О. С. КАРНАДУД

МАТЕМАТИКА. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Кемерово 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

О. С. КАРНАДУД

МАТЕМАТИКА.
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Кемерово 2019

УДК 51(075.8)

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт», Дугинов Евгений Владимирович

Кандидат технических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» Саблинский Алексей Игоревич

Карнадуд Олеся Сергеевна

Математика. Основы математического моделирования: сборник упражнений: учеб. пособие / О. С. Карнадуд ; КузГТУ. – Кемерово, 2019. – 117 с.

ISBN 978-5-00137-089-5

Настоящее пособие предназначено для обучающихся всех технических направлений бакалавриата и специалитета. Содержание и структура пособия соответствуют наполнению большинства рабочих программе дисциплины «Математика» для обучающихся всех технических специальностей и направлений. Каждый блок с практическими заданиями предваряется изложением теоретического материала в объеме, необходимом для выполнения практической работы, и подробным разбором решения аналогичных задач.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-00137-089-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие «**Математика. Основы математического моделирования**» предназначено для обучающихся всех технических специальностей и направлений бакалавриата, изучающих дисциплину «Математика».

Пособие разработано в помощь обучающимся, изучающим курс математики. Цель данного пособия – формирование у обучающихся знаний и умений применения математических методов. Курс сориентирован на приобретение обучающимися теоретических знаний по специальным разделам математики: линейная алгебра и геометрия, математический анализ, основы математического моделирования дисциплины и последующее закрепление их на практике.

Настоящее учебное пособие содержит развернутые темы курса высшей математики: матрицы и действия над ними; определители матриц и их свойства; системы линейных алгебраических уравнений и способы их решения; векторы и операции над ними; уравнения плоскости и прямой в пространстве; пределы последовательностей и функций; дифференцирование функций; полное исследование функции и построение ее графика, основы математического моделирования (построение моделей), соответствующие программе для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Каждый блок с практическими заданиями предваряется изложением теоретического материала в объеме, необходимом для выполнения практической работы, и подробным разбором решения аналогичных задач.

В качестве контроля самостоятельной работы студентов предлагается выполнение индивидуальных заданий.

К решению задач следует приступать только после изучения соответствующего раздела курса. Перед выполнением заданий рекомендуется ознакомиться с ходом решения аналогичных задач.

Тема 1. Действия над матрицами и вычисление определителей

Определение. *Матрицей размера $m\times n$ называется совокупность $m\times n$ элементов, представленная в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, где a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, где m, $n\in N$) – элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Если число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, а число строк является ее порядком или размером.*

Определение. *Элементы квадратной матрицы размера n, стоящие на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, то есть, a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, образуют главную диагональ. Соответственно, элементы a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}, лежащие на прямой, соединяющей правый верхний и левый нижний углы матрицы, образуют побочную диагональ.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

побочная диагональ *главная диагональ*

Определение. *Две матрицы A и B одинакового размера называют равными, если они совпадают поэлементно. Равенство записывается как $A = B$.*

<u>Виды матриц</u>

Определение. *Матрица, состоящая из одной строки $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, называется матрицей-строкой или вектором.*

Матрица, состоящая из одного столбца $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, *называется матрицей-столбцом или также вектором.*

Определение. *Матрица произвольного размера, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается* 0.

Определение. *Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю, называется единичной и обозначается*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. *Квадратная матрица, у которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю, называется треугольной (соответственно верхне- и нижнетреугольной).*

Определение. *Произвольная матрица вида* $C=(A|B)$, *составленная из двух матриц, разделенных вертикальной чертой, называется расширенной.*

Определение. *Квадратная матрица A n-го порядка называется симметричной, если ее элементы симметричны относительно главной диагонали и подчиняются следующему равенству:* $a_{ij}=a_{ji}$, *где* $i, j=1,2,..,n$.

Определение. *Матрица* A^T *называется транспонированной к матрице A, если каждая ее строка является столбцом матрицы A.*

Действия над матрицами

1. Сложение (вычитание) матриц.

Пусть матрицы A и B имеют одинаковый размер $m\times n$, то есть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C размера $m{\times}n$ называется суммой (разностью) матриц A и B, если

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \dots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix},\ m,n\in N,$$

то есть чтобы сложить (вычесть) матрицы одинакового размера, необходимо сложить (вычесть) их соответствующие элементы.

2. Умножение матрицы на число.

Определение. *Произведением числа λ на матрицу A называется матрица B такая, что $B=\lambda A$. Элементы матрицы B вычисляются по формуле $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$, где i=1,2,..,m; j=1,2,..,n.*

$$B=\lambda\times A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

3. Умножение матриц.

Определение. *Произведением матрицы A размера $m{\times}n$ и матрицы B размера $n{\times}r$ называется матрица C размера $m{\times}r$, имеющая следующий вид:*

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix},\ \textit{где}\ c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj},$$

i=1,2,…,m; j=1,2,..,r.

***Замечание* 1.** Отметим, что перемножить матрицы можно только в том случае, если число элементов в строке первой матрицы равно числу элементов в столбце второй матрицы.

***Замечание* 2.** Из правила умножения матриц следует, что $A\times B\neq B\times A$, то есть умножение матриц не коммутативно.

Определение. *Определителем Δ матрицы A (или $\det A$) называется многочлен, составленный из элементов этой матрицы. Для матрицы порядка n определитель записывается в виде*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если матрица числовая, то значение определителя есть число, которое находят по известным правилам.

<u>Вычисление определителей</u>

Определитель 2-го порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, *и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали*, то есть

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

<u>Примеры</u>.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

2. $\begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x = -\sin^2 x - \cos^2 x =$

$= -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1.$

Определитель 3-го порядка вычисляется по формуле

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Правило треугольников

Из структуры формулы видно, что в каждое слагаемое в правой части входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Формулу вычисления определителя третьего порядка легко запомнить, если воспользоваться правилом треугольников (рис. 1.1). Для вычисления определителя возьмем произведения элементов, соединенных линиями. На рисунке слева линиями указаны произведения элементов, которые следует взять со знаком «+», справа – со знаком «–».

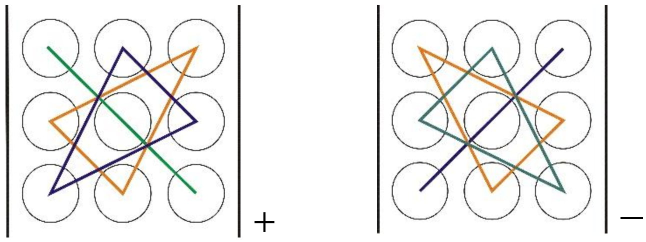


Рисунок 1.1. Правило треугольников

Пример.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Рассмотрим правило треугольников. Сначала выпишем слагаемые произведения со знаком «+», а затем вычтем из них произведения со знаком «–».

Произведения со знаком «+»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot (-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot (-1)$$

Произведения со знаком «–»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 3$$

Запишем все вместе:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot 0\cdot (-2) + 2\cdot 1\cdot (-1) - (-2)\cdot 1\cdot (-1) - 1\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-2\cdot 0\cdot 3 = 3 + 0 - 2 - 2 - 0 - 0 = -1$$

Правило Саррюса

К определителю приписывают справа два первых столбца и вычисляют сумму произведений элементов, стоящих на главной диагонали и двух «прямых», параллельных ей (они отмечены на рис. 1.2 знаком «плюс»). Далее из первой суммы вычитают сумму произведений элементов, расположенных на побочной диагонали, и «прямых», параллельных ей (отмечены на рис. 1.2 знаком «минус»).

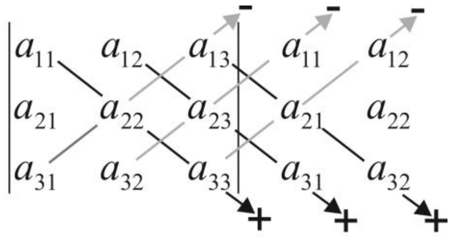


Рисунок 1.2. Правило Саррюса

Рассмотрим правило Саррюса:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-2\cdot 0\cdot 3 = 3 + 0 - 2 - 2 - 0 - 0 = -1$$

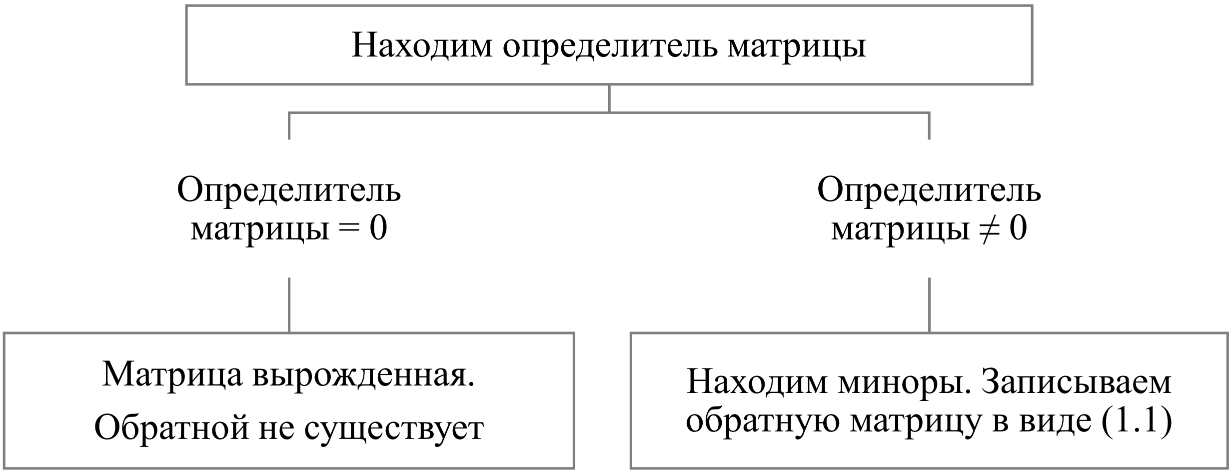
Определение. *Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A размера n, если она удовлетворяет следующему равенству:*

$A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = E$.

Если обратная матрица существует, то она находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

<u>*Алгоритм нахождения обратной матрицы*</u>



<u>Пример.</u>

Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=2+3+12-18-2-2=-5\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0$, матрица A является невырожденной и для нее существует обратная, найдем ее. Для этого вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1-6)=5$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(2-3)=1 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-9=-8$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-6=-2 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(2-3)=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1-6)=5$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

Подставим найденные значения в формулу (1.1):

$$A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}0 & 5 & -5\\ 1 & -8 & 5\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Индивидуальное задание №1

1. Вычислить:
а) $A+B$, б) $A-B$, в) $A\times B$, г) $B\times H$, д) $5A-3B$, е) A^{-1}, ж) $A\times A^{-1}$, з) $|A|$,

где $H=\begin{pmatrix}0 & -4 & 6 & 1\\ 2 & 2 & -5 & -2\\ 2 & -2 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

Вариант	***A***	***B***
1	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 8\\ 1 & 7 & -5\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}4 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 8\\ 1 & 7 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 7 & 4 & 5\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 7 & 4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 7 & 1 & 6\\ 6 & 0 & 5\end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

18	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -8 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -8 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

28	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель:

а) разложив его по элементам i-й строки;

б) разложив его по элементам j-го столбца;

в) приведя определитель к треугольному виду.

Найти обратную матрицу и сделать проверку.

1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=1$	***2***	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=3$		***3***	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=1$
4	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=3$	***5***	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$		***6***	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2$
7	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$	***8***	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$		***9***	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=3$

10	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=2$	***11***	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=4$		***12***	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=2$
13	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=4$	***14***	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$		***15***	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=3$
16	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=2$	***17***	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$		***18***	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$
19	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$	***20***	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=3$		***21***	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2$
22	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=2$	***23***	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=4$		***24***	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=1$
25	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=4$	***26***	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=1$		***27***	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=4$

28	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2$	***29***	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=1$		***30***	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=2$

Тема 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где x_j – неизвестные; a_{ij} − коэффициенты при неизвестных; b_i − свободные члены; i=1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Обозначим через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных x_j, а через $\overline{A}$ – матрицу, полученную из A присоединением к ней столбца свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрица A называется матрицей коэффициентов системы уравнений, а матрица $\overline{A}$ − расширенной матрицей коэффициентов системы уравнений.

Определение. *Решением системы уравнений называется совокупность таких значений неизвестных:* $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$, *которые удовлетворяют всем уравнениям системы. Решить систему уравнений, значит указать все ее решения или показать, что их нет.*

Определение. *Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решения, то она называется несовместной. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.*

<u>*Методы решения СЛАУ*</u>

Рассмотрим систему из трех линейных алгебраических уравнений и трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тогда матрица коэффициентов при неизвестных и расширенная матрица коэффициентов имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Метод Крамера

Для системы (2.1) введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

где Δ_i, i=1,2,3 − определители, полученные из исходного определителя заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тогда при решении системы методом Крамера возможны следующие случаи:

1) если $\Delta \neq 0$, то система (2.1) совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

2) если $\Delta=0$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то система (2.1) либо имеет множество решений, либо несовместна;

3) если $\Delta=0$ и хотя бы один из Δ_1, Δ_2, Δ_3 не равен нулю, то система несовместна и решения не имеет.

Матричный метод

Пусть для системы (2.1) определитель $\Delta \neq 0$. Запишем ее в матричной форме, где A – матрица коэффициентов при неизвестных, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов системы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A\times X=B,$$

выразим X:

$$X=A^{-1}\times B. \qquad (2.2)$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на алгоритме последовательного исключения неизвестных. Задача состоит в том, чтобы привести систему уравнений к *«треугольному»* виду при помощи эквивалентных преобразований.

Выпишем расширенную матрицу коэффициентов системы *(2.1)*:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

При решении системы уравнений (2.1) методом Гаусса возможны следующие случаи:

1) если матрица $\overline{A}$ приведена к треугольному виду, то система (2.1) совместна и имеет единственное решение;

2) если матрица $\overline{A}$ содержит хотя бы одну строку, все элементы которой равны нулю, то система (2.1) совместна и имеет множество решений;

3) если матрица $\overline{A}$ содержит строку, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то система (2.1) несовместна, то есть решения не имеет.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) & (-3) \\ & \\ & \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2) \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ или } \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Исходная система эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -6x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Возьмем x_2 и x_4 свободными, а x_1 и x_3 – базисными. Тогда

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(-5x_4 + 1\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{18}\left(12x_2 + x_4 + 7\right).$$

Придавая произвольные значения неизвестным x_3 и x_2, получим различные решения системы линейных уравнений.

Индивидуальное задание №2

1. Решить системы уравнений.

Вариант	*Метод Гаусса*	*Метод Крамера*	*Матричный метод*
1	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-2y-3z=3 \\ x+y+2z=-1 \\ 2x-\mathrm{y}-z=2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-2y-3z=3 \\ x+y+2z=-1 \\ 2x-\mathrm{y}-z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-2y-3z=3 \\ x+y+2z=-1 \\ 2x-\mathrm{y}-z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$

8	$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$
9	$\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+2y+z=4 \\ -3x+4z=-13 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+2y+z=4 \\ -3x+4z=-13 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$

16	$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4x+3y-2z=2 \\ -5x-4y-z=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+2y+z=4 \\ -3x+4z=-13 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4x+3y-2z=2 \\ -5x-4y-z=-6 \end{cases}$
18	$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-y-z=-1 \\ -x+3y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4x+3y-2z=2 \\ -5x-4y-z=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-y-z=-1 \\ -x+3y+2z=3 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-y-z=-1 \\ -x+3y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y+z=-11 \\ 5x+y+2z=8 \\ x+2y+4z=16 \end{cases}$
22	$\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+2y+3z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y+z=-11 \\ 5x+y+2z=8 \\ x+2y+4z=16 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

24	$\begin{cases}8x+3y-6z=-4\\x+y-z=2\\4x+y-3x=-5\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y-5z=5\\2x+3y-4z=12\\x-2y+3z=-1\end{cases}$	$\begin{cases}2x-y+2z=3\\x+y+2z=-4\\4x+y+4z=-3\end{cases}$
25	$\begin{cases}3x-y+z=-11\\5x+y+2z=8\\x+2y+4z=16\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y+4z=21\\3x+4y-2z=9\\2x-y-z=10\end{cases}$	$\begin{cases}2x-y+3z=-4\\x+3y-z=11\\x-2y+2z=-7\end{cases}$
26	$\begin{cases}2x+y+3z=7\\2x+3y+z=1\\3x+2y+z=6\end{cases}$	$\begin{cases}3x-y+z=12\\x+2y+4z=6\\5x+y+2z=3\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y-5z=5\\2x+3y-4z=12\\x-2y+3z=-1\end{cases}$
27	$\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y+z=4\\2x+2y+3z=1\end{cases}$	$\begin{cases}2x-y+3z=-4\\x+3y-z=11\\x-2y+2z=-7\end{cases}$	$\begin{cases}2x+y+3z=7\\2x+3y+z=1\\3x+2y+z=6\end{cases}$
28	$\begin{cases}3x-y+z=12\\x+2y+4z=6\\5x+y+2z=3\end{cases}$	$\begin{cases}8x+3y-6z=-4\\x+y-z=2\\4x+y-3x=-5\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y-5z=5\\2x+3y-4z=12\\x-2y+3z=-1\end{cases}$
29	$\begin{cases}3x-2y-5z=5\\2x+3y-4z=12\\x-2y+3z=-1\end{cases}$	$\begin{cases}2x+3y+z=12\\2x+y+3z=16\\3x+2y+z=8\end{cases}$	$\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y+z=4\\2x+2y+3z=1\end{cases}$
30	$\begin{cases}2x-y+3z=-4\\x+3y-z=11\\x-2y+2z=-7\end{cases}$	$\begin{cases}2x+y+3z=7\\2x+3y+z=1\\3x+2y+z=6\end{cases}$	$\begin{cases}8x+3y-6z=-4\\x+y-z=2\\4x+y-3x=-5\end{cases}$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1 $\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 3x-y-z-2t=-4 \\ 2x+3y-z-t=-6 \\ x+2x+3z-t=-4 \end{cases}$	***2*** $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$
3 $\begin{cases} y-3z+4t=-5 \\ x-2z+3t=-4 \\ 3x+2y-5t=12 \\ 4x+3y-5z=5 \end{cases}$	***4*** $\begin{cases} 3x+3y+3z+2t=6 \\ 2x-y+3z+2t=4 \\ 3x-y-z+2z=6 \\ 3x-y+3z-t=6 \end{cases}$
5 $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \\ x+3y+6z+10t=0 \\ x+4y+10z+20t=0 \end{cases}$	***6*** $\begin{cases} 3x+5y-3z+2t=12 \\ 4x-2y+5z+3t=27 \\ 7x+8y-z+5t=40 \\ 6x+4y+5z+3t=41 \end{cases}$
7 $\begin{cases} 2x+3y+11z+5t=2 \\ x+y+5z+2t=1 \\ 2x+y+3z+2t=-3 \\ x+y+3z+4t=-3 \end{cases}$	***8*** $\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20 \\ x+3y+2z+t=11 \\ 2x+10y+9z+7t=40 \\ 3x+8y+9z+2t=37 \end{cases}$
9 $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ x+4y+9z+16t=1 \\ x+8y+27z+64t=1 \\ x+16y+81z+256t=0 \end{cases}$	***10*** $\begin{cases} 2x-5y+3z-4t=8 \\ 3x-4y+5z+t=0 \\ 5x-9y+4z-t=0 \\ 4x-6y+3z+t=0 \end{cases}$
11 $\begin{cases} 6x+5y-2z+4t=-4 \\ 9x-y+4z-t=13 \\ 3x+4y+2z-2t=1 \\ 3x-9y+2t=11 \end{cases}$	***12*** $\begin{cases} 2x-y-6z+3t=-1 \\ 7x-4y+2z-15t=-32 \\ x-2y-4z+9t=5 \\ x-y+2z-6t=-8 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 3x-2y-5z+t=3 \\ 2x-3y+z+5t=-3 \\ x+2y-4t=-3 \\ x-y-4z+9t=22 \end{cases}$	***14*** $\begin{cases} 4x-3y+z+5t=7 \\ x-2y-2z-3t=3 \\ 2x+3y+2z-8t=-7 \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases}$

15	$\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 2x+3y+9z+2t=6 \\ 3x+2y+3z+8t=-7 \end{cases}$	***16***	$\begin{cases} 2x-3y+3z+2t=3 \\ 6x+9y-2z-t=-4 \\ 10x+3y-3z-2t=3 \\ 8x+6y+z+3t=-7 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 7x+8y+3z+4t=-2 \\ 5x-7y+8z+2t=18 \\ 4x+5y-7z-3t=-5 \\ 3x+3y+4z-5t=9 \end{cases}$	***18***	$\begin{cases} 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ x+2y+3z-2t=6 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x+3y+6z+10t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+4y+10z+20t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$	***20***	$\begin{cases} 5x-7y+8z+2t=18 \\ 3x+3y+4z-5t=9 \\ 7x+8y+3z+4t=-2 \\ 4x+5y-7z-3t=-5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ 2x+y+2z+3t=1 \\ 3x-2y+z+2t=1 \\ 4x+3y+2z+t=-5 \end{cases}$	***22***	$\begin{cases} 7x+9y+4z+2t=2 \\ 2x-2y+z+t=6 \\ 5x+6y+3z+2t=3 \\ 2x+3y+z+t=0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 3x+3y+4z-5t=9 \\ 5x-7y+8z+2t=18 \\ 4x+5y-7z-3t=-5 \\ 7x+8y+3z+4t=-2 \end{cases}$	***24***	$\begin{cases} 2x+y+4z+8t=-1 \\ x+3y-6z+2t=3 \\ 3x-2y+2z-2t=8 \\ 2x-y+2z=4 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6 \end{cases}$	***26***	$\begin{cases} 2x-2y+t=-3 \\ 2x+3y+z-3t=-6 \\ 3x+4y-z+2t=0 \\ x+3y+z-t=2 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 3x+4y+z+2t=-3 \\ 3x+5y+3z+5t=-6 \\ 6x+8y+z+5t=-8 \\ 3x+5y+3z+7t=-8 \end{cases}$	***28***	$\begin{cases} 8x+5y-3z+4t=12 \\ 2x+2y-z+t=4 \\ 3x+3y-2z+2t=6 \\ 4x+3y-z+2t=6 \end{cases}$

29	$\begin{cases} x+8y+27z+64t=1 \\ x+4y+9z+16t=1 \\ x+2y+3z+4t=1 \\ x+16y+81z+256t=0 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} 3x-2y+2z-2t=8 \\ x+3y-6z+2t=3 \\ 2x-y+2z=4 \\ 2x+y+4z+8t=-1 \end{cases}$

3. Исследовать систему линейных уравнений. В случае совместности найти ее решение.

	A	*B*	*C*
1	$\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 5x+3y-3z=15 \\ 6x+2y+2z=22 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 9x-2y+5z=10 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+4z-t=1 \\ 2x-3y+2z+3t=2 \\ 2x-3y+2z-11t=-4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=3 \\ 4x+9y+3z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ 2x-8y-z=-19 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ x-y+5z-t=4 \\ x-y+6z-t=5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 6x+3y+15z=72 \\ 7x-5y=24 \\ 2x+3y+4z=33 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 6x+4y+3z=-14 \\ 3x-2y+5z=-22 \\ 5y+4z=-20 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+3z-2t=3 \\ x-2y-2z-t=-2 \\ 3x-6y+5z-3t=5 \\ 4x-8y-3z-4t=-3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x+4z=4 \\ 2x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 6x-6z=10 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+t=2 \\ 3x-y-2z+3t=1 \\ 4x+3y+z-2t=-1 \\ 9x+3y-z+2t=2 \\ x+3y+2z-t=3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-y-z=13 \\ 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ 4x+9y+3z=5 \\ 3x+4y-2z=12 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y-z+2t=3 \\ 3x+5y+9z-4t=-8 \\ 4x-3y+5z+7t=14 \end{cases}$

6	$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-4y+4z=-15 \\ x+3y-z=11 \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y-z=10 \\ x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+2z+3t=5 \\ x+2y+z+2t=1 \\ x+2y+4z+5t=13 \\ x+2y+3z+4t=9 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 4x+4y+4z=28 \\ x+y-2z=-8 \\ 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ x-4y-2z=-9 \\ 6y+7z=6 \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ x+y+3z+2t=1 \\ x+y+z+t=1 \\ x+y+4z+t=1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ 2x+2y+z=-9 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ 4x+2y-3z=0 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z+t=0 \\ 2x+3y+z+2t=0 \\ 3x+y+2z-2t=0 \\ 2y+2z+2t=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 3x+y-z=11 \\ 2x+3y-4z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+4z=16 \\ 2x+2y+z=9 \\ 3x-y+z=-11 \\ x+2y+4z=16 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y-3z+5t=0 \\ x-2y+z-3t=0 \\ x+4y-7z+13t=0 \\ 3x+5y-10z+18t=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2y-5z=4 \\ x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=4 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x-2y=15 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z+t=3 \\ x+4y+5z+2t=2 \\ 2x+9y+8z+3t=7 \\ 3x+7y+7z+2t=12 \\ 5x+7y+9z+2t=20 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x-2y+2z=-7 \\ 5y-3z=3 \\ x-4y+4z=0 \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ x-5y-z=8 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+4z-3t=0 \\ 3x+5y+6z-4t=0 \\ 4x+5y-2z+3t=0 \\ 3x+8y+24z-19t=0 \end{cases}$

12	$\begin{cases} 2x-2z=3 \\ 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 6y+7z=-12 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \\ -3x+5y+6z=-8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+5z+3t=0 \\ 3x-6y+4z+2t=0 \\ 4x-8y+17z+11t=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ 2x-3y-3z=10 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ 5x+2y-4z=-3 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y-5z+7t=0 \\ 2x-3y+3z-2t=0 \\ 4x+11y-13z+16t=0 \\ 7x-2y+z+3t=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x-y-9z=21 \\ 3x+y-z=3 \\ 2x+3y-4z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y+z=-11 \\ 2x+2y+z=19 \\ 5x+y+2z=8 \\ x+2y+4z=16 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x-2y=11 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ 3x+2z=11 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3z-4t=4 \\ y-z+t=-3 \\ x+3y-3t=1 \\ -7y+3z+t=-3 \end{cases}$
16	$\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x+2y+2z=8 \\ x+y+2z=8 \\ 2x-y+2z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ 2x+2y+2z=10 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1 \\ 2x+3y+z+t=1 \\ 2x+2y+2z-t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 6y-6z=-12 \\ 2x-y-z=10 \\ 3x+4y-2z=9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 5x+5y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 3y+2z+t=0 \\ 3x-4y-3z-2t=0 \end{cases}$

18	$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+2y+3z=7 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2t=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ x-3y+2z=-4 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-3y+2z+4t=3 \\ 4x-2y+3z+7t=1 \\ 8x-6y-z-5t=9 \\ 7x-3y+7z+17t=0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x-y+5z=12 \\ 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x+6y+2z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+5y+z+3t=2 \\ 4x+6y+3z+5t=4 \\ 4x+14y+z+7t=4 \\ 2x-3y+3z=7 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 2x+2y+2z=8 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \\ 4x+y+4z=19 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ 3x+3y+6z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=3 \\ 2x+3y+6z+8t=5 \\ x+6y-9z-20t=-11 \\ 4x+y+4z+t=2 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 4x+2y-2z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \\ 4x-2y-2z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+3z+4t=5 \\ 4x-2y+5z+6t=7 \\ 6x-3y+7z-8t=9 \\ 8x-4y+9z+10t=11 \end{cases}$
22	$\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x+5y+5z=9 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 6y-6z=0 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+z+2t=3 \\ 4x+6y+3z+4t=5 \\ 6x+9y+5z+6t=7 \\ 8x+12y+7z+3t=9 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x-3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \\ 4x+6y+8z=24 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \\ 6y+7z=32 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y-z-t=2 \\ x-y+z-t=0 \\ x+3y-3z+t=2 \\ x-5y+5z-3t=-2 \end{cases}$
24	$\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \\ 6x+3y+15z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 6x-4y+10z=-44 \\ 5x+4z=-20 \\ 3x-2y+5z=-22 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+5y+z+3t=1 \\ 7x+6y-5z+2t=2 \\ x+4y+7z+4t=0 \\ -5x+9y+8z+7t=1 \end{cases}$

25	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 3x+2z=2 \\ 4x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 6x-3y-3z=0 \\ 2x-y-z=9 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-8y+2z-t=3 \\ 5x-7y-3z-8t=5 \\ 3x-11y+5z+2t=3 \\ x-y-z-2t=1 \end{cases}$
26	$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \\ 5x+5y-5z=-10 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 2x-y+z=25 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+2y+3z+2t=3 \\ 2x+2y+3z-2t=3 \\ 2x+3y+2z+2t=3 \\ 2x+3y+2z+2t=3 \\ 2x+3y+2z+3t=2 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 2x+2y+2z=8 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \\ 4x+y+4z=19 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ 3x+3y+6z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=3 \\ 2x+3y+6z+8t=5 \\ x+6y-9z-20t=-11 \\ 4x+y+4z+t=2 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 6y-6z=-12 \\ 2x-y-z=10 \\ 3x+4y-2z=9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 5x+5y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 3y+2z+t=0 \\ 3x-4y-3z-2t=0 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-4y+4z=-15 \\ x+3y-z=11 \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y-z=10 \\ x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+2z+3t=5 \\ x+2y+z+2t=1 \\ x+2y+4z+5t=13 \\ x+2y+3z+4t=9 \end{cases}$
30	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ 2x+2y+z=-9 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ 4x+2y-3z=0 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z+t=0 \\ 2x+3y+z+2t=0 \\ 3x+y+2z-2t=0 \\ 2y+2z+2t=0 \end{cases}$

Тема 3. Векторная алгебра

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются длина, площадь, объем, масса, температура и другие. Помимо скалярных величин в различных задачах встречаются величины, для определения которых кроме числового значения необходимо знать также их направление. Такие величины называются *векторными*. Примерами векторных величин могут служить сила, скорость и другие.

Определение. *Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец. Если A – начало вектора и B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор можно обозначить и одной малой латинской буквой с черточкой или стрелкой над ней $\vec{a}$.*

Определение. *Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$$

Определение. *Вектор, длина которого равна* 0*, то есть начало и конец его совпадают, называется нулевым вектором и обозначается* $\vec{0}$. *Нулевой вектор направления не имеет.*

Определение. *Вектор, длина которого равна* 1*, называется единичным вектором и обозначается через $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$.*

Определение. *Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.*

Определение. *Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.*

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. Такой вектор называется свободным.

Определение. *Три вектора в пространстве называют компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рис. 3.1). Если среди трех векторов хотя* *бы один нулевой или два любых коллинеарны, то такие вектора компланарны.*

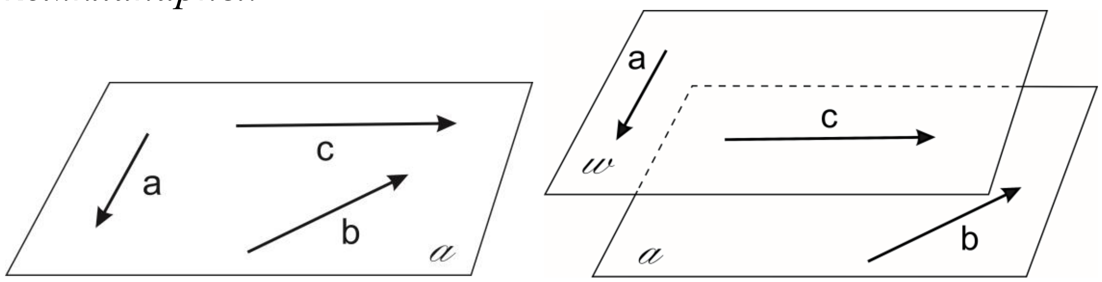


Рисунок 3.1. Компланарные векторы

Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения, вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвольные вектора. Необходимо найти $\vec{a}+\vec{b}$.

Правило параллелограмма

Возьмем произвольную точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Достроим до параллелограмма. Суммой векторов будет являться направленная диагональ полученного параллелограмма (рис. 3.2).

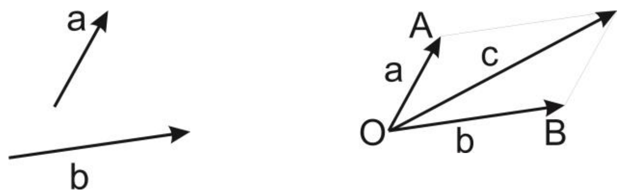


Рисунок 3.2. Сумма векторов

Правило треугольника

Конец вектора $\vec{a}$ соединяем с началом вектора $\vec{b}$. Суммой этих векторов будет вектор с началом в точке O и концом в точке B (рис. 3.3).

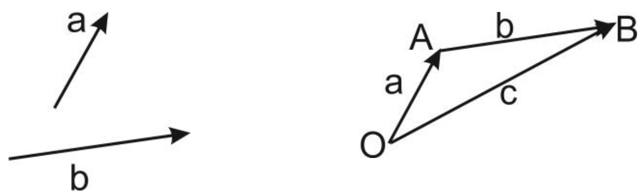


Рисунок 3.3. Правило треугольника

Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис. 3.4).

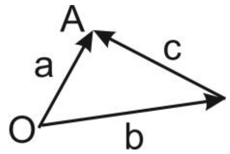


Рисунок 3.4. Разность векторов

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая − разностью векторов.

Произведение вектора на скаляр

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который имеет длину $\lambda|\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет одинаковое направление с вектором $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположен по направлению, если $\lambda<0$.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ − коммутативность.
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. $\vec{a}+(-1)\cdot\vec{a}=\vec{0}$.
5. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$ – ассоциативность.
6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ – дистрибутивность.
7. $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$.
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с векторами, как это делается в обычной алгебре: слагаемые меняют местами, вводят скобки, группируют, выносят за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

Проекция вектора на ось

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор, $|\overrightarrow{AB}|\neq 0$. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overrightarrow{AB}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаковы направлены, и отрицательное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $np_1\overrightarrow{AB}$ (рис. 3.5).

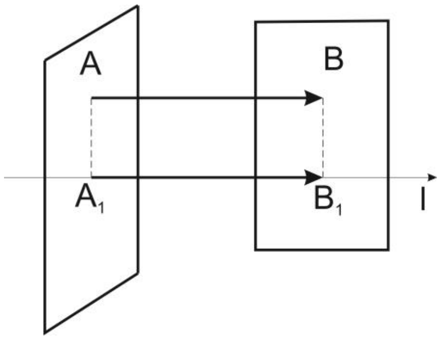


Рисунок 3.5. Проекция вектора на ось

Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = 0$), то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 0. Угол α между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l изображен на рис. 3.6.

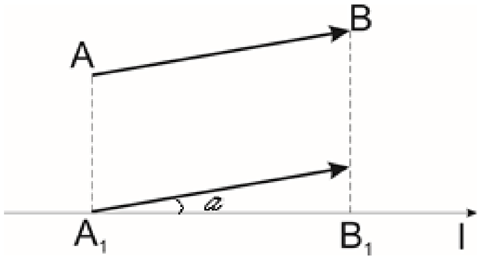


Рисунок 3.6. Угол между вектором и осью

<u>Основные свойства проекции</u>

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на $\cos\alpha$: $np_1\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$.

Следствие 1. *Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует острый (тупой) угол, и равна 0, если этот угол прямой.*

Следствие 2. *Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.*

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число.

Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат *Oxyz*. Выделим на координатных осях *Ox, Oy* и *Oz* единичные векторы (орты) и обозначим их $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Выберем произвольный вектор $\vec{a}$ и совместим его начало с началом координат $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\vec{a}$ плоскости параллельно координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями координат обозначим соответственно M_1, M_2, M_3, получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 3.7).

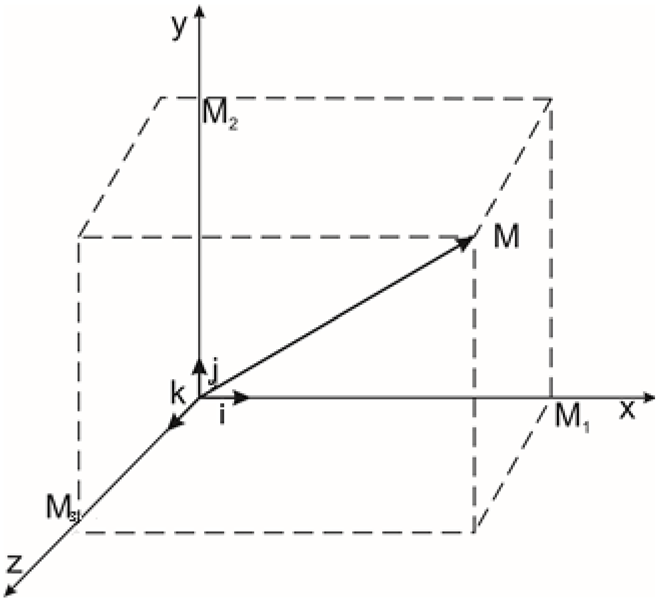


Рисунок 3.7. Разложение вектора

Тогда проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси запишутся в виде: $пр_x\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $пр_y\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $пр_z\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$.

Можем записать, что

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{3.1}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется *разложением вектора по ортам координатных осей*. Числа a_x, a_y и a_z называются *координатами вектора* $\vec{a}$, то есть координаты вектора − это его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство часто записывают в символическом виде: $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$. Равенство $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ означает, что $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Зная проекции вектора $\vec{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании формулы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2.$$

Отсюда имеем

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{3.2}$$

Пусть углы между вектором $\vec{a}$ и осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β и γ. По свойству проекций вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha,$$
$$a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \tag{3.3}$$
$$a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{3.4}$$

Числа cosα, cosβ и cosγ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Подставим выражение (3.4) в равенство (3.2):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

То есть сумма квадратов направляющих косинусов нулевого вектора равна 1. Легко заметить, что единичный вектор будет иметь координаты $\vec{e}$ *(*cosα; cosβ; cosγ*)*.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление (то есть сам вектор).

Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy и Oz или, что то же самое:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,,$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\,.$$

Линейные операции над векторами

Так как операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\cdot\vec{i} + (a_y \pm b_y)\cdot\vec{j} + (a_z \pm b_z)\cdot\vec{k}$,

$\vec{a} \pm \vec{b} = \big((a_x \pm b_x);(a_y \pm b_y);(a_z \pm b_z)\big)$.

2. $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$,

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)$.

Равенство векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}.$$

Коллинеарность векторов

Пусть даны два параллельных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с заданными координатами. Так как $\vec{a}$ параллелен $\vec{b}$, можно записать $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где $\lambda = const$. Запишем в координатах:

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \lambda(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \lambda b_x\vec{i} + \lambda b_y\vec{j} + \lambda b_z\vec{k},$$

$$a_x = \lambda b_x;\ a_y = \lambda b_y;\ a_z = \lambda b_z,$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda;\quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda;\quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, проекции коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 3.8), если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

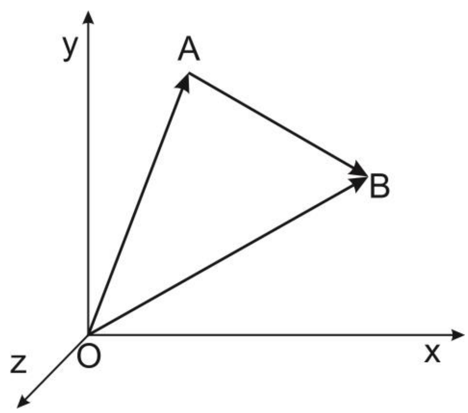


Рисунок 3.8. Разность векторов

Из рисунка 3.8 видно, что:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Следовательно, координаты вектора равны разности соответствующих координат конца и начала вектора.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Базис системы векторов

Определение. *Система векторов* $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ *называется линейно зависимой, если существуют такие константы* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$*, не все равные нулю, что имеет место равенство*

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=\vec{0}.$$

Если из этого равенства с необходимостью следует, что если $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$*, то система является линейно независимой.*

Определение. *Базисом в 3-мерной системе координат называется любая упорядоченная система из трех линейно независимых векторов пространства.*

Теорема 1. *Векторы* $\vec{a}_1=(x_1;\,y_1\,;z_1)$, $\vec{a}_2=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $\vec{a}_3=(x_3;\,y_3;\,z_3)$ *образуют базис, если* $\Delta\neq0$*, где* $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

Теорема 2. *Координаты вектора относительно некоторого базиса определяются единственным образом.*

Пример.

Даны три вектора $\vec{p}=(3;2;4)$, $\vec{q}=(4;3;5)$, $\vec{r}=(7;5;-2)$. Показать, что три этих вектора образуют базис, и найти разложение вектора $\vec{a}=(4;3;2)$ в этом базисе.

Решение.

Покажем, что векторы $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 5\\ 7 & 5 & -2\end{vmatrix}=-18+70+80-84-75+16=-11\neq0.$$

Так как $\Delta\neq0$, то векторы $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ образуют базис. По теореме 1 получаем разложение вектора $\vec{a}$ по базисным векторам $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$:

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}+\alpha_3\vec{r}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}7\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти коэффициенты разложения $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ вектора $\vec{a}$ в новом базисе, необходимо найти решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 4 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 3 \\ 4\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение: $\alpha_1 = -\frac{3}{11}$, $\alpha_2 = \frac{8}{11}$, $\alpha_3 = \frac{3}{11}$. То есть координаты вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ определяются единственным образом:

$$\vec{a} = -\frac{3}{11}\vec{p} + \frac{8}{11}\vec{q} + \frac{3}{11}\vec{r}.$$

Определение. *Совокупность всех 3-мерных векторов с действительными координатами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, образует 3-мерное векторное пространство.*

Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение. *Скалярным произведением (обозначается* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *или* $(\vec{a};\vec{b})$*) двух ненулевых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a};\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

2. $(\lambda \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a})$.

3. $\vec{c} \cdot (\vec{b} + \vec{a}) = \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$.

5. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0.

Следствие. Если произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно 0, значит, вектора взаимно перпендикулярны.

6. Пусть заданы два вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, тогда их скалярное произведение можно найти следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Применение скалярного произведения

Угол между векторами

Определим угол φ между векторами $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

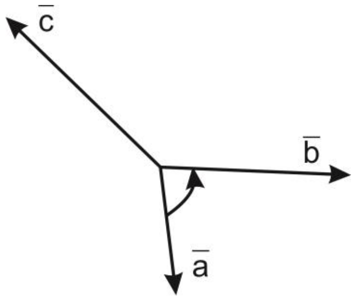
Проекции вектора

Нахождение проекции $\vec{a}$ на направление, заданное вектором $\vec{b}$, может осуществляться по формуле

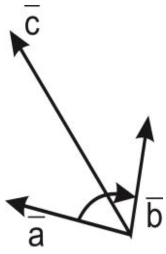
$$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ или } пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \text{ то есть } пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторное произведение векторов и его свойства

Определение. *Три некомпланарные вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 3.9), и левую, если наоборот (по часовой).*



правая тройка



левая тройка

Рисунок 3.9. Левая и правая тройки векторов

Определение. *Векторным произведением вектора* $\vec{a}$ *на* $\vec{b}$ *(обозначается* $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a};\vec{b}\right]$*) называется вектор* $\vec{c}$*, который*:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$;

3) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *образуют правую тройку (рис. 3.10).*

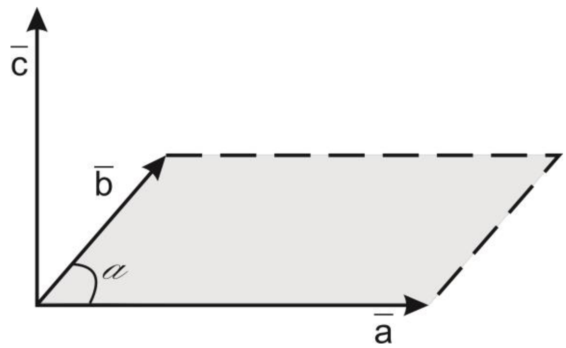


Рисунок 3.10. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

<u>*Свойства векторного произведения:*</u>

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.
3. два ненулевых вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
5. координаты векторного произведения векторов $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ можно найти через определители следующим образом:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

<u>Некоторые приложения векторного произведения.</u>

1. Установление коллинеарности векторов:

$$a\times b=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0.$$

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника:

$$S_{парал}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \qquad S_{треуг}=\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha.$$

Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий. Обозначается смешанное произведение $\left(\left[\vec{a};\vec{b}\right];\vec{c}\right)=(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ или просто $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.*

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 3.11).

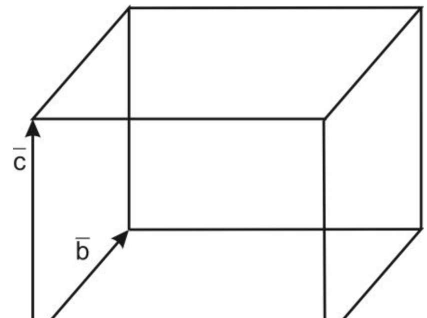


Рисунок 3.11. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

<u>Свойства смешанного произведения</u>

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3. $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=(\vec{b};\vec{c};\vec{a})=(\vec{c};\vec{a};\vec{b})=-(\vec{b};\vec{a};\vec{c})=-(\vec{c};\vec{b};\vec{a})=-(\vec{a};\vec{c};\vec{b})$.

4. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2;\vec{b};\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1;\vec{b};\vec{c})+\mu(\vec{a}_2;\vec{b};\vec{c})$.

5. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|.$$

6. Если $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$, то

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

<u>Некоторые приложения смешанного произведения</u>

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
Если $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)>0$, то $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ – правая тройка,

если $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)<0$, то $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ – левая тройка.

2. Установление компланарности векторов.

Три вектора компланарны, когда их смешанное произведение равно 0.

3. Определение объема параллелепипеда и треугольной пирамиды.

$$V_{\text{пар}}=\left|(\vec{a};\vec{b};\vec{c})\right|; \qquad V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|.$$

Индивидуальное задание №3

1. Даны векторы $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$, $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$, $\vec{c} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, $\vec{d} = \delta\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$ и $\vec{e} = \mu\vec{i} + \nu\vec{j} + \tau\vec{k}$, где $|\vec{m}| = k$; $|\vec{n}| = l$ и φ − угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Найти:

а) $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \times (\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$;

б) $\cos(\vec{c}, \vec{d})$;

в) $\vec{c} \times \vec{d}$;

г) площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

д) $\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{e}$ и объем тетраэдра, построенного на этих векторах.

Вариант	α	β	γ	δ	k	l	φ	λ	μ	ν	τ
1	−5	−4	3	6	3	5	$5\pi/3$	−2	3	1	2
2	−2	3	4	−1	1	3	π	3	2	−2	4
3	5	−2	−3	−1	4	5	$4\pi/3$	2	3	−1	5
4	5	2	−6	−4	3	2	$5\pi/3$	−1	2	2	3
5	3	−2	−4	5	2	3	$\pi/3$	2	−3	5	1
6	2	−5	−3	4	2	4	$2\pi/3$	3	−4	2	3
7	3	2	−4	−2	2	5	$4\pi/3$	1	−3	0	−2
8	5	2	1	−4	3	2	π	1	−2	3	−4
9	−3	−2	1	5	3	6	$4\pi/3$	−1	2	1	1
10	5	−3	4	2	4	1	$2\pi/3$	2	−2	3	0
11	−2	3	3	−6	6	3	$5\pi/3$	3	−3	1	2
12	−2	−4	3	1	3	2	$7\pi/3$	−2	3	1	2
13	4	3	−1	2	4	5	$3\pi/2$	2	−3	1	2
14	−2	3	5	1	2	5	2π	−3	4	2	3
15	4	−3	5	2	4	7	$4\pi/3$	−3	2	2	−1
16	−5	3	2	4	5	4	π	−3	2	−1	1
17	5	−2	3	4	2	5	$\pi/2$	2	3	1	−2

18	7	−3	2	6	3	4	$\frac{5\pi}{3}$	3	−2	2	1
19	4	−5	−1	3	6	3	$\frac{2\pi}{3}$	2	−5	1	2
20	3	−5	−2	3	1	6	$\frac{3\pi}{2}$	4	5	1	−2
21	−5	−6	2	7	2	7	π	−2	5	1	3
22	−7	2	4	6	2	9	$\frac{\pi}{3}$	1	2	−1	3
23	5	4	−6	2	2	9	$\frac{2\pi}{3}$	3	2	1	−2
24	−5	−7	−3	2	2	11	$\frac{3\pi}{2}$	−3	4	−1	2
25	5	−8	−2	3	4	3	$\frac{4\pi}{3}$	2	−3	1	2
26	−3	5	1	7	4	6	$\frac{5\pi}{3}$	−2	3	3	−2
27	−3	4	5	−6	4	5	π	2	3	−3	−1
28	6	−7	−1	−3	2	6	$\frac{4\pi}{3}$	3	−2	1	4
29	5	3	−4	−2	6	3	$\frac{5\pi}{3}$	−2	−2	3	2
30	4	−3	−2	6	4	7	$\frac{\pi}{3}$	2	−2	3	2

2. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, найти координаты вектора в этом базисе.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(5; 4; 1)	(−3; 5; 2)	(2; −1; 3)	(7; 23; 4)
2	(2; −1; 4)	(−3; 0; −2)	(4; 5; −3)	(0; 11; −14)
3	(−1; 1;2)	(2; −3; −5)	(−6; 3; −1)	(28; −19; −7)
4	(1; 3; 4)	(−2; 5; 0)	(3; −2; −4)	(13; −5; −4)
5	(1; −1; 1)	(−5; −3; 1)	(2; −1; 0)	(−15; −10; 5)
6	(3; 1; 2)	(−7; −2; −4)	(−4; 0; 3)	(16; 6; 15)
7	(−3; 0; 1)	(2; 7; −3)	(−4; 3; 5)	(−16; 33; 13)
8	(5; 1; 2)	(−2; 1; −3)	(4; −3; 5)	(15; −15; 24)
9	(0; 2; −3)	(4; −3; −2)	(−5; −4; 0)	(−19; −5; −4)
10	(3; −1; 2)	(−2; 3; 1)	(4; −5; −3)	(−3; 2; −3)
11	(5; 3; 1)	(−1; 2; −3)	(3; −4; 2)	(−9; 34; −20)
12	(3; 1; −3)	(−2; 4; 1)	(1; −2; 5)	(l; 12; −20)
13	(6; 1; −3)	(−3; 2; 1)	(−1; −3; 4)	(15; 6; −17)
14	(4; 2; 3)	(−3; 1; −8)	(2; −4; 5)	(−12; 14; −31)

15	(−2; 1;3)	(3; −6; 2)	(−5; −3; −1)	(31; −6; 22)
16	(1; 3; 6)	(−3; 4; −5)	(1; −7; 2)	(−2; 17; 5)
17	(7; 2; 1)	(5; 1; −2)	(−3; 4; 5)	(26; 11; 1)
18	(3; 5; 4)	(−2; 7; −5)	(6; −2; 1)	(6; −9; 22)
19	(5; 3; 2)	(2; −5; 1)	(−7; 4; −3)	(36; 1; 15)
20	(11; 1; 2)	(−3; 3; 4)	(−4; −2; 7)	(−5; 11; −15)
21	(9; 5; 3)	(−3; 2; 1)	(4; −7; 4)	(−10; −13; 8)
22	(7; 2; 1)	(3; −5; 6)	(−4; 3; −4)	(−1; 18; −16)
23	(1; 2; 3)	(−5; 3; −1)	(−6; 4; 5)	(−4; 11; 20)
24	(−2; 5; 1)	(3; 2; −7)	(4; −3; 2)	(−4; 22; −13)
25	(3; 1; 2)	(−4; 3; −1)	(2; 3; 4)	(14; 14; 20)
26	(3; −1; 2)	(−2; 4; 1)	(4; −5; −1)	(−5; 11; 1)
27	(4; 5; 1)	(1; 3; 1)	(−3; −6; 7)	(19; 33; 0)
28	(1; −3; 1)	(−2; −4; 3)	(0; −2; 3)	(−8; −10; 13)
29	(5; 7; −2)	(−3; 1; 3)	(1; −4; 6)	(14; 9; −1)
30	(−1; 4; 3)	(3; 2; −4)	(−2; −7; 1)	(6; 20; −3)

Тема 4. Аналитическая геометрия

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Общее уравнение прямой

Определение. *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка:*

$$Ax + By + C = 0, \qquad (4.1)$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, то есть $A^2 + B^2 \neq 0$. *Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.*

Разрешим уравнение (4.1) относительно переменной y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $k = -\frac{A}{B}$ и $b = -\frac{C}{B}$, тогда получим

$$y = kx + b. \qquad (4.2)$$

Из уравнения (4.2) видно, что точка $N(0;\, b)$ − точка пересечения с осью Oy. Значение k называют угловым коэффициентом прямой ($k = \mathrm{tg}\alpha$). Уравнение (4.2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

$C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$ − прямая проходит через начало координат;

$A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$ $(By + C = 0)$ − прямая параллельна оси Ox;

$B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0$ $(Ax + C = 0)$ − прямая параллельна оси Oy;

$B = C = 0,\ A \neq 0$ − прямая совпадает с осью Oy;

$A = C = 0,\ B \neq 0$ − прямая совпадает с осью Ox.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется угловым коэффициентом прямой.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$, $C \neq 0$, то, разделив на C, получим $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{4.3}$$

где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Замечание. Не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Задано общее уравнение прямой $2x - 3y + 5 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$2x - 3y = -5,$$

$$\frac{2x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1,$$

$$\frac{x}{-5/2} + \frac{y}{5/3} = 1.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и дан угловой коэффициент этой прямой k. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом, запишется так:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Нормальное уравнение прямой

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ умножить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется нормирующем множителем, то получим

$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ − нормальное уравнение прямой.

Здесь p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ − угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox. Знак «±» нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu C < 0$.

Пример. Дано общее уравнение прямой $3x - 4y - 65 = 0$. Найти нормальное уравнение прямой.

Найдем нормирующий множитель:

$\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{5}$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$, а $p = 13$.

Нормальное уравнение прямой будет иметь вид $\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 13 = 0$.

Угол между прямыми на плоскости

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами (рис. 4.1):

$y = k_1 x + b_1$,

$y = k_2 x + b_2$.

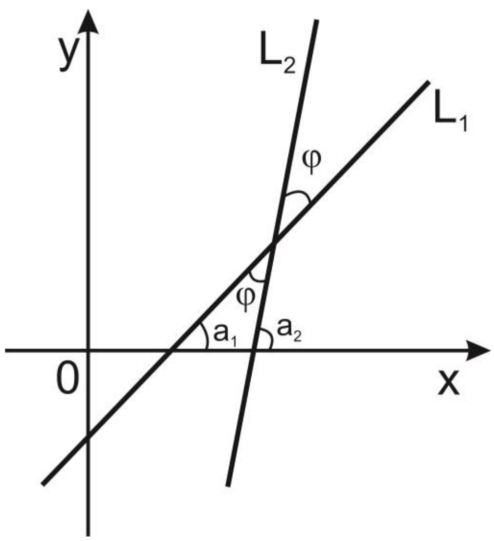


Рисунок 4.1. Угол между двумя прямыми

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении первую прямую вокруг точки пересечения до совпадения со второй прямой.

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{4.4}$$

Если две прямые перпендикулярны, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, $\mathrm{ctg}\varphi = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$ ($k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$).

Если две прямые параллельны, то $\varphi = 0$. Следовательно, $k_2 - k_1 = 0$ или $k_2 = k_1$.

<u>*Расстояние от точки до прямой*</u>

Теорема. *Если задана точка* $M(x_0; y_0)$, *то расстояние от нее до прямой* $Ax + By + C = 0$ *определяется как*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.5)$$

Индивидуальное задание №4

1. Даны вершины треугольника *ABC*. Необходимо:
а) определить длину медианы, проведенной из вершины *A*;
б) определить угол *ABC*;
в) составить уравнения трех сторон треугольника;
г) составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
д) составить уравнение биссектрисы угла *B*;
е) составить уравнение высоты, проведенной из вершины *A* на сторону *BC*;
ж) найти точку пересечения медиан.

Вариант	*A*	*B*	*C*
1	(4;1)	(7;5)	(−4;7)
2	(1;4)	(3;−9)	(−5;2)
3	(5;4)	(−1;2)	(5;1)
4	(2;−5)	(1;−2)	(4;7)
5	(3;−5)	(−3;3)	(−1;−2)
6	(−3;−1)	(5;3)	(6;−4)
7	(2;−1)	(4;3)	(−2;1)
8	(1;1)	(6;4)	(8;2)
9	(2;−3)	(3;2)	(−2;5)
10	(−1;−3)	(3;1)	(−5;1)
11	(1;5)	(−3;1)	(7;3)
12	(2;−2)	(0;4)	(6;2)
13	(−2;1)	(−1;−1)	(3;2)
14	(1;−1)	(−2;1)	(3;5)
15	(3;2)	(5;−2)	(1;0)
16	(1;−2)	(5;4)	(−2;0)
17	(−2;3)	(4;1)	(6;−5)
18	(4;4)	(−6;−1)	(−2;−4)
19	(−1;2)	(3;−1)	(10;4)
20	(4;5)	(−4;0)	(−1;−4)
21	(−3;2)	(5;−2)	(1;3)
22	(3;−4)	(−2;3)	(4;5)
23	(0;0)	(8;0)	(0;6)
24	(1;−1)	(6;4)	(2;6)
25	(2;0)	(5;3)	(2;6)

26	(−5;2)	(3;−9)	(1;4)
27	(−4;−1)	(−7;−5)	(4;−7)
28	(−1;−4)	(−3; 9)	(5;−2)
29	(−5;−4)	(1;−2)	(−5;−1)
30	(−2;5)	(−1;2)	(−4;−7)

2. Даны три вершины параллелограмма. Необходимо:
а) построить параллелограмм;
б) найти точку пересечения его диагоналей;
в) составить уравнения всех сторон параллелограмма и его диагоналей.

Вариант	***A***	***B***	***C***
1	(5;4)	(−1;2)	(5;1)
2	(2;−5)	(1;−2)	(4;7)
3	(3;−5)	(−3;3)	(−1;−2)
4	(−3;−1)	(5;3)	(6;−4)
5	(2;−1)	(4;3)	(−2;1)
6	(1;−2)	(5;4)	(−2;0)
7	(1;1)	(6;4)	(8;2)
8	(−2;3)	(4;1)	(6;−5)
9	(2;−3)	(3;2)	(−2;5)
10	(4;4)	(−6;−1)	(−2;−4)
11	(−1;−3)	(3;1)	(−5;1)
12	(−1;2)	(3;−1)	(10;4)
13	(1;5)	(−3;1)	(7;3)
14	(4;5)	(−4;0)	(−1;−4)
15	(2;−2)	(0;4)	(6;2)
16	(−3;2)	(5;−2)	(1;3)
17	(−2;1)	(−1;−1)	(3;2)
18	(3;−4)	(−2;3)	(4;5)
19	(1;−1)	(−2;1)	(3;5)
20	(0;0)	(8;0)	(0;6)
21	(3;2)	(5;−2)	(1;0)
22	(1;−1)	(6;4)	(2;6)
23	(2;0)	(5;3)	(2;6)
24	(−5;2)	(3;−9)	(1;4)
25	(4;1)	(7;5)	(−4;7)
26	(1;4)	(3;−9)	(−5;2)
27	(2;−3)	(−4;−1)	(−6;5)

28	(−2;3)	(−3;−2)	(2;−5)
29	(−4;−4)	(6;1)	(2;4)
30	(1; 3)	(−3;−1)	(5;−1)

Тема 5. Пределы функции

Понятие функции

Рассмотрим множество X элементов x и множество Y элементов y.

Определение. *Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, обозначаемый $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функция y=f(x) со значениями во множестве Y. Элементы $x \in X$ называются значениями аргумента, а элементы $y \in Y$ – значениями функции. Множество X называется областью определения функции, множество всех значений функции – областью значений этой функции.*

К традиционным основным способам задания функции относятся: аналитический, графический и табличный.

Определение. *Аналитический способ задания функции – это задание функции с помощью формул. Например,* $y = 2 \cdot x$, $y = \lg x$,

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \ge 0 \\ -x^2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Определение. Функция, заданная формулой $y = f(x)$, правая часть которой не содержит y, называется явной функцией.

Рассмотрим уравнение $F(x; y) = 0$. Предположим, что существует непустое множество X значений x таких, что при каждом $x_0 \in X$ уравнение $F(x_0; y) = 0$ имеет действительные решения относительно y. Обозначим одно из них через y_0. Сопоставляя таким образом каждому $x_0 \in X$ элемент y_0, получим функцию $y = y(x)$, определенную на множестве X, такую что $F(x; y(x)) = 0$ для $x \in X$. Функция $y = y(x)$, определенная таким образом, называется **функцией, заданной неявно** или **неявной функцией.**

Например, уравнение $3x + 2y - 5 = 0$ неявно задает функцию $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает неявно две функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Определение. *Табличный способ задания функции – это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания функции являются таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.*

Определение. *Графический способ задания функции – это способ задания функции при помощи графика.*

Определение. *Графиком функции* $y = f(x)$ *называется множество точек* $(x; f(x))$ *плоскости xOy, где x принадлежит области определения функции. Преимуществом графического способа задания функции является его наглядность.*

Определение. *Если y=f(u), u=φ(x) – функции своих аргументов, причем область определения функции y=f(u) содержит область значений функции u=φ(x), то каждому x из области определения функции φ соответствует такое y, что y=f(u), где u=φ(x). Эта функция, определяемая соответствием*

$$y = f(\varphi(x)),$$

называется сложной функцией или композицией функций φ и f. Например, если $y = u^2$, $u = \sin x$, то $y = \sin^2 x$ – сложная функция.

Определение. *Элементарными функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции* $y = \lg x + \sin x$, $y = x^2 + \cos x$ *являются элементарными.*

Функция нескольких переменных

Рассмотрим арифметическое n-мерное пространство.

$$R^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) \mid x_1; x_2; \ldots; x_n \in R\}.$$

Определение. *Пусть X – подмножество элементов множества* R^n *и Y – некоторое множество элементов y. Если каждому элементу* $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in X$ *поставлен в соответствие единственный элемент* $y \in Y$, *то говорят на множестве X задана функция* $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *со значениями в множестве Y. Такая функция называется функцией n переменных* $x_1; x_2; \ldots; x_n$.

В частности, при $n = 2$ имеем функцию двух аргументов $y = f(x_1; x_2)$ или $z = f(x; y)$. При $n = 2$ получаем функцию трех переменных $y = f(x_1; x_2; x_3)$ или $u = f(x; y; z)$.

Предел функции

Предел функции при стремлении аргумента к константе

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некотором интервале, содержащем точку $x = a$.

Определение. *Число А называется пределом функции f(x) при* $x \to a$, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое что, как только* $|x-a| < \delta$, *так сейчас же* $|f(x) - A| < \varepsilon$. *Через кванторы всеобщности* $(\forall)$ *и существования* $(\exists)$ *предел функции запишется формулой*

$$\forall\ (\varepsilon > 0)\ \exists\ (\delta = \delta(\varepsilon)):\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left(\ |f(x) - A| < \varepsilon\right) \qquad (5.1)$$

или, что тоже самое,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (5.2)$$

Выясним геометрический смысл этого определения, воспользовавшись графиком функции $y = f(x)$ (рис. 5.1).

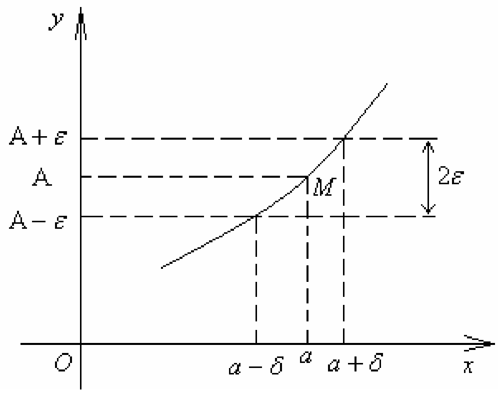


Рисунок 5.1. Предел функции

Неравенство $|x - a| < \delta$ означает, что x отстоит от точки a не далее, чем на δ, то есть принадлежит интервалу $(a-\delta; a+\delta)$. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что значения функции не выходят из интервала $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ оси Oy. Следовательно, точки M графика функции $y = f(x)$ должны находиться в полоске шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon,\ A + \varepsilon$ для всех значений x, удаленных от точки a не далее, чем на δ.

Пример. Используя определение предела функции, доказать, что

$$\lim_{x \to a}(3x - 2) = 1.$$

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Задача состоит в нахождении числа $\delta > 0$, такого, что из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x-2) - 1| < \varepsilon$. Из последнего неравенства имеем $|3x - 3| < \varepsilon$, то есть $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, если взять $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|<\delta$, будет выполняться неравенство $|3x-3|<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a}(3x-2)=1$.

Определение. *ε-окрестностью точки* x_0 *называется любой открытый интервал с центром в точке* x_0 *радиуса ε:* $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$.

Определение. *Число A называется пределом функции f(x) при* $x\to x_0$, *если для любого x, принадлежащему ε-окрестности точки* x_0, *значения функции f(x) принадлежат δ-окрестности числа A, где* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *сколь угодно малое число, зависящее от ε. Окрестность числа A может быть выколотой.*

Определение. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой функцией при* $x\to x_0$, *если для любого малого* $\varepsilon>0$ *существует δ-окрестность точки* x_0 *такая, что* $|\alpha(x)|<\varepsilon$, *то есть*

$$\forall(\varepsilon>0)\ \exists\ (\delta=\delta(\varepsilon)):\ \ (0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow\ (|\alpha(x)|<\varepsilon),$$

что эквивалентно записи

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0. \tag{5.3}$$

<u>*Свойства бесконечно малых функций*</u>

1. Если функция $y=y(x)$ имеет предел A при $x\to a$, то $y(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

2. Если функция $y(x)=A+\alpha(x)$, где A – число, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}y(x)=A$.

3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

4. Произведение двух бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

5. Произведение бесконечно малой функции при $x\to a$ на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

6. Произведение бесконечно малой функции при $x\to a$ на постоянную функцию есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

Определение. *Функция* $B(x)$ *называется бесконечно большой функцией при* $x\to x_0$, *если для любого малого* $\varepsilon>0$ *существует δ-окрестность точки* x_0 *такая, что* $|B(x)|>\varepsilon$, *то есть*

$$\forall\ (\varepsilon>0)\ \exists\ (\delta=\delta(\varepsilon)):\ \left(\ 0<|x-x_0|<\delta\ \right)\Rightarrow\left(|B(x)|>\varepsilon\right) \qquad (5.4)$$

$$\text{или } \lim_{x\to x_0} B(x)=\infty. \qquad (5.5)$$

Если $f(x)$ стремится к бесконечности, принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Примером бесконечно большой функции является функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$ или функция $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ при $x\to 2$.

Теорема. *Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая функция, и наоборот, то есть*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha(x)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty;\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{B(x)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Основные теоремы о пределах

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то справедливы следующие теоремы:

а) $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f_1(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0.$

При вычислении пределов необходимо в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить ее предельное значение. При этом возможны два варианта:

1) проведение необходимых вычислений позволяет получить определенное число (в частности, ноль) или бесконечность, которое и является ответом;

2) в результате подстановки предельного значения переменной получаются неопределенные выражения, символические обозначения которых $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$ и др.

В данном случае для получения результата нужно эти неопределенности раскрыть либо показать, что предела не существует (то есть он не определен).

Замечание. При вычислении пределов функций полезно помнить, что по определению

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$\lim\limits_{x\to\infty} cx=\infty,$ если $c>0;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\begin{cases}\infty, & a>1\\ 0, & 0\le a<1\\ \varnothing, & a<0.\end{cases}$$

<u>Примеры</u>.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}}{\sin\frac{\pi}{x}}=\dfrac{\sqrt{3^3+9}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3};$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\ln\left(1+2x^2\right)}=\dfrac{2^2-4}{\ln\left(1+2\cdot 2^2\right)}=\dfrac{0}{\ln 9}=0;$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{(x+1)^2}}=\left(1-3\cdot(-1)\right)^{\frac{1}{(-1+1)^2}}=\left[4^{\frac{1}{0}}\right]=\left[4^{\infty}\right]=\infty.$

Символическая запись $\left[\dfrac{1}{0}\right]$ означает деление не на ноль, а на бесконечно малое число, стремящееся к нулю, так и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]$ – это не деление на бесконечность, а деление на число, стремящееся к бесконечности, при этом $\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$ и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$.

Теперь рассмотрим методы раскрытия различных видов неопределенностей.

Неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

При раскрытии неопределенностей данного типа найдем старшую степень переменной x и разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на x в этой степени.

Примеры.

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{2x-5x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}-5}=-\frac{2}{5};$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3+2x+x^4}{2x^2-5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}+1}{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty;$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+7}{5x^3+4x^2-7x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{5}=0.$$

Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

При вычислении пределов отношения многочленов с неопределенностью $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x\to x_0$ необходимо при помощи алгебраических преобразований представить эти многочлены в виде произведения сомножителей, одним из которых будет $(x-x_0)$.

Примеры.

1) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{2+2}{2^2+2\cdot2+4}=\frac{1}{3};$$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2-x)-(x+6)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}=\frac{1}{10}.$$

Первый замечательный предел

Теорема. *Предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла в радианах равен единице, то есть*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (5.6)$$

Этот предел называется первым замечательным пределом.

Второй замечательный предел

Так называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad (5.7)$$

где число e – предел последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Обычно $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или следствие из него $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$ используются для раскрытия неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$.

Как видно, структура предела предполагает, чтобы основание степени было представлено в виде $\left[1+\alpha(x)\right]$, где $\alpha(x)\to 0$, а показатель степени должен быть величиной, обратной к $\alpha(x)$.

<u>Примеры</u>.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1}{2x+4}-1\right)^{3x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1-2x-4}{2x+4}\right)^{(3x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{2x+4}\right)^{3x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{-5}\cdot\frac{-5}{2x+4}\cdot(3x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-5}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{-5}}\right]^{\frac{-15x+5}{2x+4}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-15+\frac{5}{x}}{2+\frac{4}{x}}}=e^{\frac{-15}{2}};$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{1/2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+(-\sin 3x)\Big)^{\frac{1}{-\sin 3x}\frac{-\sin 3x}{2x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\Big(1+(-\sin 3x)\Big)^{\frac{1}{-\sin 3x}}\right]^{\frac{-\sin 3x}{3x\cdot\frac{2}{3}}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

Эквивалентные функции

Определение. *Если* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ − *бесконечно малые при* $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, *c=const, то функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются бесконечно малыми одного порядка, если же c=*0*, то говорят, что* $\alpha(x)$ *бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\beta(x)$.

Определение. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются эквивалентными бесконечно малыми при* $x \to x_0$ *и обозначаются* $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Определение. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой порядка n по сравнению с функцией* $\beta(x)$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^n} = c \neq 0.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин $\left(\alpha(x) \to 0\right)$

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2) $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4) $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
6) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;
7) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
8) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
9) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$;
10) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Индивидуальное задание №5

Вычислить пределы

№1

1	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$	***2***	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-12x+20}$	***3***	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$
4	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-2x-12}$	***5***	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+5x-3}{3x^2-7x+4}$	***6***	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2-10x-13}{3x^2+12x-3}$
7	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x^2-10x+17}{x^2+5x-12}$	***8***	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-2x-10}{2x^2+15x-5}$	***9***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-14x-2}{x^2+5x-12}$
10	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{10x^2+3x-2}{x^2+2x-1}$	***11***	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-12}$	***12***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2+2x+2}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+2x-3}$	***14***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+2x-2}$	***15***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-5}{x^2+6x-2}$
16	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x^2+2x-6}$	***17***	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6x-7}$	***18***	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+11x-2}{4x^2+3x-10}$
19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-3x+1}$	***20***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-3}{2x^2-4x+2}$	***21***	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-4}{x^2-25}$
22	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-10}{x^2+9x-3}$	***23***	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+2}{x^2-7x+3}$	***24***	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2-2x+8}{x^2+5x+6}$
25	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x+3}$	***26***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-7}{x^2+3x-3}$	***27***	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x-6}{2x^2-x+3}$
28	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-x-4}{2x^2+2x-3}$	***29***	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^2-16}$	***30***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+2x-7}{x^2+2x+3}$

№2

1	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-3x-4}$	***2***	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+6x+8}$	***3***	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+8x+4}{x^2-2x-8}$
4	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{-2x^2+6x-4}$	***5***	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^2+x-2}$	***6***	$\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-36}$
7	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x-14}$	***8***	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2+x-2}$	***9***	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$
10	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-16}$	***11***	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x-2}$	***12***	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-25}$

13	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{2x^2-x-1}$	***14***	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$	***15***	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{3x^2-x-2}$
16	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^3-8}$	***17***	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+7x+12}$	***18***	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-3}$
19	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x+8}{x^2-4x}$	***20***	$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+6x+8}{2x^2+7x-4}$	***21***	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+5x-10}{x^2-1}$
22	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{2x^2+3x-2}$	***23***	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-x-15}$	***24***	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4x^2+5x-6}{3x^2-7x-26}$
25	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-x-24}{2x^2+2x-24}$	***26***	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{6x^2-10x-4}{x^2+5x-14}$	***27***	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-15}$
28	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$	***29***	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{2x^2-5x-25}$	***30***	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+2}$

№3

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x^2+2}{2x^3-5x^2-2x}$	***2***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-3}{2x^5+2x+8}$	***3***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x-2}{2x^3-3x-4}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-7x-5}{4x^2+3x-2}$	***5***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2+7}{5x^4+12x^3+1}$	***6***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x-6}{8x^3+x^2+5}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-6x^2+12}{4x^4+4x-3}$	***8***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+3x+2}{6x^2-2x+1}$	***9***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x-2}{2x^3-3x^2-x+5}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{6x^3+5x-3}$	***11***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2-x+3}{2x^3-2x+3}$	***12***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+2x-1}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+28x+2}{3x^2+2x-1}$	***14***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-2}{7x^3+2x}$	***15***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4}{x^3+3x^2+2}$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+14}{7x^2+2x-3}$	***17***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+x}{x^2+3x-2}$	***18***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{5x^2-3x+4}$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+17x^2-2}{6x^3-4x+3}$	***20***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7}{3x^4+3x-5}$	***21***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+2x+5}$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+2}$	***23***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-2x^2}{x^4+2}$	***24***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{2x^3+3x^2+2}$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-7}{x^2-2x+10}$	***26***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x-7}{3x^2+2x+1}$	***27***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-3x+1}{3x^2+2x-5}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-3}{2x^2+4}$	***29***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+12x-9}{4x^2-x-4}$	***30***	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{9x^2+2x-1}$

№4

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{-3x}$	***2***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x-3}$	***3***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{5x-2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{3x+4}$	***5***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{4x}$	***6***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{4x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{2x-1}$	***8***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{3-2x}$	***9***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{5x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-2}$	***11***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{5-x}\right)^{7x-2}$	***12***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2+x}\right)^{3x-1}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x-1}$	***14***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{x+2}$	***15***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{4x+1}$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{2x+1}$	***17***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{2x+3}$	***18***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{2x-2}$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+1}$	***20***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+5}\right)^{7x-1}$	***21***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^{3x-1}$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-3}\right)^{3x-2}$	***23***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{3+x}\right)^{2x-1}$	***24***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2x+4}$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}$	***26***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{4x-1}$	***27***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x-1}\right)^{4x+3}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^{4x-3}$	***29***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^{3x-1}$	***30***	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x-1}$

Тема 6. Дифференциальное исчисление

Определение производной. Геометрический смысл

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке $(a;b)$. Зададим аргументу x некоторое приращение Δx, тогда функция y получит приращение Δy. Найдем приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

Определение. *Производной данной функции* $y = f(x)$ *по аргументу* x *называется конечный предел отношения приращения функции* Δy *к приращению аргумента* Δx, *когда* $\Delta x \to 0$, *и обозначается символом* $f'(x)$.

Таким образом, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (6.2)$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6.3)$$

Для производной также используются следующие обозначения:

$$y'_x = \frac{d}{dx} y(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется ***дифференцированием.***

Замечание. При вычислении производной функции по определению всегда возникает неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскрывая эту неопределенность, выясняем существование производной функции в точке x.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в точке $M(x; y)$ невертикальную касательную. Найдем угловой коэффициент этой касательной: $k = \mathrm{tg}\alpha$, где α − угол наклона касательной к оси *Ox*. Для этого проведем через точку $M(x; y)$ и точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ графика секущую. Обозначим через φ − угол между секущей MM_1 и осью *Ox*. Угловой коэффициент секущей (рис. 6.1) равен

$$k_{сек} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.4}$$

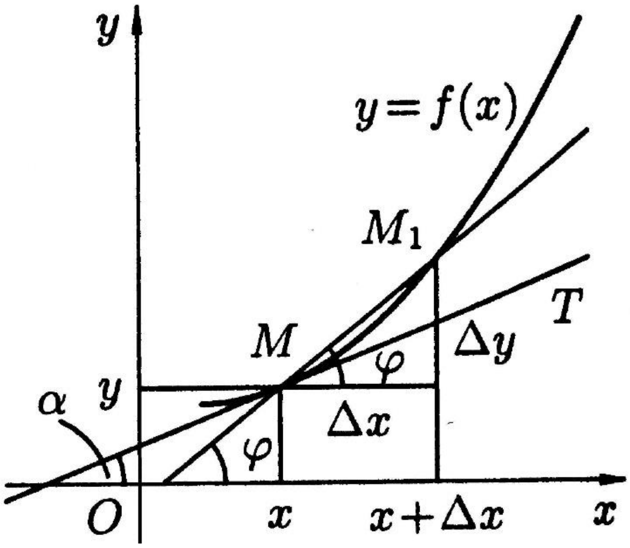


Рисунок 6.1. График касательной к функции

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке *M*, а секущая, поворачиваясь около точки *M*, переходит в касательную, тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\alpha$, поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, производная $f'(x)$ в точке *x* равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна *x* или, что то же самое, тангенсу угла наклона касательной в точке *M* к оси абсцисс. В этом заключается геометрический смысл производной.

Используя определение производной, легко получить производные простейших функций. Запишем эти производные в виде таблицы.

Таблица производных простейших функций

1) $x' = 1;$

2) $(x^n)' = nx^{n-1};$

3) $(e^x)' = e^x;$

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

5) $(a^x)' = a^x \ln a;$

6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

7) $(\sin x)' = \cos x;$

8) $(\cos x)' = -\sin x;$

9) $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

10) $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

13) $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

14) $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Правила дифференцирования

При вычислении производных необходимо знать правила дифференцирования. Пусть $U = U(x)$, $V = V(x)$ − две дифференцируемые в некотором интервале $(a;b)$ функции.

Теорема 1. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:* $(U \pm V)' = U' \pm V'$.

Теорема 2. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведения производной первого сомножителя на второй и произведения первого сомножителя на производную второго:*

$$\left(UV\right)' = U'V + V'U. \tag{6.5}$$

Следствие 1. $\left(cU\right)' = cU'$, где c – постоянная.

Теорема 3. *Производная частного двух функций* $U(x)/V(x)$, *если* $V(x) \neq 0$, *равна дроби, числитель которой есть разность* *произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:*

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2},\ V \neq 0. \qquad (6.6)$$

Следствие 1. $\left(\frac{U}{c}\right)' = \frac{1}{c}U'$, где c – постоянная величина, $c \neq 0$.

Следствие 2. $\left(\frac{c}{V}\right)' = -\frac{cV'}{V^2}$, где $c=const$.

<u>Примеры</u>.

1. Найти производную функции $y = (x^2 + 5x)\cdot(x^3 - 2)$.

Применяя теоремы 1, 2 и таблицу производных, имеем

$$y' = (x^2 + 5x)'\cdot(x^3 - 2) + (x^3 - 2)'\cdot(x^2 + 5x) = (2x+5)\cdot(x^3 - 2) + 3x^2 \times$$
$$\times\ (x^2 + 5x) = 2x^4 - 4x + 5x^3 - 10 + 3x^4 + 15x^3 = 5x^4 + 20x^3 - 4x - 10.$$

2. Найти производную функции $y = \frac{x-1}{x^2+3}$.

Применяя теоремы 1, 3 и таблицу производных, получим

$$y' = \frac{(x^2+3)\cdot(x-1)' - (x-1)\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2+3) - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} =$$
$$= \frac{x^2 + 3 - 2x^2 + 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2}.$$

Производные сложной и обратной функций

Теорема 4. *Производная сложной функции* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ *или* $y = f(u)$, *где* $u = \varphi(x)$, *равна произведению производной функции* $f(u)$ *по промежуточному аргументу* $u = \varphi(x)$ *на производную промежуточного аргумента по конечному аргументу* x

$$\left[f\left[\varphi(x)\right]\right]' = f_u'(u)\cdot u_x'. \qquad (6.7)$$

<u>Пример.</u>

1. Найти производную функции: $y = \arcsin(2x - 1)$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot (2x-1)' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}.$$

2. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций

Если неявная функция задана уравнением $F(x;y)=0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно *y*. Для этого достаточно продифференцировать это уравнение по *x*, рассматривая при этом *y* как функцию от *x*, и полученное затем уравнение разрешить относительно *y*. Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию *y*.

__Пример.__ Найти производную функции, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. Функция задана неявно. Дифференцируем по x данное равенство.

В полученном соотношении $3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3 \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') = 0$ сгруппируем слагаемые, содержащие y', в одной части уравнения и не содержащие – в другой: $y^2 y' - xy' = y - x^2$, выразим y': $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$

.

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$

где t − вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции $x(t), y(t)$ имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции имеем

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Получаем

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \text{ то есть } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (6.8)$$

Полученная формула позволяет находить производную от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример. Пусть $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение.

Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$.

Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, то есть $y'_x = \dfrac{2}{3t}$.

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной в целях упрощения расчетов заданную функцию сначала логарифмируют, а затем результат дифференцируют. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Применим логарифмическое дифференцирование. Прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y': $y' = y\left(\dfrac{2x}{x^2+2} + \dfrac{3}{4(x-1)} + 1 - \dfrac{3}{x+5}\right)$, то есть

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right).$$

Существуют функции, для вычисления производных которых таблицу использовать невозможно, если предварительно их (функции) не прологарифмировать. Такой функцией является, например, степенно-показательная функция $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x.

Найдем производную этой функции, для этого прологарифмируем обе части равенства по основанию e:

$$\ln y = v\ln u.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x, помня, что $y = y(x)$ – неявная функция аргумента x: $\dfrac{1}{y}y' = v'\ln u + v\dfrac{1}{u}u'$. После преобразований получим выражение: $y' = y\left(v'\ln u + v\dfrac{1}{u}u'\right)$,

$$\left(u^v\right)' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{1}{u}u'\right).$$

Пример. Найти производную функции $y = \left(\sin x\right)^{x^2}$.

Решение. Применим логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln\left(\left(\sin x\right)^{x^2}\right) = x^2\ln(\sin x),$$

$$(\ln y)' = \left(x^2\right)'\ln(\sin x) + x^2\frac{1}{\sin x}\cos x,$$

$$\frac{1}{y}y' = 2x\ln(\sin x) + \frac{x^2\cos x}{\sin x},$$

$$y' = y\left(2x \cdot \ln(\sin x) + \frac{x^2 \cos x}{\sin x}\right).$$

Окончательно, $y' = (\sin x)^{x^2}\left(2x \cdot \ln(\sin x) + \frac{x^2 \cos x}{\sin x}\right).$

Производные высших порядков

Определение. *Производная* $y' = f'(x)$ *функции* $y = f(x)$ *также есть функция от* x *и называется производной первого порядка. Если функция* $f'(x)$ *дифференцируемая, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается* y'', *или* $f''(x)$, *или* $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Определение. *Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается* y''', *или* $f'''(x)$, *или* $\frac{d^3 y}{dx^3}$. *Производной* n*-го порядка называется производная от производной* $(n–1)$ *порядка:* $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Определение. *Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.*

Например, для функции $y = x^5 - 3x^2 + \cos 3x$ получим

$y' = 5x^4 - 6x - 3\sin 3x$;

$y'' = 20x^3 - 6 - 9\cos 3x$;

$y''' = 60x^2 + 27\sin 3x$.

<u>**Пример.**</u> Найти производную второго порядка от функции $y = \ln^2 x - \frac{1}{x}$.

Решение. Поскольку $y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - (-1) \cdot x^{-2}$;

то $y'' = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x \cdot (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^3}$.

Если функция задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то производные $y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}, \ldots$ вычисляются по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{(x'_t)^3},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$$

и так далее.

Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a)=g(a)=0$, то предел отношения функций при $x\to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.9}$$

Замечание. Отметим, что правило Лопиталя применяется только в случае наличия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Например, вычислить предел, используя правило Лопиталя, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(\sin 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{5\cos 5x} = \frac{3}{5}$.

Индивидуальное задание №6

Найти производные следующих функций.

№1

1	$y=2x^7+\frac{5}{x^3}+\frac{3}{4x}-2\sqrt[3]{x^2}$	***2***	$y=4x^6-\sqrt[3]{x^7}+\frac{2}{x}-+\frac{4}{2x^5}$
3	$y=4x^7+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{2x^4}$	***4***	$y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{3x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$
5	$y=5x^3-\frac{2}{x^2}+4\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{4x}$	***6***	$y=\frac{2}{x^3}+2\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^3$
7	$y=x^4+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}+x^5$	***8***	$y=\frac{2}{x^4}-\frac{1}{2x}+3x^3-\sqrt[3]{x^2}$
9	$y=x^2-2\sqrt{x^5}+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^4}$	***10***	$y=2\sqrt{x^5}-\frac{1}{x}+\frac{4}{2x^3}+5x^2$
11	$y=2x^2+\frac{1}{x}-2\sqrt[5]{x^4}+\frac{3}{x^3}$	***12***	$y=2x^2+\frac{1}{5x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}$
13	$y=x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}+3\sqrt[7]{x^2}$	***14***	$y=2x-\frac{4}{x^4}-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}$
15	$y=\frac{5}{x}+\sqrt[5]{x^2}+4x^3-\frac{2}{x^4}$	***16***	$y=x^4+5\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{3x}-\frac{4}{x^2}$
17	$y=5x^2+2\sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^2}$	***18***	$y=x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{1}{3x^3}$
19	$y=x^5-\frac{5}{x}+4\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$	***20***	$y=x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{2x^2}$
21	$y=\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^4}+2x^3$	***22***	$y=\frac{4}{x^5}-\frac{1}{2x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$
23	$y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{4x^5}-3x$	***24***	$y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{3x}-4\sqrt{x^3}+2x^3$
25	$y=x^3+\frac{3}{x^2}+2\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$	***26***	$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+2\sqrt[3]{x^7}$
27	$y=\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x}-4x^3-2\sqrt{x^7}.$	***28***	$y=3\sqrt{x^3}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^5}-5x^3$
29	$y=x^3+\frac{5}{x^2}-4\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}$	***30***	$y=\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^3}-6\sqrt[5]{x^3}-2x^6$

№2

1	$y=\sin 2x\cdot\cos 8x$	**2**	$y=\cos 5x\cdot\mathrm{tg}(4x-2)$	**3**	$y=\arcsin 2x\cdot\mathrm{ctg}3x$
4	$y=\mathrm{tg}2x\cdot\arcsin x^3$	**5**	$y=e^{\cos x}\mathrm{ctg}2x$	**6**	$y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos 3x$
7	$y=\ln 3x\cdot\mathrm{arctg}x^4$	**8**	$y=\mathrm{arctg}3x\cdot\sin 5x$	**9**	$y=\cos 4x\cdot\ln(x+2)$
10	$y=\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{arcctg}5x$	**11**	$y=\mathrm{ctg}4x\cdot\arcsin 7x$	**12**	$y=\sin 4x\cdot\arccos 2x$
13	$y=\sin 3x\cdot\mathrm{arctg}2x$	**14**	$y=\cos 4x\cdot\mathrm{arcctg}3x$	**15**	$y=\mathrm{tg}3x\cdot\arcsin 6x$
16	$y=\mathrm{ctg}2x\cdot\arccos 2x$	**17**	$y=\cos 3x\cdot\arccos 4x$	**18**	$y=\arccos 4x\cdot\ln(x-3)$
19	$y=e^{-\sin x}\mathrm{tg}7x$	**20**	$y=\sin 7x\cdot\mathrm{arcctg}5x$	**21**	$y=\cos 2x\cdot\arcsin 3x$
22	$y=\cos 5x\cdot\mathrm{arctg}4x$	**23**	$y=\mathrm{tg}2x\cdot\cos 7x$	**24**	$y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arcsin 2x$
25	$y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos x^4$	**26**	$y=\mathrm{tg}4x\cdot\mathrm{arcctg}3x$	**27**	$y=\mathrm{tg}3x\cdot\arccos 2x$
28	$y=\mathrm{tg}3x\cdot\mathrm{arctg}3x$	**29**	$y=\sin 3x\cdot\mathrm{arctg}2x$	**30**	$y=\cos 3x\cdot\arcsin 3x$

№3

1	$y=\dfrac{\mathrm{arcctg}5x}{\ln(x-4)}$	**2**	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{\ln(x+5)}$	**3**	$y=\dfrac{\arccos^4 x}{\ln(x-1)}$
4	$y=\dfrac{\arccos 2x}{3^{-x}}$	**5**	$y=\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{arctg}7x}$	**6**	$y=\dfrac{e^{-x}}{\arcsin 5x}$
7	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}5x}{\log_2(x-3)}$	**8**	$y=\dfrac{\log_2(x+3)}{\arccos^2 x}$	**9**	$y=\dfrac{\mathrm{ctg}4x}{\mathrm{arctg}2x}$
10	$y=\dfrac{\log_4(x-1)}{\arcsin 2x}$	**11**	$y=\dfrac{(x-4)^5}{\mathrm{arcctg}3x}$	**12**	$y=\dfrac{\mathrm{ctg}4x}{\mathrm{arctg}2x}$
13	$y=\dfrac{e^{-\cos x}}{\mathrm{arctg}7x}$	**14**	$y=\dfrac{(x+1)^2}{\arccos 3x}$	**15**	$y=\dfrac{2^{\sin x}}{\mathrm{arcctg}2x}$
16	$y=\dfrac{3^{-x^3}}{\mathrm{arctg}2x}$	**17**	$y=\dfrac{3^{\cos x}}{\arcsin 3x}$	**18**	$y=\dfrac{\ln(x-10)}{\arccos 4x}$
19	$y=\dfrac{\lg(x-2)}{\arcsin 5x}$	**20**	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}7x}{\log_3(x+1)}$	**21**	$y=\dfrac{\ln(x+9)}{\mathrm{arcctg}2x}$
22	$y=\dfrac{\arcsin 3x}{\lg(x+2)}$	**23**	$y=\dfrac{2^{\cos x}}{\mathrm{arcctg}^3 x}$	**24**	$y=\dfrac{\lg(x-3)}{\arcsin 5x}$
25	$y=\dfrac{4^{-\sin x}}{\mathrm{arctg}3x}$	**26**	$y=\dfrac{\log_2(x+3)}{\arccos 2x}$	**27**	$y=\dfrac{2^{-x}}{\mathrm{arctg}4x}$

28	$y=\dfrac{\ln(x-4)}{\mathrm{arcctg}3x}$	**29**	$y=\dfrac{\lg(x+3)}{\mathrm{arcctg}5x}$	**30**	$y=\dfrac{\log_5(x+1)}{\mathrm{arctg}3x}$

№4

1	$y=\cos^2(8x-2)^3$	**2**	$y=\mathrm{tg}^4(4x-2)^2$	**3**	$y=\arcsin^2(3x+2)^4$
4	$y=\mathrm{tg}^2(\arcsin x^3)$	**5**	$y=\arccos^4 4(\ln(x-3))$	**6**	$y=\mathrm{ctg}(\arccos 3x)^2$
7	$y=\ln^5(\mathrm{arctg}7x^4)$	**8**	$y=\mathrm{arctg}^3(3^{\sin x})$	**9**	$y=\ln^5(x+2)^2$
10	$y=2^{\mathrm{arcctg}5x^3}$	**11**	$y=3^{\arcsin 7x^4}$	**12**	$y=5^{\arccos 2x^5}$
13	$y=\sin^3(\mathrm{arctg}2x^3)$	**14**	$y=\cos^2(\mathrm{arcctg}\sqrt{x})$	**15**	$y=\mathrm{tg}^2(\arcsin x^5)$
16	$y=\mathrm{ctg}^5(\arccos 2x^3)$	**17**	$y=e^{\mathrm{tg}7x^6}$	**18**	$y=e^{\mathrm{ctg}8x^3}$
19	$y=\cos^3(\arccos 4x)$	**20**	$y=\sin^4(\mathrm{arcctg}5x^2)$	**21**	$y=\sin^2(\mathrm{arcctg}3x^5)$
22	$y=\cos^2(\mathrm{arctg}x^4)$	**23**	$y=\mathrm{tg}^2(\cos 7x^2)$	**24**	$y=\mathrm{ctg}^4(\arcsin\sqrt{x})$
25	$y=\mathrm{ctg}^2(\arccos x^4)$	**26**	$y=\mathrm{tg}^3(\mathrm{arcctg}3x^5)$	**27**	$y=\mathrm{tg}^3(\arccos 2x^3)$
28	$y=2^{\mathrm{arctg}^5 3x}$	**29**	$y=\sin^5(\mathrm{arctg}\sqrt{x})$	**30**	$y=\cos^4(\arcsin 3x^2)$

Тема 7. Интегральное исчисление

Первообразная функция

Определение. *Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке* $[a;b]$, *если в любой точке этого отрезка верно равенство*

$$F'(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C. \tag{7.2}$$

Неопределенный интеграл

Определение. *Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C. Записывают*

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{7.3}$$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства неопределенных интегралов:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
3. $\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx,$ где u, v, w – функции от x.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$

Пример.

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C.$$

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций, являющиеся зачастую следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C \\ -\mathrm{arcctg} x + C \end{cases}$

11. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

14. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

15. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере.

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций, для которых можно сразу найти первообразную. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных)

Теорема. *Если требуется найти интеграл* $\int f(x)dx$, *но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены* $x = \varphi(t)$ *и* $dx = \varphi'(t)dt$ *получается*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{7.4}$$

Пример.

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x,\ dt = \cos x dx$

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = dt/2x;$ после подстановки:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

где u и v – некоторые функции от x.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv=\int udv+\int vdu, \tag{7.5}$$

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{7.6}$$

Полученная формула интегрирования по частям позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример.

$$\int x^2\sin xdx=\begin{cases}u=x^2; & dv=\sin xdx\\ du=2xdx; & v=-\cos x\end{cases}=-x^2\cos x+\int\cos x\cdot 2xdx=$$

$$=\begin{cases}u=x; & dv=\cos xdx\\ du=dx; & v=\sin x\end{cases}=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin xdx\right]=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Пример.

$$\int(2x+1)^{20}dx=\{2x+1=t;\quad dt=2dx\}=\int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} =$$

$$= \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C = -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение. *Дробно-рациональная функция представляет собой отношение многочлен, т. е.* $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, *здесь* $P_m(x)$ *и* $Q_n(x)$ *− многочлены степени* m *и* n *соответственно. Если степень многочлена* m *в числителе меньше степени многочлена* n *в знаменателе, то дробь называют правильной* $(m < n)$, *если* $m \geq n$ *− неправильной.*

Всякую дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы целой части (если дробь неправильная) и простых рациональных дробей. Целая часть, то есть многочлен, интегрируется почленно. Интегрирование простых дробей рассмотрим ниже.

К простым дробям относят дроби вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$. 2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k = 2,3,...)$.

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$. 4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k = 2,3,...)$.

Здесь A, B, M, N, a, p, q − постоянные коэффициенты, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Найдем интегралы для первых трех видов дробей.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Выделим в числителе производную знаменателя и представим интеграл в виде суммы двух интегралов, т. е.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4})-\frac{p^2}{4}+q} = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}.$$

1 случай.

Рассмотрим рациональную функцию $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой можно разложить в виде

$$Q_n(x) = (x-a)(x-b)...(x-c),$$

тогда дробь можно представить в виде суммы простейших дробей первого типа:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{C}{x-c},$$

где *A*, *B*, *C* – неизвестные коэффициенты, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов (см. пример ниже).

После этого интеграл можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = A\int \frac{dx}{x-a} + B\int \frac{dx}{x-b} + ... + C\int \frac{dx}{x-c}. \qquad (7.7)$$

Пример.

Найти $\int \frac{dx}{(1-x)(x-2)}$.

1 шаг. Согласно теореме дробь можно разложить на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{(1-x)(x-2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x-2}.$$

2 шаг. Методом неопределенных коэффициентов найдем неизвестные числа *A*, *B*, *C*. Для этого приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители полученных дробей:

$$1 = A(x-2) + B(1-x).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x:

$$1 = (A-B)x + (-2A+B).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества и получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ -2A+B=1, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=-1. \end{cases}$$

3 шаг. Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(1-x)(x-2)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

и найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{(1-x)(x-2)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-1| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C.$$

2 случай.

Пусть знаменатель дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma}.$$

Тогда дробь можно записать в виде суммы простых дробей следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots.. +$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots.. + \frac{C_1}{x-c} + \ldots. + \frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma}.$$

Интеграл от этой рациональной дроби будет равен сумме интегралов от каждой из простых дробей.

Пример.

Найти $\displaystyle\int \frac{2-x}{(7-x)^2}dx$.

1 шаг. Знаменатель дроби имеет кратный корень $x=7$ (кратность корня равна 2), поэтому в разложении дроби записывают две простые дроби. Неизвестные коэффициенты находят методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{2-x}{(7-x)^2}=\frac{A}{7-x}+\frac{B}{(7-x)^2}=\frac{A(7-x)+B}{(7-x)^2}.$$

2 шаг.

$$2-x=A(7-x)+B=-Ax+7A+B.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получим систему

$$\begin{cases}-A=-1\\ 7A+B=2,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases}A=1\\ B=-5.\end{cases}$$

3 шаг. Подставим A и B в разложение и найдем интеграл:

$$\frac{2-x}{(7-x)^2}=\frac{1}{7-x}-\frac{5}{(7-x)^2},$$

$$\int\frac{2-x}{(7-x)^2}dx=\int\frac{dx}{7-x}-5\int\frac{dx}{(7-x)^2}=-\ln|7-x|-\frac{5}{7-x}+C.$$

3 случай.

Знаменатель правильной рациональной дроби представлен в виде произведения квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней:

$$Q_n(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)...(x^2+p_sx+q_s).$$

Тогда дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+D}{x^2+p_2x+q_2}+...+\frac{Mx+N}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Чтобы найти интеграл от такой дроби, надо найти интеграл от каждой из дробей, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен.

Пример.

Найти $\displaystyle\int\frac{x-2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}dx.$

1 шаг. Квадратные трехчлены x^2+1 и x^2-2x+5 не имеют действительных корней. Запишем разложение дроби на сумму простейших дробей и приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю

$$\frac{x-2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+5}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}.$$

<u>2 шаг.</u> Приравняем числители дробей и составим систему уравнений:

$$x-2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+5)=$$
$$=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2-2Cx^2-2Dx+5Cx+5D=$$
$$=(A+C)x^3+(B+D-2C)x^2+(A-2D+5C)x+(B+5D).$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D-2C=0 \\ A-2D+5C=1 \\ B+5D=-2, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

<u>3 шаг.</u> Найдем интеграл от дроби:

$$\frac{x-2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x^2-2x+5}-\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1},$$

$$\int\frac{(x-2)dx}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\underbrace{x^2-2x+5}_{\text{выделим полный квадрат}}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}arctg\,\frac{x-1}{2}-\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Интегрирование иррациональных функций

Задача состоит в том, чтобы с помощью подстановки свести интеграл от иррациональной функции к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим некоторые из видов иррациональных функций.

1. $\int R(x,x^{\alpha},x^{\beta},...,x^{\gamma})dx$, где R – рациональная функция своих аргументов; $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$ – дробные показатели.

Чтобы перейти к интегрированию рациональной функции, введем подстановку $x = t^n$, где n – НОК (наименьшее общее кратное) знаменателей дробей $\alpha, \beta, .., \gamma$.

Пример.

Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

В данной функции дробные показатели степени $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Их знаменатели 2 и 3, НОК(2,3) = 6, следовательно, можно сделать подстановку $x = t^6$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \left| t = \sqrt[6]{x} \right| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

2. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов, n – натуральное число.

В этом случае вводится подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$. Таким образом переходим к интегрированию дробно-рациональной функции.

Пример.

Найти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

Сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, тогда $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, а $dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$.

Получим

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left[\frac{1-x}{1+x} = t^2, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}, \right.$$

$$1+x=\frac{2}{1+t^2},\frac{1}{1+x}=\frac{1+t^2}{2}\quad\Bigg]=\int\frac{t(1+t^2)}{2}\Big(\ -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\ \Big)dt=$$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=-2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=-2\left(t-\operatorname{arctgt}\right)+C=\left[t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Пусть дано выражение, зависящее, и притом рационально, только от тригонометрических функций. Так как все тригонометрические функции выражаются через $\sin x$ и $\cos x$, то это выражение можно считать рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим приемы интегрирования некоторых из них.

Интегралы вида $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ всегда могут быть рационализированы с помощью подстановки $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$.

<u>Пример.</u>

Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

Сделаем подстановку $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Подставим ее в интеграл соотношения $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ и $dx=\frac{2du}{1+u^2}$. Получим

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{2du}{\left(1+u^2\right)\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=2\int\frac{du}{1+u^2+1-u^2}=u+C=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

2. Интегралы $\int\sin ax\cos bx dx$, $\int\sin ax\sin bx dx$ и $\int\cos ax\cos bx dx$ легко вычисляются, если преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

<u>Пример.</u>

Вычислить интеграл $\int \sin 6x \cos 7x dx$.

Воспользуемся формулой

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right].$$

Тогда

$$\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(-x) + \sin 13x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 13x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C.$$

При нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ используют различные приемы в зависимости от показателей m и n.

Пример.

Найти $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Если m и n целые числа и хотя бы одно из них положительное и нечетное, то подстановка $\cos x = u$ (если $m > 0$ и нечетное) или $\sin x = u$ (если $n > 0$ и нечетное) приводит к интегрированию степенных функций.

В данном случае $n = 3$, поэтому сделаем подстановку $\sin x = u$. Тогда $du = \cos x dx$ и интеграл примет вид:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x dx =$$

$$= \int u^2\left(1 - u^2\right)du = \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Пример.

Найти интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Если оба показателя m и n положительные и четные, то применяются тригонометрические формулы:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

Изученные нами методы интегрирования состоят в преобразованиях, приводящих интеграл к заранее известному табличному интегралу, т. е. находящемуся в таблице интегралов. До сих пор мы пользовались основной таблицей интегралов. На практике постоянно используются различные справочники и таблицы часто встречающихся интегралов.

В отличие от дифференцирования, операция интегрирования непрерывных функций не всегда позволяет найти элементарную функцию, являющуюся первообразной для заданной функции. Доказано, что всякая непрерывная функция имеет первообразную, но существуют такие элементарные функции, интегралы от которых не выражаются никакими конечными комбинациями основных элементарных функций или имеют весьма сложный и неудобный для вычислений вид. Такие интегралы называют «неберущимися». Например, интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\ \int \frac{e^x}{x}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx$$

нельзя представить никакой конечной комбинацией элементарных функций. В этих случаях применяются различные способы приближенного вычисления интегралов.

Определенный интеграл

Рассмотрим непрерывную на промежутке $[a;b]$ функцию $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей и составим интегральную сумму:

$$I_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

где по-прежнему $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $x_{k-1} < \xi_k < x_k$.

Найдем предел интегральной суммы, если $n\to\infty$, а $\max\Delta x_k \to 0$:

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_k\to 0}} I_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Определение. *Определенным интегралом функции* $f(x)$ *в промежутке от* a *до* b *называется конечный предел, к которому стремится последовательность интегральных сумм, если число разбиений* n *стремится к бесконечности, а длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю, и обозначается символом*

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{7.8}$$

В случае существования такого предела функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** в промежутке $[a;b]$.

Знак интеграла $\int$ − стилизованная буква S (сумма), a и b – граничные точки области интегрирования – называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение. При постоянных пределах интегрирования определенный интеграл представляет собой постоянное число.

Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. *Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интеграла:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x). \tag{7.9}$$

Замечание. Разность значений функции часто записывают в виде

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{7.10}$$

Вертикальную черту с верхними и нижними индексами, стоящую справа от символа функции, называют знаком двойной подстановки. Он указывает, что из значения функции, принимаемого в верхнем индексе, нужно вычесть значение, принимаемое в нижнем индексе.

Формула Ньютона – Лейбница дает основной способ вычисления определенных интегралов при помощи неопределенного интегрирования.

<u>Свойства определенных интегралов</u>

1. Если пределы интегрирования совпадают, то интеграл равен 0, то есть

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. При перестановке пределов интегрирования интеграл умножается на (−1).

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема. *Теорема о разбиении интервала интегрирования.*

Если функция $f(x)$ *интегрируема в наибольшем из промежутков* $[a;b]$,$[a;c]$ *и* $[c;b]$, *то она интегрируема в двух других, и имеет место равенство*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

<u>Пример.</u>

$\int_1^2 \left(\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}\right)dx.$

$$\int_1^2 (\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2})dx = \int_1^2 x^{\frac{3}{2}}dx - \int_1^2 x^{\frac{2}{3}}dx = \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{5}(\sqrt{2^5} - \sqrt{1^5}) - \frac{3}{5}(\sqrt[3]{2^5} - \sqrt[3]{1^5} = \frac{2}{5}4\sqrt{2} - \frac{2}{5} - \frac{3}{5}2\sqrt[3]{4} + \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{6}{5}\sqrt[3]{4} + \frac{1}{5}.$$

Индивидуальное задание №7

Найти неопределенные интегралы.

№1

1	$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$	**2**	$\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$	**3**	$\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$
4	$\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$	**5**	$\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$	**6**	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$
7	$\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$	**8**	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$	**9**	$\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$
10	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$	**11**	$\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx$	**12**	$\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$
13	$\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx$	**14**	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$	**15**	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$
16	$\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx$	**17**	$\int \left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$	**18**	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx$
19	$\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx$	**20**	$\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$	**21**	$\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$
22	$\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$	**23**	$\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$	**24**	$\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$
25	$\int \left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$	**26**	$\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$	**27**	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$
28	$\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$	**29**	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$	**30**	$\int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$

№2

1	$\int\sqrt{3+x}dx$	**2**	$\int\frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$	**3**	$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	**4**	$\int\sqrt[3]{(1+x)^2}dx$
5	$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$	**6**	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$	**7**	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$	**8**	$\int\frac{dx}{(2+x)^3}$
9	$\int\sqrt{1+3x}dx$	**10**	$\int(1-3x)^4dx$	**11**	$\int(1+4x)^5dx$	**12**	$\int\sqrt{5-4x}dx$
13	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$	**14**	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$	**15**	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$	**16**	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$
17	$\int(1-4x)^7dx$	**18**	$\int\sqrt[3]{1+3x}dx$	**19**	$\int\sqrt[5]{3-2x}dx$	**20**	$\int\sqrt[3]{1+x}dx$
21	$\int\sqrt[4]{1+3x}dx$	**22**	$\int\sqrt[3]{5-2x}dx$	**23**	$\int\sqrt[5]{(6-5x)^2}dx$	**24**	$\int\sqrt{5-4x}dx$
25	$\int\sqrt[4]{2-5x}dx$	**26**	$\int\sqrt[3]{4-2x}dx$	**27**	$\int\sqrt{3-4x}dx$	**28**	$\int\sqrt[5]{3+2x}dx$
29	$\int\sqrt[4]{(3+5x)^3}dx$	**30**	$\int\sqrt[3]{(2-x)^2}dx$				

№3

1	$\int\frac{dx}{3-x}$	**2**	$\int\frac{dx}{3x+9}$	**3**	$\int\frac{dx}{2-3x}$	**4**	$\int\frac{dx}{2+3x}$
5	$\int\frac{dx}{1-4x}$	**6**	$\int\frac{dx}{2-5x}$	**7**	$\int\frac{dx}{3x-2}$	**8**	$\int\frac{dx}{2x+3}$
9	$\int\frac{dx}{3x-4}$	**10**	$\int\frac{dx}{4-3x}$	**11**	$\int\frac{dx}{3x+4}$	**12**	$\int\frac{dx}{4x-2}$
13	$\int\frac{dx}{5-3x}$	**14**	$\int\frac{dx}{3-5x}$	**15**	$\int\frac{dx}{5x-3}$	**16**	$\int\frac{dx}{5+3x}$
17	$\int\frac{dx}{3-2x}$	**18**	$\int\frac{dx}{4-7x}$	**19**	$\int\frac{dx}{5+4x}$	**20**	$\int\frac{dx}{6+5x}$
21	$\int\frac{dx}{6-3x}$	**22**	$\int\frac{dx}{1-7x}$	**23**	$\int\frac{dx}{1+6x}$	**24**	$\int\frac{dx}{2+7x}$
25	$\int\frac{dx}{6x+1}$	**26**	$\int\frac{dx}{7-3x}$	**27**	$\int\frac{dx}{5-2x}$	**28**	$\int\frac{dx}{2x+7}$
29	$\int\frac{dx}{7x-3}$	**30**	$\int\frac{dx}{2x+9}$				

№4

1	$\int \sin(2-3x)dx$	**2**	$\int \cos(5-2x)dx$	**3**	$\int \sin(8x-3)dx$
4	$\int \sin(5-3x)dx$	**5**	$\int \cos(3-4x)dx$	**6**	$\int \cos(3x+5)dx$
7	$\int \cos(3+2x)dx$	**8**	$\int \cos(5x-8)dx$	**9**	$\int \sin(7x+1)dx$
10	$\int \cos(7x+3)dx$	**11**	$\int \cos(5x-6)dx$	**12**	$\int \sin(8x-5)dx$
13	$\int \sin(7-4x)dx$	**14**	$\int \cos(3x-7)dx$	**15**	$\int cos(2+5x)dx$
16	$\int \cos(8x-4)dx$	**17**	$\int \sin(9x+7)dx$	**18**	$\int \cos(4x+3)dx$
19	$\int \cos(10x-3)dx$	**20**	$\int \sin(4-2x)dx$	**21**	$\int \cos(7x+3)dx$
22	$\int \sin(3-4x)dx$	**23**	$\int \cos(3x-7)dx$	**24**	$\int \sin(9x-1)dx$
25	$\int \sin(5-3x)dx$	**26**	$\int \sin(3x+6)dx$	**27**	$\int \sin(5x-3)dx$
28	$\int \sin(3-2x)dx$	**29**	$\int \cos(2+3x)dx$	**30**	$\int \sin(3+4x)dx$

№5

1	$\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$	**2**	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$	**3**	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	**4**	$\int \frac{dx}{5x^2+3}$
5	$\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	**6**	$\int \frac{dx}{9x^2+3}$	**7**	$\int \frac{dx}{7x^2-4}$	**8**	$\int \frac{dx}{5x^2-3}$
9	$\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$	**10**	$\int \frac{dx}{2x^2+7}$	**11**	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	**12**	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	**14**	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	**15**	$\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	**16**	$\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	**18**	$\int \frac{dx}{3x^2+2}$	**19**	$\int \frac{dx}{8x^2+9}$	**20**	$\int \frac{dx}{3x^2-2}$
21	$\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$	**22**	$\int \frac{dx}{4x^2+3}$	**23**	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$	**24**	$\int \frac{dx}{8x^2-9}$
25	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	**26**	$\int \frac{dx}{4x^2-3}$	**27**	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$	**28**	$\int \frac{2dx}{4+3x^2}$
29	$\int \frac{dx}{4x^2+7}$	**30**	$\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$				

№6

1	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$	***2***	$\int\frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$	***3***	$\int\frac{3xdx}{4x^2+1}$	***4***	$\int\frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$
5	$\int\frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$	***6***	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$	***7***	$\int\frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$	***8***	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$
9	$\int\frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$	***10***	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$	***11***	$\int\frac{xdx}{2x^2-7}$	***12***	$\int\frac{xdx}{3x^2+8}$
13	$\int\frac{xdx}{2x^2+9}$	***14***	$\int\frac{2xdx}{3x^2-7}$	***15***	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$	***16***	$\int\frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$
17	$\int\frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$	***18***	$\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$	***19***	$\int\frac{xdx}{5x^2+1}$	***20***	$\int\frac{xdx}{3x^2-6}$
21	$\int\frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$	***22***	$\int\frac{5xdx}{5x^2-3}$	***23***	$\int\frac{xdx}{2x^2-7}$	***24***	$\int\frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$
25	$\int\frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$	***26***	$\int\frac{3xdx}{9x^2+2}$	***27***	$\int\frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+5}}$	***28***	$\int\frac{7xdx}{7x^2+1}$
29	$\int\frac{2xdx}{5x^2-3}$	***30***	$\int\frac{xdx}{3x^2-2}$				

№7

1	$\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$	***2***	$\int\frac{dx}{2x^2-5}$	***3***	$\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$	***4***	$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$
5	$\int\frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$	***6***	$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$	***7***	$\int\frac{dx}{5x^2+2}$	***8***	$\int\frac{dx}{2x^2+3}$
9	$\int\frac{dx}{2x^2+9}$	***10***	$\int\frac{dx}{5x^2-4}$	***11***	$\int\frac{dx}{3x^2-7}$	***12***	$\int\frac{dx}{3x^2+7}$
13	$\int\frac{dx}{6x^2+1}$	***14***	$\int\frac{dx}{6x^2-7}$	***15***	$\int\frac{dx}{7x^2+6}$	***16***	$\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$
17	$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$	***18***	$\int\frac{dx}{3x^2-5}$	***19***	$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$	***20***	$\int\frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$

21	$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$	**22**	$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$	**23**	$\int\frac{dx}{2x^2+7}$	**24**	$\int\frac{dx}{4x^2-3}$
25	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$	**26**	$\int\frac{dx}{3x^2+4}$	**27**	$\int\frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$	**28**	$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$
29	$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$	**30**	$\int\frac{dx}{3x^2-2}$				

№8

1	$\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$	**2**	$\int\frac{\sqrt[3]{\ln^3(1-x)}}{x-1}dx$	**3**	$\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$
4	$\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$	**5**	$\int\frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$	**6**	$\int\frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$
7	$\int\frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$	**8**	$\int\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$	**9**	$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$
10	$\int\frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$	**11**	$\int\frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$	**12**	$\int\frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$
13	$\int\frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx$	**14**	$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}$	**15**	$\int\frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx$
16	$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$	**17**	$\int\frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx$	**18**	$\int\frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$
19	$\int\frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$	**20**	$\int\frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx$	**21**	$\int\frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx$
22	$\int\frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx$	**23**	$\int\frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx$	**24**	$\int\frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx$
25	$\int\frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$	**26**	$\int\frac{\ln^5(x-8)}{x-8}dx$	**27**	$\int\frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx$
28	$\int\frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$	**29**	$\int\frac{\ln^6(x+9)}{x+9}dx$	**30**	$\int\frac{\ln(3x+5)}{3x+5}dx$

№9

1	$\int \sin^4 2x \cos 2x dx$	**2**	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$	**3**	$\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$
4	$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$	**5**	$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$	**6**	$\int \cos^7 2x \sin 2x dx$
7	$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}$	**8**	$\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}$	**9**	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x + 3}}$
10	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x - 4)^3}}$	**11**	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$	**12**	$\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$
13	$\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx$	**14**	$\int \sin^3 4x \cos 4x dx$	**15**	$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$
16	$\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$	**17**	$\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx$	**18**	$\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$
19	$\int \sin^3 5x \cos 5x dx$	**20**	$\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$	**21**	$\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$
22	$\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx$	**23**	$\int \sin^6 3x \cos 3x dx$	**24**	$\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$
25	$\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$	**26**	$\int \sin^4 8x \cos 8x dx$	**27**	$\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$
28	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$	**29**	$\int \sin^5 4x \cos 4x dx$	**30**	$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$

№10

1	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx$	**2**	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}$	**3**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \mathrm{ctg}^4 x}$
4	$\int \frac{\mathrm{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x} dx$	**5**	$\int \frac{\mathrm{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx$	**6**	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx$
7	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx$	**8**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \mathrm{ctg}^3 x}$	**9**	$\int \frac{dx}{\cos^2 3x \cdot \mathrm{tg}^4 3x}$
10	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}$	**11**	$\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx$	**12**	$\int \frac{\mathrm{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx$

13	$\int \frac{\mathrm{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}dx$	**14**	$\int \frac{\mathrm{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}dx$	**15**	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}dx$
16	$\int \frac{dx}{\cos^2 4x\sqrt{\mathrm{tg} 4x}}$	**17**	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \mathrm{ctg}^3 3x}$	**18**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \mathrm{ctg}^3 x}$
19	$\int \frac{\mathrm{tg} 6x}{\cos^2 6x}dx$	**20**	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}dx$	**21**	$\int \frac{\mathrm{ctg}^5 4x}{\sin^2 4x}dx$
22	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}dx$	**23**	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[5]{\mathrm{tg}^2 x}}$	**24**	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg} 7x}}{\cos^2 7x}dx$
25	$\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$	**26**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[5]{\mathrm{ctg}^4 x}}$	**27**	$\int \frac{\mathrm{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}dx$
28	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$	**29**	$\int \frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}dx$	**30**	$\int \frac{\mathrm{tg}^7 3x}{\cos^2 3x}dx$

№11

1	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}^6 3x}}{1+9x^2}dx$	**2**	$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	**3**	$\int \frac{\arccos(2x)}{1+4x^2}dx$
4	$\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$	**5**	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}}$	**6**	$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}^3 x}$
7	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}^2 x}}{1+x^2}dx$	**8**	$\int \frac{\arccos^3 x}{1-9x^2}dx$	**9**	$\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
10	$\int \frac{\mathrm{arcctg}^7 3x}{1+9x^2}dx$	**11**	$\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$	**12**	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}$
13	$\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx$	**14**	$\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	**15**	$\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
16	$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}^7 x}$	**17**	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$	**18**	$\int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2}dx$
19	$\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}^3 x}}{1+x^2}dx$	**20**	$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\mathrm{arctg} x}}$	**21**	$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}^5 x}$

22	$\int \frac{\arccos^7 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	***23***	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$	***24***	$\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{1+25x^2} dx$
25	$\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$	***26***	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}$	***27***	$\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2} dx$
28	$\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$	***29***	$\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+9x^2} dx$	***30***	$\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$

№12

1	$\int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$	***2***	$\int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$	***3***	$\int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$	***4***	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$
5	$\int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$	***6***	$\int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$	***7***	$\int \frac{5+x}{3x^2+1} dx$	***8***	$\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}} dx$
9	$\int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$	***10***	$\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$	***11***	$\int \frac{3x-2}{3x^2+1} dx$	***12***	$\int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx$
13	$\int \frac{x-3}{1-4x^2} dx$	***14***	$\int \frac{3x-1}{4-x^2} dx$	***15***	$\int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$	***16***	$\int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$
17	$\int \frac{5x-2}{x^2+9} dx$	***18***	$\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}} dx$	***19***	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$	***20***	$\int \frac{2x-4}{x^2+16} dx$
21	$\int \frac{3x+4}{5-2x^2} dx$	***22***	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx$	***23***	$\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2} dx}$	***24***	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}} dx$
25	$\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx$	***26***	$\int \frac{3-2x}{x^2-8} dx$	***27***	$\int \frac{x+4}{7x^2+3} dx$	***28***	$\int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$
29	$\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1} dx}$	***30***	$\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}} dx$				

Тема 8. Основы составления математических моделей

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств изучаемого объекта на языке математических символов и соотношений. Такое описание принято называть математическим моделированием или формализацией. Так как в литературе нет единого, строгого определения математической модели, то в качестве рабочего в этом пособии будем принимать следующее определение.

Определение. ***Математической моделью*** *реального объекта (явления) называется его упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).*

Следовательно, для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

Можно выделить несколько основных принципов и требований к математическим моделям:

1) адекватность (соответствие модели своему оригиналу);

2) объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);

3) простота (не засоренность модели второстепенными факторами);

4) чувствительность (способность модели реагировать на изменение начальных параметров);

5) устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);

6) универсальность (широта области применения).

Для построения математической модели конкретной задачи (проблемы) рекомендуется выполнение следующей последовательности работ:

1) определение известных и неизвестных величин, а также существующих условий и предпосылок (что дано и что требуется найти?);

2) выявление важнейших факторов проблемы;

3) выявление управляемых и неуправляемых параметров;

4) математическое описание посредством уравнений, неравенств, функций и иных отношений взаимосвязей между элементами модели (параметрами, переменными), исходя из содержания рассматриваемой задачи.

Известные параметры задачи относительно ее математической модели считаются внешними (заданными априори, то есть до построения модели) и называются экзогенными переменными. Значение же изначально неизвестных переменных вычисляются в результате исследования модели, поэтому по отношению к модели они считаются внутренними, так называемыми эндогенными переменными.

Примеры составления математических моделей

Пример 1. Модель В. Леонтьева «затраты-выпуск».

Пусть некоторый экономический регион производит несколько (n) видов продуктов исключительно своими силами и только для населения данного региона. Предполагается, что технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен. Надо определить годовой объем выпуска продуктов с учетом того, что этот объем должен обеспечить как конечное, так и производственное потребление.

Составим математическую модель этой задачи. По ее условию даны: виды продуктов, спрос на них и технологический процесс; требуется найти объем выпуска каждого вида продукта.

Обозначим известные величины: c_i – спрос населения на i-й продукт $(i=1,...,n)$; a_{ij} – количество i-го продукта, необходимое для выпуска единицы j-го продукта по данной технологии $(i=1,...,n;\ j=1,...,n)$. Обозначим неизвестные величины: x_i – объем выпуска i-го продукта $(i=1,...,n)$. Совокупность $(c=c_1,...,c_n)$ называется вектором спроса, числа a_{ij} – технологическими коэффициентами, а совокупность $x=(x_1,...,x_n)$ – вектором выпуска.

По условию задачи вектор x распределяется на две части: на конечное потребление (вектор c) и на воспроизводство (вектор $x - c$). Вычислим ту часть вектора x, которая идет на воспроизводство. По нашим обозначениям для производства x_j количества j-го товара идет $a_{ij}\cdot x_i$ количество i-го товара. Тогда сумма $(a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n)$

показывает ту величину i-го товара, которая нужна для всего выпуска $x=(x_1,...,x_n)$. Следовательно, должно выполняться равенство:

$$x_i - c_i = a_{i1} \cdot x_1 + \ldots + a_{in} \cdot x_n.$$

Распространяя это рассуждение на все виды продуктов, приходим к искомой модели:

$$\begin{cases} x_1 - c_1 = a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n \\ x_2 - c_2 = a_{21} \cdot x_1 + ... + a_{2n} \cdot x_n \\ .... \\ x_n - c_n = a_{n1} \cdot x_1 + ... + a_{nn} \cdot x_n. \end{cases}$$

Решая данную систему из n линейных уравнений относительно $x=(x_1,...,x_n)$, найдем требуемый вектор выпуска.

Для того чтобы написать эту модель в более компактной (векторной) форме, введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A размерности $n \times n$ называется технологической матрицей. Легко проверить, что наша модель теперь запишется так:

$$x - c = Ax \text{ или } x - Ax = c. \tag{8.1}$$

Мы получили классическую модель «затраты-выпуск», автором которой является известный американский экономист В. Леонтьев. Модель (8.1) является примером описательной модели.

Пример 2. Модель Марковица.

Инвестору требуется определить наилучший набор из акций, облигаций и других ценных бумаг для их приобретения на некоторую сумму с целью получения определенной прибыли с минимальным риском для себя. Прибыль на каждый доллар, вложенный в ценную бумагу j-го вида, характеризуется двумя показателями: ожидаемой прибылью и фактической прибылью. Для инвестора желательно, чтобы ожидаемая прибыль на один доллар вложений была для всего набора ценных бумаг не ниже заданной величины b.

Заметим, что для правильного моделирования этой задачи требуются определенные базовые знания в области портфельной теории ценных бумаг.

Обозначим известные параметры задачи: n – число разновидностей ценных бумаг; a_{ij} – фактическая прибыль (случайное число) от j-го вида ценной бумаги; c_j – ожидаемая прибыль от j-го вида ценной бумаги. Обозначим неизвестные величины: y_j – средства, выделенные для приобретения ценных бумаг вида j. По нашим обозначениям вся инвестированная сумма выражается как $\sum_{i=1}^{n} y_i$. Для упрощения модели введем новые величины:

$$x_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \quad (j = 1, ..., n).$$

Таким образом, x_i – доля от всех средств, выделяемая для приобретения ценных бумаг вида j. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$

Из условия задачи видно, что цель инвестора – это достижение определенного уровня прибыли с минимальным риском. Следовательно, риск – это мера отклонения фактической прибыли от ожидаемой, поэтому его можно отождествить с ковариацией прибыли для ценных бумаг вида i и вида j:

$$\sigma_{ij} = M(a_i - \alpha_i)(a_j - \alpha_j).$$

Здесь M – обозначение математического ожидания.

Математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geq b,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, ..., n).$$

Мы получили известную модель Марковица для оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. Модель (8.2) является примером оптимизационной модели стохастического типа (с элементами случайности).

Пример 3. Матричная игра.

На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума. В магазин должен быть завезен только один из типов данного товара. Требуется выбрать тот тип товара, который целесообразно завести в магазин. Если товар типа j будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j, если же он не будет пользоваться спросом – убыток q_j.

Перед моделированием обсудим некоторые принципиальные моменты. В данной задаче лицом, принимающим решение, (ЛПР) является магазин. Однако исход (получение максимальной прибыли) зависит не только от его решения, но и от того, будет ли завезенный товар пользоваться спросом, то есть будет ли он выкуплен населением (предполагается, что по какой-то причине у магазина нет возможности изучить спрос населения). Поэтому население может рассматриваться как второе ЛПР, выбирающее тип товара согласно своему предпочтению. Наихудшим для магазина «решением» населения является: «завезенный товар не пользуется спросом». Для учета всевозможных ситуаций магазину нужно считать население своим «противником» (условно), преследующим противоположную цель – минимизировать прибыль магазина.

Итак, имеем задачу принятия решения с двумя участниками, преследующими противоположные цели. Уточним, что магазин выбирает один из типов товаров для продажи (всего n вариантов решений), а население – один из типов товаров, который пользуется наибольшим спросом (n вариантов решений).

Для составления математической модели нарисуем таблицу с n строками и n столбцами (всего n^2 клеток) и условимся, что строки соответствуют выбору магазина, а столбики – выбору населения.

Тогда клетка (i, j) соответствует той ситуации, когда магазин выбирает i-й тип товара (i-ю строку), а население выбирает j-й тип товара (j-й столбик). В каждую клетку запишем числовую оценку (прибыль или убыток) соответствующей ситуации с точки зрения магазина. Числа q_j написаны с «минусом» для отражения убытка магазина; в каждой ситуации «выигрыш» населения (условно) равен «выигрышу» магазина, взятому с обратным знаком.

p_1	$-q_1$	...	$-q_1$	...	$-q_1$
$-q_2$	p_2	...	$-q_2$	...	$-q_2$
...	...	...	...	...	...
$-q_i$	$-q_i$	...	p_i	...	$-q_i$
...	...	...	...	...	...
$-q_n$	$-q_n$	...	$-q_n$	...	p_n

выбор магазина

выбор населения

Сокращенный вид этой модели таков:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & -q_1 & \dots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \dots & -q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_n & -q_n & \dots & p_n \end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

Мы получили так называемую матричную игру. Модель (8.3) является примером игровых моделей принятия решения.

<u>Пример 4.</u>

Введем основные понятия. **Транспортная логистика** – наука, занимающаяся организацией перевозок от поставщика к потребителю таким образом, чтобы всевозможные расходы были минимизированы.

Чтобы определить оптимальные способ перевозки и вид транспорта, необходимо учитывать такие факторы, как время доставки, цена транспортировки, способность транспортного средства перевозить тот или иной вид товара, способность вида транспорта перевозить товар в определенные конечные точки. Существуют расчетные таблицы с данными о каждом параметре, однако и они не гарантируют оптимального выбора, так как всегда существуют непредвиденные риски, которые могут быть только минимизированы при помощи данных таблиц.

На расходы влияет множество факторов: скорость доставки груза, вид перевозки, расстояние, на которое необходимо совершить перевозку и количество самого доставляемого груза. Все это в общей сложности называется **тарифом** – установленная плата за доставку груза, назначенная перевозчиком. Тариф является доходом перевозчика и при этом издержками потребителя. При формировании тарифа учитывается множество различных факторов и для каждого способа перевозки и вида транспортного средства они изменяются в зависимости от установленных договоренностей между поставщиком и потребителем. Также в зависимости от вида самого товара может происходить наценка (например, для особо ценных грузов ставка может устанавливаться в процентах от страховой стоимости груза).

Так, после выбора способа доставки, транспортных средств, расчетов всех тарифов возникает самый главный вопрос: как все это доставить самым оптимальным образом, чтобы не оказаться в убытке. Здесь на помощь логисту приходит математическое моделирование, а в частности способ, который мне бы хотелось сегодня рассмотреть – **транспортная задача**.

Транспортная задача – определение наилучшего пути перевозки товара от поставщика к потребителю. Данная задача считается достигнутой, если при минимальных финансовых, временных и трудовых затратах груз в целости и сохранности доставлен в пункт назначения.

Существует несколько видов транспортных задач: минимизация по стоимости – когда задача выполняется при доставке с наименьшими возможными затратами, минимизация по времени – когда на доставку товара в пункт назначения тратится минимально возможное количество единиц времени. Выбор вида транспортной задачи зависит от того, какого результата желают достичь обе стороны перевозки – поставщик и потребитель.

Из двух типов рассмотрим один, а именно транспортную задачу минимизации по стоимости. В ней также присутствует несколько видов: транспортная задача закрытого типа, когда всеми имеющимися у поставщика товарами возможно удовлетворить потребности потребителя, и открытого типа, которых тоже две: когда у поставщика избыток товаров и когда у него их нехватка, то есть сумма имеющихся товаров не равна сумме потребностей. В жизни задачи закрытого типа встречаются очень редко, в подавляющем большинстве случаев логистам приходится сталкиваться с задачами открытого типа. Чтобы такие задачи имели решение, их необходимо привести к закрытому типу.

Существуют различные способы проделать эту манипуляцию, но не будем останавливаться на этом и рассмотрим задачу закрытого типа, которая проще в решении.

Для решения этой задачи существует несколько методов, которые подробно разбирать не станем, просто обозначим их существование:

- метод северо-западного угла;
- метод минимального элемента;
- метод аппроксимации Фогеля.

Все три метода решаются по одному общему плану, но существует различие в сложности их осуществления. Самым сложным и трудоемким считается метод аппроксимации Фогеля, однако в это же время этот метод дает результат, который максимально возможно приближен к самому оптимальному плану транспортировки грузов. Для наглядности разберем одну транспортную задачу, решенную методом аппроксимации.

У компании «ООО КемСельхоз» в распоряжении имеется три склада S_1, S_2, S_3 с содержащейся на них сельхозпродукцией в 100, 90 и 110 ц соответственно. Данная компания обеспечивает четырех потребителей P_1, P_2, P_3, P_4, потребности которых равны 70, 80, 50, 100 ц, соответственно. Тарифы перевозок указаны в таблице 1.

Таблица 1. Тарифы перевозок

Склады	Торговые точки			
	P1	P2	P3	P4
S1	5	10	9	6
S2	4	3	7	2
S3	6	7	5	4

Для решения этой задачи выбранным способом необходимо посчитать в каждом столбце и строке разность между двумя минимальными членами, выбрать максимальный штраф и в полученной строке/столбце выбрать наименьший элемент. А далее мы уже удовлетворяем или пытаемся удовлетворить потребность потребителя в товаре.

Обнулившийся столбец/строку необходимо вычеркнуть и пересчитать штрафы снова. Необходимо производить это действие до тех пор, пока мы не сможем применить «автозаполнение» ячеек.

Произведем вышеперечисленные действия с таблицей.

Склады	Торговые точки				Сумма	Штрафы
	P1	P2	P3	P4		
S1	5	10	9	6	100	1
S2	4	***3/80***	7	2	~~90~~ 10	1

S3	6	7	5	4	110	1
Сумма	70	~~80~~ 0	50	100		
Штрафы	1	***4***	2	2		

Если получилось несколько максимальных штрафов, то можно выбрать любой.

Склады	Торговые точки			Сумма	Штрафы
	P1	P3	P4		
S1	5	9	6	100	1
S2	4	7	2	10	2
S3	6	***5/50***	4	~~110~~ 60	1
Сумма	70	~~50~~ 0	100		
Штрафы	1	***2***	2		

Склады	Торговые точки		Сумма	Штрафы
	P1	P4		
S1	5	6	100	1
S2	4	***2/10***	~~10~~ 0	2
S3	6	4	60	2
Сумма	70	~~100~~ 90		
Штрафы	1	2		

Склады	Торговые точки		Сумма	Штрафы
	P1	P4		
S1	5	6	100	1
S3	6	***4/60***	~~60~~ 0	2
Сумма	70	~~90~~ 30		
Штрафы	1	***(2)***		

В таблице осталась только одна строчка, можем автоматически заполнить ее.

Склады	Торговые точки		Сумма	Штрафы
	P1	P4		
S1	***5/70***	***6/30***	~~100~~ 0	
Сумма	~~70~~ 0	~~30~~ 0		
Штрафы				

После решения таблицы необходимо составить целевую функцию *f(x)* и получить общую сумму всех перевозок. Для этого необходимо взять заполненные ячейки и получить сумму произведения товаров на цену перевозки:

$f(x) = 80\cdot3+50\cdot5+10\cdot2+70\cdot5+30\cdot6 = 1040.$

1040 является ценой всех перевозок. Данная цифра максимально возможно минимизирована и при применении других методов решения затраты на перевозки будут выше.

В заключение можно отметить, что в современном мире при таком уровне развития технологий умение рационально распределять свои ресурсы является одним из важнейших. Без транспортной логистики и обученных специалистов крупные компании терпели бы огромные убытки, да и стали бы они такими крупными без этого? Конечно, в реальном мире специалисты не занимаются решением таких легких задач, как представлено в примере, однако на нем можно легко проследить, что транспортные задачи значительно облегчают жизнь в построении рациональных маршрутов.

Индивидуальное задание №8

Решить транспортную задачу.

Варианты 1-10

На оптовых складах A_1, A_2, A_3, A_4 имеются запасы некоторого продукта в известных количествах, который необходимо доставить в магазины B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Известны также тарифы на перевозку единицы продукта из каждого склада в каждый магазин a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9.

Найти такой вариант прикрепления магазинов к складам, при котором сумма затрат на перевозку была бы минимальной.

Исходные данные задачи выбрать в таблицах в соответствии с вариантом.

Оптовые склады	Магазины					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	10	7	8	a_6
A_2	7	6	7	10	6	a_7
A_3	2	9	5	3	4	a_8
A_4	6	11	4	12	5	a_9
Потребности	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	

№ варианта	Значения параметров								
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	660	470	250	980	640	900	1000	600	500
2	470	250	980	640	660	500	900	640	960
3	250	980	640	660	470	900	610	890	600
4	980	640	660	470	250	1000	840	600	560
5	640	660	470	250	980	1200	600	600	600
6	180	720	950	510	640	700	650	950	700
7	720	950	510	640	180	950	500	700	850
8	950	510	640	180	720	1000	950	700	350
9	510	640	180	720	950	1000	700	350	950
10	640	180	720	950	510	960	720	840	480

Варианты 11-20

На оптовых складах A_1, A_2, A_3, A_4 имеются запасы некоторого продукта в известных количествах, который необходимо доставить в магазины B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Известны также тарифы на перевозку единицы продукта из каждого склада в каждый магазин.

Найти такой вариант прикрепления магазинов к складам, при котором сумма затрат на перевозку была бы минимальной.

Исходные данные задачи выбрать в таблицах в соответствии с вариантом.

Оптовые склады	Магазины					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	10	7	8	a_6
A_2	7	6	7	10	6	a_7
A_3	2	9	5	3	4	a_8
A_4	6	11	4	12	5	a_9
Потребности	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	

№ варианта	Значения параметров								
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
11	660	470	250	980	640	350	1000	950	700
12	470	250	980	640	660	950	700	700	650
13	250	980	640	660	470	700	950	650	700
14	980	640	660	470	250	650	800	600	950
15	640	660	470	250	980	960	650	910	480
16	180	720	950	510	640	840	960	800	400
17	720	950	510	640	180	550	840	650	960
18	950	510	640	180	720	700	560	880	860
19	510	640	180	720	950	880	900	600	620
20	640	180	720	950	510	940	900	560	600

Варианты 21-30

На оптовых складах A_1, A_2, A_3, A_4 имеются запасы некоторого продукта в известных количествах, который необходимо доставить в магазины B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Известны также тарифы на перевозку единицы продукта из каждого склада в каждый магазин.

Найти такой вариант прикрепления магазинов к складам, при котором сумма затрат на перевозку была бы минимальной.

Исходные данные задачи выбрать в таблицах в соответствии с вариантом.

Оптовые склады	Магазины					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	10	7	8	a_6
A_2	7	6	7	10	6	a_7
A_3	2	9	5	3	4	a_8
A_4	6	11	4	12	5	a_9
Потребности	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	

№ варианта	Значения параметров								
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
21	660	470	250	980	640	960	720	840	480
22	470	250	980	640	660	650	700	700	950
23	250	980	640	660	470	700	1200	650	450
24	980	640	660	470	250	950	700	700	650
25	640	660	470	250	980	700	650	950	700
26	180	720	950	510	640	740	760	900	600
27	720	950	510	640	180	880	940	620	560
28	950	510	640	180	720	740	780	880	600
29	510	640	180	720	950	600	840	600	960
30	640	180	720	950	510	1100	960	540	400

Список использованной литературы

1. Иванова, С. А. Математика: учебное пособие: в 4-х ч. Ч. 1 / С. А. Иванова, В. А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – 2-е изд., испр. и допол. – Кемерово, 2010. – 160 с.

2. Высшая математика: линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: конспект лекций по специальности 080507 «Менеджмент организации» / сост.: А. С. Ащеулова, О. С. Карнадуд, А. И. Саблинский. – Кемерово: КемГУКИ, 2011. – 71 с.

3. Павский, В. А. Линейная алгебра: учеб. пособие / В. А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2012. – 184 с.

Карнадуд Олеся Сергеевна

МАТЕМАТИКА.
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.09.2019. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,3
Тираж 100 экз. Заказ 1000.
КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а