть этого решения $u(x)$ и его мнимая часть $v(x)$ также являются решениями того же однородного уравнения.

Будем искать решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

в виде $y = e^{kx}$, где k - постоянная. Подставляя $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$,..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ в уравнение (3.7), получим

$$k^n e^{kx} + p_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + p_{n-1} k e^{kx} + p_n e^{kx} = 0$$

Сокращая на необращающийся в нуль множитель e^{kx}, получим так называемое ***характеристическое*** уравнение

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0. \qquad (3.9)$$

Это уравнение определяет те значения k, при которых функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (3.7).

Здесь возможны следующие случаи.

1. Если все корни $k_1, k_2, .., k_n$ характеристического уравнения (3.9) различны, то тем самым найдено n линейно независимых решений $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}, \ldots,$ $e^{k_n x}$ уравнения (3.7) (см. пример 2). Следовательно,

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n\, e^{k_n x},$$

где c_i - произвольные постоянные, является общим решением уравнения (3.7).

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тогда частные решения уравнения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение есть их линейная комбинация $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2. Если среди корней характеристического уравнения (3.9) имеются кратные корни, то число различных решений вида e^{kx} меньше n, и, следовательно, недостающие линейно независимые решения нужно искать в другом виде.

Можно показать, что если характеристическое уравнение имеет корень k_i кратности α_i, то решениями исходного уравнения будет не только $e^{k_l x}$, но и $xe^{k_l x}$, $x^2 e^{k_l x}, \ldots, x^{\alpha_l - 1} e^{k_l x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ имеет корень $k = 1$ кратности 3,. Тогда частные решения уравнения: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$. Общее решение есть их линейная комбинация $y = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$.

3. Если характеристическое уравнение (3.9) имеет комплексные корни, комплексные решения $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$, соответствующие паре сопряженных корней $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$, могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями одного из решений

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) \qquad e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x)$$

Таким образом, паре комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ соответствуют два действительных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' + 4y'' + 5y' = 0$

Характеристическое уравнение $k^3 + 4k^2 + 5k = 0$ имеет один действительный корень $k_1 = 0$ и два комплексных $k_2 = -2 - i$, $k_3 = -2 + i$. Тогда частные решения уравнения: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-2x}\cos x$, $y_3 = e^{-2x}\sin x$. Общее решение есть их линейная комбинация $y = c_1 + c_2 e^{-2x}\cos x + c_3 e^{-2x}\sin x$.

4. Если характеристическое уравнение (3.9) имеет кратные комплексные корни, решениями исходного уравнения кроме $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, будут также решения $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$ (в случае двукратного корня).

Пример. Найти общее решение уравнения $y^{(4)}+2y''+y=0$. Характеристическое уравнение $(k^2+1)^2=0$ имеет двукратные корни $k=\pm i$. Следовательно, общее решение имеет вид $y=(c_1x+c_2)\cos x+(c_3x+c_4)\sin x$.

3.7. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Система n уравнений первого порядка с n неизвестными функциями в разрешенном относительно производных виде

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\frac{dx_2}{dt}=f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dy_n}{dt}=f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Решением системы (3.11) называется совокупность n функций $x_i=\psi_i(t), \quad (i=1,...,n)$, таких, что при подстановке их в уравнения системы (3.11) эти уравнения обращаются в тождества относительно t. Общее решение системы (3.11) представляет собой совокупность всех без исключения частных решений, это есть совокупность функций $x_i=\psi_i(t, c_1, \ldots, c_n), \quad (i=1,...,n)$, содержащих n произвольных постоянных, которые находятся из начальных условий $x_{i0}=\psi_i(t_0), \quad (i=1,...,n)$.

Мы рассмотрим лишь системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+f_i(t), \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где a_{ij} постоянны.

Проще всего система неоднородных или однородных уравнений с постоянными коэффициентами интегрируется путем сведения ее к одному уравнению более высокого порядка, причем это уравнение более высокого порядка будет линейным с постоянными коэффициентами.

Пример. Найти общее решение системы уравнений $\frac{dx}{dt}=x+2y$, $\frac{dy}{dt}=4x+3y$.

Решим эту систему обычным методом подстановки: выразим из первого уравнения неизвестную функцию y: $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ и подставим во второе уравнение системы.

$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=4x+\frac{3}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)$. Приведя подобные, получим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k - 5 = 0$ имеет корни $k_1 = 5$, $k_2 = -1$. Общее решение дифференциального системы $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$, $y = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}$.

Замечание. Здесь мы рассмотрели уравнения, содержащие функцию одной переменной. Уравнения, содержащие функции двух и более переменных и их производные, называются уравнениями в частных производных. Простые типы таких уравнений решаются аналитически. Если дифференциальное уравнение не решается аналитически, используются численные методы решений, например, разностный метод решения.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

Тема 4. Векторная алгебра

4.1. Понятие вектора

Вектором называется ***направленный отрезок***. Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом $\overline{AB}$, где точки A и B обозначают соответственно начало и конец вектора, либо символом $\vec{a}$ или $\vec{b}$. На чертеже вектор обозначается стрелкой, причем букву, обозначающую вектор пишут у его конца (рис. 4.1).

Рис. 4.1

Начало вектора называют ***точкой его приложения.*** Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ приложен в точке A. Для обозначения длины вектора будем пользоваться символом модуля: $\left|\overline{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор называется ***нулевым***, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых (рис. 4.2).

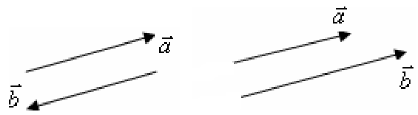

Рис. 4. 2

Два вектора называются ***равными,*** если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными

Три вектора называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

4.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на вещественное число.

Определение 1. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 4.3).

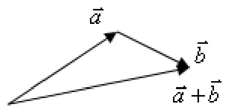

Рис. 4. 3

Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении, называют правилом треугольника, т.к. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{a}+\vec{b}$ образуют треугольник. Сумма векторов обладает теми же свойствами, что и сумма вещественных чисел:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);
3) существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что для любого вектора $\vec{a}$ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4) для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $\vec{a}\,'$, такой что $\vec{a}+\vec{a}\,'=\vec{0}$.

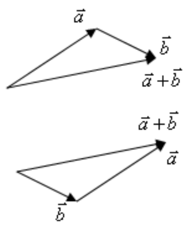

Рис. 4. 4

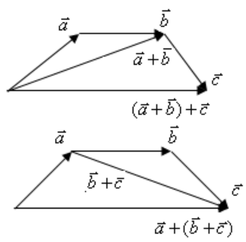

Рис. 4.5

Свойства 1, 2 иллюстрируют рисунки 4.4, 4.5. Из доказательства свойства 1 (рис. 4.4) следует еще одно правило сложения векторов, называемое ***правилом параллелограмма***: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к общему началу, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ этих векторов есть диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах (рис.4.6).

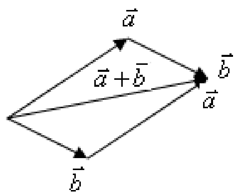

Рис. 4.6

Определение 2. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Из определения 2 и правила треугольника сложения векторов вытекает следующее правило построения разности $\vec{a}-\vec{b}$: разность $\vec{a}-\vec{b}$ приведенных к общему началу векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$ (рис. 4.7).

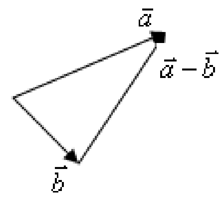

Рис. 4.7

Определение 3. Произведением $\alpha\vec{a}$ или $\vec{a}\alpha$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называют вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha||\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с вектором $\vec{a}$, если $\alpha>0$, и противоположное вектору $\vec{a}$, если $\alpha<0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\vec{a}$ на число α вектор $\vec{a}$ «растягивается» в α раз при $\alpha>1$ и сжимается » в α раз при $0<\alpha<1$, при отрицательном α кроме растяжения и сжатия происходит еще изменение направления вектора на противоположное (рис. 4.8).

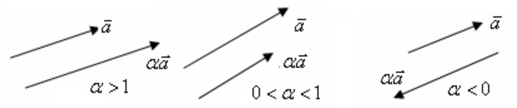

Рис. 4.8

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (распределительное свойство числового множителя относительно суммы векторов;

6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (распределительное свойство вектора относительно суммы чисел);

7) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$ мы можем записать теперь как сумму $\vec{a}+(-1)\vec{b}$.

Свойства 1 – 7 позволяют производить выкладки в векторной алгебре по тем же правилам, по которым производятся аналогичные выкладки в обычной алгебре.

4.3. Проекция вектора на ось и ее свойства

Рассмотрим вектор $\vec{a}=\overline{AB}$ и ось u. Пусть A' и B' - основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B (рис. 4.9).

Определение. **Проекцией вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на ось u называется величина направленного отрезка $\overline{A'B'}$ оси u.**

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось u обозначается символом $np_u\vec{a}$. Обозначим φ - угол между направлением вектора $\vec{a}$ и положительным направлением оси u. Тогда проекция вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на ось u равна

$$np_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi \tag{4.1}$$

Обозначим через υ ось, проходящую через точку A начало вектора $\vec{a}$ и имеющую то же направление, что и ось u. Пусть C - проекция B на ось υ. Угол BAC равен φ, $A'B'=AC$, как длины отрезков, лежащих на параллельных прямых и заключенных между параллельными плоскостями α и β. По определению, $np_u\vec{a}=A'B'=AC=|\overline{AB}|\cos\varphi=|\vec{a}|\cos\varphi$.

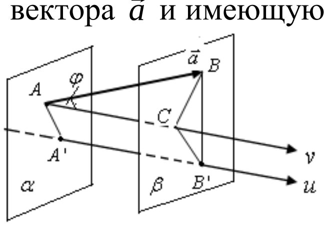

Рис. 4.9

Свойства проекции вектора на ось: при сложении двух векторов $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ их проекции на произвольную ось u складываются; при умножении вектора $\vec{d}_1$ на любое число α проекция этого вектора на произвольную ось u также умножается на число α.

4.4. Понятие базиса. Декартова прямоугольная система координат

Определение 1. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют в пространстве базис, если любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е., если для любого вектора $\vec{d}$ найдутся такие вещественные числа λ, μ и ν, что справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) называют разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа λ, μ и ν - координатами вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами – координатами этих векторов. При сложении двух векторов $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ их координаты (относительно любого базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) складываются. При умножении вектора $\vec{d}_1$ на число α все его координаты умножаются на это число.

Аналогично определяется понятие базиса на некоторой плоскости.

Определение 2. Два лежащих в плоскости π вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют на этой плоскости базис, если любой лежащий в плоскости π вектор $\vec{c}$ может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. найдутся такие вещественные числа λ и μ, что справедливо равенство

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Аффинная система координат в пространстве определяются заданием базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и некоторой точки O, называемой началом координат.

Аффинными координатами любой точки M называются координаты вектора $\overline{OM}$ относительно базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Так как каждый вектор $\overline{OM}$ может быть разложен по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то каждой точке пространства M однозначно соответствует тройка аффинных координат λ, μ, ν.

Декартова прямоугольная система координат является частным случаем аффинной системы координат, отвечающей тройке взаимно ортогональных и единичных базисных векторов. Декартовы базисные векторы обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Обычно направления векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ берут совпадающими с направлениями декартовых осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Из определения базиса следует, что каждый вектор $\vec{d}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. для каждого вектора $\vec{d}$ найдется тройка чисел X, Y и Z такая, что

$$\vec{d} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k} \tag{4.3}$$

Покажем это. Приложим вектор $\vec{d}$ к началу O декартовой системы и проведем из конца вектора $\vec{d}$ три плоскости, параллельные координатным плоскостям Oyz, Oxz, Oxy (рис. 4.10). Точки пересечения этих плоскостей с осями Ox, Oy, Oz обозначим A, B, C. По правилу сложения векторов $\vec{d} = \overline{OD} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Из коллинеарности векторов $\overline{OA}$ и $\vec{i}$, $\overline{OB}$ и $\vec{j}$, $\overline{OC}$ и $\vec{k}$ следует, что найдутся такие числа X, Y и Z, что $\overline{OA} = X\,\vec{i}$, $\overline{OB} = Y\,\vec{j}$, $\overline{OC} = Z\,\vec{k}$ и $\vec{d} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$. Числа X, Y, Z называются декартовыми координатами вектора $\vec{d}$, это записывается с по-

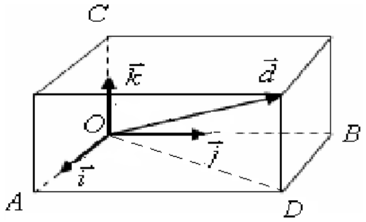

Рис. 4.10

мощью символа $\vec{d} = \{X, Y, Z\}$.

Если M - любая точка пространства, то декартовы прямоугольные координаты этой точки совпадают с декартовыми прямоугольными координатами вектора $\overline{OM}$.

Покажем, что декартовы прямоугольные координаты вектора $\vec{d}$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно.

$$X = \left|\vec{d}\right|\cos\alpha,\ Y = \left|\vec{d}\right|\cos\beta,\ Z = \left|\vec{d}\right|\cos\gamma \tag{4.4}$$

где - α, β и γ углы наклона вектора $\vec{d}$ к осям Ox, Oy, Oz соответственно.

В случае декартовой системы координат, параллелепипед, построенный на базисных векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и имеющий вектор $\vec{d}$ своей диагональю, является прямоугольным. Поэтому проекции вектора $\vec{d}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно равны величинам OA, OB и OC, при этом, $OA = X, OB = Y$ и $OC = Z$.

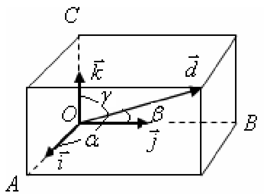

Рис. 4.11

Так как квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его сторон, получаем выражение для длины вектора $\vec{d}$ через его координаты:

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{4.5}$$

Три числа $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ называют ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{d}$.

Из формул (4.4) и (4.5) получим для направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \tag{4.6}$$

Возвышая в квадрат и складывая равенства (4.6), получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

т.е. сумма квадратов косинусов любого вектора равна единице.

Из свойств проекции вектора на ось следует, что при сложении двух векторов $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ их соответствующие координаты складываются

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (X_1 + X_2)\vec{i} + (Y_1 + Y_2)\vec{j} + (Z_2 + Z_2)\vec{k} \tag{4.7}$$

при умножении вектора $\vec{d}_1$ на произвольное вещественное число α его координата умножается на число α

$$\alpha\vec{d}_1 = (\alpha X_1)\vec{i} + (\alpha Y_1)\vec{j} + (\alpha Z_2)\vec{k}\ . \tag{4.8}$$

Пример. Даны векторы $\vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b} = \{-3, 5. -1\}$. Их линейная комбинация $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\{1, -2, 3\} - 3\{-3, 5. -1\} = \{11, -19, 9\}$.

4.5. Скалярное произведение двух векторов

Определение 1. Скалярным произведение двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}\vec{b})$. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, то скалярное произведение этих двух векторов выражается формулой

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \tag{4.9}$$

Сформулируем другое определение скалярного произведения двух векторов, эквивалентное определению 1. Обозначим проекцию вектора $\vec{b}$ на ось, определяемую вектором $\vec{a}$, $np_a\vec{b}$. Согласно формуле (4.1) $np_a\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$. Тогда

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{a}|\,np_a\vec{b} \qquad (4.10)$$

Если в приведенных рассуждениях поменять местами векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{b}|\,np_b\vec{a} \qquad (4.11)$$

Выражения (4.10) (4.11) приводят к следующему определению скалярного произведения

Определение 2. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым из указанных векторов.

Физический смысл скалярного произведения двух векторов: работа, произведенная силой $\vec{F}$, при перемещении тела из одной точки в другую, равна скалярному произведению вектора силы и вектора перемещения $A = (\vec{F}\,\vec{s}) = F \cdot s \cdot \cos\varphi$, где φ - угол между направлением действия силы и направлением перемещения.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1. Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное приведение равно нулю.

Действительно, если два вектора ортогональны, $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow (\vec{a}\,\vec{b}) = 0$. Верно и обратное утверждение: если $(\vec{a}\,\vec{b}) = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ ортогональны. Действительно, из условия $(\vec{a}\,\vec{b}) = 0$ $(\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0)$ следует, что $\cos\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$.

2. Два ненулевых вектора составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Действительно, т.к. $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0,\quad |\vec{a}| > 0,\ |\vec{b}| > 0$, знак скалярного произведения совпадает со знаком $\cos\varphi$, но так как угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не превосходит π, то $\cos\varphi > 0$, когда угол φ острый, $\cos\varphi < 0$, когда угол φ тупой.

Замечание: под углом между двумя векторами подразумевается тот угол, который не превосходит π.

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{b}\,\vec{a})$ (переместительное свойство);

2. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a}\,\vec{b})$ (сочетательное свойство относительно числового множителя);

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}\,\vec{c}) + (\vec{b}\,\vec{c})$ (распределительное свойство относительно суммы векторов);

4. $(\vec{a}\,\vec{a}) > 0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор, и $(\vec{a}\,\vec{a}) = 0$, если $\vec{a}$ - нулевой вектор.

Свойство 1 следует из определения 1, свойства 2, 3 доказываются с помощью определения 2 и свойств проекции вектора (самостоятельно). Остановимся на свойстве 4. Из формулы (4.9) вытекает, что $(\vec{a}\,\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, т.е. ***скалярный квадрат вектора равен квадрату длины этого вектора***. Отсюда вытекает, что скалярный квадрат $(\vec{a}\,\vec{a})$ положителен, когда вектор $\vec{a}$ ненулевой, и равен нулю, когда вектор $\vec{a}$ нулевой.

Указанные свойства **позволяют при скалярном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно, не заботясь при этом о порядке векторных множителей и сочетая числовые множители.**

Пример. $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \bar{a}\,\hat{}\,\bar{b} = 2\pi/3$. Скалярное произведение

$$(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (2\bar{a} - 3\bar{b}) = 2\bar{a}^2 - 3\bar{a} \cdot \bar{b} + 4\bar{b} \cdot \bar{a} - 6\bar{b}^2 = 2\bar{a}^2 + \bar{a} \cdot \bar{b} - 6\bar{b}^2 = 8 + 2 \cdot (-1/2) - 6 = 1$$

Выражение скалярного произведения в декартовых координатах.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми координатами $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е.

$$(\vec{a}\,\vec{b})=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \tag{4.12}$$

Покажем это. Учитывая алгебраические свойства скалярного произведения и то, что $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_2\vec{k}$, $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$, получим

$(\vec{a}\,\vec{b})=X_1X_2(\vec{i}\,\vec{i})+X_1Y_2(\vec{i}\,\vec{j})+X_1Z_2(\vec{i}\,\vec{k})+Y_1X_2(\vec{j}\,\vec{i})+Y_1Y_2(\vec{j}\,\vec{j})+Y_1Z_2(\vec{j}\,\vec{k})+Z_1X_2(\vec{k}\,\vec{i})+$
$+Z_1Y_2(\vec{k}\vec{j})+Z_1Z_2(\vec{k}\,\vec{k})$. Учитывая, что $(\vec{i}\,\vec{i})=1,\quad(\vec{i}\,\vec{j})=0,\quad(\vec{i}\,\vec{k})=0,\quad(\vec{j}\vec{i})=0,\quad(\vec{j}\,\vec{j})=1,$
$(\vec{j}\vec{k})=0,\quad(\vec{k}\vec{i})=0,\quad(\vec{k}\,\vec{j})=0,\quad(\vec{k}\,\vec{k})=1$, получим формулу (4.12).

Из формулы (4.12) и геометрического свойства 1 скалярного произведения следует, что условием ортогональности двух векторов $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ является равенство

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0 \tag{4.13}$$

Определим угол между векторами $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$. Из формулы (4.9) $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Используя формулу (4.12) и формулу (4.5) для длины вектора, получим формулу.

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+{}_2^2}} \tag{4.14}$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}=\{1,-2,3\}, \vec{b}=\{-3,5.-1\}$.

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+{}_2^2}}=\frac{1\cdot(-3)+(-2)\cdot5+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}}=-\frac{16}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}\approx-0.73$$

$\varphi=\arccos(-0.73)$.

4.8. Векторное произведение двух векторов

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}]$ или $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними, т.е.

$$|\vec{c}|=\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi \tag{4.15}$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, после приведения их к общему началу вектор $\vec{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки (рис. 4.12).

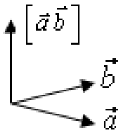

Рис. 4.12

Физический смысл векторного произведения. Понятие векторного произведения возникло в механике при определении момента силы $\vec{F}$ относительно точки O, $\overline{M}=\vec{r}\times\vec{F}$, где $\vec{r}$ - радиус вектор точки приложения силы $\vec{F}$.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. Условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2. Модуль векторного произведения $[\vec a\,\vec b\,]$ равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec a$ и $\vec b$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

1. $[\vec a\,\vec b\,]=-[\vec b\,\vec a\,]$ - свойство антиперестановочности сомножителей (рис. 4.13);

2. $[(\alpha\,\vec a)\,\vec b\,]=\alpha\,[\vec a\,\vec b\,]$ - сочетательное свойство числового множителя;

3. $[(\vec a+\vec b\,)\,\vec c\,]=[\vec a\,\vec c\,]+[\vec b\,\vec c\,]$ - распределительное свойство суммы векторов;

4. $[\vec a\,\vec a\,]=0$ для любого вектора $\vec a$.

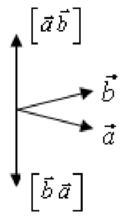

Рис. 4.13

Свойства 1 – 4 позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно и производить сочетание числовых множителей, но при этом необходимо либо сохранять порядок векторных множителей либо при изменении этого порядка менять знак на противоположный.

Пример. $|\bar a|=1, |\bar b|=2, \bar a\,\hat{}\,\bar b=2\pi/3$**.** Найдем модуль векторного произведения векторов $\bar a+2\bar b$ и $2\bar a-3\bar b$ **.**

$(\bar a+2\bar b)\times(2\bar a-3\bar b)=2\bar a\times\bar a-3\bar a\times\bar b+4\bar b\times\bar a-6\bar b\times\bar b=-7\bar a\times\bar b$ **.** .

$\left|(\bar a+2\bar b)\times(2\bar a-3\bar b)\right|=\left|-7\bar a\times\bar b\right|=7\left|\bar a\right|\,\left|\bar b\right|\sin\dfrac{2\pi}{3}=7\cdot2\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}=7\sqrt3$.

Выражение векторного произведения в декартовых координатах.

Если два вектора $\vec a$ и $\vec b$ определены своими декартовыми координатами $\vec a=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec b=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$[\vec a\,\vec b\,]=\{Y_1Z_2-Y_2Z_1,\ Z_1X_2-Z_2X_1,\ X_1Y_2-X_2Y_1\} \qquad (4.16)$$

Доказательство. Учитывая, что $\vec a=X_1\,\vec i+Y_1\,\vec j+Z_2\,\vec k$, $\vec b=X_2\,\vec i+Y_2\,\vec j+Z_2\,\vec k$ и алгебраические свойства векторного произведения, получим

$[\vec a\,\vec b\,]=X_1X_2[\vec i\,\vec i\,]+X_1Y_2[\vec i\,\vec j\,]+X_1Z_2[\vec i\,\vec k\,]+Y_1X_2[\vec j\,\vec i\,]+Y_1Y_2[\vec j\,\vec j\,]+Y_1Z_2[\vec j\,\vec k\,]+Z_1X_2[\vec k\,\vec i\,]+Z_1Y_2[\vec k\,\vec j\,]+$ $+Z_1Z_2[\vec k\,\vec k\,]$. Учитывая, что $[\vec i,\vec i\,]=0, [\vec i,\vec j\,]=\vec k, [\vec i,\vec k\,]=-\vec j, [\vec j,\vec i\,]=-\vec k, [\vec j.\vec j\,]=0, [\vec j,\vec k\,]=\vec i$, $[\vec k,\vec i\,]=\vec j, [\vec k,\vec j\,]=-\vec i, [\vec k,\vec k\,]=0$, получим разложение

$$[\vec a\,\vec b\,]=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\vec i+(Z_1X_2-Z_2X_1)\,\vec j+(X_1Y_2-X_2Y_1)\vec k \qquad (4.17)$$

эквивалентное равенству (4.16).

Для запоминания формулы (4.17) удобно использовать символ определителя

$$[\vec a\,\vec b\,]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix} \qquad (4.17')$$

Раскрывая определитель в правой части формулы $(4.17')$ по элементам первой строки, получим разложение вектора $[\vec a\,\vec b\,]$ по базису $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$, эквивалентное (4.17).

Следствие. Если два вектора коллинеарны, его координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2} \qquad (4.18)$$

Эти соотношения следуют из равенства нулю векторного произведения и формулы (4.17) $Y_1Z_2-Y_2Z_1=0$, $Z_1X_2-Z_2X_1=0$, $X_1Y_2-X_2Y_1=0$, которые эквивалентны доказываемым пропорциям.

Замечание: в знаменателях равенств (4.18) могут стоять нули.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b} = \{-3, 5. -1\}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} = -13\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k}$$

$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \sqrt{169 + 64 + 1} = \sqrt{234}$.

4.9. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а затем полученный при этом вектор $[\vec{a}\,\vec{b}]$ скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $[\vec{a}\,\vec{b}] \cdot \vec{c}$, называемое ***смешанным произведением векторов*** $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ ***и*** $\vec{c}$**.** Обозначается $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Модуль смешанного произведение $[\vec{a}\,\vec{b}] \cdot \vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если же векторы $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, их смешанное произведение равно нулю.

Следствие 1. Справедливо равенство $[\vec{a}\,\vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}\,\vec{c}]$.

Следует из переместительного свойства скалярного произведения.

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Выражение смешанного произведения в декартовых координатах.

Если три вектора $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены своими декартовыми координатами

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},\ \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемым векторов, т.е.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (4.19)$$

Доказательство. Т.к. смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно скалярному произведению векторов $[\vec{a}\,\vec{b}] = \{Y_1Z_2 - Y_2Z_1,\ Z_1X_2 - Z_2X_1,\ X_1Y_2 - X_2Y_1\}$ и $\vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$, то в силу выражения скалярного произведения векторов в координатах, получим

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X_3 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)Y_3 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)Z_3$$

а это есть разложение определителя (4.19) по третьей строке.

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов.

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.20)$$

Пример. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b} = \{-3, 5. -1\}$, $\vec{c} = \{-2, 1, 1\}$. Согласно теореме 11, $V = \left| (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \right|$.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=9\,,\ V=9\,.$$

Тема 5. Прямая на плоскости

Если на плоскости π задана произвольная прямая линия L и фиксирована произвольная декартова система координат Oxy, то прямая L определяется в этой системе уравнением первой степени.

Верно и обратное утверждение: если на плоскости π фиксирована произвольная декартова прямоугольная система Oxy, то всякое уравнение первой степени с двумя переменными x и y определяет относительно этой системы прямую линию.

5.1. Общее уравнение прямой

Найдем ***уравнение прямой*** L***, проходящей через заданную точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***и перпендикулярной заданному вектору*** $\vec{n} = \{A, B\}$**.** Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой. Очевидно, векторы $\vec{n} = \{A, B\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ ортогональны и их скалярное произведение равно нулю: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Это условие дает нам искомое уравнение прямой.

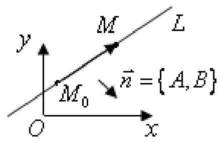

Рис. 5.1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (5.1)$$

Вектор $\vec{n} = \{A, B\}$ называется ***нормальным вектором прямой.*** Раскрыв скобки в левой части уравнения (5.1) и обозначив $C = Ax_0 + By_0$, получим уравнение прямой L в виде:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) с произвольными коэффициентами A, B и C, такими, что A и B не равны нулю одновременно, называется ***общим уравнением прямой***.

5.2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках

Общее уравнение прямой (5.2) называется полным, если все его коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным.*

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1) $C = 0$, уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат, поскольку координаты начала удовлетворяют данному уравнению (рис. 5.2).

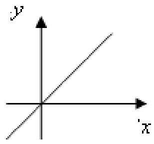

Рис. 5.2

2) $B = 0$, уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy, т.к. нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{A, 0\}$ ортогонален оси Oy (рис. 5.3).

3) $A = 0$, уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox, т.к. нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{0, B\}$ ортогонален оси Ox (рис. 5.4).

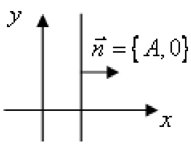

Рис. 5.3

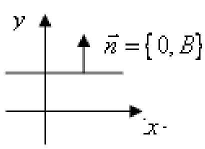

Рис. 5.4

4) $B = 0, C = 0$, уравнение $Ax = 0$ определяет ось Oy (эта прямая параллельна оси Oy и проходит через начало координат).

5) $A = 0, C = 0$, уравнение $By = 0$ определяет ось Ox (эта прямая параллельна оси Ox и проходит через начало координат).

Рассмотрим полное уравнение прямой. Так как все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, уравнение (5.1) можно переписать в виде

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,, \qquad (5.3)$$

где $a=-\dfrac{C}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$. Уравнение (5.3) называется ***уравнением прямой в отрезках***. Числа a и b в этом уравнении имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях Ox, Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат). Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения прямой, определяемой уравнением (5.3) с осями координат. Например, точка пересечения прямой с осью Ox определится из совместного рассмотрения уравнения прямой (5.3) с уравнением $y=0$ оси Ox. Мы получим координаты точки пересечения $x=a,\ y=0$. Аналогично, координаты точки пересечения прямой (5.3) с осью Oy: $x=0,\ y=b$. Уравнение прямой в виде (5.3) удобно использовать для построения этой прямой на чертеже.

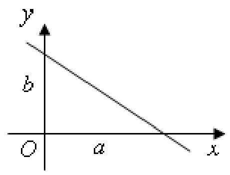

Рис. 5.5

Пример. Построить прямую, заданную уравнением: $2x-3y-6=0$.

Перейдем от общего уравнения прямой к уравнению в отрезках, поделив уравнение на 6 и перенося 1 в правую часть уравнения. Получим уравнение $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$.

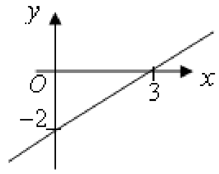

Рис. 5.6

5.3. Каноническое уравнение прямой

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть ***направляющим вектором*** данной прямой.

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}=\{l, m\}$.

Очевидно, точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой L тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$ и $\vec{q}=\{l, m\}$ коллинеарны, т.е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (см. условие параллельности двух векторов в предыдущем разделе):

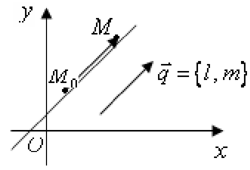

Рис. 5.7

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) и есть искомое уравнение прямой. Его называют ***каноническим уравнением прямой.***

В уравнении (5.4) один из знаменателей l или m может оказаться равным нулю (оба числа l и m равняться нулю не могут, так как вектор $\vec{q}=\{l, m\}$ ненулевой). Обращение в нуль одного из знаменателей в (5.4) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Например, если $l=0$, то, поскольку $m\neq 0$, из равенства $l(y-y_0)=m(x-x_0)$ вытекает, что $x-x_0=0$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$. Учитывая, что за направляющий вектор в этом случае можно взять вектор $\vec{q}=\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ и прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, получим уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{5.5}$$

5.4. Параметрические уравнения прямой

Параметрические уравнение прямой получаются из канонического уравнения этой прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и правой частях уравнения (5.4): $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t$. Получим $x-x_0=lt,\quad y-y_0=mt$ или окончательно

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \tag{5.6}$$

Уравнения (5.6) называются ***параметрическими уравнениями прямой***.

Пример. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,-1)$ параллельно вектору $\vec{q}=\{-3,1\}$.

Согласно (5.4) и (5.6), получим уравнения

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1} \qquad \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \end{cases}$$

5.5. Прямая с угловым коэффициентом

Рассмотрим любую прямую, не параллельную оси Ox. Назовем ***углом наклона*** этой прямой к оси Ox угол α между прямой и положительным направлением оси Ox. Тангенс угла наклона прямой к оси Ox назовем ***угловым коэффициентом*** этой прямой, $k=tg\alpha$.

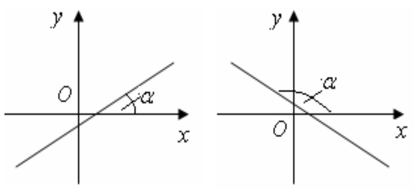

Рис. 5.8

Выведем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющей данный угловой коэффициент k.

Для этого докажем сначала следующее утверждение: если прямая не параллельна оси Ox и имеет направляющий вектор $\vec{q}=\{l,m\}$, то угловой коэффициент этой прямой k равен: $k=\frac{m}{l}$. Пусть α - угол наклона прямой к оси Ox, θ - угол наклона направляющего вектора $\vec{q}=\{l,m\}$ к оси Ox. Здесь возможны четыре случая (рис 5.9). В случаях 1, 3 $\theta=\alpha$ и для проекций вектора $\vec{q}$ справедливы формулы $l=|\vec{q}|\cos\theta$, $m=|\vec{q}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=|\vec{q}|\sin\theta$. В случаях 2, 4 $\theta=\pi-\alpha$ и для проекций вектора $\vec{q}$ справедливы формулы: $l=|\vec{q}|\cos\theta$, $m=-|\vec{q}|\sin\theta$. Таким образом, в случаях 1 и 3 $\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}\alpha$ и $\frac{m}{l}=\mathrm{tg}\theta$, а в случаях 2 и 4 $\mathrm{tg}\theta=-\mathrm{tg}\alpha$ и $\frac{m}{l}=-\mathrm{tg}\theta$. Следовательно, во всех случаях $\mathrm{tg}\alpha=\frac{m}{l}$.

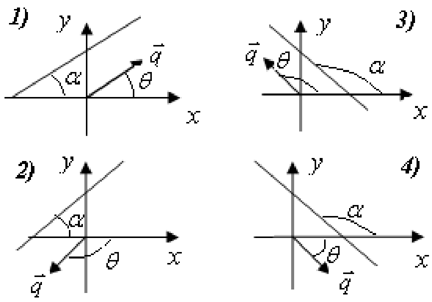

Рис. 5.9

Умножим теперь обе части уравнения (5.4) на m и, учитывая, что $\frac{m}{l}=k$, получим искомое уравнение в виде

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{5.7}$$

Обозначив $b=y_0-kx_0$, получим

$$y=kx+b \tag{5.8}$$

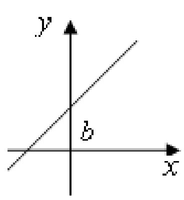

Рис. 5.10

Уравнение (5.8) называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. В этом уравнении k представляет собой угловой коэффициент данной прямой (тангенс угла наклона прямой), а b - величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, начиная от начала координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть совместно уравнение (5.8) и уравнение $x=0$ оси ординат и найти координаты точки пересечения прямой (5.8) и оси Oy: $x=0$, $y=b$. Уравнение прямой в примере 2: $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

5.6. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

а) Пусть сначала две прямые L_1 и L_2 заданы своими общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

Так как нормальными векторами этих прямых являются векторы $\vec{n}_1=\{A_1,B_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2,B_2\}$, то задача об определении угла между прямыми L_1 и L_2 сводится к задаче об определении угла φ между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Из определения скалярного произведения $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\varphi$ и из выражения в координатах длин векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и их скалярного произведения, получим

$$\cos\varphi=\pm\left|\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right| \tag{5.9}$$

со знаком плюс в случае острого угла и минус в случае тупого угла.

Пример. Найти угол между прямыми $2x-y+5=0$, $x+4y-1=0$. Согласно формуле (5.9) $\cos\varphi=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{-2}{\sqrt{5\cdot17}}=-\frac{2}{\sqrt{85}}$.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \tag{5.10}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2, эквивалентное условию ортогональности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, может быть выражено равенством нулю их скалярного произведения

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \tag{5.11}$$

b) Пусть теперь две прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 служат векторы $\vec{q}_1=\{l_1,m_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2,m_2\}$, то в полной аналогии со случаем а) получим формулу для угла между прямыми L_1 и L_2

$$\cos\varphi=\pm\left|\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}\right| \tag{5.12}$$

со знаком плюс в случае острого угла и минус в случае тупого угла.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2} \tag{5.13}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2:

$$l_1l_2+m_1m_2=0 \tag{5.14}$$

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Если α_1 и α_2 - углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ox, а φ - один из углов между прямыми, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

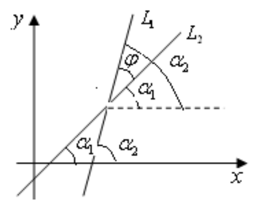

Рис. 5.11

Получаем следующую формулу для угла φ

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (5.15)$$

Прямые параллельны, когда тангенс угла между ними равен нулю, или из (5.15)

$$k_1 = k_2 \qquad (5.16)$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 также из формулы (5.15). Оно отвечает случаю, когда тангенс угла φ не существует, т.е. когда знаменатель формулы (5.15) обращается в нуль: $1 + k_1k_2 = 0$. Тогда, условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид

$$k_2 = -1/k_1 \qquad (5.17)$$

5.6. Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим прямую L, заданную общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точку $M_0(x_0, y_0)$, не лежащую на прямой. Расстояние d от точки M_0 до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую. Проведем прямую n, перпендикулярную L, P - точка пересечения прямых, p - длина отрезка $\overline{OP}$. На прямой n возьмем единичный вектор $\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$, направление которого совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$. Спроектируем точку M_0 на ось, определяемую вектором $\vec{n}$, Q - проекция точки M_0. Из рисунка 5.12 видно, что

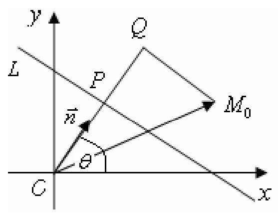

Рис. 5.12

$$d = |PQ| = |OQ - OP| = |OQ - p|$$

$OQ = np_n\overline{OM_0}$. Согласно формулам (4.10) и (4.12) $OQ = \vec{n} \cdot \overline{OM_0} = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta$.

$$d = |x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p|$$

Сравнивая левую часть общего уравнения прямой $Ax + By + C$ и выражение $x\cos\theta + y\sin\theta - p$, видим, что коэффициенты их совпадают с точностью до постоянного множителя t: $tA = \cos\theta,\quad tB = \sin\theta,\quad tC = -p$. Возводя в квадрат первые два равенства, а затем, складывая их, получим $t^2(A^2 + B^2) = 1$, откуда $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (из третьего соотношения следует, что знак t противоположен знаку коэффициента C). Тогда $x\cos\theta + y\sin\theta - p = \pm\dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. И выражение для d может быть записано в виде

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad (5.25)$$

Правило для нахождения расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой L**:** ***в левую часть общего уравнения прямой*** L ***следует подставить на место*** x ***и*** y ***координаты*** x_0 ***и*** y_0 ***точки*** M_0 ***и разделить на длину вектора нормали.***

Пример. Найти расстояние от точки $M(-10,5)$ до прямой L: $3x+4y-5=0$. Нормирующий множитель $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{25}=5$, $d=\left|\frac{3\cdot(-10)+4\cdot 5-1}{5}\right|=3$

Тема 6. Плоскость и прямая в пространстве

Если в пространстве задана произвольная плоскость π и фиксирована декартова прямоугольная система $Oxyz$, то плоскость π определяется в этой системе уравнением первой степени.

Верно и обратное утверждение, если в пространстве фиксирована декартова прямоугольная система $Oxyz$, то всякое уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y, z определяет относительно этой системы плоскость.

6.1. Общее уравнение плоскости

Выведем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=\{A, B, C\}$. Очевидно, точка $M(x, y, z)$ лежит на указанной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$ и $\vec{n}=\{A, B, C\}$ ортогональны и их скалярное произведение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$ равно нулю. Это условие даст искомое уравнение плоскости

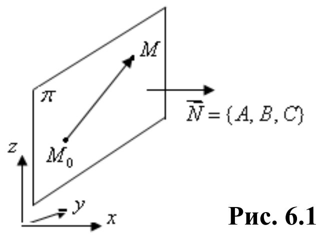

Рис. 6.1

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (6.1)$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения (6.1) и обозначив $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, получим уравнение плоскости в виде

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.2)$$

где A, B, C и D - какие угодно постоянные, причем, из постоянных A, B, C хотя бы одна отлична от нуля. Уравнение (6.2) называется ***общим уравнением плоскости***. Вектор $\vec{n}=\{A, B, C\}$ называется ***нормальным вектором плоскости.***

Замечание. Если два общих уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяют одну и ту же плоскость, то найдется такое число t, что справедливы равенства $A_1=A_2t,\ \ B_1=B_2t,\ \ C_1=C_2t,\ \ D_1=D_2t$, т.е. коэффициенты одного уравнения равны соответствующим коэффициентам другого уравнения, умноженными на некоторое число t.

6.2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках

Общее уравнение плоскости (6.2) называется полным, если все его коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным.*

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1) $D=0$, уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, поскольку координаты начала удовлетворяют данному уравнению.

2) $C=0$, уравнение $Ax+By+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz, т.к. нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=\{A, B, 0\}$ ортогонален оси Oz (рис. 6.2).

3) $B=0$, уравнение $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy (рис. 6.3).

4) $A=0$, уравнение $Bx+Cz+D=0$

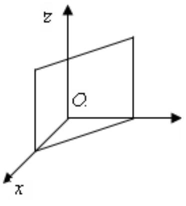

Рис. 6.2

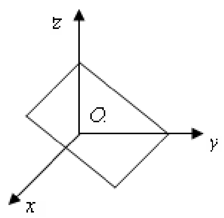

Рис. 6.3

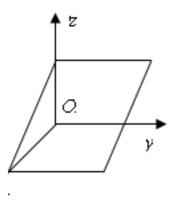

Рис. 6.4

определяет плоскость, параллельную оси Ox, т.к. нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=\{0,B,C\}$ ортогонален оси Ox (рис. 6.4).

5) $C=0, D=0$, уравнение $Ax+By=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Oz (рис. 6.5).

6) $B=0, D=0$, уравнение $Ax+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Oy (рис. 6.6).

7) $A=0, D=0$, уравнение $By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox (рис. 6.7).

8) $B=0,\ C=0$, уравнение $Ax+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz, т.к. плоскость параллельна осям Oy и Oz (рис. 6.8).

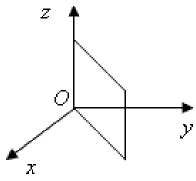

Рис. 6.5

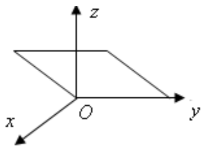

Рис. 6.6

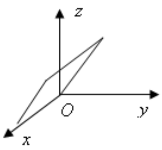

Рис. 6.7

9) $A=0, C=0$, уравнение $By+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxz, т.к. плоскость параллельна осям Ox и Oz (рис. 6.9).

10) $A=0, B=0$, уравнение $Cz+D$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy, т.к. плоскость параллельна осям Oy и Ox (рис. 6,10)

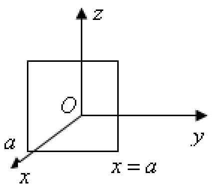

Рис. 6.8

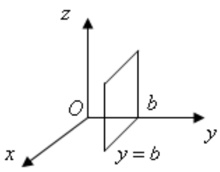

Рис. 6.9

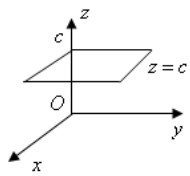

Рис. 6.10

11) $B=0, C=0, D=0$, уравнение $Ax=0$ определяет координатную плоскость Oyz.

12) $A=0, C=0, D=0$, уравнение $By=0$ определяет координатную плоскость Oxz.

13) $A=0, B=0, D=0$, уравнение $Cz=0$ определяет координатную плоскость Oxy.

Рассмотрим теперь полное уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Т.к. коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, уравнение можно переписать в следующем виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ , \tag{6.3}$$

где $a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}$. Уравнение (6.3) называется ***уравнением плоскости в отрезках***. Числа a, b и c в этом уравнении имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях Ox, Oy, Oz соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат). Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения плоскости, определяемой уравнением (6.3) с осями координат. Например, точка пересечения прямой с осью Ox определится из совместного рассмотрения уравнения прямой (6.3) с уравнениями $y=0$ и $z=0$. Мы получим координаты точки пересечения $x=a,\ y=0$ и $z=0$. Аналогично, координаты точки пересечения прямой (6.3) с осью Oy: $x=0,\ y=b,\ z=0$ и осью Oz: $x=0, y=0, z=c$.

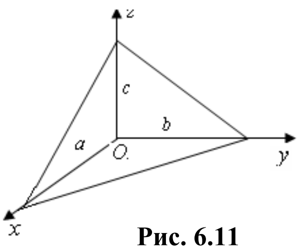

Рис. 6.11

Уравнение плоскости в виде (6.3) удобно использовать для построения этой плоскости на чертеже (рис. 6.11).

6.3. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой

Выведем уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащих на одной прямой. Так как указанные три точки не лежат на одной прямой, векторы $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1,\, y_3 - y_1,\, z_3 - z_1\}$ не коллинеарны (рис. 6.12), и поэтому точка $M(x, y, z)$ лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2 и M_3 тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1\}$ компланарны, т.е. тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих трех векторов равно нулю. Используя выражение смешанного произведения в координатах, получим уравнение искомой плоскости

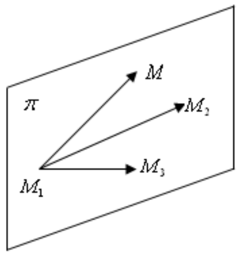

Рис. 6.12

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.4)$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,-1,-2)$, $M_2(2,1,-2)$, $M_3(1,-1,1)$ и построить ее.

Согласно (6.4) уравнение искомой плоскости: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

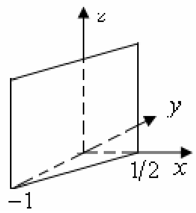

Рис. 6.13

Разложив определитель в левой части уравнения по первой строке, получим уравнение плоскости в виде $6(x-1) - 3(y+1) + 0(z+2) = 0$ или $2x - y - 1 = 0$. Для построения плоскости приведем общее уравнение плоскости к уравнению в отрезках: $\dfrac{x}{1/2} + \dfrac{y}{-1} = 1$ (рис. 6.13).

6.4. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Так как нормальными векторами этих плоскостей являются векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то задача об определении угла между плоскостями π_1 и π_2 сводится к задаче об определении угла φ между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Из определения скалярного произведения $(\vec{n}_1\,\vec{n}_2) = |\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\varphi$ и из выражения в координатах длин векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и их скалярного произведения, получим

$$\cos\varphi = \pm\left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right| \qquad (6.5)$$

со знаком плюс в случае острого угла и минус в случае тупого угла.

Пример. Найти угол между плоскостями: $2x - y + 2z - 5 = 0$, $8x + 4y - 1 = 0$. Согласно формуле (6.5) $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 8 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 0}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{80}} = \dfrac{14}{12\sqrt{5}} \approx 0.53$, $\varphi = \arccos(0.53)$.

Условие параллельности плоскостей π_1 и π_2, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (6.6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей π_1 и π_2, эквивалентное условию ортогональности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, может быть выражено равенством нулю их скалярного произведения

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (6.7)$$

6.5. Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость π, заданную общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащую на плоскости. Расстояние d от точки M_0 до плоскости π равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость. Проведем прямую n, перпендикулярную π, P - точка пересечения прямой и плоскости, p - длина отрезка $\overline{OP}$. На прямой n возьмем единичный вектор $\vec{n} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$, направление которого совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$. Спроектируем точку M_0 на ось, определяемую вектором $\vec{n}$, Q - проекция точки M_0. Из рисунка 6.14 видно, что

$$d = |PQ| = |OQ - OP| = |OQ - p|$$

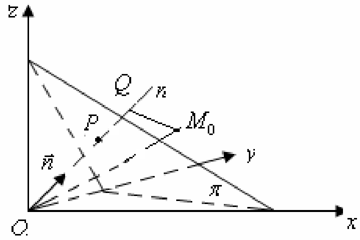

Рис. 6.14

$OQ = np_n\overline{OM_0}$. Согласно определению 2 скалярного произведения $OQ = \vec{n}\cdot\overline{OM_0} = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$. Тогда

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$$

Сравнивая левую часть общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D$ и выражение $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$, видим, что коэффициенты их совпадают с точностью до постоянного множителя t: $tA = \cos\alpha,\quad tB = \cos\beta,\quad tC = \cos\gamma,\quad tD = -p$. Возводя в квадрат первые три равенства, а затем складывая их, получим $t^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1$, откуда $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (из четвертого соотношения следует, что знак t противоположен знаку коэффициента D). Тогда $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = \pm\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. И формула для d может быть записана в виде

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (6.8)$$

Правило для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π**:** ***в левую часть общего уравнения плоскости следует подставить на место*** x**,** y и z ***координаты*** x_0, y_0 и z_0 ***точки*** M_0 ***и разделить на длину вектора нормали.***

6.6. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую линию в пространстве, являющуюся линией пересечения двух различных и не параллельных плоскостей, определяемых уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.9)$$

Уравнения системы (6.9) называют общими уравнениями прямой в пространстве. При решении многих задач более удобным является специальный вид уравнений прямой в пространстве: канонические уравнения.

6.7. Канонические уравнения прямой в пространстве

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть ***направляющим вектором*** данной прямой.

Найдем уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q} = \{l, m, n\}$.

Очевидно, точка $M(x, y, z)$ лежит на указанной прямой L тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\vec{q} = \{l, m, n\}$ коллинеарны, т.е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (см. условие параллельности двух векторов в предыдущем разделе):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{6.10}$$

Уравнения (6.10) и есть искомые уравнения прямой. Их называют ***каноническими уравнениями прямой.***

В уравнениях (6.10) одно или два из чисел l, m или n могут оказаться равными нулю (все они равняться нулю не могут, так как вектор $\vec{q} = \{l, m, n\}$ ненулевой). Обращение в нуль одного из знаменателей в (6.10) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Например, если $l = 0$, то, поскольку $m \neq 0$, из равенства $l(y - y_0) = m(x - x_0)$ вытекает, что $x - x_0 = 0$.

Запишем уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Учитывая, что за направляющий вектор в этом случае можно взять вектор $\vec{q} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, получим уравнения искомой прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{6.11}$$

Пример. Составить канонические уравнения прямой L, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Найдем координаты любой точки, лежащей на прямой. Для этого решим систему уравнений (6.12). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & -14 & -8 \end{pmatrix}$. Частное решение этой системы найдем, задав, например, значение свободной переменной $z = 0$. Тогда $y = -1$, $x = 2$. Таким образом, точка $M_o(2, -1, 0)$ принадлежит прямой L.

Координаты l, m, n направляющего вектора $\vec{q}$ найдем, как векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{1, -2, 3\}$ и $\vec{n}_2 = \{3, 2, -5\}$ плоскостей (6.12)

$$\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k} = \{4, 14, 8\}.$$

Канонические уравнения прямой L, проходящей через точку $M_o(2, -1, 0)$ параллельно вектору $\vec{q} = \{4, 14, 8\}$ или вектору $\vec{q} = \{2, 7, 4\}$:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{7} = \frac{z}{4}.$$

6.8. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Параметрические уравнение прямой получаются из канонических уравнений этой прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и правой частях уравнения (5.1): $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$. Получим $x-x_0=lt,\quad y-y_0=mt$, $z-z_0=nt$ или окончательно

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \tag{6.13}$$

Уравнения (6.13) называются ***параметрическими уравнениями прямой***.

Пример. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,-1,0)$ параллельно вектору $\vec{q}=\{-3,0,1\}$.

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

6.9. Угол между двумя прямыми в пространстве

Пусть две прямые в пространстве L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Тогда задача определения угла между прямыми L_1 и L_2 сводится к определению угла φ между их направляющими векторами $\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$. Пользуясь определением скалярного произведения $(\vec{q}_1\,\vec{q}_2)=|\vec{q}_1||\vec{q}_2|\cos\varphi$ и выражением в координатах указанного скалярного произведения и длин векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, получим для определения угла φ формулу

$$\cos\varphi=\pm\left|\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}\right| \tag{6.14}$$

со знаком плюс в случае острого угла и минус в случае тупого угла.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ заключается в пропорциональности координат этих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{6.15}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2, эквивалентное условию ортогональности векторов $\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$, заключается в равенстве нулю их скалярного произведения:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{6.16}$$

6.10. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость π, заданную общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и прямую L, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Поскольку угол φ

между прямой L и плоскостью π является дополнительным углом к углу ψ между направляющим вектором прямой $\vec{q}=\{l, m, n\}$ и нормальным вектором плоскости $\vec{n}=\{A, B, C\}$ (рис. 6.15), то из определения скалярного произведения $\vec{q}\,\vec{n} \ =|\vec{q}||\vec{n}|\cos\psi$ и из равенства $\cos\psi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$, получаем для определения угла между прямой L и плоскостью π следующую формулу

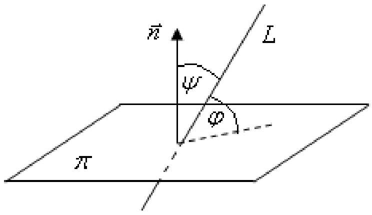

Рис. 6.15

$$\sin\varphi=\pm\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right| \qquad (6.17)$$

со знаком плюс в случае острого угла и минус в случае тупого угла.

Условие параллельности прямой L и плоскости π (включающее в себя принадлежность L к π) эквивалентно условию ортогональности векторов $\vec{n}=\{A, B, C\}$ и $\vec{q}= \ l, m, n \ $, и выражается равенством нулю скалярного произведения этих векторов:

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (6.18)$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости π эквивалентно условию коллинеарности векторов $\vec{n}=\{A, B, C\}$, $\vec{q}=\{l, m, n\}$ и выражается в пропорциональности координат этих векторов:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (6.19)$$

Тема 7. Линии второго порядка

В этом пункте мы изучим кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу. Эти кривые представляют собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

7.1. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы

1. Эллипс

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем начало декартовой системы координат в середине отрезка $\overline{F_1F_2}$, ось Ox проведем через точки F_1, F_2 (рис. 7.1). Обозначим $2a$ - постоянную, о которой идет речь в определении, и $2c$ - длину отрезка $\overline{F_1F_2}$. Тогда в выбранной системе координат фокусы F_1, F_2 имеют координаты $(-c,0)$, $(c,0)$. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка эллипса. Обозначим r_1, r_2 расстояния от точки M до фокусов F_1, F_2 соответственно. Согласно определению

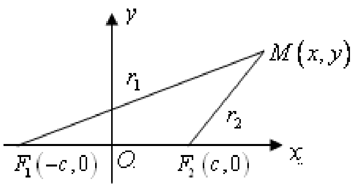

Рис. 7.1

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{7.1}$$

Учитывая, что $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получим соотношение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{7.2}$$

которое можно рассматривать как уравнение эллипса. Избавившись стандартным путем от радикалов и обозначив $b^2 = a^2 - c^2$, получим уравнение эллипса в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) называется каноническим уравнением эллипса. Величины a и b называют соответственно большой и малой ***полуосями эллипса***. Эти названия объясняются тем, что $a > b$.

Замечание. Если полуоси a и b эллипса равны, то фокусы эллипса совпадают с началом координат, и эллипс представляет собой окружность с радиусом $R = a = b$.

2. Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Для вывода канонического уравнения гиперболы выберем декартову систему координат также как в случае вывода уравнения эллипса. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка гиперболы. Обозначим r_1, r_2 расстояния от точки M до фокусов F_1, F_2 соответственно. Согласно определению

$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{7.4}$$

Учитывая, что $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получим соотношение

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \tag{7.5}$$

Избавившись с помощью стандартного приема от радикалов и обозначив $b^2 = c^2 - a^2$, получим уравнение гиперболы в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7.6)$$

Уравнение (7.6) называется каноническим уравнением гиперболы. Величины a и b называют соответственно действительной и мнимой ***полуосями гиперболы.***

3. Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, расположенной в рассматриваемой плоскости. Точка F называется ***фокусом*** параболы, а фиксированная прямая – ***директрисой*** параболы.

Для вывода канонического уравнения параболы выберем начало декартовой системы координат в середине отрезка $\overline{FD}$, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису, а оси Ox, Oy, как показано на рисунке 6.2. Пусть p - длина отрезка $\overline{FD}$, тогда в выбранной системе координат точка F имеет координаты $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка параболы. Обозначим: r - расстояние от точки M до фокуса, d - расстояние от M до директрисы (рис. 7.2). Согласно определению параболы,

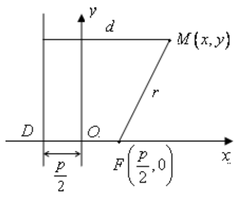

Рис. 7.2

$$r=d \qquad (7.7)$$

Учитывая, что $r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $d=\frac{p}{2}+x$, запишем условие (6.7) в виде

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x \qquad (7.8)$$

Соотношение (7.8) можно рассматривать, как уравнение параболы. Возводя обе части, получим уравнение параболы в виде

$$y^2=2px \qquad (7.9)$$

Уравнение (7.9) называется каноническим уравнением параболы. Величина p называется параметром параболы.

7.2. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы

1. Исследование формы эллипса

Каноническое уравнение эллипса (уравнение 7.3)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Будем считать, что $a>b$.

1) Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, называемые ***главными осями*** эллипса, и центр симметрии, называемый ***центром*** эллипса.

Действительно, в уравнении (7.3) переменные x и y фигурируют в четной степени. Поэтому, если координаты точки (x,y) удовлетворяют уравнению (7.3) (т.е. точка лежит на эллипсе), то и координаты точек $(-x,y)$, $(x,-y)$, симметричных ей относительно координатных осей, и точки $(-x,-y)$, симметричной ей относительно начала координат, также удовлетворяют уравнению (7.3) (т.е. эти точки также лежат на эллипсе).

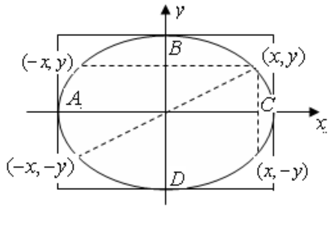

Рис. 7.3

Таким образом, если эллипс задан своим каноническим уравнением, то ***главными осями*** этого эллипса являются ***оси координат***, а ***центром*** эллипса – ***начало координат***. Точки пересечения с главными осями эллипса называются ***вершинами эллипса***. Найдем их из уравнения (7.3): $y=0$, $x=\pm a$; $x=0$, $y=\pm b$. Таким образом, ***вершины эллипса*** имеют координаты $(-a,0),(0,b),(a,0),(0,b)$. На рисунке они обозначены A,B,C,D. Длины отрезков, образуемых пересечением эллипса с главными осями, равны соответственно $2a$ и $2b$. Так как $2a>2b$, то главная ось, образующая при пересечении с эллипсом отрезок $2a$, называется ***большой осью*** эллипса, другая главная ось называется ***малой осью*** эллипса. Если эллипс задан уравнением (7.3), то при $a>b$ большой осью будет ось Ox, малой – ось Oy; при $b>a$ большой осью будет ось Oy, малой – Ox. Фокусы эллипса располагаются на его большой оси.

3) Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x|\le a$, $|y|\le b$. Действительно, из уравнения (7.3) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, $\frac{y^2}{b^2}\le 1$. Эти неравенства эквивалентны неравенствам $|x|\le a$, $|y|\le b$.

2. Исследование формы гиперболы.

Каноническое уравнение гиперболы (уравнение 7.6)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

1) Гипербола имеет две оси симметрии, называемые ***главными осями*** гиперболы, и центр симметрии, называемый ***центром*** гиперболы.

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что переменные x и y фигурируют в уравнении (7.6) в четной степени. Поэтому, если координаты точки (x,y) удовлетворяют уравнению (7.6) (т.е. точка лежит на гиперболе), то и координаты точек $(-x,y)$, $(x,-y)$, симметричных ей относительно координатных осей, и точки $(-x,-y)$, симметричной ей относительно начала координат, также удовлетворяют уравнению (7.6) (т.е. эти точки также лежат на гиперболе).

Таким образом, если гипербола задана своим каноническим уравнением, то ***главными осями*** этой гиперболы являются ***оси координат***, а ***центром*** гиперболы – ***начало координат***. При этом одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, эта ось называется ***действительной осью*** гиперболы. Вторая ось, не имеющая точек пересечения с гиперболой, называется ***мнимой осью*** гиперболы.

Точки пересечения гиперболы с ее действительной осью называются ***вершинами гиперболы***. Найдем их из уравнения (7.6). При $y=0$ получим уравнение $x^2=a^2$, откуда $x=\pm a$. Таким образом, ***вершины гиперболы*** имеют координаты $(-a,0),(a,0)$. На рисунке они обозначены соответственно A,B. Уравнение (7.6) при $x=0$ ($y^2=-b^2$) не имеет действительных решений, что соответствует отсутствию точек пересечения гиперболы с главной осью, совпадающей с осью Oy.

Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.

2) Рассмотрим область плоскости, в которой располагаются точки гиперболы. Из уравнения (6.6) следует, что $\frac{x^2}{a^2}>\frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2}\ge 1$. Эти неравенства эквивалентны неравенствам $|y|<\frac{b}{a}|x|$, $|x|\ge a$. Точки, удовлетворяющие первому неравенству лежат в вертикальных углах, биссектрисой которых является ось Ox, между прямыми $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$. При этом, точки, лежащие на прямых, не удовлетворяют неравенству. Второму неравенству удовлетворяют точки, лежащие вне прямых $x=\pm a$. Решением системы этих неравенств

будет пересечение указанных областей. На рисунке 7.4 эта область выделена, пунктиром выделена граница, точки которой не лежат на гиперболе.

3) Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ являются ***асимптотами*** гиперболы. Представим уравнение гиперболы в виде $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Очевидно, что при $x\to\pm\infty$ $y\to\pm\frac{b}{a}x$. Это означает, что при достаточном удалении от начала координат ветви гиперболы приближаются к прямым $y=\pm\frac{b}{a}x$.

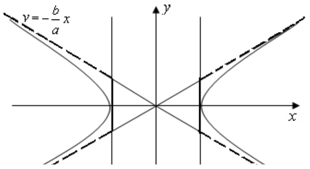

Рис. 7.4

Учитывая результаты исследования, построим гиперболу.

4) Наряду с гиперболой (7.6) рассматривают так называемую ***сопряженную*** по отношению к ней гиперболу. Сопряженная гипербола задается каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (7.10)$$

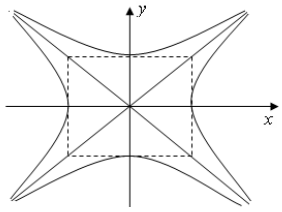

Рис. 7.5

На рисунке 7.5 показаны гипербола (7.6) и сопряженная ей гипербола (7.10). Действительной осью гиперболы (7.10) является ось ординат, соответственно фокусы этой гиперболы лежат на оси ординат.

3. Исследование формы параболы.

Каноническое уравнение параболы (уравнение 7.9)

$$y^2=2px$$

1) Парабола имеет ось симметрии (***ось параболы***). Точка пересечения параболы с осью называется ***вершиной параболы***. Переменная y входит в уравнение (7.9) во второй степени. Поэтому, если координаты точки (x,y) удовлетворяют уравнению (7.9) (т.е. эта точка лежит на параболе), то и координаты точки $(x,-y)$, симметричной точке (x,y) относительно оси Ox, также удовлетворяют уравнению (7.9). Таким образом, если парабола задана своим каноническим уравнением (7.9), то осью этой параболы является ось Ox. Вершиной параболы является начала координат.

2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости Oxy. Так как $p>0$, уравнению (7.9) удовлетворяют лишь точки с неотрицательными абсциссами. Такие точки располагаются в правой полуплоскости.

3) Из пункта 7.1 вытекает что, если парабола задана каноническим уравнением (7.9), уравнение ее директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$.

4) Парабола с фокусом в точке $\left(-\frac{p}{2},0\right)$ и директрисой $x=\frac{p}{2}$ ($p>0$) имеет уравнение $y^2=-2px$. Соответственно ее ветви направлены вдоль отрицательного направления оси Ox.

5) Параболы с фокусами в точках $\left(0,\pm\frac{p}{2}\right)$ оси ординат и директрисами $y=\pm\frac{p}{2}$ ($p>0$) имеют уравнения $x^2=\pm2py$. Соответственно их ветви направлены вдоль оси Oy.