КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Т. Ф. Горбачёва

ЦЕНИМ ПРОШЛОЕ, СТРОИМ БУДУЩЕЕ

Софья Алексеевна Шепелева
Валерий Васильевич Дырдин

ФИЗИКА

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Электронное учебное пособие

Кемерово 2019

© КузГТУ, 2019
© С. А. Шепелева,
В. В. Дырдин, 2019

ISBN 978-5-00137-110-6

УДК 539.3(075.8)(086.76)

Рецензенты:

Полыгалов Ю. И., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет»;

Осинцев А. М., доктор технических наук, заведующий кафедрой физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет»

Шепелева С. А**. Физика. Элементы механики сплошных сред** : учебное пособие [Электронный ресурс] для студентов технических специальностей и направлений подготовки / С. А. Шепелева, В. В. Дырдин ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2019. – 1 оптический диск (168 МБ)

Пособие содержит теоретический материал по темам «Упругие тела, твердое тело в механике, механика жидкости и газа» и примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения. Предназначено для студентов технических специальностей и направлений высших учебных заведений.

Текстовое электронное издание + видео

Минимальные системные требования:	MS Windows XP; ОЗУ 1 Гб для MS Windows XP / 2 ГБ для MS Windows Vista / 7 / 8 /10; частота процессора не менее 1,0 ГГц; 3D-видеоадаптер с памятью 128 МБ; ПО для чтения файлов PDF-формата; CD-ROM дисковод; SVGA-совместимая видеокарта; мышь.

© Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2019
© С. А. Шепелева, В. В. Дырдин, 2019

Сведения о программном обеспечении, которое использовано для создания электронного издания	MS Word
Дата подписания к использованию	02.12.2019
Объем издания в единицах измерения объема носителя, занятого цифровой информацией (байт, Кб, Мб)	168 Мегабайт
Продолжительность видеофрагментов	25 минут 16 секунд
Комплектация издания	1 DVD-диск, без сопроводительной документации
Наименование и контактные данные юридического лица, осуществившего запись на материальный носитель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева» Учебно-методическое управление 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28 Тел./факс: 8 (3842) 39-69-19

Предисловие

Электронное учебное пособие «Физика. Элементы механики сплошных сред» соответствует содержанию федерального образовательного стандарта и программам курса физики для специалистов и бакалавров технических вузов. Пособие содержит изложение основных законов физики по разделу «Механика сплошных сред» и их применение к объяснению круга явлений, наблюдающихся в массивах горных пород, связанных с деформациями, сдвижениями и динамическими процессами. Пособие подготовлено на основе курса лекций, которые читали авторы в Кузбасском государственном техническом университете в течение ряда лет, и предназначено для студентов, обучающихся по специальностям направления «Горное дело».

Потребность в создании пособия возникла в связи с увеличением объема самостоятельной работы у студентов при изучении дисциплин, поэтому учебная литература должна содержать необходимые теоретические сведения, особенности решения задач и практическое применение основных законов.

В данном учебном пособии каждая тема начинается с изложения основных физических законов, что дает возможность проводить качественный и количественный анализ решения предложенных задач. Также подобраны задачи для самостоятельной работы.

Большое значение имеет практическое применение теоретических знаний. Выработка приемов и навыков решения конкретных задач из разных областей практики горного дела поможет в дальнейшем на их основе разрабатывать способы управления состоянием массива горных пород и тем самым обеспечивать безопасность технологических процессов.

Методические рекомендации к решению задач

К решению задач следует приступать после изучения теоретического материала на соответствующую тему.

При решении задач целесообразно придерживаться следующей схемы:

- по условию задачи представить себе физическое явление, о котором идет речь. Сделать краткую запись условия, выразив исходные данные в единицах СИ;
- сделать, где это необходимо, чертеж, схему или рисунок, поясняющие описанный в задаче процесс;
- написать уравнения или систему уравнений, отображающих физический процесс;
- используя чертежи и условие задачи, преобразовать уравнения так, чтобы в них входили лишь исходные данные и табличные величины;
- решив задачу в общем виде, проверить конечную формулу на соответствие размерностей;
- осуществить вычисления и оценить реальность числового ответа.

Элементы механики сплошных сред

Часть 1. УПРУГИЕ ТЕЛА

§ 1 ТИПЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Реальные твердые тела под действием внешних сил *изменяют* свои линейные размеры и объем. Эти изменения называют *деформацией твердого тела*. Различают *упругие* и *пластические* деформации. Упругими называют деформации, которые исчезают после прекращения действия сил. Пластическими деформациями называют деформации, сохраняющиеся после прекращения действия сил. Физика процесса заключается в том, что под действием внешних сил происходит смещение частиц, ионов, атомов, составляющих тело, из положения равновесия. Возникающие при этом внутренние силы препятствуют данным смещениям. Эти внутренние силы называются *силами упругости*. Если внешние силы не превосходят некоторой величины, называемой *пределом упругости* твердого тела, то деформации будут *упругими*. Для абсолютно упругих тел существует однозначная зависимость между внешними силами и вызываемыми ими деформациями.

Если упругие свойства тела по всем направлениям одинаковы, то тело называется *изотропным*. В противном случае – *анизотропным*. Если деформации тела не изменяются от точки к точке, то они называются *однородными*, в противном случае – *неоднородными*.

§ 2 УПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Упругие деформации характеризуются напряжением. *Напряжением* σ в заданной точке твердого тела называют силу упругости $d\vec{F}_{\text{упр}}$, с которой одна часть твёрдого тела А действует на другую часть *B* этого тела (рис. 1) на бесконечно малом участке dS поверхности их соприкосновения с центром в точке О, отнесенную к величине площадки dS:

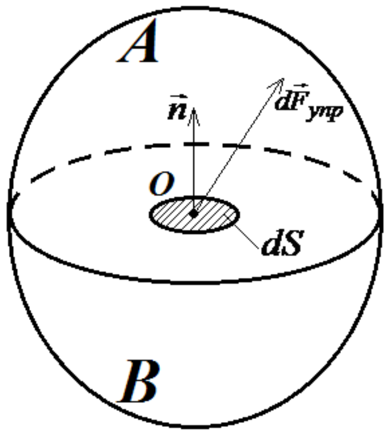


Рис. 1. Схема к определению напряжений в твердом теле

$$\sigma = \frac{d\vec{F}_{упр}}{dS}.$$

Проекция силы на нормаль $\vec{n}$ задает нормальное напряжение, а на плоскость – тангенциальное (касательное) напряжение. Если на некоторую поверхность тела S действует сила $\vec{F}$, то напряжение σ определяется формулой

$$\sigma = \frac{\vec{F}}{S}, \qquad [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

Для однозначного определения напряжения σ_n в твердом теле на произвольно ориентированной площадке S в точке О достаточно задать напряжения σ_x, σ_y и σ_z на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку О:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z,$$

где n_x, n_y и n_z – проекции внешней нормали $\vec{n}$ к площадке S на оси декартовой системы координат с центром в точке О.

Совокупность девяти величин, являющихся проекциями векторов σ_x, σ_y и σ_z на три координатные оси X, Y, Z называют *тензором упругих напряжений* и записывают следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензор упругих напряжений симметричен, то есть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (i, j = x, y, z).$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

σ_x, σ_y, σ_z называют *главными осями тензора упругих напряжений* или главными напряжениями.

Смотреть видео1 «Зависимость упругих свойств от температуры»

§ 3 ЗАКОН ГУКА

Закон Гука справедлив для малых упругих деформаций. Напряжение σ при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль упругости, равный напряжению при относительной деформации, равной единице.

В случае линейного растяжения или сжатия стержня относительная деформация:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad l = l_0 \pm \Delta l.$$

Модуль упругости E называют модулем Юнга. Изменение длины стержня при одноосной деформации будет равно

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l_0.$$

При объемном растяжении или сжатии модуль упругости рассчитывают по формуле

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Для твердых тел $\mu < 0,5$; Δd – изменение поперечных размеров.

Если тело находится в жесткой обойме и деформации по осям Оy и Оz равны нулю, т. е. $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, то деформация по оси О$x$ при одностороннем сжатии определяется выражением

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}\right).$$

Откуда вытекает соотношение для напряжений:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x.$$

Подставляя (12) в (11), получаем выражение

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu-2\mu^2}{E(1-\mu)}\sigma_x = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\sigma_x,$$

где $\dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ – модуль упругости твёрдого тела при одностороннем сжатии и наличии бокового отпора.

Деформированное тело обладает запасом потенциальной энергии, которую называют *упругой*. За ее счет может совершаться работа.

Упругая энергия равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при условии, что его кинетическая энергия не изменяется. Тогда, упругая энергия растянутого стержня будет равна:

$$U = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2,$$

где $|F| = k\Delta l$ – модуль растягивающей силы

Плотность упругой энергии, то есть энергию единицы объема можно рассчитать следующим образом:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{F\Delta l}{Sl} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad [U] = \text{Дж} = \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Смотреть видео2 «Упругие свойства тел. Закон Гука»

§ 4 СДВИГ, КРУЧЕНИЕ, ИЗГИБ

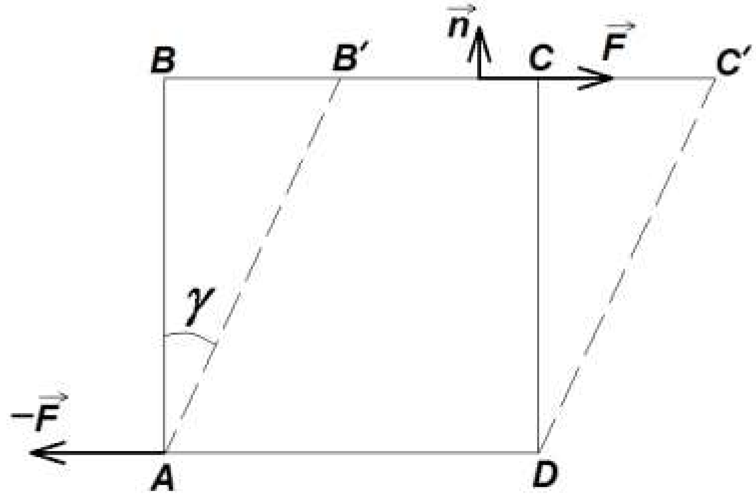


Рис. 2. Деформация сдвига

Примером однородной деформации является сдвиг. *Сдвигом* называется деформация, при которой все слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, перемещаются в одном и том же направлении, параллельном плоскости сдвига. Основание *AD* куба (рис. 2) есть плоскость сдвига. Внешняя сила $\vec{F}$, вызывающая деформацию, направлена по касательной к грани *BC*. По закону Гука касательное напряжение:

$$\tau = \frac{F}{S} = G\gamma ,$$

где S – площадь грани *AB*, перпендикулярно которой действует сила $\vec{F}$;

γ – угол;

G – модуль сдвига, который зависит от материала.

Существует соотношение, устанавливающее связь между упругими постоянными для твердых тел:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

При деформациях, для которых выполняется закон Гука, объем тела практически не изменяется. Плотность упругой энергии при сдвиге:

$$u = \frac{U}{\mathrm{V}} = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 = \frac{\tau^2}{2G} .$$

Примером неоднородных деформаций являются кручение и изгиб. *Кручением* называют деформацию твердого тела, при которой под действием внешней силы происходит относительный поворот параллельных сечений тела вокруг некоторой оси.

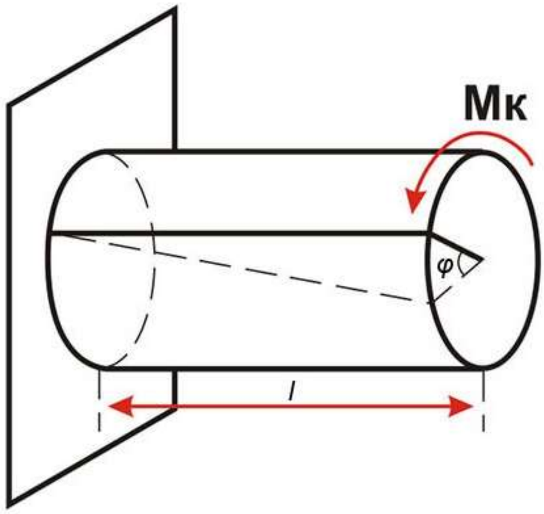


Рис. 3. Кручение

Для деформации кручения справедливо соотношение

$$M = f \cdot \varphi,$$

где f – постоянная, называемая модулем кручения, который зависит от свойств тела и его геометрических размеров; φ – угол поворота.

Изгибом называют деформацию твердого тела, при которой одни части (рис. 4).

Тела претерпевают сжатие, а другие – растяжение в параллельных направлениях

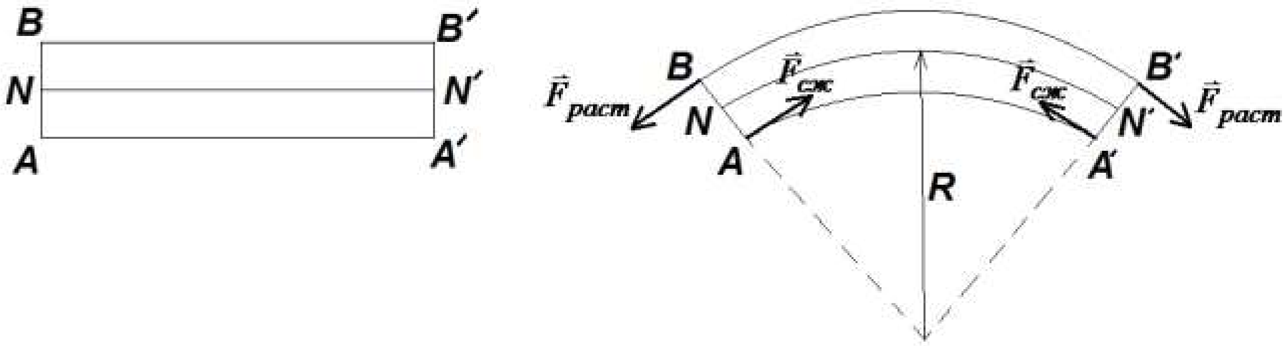


Рис. 4. Схема, поясняющая возникновение
в балке растягивающих и сжимающих напряжений

Напряжение любого волокна определяется формулой

$$\sigma = E\frac{x}{R}.$$

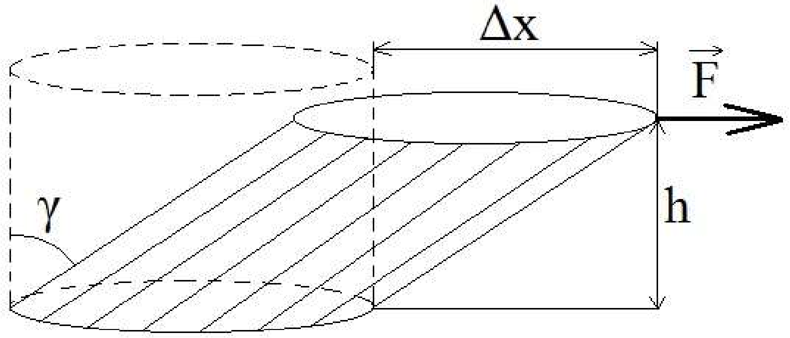
Выше средней линии NN' – растягивающие напряжения $\sigma > 0$, а ниже NN' – сжимающие напряжения $\sigma < 0$. Напряжение действует вдоль волокна.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.1

Нижнее основание железной тумбы, имеющей форму цилиндра диаметром d = 20 см и высотой h = 20 см, закреплено неподвижно. На верхнее основание тумбы действует сила F = 20 кН. Найти: 1) тангенциальное напряжение τ в материале тумбы; 2) относительную деформацию γ (угол сдвига); 3) смещение Δx верхнего основания тумбы.

Решение



Тангенциальное напряжение в материале тумбы:

$$\tau = \frac{F}{S},$$

где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения тумбы;

Рассчитаем

$$\tau = \frac{4F}{\pi d^2};\ \tau = \frac{4\cdot 20\cdot 10^3}{3{,}14\cdot(0{,}2)^2} = 636{,}9\cdot 10^3\,\text{Па} = 637\,\text{кПа}.$$

Тангенциальное напряжение связано с относительной деформацией выражением:

$$\tau = \gamma G,$$

где $G = 76 \cdot 10^9$ Па модуль сдвига для железа.

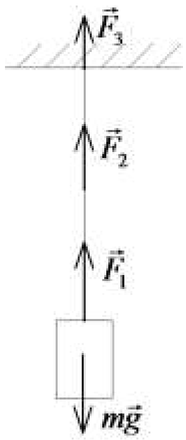
Тогда $\gamma = \dfrac{\tau}{G}$.

Рассчитаем $\gamma = \dfrac{637 \cdot 10^3}{76 \cdot 10^9} = 8{,}37 \cdot 10^{-6}$ рад $= 8{,}37$ мкрад.

Пример 1.2.

Верхний конец свинцовой проволоки диаметром d = 2 см и длиной l = 60 м закреплен неподвижно. К нижнему концу подвешен груз массой m = 100 кг. Найти напряжение материала: 1) у нижнего конца; 2) на середине длины; 3) у верхнего конца проволоки.

Решение



1) Сила натяжения нити у нижнего конца $F_1 = mg$. Тогда напряжение $\sigma = \dfrac{F_1}{S}$, где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$. То есть $\sigma_1 = \dfrac{4mg}{\pi d^2}$.

Рассчитаем: $\sigma_1 = \dfrac{4 \cdot 100 \cdot 9{,}81}{3{,}14 \cdot (0{,}02)^2} = 3{,}12 \cdot 10^6$ Па $= 3{,}12$ МПа.

2) Сила натяжения нити на середине длины $F_2 = mg + m_1 g$, где $m_1 g = S\dfrac{l}{2}\rho g$ – сила тяжести отрезка нити, равного её половине.

Тогда $\sigma_2 = \dfrac{F_2}{S} = \dfrac{mg}{S} + \dfrac{l\rho g}{2} = \sigma_1 + \dfrac{l\rho g}{2}$.

Рассчитаем

$$\sigma_2 = 3{,}12 \cdot 10^6 + \frac{60 \cdot 11300 \cdot 9{,}81}{2} = 6{,}45 \cdot 10^6 = 6{,}45 \text{ МПа}.$$

3) Сила натяжения нити у верхнего конца $F_3 = mg + m_2 g$, где $m_2 g = Sl\rho g$ – сила тяжести нити.

Тогда $\sigma_3 = \frac{F_3}{S} = \frac{mg}{S} + \frac{Sl\rho g}{S} = \sigma_1 + l\rho g$.

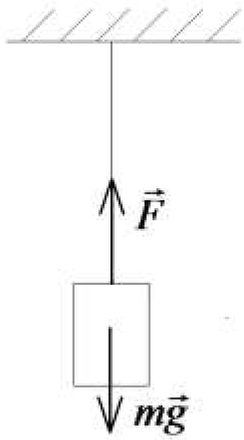
Рассчитаем:

$\sigma_3 = 3{,}12 \cdot 10^6 + 60 \cdot 11300 \cdot 9{,}81 = 9{,}78 \cdot 10^6$ Па $= 9{,}78$ МПа.

Пример 1.3

К вертикально закреплённой проволоке длиной l = 5 м и площадью поперечного сечения S = 2 мм^2 подвешен груз массой m = 5,1 кг. В результате проволока удлинилась на x = 0,6 мм. Найти модуль Юнга E материала проволоки.

Решение



Сила натяжения проволоки

$$F = mg.$$

Напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}.$$

По закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – относительная деформация.

Тогда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{mgl}{S\Delta l}.$$

Рассчитаем

$$E = \frac{5{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 2{,}08 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. К проволоке диаметром d = 2 мм подвешен груз массой m = 1 кг. Определить напряжение σ, возникшее в проволоке.

2. Какой наибольший груз может выдержать стальная проволока диаметром d = 1 мм, не выходя за предел упругости $\sigma_{упр}$ = 294 МПа? Какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе?

3. Свинцовая проволока подвешена в вертикальном положении за верхний конец. Какую наибольшую длину l может иметь проволока, не обрываясь под действием силы тяжести? Предел прочности σпр свинца равен 12,3 МПа.

4. Гиря массой m = 10 кг, привязанная к проволоке, вращается с частотой n = 2 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через конец проволоки, скользя при этом без трения по горизонтальной поверхности. Длина l проволоки равна 1,2 м, площадь S ее поперечного сечения равна 2 мм^2. Найти напряжение σ металла проволоки. Массой ее пренебречь.

6. К стальному стержню длиной l = 3 м и диаметром d = 2 см подвешен груз массой m = 2,5·10^3 кг. Определить напряжение σ в стержне, относительное ε и абсолютное х удлинения стержня.

7. Две пружины жесткостью k_1 = 0,3 кН/м и k_2 = 0,8 кН/м соединены последовательно. Определить абсолютную деформацию x_1 первой пружины, если вторая деформирована на x_2 = 1,5 см.

8. Определить жесткость k системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении. Жесткость пружин k_1 = 2 кН/м и k_2 = 6 кН/м.

9. Для сжатия пружины на x_1 = 1 см нужно приложить силу F = 10 Н. Какую работу A нужно совершить, чтобы сжать пружину на x_2 = 10 см, если сила пропорциональна сжатию?

10. Пружина жесткостью k = 10 кН/м сжата силой F = 200 Н. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину еще на x = 1 см.

11. Пружина жесткостью k = 1 кН/м была сжата на x_1 = 4 см. Какую нужно совершить работу A, чтобы сжатие пружины увеличить до x_2 = 18 см?

12. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, поставленной на подставке, сжимает ее на x = 2 мм. Насколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты h = 5 см?

Часть 2. ТВЕРДОЕ ТЕЛО В МЕХАНИКЕ

§ 1 СТАТИКА, ЕЕ ЗАДАЧИ И ПРИНЦИПЫ

Статика – это раздел механики, в котором изучают условия равновесия материальных тел под действием приложенных сил. К основным понятиям статики относятся понятия силы, момента силы относительно центра и оси, пары сил.

Основная задача статики – определение условий, при которых тело, на которое действуют силы, может оставаться в покое.

Принципы статики:

1. Сила в механике является вектором.
2. Силы можно складывать и вычитать в соответствие с правилами сложения и вычитания векторов.
3. Точку приложения силы можно переносить вдоль ее направления, не меняя действия силы на тело в целом.
4. Силу можно разложить на составляющие.
5. Если линии действия сил не пересекаются, то их равнодействующая делит расстояние между этими силами в отношении, обратном отношению сил (рис. 5):

$$F_1 : F_2 = l_2 : l_1.$$

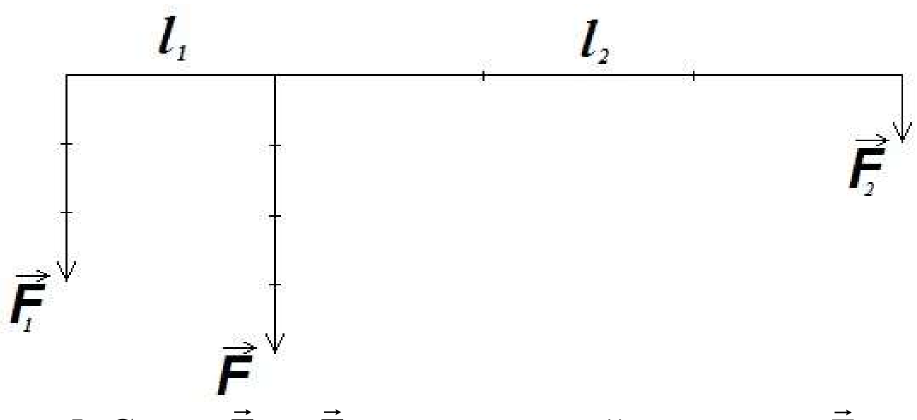


Рис. 5. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и их равнодействующая $\vec{F}$

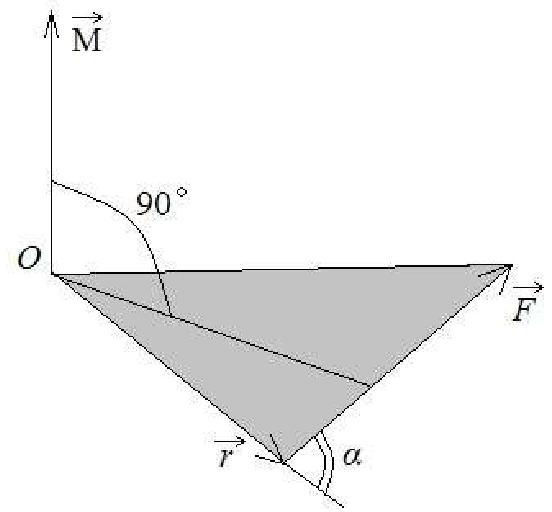


Рис. 6. Момент силы относительно оси Z,
проходящей через точку О

6. Момент силы: сила, действующая на тело, закрепленное на оси, может вызывать его вращение только в том случае, когда направление силы не проходит через ось вращения (рис. 6).

$$\vec{M}_Z = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]; \; \left|\vec{M}\right| = rF \text{, так как } \alpha = 90°$$

$$\left[M\right] = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

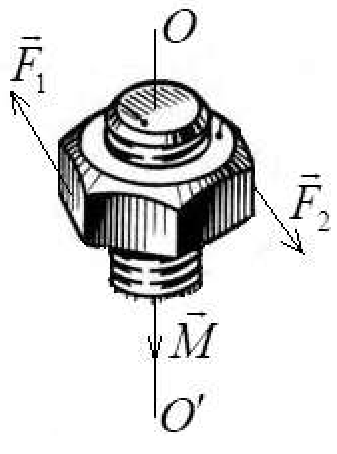


Рис. 7. Схема действия пары сил на твердое тело

Пара сил – это две силы, равнодействующая которых равна нулю, а результирующий момент не равен нулю. Если тело закреплено на оси, то при действии пары сил оно начнет вращаться вокруг этой оси (рис. 7). Момент пары сил $\vec{M}$ относительно любой OO'

оси, перпендикулярной плоскости пары, одинаков, а его направление определяют по правилу правого винта.

§ 2 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ

1. Тело может находиться в равновесии, если сумма проекций всех приложенных к нему сил на любое направление равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0.$$

2. Тело, закрепленное на оси, может находиться в равновесии, если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю.

Равновесие тела называется устойчивым, если при отклонении тела от положения равновесия оно под действием возникших сил возвращается к положению равновесия (рис. 8). Если силы вызывают дальнейшее отклонение от положения равновесия, то равновесие называется неустойчивым. Безразличным называется равновесие тела, когда действующие на него силы уравновешивают друг друга при любом положении тела.

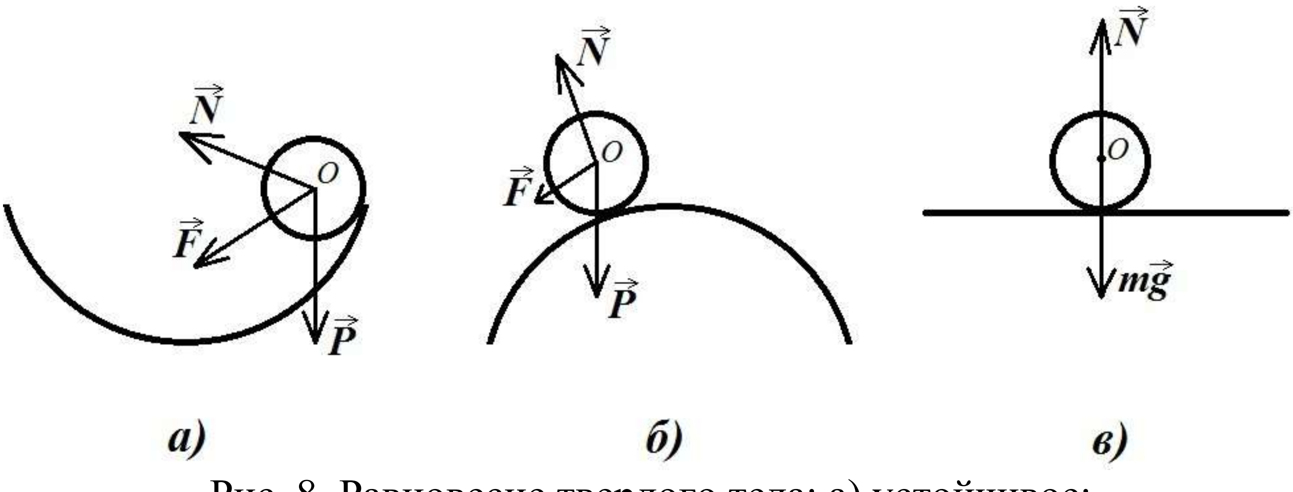


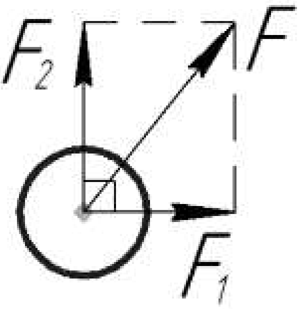
Рис. 8. Равновесие твердого тела: а) устойчивое; б) неустойчивое; в) безразличное

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 2.1.

На тело действуют силы 4 и 5 Н, направленные под углом 90° друг к другу. Определить равнодействующую этих сил.

Решение



Равнодействующая сила F равна геометрической (т. е. векторной) сумме всех сил, действующих на тело. Если сложить силы F_1 и F_2, которые перпендикулярны друг другу, то модуль равнодействующей силы можно найти по теореме Пифагора:

$$F = F_{21} + F_{22}.$$

Произведем вычисления:

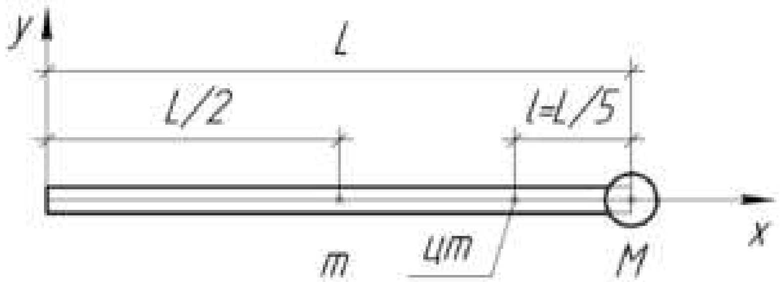
$$F = 6{,}4\ \text{Н}.$$

Пример 2.2

На одном из концов однородного стержня прикреплен груз массой 3 кг. Если стержень на расстоянии 1/5 его длины от груза подпереть, то он окажется в равновесии. Чему равна масса стержня?

Решение

Изобразим схему для решения этой задачи и введем координатные оси, как показано на ней.



Так как схема симметрична относительно оси x, то одна из координат центра тяжести всей системы $y_{цт}$ равна нулю.

Если стержень подпереть в некоторой точке и после этого он окажется в равновесии, значит в этой точке находится центр тяжести системы. Поэтому

$$x_{цт} = L - l = L - L/5 = 4L/5.$$

С другой стороны, эту же координату центра тяжести можно найти по следующей формуле

$$x_{\text{цт}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i g x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i g}.$$

Здесь m_i – это масса i-го тела, а x_i – координата центра масс i-го тела. Применительно к этой задаче имеем

$$x_{\text{цт}} = \frac{mg0{,}5L + MgL}{mg + Mg} = \frac{(m+2M)L}{2(m+M)}.$$

Приравняем правые части равенств:

$$\frac{(m+2M)L}{2(m+M)} = \frac{4}{5}L;$$

$$5m + 10M = 8m + 8M;$$

$$2M = 3m;$$

$$m = \frac{2}{3}M.$$

Численно масса стержня равна:

$$m = 3 \cdot 2/3 = 2 \text{ кг}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. На аэростат в горизонтальном направлении действует ветер с силой 3000 Н. Натяжение троса 5000 Н. Определить натяжение троса в безветренную погоду.

2.2. Шар массой 6 кг висит на веревке, прикрепленной к гладкой стене. С какой силой шар давит на стенку, если веревка проходит через центр шара, а $\alpha = 30°$?

2.3. На обод колеса вагона действует тормозящая сила 500 Н. Определить момент этой силы, если радиус колеса 45 см.

2.4. Рабочий удерживает за один конец доску массой 50 кг. С горизонтальной поверхностью доска образует угол 30°. С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила направлена перпендикулярно доске?

2.5. Два человека несут груз на невесомом стержне длиной 3 м. Нагрузка (усилие) одного человека в два раза больше, чем другого. На каком расстоянии от него укреплен груз?

2.6. К стене приставлена лестница массой 60 кг. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии 1/3 длины от её верхнего конца.

Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы её верхний конец не оказывал давления на стенку? Угол между лестницей и стеной равен 45°.

2.7. Какой тормозящий момент относительно оси вращающегося колеса диаметра 40 см создает колодка, прижатая к ободу колеса с силой 100 Н, если коэффициент трения равен 0,6?

2.8. Труба лежит на земле. Рассчитайте массу трубы, если известно, что для того, чтобы приподнять её за один конец, необходимо приложить силу $F = 20$ Н, $g = 10$ м/с^2.

Часть 3. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Механика жидкости и газа или гидроаэромеханика – раздел механики, в котором изучают равновесие и движение жидких и газообразных сред, а также их взаимодействие между собой и с погруженными в них телами.

Основные задачи гидроаэромеханики:

1. Определение сил, действующих на твердые тела, движущиеся в жидкости или газе.
2. Определение параметров жидкости или газа вблизи поверхности твердых тел.
3. Исследование движения жидкости и газа внутри каналов различной формы.

Гидроаэромеханику делят на гидро- и аэростатику и гидро- и аэродинамику.

Жидкость – это агрегатное состояние вещества, промежуточное между твердым и газообразным состояниями. Характеризуется следующими свойствами:

1. Сохраняет объем.
2. Образует поверхность.
3. Обладает прочностью на разрыв.
4. Принимает форму сосуда.
5. Обладает текучестью.

Пп. 1–3 аналогичны свойствам твердых тел, а п. 4 – газам. Главное отличительное свойство жидкости – текучесть.

Жидкости, имеющие одно жидкое состояние, называют *нормальными*. Существуют также *квантовые* жидкости: одна нормальная фаза и одна или две сверхтекучие; жидкие кристаллы – жидкокристаллические вещества, имеющие нормальную и одну или несколько анизотропных фаз.

Газом называется агрегатное состояние вещества, в котором все его частицы слабо взаимодействуют между собой и заполняют весь предоставленный объем.

§ 2 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ГИДРО- И АЭРОСТАТИКИ

Закон Паскаля

Жидкости и газы передают оказываемое на них давление равномерно по всем направлениям. Следовательно, давление P не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

На произвольной глубине:

$$P = P_0 + \rho g h,$$

где P_0 – давление на поверхность жидкости;

$\rho g h$ – давление столба жидкости (гидростатическое давление).

Если несжимаемая жидкость находится в сосуде, который равномерно вращается вокруг некоторой вертикальной оси с угловой скоростью ω, то давление в некоторой точке определяется выражением:

$$P = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2,$$

где r – расстояние от этой точки до оси вращения; ρ – плотность жидкости.

Следствия:

1. Действие гидравлического пресса: выигрыш в силе равен отношению его площадей:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2},$$

где S_1 и S_2 – площадь малого и большого цилиндра, соответственно.

2. Давление на дно сосуда не зависит от формы сосуда и определяется высотой столба жидкости и ее плотностью.

3. Однородная жидкость в *сообщающихся сосудах* устанавливается на одном и том же уровне, а разнородные на высотах:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Упругие свойства жидкости по отношению к малым изменениям объема характеризуются *коэффициентом изотермической сжимаемости*.

$$æ = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=\mathrm{const}}, \quad æ = \frac{1}{\text{Па}} = \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}.$$

Знак «–» говорит о том, что увеличение давления P сопровождается уменьшением объема V. Жидкости обладают очень малой сжимаемостью:

вода: $\kappa = 0{,}47 \cdot 10^{-6}$ Па$^{-1}$;

спирт: $\kappa = 1{,}17 \cdot 10^{-6}$ Па$^{-1}$;

эфир: $\kappa = 1{,}43 \cdot 10^{-6}$ Па$^{-1}$.

Смотреть видео3 «Шар Паскаля»

Закон Архимеда

На тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила (подъемная), численно равная весу жидкости (газа) в объеме, вытесненном телом:

$$F_\text{в} = V \cdot \rho \cdot g = m \cdot g,$$

где V – объем тела; ρ – плотность жидкости.

Сила Архимеда направлена вверх и проходит через центр масс. Центр масс вытесненной жидкости называется центром плавучести тела. Его положение определяет условия равновесия и устойчивости плавающего тела.

Следствия:

1. Плавающее тело будет находиться в равновесии, если его вес равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести и центр масс тела лежат на одной вертикали, при этом тело полностью погружено в жидкость:

$$G = F_\text{в},$$

где G – вес тела;

$F_\text{в}$ – выталкивающая сила.

2. Если $G < F_\text{в}$, то тело плавает, частично погрузившись.

3. Если $G > F_\text{в}$, то тело утонет.

Закон Бойля–Мариотта

При постоянной температуре T произведение давления газа P на его объем V – величина постоянная:

$$PV = \text{const}\,.$$

Следствия:

1. При постоянной температуре (T = const) давление газа P, находящегося в замкнутом сосуде, пропорционально его плотности ρ, то есть $P \sim \rho$.

2. При постоянной температуре (T = const) справедливо равенство:

$$P_1V_1 = P_2V_2\,,$$

где P_1, V_1 – параметры начального состояния газа;

P_2, V_2 – параметры конечного состояния газа.

Смотреть видео4 «Давление жидкости на стенки сосуда. Сосуд Мариотта»

Если считать, что атмосфера является изотермической, то есть находящейся в механическом и тепловом равновесии, то давление атмосферы с высотой уменьшается по экспоненциальному закону.

Смотреть видео5 «Изменение давления с высотой»

§ 3 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Это уравнение устанавливает связь между силой f, действующей в жидкости (газе) и приходящейся на единицу ее объема, и изменением давления P в состоянии равновесия.

$$\vec{f} = -gradP\,,$$

$f_x = \dfrac{\partial P}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, $f_z = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ – проекции силы $\vec{f}$ на оси декартовой системы координат. В случае силы тяжести

$$f = \rho g\,,$$

$$[f] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^3\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}\,.$$

Из уравнения следует, что равновесие жидкости (газа) возможно только в том случае, если сила $\vec{f}$ является консервативной.

§ 4 ТЕОРЕМА О НЕРАЗРЫВНОСТИ СТРУЙ ЖИДКОСТИ

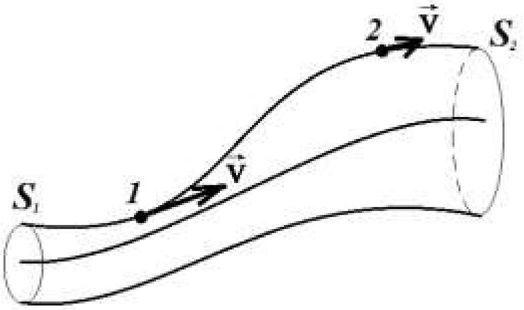


Рис. 9. Линии тока и векторы скорости
в различных точках потока

Для описания движения жидкости будем отмечать скорость, с которой проходят через каждую точку пространства отдельные частицы жидкости. Тогда совокупность векторов $\vec{v}\,(t)$, заданных для всех точек пространства, называется *полем вектора скорости*. Это поле можно наглядно изобразить с помощью *линий тока*. Для наглядности построения густоту линий тока выбирают численно равной модулю скорости в данном месте. Тогда, по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле вектора скорости $\vec{v}$ в разных точках пространства. Например, в точке 1 (рис. 9) густота линий и модуль вектора $\vec{v}$ больше, чем в точке 2.

Если скорость в каждой точке пространства по модулю и направлению остается постоянной ($\vec{v} = \mathrm{const}$) в течение времени, то течение жидкости называется *стационарным* (установившимся).

Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, образуется поверхность, которую называют *трубкой тока*. Вектор $\vec{v}$ касателен к поверхности трубки тока в каждой точке. Следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

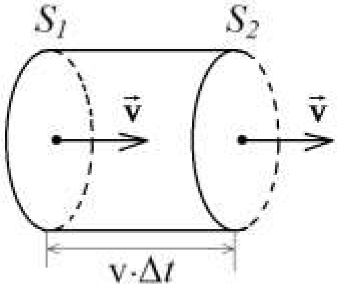


Рис. 10. Цилиндрическая трубка
тока

Изобразим трубку тока (рис. 10) в виде прямолинейной цилиндрической трубы: $S_1 = S_2 = S$. За время Δt через сечение S пройдет объем жидкости:

$$V = Sv\Delta t,$$

а за единицу времени:

$$V = S \cdot v.$$

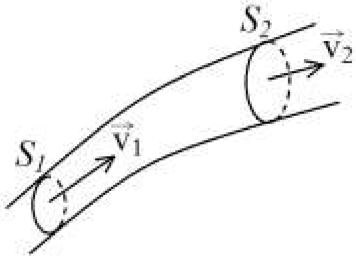


Рис. 11. Произвольная трубка тока

Так как коэффициент сжимаемости жидкостей очень мал, то практически их можно считать несжимаемыми. Тогда, для произвольной трубки тока (рис. 11) количество жидкости между сечениями S_1 и S_2 остается постоянным. Следовательно, объемы жидкости, протекающие в единицу времени через S_1 и S_2 должны быть одинаковыми:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любой пары сечений, то для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение $S \cdot v$ в любом сечении трубки тока имеет одинаковое значение.

$$S \cdot v = \mathrm{const}$$

Это сущность теоремы о неразрывности струй жидкости. Из данной теоремы следует, что при изменяющемся сечении трубки частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением, то есть скорость жидкости в различных по величине сечениях будет разной.

Для реальной жидкости и газа эта теорема имеет вид

$$\rho \cdot S \cdot v = \mathrm{const}.$$

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение (т. е. вязкость) называется *идеальной*.

§ 5 ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

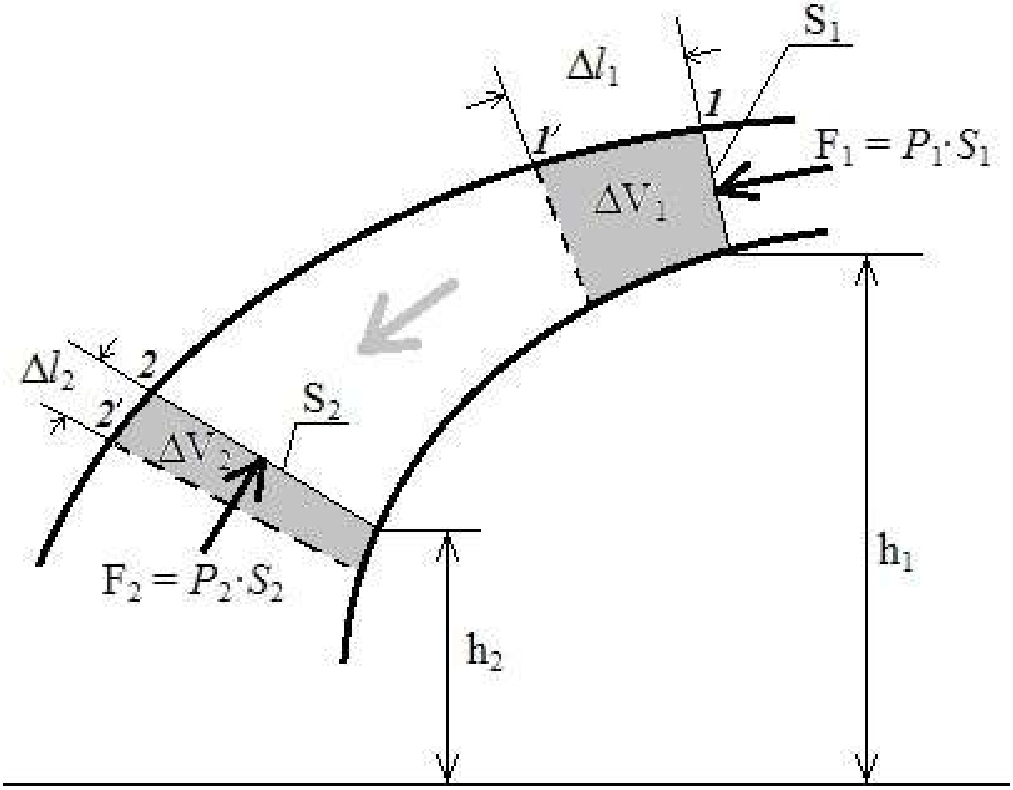


Рис. 12. Схема к выводу теоремы Бернулли

Согласно теореме неразрывности $\Delta V_1 = \Delta V_2$, то есть за время Δt жидкость, заключенная между сечениями 1 и 2 перемещается вдоль трубки тока в положение, определяемое сечениями 1' и 2' (см. рис. 12). Возьмем сечения S_1 и S_2, а также перемещение Δl такими малыми, чтобы все точки выделенных участков имели одинаковые скорости, давление и высоту.

Тогда работа приложенных сил будет равна

$$A = F_1\Delta l_1 - F_2\Delta l_2 = P_1S_1\Delta l_1 - P_2S_2\Delta l_2 = (P_1 - P_2)\Delta V\ .$$

Эта работа численно равна приращению механической энергии потока:

$$\Delta E = A = (E_{k2} + E_{n2}) - (E_{k1} + E_{n1}) =$$

$$= \left(\frac{\rho\Delta V v_2^2}{2} + \rho\Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho\Delta V v_1^2}{2} + \rho\Delta V g h_1\right) = (P_1 - P_2)\Delta V.$$

Получим уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2,$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}.$$

Сумма скоростного напора $\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$, гидростатического давления $(\rho g h)$ и внешнего давления на жидкость (P) есть величина постоянная в любом сечении.

Проверка единиц:

скоростной напор:

$$\left[\frac{\rho v^2}{2}\right] = [P], \text{ т.к. } \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

гидростатическое давление:

$$[\rho g h] = [P], \text{ т.к. } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Если высота не изменяется, то есть h = const (трубка горизонтальная), то

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \text{const},$$

то есть сумма скоростного напора и внешнего давления – величина постоянная.

Из последнего равенства следует, что давление меньше в тех точках, где скорость больше.

Смотреть видео6 «Уравнение Бернулли»

§ 6 ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТИ

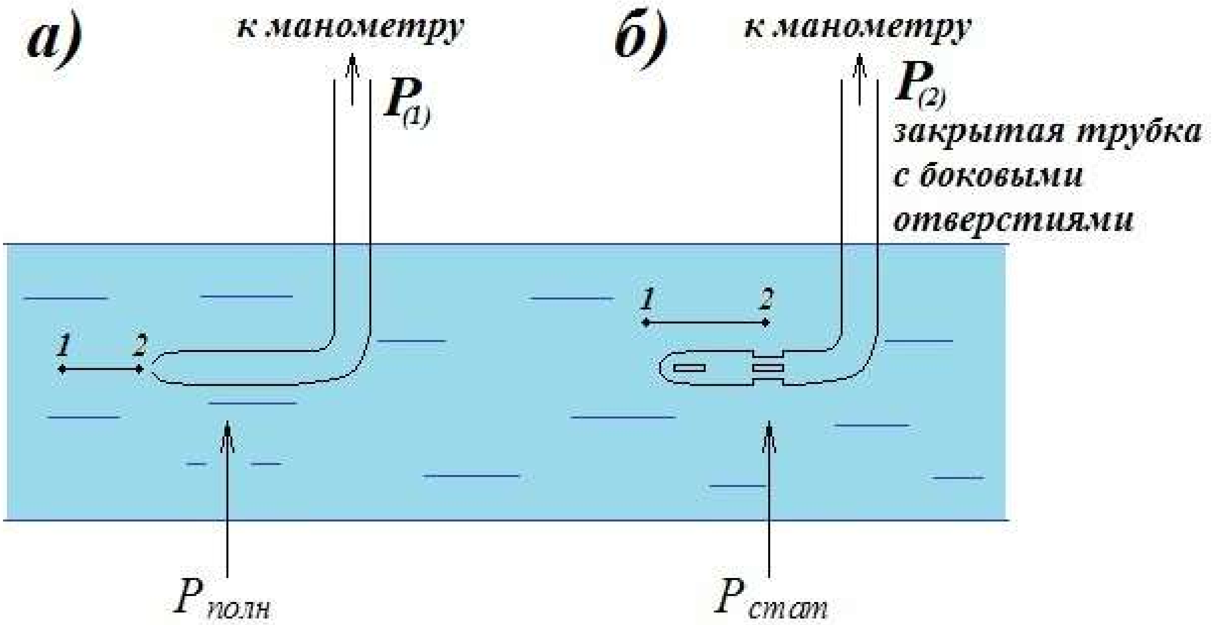


Рис. 13. Схемы для измерения полного (а) и статического (б) давления с помощью трубки Пито

Трубка Пито

В случае

а) давление в точке 1:

$$P_{(1)} = \frac{\rho v_1^2}{2} + P_1,$$

где P_1 – статическое давление; $\frac{\rho v_1^2}{2}$ – динамическое давление.

В точке 2 скорость $v_2 = 0$, поэтому давление в ней будет

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1$$

что и показывает манометр (полное давление):

$$P_{(2)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

В случае б) трубка Пито покажет только статическое давление, так как скорости в точках 1 и 2 практически не отличаются, поэтому $P_{(1)} = P_{(2)} = P_1$.

Трубка Пито–Прандтля

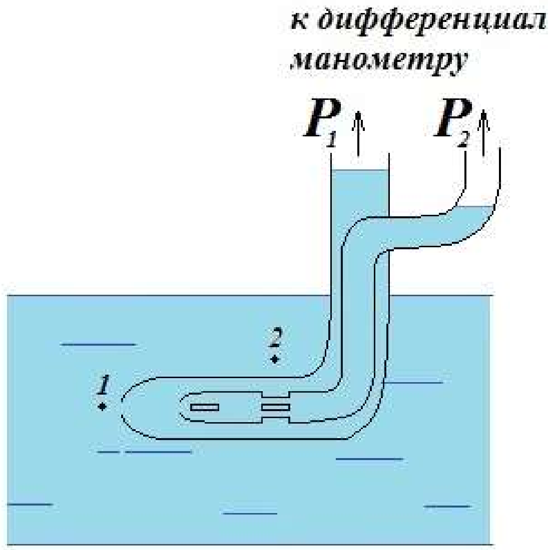


Рис. 14. Схема для измерения динамического давления
с помощью трубки Пито-Прандтля

Трубка Пито-Прандтля позволяет измерить разность давлений в точках 1 и 2, то есть динамическое давление, так как:

$$P_{(1)} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2};$$

$$P_{(2)} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

Следовательно,

$$P_{(1)} - P_{(2)} = (P_1 - P_2) + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2}{2},$$

так как $P_1 = P_2$, а $v_2 = 0$

Таким образом, если шкалу дифференциального манометра проградуировать в единицах скорости, то трубку Пито–Прандтля можно использовать для измерения скорости течения жидкости.

§ 7 ИСТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ

Для всех точек каждого из сечений S_1 и S_2 скорость v и высоту h можно считать одинаковыми.

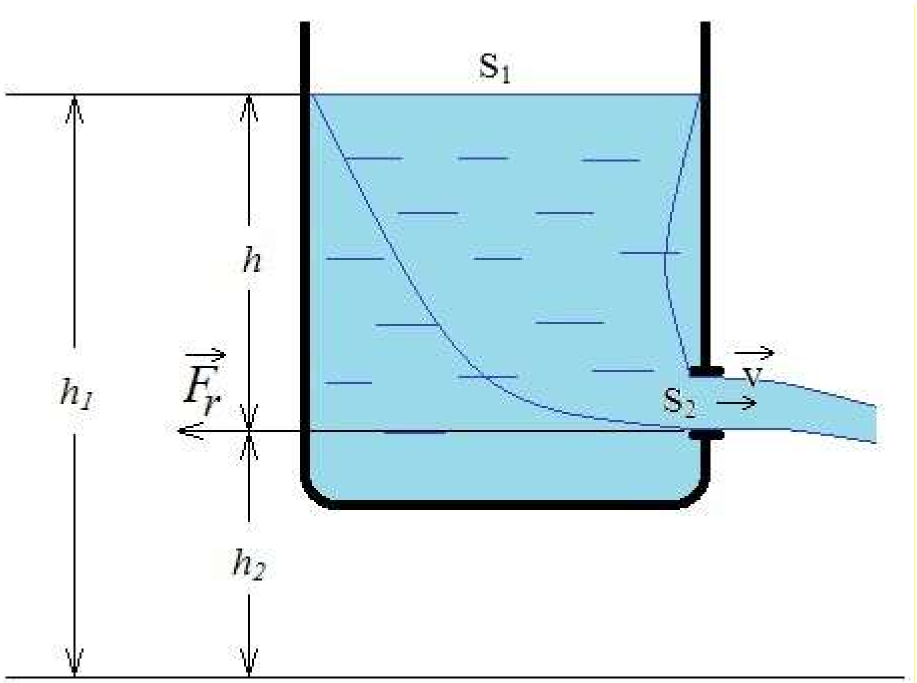


Рис. 15. Схема к расчету скорости истечения идеальной жидкости из отверстия

Применим теорему Бернулли. Так как v_1 очень мала, поэтому будем полагать, что $v_1 = 0$, то поэтому

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

где v_2 – скорость течения в сечении S_2. С учетом того, что $h_1 - h_2 = h$, получим

$$\mathrm{v} = \sqrt{2gh},$$

то есть совпадает со скоростью свободного падения тела. Это для идеальной жидкости. Для реальных жидкостей скорость будет тем меньше, чем больше внутреннее трение. Вязкие жидкости: нефть, мазут, глицерин будут вытекать медленнее.

Объем жидкости: $V = S_1 \cdot v$, но $\rho \cdot S_1 \cdot v = m$, то есть масса жидкости.

Импульс струи: $m\vec{v} = \rho S_2 v \cdot \vec{v}$.

По закону сохранения: импульс силы, действующей на стенку сосуда, равен импульсу вытекающей струи. Импульс силы в единицу времени равен силе, действующей на стенку:

$$F_r = -\rho S_2 v \cdot \vec{v} .$$

Модуль этой силы:

$$F_r = \rho S_2 v^2 = \rho S_2 2gh = 2S_2 \rho gh = 2S_2 P = 2F_{\text{гидр}} .$$

Следовательно, сила F_r превосходит силу гидростатического давления в 2 раза. Это связано с тем, что движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления. На противоположной стене (относительно отверстия) давление оказывается большим, чем на стенку с отверстием.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Основоположником теории полета ракет и межпланетного сообщения является русский ученый К. Э. Циолковский.

§ 8 ВЯЗКОСТЬ

Течение жидкости, при котором частицы движутся вдоль прямолинейной траектории не перемешиваясь, называется ламинарным (слоистым). При ламинарном течении жидкость может быть представлена в виде слоев, которые скользят один относительно другого (рис. 16).

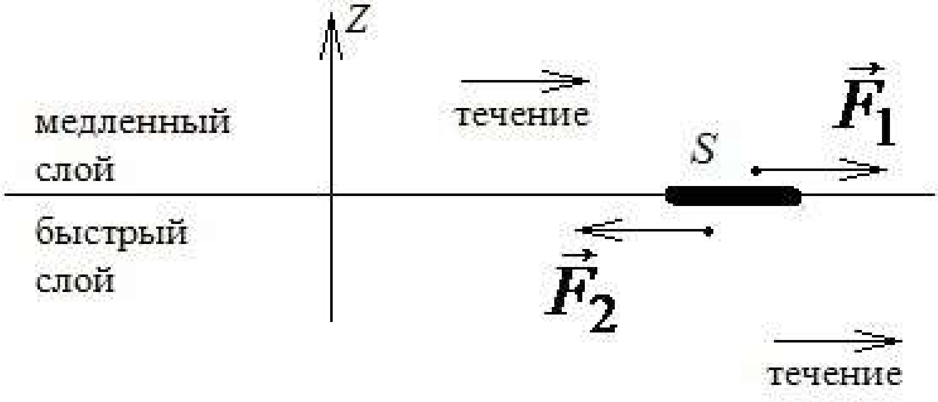


Рис. 16. Схема действия сил при контакте быстрого и медленного слоев

Такое течение стационарно. Например, при течении жидкости в трубе скорость частиц изменяется от нуля (у стенки) до максимальной (на оси). При движении слоев жидкости с разными скоростями между ними возникают касательные силы, называемые силами внутреннего трения $F_{\text{тр}}$ или силами вязкости.

Экспериментально установлено, что модуль силы трения равен

$$F = \eta \cdot \left| \frac{dV}{dz} \right| \cdot S,$$

где η – коэффициент внутреннего трения или динамической вязкости.

Размерность коэффициента внутреннего трения:

$$[\eta] = \frac{\text{Н}}{\frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Физический смысл коэффициента динамической вязкости: он численно равен импульсу, переносимому от слоя к слою в единицу времени через единичную площадку, при градиенте скорости, равном единице.

Смотреть видео7 «Явления переноса в газах. Вязкость газа»

§ 9 ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

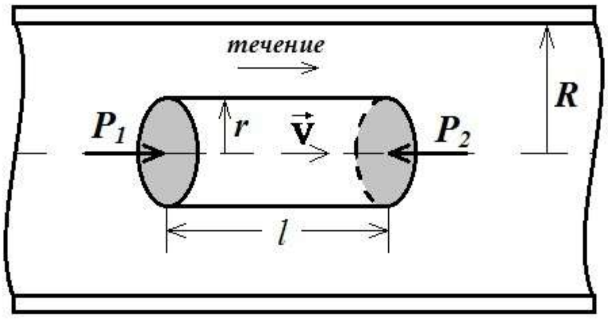


Рис. 17. Схема к выводу формулы изменения скорости при ламинарном течении

Рассмотрим малый цилиндрический объем жидкости в трубе.

На основание цилиндра действует сила давления:

$$F_1 = (P_1 - P_2) \cdot \pi \cdot r^2.$$

На боковую поверхность – сила внутреннего трения:

$$F_2 = -\eta \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}r} \cdot \mathrm{d}S = -\eta \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}r} \cdot 2\pi r l,$$

знак «–» означает, что скорость убывает с расстоянием от оси трубы; $2\pi rl$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

Поскольку объем жидкости движется без ускорения, то

$$F_1 = F_2:$$

$$\left(P_1 - P_2\right)\cdot \pi \cdot r^2 = -\eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l;$$

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

После взятия неопределенного интеграла получаем:

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

C выбирают так: при $r = R$ скорость $v = 0$. Тогда постоянную C определим из выражения

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$$

и

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right).$$

Скорость на оси трубы:

$$v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 \quad \text{или} \quad v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

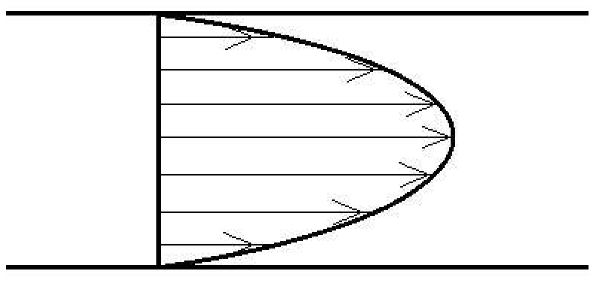


Рис. 18. Эпюра скорости при ламинарном течении

Получили, что при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону.

Вычислим расход жидкости, то есть объем жидкости, протекающей через сечение площадью S за единицу времени.

$$dQ = v_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr,$$

где $2\pi rdr$ – площадь кольца радиуса r и ширины dr. Тогда dQ – это объем жидкости, протекающей через кольцо в единицу времени. Величина r изменяется от нуля до R, поэтому

$$Q = \int_0^R v_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8\eta l}.$$

Эта формула носит название *формулы Пуазейля*. Формула Пуазейля используется для определения вязкости жидкости. Если экспериментально определить объём жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени, то можно рассчитать коэффициент внутреннего трения.

Масса жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы S за единицу времени, рассчитывается по формуле: $m = \rho \cdot Q$, кг/с.

§ 10 ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Турбулентным называется такое течение жидкости (газа), при котором ее (его) *скорость и давление быстро и нерегулярно изменяются со временем*. При турбулентном течении газа нерегулярным образом изменяется также его плотность и температура. Течение становится нестационарным.

Ламинарное течение переходит в *турбулентное* при увеличении скорости движения жидкости (газа) или при увеличении поперечных размеров потока S. Характер течения можно определить по значению безразмерной величины, которую называют число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_0 l}{\eta} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}; \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

где η, ν – динамическая и кинематическая вязкость; l – характерный размер.

При малых Re течение является ламинарным, а при больших – турбулентным. Значение Re, при котором течение становится турбулентным, называется критическим. Для круглого сечения при $l = r$ число Re $\approx$ 1000.

Наибольшее изменение скорости при турбулентном течении наблюдается около стенки трубы.

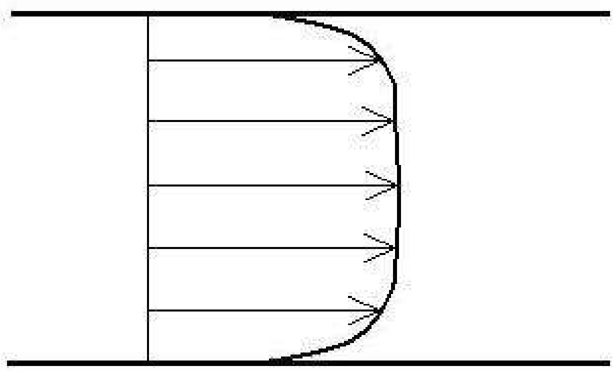


Рис. 19. Эпюра скоростей
при турбулентном потоке

§ 11 ЗАКОНЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Законы подобия позволяют осуществить моделирование, то есть из одного течения получать другое путем изменения масштаба скоростей и координат. Существует три закона подобия.

Закон подобия для скорости потока

$$\frac{\vec{v}}{v_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}\right),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор заданной точки; v_0 – характерная скорость; l – характерный размер.

При одинаковых Re отношение $\dfrac{\vec{v}}{v_0}$ является функцией только $\dfrac{\vec{r}}{l}$.

Закон подобия для давления в жидкости

$$P = \rho v_0^2 f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}\right).$$

Закон подобия для силы сопротивления, действующей на обтекаемое тело с характерным размером l:

$$F = \rho v_0^2 l^2 f(\mathrm{Re}).$$

Данные формулы справедливы, если влиянием силы тяжести можно пренебречь. В противном случае

$$\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}, \Phi\right); \ \frac{P}{\rho v_0^2} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}, \Phi\right); \ \frac{F}{\rho \mathrm{v}_0^2 l} = f(\mathrm{Re}, \Phi),$$

где Φ – безразмерная величина, равная:

$$\Phi \sim \frac{v_0^2}{gl}$$

называется *числом Фруде*.

§ 12 ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА И ФРУДА

Число Re (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости к потере этой энергии, равной работе сил вязкости (динамического трения) на характерной длине:

$$\mathrm{Re} \sim \frac{T}{A} \sim \frac{\frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_0^2 l^3}{\eta \mathrm{v}_0^2 l^2} \approx \frac{\rho \mathrm{v}_0 l}{\eta}.$$

Число Фруда (по порядку величины) равно отношению кинетической энергии жидкости T к ее приращению, равному работе A' сил тяжести на характерной длине:

$$\Phi \sim \frac{T}{A'} \sim \frac{\frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_0^2 l^3}{\rho g l^4} \approx \frac{\mathrm{v}_0^2}{gl}.$$

При больших числах Re главную роль играет инерция, а при малых – вязкость. При больших числах Φ главную роль играет инерция, а при малых – тяготение.

Если число Re велико, а число Φ мало, то движение жидкости в основном определяется инерцией и тяготением.

При малых числах Re и больших числах Ф движение жидкости в основном определяется инерцией и вязкостью.

§ 13 ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Силу $\vec{F}$, *с которой набегающий поток действует* на тело, можно разложить на две составляющие: в направлении потока $\vec{F}_{\parallel}$ и перпендикулярно потоку $\vec{F}_{\perp}$. *Сила* $\vec{F}_{\parallel}$ *называется лобовым сопротивлением, а сила* $\vec{F}_{\perp}$ *– подъемной силой.*

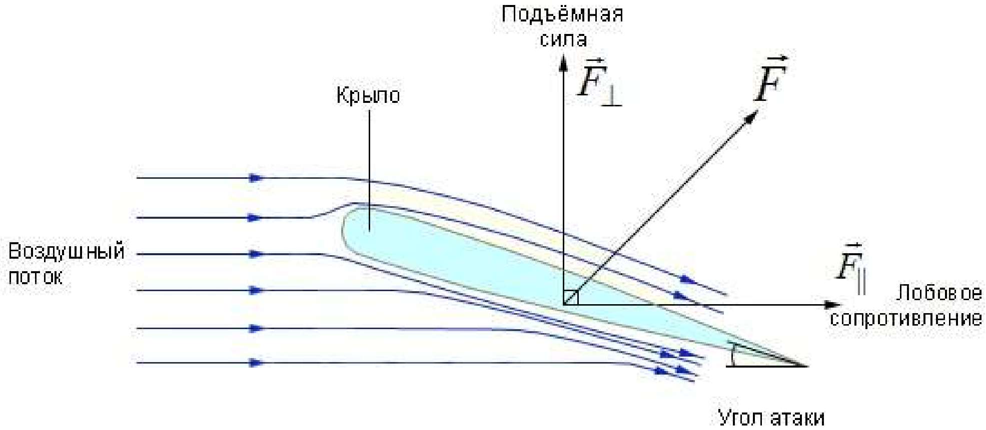
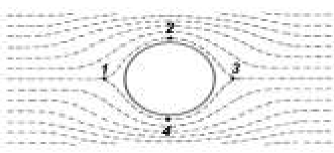
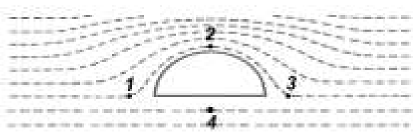
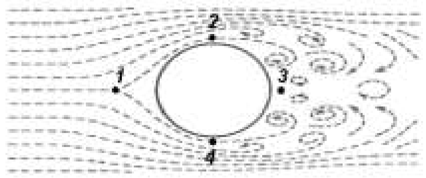


Рис. 20. Подъемная сила крыла

Лобовое сопротивление слагается из сил давления и внутреннего трения.

На тело, симметричное относительно направления скорости потока $\vec{v}$, действует только лобовое сопротивление, подъемная сила в этом случае отсутствует. При равномерном движении тела в идеальной несжимаемой жидкости лобовое сопротивление равно нулю $\vec{F}_{\parallel} = 0$ (принцип Д'Аламбера). Это справедливо только для идеальной жидкости, в реальных жидкостях $\vec{F}_{\parallel} \neq 0$, так как движущееся тело всегда увлекает за собой часть жидкости. Идеальная жидкость не обладает вязкостью.

$\vec{F}_{\parallel} \neq 0$, $\vec{F}_{\perp} = 0$		$P_1 > P_3$ Толщина пограничного слоя: $\delta = \dfrac{l}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$
		
В точках 1, 3 давление одинаково и больше, чем при $\vec{v} = 0$. В точках 2, 4 давление также одинаково и меньше, чем при $\vec{v} = 0$.	В точке 2 давление меньше, чем в точке 4, поэтому возникает подъемная сила. Идеальная жидкость.	Тело оказывается окруженным пограничным слоем с быстро изменяющейся внутри него скоростью. Следовательно, возникают силы вязкого трения, которые приложены к телу и вызывают лобовое сопротивление.

Сила $\vec{F}_{\parallel}$, определяющая лобовое сопротивление, равна

$$\vec{F}_{\parallel} = C\frac{\rho S}{2}v_0^2,$$

где ρ – плотность жидкости; S – площадь поперечного сечения тела; C – коэффициент лобового сопротивления.

$$C = f(\mathrm{Re}),$$

т. е. C является функцией числа Re и зависит от формы тела и от его ориентации по отношению к потоку. Числовые значения C определяются экспериментально.

При больших числах Re лобовое сопротивление обусловлено, главным образом, разностью давлений перед телом и за ним.

При малых числах Re (Re << 1) лобовое сопротивление определяется в основном вязкостью.

Примеры численных значений коэффициента C:

Тело	Коэффициент C
Тело обтекаемой формы	0,05
Шар	0,1–0,4
Автомобиль	0,4

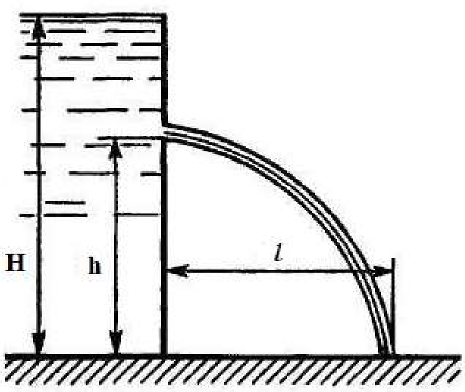
Смотреть видео8 «Обтекание тел»

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1

Бак высотой H = 2 м до краев заполнен жидкостью. На какой высоте h должно быть проделано отверстие в стенке бака, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия, было на максимальном от бака расстоянии?

Решение



Воспользуемся формулой для расчета скорости истечения идеальной жидкости из отверстия:

$$v = \sqrt{2g(H\text{-}h)},$$

Время, за которое вода, истекающая из отверстия, пройдет путь h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Тогда путь

$$l = vt = \sqrt{2g(H-h)\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)}.$$

Возьмем производную для нахождения экстремума функции:

$$\frac{dl}{dh} = 4H - 8h;$$

$$4H - 8h = 0.$$

Откуда $h = \frac{H}{2}$.

Рассчитаем: h = 1 м.

Пример 3.2

Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр d_1 = 20 см. В нем движется со скоростью v_1 = 1 м/с поршень, выталкивая воду через отверстие диаметром d_2 = 2 см. С какой скоростью v_2 будет вытекать вода из отверстия? Каково будет избыточное давление P воды в цилиндре?

Решение.

Запишем

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Откуда

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Рассчитаем

$$v_2 = 1\frac{0{,}2^2}{0{,}02^2} = 100 \text{ м/с}.$$

$$P_1 = \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Тогда

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Рассчитаем

$$\Delta P = \frac{1000}{2}\left(10^4 - 1\right) = 5 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Пример 3.3

При движении шарика радиусом r_1 = 2,4 мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости v_1 шарика, не превышающей 10 см/с. При какой минимальной скорости v_2 шарика радиусом r_2 = 1 мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Решение

Число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1}$$

Тогда при движении шарика в касторовом масле, тогда при движении шарика в глицерине:

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2}.$$

Так как

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2,$$

Тогда

$$\frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2},$$

откуда

$$v_2 = \frac{\rho_1 v_1 \eta_2 d_1}{\eta_1 \rho_2 d_2} = \frac{\rho_1 v_1 \eta_2 r_1}{\eta_1 \rho_2 r_2}.$$

Рассчитаем $v_2 = \dfrac{960 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}48 \cdot 0{,}0024}{0{,}987 \cdot 1260 \cdot 0{,}001} = 27{,}5$ см/с.

Пример 3.4

По трубе течет машинное масло. Максимальная скорость $V_{\max}$, при которой движение масла в этой трубе остается еще ламинарным, равна 3,2 см/с. При какой скорости v движение глицерина в той же трубе переходит из ламинарного в турбулентное?

Решение

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta_1},$$

Откуда

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_1 v_1 d}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d}{\eta_2},$$

Выразим скорость течения глицерина

$$v_2 = \frac{\eta_2 \rho_1 v_1}{\rho_2 \eta_1}.$$

Рассчитаем:

$$v_2 = \frac{0{,}2 \cdot 900 \cdot 0{,}032}{1260 \cdot 1{,}48} = 0{,}31 \text{ см/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Латунный шарик диаметром d = 0,5 мм падает в глицерине. Определить: 1) скорость v установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

2. Медный шарик диаметром d = 1 см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением в нем шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$.

3. В трубе с внутренним диаметром d = 3 см течет вода. Определить максимальный массовый расход $Q_{m\ max}$ воды при ламинарном течении.

4. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром d = 5 см со средней по сечению скоростью $\langle v \rangle$ = 10 см/с. Определить число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе и указать характер течения жидкости.

5. При каком режиме будет протекать вода с температурой t = 15 °С в открытом прямоугольном лотке, если объёмный расход жидкости Q равен 0,56 м^3/с, глубина воды в лотке b = 0,7 м, а ширина лотка b = 0,8 м.

6. По напорному трубопроводу переменного сечения подаётся жидкость с объёмным расходом Q = 0,6 л/с. Кинематический коэффициент вязкости жидкости $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Определите диаметр, при котором произойдёт смена режима движения.

7. Определить расход жидкости Q в горизонтальном трубопроводе диаметром $d_1 = 0{,}2$ м, имеющем сужение диаметром $d_2 = 0{,}12$ м (рис. 1.7). Разность показаний пьезометров $\Delta h = 250$ мм.

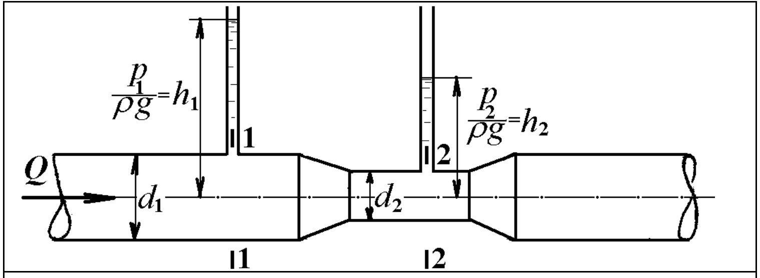


Рис. 1.7

8. Определите массу жидкости плотностью 780 кг/м^3, которая пройдёт через живое сечение круглого напорного трубопровода диаметром $d = 0{,}2$ м за 10 минут. Средняя скорость жидкости в поперечном сечении потока v равна 1,5 м/с.

9. Определите размер квадратного напорного трубопровода. За 3 минуты через поперечное сечение трубопровода проходит 7,2 м^{3}жидкости постоянной плотности. Средняя скорость потока в сечении составляет 1,0 м/с.

10. Какова должна быть разность давлений ΔP на концах капилляра радиуса $r = 1$ мм и длины $L = 10$ см, чтобы за время $t = 5$ с через него можно было пропустить объем $V = 1$ см^3 воды (коэффициент вязкости $\eta_1 = 10^{-3}$ Па·с) или глицерина ($\eta_2 = 0{,}85$ Па·с)?

11 Бак высотой $h = 1{,}5$ м наполнен до краев водой. На расстоянии $d = 1$ м от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии l от бака падает на пол струя, вытекающая из отверстия?

12. Струя воды диаметром $d = 2$ см, движущаяся со скоростью $v = 10$ м/с, ударяется о неподвижную плоскую поверхность, поставленную перпендикулярно струе. Найти силу F давления струи на поверхность, считая, что после удара о поверхность скорость частиц воды равна нулю.

13. Давление р ветра на стену равно 200 Па. Определить скорость v ветра, если он дует перпендикулярно стене. Плотность ρ воздуха равна 1,29 кг/м^3.

14. К поршню спринцовки, расположенной горизонтально, приложена сила $F = 15$ Н. Определить скорость v истечения воды из наконечника спринцовки, если площадь S поршня равна 12 см^2.

15. В горизонтально расположенной трубе с площадью S_1 поперечного сечения, равной 20 см^2, течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь S_2 сечения равна 12 см^2. Разность Δh уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определить объемный расход Q_V жидкости.

16. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течет со скоростью v_1 = 2 м/с. Определить скорость v_2 нефти в узкой части трубы, если разность Δp давлений в широкой и узкой частях ее равна 6,65 кПа.

17. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость v_1 воды в широкой части трубы равна 20 см/с. Определить скорость v_2 в узкой части трубы, диаметр d_2 которой в 1,5 раза меньше диаметра d_1 широкой части.

Список литературы

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1: Механика. Молекулярная физика: учебное пособие для студентов вузов. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 432 с.

2. Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учебное пособие для студентов вузов. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 352 с.