



**Г. А. Казунина  
А. В. Чередниченко  
Г. А. Липина**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

**Учебное пособие**

Кемерово 2018

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
*«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»*

**Г. А. Казунина  
А. В. Чередниченко  
Г. А. Липина**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

**Учебное пособие**

Кемерово 2018

УДК 517(075.8)

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» (заведующий кафедрой кандидат технических наук, доцент Каган Е. С.)

Доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики Славолубова Я. В. (ФГОУ ВО «Российский экономический институт имени Г. В. Плеханова Кемеровский институт (филиал)»)

Казунина, Г. А. **Высшая математика. Криволинейные и поверхностные интегралы:** учебное пособие / Г. А. Казунина, А. В. Чередниченко, Г. А. Липина; КузГТУ. – Кемерово, 2018. – 52 с.

ISBN 978-5-00137-021-5

Рассмотрены основные положения теории и представлены задания для самостоятельной работы по разделам курса: криволинейные и поверхностные интегралы первого рода, векторный анализ (дифференциальные операции в векторных полях, поток векторного поля, циркуляция векторного поля). Пособие подготовлено по дисциплине «Высшая математика» и предназначено для студентов всех направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 517(075.8)

© КузГТУ, 2018

© Казунина Г. А.,  
Чередниченко А. В.,  
Липина Г. А., 2018

ISBN 978-5-00137-021-5

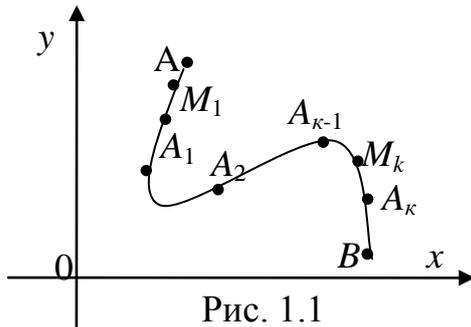
## **Предисловие**

При подготовке студентов технических направлений при изучении специальных курсов, таких как теория электрического и магнитного полей и других, требуется знакомство обучающихся с основными понятиями векторного анализа. В предлагаемом учебном пособии в краткой и доступной форме излагаются основные положения теории и приводятся примеры решения задач, в том числе с физическим содержанием, что облегчает понимание и показывает взаимосвязь теоретического материала с его применением для решения задач физики и техники. Для усвоения материала обучающиеся должны быть знакомы с такими разделами курса высшей математики как аналитическая геометрия, интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Также предлагается большое количество задач для самостоятельной работы.

# Глава 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ (ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА)

## 1.1. Криволинейные интегралы

Конструкцию криволинейных интегралов как предела интегральных сумм будем вводить, рассматривая задачу вычисления массы  $m$  распределенной вдоль кривой  $L = \overset{\sim}{AB}$  с линейной плотностью  $\mu = f(x, y)$  – непрерывной функцией на  $L$ , где  $x, y$  координаты некоторой точки этой кривой. Для этого кривую дугу кусочно-гладкой кривой  $L$  разобьем на  $n$  произвольных элементов частичных дуг с помощью точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  (рис. 1.1). На каждой элементарной



дуге  $\overset{\sim}{A_{k-1}A_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) выберем по одной произвольной точке  $M_k(\xi_k, \eta_k)$ . Масса  $\Delta m_k$   $k$ -го элемента с длиной  $\Delta l_k$  будет приближенно равна произведению  $f(M_k) \cdot \Delta l_k$ . Тогда вся масса представляется выражением

дуге  $\overset{\sim}{A_{k-1}A_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) выберем по одной произвольной точке  $M_k(\xi_k, \eta_k)$ . Масса  $\Delta m_k$   $k$ -го элемента с длиной  $\Delta l_k$  будет приближенно равна произведению  $f(M_k) \cdot \Delta l_k$ . Тогда вся масса представляется выражением

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k.$$

Полученная сумма является интегральной суммой первого рода для функции  $f(x, y)$  по кривой  $L$ . Ее предел при  $n \rightarrow \infty$  и стягивании всех элементарных дуг в точку с физической точки зрения будет давать массу  $m$ , распределенную вдоль кривой  $L$  с плотностью  $f(x, y)$ .

**Определение 1.1.** Предел интегральных сумм при  $n \rightarrow \infty$  и  $\lambda = \max \Delta l_k \rightarrow 0$ , если он существует и не зависит ни от способа разбиения кривой  $L$  на части, ни от выбора точек  $M_k(\xi_k, \eta_k)$  на каждой из них, называют криволинейным интегралом первого рода от функции  $f(x, y)$  по длине кривой  $L$  и обозначают

$$\int_L f(x, y) dl. \quad (1.1)$$

Таким образом,

$$\int_L f(x, y)dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k.$$

Криволинейный интеграл (1.1) от непрерывной функции на гладкой или кусочно-гладкой кривой  $L = \overline{AB}$  не зависит от направления обхода кривой:

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y)dl = \int_{\overline{BA}} f(x, y)dl.$$

Если кривая  $L$  составлена из двух (или более) непересекающихся дуг  $L_1$  и  $L_2$ , то интеграл представляется как сумма интегралов:

$$\int_{L_1+L_2} f(x, y)dl = \int_{L_1} f(x, y)dl + \int_{L_2} f(x, y)dl.$$

Вычисление интеграла (1.1) сводится к вычислению обычного определенного интеграла с помощью уравнения (уравнений) кривой  $L$ . При этом дифференциал длины дуги  $dl$  зависит от способа задания кривой.

Так, если кривая  $L$  задана уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  и  $y'(x)$  – непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1.2)$$

При переходе в равенстве (1.2) слева направо в выражении  $f(x, y)$  переменная  $y$  заменена на  $y(x)$ , а  $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ .

В некоторых случаях удобно из уравнения кривой  $L$  выразить  $x = x(y)$ , ( $c \leq y \leq d$ ), тогда

$$\int_L f(x, y)dl = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + (x')^2} dy. \quad (1.3)$$

При параметрическом задании кривой  $L: x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , ( $\alpha \leq t \leq \beta$ )

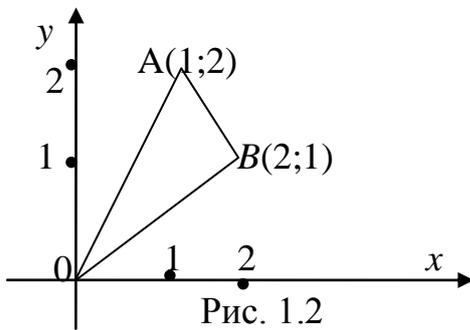
$$\int_L f(x, y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt. \quad (1.4)$$

Для пространственной кривой  $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ,  
 $(\alpha \leq t \leq \beta)$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt. \quad (1.5)$$

Для кривой, заданной в полярной системе координат  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$



**Пример 1.1.** Вычислить  $\int_L y dl$

по контуру  $L$  плоской фигуры  $G$ ,  
ограниченной линиями:  $y = 2x$ ,  
 $x = 2y$ ,  $x + y = 3$  (рис. 1.2).

**Решение:**

$$\int_L y dl = \int_{OA} y dl + \int_{AB} y dl + \int_{BO} y dl = \begin{cases} \text{на } OA: & y = 2x, y' = 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \text{на } AB: & x = 3 - y, x' = -1, & 1 \leq y \leq 2 \\ \text{на } BO: & x = 2y, x' = 2, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} =$$

$$= \int_0^1 2x \sqrt{1+4} dx + \int_1^2 y \sqrt{1+1} dy + \int_0^1 y \sqrt{4+1} dy = \sqrt{5} x^2 \Big|_0^1 + \sqrt{2} \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 +$$

$$+ \sqrt{5} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} 3 = \frac{3}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \approx 5,5.$$

**Пример 1.2.** Найти массу первого витка винтовой линии:  
 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ , если плотность в каждой ее  
точке выражается формулой  $\mu = k(x^2 + z^2)$ .

**Решение:** Плотность  $\mu = k(x^2 + z^2)$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Используем формулу (1.5):

$$\begin{aligned}
m &= k \int_L (x^2 + z^2) dl = \\
&= k \int_L (a^2 \cos^2 t + b^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \\
&= k \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a^2}{2} (1 + \cos 2t) + b^2 t^2 \right] dt = k \sqrt{a^2 + b^2} \left( \pi a^2 + \frac{8}{3} b^2 \pi^3 \right).
\end{aligned}$$

## 1.2. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы вводятся аналогично криволинейным интегралам первого рода.

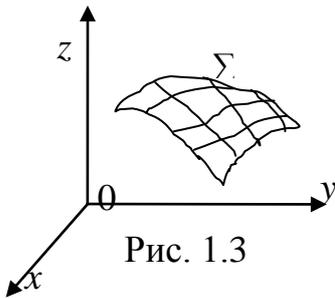


Рис. 1.3

Пусть на гладкой поверхности  $\Sigma$  определена непрерывная функция  $u = f(x, y, z) = f(P)$ ,  $P \in \Sigma$ . Эта функция может выражать плотность распределения массы на  $\Sigma$ . Разобьем  $\Sigma$  на  $n$  произвольных частичных поверхностей площадью  $\Delta\sigma_k$ , как-то их пронумеруем (рис. 1.3). На каждой частичной поверхности выберем по представительной точке  $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\sigma_k. \quad (1.6)$$

**Определение 1.2.** Предел последовательности интегральных сумм (1.6), если он существует при  $n \rightarrow \infty \max_k \Delta\sigma_k \rightarrow 0$  и не зависит ни от способа разбиения поверхности  $\Sigma$  на части, ни от выбора точек  $p_k$  на каждой из них, называют поверхностным интегралом первого рода от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$ :

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\sigma_k. \quad (1.7)$$

Использование двух знаков интеграла в обозначении связано со способом вычисления поверхностного интеграла через двукратный (двойной) интеграл.

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на гладкой поверхности  $\Sigma$ , которая задана уравнением  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . Область  $D$  лежит в плоскости  $OXY$  и является проекцией  $(\Sigma)$  на плоскость  $OXY$ . Если производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  непрерывны в области

$D$ , то поверхностный интеграл существует и вычисляется по формуле

$$\iint_{(\Sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.8)$$

То есть поверхностный интеграл вычисляется как двойной интеграл по проекции на соответствующую координатную плоскость. При этом в случае проекции на плоскость  $OXY$  переменная  $z$  заменяется на  $z(x, y)$  (из уравнения поверхности), а элемент площади поверхности  $d\sigma$  выражается по формуле

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1.9)$$

Здесь частные производные также находятся из уравнения поверхности:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y).$$

**Пример 1.3.** Вычислить  $\iint_{(\Sigma)} (x^2 + 2z) d\sigma$ , где  $(\Sigma)$  – часть поверхности цилиндра  $z = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ , ограниченная плоскостями  $z > 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

**Решение:** Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (1 - x^2) \right] = -x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} (1 - x^2) \right] = 0.$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2} dx dy.$$

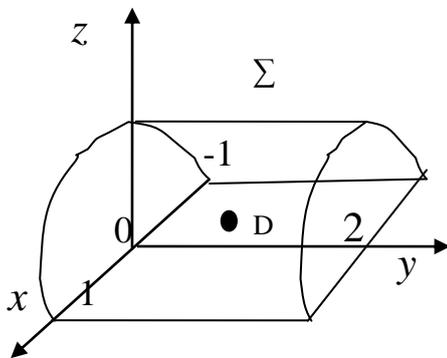


Рис. 1.4

Как видно из рисунка 1.4, данная поверхность однозначно проецируется на плоскость  $OXY$  в прямоугольник, ограниченный линиями  $x=1$ ,  $x=-1$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ . Поэтому интеграл согласно (1.8) равен

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + 2z) d\sigma &= \iint_D \left[ x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - x^2) \right] \sqrt{1 + x^2} dx dy = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \int_0^2 dy = \\ &= 2 \cdot 2 \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = 4 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right] \Big|_0^1 = \\ &= 2 \left[ \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \approx 4,6. \end{aligned}$$

**Пример 1.4.** Вычислить поверхностный интеграл

$\iint_{(\Sigma)} \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma$ , где  $(\Sigma)$  – часть плоскости  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ , заключенная в первом октанте (рис. 1.5а).

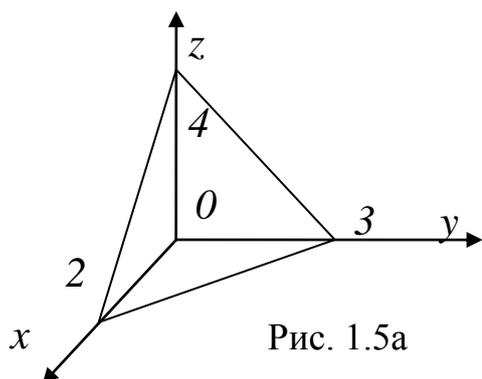


Рис. 1.5а

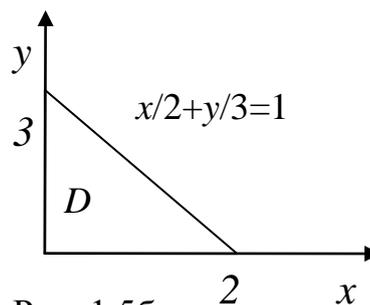


Рис. 1.5б

**Решение:** Разрешим данное уравнение поверхности относительно  $z$ , т. е. представим  $z$  как функцию переменных  $x$  и  $y$ :

$z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$ ,  $x, y \in D$ . Здесь область  $D$ , проекция поверхности  $\Sigma$

на плоскость  $OXY$ , представляет собой треугольник, ограниченный прямыми  $x=0$ ,  $y=0$  и  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  (рис. 1.5б). Поверхностный интеграл сведем к двойному, воспользовавшись формулой (1.8). Так как

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -2$ ,  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{4}{3}$  и  $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy$ , то

по формуле (1.8) получаем

$$\iint_{(\Sigma)} \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma = \iint_D \left[ 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy.$$

Последний двойной интеграл выражает площадь треугольника  $D$ , которая равна 3.

Следовательно, 
$$\iint_{(\Sigma)} \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma = 4\sqrt{61}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл от заданной функции по заданному отрезку линии:
  - 1.1  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $l: y = 2x$ ;  $x \in [0; 1]$ ;
  - 1.2  $f(M) = k\sqrt{\rho}$ ;  $l: \rho = a(1 + \cos \varphi)$ ;  $k = \text{const}$ ;  $a = \text{const}$ ;
  - 1.3  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$ ;  $l: x = t \cos t$ ;  $y = t \sin t$ ;  $z = t$ ;  
 $t \in [0; 2\pi]$ .
2. Найти массу, распределенную вдоль криволинейного отрезка
  - 2.1  $y = \frac{x^2}{2}$  с плотностью  $\gamma(x, y) = \frac{y}{x}$ ;  $x \in [0; 1]$ ;
  - 2.2  $y = 4\sqrt{x}$ ;  $x \in [0; 4]$ , если плотность в каждой точке  $f(x, y) = y$ ;
  - 2.3  $x^2 + y^2 = R^2$ ;  $y \geq 0$  с линейной плотностью  $\gamma(x, y) = x^2$ .
3. Вычислить интеграл по части поверхности конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ :
 
$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + xz) d\sigma.$$
4. Вычислить площадь и момент инерции относительно  $OZ$  куса поверхности однородного параболоида  $2z = x^2 + y^2$ , отсеченного  $z = 1$ .
5. Определите координаты центра масс полусферы радиуса  $R$  с центром в начале координат с поверхностной плотностью  $\gamma = a\sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $a = \text{const}$ .
6. Найдите массу, распределенную с поверхностной плотностью  $\gamma = \frac{z}{x^2 + y^2}$  по части поверхности параболоида  $x^2 + y^2 = 2z$ , отсекаемой плоскостью  $z = 1$ ;  $z \leq 1$ .

## Глава 2. ТЕОРИЯ ПОЛЯ (ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ)

### 2.1. Понятие скалярного и векторного поля

Понятие поля является физическим аналогом функции нескольких переменных. Если в каждой точке  $M$  некоторой области  $D$  пространства задано значение скалярной функции  $U(M)$ , то говорят, что в области  $D$  задано скалярное поле.

Простейший пример скалярного поля – поле температур какого-либо тела.

Если в каждой точке  $M$  области  $D$  задано значение векторной величины  $\vec{A}(M)$ , то говорят, что в области  $D$  задано векторное поле:

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радиус-вектор точки  $M$ .

Примерами векторных полей являются поле скоростей потока жидкости  $\vec{V}(\vec{r})$ ; электрическое поле, характеризуемое вектором электрической напряженности  $\vec{E}(\vec{r})$ ; магнитное поле, которое описывается вектором  $\vec{H}(\vec{r})$ .

Геометрической характеристикой векторных полей служат векторные силовые линии – кривые, касательные векторы к которым в каждой точке имеют направление соответствующего векторного поля  $\vec{A}(M)$ .

Если векторная линия описывается уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то условие параллельности вектора  $\vec{A}(M_0)$  и касательного вектора  $d\vec{r}$  имеет вид  $[\vec{A}, d\vec{r}] = 0$ , что в прямоугольной системе координат эквивалентно системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \quad (2.2)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$ .

**Пример 2.1.** Найдем уравнения векторных линий поля  $\vec{E}$ , точечного электрического заряда, помещенного в начале координат:

$$\vec{E} = \frac{k}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{k\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = k \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j} \right). \quad (2.3)$$

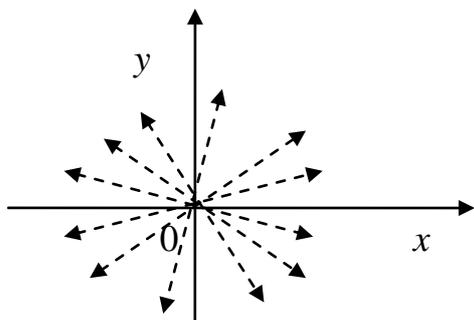


Рис. 2.1

**Решение:** Компоненты векторного поля имеют вид

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_y = \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

а уравнения векторных линий принимают вид

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Решением этого уравнения является множество лучей  $y = cx$ , проходящих через начало координат (рис. 2.1). В начале координат решение дифференциальных уравнений не существует.

**Пример 2.2.** Найдем уравнения векторных линий поля магнитной напряженности  $\vec{H}$  петли с током, охватывающей начало координат:

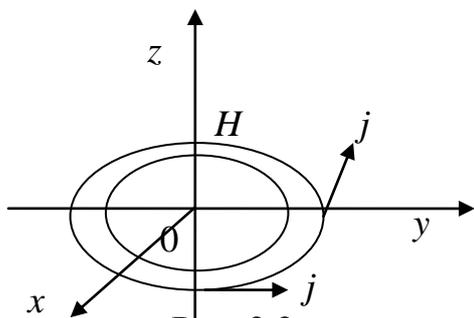


Рис. 2.2

$$\vec{H} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}. \quad (2.4)$$

**Решение:** С учетом того, что

$$H_x = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad H_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

для нахождения векторных линий получаем уравнение  $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$  или  $ydx = -xdy$ , решение которого представляет собой семейство окружностей с центром в начале координат  $x^2 + y^2 = c$  (рис. 2.2).

**Упражнение 2.1.** Найдите уравнение векторных линий поля линейных скоростей твердого поля  $\vec{V}$ , вращающегося вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega$ :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}. \quad (2.5)$$

## 2.2. Дифференцирование полей. Оператор Гамильтона

### 2.2.1. Дифференциальные операции первого порядка

Дифференциальные операции векторного анализа удобно записывать с помощью векторного оператора  $\vec{\nabla}$  («набла» или оператора Гамильтона):

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.6)$$

1. Действие оператора  $\vec{\nabla}$  на скалярную функцию  $u(x, y, z)$  дает градиент скалярного поля

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u. \quad (2.7)$$

Напомним, что вектор  $\vec{\nabla} u$  в данной точке указывает направление наибыстрейшего возрастания поля  $u(x, y, z)$ , а  $|\vec{\nabla} u|$  есть скорость роста поля в этом направлении.

2. «Скалярное произведение» оператора  $\vec{\nabla}$  и векторной функции  $\vec{A}$  определяет скалярную функцию, которая называется дивергенцией векторного поля:

$$(\vec{\nabla}, \vec{A}) = \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Слово «дивергенция» обозначает «расходимость». Величина  $\text{div } \vec{A}$  характеризует плотность источников векторного поля в точке.

3. «Векторное произведение»  $\vec{\nabla}$  оператора и векторной функции  $\vec{A}$  определяет векторную функцию, которую называют ротором (или вихрем) поля  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned}
 [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \operatorname{rot} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\
 &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

**Пример 2.3.** Вычислить  $\operatorname{div} r$  и  $\operatorname{rot} r$ , где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радиус-вектор:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0.$$

**Пример 2.4.** Вычислить  $\operatorname{div} \vec{H}$  и  $\operatorname{rot} \vec{H}$  магнитного поля петли с током:

$$\vec{H} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}.$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\
 &= \frac{yx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{yx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \right) \vec{i} - \\ &- \left( \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Вектор  $\operatorname{rot} \vec{H}$  по направлению совпадает с направлением оси  $OZ$  (см. рис. 2.2).

**Упражнение 2.2.** Вычислить  $\operatorname{div} \vec{V}, \operatorname{rot} \vec{V}$  для  $\vec{V} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$  — поля линейных скоростей вращающегося твердого тела (см. упражнение 1). Обратите внимание на то, что направление вектора  $\operatorname{rot} \vec{V}$  совпадает по направлению с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

**Упражнение 2.3.** Покажите, что для электрического поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \quad (2.10)$$

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  и  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  везде, кроме начала координат, где  $\operatorname{div} \vec{E}(0) = \infty$ .

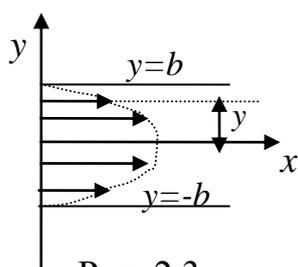


Рис. 2.3

**Упражнение 2.4.** Рассмотрите поле скоростей течения жидкости (или газа) в канале между двумя параллельными стенками. При учете трения о стенки скорость

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{будет максимальна в сере-}$$

дине канала и упадет до нуля вблизи стен (см. рис. 2.3). Здесь  $y$  – расстояние до центра канала, а  $2b$  – ширина канала.

Пусть на расстоянии  $y$  от оси канала плывет щепка, которая будет вращаться по мере продвижения вниз по течению. С учетом того, что  $\text{rot } \vec{V} = 2\omega\vec{k}$ , проанализируйте, как зависит угловая скорость вращения щепки от параметров  $V_0, y, b$ .

### 2.2.2. Дифференциальные операции второго порядка

#### 1. Операция

$$\text{div grad } u = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})u = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

приводит к скалярной величине.

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется оператором Лапласа.

С помощью уравнения  $\Delta u = 0$ , которое называется уравнением Лапласа, описываются стационарные процессы различной природы (стационарное распределение тепла, установившееся течение несжимаемой жидкости и т. п.).

#### 2. Операция

$$\text{rot grad } u = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]u = 0 \quad (2.12)$$

определяется как векторное произведение вектора  $\vec{\nabla}$  на самого себя. Однако можно привести и другое доказательство:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \vec{k} = 0$$

в силу равенства смешанных производных в точках непрерывности.

### 3. Операция

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = 0$$

всегда, как смешанное произведение компланарных векторов.

### 4. Отметим, что еще имеют место равенства

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}, \vec{A}) \text{ и } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]].$$

**Упражнение 2.5.** Для векторного поля  $\vec{A} = xy^2 \vec{i} + yz^2 \vec{j} + zx^2 \vec{k}$  вычислить  $\operatorname{div} \vec{A}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{A}$ ,  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$ .

**Упражнение 2.6.** Для скалярного поля  $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + c$  вычислить  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$ ,  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ .

## 2.3. Вихревые и потенциальные поля

Векторное поле  $\vec{A}(M)$  называется **соленоидальным** (или вихревым, или трубчатым), если в каждой точке области  $D$   $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

Это имеет место для любого дважды дифференцируемого поля, вектор которого равен ротору какого-либо другого вектора, поскольку при  $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$ ,  $\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$ . Примерами таких полей могут служить поле скоростей вращающегося твердого тела, магнитное поле петли с током.

Векторные линии соленоидального поля не могут начинаться или заканчиваться в области соленоидальности, они либо являются замкнутыми кривыми либо начинаются и заканчиваются в области  $D$ .

Векторное поле  $\vec{A}(M)$  называется **потенциальным** в области  $D$ , если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля  $U(M)$ :  $\vec{A} = \text{grad } U$ .

Функцию  $U(M)$  называют скалярным потенциалом векторного поля  $\vec{A}(M)$ . В качестве примера потенциального векторного поля можно привести поле точечного электрического заряда, помещенного в начало координат (2.10):  $\vec{E} = -\text{grad } U$ , где

$$U = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (k = \text{const})$$

называется потенциалом электрического поля точечного заряда.

**Теорема 2.1.** Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля  $\vec{A}(M)$ , дважды дифференцируемого в односвязной области  $D$ , является условие:  $\text{rot } \vec{A}(M) = 0$ .

Необходимость следует из соотношения  $\text{rot } \vec{A} = \text{rot grad } U = 0$ , см. (2.12). Достаточность следует из теоремы Стокса, см. далее (2.41). Заметим, что все условия теоремы важны. Так, векторное поле

$$\vec{A} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

не является потенциальным в области, включающей начало координат, хотя условие  $\text{rot } \vec{A} = 0$  выполняется. В этом случае в начале координат нарушается непрерывность поля, а исключение начала координат нарушает односвязность области.

**Упражнение 2.7.** Проверьте соленоидальность векторного поля

$$\vec{A} = \frac{x}{yz} \vec{i} + \frac{y}{xz} \vec{j} + \frac{(x+y)\ln z}{xy} \vec{k}.$$

**Упражнение 2.8.** Покажите, что векторное поле

$$\vec{A} = (2x - yz)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k} \text{ потенциально.}$$

### 2.4. Интеграл от векторной функции по кривой (криволинейный интеграл второго рода). Свойства потенциального поля. Нахождение потенциала векторного поля

Пусть на дуге кусочно-гладкой кривой  $L$ , задаваемой уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , определено непрерывное векторное поле  $\vec{A}(M)$ ,  $M \in L$ . Для определенности будем считать  $\vec{A}(M)$  вектором силы. Найдем работу силы  $\vec{A}(M)$  при перемещении материальной точки из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль кривой  $L$ .

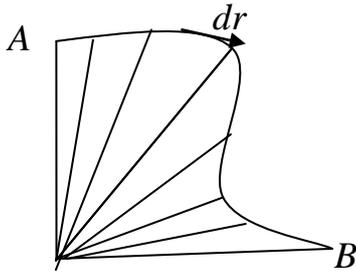


Рис. 2.4а

 $\vec{A}\vec{B}$ 

$$(\vec{A}, \vec{dr}) > 0$$

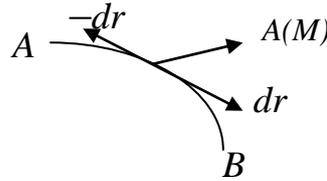


Рис. 2.4б

 $\vec{B}\vec{A}$ 

$$(\vec{A}, \vec{dr}) < 0$$

Для этого разобьем дугу  $\vec{A}\vec{B}$  на  $n$  частичных дуг произвольным образом. На каждой частичной дуге  $(P_{k-1}, P_k)$  также произвольным образом выберем точку  $M_k$  и зададим значение поля в этой точке  $\vec{A}(M_k)$ . При движении по дуге  $(P_{k-1}, P_k)$  силу будем приближенно считать постоянной величиной  $\vec{A}(M_k)$ , а движение по дуге заменим приближенно на движение по касательной с постоянной скоростью. При этом элементарное перемещение может быть задано приращением радиус-вектора  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{\Delta r}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k},$$

которое при  $\Delta t \rightarrow 0$  совпадает с направлением касательного вектора  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ . Тогда элементарная работа по перемещению материальной точки вдоль дуги  $(P_{k-1}, P_k)$  может быть задана как скалярное произведение  $(\vec{A}(M_k), \Delta\vec{r}_k)$ .

Работа силы  $\vec{A}(M)$  по перемещению материальной точки вдоль дуги  $A\vec{B}$  приближенно представляется в виде интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{A}(M_k), \Delta\vec{r}_k). \quad (2.13)$$

Если существует предел последовательности интегральных сумм (2.13) при условии  $n \rightarrow \infty$ ,  $\max\{\Delta r_k\} \rightarrow 0$ , который не зависит от способа разбиения на дуги и выбора точки  $M_k$ , то он называется **криволинейным интегралом второго рода**:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\Delta r_k\} \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (\vec{A}(M_k), \Delta\vec{r}_k) &= \int_{A\vec{B}} (\vec{A}, d\vec{r}) = \\ &= \int_{A\vec{B}} (A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y, z)dz). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как следует из вышеизложенного, простейший физический смысл этого интеграла – работа силового поля.

Перечислим основные свойства криволинейных интегралов второго рода

1. Аддитивность. Если кривая  $L$  представляет собой сумму двух (или нескольких) кривых  $L = L_1 + L_2$ , то

$$\int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{L_1} (\vec{A}, d\vec{r}) + \int_{L_2} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

2. В отличие от криволинейного интеграла первого рода, интеграл второго рода изменяет знак при изменении направления обхода:

$$\int_{A\vec{B}} (\vec{A}, d\vec{r}) = - \int_{B\vec{A}} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Это свойство следует из свойств скалярного произведения  $(\vec{A}, d\vec{r})$ , которое изменяет знак при изменении направления обхода кривой (см. рис. 2.4б).

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

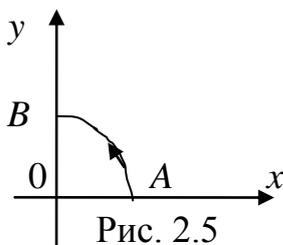
1. Если кривая  $L$  задана на плоскости уравнением  $y = y(x)$  при  $x \in [a, b]$ , то  $dy = y'(x)dx$ , а интеграл вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \int_L (\vec{A}, d\vec{r}) &= \int_L A_x(x, y)dx + A_y(x, y)dy = \\ &= \int_a^b (A_x(x, y(x)) + A_y(x, y(x))y'(x))dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2. Если кривая  $L$  задана параметрически  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , то интеграл вычисляют по формуле

$$\begin{aligned} \int_L (\vec{A}, d\vec{r}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (A_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ &+ A_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + A_z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

**Пример 2.5.** Вычислить работу векторного поля  $\vec{A} = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$  при перемещении материальной точки вдоль четверти окружности  $x^2 + y^2 = 1$  от точки  $A(1;0)$  до  $B(0;1)$  (рис. 2.5).

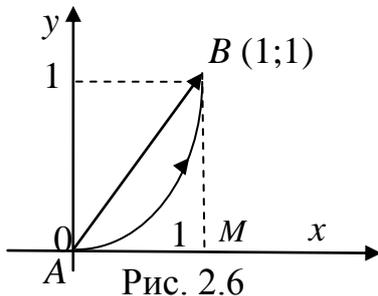


**Решение:** В данном случае удобно использовать формулу (2.15), задав параметрически уравнение окружности:  $x = \cos t$ ;  
 $y = \sin t$ ;  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

С учетом того, что  $dx = -\sin t dt$ ,  
 $dy = \cos t dt$ , имеем

$$\int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int x^2 dx + xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \cdot \sin t + \cos^2 t \cdot \sin t) dt =$$

$$= \left( \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$



**Пример 2.6.** Вычислить работу векторного поля  $\vec{A} = 3x^2 y \vec{i} + (x^3 + 1) \vec{j}$  по перемещению материальной точки из точки  $A(0;0)$  до точки  $B(1;1)$  вдоль различных кривых (рис. 2.6): а)  $L: y = x$ ;

б)  $L: y = x^2$ ;

в)  $L$ : ломаная  $OMB$ .

Для решения задачи используем формулу (2.15):

а)  $y = x$ ;  $dy = dx$ ;

$$\int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = (x^4 + x) \Big|_0^1 = 2$$

б)  $y = x^2$ ;  $dy = 2x dx$ ;

$$\int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_0^1 (3x^2 \cdot x^2 + (x^3 + 1)2x) dx = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = (x^5 + x^2) \Big|_0^1 = 2;$$

в) кривая  $L$  может быть представлена в виде суммы двух отрезков прямых  $L = OM + MB$ , причем отрезок  $OM$  соответствует уравнению кривой  $y = 0$  и  $dy = 0$ , а отрезок  $MB$  соответствует уравнению кривой  $x = 1$  и  $dx = 0$ .

$$\int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{OM} (\vec{A}, d\vec{r}) + \int_{MB} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_0^1 A_x(x, 0) dx + \int_0^1 A_y(1, y) dy =$$

$$= \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 (1 + 1) dy = 2.$$

Полученный результат – независимость интеграла от пути интегрирования – не является случайным, а является следствием того, что рассматриваемое в задаче поле является потенциальным (выполняются условия теоремы 2.1).

Если поле является потенциальным, то согласно определению

$$\vec{A} = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.17)$$

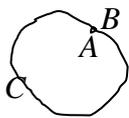
Следовательно, выражение

$$\begin{aligned} (\vec{A}, d\vec{r}) &= A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y, z)dz = \\ &= (\text{grad } u, d\vec{r}) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du \end{aligned} \quad (2.18)$$

является полным дифференциалом функции  $u(x, y, z)$ . Тогда интеграл по дуге равен

$$\int_{A\vec{B}} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{A\vec{B}} (\text{grad } u, d\vec{r}) = \int_{A\vec{B}} du = u|_A^B = u(B) - u(A). \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что для потенциального векторного поля интеграл по кривой не зависит от контура интегрирования, а определяется только конечной и начальной точками интегрирования. Для замкнутого контура интегрирования ( $u(B) = u(A)$ ) интеграл вдоль контура равен нулю



$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = 0. \quad (2.20)$$

Таким образом, для **потенциальных векторных полей** справедливы следующие положения:

1. Векторное поле  $\vec{A}$  является градиентом некоторой скалярной функции  $u(x, y, z)$ , которую называют потенциалом поля:

$$\vec{A} = \text{grad } u.$$

2.  $\text{rot } \vec{A} = 0$  в односвязной области  $D$ , где векторное поле  $\vec{A}$  дважды непрерывно дифференцируемо.

## 3. Выражение

$$du = A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y, z)dz$$

является полным дифференциалом функции  $u(x, y, z)$ .

4. Интеграл  $\int_{AB} (\vec{A}, d\vec{r})$  не зависит от пути интегрирования, а определяется только конечной и начальной точками интегрирования.

5. Интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Заметим, что, взяв одно из этих положений за основное, можно доказать все остальные, используя также теорему Стокса (2.39).

**Упражнение 2.10.** Найдите работу векторного поля

$$\vec{A} = (yz - xy)\vec{i} + \left( xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 \right)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k}$$

при перемещении материальной точки из  $A(3;0)$  в  $B(0;2)$ :

а) вдоль эллипса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad z = 0;$

б) вдоль прямой  $2x + 3y - 6 = 0, \quad z = 0.$

Используя выражение

$$u(x, y, z) = \int_{AB} du + c = \int_{AB} (\vec{A}, d\vec{r}) + c, \quad (2.21)$$

можно легко вычислить потенциал по полю  $\vec{A}$ .

В силу того, что для потенциального поля интеграл не зависит от контура интегрирования, удобно выбирать контур в виде ломанной, звенья которой параллельны координатным осям. В качестве точки  $A$  всегда выбирают точку непрерывности поля. В качестве точки  $B$  берут точку с текущими координатами  $B(x, y, z)$ . Тогда потенциал поля  $u(x, y, z)$  равен (см. рис. 2.7)

$$u(x, y, z) = \int_{A\bar{B}} (\vec{A}, d\vec{r}) + c = \int_{AC} (\vec{A}, d\vec{r}) + \int_{CD} (\vec{A}, d\vec{r}) + \int_{DB} (\vec{A}, d\vec{r}). \quad (2.22)$$

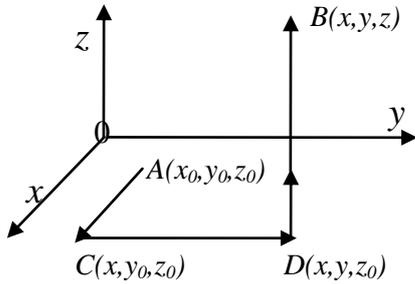


Рис. 2.7

Звено ломаной  $AC$  задается уравнениями  $y = y_0, z = z_0$ . Поэтому для данного звена  $dy = 0; dz = 0$ , а вектор элементарного перемещения  $d\vec{r} = (dx; 0; 0)$ . Подынтегральное выражение имеет вид

$$(\vec{A}, d\vec{r}) = A_x(x, y_0, z_0)dx.$$

Звено ломаной  $CD$  задается уравнением  $x = \bar{x} = \text{const}, z = z_0$ , поэтому для данного звена  $dx = 0, dz = 0, d\vec{r} = (0; dy; 0); (\vec{A}, d\vec{r}) = A_y(\bar{x}, y, z_0)dy$ .

Звено  $DB$  имеет уравнение  $x = \bar{x} = \text{const}, y = \bar{y} = \text{const}$ . Поэтому  $dx = 0, dy = 0, d\vec{r} = (0; 0; dz)$ , а  $(\vec{A}, d\vec{r}) = A_z(x, y, z)dz$ .

С учетом сказанного для потенциала поля получаем выражение

$$u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \int_{x_0}^{\bar{x}} A_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{\bar{y}} A_y(\bar{x}, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{\bar{z}} A_z(\bar{x}, \bar{y}, z)dz + c. \quad (2.23)$$

В двумерном случае потенциал поля находят по аналогичной формуле:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{x_0}^{\bar{x}} A_x(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{\bar{y}} A_y(\bar{x}, y)dy + c. \quad (2.24)$$

**Пример 2.7.** Найти потенциал векторного поля  $\vec{A} = 3x^2y\vec{i} + (x^3 + 1)\vec{j}$ , рассмотренного ранее в примере 2.6.

Согласно (2.24) имеем

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^{\bar{x}} 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{\bar{y}} (\bar{x}^3 + 1) dy = \bar{x}^3 \bar{y} + \bar{y} + c$$

или

$$u(x, y) = x^3 y + y + c.$$

Здесь в качестве точки начала интегрирования выбрано начало координат  $A(0;0)$ , т. к. эта точка является точкой непрерывности исходного векторного поля и удобна для вычислений. Вычислив  $\text{grad } u = 3x^2\vec{i} + (x^3 + 1)\vec{j}$ , видим, что он совпадает с исходным векторным полем. Это подтверждает правильность проведенных вычислений.

**Пример 2.8.** Покажите, что векторное поле

$$\vec{A} = (yz - xy)\vec{i} + \left( xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 \right)\vec{j} + (xy + y^2 z)\vec{k}$$

потенциально, и найдите потенциал поля  $u(x, y, z)$ .

Данное векторное поле определено для всего пространства, которое является односвязной областью, поэтому необходимым и достаточным условием потенциальности является условие  $\text{rot } \vec{A} = 0$ , которое в данном случае выполняется. Взяв в качестве начальной точки интегрирования начало координат, имеем

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \int_0^{\bar{x}} (0 - x \cdot 0) dx + \int_0^{\bar{y}} \left( \bar{x} \cdot 0 - \frac{x^2}{2} + y \cdot 0 \right) dy + \int_0^{\bar{z}} (\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 z) dz = \\ &= -\frac{\bar{x}^2}{2} \bar{y} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}^2 \cdot \frac{\bar{z}^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Заменяя текущие координаты  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  на  $x, y, z$ , имеем потенциал поля:

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2} x^2 y + xyz + \frac{1}{2} y^2 z^2 + c.$$

Правильность вычислений проверяется вычислением градиента:

$$\text{grad } u = (yz - xy)\vec{i} + \left( xz - \frac{x^2}{2} \right)\vec{j} + (xy + y^2 z)\vec{k}.$$

Зная потенциал  $u(x, y, z)$ , работу поля  $\vec{A}$  по перемещению материальной точки из  $A(3;0;0)$  в  $B(0;2;0)$  можно вычислить как разность потенциалов  $u(B) - u(A) = 0$ .

Сравните этот результат с ответом, полученным в упражнении 2.10.

**Упражнение 2.11.** Покажите, что векторное поле  $\vec{A}(x, y, z)$  потенциально, и найдите потенциал поля  $u(x, y, z)$ . Укажите область потенциальности поля:

а)  $\vec{A} = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\vec{i} + (3x^2 - 4xy - 3y^2)\vec{j}$ ;

б)  $\vec{A} = (3x^2 + yz)\vec{i} + (3y^2 + xz)\vec{j} + (3x^2 + xy)\vec{k}$ ;

в)  $\vec{A} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$ .

**Упражнение 2.12.** Найдите работу векторного поля  $\vec{A}$  по перемещению материальной точки по кривой  $C$ :

а)  $\vec{A} = (x - y)\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ ;  $C: x^2 + 3y^2 - 2x + 12y + 4 = 0$ .

б)  $\vec{A} = -\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\vec{j}$ ;  $C: x^2 + y^2 = 1$ .

Проанализируйте полученный результат.

## 2.5. Поток векторного поля через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода)

Пусть поверхность  $\Sigma$  задана в области  $D$  явно уравнением  $z = f(x, y)$ . Если функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема в области  $D$ , то поверхность называют гладкой. В каждой точке такой поверхности существуют касательная плоскость и нормаль к поверхности. Различают поверхности двусторонние и односторонние. Двусторонние поверхности характеризуются следующим свойством: выбранное в точке поверхности направление нормали сохраняется (не изменится на противоположное) при обходе по любому замкнутому контуру, принадлежащему поверхности. К таким поверхностям относятся: плоскость, сфера, эллипсоид, гиперболоиды.

Для односторонней поверхности существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное. Примером такой поверхности может быть лента Мебиуса. Ниже рассматриваются только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности можно задать два непрерывных векторных поля нормалей, противоположных по направлению:

$$\begin{aligned}\vec{N}(M) &= f'_x(M)\vec{i} - f'_y(M)\vec{j} + \vec{k}; \\ -\vec{N}(M) &= f'_x(M)\vec{i} + f'_y(M)\vec{j} - \vec{k}.\end{aligned}$$

При этом единичный вектор направления нормали задается направляющими косинусами вектора  $\vec{N}(M)$ :

$$\begin{aligned}\vec{n}(M) &= \frac{\vec{N}(M)}{|\vec{N}(M)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'_x(M)]^2 + [f'_y(M)]^2}} \cdot (\pm f'_x(M)\vec{i} \pm f'_y(M)\vec{j} \mp \vec{k}) = \\ &= \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.\end{aligned}$$

Ориентацией двусторонней поверхности называют выбор определенной стороны поверхности, который задается выбором направления поля нормалей  $\vec{N}(M)$  или  $-\vec{N}(M)$ .

Простейший пример ориентированной поверхности – плоскость, параллельная координатной плоскости  $OXY$  (рис. 2.8):

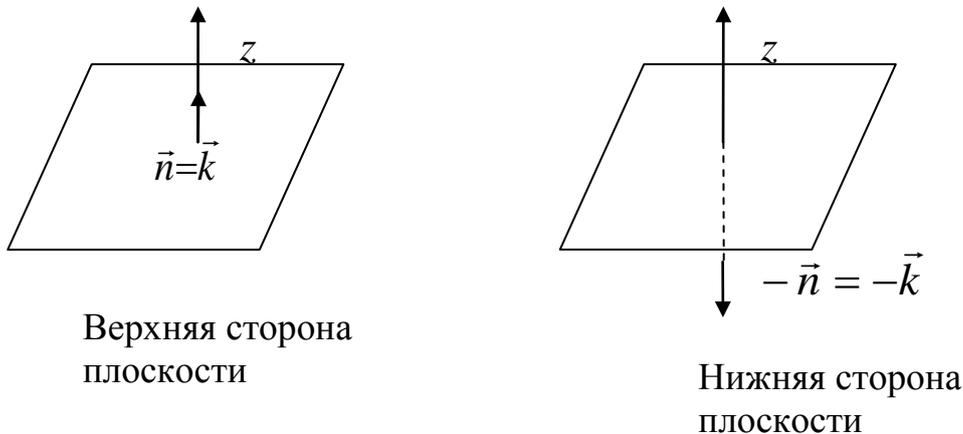


Рис. 2.8

Поверхность  $\Sigma$ , заданная уравнением  $z = f(x, y)$ , однозначно проектируется на плоскость  $OXY$ , если направляющий  $\cos \gamma$  (косинус угла между вектором нормали и осью  $OZ$ ) сохраняет знак для всех точек поверхности. При этом знак  $\cos \gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$  определяется выбором стороны поверхности в зависимости от того, острый или тупой угол образует выбранная нормаль  $\vec{N}$  с положительным направлением оси  $OZ$  (рис. 2.9).

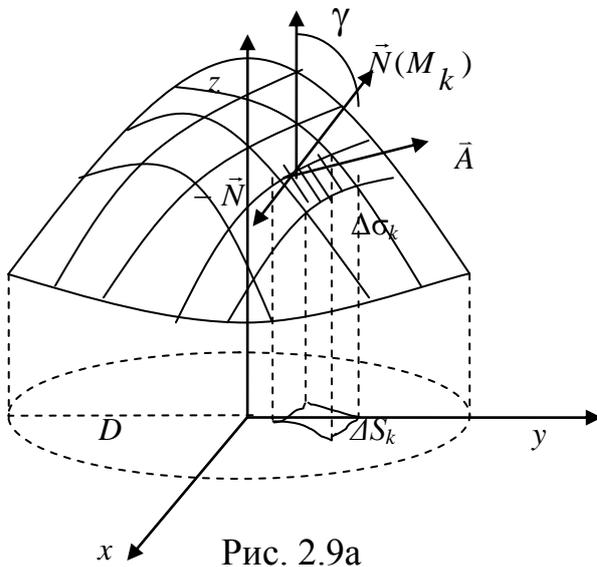


Рис. 2.9а

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \gamma > 0$$

$$\vec{N}(-f'_x, -f'_y, +1)$$

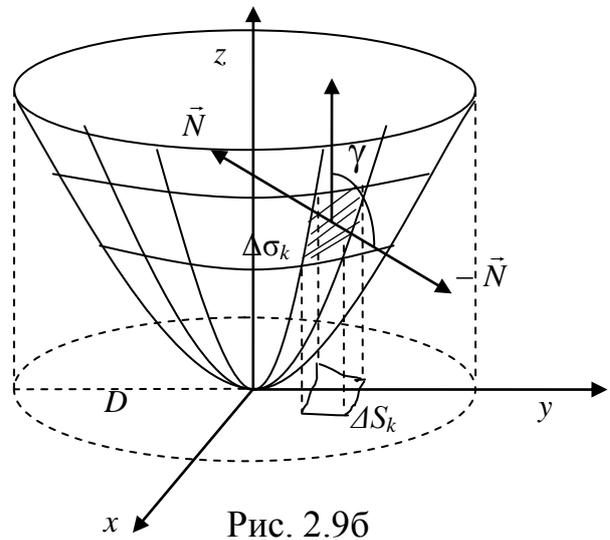


Рис. 2.9б

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$$

$$\cos \gamma < 0$$

$$-\vec{N}(f'_x, f'_y, -1)$$

Гладкую ориентированную поверхность  $\Sigma: z = f(x, y)$  разобьем произвольным образом на  $n$  частей площадью  $\Delta \sigma_k$ . На каждом элементарном участке поверхности выберем точку  $M_k$  произвольным образом и выберем направление нормали  $\vec{N}(M_k)$ . Каждый элементарный участок поверхности будем описывать вектором  $\Delta \vec{\sigma}_k$  (векторный элемент поверхности), который по направлению совпа-

дает с направлением нормали  $\vec{N}(M_k)$  и он равен по длине площади элементарного участка поверхности:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\sigma}_k &= \Delta\sigma_k \vec{n} = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \Delta x_k \Delta y_k \vec{n}(M_k) = \\ &= \frac{\Delta S_k}{|\cos \gamma|} \vec{n}(M_k) = \frac{\Delta S_k}{1} \cdot \frac{\vec{N}(M_k)}{|\vec{N}(M_k)|} = \vec{N}(M_k) \Delta S_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь  $\Delta S_k$  – площадь проекции участка поверхности  $\Delta\sigma_k$  на плоскость  $OXY$ .

Поместим ориентированный векторный элемент поверхности в «поле скоростей стационарно текущей жидкости»  $\vec{A} = \text{const}$ . «Количество жидкости», проходящей в единицу времени через эту площадку в направлении нормали к площадке, будет зависеть от ориентации площадки (рис. 2.10) и задается скалярным произведением  $(\vec{A}, \Delta\vec{\sigma}_k) = (\vec{A}, \vec{n}) \Delta\sigma_k$ .

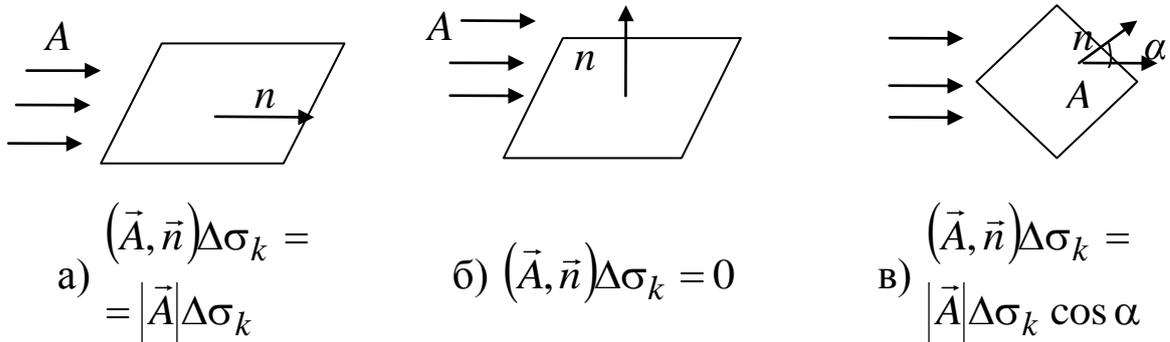


Рис. 2.10

Назовем величину  $(\vec{A}, \vec{n}) \Delta\sigma_k$  элементарным потоком векторного поля  $\vec{A}$ . Тогда полный поток поля  $\vec{A}$  через поверхность  $\Sigma$  можно представить как интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{A}(M_k), \Delta\sigma_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{A}(M_k), \vec{n}(M_k)) \Delta\sigma_k.$$

**Потоком** непрерывного векторного поля

$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$  через ориентированную поверхность  $\Sigma$  называют интеграл

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\Delta\sigma_k\} \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (\vec{A}(M_k), \Delta\vec{\sigma}_k) = \iint_{\Sigma} (\vec{A}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \quad (2.26)$$

Очевидно, что при изменении ориентации поверхности (замене нормали  $\vec{N}$  на  $-\vec{N}$ ) интеграл (2.26) изменит знак.

Поток векторного поля также называют поверхностным интегралом второго рода. Вычисление такого интеграла согласно (2.26) сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода от функции  $(\vec{A}, \vec{n})$ . При этом надо следить за тем, чтобы поверхность  $\Sigma$  однозначно проектировалась на выбранную координатную плоскость. Так, поверхность, заданную уравнением  $z = f(x, y)$ , при проектировании на плоскость  $OXY$  следует разделять на участки, для которых  $\cos \gamma$  вектора нормали сохраняет знак, вычислить отдельно интеграл (поток) по каждому участку и суммировать затем эти интегралы. В тех случаях, когда поверхность  $\Sigma$  совпадает или параллельна одной из координатных плоскостей, вектор нормали совпадает с одним из координатных ортов, а вычисление интеграла (2.26) является особенно простым.

**Пример 2.9.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{A} = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j} + z\vec{k}$  через часть плоскости  $x + y + z = 4$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ , в положительном направлении нормали (рис. 2.11).

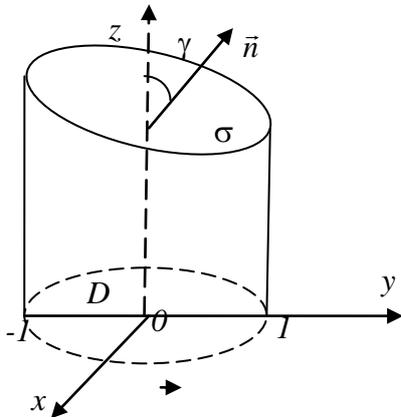


Рис. 2.11

**Решение:** Поток через часть плоскости  $x + y + z = 4$  (обозначим эту поверхность  $\sigma$ ) удобно вычислять методом проекции на координатную плоскость  $XOY$ , так как поверхность  $\sigma$  однозначно проектируется на плоскость в круг  $D: x^2 + y^2 = 1$ . С учетом того, что нормальный вектор к поверхности  $\sigma$ :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}),$$

$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $d\sigma = \frac{ds}{|\cos \gamma|}$ , поток через  $\sigma$  равен

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D (\vec{A}, \vec{n}) \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (x^2 + y + y^2 + x + 4 - x - y) \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 + 4) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 + \rho) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} + 4 \cdot \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Интеграл вычислен в полярных координатах:  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $ds = dxdy = \rho d\rho d\varphi$ ;  $x^2 + y^2 = \rho^2$ .

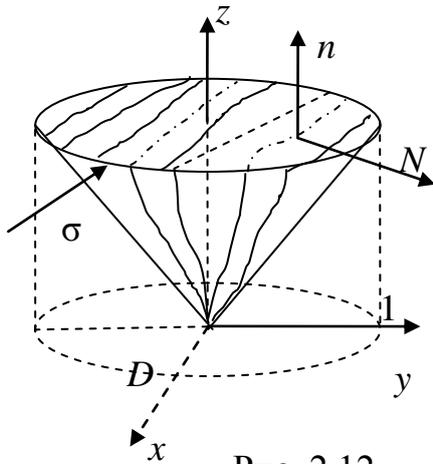


Рис. 2.12

**Пример 2.10.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{A} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  через часть плоскости  $z=1$ , ограниченную окружностью  $x^2 + y^2 = 1$  (рис. 2.12).

**Решение:** Выбирая нормаль по направлению оси  $OZ$ :  $\vec{n} = \vec{k} = (0;0;1)$ , получаем:  $(\vec{A}, \vec{n}) = A_z(x, y, 1) = z^2 = 1$ .

С учетом того, что  $d\sigma = dxdy$ ;  $\cos \gamma = 1$ :

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} z^2 dxdy = \iint_{\sigma} dxdy = \pi.$$

**Пример 2.11.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{A} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  через боковую поверхность конуса  $z^2 = x^2 + y^2$  при условии  $0 \leq z \leq 1$  (рис. 2.12).

**Решение:** Поверхность  $\tilde{\sigma}$  (боковая поверхность конуса) также однозначно проектируется на плоскость  $OXY$  в круг  $x^2 + y^2 = 1$  (область  $D$ ). Косинус угла  $\gamma$  сохраняет знак на всей поверхности,

оставаясь отрицательным. Поэтому вектор нормали, внешней по отношению к объему, ограниченному конусом и плоскостью  $z=1$ , находим как  $\vec{N} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} - \vec{k}$ .

Задав поверхность  $\tilde{\sigma}$  явно  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \vec{N} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} - \vec{k}.$$

Подынтегральное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma &= \left( \vec{A}, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \right) \frac{ds}{|\cos \gamma|} = (\vec{A}, \vec{n}) \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \frac{ds}{\frac{1}{|\vec{N}|}} = (\vec{A}, \vec{N}) ds = \\ &= \left( \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

а поток через боковую поверхность  $\tilde{\sigma}$  выражается как интеграл с учетом того, что  $z^2 = x^2 + y^2$  на поверхности конуса:

$$\Pi_{\tilde{\sigma}} = \iint_{\tilde{\sigma}} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D \left( \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z^2 \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2) \right) dx dy.$$

Последний интеграл удобнее вычислять в полярной системе координат:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad ds = dx dy = \rho d\rho d\varphi; \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{\sigma}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi - \rho^3) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 0 - 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что суммарный поток через замкнутую поверхность  $\Sigma = \sigma + \tilde{\sigma}$  можно найти как сумму потоков:  $\prod_{\Sigma} = \prod_{\sigma} + \prod_{\tilde{\sigma}} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

Однако, поток векторного поля через замкнутую поверхность удобнее вычислять по теореме Остроградского–Гаусса.

## 2.6. Теорема Остроградского–Гаусса

Вычислим поток векторного поля  $\vec{A}$  через поверхность элементарного прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 2.13), в направлении внешней нормали.

Поток поля  $\vec{A}$  через грани  $\Delta\sigma_1$  и  $\Delta\sigma_2$ , параллельные координатной плоскости  $OXY$ , находим с учетом того, что нормаль к грани  $\Delta\sigma_1$  совпадает с вектором  $-\vec{k}$ , а нормаль к грани  $\Delta\sigma_2$  – с вектором  $\vec{k}$ .

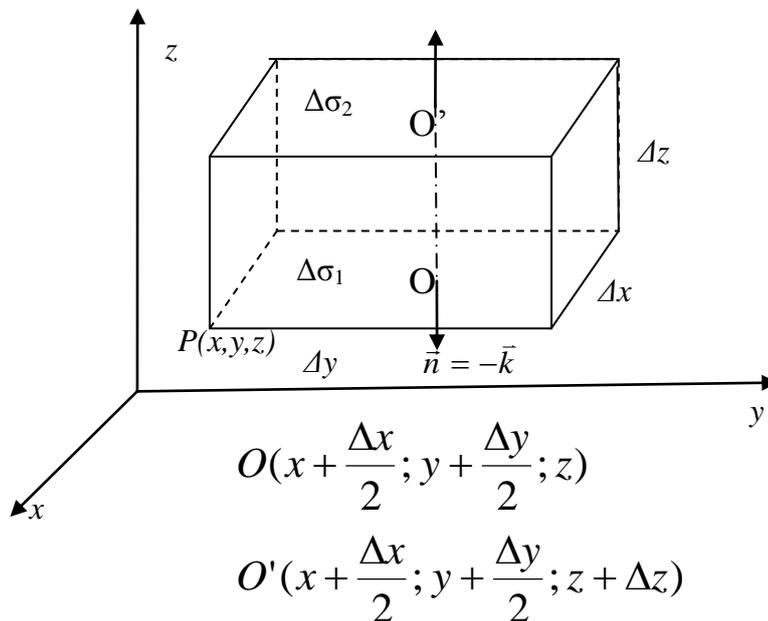


Рис. 2.13

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi_z + \Pi_{\sigma_2} + \Pi_{\sigma_1} = (\vec{A}(o'), \vec{k}) \Delta x \Delta y - (\vec{A}(o), \vec{k}) \Delta x \Delta y = \\
&= A_z \left( x + \frac{x}{2}, y + \frac{y}{2}, z + \Delta z \right) \Delta x \Delta y - A_z \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x \Delta y = \\
&= \left( A_z \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z \right) - A_z \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right) \Delta x \Delta y = \\
&= \Delta A_z \Delta x \Delta y \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.
\end{aligned}$$

В этой формуле частное приращение по переменной  $z$ :  $\Delta A_z$  заменили дифференциалом  $\frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z$ , с точностью до бесконечно малых высшего порядка по сравнению с  $\Delta z$ .

Аналогично можно получить, что поток через грани, параллельные плоскости  $OYZ$ , равен

$$\Pi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (2.27)$$

а через грани, параллельные плоскости  $OXZ$ :

$$\Pi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z. \quad (2.28)$$

Полный поток через поверхность, ограничивающую объем  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , в направлении внешней нормали равен

$$\Pi_{\Sigma_{\Delta V}} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} \vec{A} \cdot \Delta V = \iint_{\Sigma_{\Delta V}} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma. \quad (2.29)$$

Из последнего соотношения, переходя к пределу, получаем определение дивергенции в точке  $P(x, y, z)$  как отношение потока через замкнутую поверхность к величине объема тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что объем стремится к нулю, стягиваясь в точку:

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, y, z) = \lim_{\Delta V_{\Sigma} \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_{\Delta V}} (\vec{A}, d\vec{\sigma})}{\Delta V_{\Sigma}}. \quad (2.30)$$

Другими словами, дивергенция – это мощность потока векторного поля (плотность источников поля). Полный поток непрерывного векторного поля  $\vec{A}$  через замкнутую поверхность  $\Sigma$ , ограничивающую односвязную пространственную область объема  $V$ , вычисляем, суммируя элементарные потоки через поверхности, ограничивающие объемы  $\Delta V_k$ :

$$\Pi = \sum_{\Sigma_v} \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma_{\Delta V_k}} (\vec{A}(P_k), d\vec{\sigma}) = \sum_{k=1}^n \operatorname{div} \vec{A}(P_k) \Delta V_k. \quad (2.31)$$

Заметим, что суммирование потоков через внутренние границы и внешнюю границу  $\Sigma$  дает в пределе поток через внешнюю поверхность, т. к. потоки через внутренние соприкасающиеся поверхности равны нулю (нормали к таким поверхностям направлены в противоположные стороны). Переходя к пределу в интегральной сумме (2.38), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma_{\Delta V_k}} (\vec{A}(P_k), d\vec{\sigma}) &= \iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max\{\Delta V_k\} \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \operatorname{div} \vec{A}(P_k) \Delta V_k = \iiint_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{A} dV. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Соотношение (2.32) носит название **теоремы Остроградско-го–Гаусса**.

**Теорема 2.2.** Поток векторного поля  $\vec{A}$  через замкнутую поверхность  $\Sigma_V$  в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области  $V_{\Sigma}$ , ограниченной этой поверхностью, от дивергенции векторного поля

$$\iint_{\Sigma_V} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV.$$

**Пример 2.12.** Вычислим поток векторного поля

$\vec{A} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  через замкнутую поверхность (рис. 2.12), ограниченную конусом  $z^2 = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 1$ . Используем теорему Остроградского–Гаусса.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2x + 2y + 2z;$$

$$\Pi = \iint_{\Sigma_V} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div} \vec{A} dV = \iiint_{V_\Sigma} (2x + 2y + 2z) dV.$$

Переходя к цилиндрическим координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $z = z$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ , получим

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi + z) dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^1 dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 z dz = \\ &= 2(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^1 dz + 4\pi \int_0^1 \rho^2 \left( \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 d\rho = 0 + 2\pi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

что совпадает с результатом (пример 2.10).

**Упражнение 2.13.** Найдите поток векторного поля  $\vec{A}$  через поверхность  $\Sigma$ :

а)  $\vec{A} = (y^2 - z^2 + x)\vec{i} + (z^2 - x^2 + y)\vec{j} + (x^2 - y^2 + z)\vec{k}$ ,  $\Sigma$  – замкнутая поверхность, образованная поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $z = x$ ;  $z \geq 0$ ;

б)  $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ ,  $\Sigma$  – часть плоскости  $x + y + z = 2$ , отсекаемая цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ ;

в)  $\vec{A} = (x^2 - y)^2 \vec{i} + (y^2 - z^2) \vec{j} + (z^2 - x^2) \vec{k}$ ,  $\Sigma$  — замкнутая поверхность, образованная параболоидами  $z = 2(x^2 + y^2)$ ,  $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$ ;

г)  $\vec{A} = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}$ ,  $\Sigma$  — часть плоскости  $y = 0$ , ограниченная сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и плоскостью  $z = 0$ .

## 2.7. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина

Циркуляцией дифференцируемого векторного поля  $\vec{A}$  называют криволинейный интеграл по замкнутому контуру  $C$ :

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}). \quad (2.33)$$

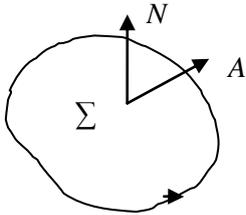


Рис. 2.14

Контур  $C$  можно рассматривать как границу некоторой односвязной поверхности  $\Sigma$ . Поскольку такой интеграл зависит от направления обхода контура  $C$ , то условились считать положительным направлением обхода направление, когда обхватываемая контуром область остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рис. 2.14).

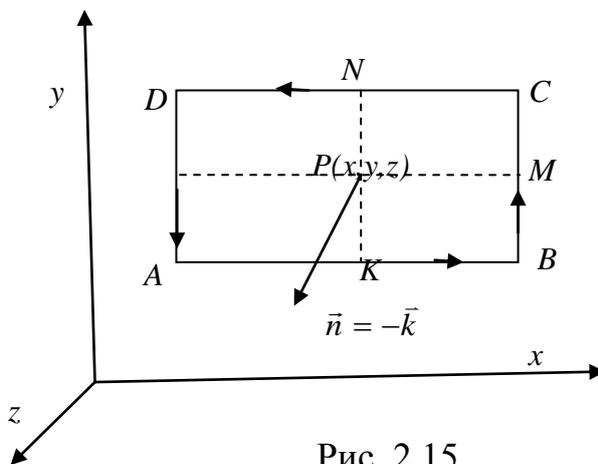


Рис. 2.15

Вычислим циркуляцию дифференцируемого векторного поля  $\vec{A}$  по контуру элементарного прямоугольника со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Прямоугольник лежит в плоскости, параллельной плоскости  $OXY$ , а его стороны параллельны координатным осям  $OX$  и  $OY$  (рис. 2.15).

Задав координаты точки, лежащей в середине прямоугольника как  $P(x, y, z)$ , получаем координаты середин:

$$K\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right), M\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right), N\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right), Q\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right).$$

Будем считать, что значение векторного поля  $\vec{A}$  на каждой из сторон прямоугольника приближенно является величиной постоянной и совпадает со значением поля в середине каждой стороны. Тогда работу, совершаемую вектором  $\vec{A}$ , можно найти как скалярное произведение  $(\vec{A}, \Delta\vec{r})$ . Так, для контура  $AB$  вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{i}\Delta x$ , а

$$(\vec{A}, \Delta\vec{r}) = A_x(K)\Delta x = A_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x.$$

Для контура  $BC$  вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{j}\Delta y$ , а

$$(\vec{A}, \Delta\vec{r}) = A_y(M)\Delta y = A_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y.$$

Для контура  $CD$  вектор  $\Delta\vec{r} = -\vec{i}\Delta x$ ,

$$(\vec{A}, \Delta\vec{r}) = -A_x(N)\Delta x = -A_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x.$$

Для контура  $DA$  вектор  $\Delta\vec{r} = -\vec{j}\Delta y$ ,

$$(\vec{A}, \Delta\vec{r}) = -A_y(Q)\Delta y = -A_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y.$$

В результате работа вдоль всего контура  $C_k$  (циркуляция) равна сумме работ, совершаемых полем при перемещении точки вдоль каждой из сторон:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) &= A_x \left( x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x + A_y \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y - \\
&- A_x \left( x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x - A_y \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y = \\
&= \left( A_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_x \left( x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right) \Delta x + \\
&+ \left( A_y \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_y \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right) \Delta y \approx \\
&\approx - \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

В этом выражении приращение по переменной  $y$  функции  $A_x$  и приращение по переменной  $x$  функции  $A_y$  заменили приближенно частными дифференциалами с точностью до бесконечно малых по сравнению с  $\Delta x, \Delta y$  при  $\Delta x \rightarrow 0; \Delta y \rightarrow 0$ . С учетом того, что  $z$ -компонента вектора  $\text{rot } \vec{A}$  есть  $(\text{rot } \vec{A})_z = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$ , см. формулу (2.9), а нормаль к поверхности, ограниченной контуром  $C_k$ , совпадает с ортом  $\vec{n} = \vec{k}$ , формулу (2.34) можно представить как

$$\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) = (\text{rot } \vec{A}, \vec{k}) \Delta x \Delta y = (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) \Delta \sigma_k. \tag{2.35}$$

Если элементарный прямоугольник сориентирован параллельно плоскости  $ZOY$ , а его стороны  $\Delta z, \Delta y$  параллельны осям  $OZ$  и  $OY$ , то нормалью к поверхности, ограниченной контуром, будет вектор  $\vec{n} = \vec{i}$ , а циркуляция вдоль контура равна

$$\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta z \Delta y = (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) \Delta \sigma_k. \tag{2.36}$$

Ориентируя элементарный прямоугольник со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta z$  параллельно плоскости  $ZOX$  и выбирая нормаль к поверхности, ограниченной контуром,  $\vec{n} = \vec{j}$ , получим, что циркуляция

$$\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) = \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z = (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) \Delta \sigma_k. \quad (2.37)$$

Таким образом, циркуляция вдоль замкнутого элементарного контура зависит от ориентации прямоугольника, но при любой ориентации выполняется соотношение

$$\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) = (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) \Delta \sigma, \quad (2.38)$$

которое определяет циркуляцию вдоль элементарного контура как поток вектора  $\text{rot } \vec{A}$  через часть поверхности  $\Delta \sigma$ , ограниченную этим контуром. Из (2.38), переходя к пределу, получаем

$$(\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) = \text{пр}_{\vec{n}} \text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r})}{\Delta \sigma}. \quad (2.39)$$

**Определение.**  $\text{rot } \vec{A}$  – вектор, проекция которого на направление нормали к поверхности, охватываемой контуром, равна плотности циркуляции векторного поля  $\vec{A}$  вдоль контура.

Это определение не зависит от формы поверхности и показывает, что  $\text{rot } \vec{A}$  направлен по нормали к той поверхности, охватываемой контуром, для которой циркуляция максимальна.

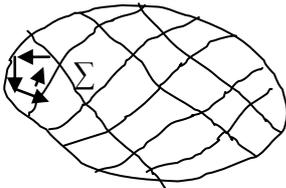


Рис. 2.16

Пусть кусочно-гладкий контур  $C$  ограничивает ориентированную поверхность  $\Sigma$ . Разобьем  $\Sigma$  на  $n$  частей произвольным образом на контуры  $C_k$  (рис. 2.16). При этом суммарная циркуляция вдоль внутренних границ будет равна нулю, так как каждая граница проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому циркуляция вдоль внешней границы  $C$  с учетом (2.38):

$$\sum_{k=1}^n \oint_{C_k} (\vec{A}, d\vec{r}) = \sum_{k=1}^n (\text{rot } \vec{A}(P_k), \vec{n}(P_k)) \Delta \sigma_k. \quad (2.40)$$

Переходя к пределу в этих (2.40) интегральных суммах, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\operatorname{rot} \vec{A}(P_k), \vec{n}(P_k)) \Delta \sigma_k; \quad (2.41)$$

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}) d\sigma.$$

Полученный результат (2.41) носит название **теоремы Стокса**, которая формулируется следующим образом.

**Теорема 2.3.** Циркуляция дифференцируемого векторного поля по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру равна потоку вектора  $\operatorname{rot} \vec{A}$  ограничивающего односвязную область через поверхность, охватываемую этим контуром.

Частным случаем теоремы Стокса для двумерного случая является **формула Грина**. Так, если контур  $C$  ограничивает односвязную область  $S$  на плоскости  $OXY$ , то нормальный вектор  $\vec{n} = \vec{k}$ , а элемент площади поверхности  $d\sigma = dxdy$  ( $\cos \gamma = 1$ ). Поэтому циркуляция вдоль контура  $C$  вычисляется по формуле

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{k}) dxdy = \iint_S \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy. \quad (2.42)$$

Из теоремы Стокса непосредственно следует, что при условии  $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$  в односвязной области интеграл по границе этой области  $\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = 0$  (см. теорему 2.1).

**Пример 2.13.** Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{A} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z \vec{k}$  вдоль линии пересечения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  плоскостью  $z = 0$  (рис. 2.17).

**Решение:** Используем теорему Стокса (2.42). Контур  $C$  является окружностью  $x^2 + y^2 = 1$ , лежащей в плоскости  $z = 0$ . Контур служит границей сферической поверхности или части плоскости  $z = 0$ . Для вычислений удобнее считать, что контур ограничивает часть плоскости  $z = 0$ , так как нормальный вектор совпадает с ортом  $\vec{n} = \vec{k}$ .

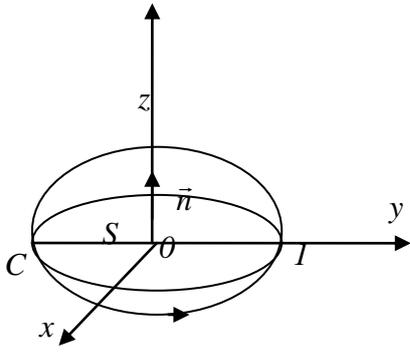


Рис. 2.17

$$\operatorname{rot} \vec{A} = -3x^2 y^2 \vec{k};$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}) = (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{k}) = -3x^2 y^2;$$

$$d\sigma = dS = dxdy;$$

$$(\cos \gamma = 1);$$

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}) d\sigma = -3 \iint_S x^2 y^2 dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла удобнее вести в полярной системе координат:  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} -3 \iint_S x^2 y^2 dxdy &= -3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{16}{16} \left( \varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

**Пример 2.14.** Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{A} = y^2 \vec{i} + xy \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}$  по линии пересечения плоскостей  $x^2 + y^2 = Rz$ ,  $z = R$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

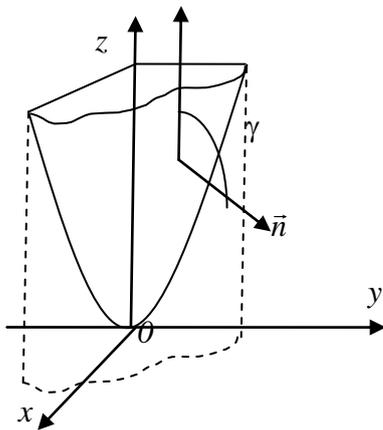


Рис. 2.18

**Решение:** Сложный замкнутый контур из трех кривых ограничивает часть поверхности параболоида (рис. 2.18). Нормаль образует тупой угол с осью  $OZ$ ;  $\cos \gamma < 1$ .

Нормаль к поверхности

$$N = \left( \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; -1 \right) \Rightarrow N = \left( \frac{2x}{R}; \frac{2y}{R}; -1 \right),$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (2y; -2x; -y).$$

Находим поток ротора через поверхность параболоида:

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{N}) &= \frac{4xy}{y} - \frac{4xy}{y} + y = y; \quad d\sigma = dS = dxdy; \\
 \oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) &= \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint_S (\operatorname{rot} A, N) ds = \iint_S y ds = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Интеграл вычислен в полярных координатах:  
 $x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad ds = dxdy = \rho d\rho d\varphi; \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти векторные (силовые) линии:
  - 1.1  $\vec{A} = x\vec{i} - y\vec{j};$
  - 1.2  $\vec{A} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}.$
  
2. Найти производные первого порядка векторных полей. Определить, какие из полей являются вихревыми, а какие – потенциальными. **Для потенциальных полей найти потенциал.**
  - 2.1  $\vec{A} = x\vec{i} - y\vec{j};$
  - 2.2  $\vec{A} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j};$
  - 2.3  $\vec{A} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k};$
  - 2.4  $\vec{A} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j};$
  - 2.5  $\vec{A} = (yz - xy)\vec{i} + (xz - \frac{x^2}{2} + yz^2)\vec{j} + (xy + zy^2)\vec{k};$
  - 2.6  $\vec{A} = (\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2})\vec{i} + (\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2})\vec{j} + (\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2})\vec{k}.$
  
3. Найти поток векторного поля  $A = (zx + y; zy - x; -x^2 - y^2)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z = 0$  при условии  $z \geq 0.$

4. Найти поток векторного поля  $A = (x^2 + y^2 - y; y^2 + z^2 + x; z^2 + x^2)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$ .
5. Найти поток векторного поля  $A = (e^z + 2x; e^{xz}; e^y)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x + y + z = 1; x = 0; y = 0; z = 0$ .
6. Найти поток векторного поля  $A = (x - y; x + y; z)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 2y; z = x^2 + y^2; z = 0$ .
7. Найти поток векторного поля  $A = (x^2 + z^2 y; y^2 + x^2 z; z^2 + y^2 x)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 1; z = x^2 + y^2; z = 0$ .
8. Найдите поток векторного поля  $A = (x^2 + y^2; x^2 - y^2; 2z^2)$  через замкнутую поверхность, ограниченную  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ .
9. Найти поток векторного поля  $A = (xy^2; yx^2; z)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 1; z = 0; z = 1; x \geq 0; y \geq 0$ .
10. Найдите поток векторного поля  $A = (x^2; y^2; z^2)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 4; z = 0; z = 6$ .
11. Найдите поток векторного поля  $A = (y^2 - z^2 + x; z^2 - x^2 + y; x^2 - y^2 + z)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 1; z = x; z \geq 0$ .

12. Найти поток векторного поля  $A = (x^3 + z^2y; y^3 + x^2z; z^3 + y^2x)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $x^2 + y^2 = 1; z = 0; z = 1$ .
13. Найти поток векторного поля  $A = (x; -3y; z)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $2x + y = 1; z = x; z = 2x; y = 0$ .
14. Найти поток векторного поля  $A = (x^3 - y; y^3 + x; z^3)$  через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями  $z = x^2 + y^2; z = 1$ .
15. Найти циркуляцию векторного поля  $A = (x^2 + y^2; y^2 + z^2; x^2 + z^2)$  вдоль линии пересечения поверхностей  $z = 6 - x^2 - y^2; z^2 = x^2 + y^2$ .
16. Найти циркуляцию векторного поля  $A = (3x^2; -2yx^2; 1 - 2x)$  вдоль линии пересечения поверхностей  $y = 1; z^2 + x^2 = 1$ .
17. Найти циркуляцию векторного поля  $A = (xz; -1; y)$  по линии пересечения поверхностей  $x^2 + y^2 + z^2 = 4; y = 1$ .
18. Найдите циркуляцию векторного поля  $A = (2y; -3x; z^2)$  вдоль линии пересечения поверхностей  $x^2 + y^2 + z^2 = 25; x = 3$ .
19. Найти циркуляцию векторного поля  $A = (x + y; x - z; y + z)$  по контуру треугольника  $A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); C(0; 0; 1)$ .
20. Найдите циркуляцию векторного поля  $A = (yz; 2xz; y^2)$  вдоль линии пересечения поверхностей  $x^2 + y^2 + z^2 = 25; x^2 + y^2 = 16; z \geq 0$ .

21. Найдите циркуляцию векторного поля  $A = (yz; 2xz; y^2)$  по линии пересечения поверхностей  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ;  $x^2 + z^2 = 16$ ;  $y \geq 0$ .
22. Найдите циркуляцию векторного поля  $A = (3x; -z; 0)$  по линии пересечения поверхностей  $z = 8 - x^2 - y^2$ ;  $z = x^2 + y^2$ .
23. Найдите циркуляцию векторного поля  $A = (2x - 4yz; 2y - 4zx; 2z - 4xy)$  по контуру треугольника  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(0; 1; 0)$ .
24. Покажите, что векторное поле  $A = (x^2 - y^2; -2xy)$  потенциально на всей плоскости  $oxy$ . Найдите работу поля по перемещению материальной точки из  $M(0; 0)$  в  $K(1; 1)$ .
25. Покажите, что работа векторного поля  $A = (2x + yz; 2y + xz; 2z + yx)$  не зависит от пути интегрирования. Найдите работу поля по перемещению материальной точки из  $M(0; 1; 0)$  в  $N(0; 1; 1)$ .
26. Покажите, что векторное поле  $A = (2x - 3xy^2 + 2y; 2x - 3yx^2 + 2y)$  потенциально и найдите работу по перемещению материальной точки из  $M(1; 1)$  в  $K(2; 2)$ .
27. Найти работу векторного поля  $\vec{A} = (x^2 y; \frac{x^3}{3})$  при перемещении материальной точки вдоль кривой  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(x+2)^2}{9} = 1$ .
28. Зависит ли работа векторного поля  $A = (2xy; x^2; 0)$  от формы пути? Найдите работу поля по перемещению материальной точки из  $M(1; 1; 0)$  в  $K(2; 5; 0)$ .

29. Установите, зависит ли работа векторного поля  $A = \left( \frac{y}{x^2}; -\frac{1}{x} \right)$

от пути интегрирования? Найдите работу по перемещению материальной точки из  $M(2;1)$  в  $K(1;2)$ .

30. Покажите, что векторное поле

$A = (2x - 4yz; 2y - 4xz; 2z - 4xy)$  потенциально и найдите работу поля по перемещению материальной точки из  $M(0;1;1)$  в  $K(0;0;1)$ .

31. Для указанных векторных полей найти:

1) поток через поверхность  $\sigma$ ;

2) поток через замкнутую поверхность  $\Sigma$  (т. Остроградского–Гаусса);

3) циркуляцию по контуру  $L$  по теореме Стокса:

а)  $\vec{A} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$

$\Sigma: z = 4 - 2(x^2 + y^2); z = 2(x^2 + y^2);$

$\sigma$ : часть  $z = 2$ , ограниченная линией пересечения параболоидов;

$L$ : линия пересечения  $\Sigma$  с  $z = 2$  ( $y \geq 0$ );  $y = 0$  ( $z \geq 2$ );

б)  $\vec{A} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$

$\Sigma: x^2 + y^2 = Rx; x = R;$

$\sigma$ : часть  $x = R$ , отсекаемая параболоидом;

$L$ : линия пересечения параболоида с  $x = R$ ;

в)  $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$

$\Sigma: x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 2; z = 0$  ( $z > 0$ );

$\sigma$ : часть плоскости  $x + y + z = 2$ , отсекаемая цилиндром;

$L$ : линия пересечения цилиндра и плоскости.

### Список литературы

1. Курс высшей математики : учеб. пособие Ч. 3 / Д. В. Алексеев, В. П. Ануфриева, Г. А. Беспятов и др.; КузГТУ. – Кемерово, 1995. – 92 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика: в 3 т. Т. 3. Кн. 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Юрайт, 2016. – 288 с.

3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. – Санкт-Петербург, 1994. – 496 с.

## Оглавление

Предисловие .....	3
Глава 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ (ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА) .....	3
Глава 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ (ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА)...	4
1.1. Криволинейные интегралы.....	4
1.2. Поверхностные интегралы .....	7
Задачи для самостоятельного решения .....	11
Глава 2. ТЕОРИЯ ПОЛЯ (ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ) .....	12
2.1. Понятие скалярного и векторного поля .....	12
2.2. Дифференцирование полей. Оператор Гамильтона.....	14
2.3. Вихревые и потенциальные поля .....	18
2.4. Интеграл от векторной функции по кривой (криволинейный интеграл второго рода). Свойства потенциального поля. Нахождение потенциала векторного поля .....	20
2.5. Поток векторного поля через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода).....	28
2.6. Теорема Остроградского–Гаусса.....	35
2.7. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина .....	39
Задачи для самостоятельного решения .....	45
Список литературы.....	50

Казунина Галина Алексеевна  
Чередниченко Алла Валериевна  
Липина Галина Александровна

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

**Учебное пособие**

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 22.10.2018. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 3,2  
Тираж 100 экз. Заказ.....  
КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28  
Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а