Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. КАЗАНЦЕВА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2018

УДК 517.3(075.8)
К 142

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.А. Селезнев*,
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.В. Комиссаров*

Казанцева Е.В.

К 142 Интегральное исчисление. Определенный и несобственный интегралы: учебное пособие / Е.В. Казанцева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 71 с.

ISBN 978-5-7782-3560-1

Учебное пособие состоит из трех разделов: вычисления определенных и несобственных интегралов; геометрических приложений определенных интегралов; физических приложений и приближенных вычислений определенных интегралов. Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, варианты индивидуальных заданий.

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов I курса очного и заочного отделений технических направлений и специальностей. При написании были использованы методические разработки и другие материалы, ранее изданные кафедрой высшей математики НГТУ.

УДК 517.3(075.8)

ISBN 978-5-7782-3560-1

СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha = \text{const}, \quad \alpha \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (в любом интервале, в котором $x \neq 0$) .

3. $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a = \text{const}, \quad a > 0, \quad a \neq 1)$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ (в любом интервале, где $\cos x \neq 0$) .

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (в любом интервале, где $\sin x \neq 0$) .

9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C \qquad \left(-|a| < x < |a|\right)$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C \quad (a = \text{const})$.

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C.$

Обзор методов интегрирования

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int F\left(f(x)\right)f'(x)dx$	Подстановка $f(x) = t$
2	$\int uv'dx = \int udv$	Интегрирование по частям по формуле $\int udv = uv - \int vdu$. Метод интегрирования по частям применяется, например, к интегралам вида $\int P(x)f(x)\,dx$, где $P(x)$ – многочлен (в частности степенная функция x^n), а $f(x)$ – одна из следующих функций: $$e^x,\quad \cos ax,\quad \sin ax,$$ $$\ln x,\quad \operatorname{arctg} x,\quad \arcsin x,$$ а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус или синус
3	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ $p^2 - 4q < 0$	Выделение полного квадрата $$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$ затем подстановка $x+\frac{p}{2} = t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$
4	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Рекуррентная формула $$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
5	$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$, $p^2-4q<0$	Тот же, что в интегралах вида 3, после чего получается интеграл вида 4
6	$\int R(x)\,dx$	Выделение целой части, разложение знаменателя на множители вида $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^n$, затем разложение $R(x)$ на простейшие дроби
7	$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$	Универсальная подстановка $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ или, если $R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, подстановка $\cos x=t$; если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, подстановка $\sin x=t$; если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, подстановка $\mathrm{tg}\,x=t$
8	Интеграл от произведения синусов и косинусов, например $\int \sin 3x\cos 4x dx$	Разложение подынтегральной функции по формулам $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$
9	$\int \sin^m x\cos^n x dx$	Если m – нечетное положительное, подстановка $\cos x=t$; если n – нечетное положительное, подстановка $\sin x=t$
10	$\int \sin^m x\cos^n x dx$ $m+n$ – четное отрицательное	Подстановка $\mathrm{tg}\,x=t$
11	$\int \sin^m x\cos^n x dx$ m и n – четные неотрицательные	Применение формул $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
12	$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$	Подстановка $x = t^n$, n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию
13	$\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	Подстановка $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ входит в подынтегральную функцию
14	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Выделение полного квадрата под радикалом, затем линейная подстановка (вид 3)
15	$\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Обратная подстановка $x = 1/t$, приводящая к интегралам вида 14
16	$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	Сведение к интегралам вида 7 подстановкой $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$), $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$), $x = \dfrac{a}{\cos t}$ $\left(\text{или } x = \dfrac{a}{\sin t}\right)$
17	$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	Выделение полного квадрата под радикалом, затем линейная подстановка (вид 3), приводящая к интегралам вида 16
18	$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$	При p целом положительном – формула бинома Ньютона и непосредственное интегрирование; при p целом отрицательном, $m = \dfrac{q}{s}$, $n = \dfrac{r}{s}$ – подстановка $x = t^s$; при $(m+1)/n$ целом – подстановка $a+bx^n = t$; при $(m+1)/n+p$ целом – подстановка $ax^{-n}+b = t$

РАЗДЕЛ I

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (в смысле Римана)

Рассмотрим задачу об определении площади S криволинейной трапеции $aABb$. Трапеция ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, кривой $y = f(x)$ (рис. 1). Разделим произвольным образом основание трапеции на n частей (рис. 2). Тогда площадь криволинейной трапеции $aABb$ будет равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, $i = 1, ..., n$. Пусть ξ_i – произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, тогда $\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ – площадь прямоугольника со сторонами $f(\xi_i), \Delta x_i$, $S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$ – площадь ступенчатой фигуры (рис. 3). Тогда $S \approx S_n$. Если устремим число разбиений n к бесконечности, причем $\max \Delta x_i \to 0$, то получим

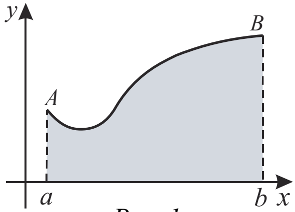

Рис. 1

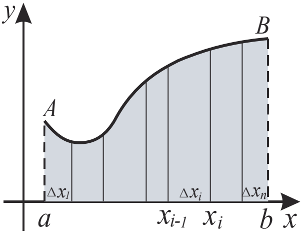

Рис. 2

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

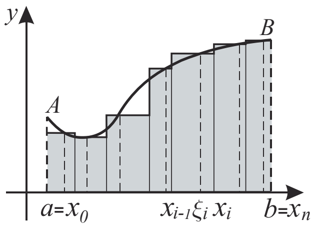

Рис. 3

Определение. Выражение $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I_n$ называют **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на конечном отрезке $[a,b]$. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм I_n, не зависящий ни от способа разбиения отрезка на Δx_i, $i = 1, ..., n$, ни от выбора точек ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, то это число называется **определенным интегралом** (*в собственном смысле*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функции $f(x)$, для которых вышеупомянутый предел существует, называются **интегрируемыми (собственно)** на отрезке $[a, b]$.

Классы интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций:

а) непрерывная на $[a, b]$ функция;

б) ограниченная на $[a, b]$ функция, имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва;

в) ограниченная монотонная на $[a, b]$ функция (которая может иметь в этом промежутке и бесконечное число точек разрыва).

Если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$, то она собственно (т. е. в собственном смысле) не интегрируема на $[a, b]$.

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

если $A = \text{const}$, то $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из слагаемых функций:

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + ... + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

3. При перемене местами нижнего и верхнего предела интегрирования определенный интеграл изменяет знак на обратный (его абсолютная величина при этом не изменяется):

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

отсюда следует, что

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

если все три интеграла существуют.

5. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, $(a < b)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

6. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, $(a < b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

7. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, $(a < b)$.

8. Теорема об оценке определенного интеграла. Если:

а) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $(a < b)$,

б) во всем этом промежутке $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

9. Обобщенная теорема об оценке определенного интеграла. Если:

а) $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $(a < b)$,

б) во всем этом промежутке $m \le f(x) \le M$,

в) $g(x) \ge 0$ на $[a, b]$, то

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f\left(x\right)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

10. Теорема о среднем. Пусть:

а) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $(a < b,\ b < a)$,

б) во всем этом промежутке $m \le f(x) \le M$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\,,$$

где $m \le \mu \le M$ (μ – среднее значение функции $f(x)$ на $[a, b]$).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\mu = f(c)$, где $c \in [a, b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,.$$

11. Обобщенная теорема о среднем. Пусть:

а) $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $(a < b,\ b < a)$,

б) во всем этом промежутке $m \le f(x) \le M$,

в) $g(x)$ на $[a, b]$ не меняет знака: $g(x) \ge 0$ ($g(x) \le 0$), тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx\,,$$

где $m \le \mu \le M$ (μ – среднее значение функции $f(x)$ на $[a, b]$).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\mu = f(c)$, где $c \in [a, b]$, и

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если:

а) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в точке $x \in (a, b)$,

б) $f(t)$ непрерывна хотя бы в как угодно малой окрестности точек $t_1 = \varphi(x)$ и $t_2 = \psi(x)$ и интегрируема в промежутке $[\varphi(x)-\delta,\ \psi(x)+\delta]$ (δ – как угодно малое число), то

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right) = f\left(\psi(x)\right)\psi'(x) - f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$, $x \in [a, b]$, т. е. $\int_a^x f(t)\,dt$ с переменным верхним пределом является одной из первообразных функций $f(x)$, именно той первообразной, которая обращается в нуль при $x = a$, так как

$$\left.\int_a^x f(t)\,dt\right|_{x=a} = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ФОРМУЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ (следует из теоремы об инвариантности формы первого дифференциала функции)

Всякая формула неопределенного интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,dx = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x.

Из этой теоремы следует **метод замены переменной в определенном интеграле** в форме, в которой этот метод еще называется **методом подведения под знак дифференциала.**

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Метод подведения под знак дифференциала

Пусть на отрезке $[a, b]$:

а) $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $g\big(\varphi(x)\big)$ – непрерывные функции,

б) $\varphi(x)$ – монотонная функция.

Тогда, если подынтегральное выражение $f(x)dx$ в интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ удается записать в виде $f(x)dx = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = g(u)du$, где $u = \varphi(x)$ (новая переменная выражается через старую), и первообразная $G(u)$ функции $g(u)$ может быть нами сравнительно просто найдена, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int_a^b g\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) =$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)du = G(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = G\left(\varphi(b)\right) - G\left(\varphi(a)\right).$$

Метод подстановки

Можно производить замену переменной в определенном интеграле, выражая не новую переменную u через старую переменную x (как в предыдущем случае), а наоборот, *выражая старую переменную x через новую переменную u*.

Для этого сформулируем следующее правило.

Если в промежутке $[\alpha, \beta]$ функции $x = \psi(u)$, $\psi'(u)$ и $f\left(\psi(u)\right)$ непрерывны и $a = \psi(\alpha)$, $b = \psi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\psi(u)\right)\psi'(u)du = \int_\alpha^\beta g(u)du = G(u)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha).$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ и $g'(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f\left(x\right)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g\left(x\right)f'(x)dx,$$

здесь $g(x)$ – любая первообразная функции $g'(x)$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если функция $f(x)$ собственно интегрируема либо в промежутках $[a, \beta]$ (при любых $\beta \geq a$), либо в промежутках $[\alpha, b]$ (при любых $\alpha \leq b$), либо как в первых, так и во вторых промежутках, то для каждого из этих случаев по определению несобственных интегралов соответственно имеем:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Если $\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx$ при $\beta \to +\infty$ имеет конечный предел, то говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **существует**, или **сходится.**

Если $\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx$ при $\beta \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **не существует**, или **расходится.**

Аналогичным образом определяются понятия сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

Равенство $(*)$ означает, что если **каждый** из несобственных интегралов, стоящих в правой части его, существует (сходится), то **существует (сходится)** и несобственный интеграл, стоящий в левой части равенства.

В противном случае, т. е. если хотя бы один из интегралов, стоящих в правой части равенства $(*)$, будет расходящимся, то будет расходиться и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ НА ОТРЕЗКЕ [*a*, *b*] ФУНКЦИЙ

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = b$ и собственно интегрируема на отрезках $[a, b-\varepsilon]$ при любых как угодно малых $\varepsilon > 0$, то по определению несобственного интеграла (для данного случая) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = a$ и собственно интегрируема на отрезках $[a+\varepsilon, b]$ при любых как угодно малых $\varepsilon > 0$, то по определению несобственного интеграла (для данного случая) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = c$ $(a < c < b)$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то несобственный интеграл представляется в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Если $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции $f(x)$, имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$, **существует и сходится**, в противном случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **расходится**.

Аналогично решается вопрос о сходимости или расходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции, имеющей бесконечный разрыв на левом конце промежутка интегрирования, т. е. при $x=a$.

Равенство (**) представляет несобственный интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в некоторой внутренней точке $x=c$ отрезка интегрирования $[a, b]$, в виде суммы двух несобственных интегралов от функции, имеющей бесконечный разрыв лишь на одном из концов отрезка интегрирования, определение которых дано выше.

Если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части формулы (**), существуют (сходятся), то **существует (сходится)** и несобственный интеграл, стоящий в левой части этой формулы.

В противном случае, т. е. если хотя бы один из интегралов, стоящих в правой части равенства (**), будет расходящимся, то будет **расходиться** и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, стоящий в левой части этого равенства.

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Если в результате замены переменной интегрирования несобственный интеграл представляется в виде интеграла, существующего в собственном смысле, то тогда и исходный несобственный интеграл существует, т. е. является сходящимся.

2. Применение основной формулы интегрального исчисления (формулы Ньютона–Лейбница). Если первообразная $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ имеет конечный предел при предельном переходе, используемом в определении несобственного интеграла того или иного типа, то соответствующий интеграл сходится. В противном случае несобственный интеграл расходится.

Например:

а) если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} F(x)\Big|_a^{\beta} = \lim_{\beta \to +\infty} \left[F(\beta) - F(a)\right] =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Тем самым показывается, что и для несобственного интеграла этого типа в таком случае оказывается справедливой формула Ньютона–Лейбница;

б) если $F(x)$ – первообразная для неограниченной в окрестности точки $x = b$ функции $f(x)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-0} F(x) = F(b)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ сходится и равен

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +0} \int\limits_a^{b-\beta} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +0} F(x)\Big|_a^{b-\beta} = \lim_{\beta \to +0} \left[F(b-\beta) - F(a)\right] =$$

$$= \lim_{\beta \to +0} F(b-\beta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b}.$$

Тем самым показывается, что и для несобственного интеграла этого типа в таком случае оказывается справедливой формула Ньютона-Лейбница.

Аналогично приведенным выше примерам формула Ньютона–Лейбница может быть применена при вычислении и других типов несобственных интегралов (или при установлении их расходимости) в случае существования (или несуществования) конечных пределов первообразной для подынтегральной функции при соответствующих предельных переходах.

3. Непосредственно применяя формулу Ньютона–Лейбница, легко получить, что:

а) $$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, \quad \lambda > 1 \quad -\text{сходится} \\ \text{расходится при} \quad 0 < \lambda \le 1, \end{cases} \qquad (a > 0),$$

б) $$\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad -\text{сходится} \\ \text{расходится при} \quad \lambda \ge 1, \end{cases} \qquad b > a,$$

в) $$\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad -\text{сходится} \\ \text{расходится при} \quad \lambda \ge 1, \end{cases} \qquad (b > a).$$

4. Признаки сравнения для положительных подынтегральных функций. При формулировке признаков сравнения и следующего за ними предельного признака сравнения под промежутком интегрирования $[a, b]$ $(a < b)$ мы подразумеваем как конечный промежуток, так и бесконечный, т. е. a и b могут быть как конечными числами, так и бесконечностями, с соответствующим знаком. Говоря об особой точке сравниваемых подынтегральных функций, мы также подразумеваем под ней либо конечную точку, в которой сравниваемые функции терпят бесконечный разрыв, либо бесконечно удаленную точку. Кроме того, под предельным переходом $x \to c$ (где $x = c$ – особая точка: либо $c = a$, либо $c = b$) мы подразумеваем тот односторонний предельный переход, который используется в определении исследуемого на сходимость несобственного интеграла, т. е. либо $x \to a+0$ $(x \to -\infty)$, либо $x \to b-0$ $(x \to +\infty)$.

С учетом этого замечания признаки сравнения для положительных подынтегральных функций в общем случае могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема сравнения I. Если в окрестности особой точки имеет место неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то:

а) из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$;

б) из расходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость несобственного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Теорема сравнения II. (*Предельный признак сравнения*).

а) Если существует предел

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \qquad k \ne 0,$$

то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to c$, то $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо интегрируемы, либо не интегрируемы на промежутке $[a, b]$.

Примечание. При рассмотрении предельного перехода $x \to c$, фигурирующего в этом предельном признаке сравнения, смотрите пункт 4 для непредельных признаков сравнения.

5. Признак Коши I (для положительных подынтегральных функций).

Пусть для достаточно больших x функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}$, $(\lambda>0)$. Тогда:

1) если $\lambda>1$ и $0<\varphi(x)\le C<+\infty$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;

2) если $\lambda\le 1$ и $\varphi(x)\ge C>0$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Более удобная для практики частная форма сформулированных признаков Коши, такова: если при $x\to+\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\lambda>0$ по сравнению с $\dfrac{1}{x}$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda>1$, и расходится, если $\lambda\le 1$.

6. Признак Коши II. Пусть для достаточно близких к b (либо к a) значений x функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}}\ \ (\lambda>0)\ \left(\text{либо } f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{\lambda}}\ \ (\lambda>0)\right).$$

Тогда:

1) если $\lambda<1$ и $0<g(x)\le C<+\infty$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ сходится;

2) если $\lambda\ge 1$ и $g(x)\ge C>0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ расходится.

Более удобная для практики частная форма сформулированных признаков Коши, такова: если при $x \to b-0$ (при $x \to a+0$) функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\lambda > 0$ по сравнению с $\frac{1}{b-x}$ $\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{x-a}\right)$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda \geq 1$.

7. **Абсолютная сходимость несобственных интегралов.** Если сходится в промежутке интегрирования $[a, b]$ (конечном или бесконечном) несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ от $|f(x)|$, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от самой функции $f(x)$, при этом несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется **абсолютно сходящимся**, а сама функция $f(x)$ – **абсолютно интегрируемой** в $[a, b]$.

Так как $|f(x)| \geq 0$, то при установлении абсолютной сходимости несобственных интегралов можно пользоваться признаками сравнения, предельным признаком сравнения и признаками Коши, сформулированными для положительных подынтегральных функций.

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$ (конечном или бесконечном), а функция $g(x)$ ограничена в этом промежутке, то и произведение $f(x)g(x)$ будет функцией абсолютно интегрируемой в промежутке $[a, b]$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx$.

Решение (интегрирование подведением под знак дифференциала). Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух функций $g(x)\varphi'(x)$, где $\varphi'(x)$ имеет очевидную первообразную $\varphi(x)$, и $g(x)$ есть функция этой первообразной: $g(x)=g\left(\varphi(x)\right)=g(u)$, $u=\varphi(x)$, т. е.

$$\varphi'(x)=2x, \qquad \varphi(x)=x^2, \qquad g\left(\varphi(x)\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}=g(u),$$

но

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int\limits_a^b g\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)=$$

$$=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)du=G(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=G\left(\varphi(b)\right)-G\left(\varphi(a)\right),$$

тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{1}{1+(x^2)^2}dx^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u\,\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8},$$

где $\varphi(x)=x^2=u$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$.

Ответ: $\int\limits_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{8}$.

Задача 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 x\ln^2 x dx$.

Р е ш е н и е . Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u(x)v(x)dx = u(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)u'(x)dx.$$

В данном случае $u(x)=\ln^2 x$, $v(x)=x$, $V(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

$$\int\limits_1^2 x\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2} 2\ln x \frac{1}{x} dx = 2\ln^2 2 - \int\limits_1^2 x\ln x dx .$$

Повторно применим формулу интегрирования по частям. Теперь $u(x)=\ln x$, $v(x)=x$, $V(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$,

$$\int\limits_1^2 x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\int\limits_1^2 x\ln^2 x dx = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

Задача 3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1}{5+4\sin x+3\cos x}dx$.

Р е ш е н и е (интегрирование выражений $R(\sin x,\ \cos x)$).

Функция $\mathrm{tg}(x/2)$ определена на $[0,\pi/2]$, сделаем универсальную тригонометрическую подстановку $t=\mathrm{tg}(x/2)$. Подставляя в подынтегральное выражение

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

получаем $\dfrac{1}{5+4\sin x+3\cos x}dx=\dfrac{1}{5+\dfrac{8t}{1+t^2}+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\dfrac{2dt}{1+t^2}=\dfrac{dt}{(t+2)^2}$.

Находим новые пределы интегрирования $t(0)=0$, $t(\pi/2)=1$. Применим формулу замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{5+4\sin x+3\cos x}dx=\int_0^1\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}\bigg|_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{5+4\sin x+3\cos x}dx=\frac{1}{6}$.

Задача 4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2\frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2}.$$

Решение $\left(\text{интегрирование выражений } R\left(x,\ \sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[q]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots\right)\right)$

Чтобы сделать подстановку, приводящую к интегралу от рациональной функции, нужно преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она содержала корни любой степени, но из одного и того же выражения вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Преобразуем подынтегральное выражение, выделяя $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$, затем применим подстановку:

$$t^2=\frac{2-x}{2+x},\ x=\frac{4}{t^2+1}-2,\ dx=-\frac{8tdt}{(t^2+1)^2},\ t(0)=1,\ t(2)=0,$$

$$\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2} = \int_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-1}{\left(1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)(x+2)^2}dx =$$

$$= \int_1^0 \frac{4t-1}{4t+1}\ \frac{(t^2+1)^2}{16}\ \frac{(-8t)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t^2-t}{4t+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \frac{1}{4t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{4}\bigg|_0^1 - \frac{t}{4}\bigg|_0^1 + \frac{1}{16}\ln|4t+1|\bigg|_0^1 = \frac{\ln 5}{16}.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2} = \frac{\ln 5}{16}.$

Задача 5. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_0^{3/2}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

Р е ш е н и е. Интегрирование выражений $R\left(x,\ (a^2 \pm x^2)^{1/2}\right)$ и $R\left(x,\ (x^2 \pm a^2)^{1/2}\right)$. Применим подстановку $x = 3\sin t$. Тогда $dx = 3\cos t dt$, $t(0) = \arcsin 0 = 0$, $t(3/2) = \arcsin 1/2 = \pi/6$, $\sqrt{9-x^2} = |3\cos t| = 3\cos t$, поскольку $\cos t > 0$ при $t \in [0, \pi/6]$.

Сделаем замену переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^{3/2}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6}\frac{9\sin^2 t}{3\cos t}3\cos t dt = 9\int_0^{\pi/6}\sin^2 t dt = 9\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{9}{2}t\bigg|_0^{\pi/6} - \frac{9}{2}\int_0^{\pi/6}\cos 2t dt = \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{4}\sin 2t\bigg|_0^{\pi/6} = \frac{3}{4}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{3/2}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{3}{4}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

Задача 6. Оценить интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

Р е ш е н и е. Имеем: $1 \le 1 + x^4 \le 2$ при $0 \le x^4 \le 1$, тогда $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1$, т. е. согласно теореме об оценке определенного интеграла $m = 1/\sqrt{2}$, $M = 1$, $b - a = 1$. Следовательно, $1/\sqrt{2} \le I \le 1$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \le 1$.

Задача 7. Оценить интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся обобщенной теоремой об оценке определенного интеграла. Пусть $f(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$, $g(x) = e^x$. Производная $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2(2-x)^2}$ обращается в нуль при $x = 1/2$ и меняет знак в этой точке с минуса на плюс. Следовательно, функция $f(x)$ имеет в этой точке минимум $f(1/2) = 4/9$. Максимума функция $f(x)$ достигает на концах отрезка $[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 1/2$. Таким образом, $\forall x \in [0, 1]$ выполняется система неравенств: $4/9 \le f(x) \le 1/2$, а при $x \ne 0, \ \ne 1/2, \ \ne 1$ строгие неравенства: $4/9 < f(x) < 1/2$. Поэтому, применяя обобщенную теорему об оценке определенного интеграла, получаем:

$$\frac{4}{9}\int\limits_0^1 e^x dx < I < \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x dx, \text{ или окончательно } \frac{4}{9}(e-1) < I < \frac{1}{2}(e-1).$$

Ответ: $\frac{4}{9}(e-1) < I < \frac{1}{2}(e-1)$.

Задача 8. Найти $F'(x)$, если $\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^3)\,dt$.

Решение. Функции $\varphi(x)=\cos x$ и $\psi(x)=\sin x$ определены, непрерывны и, следовательно, дифференцируемы $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. Причем $\varphi'(x)=-\sin x$ и $\psi'(x)=\cos x$. Тогда согласно теореме о дифференцировании определенного интеграла имеем

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos\pi t^3 dt\right)=$$

$$=f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)-f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)=\cos(\pi\cos^3 x)(\cos x)'-$$

$$-\cos(\pi\sin^3 x)(\sin x)'=-\sin x\cos(\pi\cos^3 x)-\cos x\cos(\pi\sin^3 x)$$

Ответ: $F'(x)=-\sin x\cos(\pi\cos^3 x)-\cos x\cos(\pi\sin^3 x)$.

Задача 9. Найти критические точки функции $F(x)=\int\limits_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\cdot dt$.

Решение. Найдем $F'(x)$. Воспользуемся теоремой о дифференцировании определенного интеграла. Функции $\varphi(x)=0$ и $\psi(x)=x^2$ дифференцируемы $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ и $\varphi'(x)=0$, $\psi'(x)=2x$. Тогда

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\cdot dt\right)=f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)-f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)=2x\sqrt{1+x^4}\,.$$

Находим критические точки функции $F(x)$, т. е. точки, в которых $F'(x)=0$ или не существует. $2x\sqrt{1+x^4}=0$, следовательно, $x=0$. Тогда $F(0)=0$ и точка $(0,0)$ является критической, а так как $F'(x)$

меняет в этой точке свой знак с минуса на плюс, то функция $F(x)$ имеет в этой точке минимум.

Ответ: $(0,0)$ – точка минимума функции $F(x)=\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\cdot dt$.

Задача 10. Вычислить или установить расходимость несобственных интегралов:

1) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$, 2) $\int\limits_0^{+\infty}\cos 2x dx$, 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. 1) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_2^{a}\frac{dx}{x^2-1}=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_2^a=$

так как $\frac{x-1}{x+1}>0$ при $x\geq 2$, то $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{x-1}{x+1}$ и, продолжая равенство, получаем

$$=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\Bigg|_2^a=\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\frac{a-1}{a+1}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln 3}{2}.$$

2) $\int\limits_0^{+\infty}\cos 2x dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_0^{a}\cos 2x dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\sin 2a}{2}$, и, так как предел не существует, интеграл расходится.

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x^2+4x+9}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+4x+9}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_a^0\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^b\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{a+2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b+2}{\sqrt{5}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: 1) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\ln\frac{3}{2}$;   2) $\int\limits_0^{+\infty}\cos 2x dx$ расходится;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Задача 11. Вычислить или установить расходимость несобственных интегралов:

1) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 2) $\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{x}$.

Р е ш е н и е. 1) Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0\le x<1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$. Тогда, по определению несобственного интеграла, имеем

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}.$$

2) Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна при $-1 \le x < 0$ и $0 < x \le 2$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$. Тогда, по определению несобственного интеграла, имеем

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x| \Big|_{\varepsilon}^{2} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 2 - \ln\varepsilon),$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln\varepsilon$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\ln 2 - \ln\varepsilon \right)$ не существуют, так как логарифм неограниченно растет по абсолютной величине при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, интеграл расходится.

Ответ: 1) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$; 2) интеграл расходится.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctg}\, x)^4}{1+x^2}dx$
2. $\int\limits_{1/8}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx$	2. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x}{2+\sqrt{2x+1}}dx$
3. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$	3. $\int\limits_0^{5/2} \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$
4. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$	4. $\int\limits_0^{2\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$
5. $\int\limits_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\mathrm{tg}\, x+5}{(5-\mathrm{tg}\, x)\sin 2x}dx$	5. $\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{\mathrm{tg}^2 x dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}$
6. $\int\limits_0^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2x dx$	6. $\int\limits_0^{\pi/2} (1-5x^2)\sin x dx$
Найти $F'(x)$, если 7. $F(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt\,,\quad (x>0)$	Найти 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x (1-\cos t)dt}{x^3}$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{8+x^3}\,dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ 10. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-x-2}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+7}$ 10. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ 2. $\int\limits_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\cdot dx$ 3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$ 4. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$ 5. $\int\limits_{0}^{2} \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(2x+2)^2}$ 6. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6+\operatorname{tg} x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4}dx$ 2. $\int\limits_{6}^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$ 3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(16+x^2)^{3/2}}dx$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$ 5. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12+\operatorname{tg} x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}dx$ 6. $\int\limits_{1}^{2} x\ln^2 x dx$
Найти критические точки функции 7. $F(x)=\int\limits_{0}^{x} \frac{5t-2}{3\sqrt[3]{t+1}}dt$	Найти точки экстремума функции 7. $F(x)=\int\limits_{0}^{x} (-4t^3+4t)dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_{0}^{1} x(1-x)^2\sin x dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$ 10. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ 10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int\limits_1^4 \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx$	1. $\int\limits_0^{1/7} \frac{8x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$
2. $\int\limits_1^2 \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$	2. $\int\limits_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}dx$
3. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\cdot dx$	3. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$
4. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1-\cos x+\sin x}dx$	4. $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$
5. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}3} \frac{4+\mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}dx$	5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}dx$
6. $\int\limits_0^1 x^2e^{3x}dx$	6. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$
Найти $F''(x)$, если 7. $F(x)=\int\limits_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt$	Найти $F'(x)$, если 7. $F(x)=\int\limits_x^{2x} \sqrt{(1+t^2)}\,dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2+2x^4}$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{8+x^3}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ 10. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x(x-4)^2}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ 10. $\int\limits_0^2 \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$ 2. $\int\limits_{5/2}^{10/3} \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)(x-2)^2}$ 3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{5+4\cos x} dx$ 4. $\int\limits_{\pi/4}^{\arccos\sqrt{1/3}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}$ 5. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx$ 6. $\int\limits_0^{\pi} (9x^2+9x+11)\cos 3x dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$ 2. $\int\limits_2^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} \cdot dx$ 3. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ 4. $\int\limits_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1}{\sin x(1-\sin x)} dx$ 5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg}^2 x - 11\operatorname{tg} x - 22}{4-\operatorname{tg} x} dx$ 6. $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+2)e^{x/2} dx$
Найти: 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin t dt}{x^3}$	Найти критические точки функции 7. $F(x) = \int\limits_0^{x} (t-1)(t-2)^2 dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{1+x^2}$ 10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{16+x^2}$ 10. $\int\limits_0^1 x\ln^2 x dx$

ВАРИАНТ 9	**ВАРИАНТ 10**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$	1. $\int\limits_0^1 \frac{1+x^2}{(1+3x+x^2)^2}dx$
2. $\int\limits_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\cdot dx$	2. $\int\limits_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}dx$
3. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$	3. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{1}{\sqrt{(5-x^2)^3}}dx$
4. $\int\limits_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{1}{\cos x(1-\cos x)}dx$	4. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2}dx$
5. $\int\limits_0^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{(2+\operatorname{tg} x)dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}$	5. $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8+\operatorname{tg} x)dx}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x}$
6. $\int\limits_1^8 \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	6. $\int\limits_0^{2\pi} (x^2-5x+6)\sin 3x dx$
Найти точки экстремума функции 7. $F(x) = \int\limits_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,dt$	Найти $F''(x)$, если 7. $F(x) = \int\limits_x^{x^3} \operatorname{arctg}(t^2+1)\,dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 10. $\int\limits_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^6+1}$ 10. $\int\limits_0^1 x\ln 2x dx$

ВАРИАНТ 11	**ВАРИАНТ 12**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$ 2. $\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$ 3. $\int\limits_0^3 \frac{1}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx$ 4. $\int\limits_{2\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1-\cos x)^3}dx$ 5. $\int\limits_0^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{(3+2\,\mathrm{tg}\,x)\,dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}$ 6. $\int\limits_{-3}^0 (x^2+6x+9)e^{2x}dx$	Задания 1– 6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2}$ 3. $\int\limits_0^5 \frac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}dx$ 4. $\int\limits_{\pi/2}^{2\mathrm{arctg}2} \frac{1}{\sin^2 x(1+\cos x)}dx$ 5. $\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{1}{\sin 2x(3\,\mathrm{tg}\,x+5)}dx$ 6. $\int\limits_0^2 (x+1)^2\ln^2(x+1)\,dx$
Найти $F'(x)$, если 7. $F(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	Найти 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_1^x \mathrm{arctg}\,t\,dt}{x^3}$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x}dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{x}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 10. $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{x}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ 10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$

ВАРИАНТ 13	**ВАРИАНТ 14**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$ 2. $\int\limits_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2}$ 3. $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ 4. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\cos x} dx$ 5. $\int\limits_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\,\mathrm{tg}^2 x - 1}{\mathrm{tg}^2 x + 5} dx$ 6. $\int\limits_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17)\cos 4x dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x}\right)(x+1)^2}$ 3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ 4. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{(1-\cos x)\sin^2 x}$ 5. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{4+3\cos 2x} dx$ 6. $\int\limits_0^2 (x^2-4)e^{2x} dx$
Найти точки экстремума функции 7. $F(x) = \int\limits_0^x \frac{t^2 - 5t + 4}{2+e^t} dt$	Найти $F''(x)$, если 7. $F(x) = \int\limits_0^x (\arcsin t)^2 dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_2^e \frac{dx}{\ln x}$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$ 10. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x^2-4)^{5/4}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 10. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$

ВАРИАНТ 15	**ВАРИАНТ 16**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ 2. $\int_1^{64} \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$ 3. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\cdot dx$ 4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x}dx$ 5. $\int_0^{\pi/4} \frac{4-7\,\mathrm{tg}\,x}{2+3\,\mathrm{tg}\,x}dx$ 6. $\int_0^{1/2} (4x^2-1)e^{2x}dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ 2. $\int_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(2x+1)^2}$ 3. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ 4. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\cos x+\sin x)^2}dx$ 5. $\int_{\pi/4}^{\arccos\left(1/\sqrt{26}\right)} \frac{36}{(6-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}dx$ 6. $\int_0^2 \ln(x+1)\,dx$
Найти $F'(x)$, если 7. $\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$	Вычислить 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt}{3x^2}$
Оценить интеграл 8. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$	Оценить интеграл 8. $\int_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\cdot dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx$ 10. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+x+2}$ 10. $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

ВАРИАНТ 17	**ВАРИАНТ 18**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} 2x - 3x}{1+4x^2}dx$ 2. $\int\limits_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\cdot dx$ 3. $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^3}}dx$ 4. $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{\sin x(1+\sin x)}dx$ 5. $\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{0} \frac{11-3\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{tg} x}dx$ 6. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2-4)\cos 3x dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x(\ln\sin x)\,dx$ 2. $\int\limits_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx$ 3. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ 4. $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x}{(1+\cos x+\sin x)^2}dx$ 5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{5\operatorname{tg} x+2}{2\sin 2x+5}dx$ 6. $\int\limits_0^{1/5} (25x^2-1)e^{5x}dx$
Найти $F'(x)$, если 7. $F(x)=\int\limits_1^{3x^2} \frac{\sin t}{t}dt$	Найти критические точки функции 7. $F(x)=\int\limits_0^x \frac{2t}{3\sqrt[3]{t-1}}dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^1 x\sqrt{4+x^3}\,dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}dx$ 10. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$ 10. $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

ВАРИАНТ 19	ВАРИАНТ 20
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$ 2. $\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\cdot dx$ 3. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\cdot dx$ 4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x+\sin x)^2}dx$ 5. $\int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}dx$ 6. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$ 2. $\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}$ 3. $\int_0^{2/\sqrt{2}} \frac{x^4}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}dx$ 4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\cos x+\sin x)^2}dx$ 5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}dx$ 6. $\int_0^{\pi/4} (x^2-3x)\sin 2x dx$
Вычислить 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\operatorname{tg}t-t)\,dt}{\sin x-x^2}$	Найти критические точки функции 7. $F(x)=\int_1^x e^{-t}t^2dt$
Оценить интеграл: 8. $\int_0^{\pi/4} x\sqrt{\operatorname{tg}x}\cdot dx$	Оценить интеграл: 8. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos 2x}$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int_0^{+\infty} x\cos x dx$ 10. $\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \frac{\cos(1/x^2)}{x^3}dx$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ 10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3(1-x)}}$

ВАРИАНТ 21	**ВАРИАНТ 22**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$	1. $\int_1^{e} \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$
2. $\int_0^{7} \frac{5\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}dx$	2. $\int_2^{3} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}\cdot dx$
3. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(64-x^2)^3}}dx$	3. $\int_0^{5\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$	4. $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{(1+\cos x-\sin x)^2}dx$
5. $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x dx$	5. $\int_0^{\pi/4} \frac{(\mathrm{tg}\, x+2)dx}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}$
6. $\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)e^{3x}dx$	6. $\int_2^{3} x\ln(x-1)\,dx$
Найти точки экстремума функции 7. $F(x)=\int_1^{x}\frac{\cos t}{t}dt$, $x>0$	Найти $F'(x)$, если 7. $F(x)=\int_{1/x}^{x^2}\frac{t-1}{\sqrt[3]{t+1}}dt$
Оценить интеграл 8. $\int_1^{4}\frac{1-\sqrt{x}}{1+x^2}dx$	Оценить интеграл 8. $\int_0^{\pi/2}\frac{xdx}{2-\cos^2 x}$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов
9. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$	9. $\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+2)\,dx}{x^4+12}$
10. $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$	10. $\int_4^{5}\frac{xdx}{\sqrt{x-4}}$

ВАРИАНТ 23	**ВАРИАНТ 24**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)\,dx}{\cos^2(x+1)}$ 2. $\int\limits_{1}^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ 3. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x^4}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{5+3\sin x}\,dx$ 5. $\int\limits_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12dx}{(6+5\operatorname{tg}x)\sin 2x}$ 6. $\int\limits_{1}^{e} \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл 1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg}x(\ln\cos x)\,dx$ 2. $\int\limits_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ 3. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\,dx$ 5. $\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \frac{8\operatorname{tg}x\,dx}{8\sin^2 x+3\cos^2 x-7}$ 6. $\int\limits_{\pi}^{0} (x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$
Найти, не вычисляя интеграла 7. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}\int\limits_{1}^{x} t^2\,dt$	Найти точки перегиба функции 7. $F(x)=\int\limits_{-5}^{x}\left(\frac{t+2}{t-5}\right)^2 dt$, $(-5<x<5)$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{5-x}{9-x^2}\,dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ 10. $\int\limits_{1}^{2} x\ln(x-1)\,dx$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-2}$ 10. $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{x\ln^{1/3} x}$

ВАРИАНТ 25	ВАРИАНТ 26
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int\limits_{\pi^2/16}^{\pi^2/4} \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	1. $\int\limits_{-1}^{\pi/4+1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)\,dx}{\cos^2(x-1)}$
2. $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}dx$	2. $\int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{4x+5}}dx$
3. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$	3. $\int\limits_0^2 \frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}dx$
4. $\int\limits_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$	4. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2-\cos x}dx$
5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$	5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}$
6. $\int\limits_0^{\pi} (x^2+5x+6)\cos 2x dx$	6. $\int\limits_0^3 x\ln(x+3)\,dx$
Найти 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x}$	Найти критические точки функции 7. $F(x)=\int\limits_{-10}^{x} \sqrt[3]{t^3-3t}\cdot dt$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_0^1 \sqrt{4+x^2}\cdot dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_8^{18} \frac{x+1}{x+2}dx$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов
9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$	9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
10. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	10. $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$

ВАРИАНТ 27	**ВАРИАНТ 28**
Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл	Задания 1–6. Вычислить определенный интеграл
1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos^2 x} dx$	1. $\int\limits_{-1}^{\pi/4-1} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(x+1)}\, dx}{\cos^2(x+1)}$
2. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$	2. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx$
3. $\int\limits_{0}^{5} x^2 \sqrt{25 - x^2}\, dx$	3. $\int\limits_{0}^{6} \frac{1}{(36+x^2)\sqrt{36+x^2}} dx$
4. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 - 2\sin x} dx$	4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{3 + \sin^2 x}$
5. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(2\cos x + \sin x)^2} dx$	5. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$
6. $\int\limits_{0}^{\pi/6} (x^2 + 2x + 1)\sin 3x dx$	6. $\int\limits_{-2}^{0} (x^2 + 5x + 6) e^{2x} dx$
Найти 7. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\int\limits_{0}^{x} \operatorname{arctg}(t - \pi)\, dt}{x^2 - \pi^2}$	Найти y'_x, если 7. $x = \int\limits_{0}^{t} \frac{\ln z}{z} dz, \quad y = \int\limits_{0}^{\ln t} e^z dz$
Оценить интеграл 8. $\int\limits_{0}^{1} x^4 \sqrt{1 + x^2} \cdot dx$	Оценить интеграл 8. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$
Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}}$ 10. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \sqrt[5]{\ln^3 x}}$	Задания 9, 10. Вычислить или доказать расходимость несобственных интегралов 9. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$ 10. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x - 1}}$

РАЗДЕЛ II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Площадь в прямоугольных координатах. Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a\leq x\leq b$ (рис. 4), определяется формулой

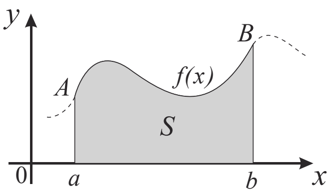

Рис. 4

$$S=\int_a^b f(1)\,dx. \tag{1}$$

В более общем случае, если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $f_1(x)\leq f_2(x)$, двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $a\leq x\leq b$ (рис. 5):

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{2}$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнением в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими $x=a$ и $x=b$, и отрезком оси *OX*, выражается интегралом

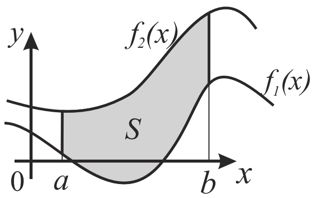

Рис. 5

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{3}$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a=\varphi(t_1)$ и $b=\varphi(t_2)$ $\left(\psi(t)\geq 0\right.$ на отрезке $\left.[t_1, t_2]\right)$.

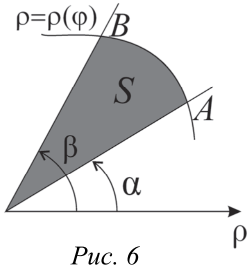

Рис. 6

Площадь в полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, то площадь сектора *AOB* (рис. 6), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами *OA* и *OB*, соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

Площадь фигуры *ABCD* (рис. 7), ограниченной кривыми $\rho_1=\rho_1(\varphi)$, $\rho_2=\rho_2(\varphi)$, двумя полярными радиусами *OA* и *OB*, соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2{}^2(\varphi)-\rho_1{}^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

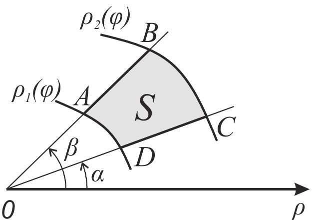

Рис. 7

2. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина l дуги кривой $y=f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$, равна

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}\cdot dx. \tag{5}$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то длина дуги l кривой равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot dt, \tag{6}$$

где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах. Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги l равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} \cdot d\varphi, \tag{7}$$

где α и β – значения полярного угла в крайних точках дуги.

3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

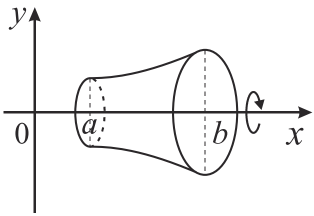

Рис. 8

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox (рис. 8), то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{8}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Oy (рис. 9), то объем тела вращения вычисляется по формуле

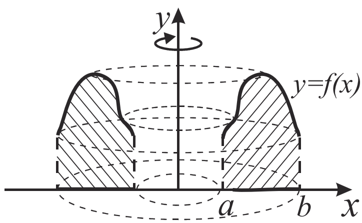

Рис. 9

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx = 2\pi \int_a^b xy dx. \tag{9}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры (рис. 10),

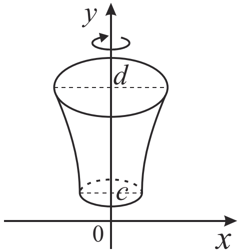

Рис. 10

ограниченной кривой $x = g(y)$, прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, можно определить по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy = \pi \int_c^d x^2 dy. \qquad (10)$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(0 \le f_1(x) \le f_2(x)\right)$, прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси *Ox*, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx. \qquad (11)$$

Замечание. Если кривая задана в иной форме (параметрической, в полярных координатах и т. д.), то в приведенных формулах нужно сделать соответствующую замену переменной интегрирования.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти площадь эллипса (рис. 11): $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

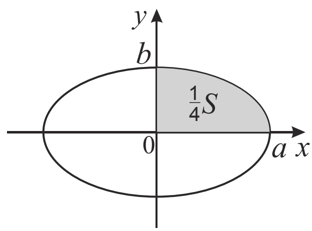

Рис. 11

Решение. Ввиду симметрии достаточно вычислить площадь одной четверти, а затем учетверить результат. Полагая в уравнении $x = a\cos t$ сначала $x = 0$, затем $x = a$, получим пределы интегрирования $t_1 = \pi/2$ и $t_2 = 0$. Используя формулу (3), получим

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t a(-\sin t)\,dt = ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Ответ: $S = \pi ab$.

Задача 2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Решение. Ввиду симметрии (рис. 12) достаточно вычислить площадь одной четверти, а затем учетверить результат. Четвертой части искомой площади соответствует изменение угла φ от 0 до $\pi/4$, используя формулу (4), получаем

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

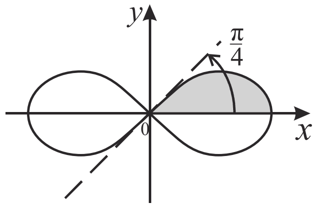

Рис. 12

Ответ: $S = 2$.

Задача 3. Найти длину дуги всей кривой $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (рис. 13). Вся кривая описывается точкой при изменении φ от 0 до 3π.

Решение. Так как кривая задана в полярных координатах, будем использовать формулу (7). Имеем $\rho' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, поэтому длина дуги кривой

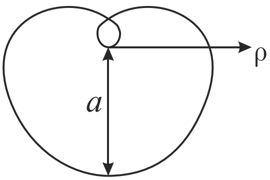

Рис. 13

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

Ответ: $l = \frac{3\pi a}{2}$.

Задача 4. Найти длину одной арки циклоиды (рис. 14) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

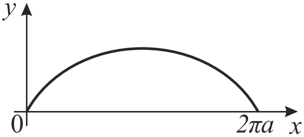

Рис. 14

Р е ш е н и е. Так как кривая задана уравнениями в параметрической форме, будем использовать формулу (6). Пределы интегрирования $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$ соответствуют крайним точкам арки циклоиды $(y = 0)$.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \qquad \frac{dy}{dt} = a\sin t,$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \cdot dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a.$$

Ответ: $l = 8a$.

Задача 5. Найти объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси Ox, $0 \le x \le \pi$, вокруг: а) оси Ox и б) оси Oy.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами (8) и (9) соответственно:

а) $V_x = \pi\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$

б) $V_y = 2\pi\int\limits_0^{\pi} xf(x)dx = \pi\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi^2.$

Ответ: а) $V_x = \frac{\pi}{2}$; б) $V_y = 2\pi^2$.

РАЗДЕЛ III

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Путь, пройденный точкой. Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина скорости ее $V = f(t)$ есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Пример 1. Скорость точки равна $V = 0.3(1+t)^2$ м/с. Найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени $T = 9$ с от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Р е ш е н и е . Имеем

$$s = \int_0^9 0.3(1+t)^2 dt = 0.3\left.\frac{(1+t)^3}{3}\right|_0^9 = 10^3 - 1 = 99 \text{ м},$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = 11 \text{ м/с}.$$

Работа силы. Если переменная сила $F = f(x)$ действует в направлении оси Ox, то *работа силы* на отрезке $[x_1, x_2]$ равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Давление жидкости. Для вычисления силы *давления жидкости* используют закон Паскаля, согласно которому сила давления жидкости на площадку S с глубиной погружения h равна

$$P = \gamma\ h\ S,$$

где γ – удельный вес жидкости.

Пример 2. Найти силу давления, испытываемого полукругом радиуса r, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды (рис. 15).

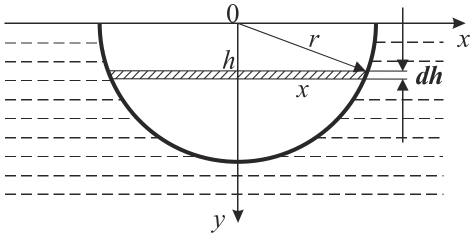

Рис. 15

Р е ш е н и е . Разбиваем площадь полукруга на элементы – полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента (отбрасывая б.м. высшего порядка), находящегося на расстоянии h от поверхности, $ds = 2xdh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\,dh.$

Сила давления, испытываемая этим элементом, равна

$$dP = \gamma h ds = 2\gamma h\sqrt{r^2 - h^2} \cdot dh,$$

где γ – удельный вес жидкости, равный единице.

Отсюда вся сила давления есть

$$P = 2\gamma\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2} \cdot dh = -\gamma\frac{2}{3}\sqrt{(r^2 - h^2)^3}\Big|_0^r = \gamma\frac{2}{3}r^3 .$$

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу m и обладающей скоростью v, описывается выражением

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы n материальных точек с массами $m_1,\ m_2,\ldots,\ m_n$, обладающих соответственно скоростями $v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n$, равна

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i {v_i}^2}{2}. \tag{12}$$

Для подсчета кинетической энергии тела его надлежащим образом разбивают на элементарные частицы (играющие роль материальных точек), а затем, суммируя кинетические энергии этих частиц, в пределе вместо суммы (12) получают интеграл.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная и дифференцируемая достаточное число раз функция $y=f(x)$. Требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей, выбираем шаг вычислений $h=(b-a)/n$. Пусть $x_i=x_0+ih$ – абсциссы точек деления $(x_0=a,\ x_n=b,\ i=0,1,\ldots,n)$; $y_i=f(x_i)$ – соответствующие значения подынтегральной функции $y=f(x)$.

Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx\approx h(y_1+y_2+\ldots+y_n)+R_n, \tag{13}$$

предельная абсолютная погрешность

$$R_n\le\frac{h}{2}(b-a)M_1,\ \text{где}\ M_1=\max_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n, \tag{14}$$

предельная абсолютная погрешность

$$R_n \le \frac{h^2}{12}(b-a)M_2 \text{, где } M_2 = \max_{[a,\,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Пример. По формуле трапеции, приняв $n = 10$, вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

Решение. Составим таблицу значений функции, необходимых для приближенного вычисления данного определенного интеграла.

i	x_i	$\sin x_i$	$y_i = f(x_i) = \frac{\sin x_i}{x_i}$	
0	0	0	1	
1	0.1	0.09985		0.99850
2	0.2	0.19867		0.099335
3	0.3	0.29552		0.98507
4	0.4	0.38942		0.97355
5	0.5	0.47943		0.95886
6	0.6	0.56464		0.94107
7	0.7	0.64422		0.92031
8	0.8	0.71736		0.89670
9	0.9	0.78333		0.87037
10	1	0.84147	0.84147	
$\sum$			1.84147	8.53778

Поскольку $h = 0.1$, $y_0 + y_{10} = 1.84147$, $y_1 + y_2 + ... + y_9 = 8.53778$, по формуле (14) получаем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 0.1\left(\frac{1.84147}{2} + 8.53778\right) = 0.94585\,.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=\ln x$, $y=1$, $y=1-x^2$ 2. $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=2\sqrt{2}\cos\varphi \\ \rho=2\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=2x-x^2$, $y=x$ 2. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=2\cos 4\varphi \\ \rho\ge 1 \end{cases}$
Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=\frac{3}{2}\left(x^{1/3}-\frac{1}{5}x^{5/3}\right)$, $1\le x\le 8$ 5. $\rho=2e^{3\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/2$	Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=\frac{\sqrt{2}}{8}(x^4+x^{-2})$, $1\le x\le 3$ 5. $\rho=3(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=(x-2)(x-5)$, $y=0$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_{0}^{\pi}\sqrt{3+\sin x}\cdot dx$
8. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус R и высоту H	8. Найти массу стержня длиной $l=100$ см, если линейная плотность стержня на расстоянии x см от одного из его концов равна $\delta=2+0.001x^2$ г/см

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = x - \pi/2$, $y = \cos x$, $x = 0$ 2. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 2(1+\cos\varphi) \\ \rho = 2 \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/4$ 2. $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t \\ y = 2 - 2\cos t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 2\cos 3\varphi \\ \rho \ge 1 \end{cases}$
Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = \sqrt{x/3} \cdot (1 - x)$, $1/2 \le x \le 1$ 5. $\rho = \mathrm{th}(\varphi/2)$, $0 \le \varphi \le \pi/4$	Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = x\sqrt{x+12}/6$, $-11 \le x \le -3$ 5. $\rho = \cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi/2$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{x+1} dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_{-2}^{12} \sqrt{x^3 + 9} \cdot dx$
8. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если сила в 1 Н растягивает ее на 1 см?	8. Скорость точки меняется по закону $V = 100 + 8t$ (размерность V – [м/с]). Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0, 10]$?

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$ 2. $\begin{cases} x = t^3 / 3 \\ y = 4 - t^2 / 2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 4\cos\varphi \\ \rho = 4\sqrt{3} \cdot \sin\varphi \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = \log_3 x$ $y = 0$, $x = 1/3$, $x = 3$ 2. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cdot \cos t \\ y = 3\sqrt{2} \cdot \sin t \end{cases}$, $y \ge 3$ 3. $\begin{cases} \rho = 4\cos 4\varphi \\ \rho \ge 2 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = x^2 / 2 - 1$, отсеченной осью Ox 5. $\rho = \dfrac{2}{\sin^2(\varphi / 2)}$, $\pi / 2 \le \varphi \le 3\pi / 2$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = \dfrac{4}{5} x^{5/4}$, $0 \le x \le 9$ 5. $\rho = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi / 3$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = 8 / (4 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, вокруг оси Oy	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$, вокруг оси Ox
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{2 + \sin x}\, dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$
8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла, имеющего радиус R	8. Два электрических заряда e_0 и e_1 находятся на оси Ox соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ см. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместить в точку $x_2 = 10$ см?

ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
1. $y=\dfrac{16}{\sqrt{16-x^2}}$, $y=8$	1. $y=\operatorname{tg}x$, $y=2/3\cos x$, $x=0$
2. $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{cases}$	2. $\begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$, $x\geq 2$
3. $\begin{cases} \rho=3(1-\cos\varphi) \\ \rho=3 \end{cases}$	3. $\begin{cases} \rho=2\sqrt{2}\sin 3\varphi \\ \rho\geq\sqrt{2} \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой
4. $y^2=\dfrac{16}{27}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3$, $y^2\leq x$	4. $x^2=5y^3$, $x^2+y^2\leq 6$
5. $\rho=3e^{2\varphi}$, $\pi/2\leq\varphi\leq\pi$	5. $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\rho\leq 1$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=27/(9+x^2)$, $y=3/2$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $2y=(x-2)^2$, $y=2$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_0^{\pi/3}\sqrt{\cos x}\cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int\limits_{-1}^{9}\sqrt{x^3+2}\cdot dx$
8. Вычислить кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости	8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен R и высота H

ВАРИАНТ 9	**ВАРИАНТ 10**
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = x^2 - 2x - 4$, $y = -x^2$ 2. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 6\cos\varphi \\ \rho = -2\sqrt{3}\sin\varphi \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = 6/(x+5)$, $y = \|x\|$, $x \geq -2$ 2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - t^3/3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 6\cos 4\varphi \\ \rho \geq 3 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = -x^{2/3} - 1$, $0 \leq x \leq 5\sqrt{5}$ 5. $\rho = \cos^5 \dfrac{\varphi}{5}$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $1/4 \leq x \leq 1$ 5. $\rho = \dfrac{3}{\sin^3(\varphi/3)}$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = 1/(1+x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = (x-1)(x-3)$, $y = 0$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^{\pi} \sqrt{2 - \sin x} \cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\sin x}{x} dx$
8. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 4$ м и радиусом $r = 2$ м ($\rho = 900$ кг/м^3), на стенки бака на глубине 3 м	8. Вычислить кинетическую энергию прямого круглого конуса массой M , вращающегося с угловой скоростью ω около своей оси, если радиус основания конуса R , а высота H

ВАРИАНТ 11	ВАРИАНТ 12
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = 2x^2$, $y = x^3 / 3$ 2. $\begin{cases} x = t^3 / 3 \\ y = 4 - t^2 / 2 \end{cases}$, $y = 2$ 3. $\begin{cases} \rho = 2(1 + \sin\varphi) \\ \rho = 2 \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y = x(x-1)^2$, $y \ge 0$ 2. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 4\cos 3\varphi \\ \rho \ge 2 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4/3$ 5. $\rho = 2\varphi^2$, $0 \le \varphi \le 4$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}$, $0 \le x \le 2\sqrt{3}$ 5. $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$, $\rho \le 1$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = x\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}$, $y = 6$, $x = 0$, $(0 \le x \le 2)$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = 8/(4 + x^2)$, $y = 1$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_1^{11} \sqrt{x^4 + 3} \cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 \sqrt{5 + 2x^3} \cdot dx$
8. Вертикальный треугольник с основанием b и высотой h погружен в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды. Найти силу давления воды	8. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см; один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ 13</th><th>ВАРИАНТ 14</th></tr>
<tr><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
1. $y = x - x^2$, $y = x\sqrt{1-x}$
2. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = -3\cos\varphi \\ \rho = \sqrt{3}\cdot\sin\varphi \end{cases}$</td><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
1. $y = \sin 2x$, $y = \sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi$
2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - t \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = 2\sin 4\varphi \\ \rho \ge 1 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y = 2x^{3/2}$, $0 \le x \le 11$
5. $\rho = 4\sin^4 \dfrac{\varphi}{4}$</td><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, $1 \le x \le 3$
5. $\rho = 4\sec^2(\varphi/2)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$</td></tr>
<tr><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$4y = x^2$, $y = |x|$,
вокруг оси Ox</td><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$y = x\sqrt{\dfrac{3+3x}{3-x}}$, $y = 6$, $x = 0$,
$(0 \le x \le 2)$,
вокруг оси Ox</td></tr>
<tr><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\int_0^{\pi/2} \sqrt{3+\cos x}\cdot dx$</td><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\int_0^1 x\sqrt{2-x^3}\cdot dx$</td></tr>
<tr><td>8. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью V_0, через t с от момента бросания (без учета сопротивления воздуха)?</td><td>8. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить давление воды на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 70$ м, нижнее основание $b = 50$ м, а высота плотины $h = 20$ м</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ 15</th><th>ВАРИАНТ 16</th></tr>
<tr><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:
1. $y = x^2/2$, $y = 1/(1+x^2)$
2. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = 3(1 - \sin\varphi) \\ \rho \ge 3 \end{cases}$</td><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:
1. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$, $y = x^2 - 5x + 7$
2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = 6\sin 3\varphi \\ \rho \ge 3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$
5. $\rho = e^{4\varphi}$, $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$</td><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$
5. $\rho = 2\left(1 + \sin\varphi\right)$, $\rho \ge 1$</td></tr>
<tr><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$y = x + \sin^2 x$, $y = x$, $0 \le x \le \pi$,
вокруг оси Ox</td><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$4y = (x-3)^2$, $4y = 9$,
вокруг оси Ox</td></tr>
<tr><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\int_0^1 x\sqrt{2 - x^3} \cdot dx$</td><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\int_2^{12} \sqrt{x^3 + 4} \cdot dx$</td></tr>
<tr><td>8. При установившемся ламинарном течении жидкости через трубу круглого сечения радиусом a скорость течения V в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, равна $V = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$.
Определить расход жидкости Q .
μ – коэффициент вязкости, p – разность давлений на концах трубы, l – длина трубы</td><td>8. Скорость движения точки
$V = te^{-0.01t}$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ 17</th><th>ВАРИАНТ 18</th></tr>
<tr><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:
1. $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$
2. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = -2\cos\varphi \\ \rho = -2\sqrt{3}/3\sin\varphi \end{cases}$</td><td>Задания 1–3.
Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:
1. $4y = x^2$, $y = 64/(16 + x^2)$
2. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \rho = 6\cos 2\varphi \\ \rho \ge 3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y = e^x$, $0 \le x \le \ln 7$
5. $\rho = 2\cos^{-4}\dfrac{\varphi}{4}$</td><td>Задания 4, 5.
Найти длину дуги плоской кривой
4. $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \le x \le 5$
5. $\rho = 2 + 2\cos\varphi$, $\rho \ge 1$</td></tr>
<tr><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$,
вокруг оси Oy</td><td>6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми
$y = 1/(2 + 8x^2)$, $y = 0$, $x = 0$,
$x = 1/2$,
вокруг оси Ox</td></tr>
<tr><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{x} dx$</td><td>7. Оценить интеграл
Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций
Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3 + 2x^3} \cdot dx$</td></tr>
<tr><td>8. Найти работу, совершенную при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r</td><td>8. Электрический заряд q_1, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд q_2 из точки $(a, 0)$ в $(b, 0)$. Определить работу силы отталкивания F</td></tr>
</table>

ВАРИАНТ 19	**ВАРИАНТ 20**
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $x = y^2 - 4$, $x = 2y - y^2$ 2. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 1 + \cos\varphi \\ \rho = 1 \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 = 12(y-1)$ 2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t(3 - t^2)/3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho = 2\sqrt{2} \cdot \cos 3\varphi \\ \rho \ge \sqrt{2} \end{cases}$
Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = 2\sqrt{1 + e^{x/2}}$, $\ln 9 \le x \le \ln 64$ 5. $\rho = 2\varphi^4$, $0 \le \varphi \le 3$	Задания 4, 5 Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = \ln \sin x$, $\pi/3 \le x \le 2\pi/3$ 5. $\rho = 3\sin\varphi$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$, вокруг оси Ox	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми $2y = (x - 1/2)^2$, $2y = 1/4$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 \frac{2}{\ln(1+x^2)} dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 x\sqrt{1+4x^3} \cdot dx$
8. Найти силу давления воды на вертикальный круговой конус с радиусом основания R и высотой H, погруженный в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды	8. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила в 1 кг растягивает ее на 2 см?

ВАРИАНТ 21	ВАРИАНТ 22
Задания 1–3 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$ 2. $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 3t(t^2+1) \end{cases}$, $x = 4/3$ 3. $\begin{cases} \rho = \cos(\varphi - \pi/4) \\ \rho = \sin(\varphi - \pi/4) \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y^2 = 2x + 9$, $y = x + 3$ 2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$, $x = 4$ 3. $\begin{cases} \rho = 2\sin 2\varphi \\ \rho \ge 1 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $x = \ln\cos y$, $0 \le y \le \pi/3$ 5. $\rho = 2 - 2\sin\varphi$, $\rho \ge 1$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y = \arcsin e^x$, $-\ln 7 \le x \le -\ln 2$ 5. $\rho = 2e^{2\varphi}$, $\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = x + \sin^2 x$, $y = x$, $0 \le x \le \pi$, вокруг оси Oy	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $8y = x^2$, $y = \|x\|$, вокруг оси Ox
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^{10} \sqrt{5 + 3x^3} \cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 \ln(4 + x^2)\,dx$
8. При установившемся ламинарном течении жидкости через трубу прямоугольного сечения, причем основание a велико по сравнению с высотой $2b$, скорость течения V в точке (x, y) равна $V = \frac{p}{2l\mu}\left(b^2 - (b-y)^2\right)$. Определить расход жидкости Q. μ – коэффициент вязкости, p – разность давлений на концах трубы, l – длина трубы	8. Найти массу стержня длиной $l = 1$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 20x + 0.15x^2$, где x – расстояние от одного из концов стержня, м; размерность δ – [кг/м]

ВАРИАНТ 23	**ВАРИАНТ 24**
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $x^2+y^2=4x$, $y^2=2x$ 2. $\begin{cases} x=8\sin t \\ y=3\cos t \end{cases}$, $x=4$ 3. $\begin{cases} \rho=4(1-\cos\varphi) \\ \rho=4 \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$ 2. $\begin{cases} x=2\cos t(1+\cos t) \\ y=2\sin t(1+\cos t) \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=2\sin 3\varphi \\ \rho\geq 1 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y^2=2px$, отсеченной прямой $x=p/2$ 5. $\rho=2-2\cos\varphi$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=\ln(2\cos x)$, $0\leq x\leq \pi/3$ 5. $\rho=5\cos\varphi$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=1/(2+8x^2)$, $y=1/4$, вокруг оси Oy	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=(x-2)(x-5)$, $y=0$, вокруг оси Oy
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^5}\cdot dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^3+36}\cdot dx$
8. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобочной трапеции с основаниями a и b и высотой h, погруженную в воду на глубину c	8. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью V_0, с учетом сопротивления воздуха дается формулой $V=c\ \mathrm{tg}\left\{(-gt)/c+\mathrm{arctg}(V_0/c)\right\}$ Найти высоту поднятия тела. t – протекшее время, g – ускорение силы тяжести и c – постоянная

ВАРИАНТ 25	ВАРИАНТ 26
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=(x^2-1)^2$, $y=0$ 2. $\begin{cases} x=\cos^3 t/4 \\ y=\sin^3 t/4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=-8\cos\varphi \\ \rho=8\sqrt{3}/3\sin\varphi \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=x^2/4$, $y=8/(4+x^2)$ 2. $\begin{cases} x=2\cos t+\cos 2t+1 \\ y=2\sin t+\sin 2t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=4\cos 2\varphi \\ \rho\ge 2 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$, от $(0, 2)$ до (x, y) 5. $\rho=3\varphi^3$, $0\le\varphi\le 4$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le \pi/4$ 5. $\rho=3\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$, $y=2\|x\|$, вокруг оси Oy	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $xy=9$, $y=0$, $x=3$, $x=6$, вокруг оси Ox
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x+1}dx$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 \dfrac{2x}{\ln(1+x)}dx$
8. Вычислить кинетическую энергию однородного круглого цилиндра плотностью δ с радиусом R и высотой h, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг его оси	8. Скорость точки изменяется по закону $V=2(6t^2-t)$ (размерность V – [в м/с]). Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

ВАРИАНТ 27	ВАРИАНТ 28
Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $x^2+y^2=41$, $xy=20$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ 2. $\begin{cases} x=1/2-1/(t^2+1) \\ y=t\left(1/2-1/(t^2+1)\right) \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=4(1-\sin\varphi) \\ \rho=4 \end{cases}$	Задания 1–3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми 1. $y=x^2-3x$, $y+3x-4=0$ 2. $\begin{cases} x=2/3\cos t+1/3\cos 2t \\ y=2/3\sin t-1/3\sin 2t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \rho=6\cos 3\varphi \\ \rho\ge 3 \end{cases}$
Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $1\le x\le 2$ 5. $\rho=1+\cos\varphi$, $\rho\ge 1$	Задания 4, 5. Найти длину дуги плоской кривой 4. $y^2=\dfrac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x=-1$ 5. $\rho=4e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/2$
6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$, $y=x$, вокруг оси Oy	6. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=2^x$, $y=2-\log_2 x$, $x=0$, $y=0$, вокруг оси Ox
7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы трапеций Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^2 \dfrac{dx}{1+x^5}$	7. Оценить интеграл Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы прямоугольников Сравнить оценку и вычисленное приближенное значение $\int_0^1 x\sqrt{\sin x}\cdot dx$
8. Какую работу нужно затратить, чтобы выкачать воду из цилиндрического котла, наполненного до половины, если ось котла горизонтальна, радиус сечения $R=1$ м, длина котла 3 м и воду надо поднять до верхней образующей котла?	8. Скорость тела дается формулой $V=2t^2-3t$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1978. – Т. 1, 2.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1963, 1966. – Т. 2, 3.
3. *Шнейдер В.Е.* Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1980–1984.
4. *Запорожец Г.И*. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
5. *Каплан И.А*. Практические занятия по высшей математике. – Харьков, 1973. – Ч. II.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Казанцева Евгения Владимировна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 14.05.2018. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 4,18. Печ. л. 4,5. Изд. 114. Заказ № 792
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20