

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Н. Б. Окушко

ФИЗИКА

Электромагнитные явления
Электростатика и постоянный ток

Кемерово
2019

УДК 537.8(075.8)+537.2(075.8)
О 528

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Кемеровского государственного университета Ю. И. Польшгалов

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории № 558 Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН Д. Г. Ардюков

О 528 Окушко, Н. Б. Физика. Электромагнитные явления. Электростатика и постоянный ток : учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. / Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2019. – 140 с.

ISBN 978-5-00137-108-3

Пособие содержит учебные материалы, необходимые для изучения разделов «Электростатика» и «Постоянный ток» в курсе общей физики: теоретический материал, вопросы для самоконтроля, примеры решения задач и комплекты задач для индивидуальных заданий по каждой теме курса. Большое внимание уделяется применению основных законов физики к решению задач.

Для всех специальностей и направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева.

УДК 537.8(075.8)+537.2(075.8)

© Окушко Н. Б., 2019

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2019

ISBN 978-5-00137-108-3

Оглавление

Предисловие	5
1. Электрическое поле и его характеристики.....	7
1.1. Электрический заряд.....	7
1.2. Закон Кулона	7
1.3. Напряженность электрического поля	8
1.4. Вектор смещения.....	11
1.5*. Движение зарядов в электрических полях различной конфигурации	12
1.6. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	13
1.7. Примеры решения задач	15
1.8. Задачи для самостоятельного решения.....	20
1.9. Задачи повышенной сложности.....	24
2. Теорема Гаусса.....	25
2.1. Силовые линии и линии смещения	25
2.2. Поток вектора напряженности. Поток вектора смещения.....	25
2.3. Теорема Гаусса	27
2.4. Примеры применения теоремы Гаусса	30
2.5. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	35
2.6. Примеры решения задач	36
2.7. Задачи для самостоятельного решения.....	40
2.8. Задачи повышенной сложности.....	42
3. Потенциал	43
3.1. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Консервативность электростатических сил	43
3.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля	44
3.3. Потенциал	45
3.4. Связь потенциала с напряженностью	47
3.5. Эквипотенциальные поверхности	48
3.6*. Примеры расчета потенциалов	49
3.7. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	53
3.8. Примеры решения задач	53
3.9. Задачи для самостоятельного решения.....	57
3.10. Задачи повышенной сложности.....	59
4. Проводники в электрическом поле	61
4.1. Электрическое поле внутри и снаружи проводника	61
4.2. Сила, действующая на поверхность проводника.....	65
4.3. Свойства замкнутой проводящей оболочки.....	66
4.4*. Метод изображений	68
4.5. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	70
4.6. Примеры решения задач	70

4.7. Задачи для самостоятельного решения.....	73
4.8. Задачи повышенной сложности.....	75
5. Электрическое поле в диэлектриках.....	76
5.1. Электрический диполь.....	76
5.2. Поляризация диэлектриков. Поляризованность	78
5.3. Механизмы поляризации.....	79
5.4. Напряженность электрического поля внутри диэлектрика	82
5.5. Поляризованность и вектор смещения	84
5.6. Условия на границе раздела двух диэлектриков	84
5.7*. Анизотропные диэлектрики.....	86
5.8*. Сегнетоэлектрики.....	87
5.9*. Пьезоэффект	89
5.10. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	91
5.11. Примеры решения задач.....	91
5.12. Задачи для самостоятельного решения.....	95
5.13. Задачи повышенной сложности.....	96
6. Емкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля.....	98
6.1. Емкость уединенного проводника	98
6.2. Конденсаторы. Емкость конденсатора	99
6.3. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора.....	100
6.4. Энергия электрического поля	101
6.5*. Емкость сферического конденсатора	102
6.6*. Емкость цилиндрического конденсатора.....	103
6.7*. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.....	103
6.8. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	104
6.9. Примеры решения задач	105
6.10. Задачи для самостоятельного решения.....	111
6.11. Задачи повышенной сложности.....	113
7. Постоянный электрический ток	115
7.1. Электрический ток и его характеристики	115
7.2. Закон Ома для однородного участка цепи	116
7.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи	117
7.4. Дифференциальная форма закона Ома	119
7.5. Правила Кирхгофа.....	120
7.6. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.....	122
7.7. КПД источника тока	123
7.8. Классическая теория электропроводности металлов	124
7.9. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля.....	126
7.10. Примеры решения задач.....	128
7.11. Задачи для самостоятельного решения.....	134
7.12. Задачи повышенной сложности.....	138
Список рекомендуемой литературы	140

Предисловие

Данная книга – переработанная и дополненная версия первой части учебного пособия по электродинамике, изданной в 2005 году и в течение ряда лет используемой в Кузбасском государственном техническом университете (КузГТУ). Учебное пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей и направлений подготовки. Для будущих инженеров теоретическое знание разделов физики, связанных с электрическими и магнитными явлениями, должно стать прочной базой для изучения специальных дисциплин и овладения будущей профессией.

Структура учебного пособия организована таким образом, чтобы максимально облегчить как работу студента над курсом, так и нелегкий труд преподавателя. Каждая тема курса представлена отдельной главой. Предполагается, что на освоение каждой из этих тем в учебном семестре студенту требуется около недели. Структура глав примерно одинакова.

В начале каждой главы почти конспективно излагается основной материал соответствующей темы (понятия, определения, законы физики). Это те необходимые знания, которые будут неоднократно применяться при рассмотрении следующих разделов.

Далее следует материал для самостоятельного изучения, включающий примеры применения изученных законов и некоторые прикладные вопросы. Эти разделы в каждой главе выделены звездочкой (например, «1.5*. Движение зарядов в электрических полях различной конфигурации»). Тем не менее, материал, предназначенный для самостоятельного изучения, – это неотъемлемая часть курса, которая развивает, поясняет и дополняет лекционный материал и без которой учебное пособие превратилось бы в простой физический справочник.

Особый раздел каждой главы – вопросы для экспресс-контроля и самоконтроля. Как правило, это простые качественные вопросы или задачи, требующие очень небольших вычислений, которые могут, с одной стороны, помочь студенту выяснить, достаточно ли хорошо он изучил данный раздел, с другой стороны, облегчить преподавателю быстрый контроль изучения студентами теоретической части разделов.

Далее рассматриваются примеры решения задач. Число часов, отводимых на решение задач в инженерных вузах, крайне мало, и преподаватель, при всей своей добросовестности и квалификации, не успевает дать студентам достаточно много примеров приемов решения задач. Данный раздел каждой главы предоставляет студентам подобные примеры. Предлагаемые задачи тесно связаны с материалами теоретических разделов и должны изучаться одновременно с ними. Предполагается, что с приведенными примерами студент знакомится в процессе подготовки к соответствующему практическому занятию, а на самом занятии – уточняет у преподавателя непонятные моменты.

В отдельный раздел каждой главы вынесены задачи для самостоятельного решения. Каждый такой раздел включает от 2 до 5 наборов по 11 однотипных задач. Это облегчает преподавателю составление индивидуальных заданий для каждого студента без опасения, что какая-то тема будет упущена или, напротив, студенты получают одинаковые задачи.

И, наконец, последние разделы глав включают задачи повышенной сложности. Они предназначены для тех студентов, которым физика не представляется всего лишь очередным обязательным курсом, для тех, кто увлечен предметом, для тех, чья хорошая школьная подготовка, достаточные способности и острый ум делают решение стандартных задач слишком простым и поэтому – не слишком интересным занятием. Такие студенты есть на любом потоке, и хотя их немного, они заслуживают и того, чтобы раздел был написан специально для них, и того, чтобы преподаватель уделил им на занятиях или консультациях особое внимание. В КузГТУ такие задачи решают участники факультативного семинара «Нестандартные задачи по физике», работающего уже более тридцати лет.

Автор надеется, что книга облегчит работу над курсом и студентам, и преподавателям.

Успехов вам в трудном, но очень интересном деле изучения и преподавания физики!

Н. Б. Окушко

1. Электрическое поле и его характеристики

1.1. Электрический заряд

Все макроскопические тела способны электризоваться, то есть приобретать электрический заряд. Электрические заряды обладают следующими фундаментальными свойствами.

1. Существует два вида электрических зарядов: **положительные** и **отрицательные**. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются друг к другу.
2. Электрический заряд является релятивистски инвариантным, то есть не зависит от системы отсчета, а следовательно от того, движется заряженное тело или покоится.
3. Электрический заряд дискретен. Это означает, что любой электрический заряд состоит из **целого** числа элементарных зарядов. Электрон и протон являются носителями соответственно отрицательного и положительного элементарных зарядов. В Международной системе единиц (СИ) электрический заряд измеряется в кулонах (Кл). Элементарный электрический заряд равен по модулю $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Электрически изолированной называется система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.

Выполняется закон сохранения электрического заряда.

В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается неизменной.

В системе может происходить электризация тел, могут образовываться новые заряженные частицы, однако сумма зарядов обоих знаков, содержащихся в телах такой системы, всегда неизменна.

1.2. Закон Кулона

Точечным электрическим зарядом называется заряженное тело, размером и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Взаимодействие точечных зарядов описывается законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1.2.1)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; \vec{r}_{12} – радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 (рис. 1.2.1); $r = |\vec{r}_{12}|$; ε – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды.

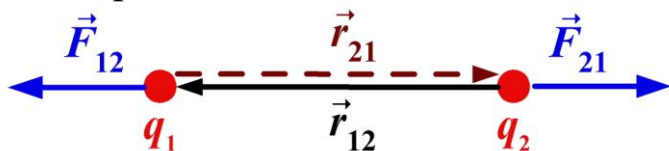


Рисунок 1.2.1

Диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данном веществе

меньше, чем в вакууме. Эта величина не может быть меньше единицы. Коэффициент пропорциональности k зависит от системы единиц. В СИ кулоновский коэффициент $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$. В этой системе единиц его также часто записывают в виде выражения

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \text{ где } \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} - \text{электрическая постоянная.}$$

Электрическая постоянная относится к числу фундаментальных физических величин.

Экспериментально установлено, что сила взаимодействия двух точечных зарядов не зависит от расположения других зарядов. Это дает возможность определения силы взаимодействия протяженных тел с помощью следующих действий:

- каждое заряженное тело рассматривается как совокупность точечных зарядов;
- сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, рассчитывается как векторная сумма сил, приложенных ко всем зарядам второго тела со стороны каждого заряда первого тела.

1.3. Напряженность электрического поля

Рассмотрим действие на точечный заряд q точечных зарядов $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ (рис. 1.3.1). Сила, действующая на заряд q , равна векторной сумме сил, действующих со стороны каждого заряда:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(k \frac{Q_i q \vec{r}_i}{\varepsilon r_i^2} \right) = q \sum_i \left(k \frac{Q_i \vec{r}_i}{\varepsilon r_i^2} \right), \quad (1.3.1)$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор, соединяющий заряд Q_i с зарядом q .

Таким образом, силу, действующую на заряд q в электрическом поле, можно выразить как произведение данного заряда на векторную величину \vec{E} , называемую **напряженностью электрического поля**:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1.3.2)$$

Как видно из уравнений (1.3.1) и (1.3.2), напряженность электрического

поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_i \left(k \frac{Q_i}{\epsilon r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} \right)$ не зависит

от заряда q и определяется лишь величиной и взаимным расположением остальных зарядов и окружающей средой.

Эта величина характеризует *электрическое поле*, созданное в точке расположения заряда q зарядами $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$

Определение.

Напряженностью \vec{E} электрического поля в данной точке называется величина, равная отношению силы, действующей на заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.3.3)$$

Напряженность \vec{E} – силовая характеристика электрического поля. Зная напряженность электрического поля в некоторой точке пространства, сможешь по формуле (1.3.2) рассчитать силу, действующую на произвольный заряд, помещенный в данную точку поля, не обращаясь к распределению зарядов.

Чтобы измерить напряженность электрического поля в некоторой точке, надо поместить в эту точку пробный неподвижный электрический заряд q , измерить силу, действующую на этот заряд, и воспользоваться формулой (1.3.3). При этом нужно убедиться, что появление пробного заряда q не изменит положения остальных зарядов. Направление вектора напряженности совпадает с направлением силы, действующей на *положительный* заряд, помещенный в данную точку поля. Размерность напряженности $[\vec{E}] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

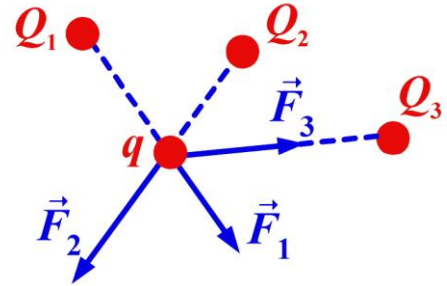


Рисунок 1.3.1

Из формул (1.2.1) и (1.3.3) несложно получить выражение для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.3.4)$$

где Q – заряд, создающий поле; \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий заряд с данной точкой поля.

Напряженность поля направлена *от* заряда, создающего поле, если этот заряд положителен, и *к* заряду, если он отрицателен.

Из формулы $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ и определения напряженности (1.3.3)

следует, что

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (1.3.5)$$

Уравнение (1.3.5) выражает принцип суперпозиции электрических полей (принцип независимости электрических полей).

Напряженность электрического поля, создаваемого системой точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

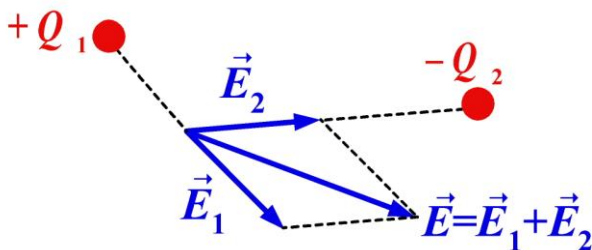


Рисунок 1.3.2

Использование принципа суперпозиции для расчета напряженности поля, созданного двумя зарядами, показано на рис. 1.3.2.

Пользуясь принципом суперпозиции, можно рассчитать и напряженность поля, созданного заряженными телами произвольной формы. Для этого достаточно представить каждое из тел как совокупность точечных зарядов и выполнить векторное суммирование полей, созданных этими точечными зарядами:

$$\vec{E} = \sum_i \left(k \frac{Q_i}{\epsilon r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} \right). \quad (1.3.6)$$

При непрерывном распределении зарядов суммирование (1.3.6) заменяется интегрированием:

$$\vec{E} = k \int_{(Q)} \frac{dQ \vec{r}}{\epsilon r^2 r}. \quad (1.3.7)$$

Рассматривая непрерывное распределение зарядов, удобно ввести понятие плотности зарядов: объемной ρ , поверхностной σ или линейной τ . По определению

$$\rho = dQ / dV; \quad (1.3.8)$$

$$\sigma = dQ / dS; \quad (1.3.9)$$

$$\tau = dQ / dl, \quad (1.3.10)$$

где dQ – заряд, заключенный соответственно в объеме dV , на поверхности dS или на длине dl . Примеры использования этих величин для расчета напряженности электрического поля, созданного различными системами зарядов, приведены в разделе 1.7. «Примеры решения задач».

1.4. Вектор смещения

Еще одной характеристикой электрического поля является вектор смещения \vec{D} , отличающийся от вектора напряженности электрического поля лишь множителем $\epsilon_0 \epsilon$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (1.4.1)$$

Из формул (1.4.1) и (1.3.4) следует выражение для вектора смещения, создаваемого точечным зарядом:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot k \frac{Q \vec{r}}{\epsilon r^2 r} = \frac{Q \vec{r}}{4\pi r^2 r}. \quad (1.4.2)$$

Нетрудно заметить, что для вектора смещения выполняется принцип суперпозиции:

$$\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i. \quad (1.4.3)$$

Следует обратить внимание на то, что, в отличие от вектора напряженности электрического поля \vec{E} , вектор смещения \vec{D} не зависит от диэлектрической проницаемости среды. Вектор \vec{D} , следовательно, не является силовой характеристикой электрического поля, его величина и направление полностью определяются конфигурацией зарядов, создающих поле.

На практике часто рассчитывают сначала вектор смещения, а затем, используя формулу (1.4.1), – напряженность электрического поля.

1.5*. Движение зарядов в электрических полях различной конфигурации

Знание напряженности электрического поля в любой точке пространства позволяет определить силу, действующую на электрический заряд, и ускорение заряда в каждой точке, а затем записать кинематические уравнения движения заряда и решить их. Рассмотрим два частных случая.

Движение в однородном электрическом поле

Электрическое поле, в котором напряженность одинакова по модулю и направлению в любой точке пространства, называется *однородным электрическим полем*. Приблизительно однородным является, например, поле внутри плоского конденсатора.

При движении в однородном электрическом поле на точечный заряд действует постоянная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, соответственно ускорение заряда $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$, где m – масса тела, несущего заряд. Тогда уравнение движения тела записывается как

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{q\vec{E}}{m} \cdot \frac{t^2}{2}, \quad (1.5.1)$$

или в проекциях:

$$x = x_0 + \vec{v}_{0x} t + \frac{qE_x}{m} \cdot \frac{t^2}{2}; \quad (1.5.2)$$

$$y = y_0 + \vec{v}_{0y} t + \frac{qE_y}{m} \cdot \frac{t^2}{2}; \quad (1.5.3)$$

$$z = z_0 + \vec{v}_{0z} t + \frac{qE_z}{m} \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (1.5.4)$$

При решении этих уравнений можно найти координаты заряженного тела в любой момент времени, а следовательно и его скорость в зависимости от времени. Этими уравнениями, в частности, описывается движение заряженной частицы в плоском конденсаторе.

*Движение заряда по окружности
в центральном кулоновском поле*

Другой важный частный случай – движение по окружности в кулоновском поле. Такое движение возникает при движении легкой заряженной частицы массой m , несущей заряд q , в поле значительно более тяжелого противоположного по знаку точечного заряда (ввиду большой массы этот заряд можно считать неподвижным). Сила, необходимая для удержания заряда на круговой орбите,

$F = \frac{mv^2}{r}$. Но эта сила обеспечивается кулоновским взаимодействием зарядов и определяется формулой $F = k \frac{|qQ|}{r^2}$. То есть

$k \frac{|qQ|}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, или $k \frac{|qQ|}{r} = mv^2$. Последняя формула связывает радиус частицы с ее скоростью и используется, например, при расчетах электронных орбит водородоподобных ионов и энергий электронов на этих орбитах.

1.6. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

- 1.6.1.** Экспериментатор утверждает, что заряд некоторого тела составляет $2 \cdot 10^{-19}$ Кл. Прав ли он?
- 1.6.2.** Сформулируйте закон Кулона.
- 1.6.3.** Как изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов, если расстояние между зарядами увеличить вдвое?
- 1.6.4.** Как взаимодействуют одноименные электрические заряды? Разноименные заряды?
- 1.6.5.** Что такое напряженность электрического поля?
- 1.6.6.** Пользуясь определением вектора напряженности, предложите метод ее измерения.
- 1.6.7.** Сформулируйте принцип суперпозиции для напряженности электрического поля.
- 1.6.8.** Что показывает диэлектрическая проницаемость вещества?
- 1.6.9.** Сила взаимодействия двух точечных зарядов была измерена сначала на воздухе, а затем в масле с диэлектрической проницаемостью, равной 2. При этом расстояние между зарядами не

изменялось. В каком случае получено более высокое значение? Во сколько раз?

1.6.10. Как связан с напряженностью вектор смещения?

1.6.11. Зависит ли напряженность электрического поля от вещества, в котором измеряется это поле? Если да, то как?

1.6.12. Зависит ли вектор смещения электрического поля от вещества, в котором измеряется это поле? Если да, то как?

1.6.13. Сформулируйте принцип суперпозиции для вектора смещения.

1.6.14. Электрическое поле создано двумя равными по модулю и знаку зарядами $+Q$, расположенными так, как показано на рис. 1.6.1. Укажите направление напряженности электрического поля в точках A, B, C, D .

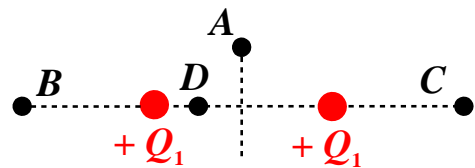


Рисунок 1.6.1

1.6.15. Электрическое поле создано двумя равными по модулю и противоположными по знаку зарядами $+Q$ и $-Q$, расположенными так, как показано на рис. 1.6.2. Укажите направление напряженности электрического поля в точках A, B, C, D .

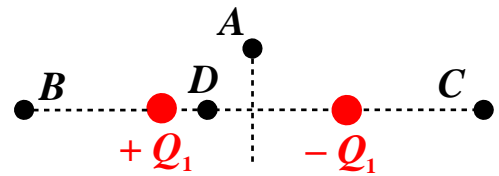


Рисунок 1.6.2

1.6.16. Электрическое поле создано зарядами Q_1 и Q_2 . Напряженность электрического поля в точке A направлена так, как показано на рис. 1.6.3. Определите знаки зарядов. Какой из зарядов больше по модулю?

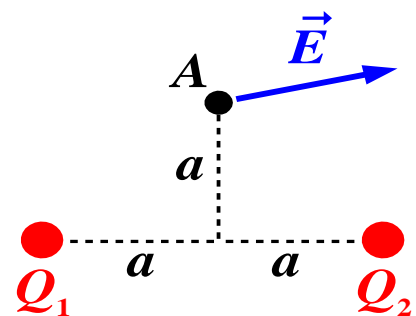


Рисунок 1.6.3

1.6.17. Прямолинейный отрезок равномерно положительно заряжен по длине ($\tau = \text{const}$). Укажите направление напряженности электрического поля в точках A и B (рис. 1.6.4).

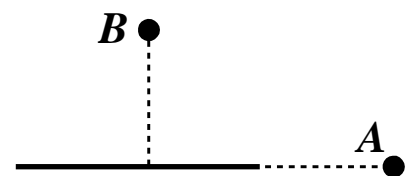


Рисунок 1.6.4

1.6.18. Во сколько раз нужно изменить расстояние между двумя взаимодействующими заряженными телами, чтобы сила этого взаимодействия не изменилась при погружении зарядов из вакуума в дистиллированную воду, диэлектрическая проницаемость которой равна 81?

1.7. Примеры решения задач

Пример 1.7.1. В углах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см расположены заряды $Q_1 = Q_2 = Q = 1$ мкКл и заряд $Q_3 = -Q = -1$ мкКл. Определите величину и направление силы, действующей на каждый заряд.

Решение. Силы, действующие на каждый из зарядов, показаны на рис. 1.7.1. Сила \vec{F}_1 , действующая на заряд Q_1 , равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны зарядов Q_2 и Q_3 соответственно: $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$. Аналогично определяются силы, действующие на заряды Q_2 и Q_3 : $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$, $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$.

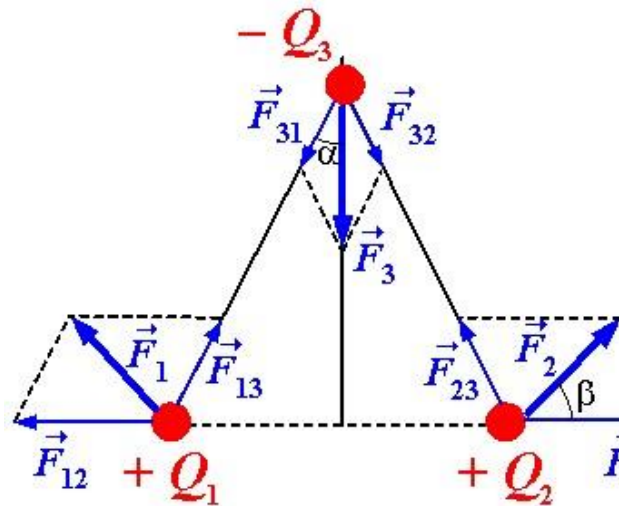


Рисунок 1.7.1

Модули сил \vec{F}_{ik} ($i, k = 1, 2, 3; i \neq k$) равны и определяются законом Кулона: $|\vec{F}_{ik}| = k \frac{Q^2}{a^2}$. Выполняя векторное сложение и учитывая, что $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$, находим модули искомых сил:

$$F_1 = F_2 = 2|\vec{F}_{ik}| \cos \beta = k \frac{Q^2}{a^2} = 0,9 \text{ Н};$$

$$F_3 = 2|\vec{F}_{ik}| \cos \alpha = k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{3} = 1,55 \text{ Н}.$$

Направления сил показаны на рис. 1.7.1.

Пример 1.7.2. Два одинаковых шарика, заряженные равными зарядами и подвешенные в одной точке на нитях одинаковой длины, опускают в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$ и плотностью $\rho_0 = 900$ кг/м³. Какова плотность ρ вещества

шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и диэлектрике оказался одним и тем же? Как изменится угол между нитями, если в точку подвеса шариков поместить третий шарик, несущий такой же заряд?

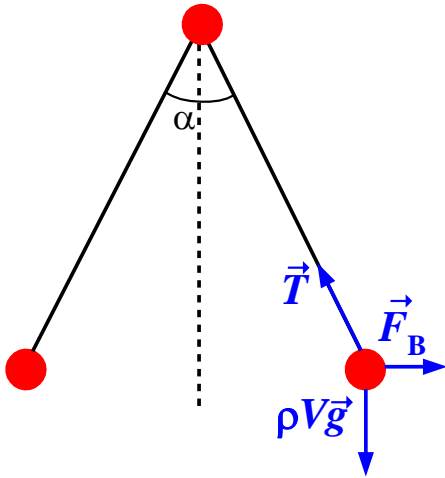


Рисунок 1.7.2

Решение. Когда шарики находятся в воздухе, на каждый шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g} = \rho V\vec{g}$, кулоновская сила отталкивания в воздухе \vec{F}_B и сила натяжения нити \vec{T} . Архимедовой силой, действующей на шарики со стороны воздуха, можно пренебречь ввиду низкой плотности воздуха. Так как шарики находятся в равновесии, векторная сумма этих сил равна нулю: $\vec{T} + \rho V\vec{g} + \vec{F}_B = 0$, откуда

следует, что векторная сумма сил $\rho V\vec{g}$ и \vec{F}_B направлена вдоль нити противоположно силе \vec{T} (рис. 1.7.2). Следовательно,

$$\frac{F_B}{\rho Vg} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (1.7.1)$$

где α – угол расхождения нитей.

В диэлектрике следует учитывать уже четыре силы: силу тяжести $\rho V\vec{g}$, силу кулоновского отталкивания шариков

$$\vec{F}_D = \frac{\vec{F}_B}{\epsilon}, \quad (1.7.2)$$

архимедову силу, направленную вверх и равную весу вытесненной жидкости $F_A = -\rho_0 V\vec{g}$, и силу натяжения нити \vec{T}' . Как и в предыдущем случае, векторная сумма всех сил, действующих на шарик, равна нулю: $\vec{T}' + \rho V\vec{g} - \rho_0 V\vec{g} + \vec{F}_D = 0$ и

$$\frac{F_D}{\rho Vg - \rho_0 Vg} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (1.7.3)$$

Поскольку правые части равенств (1.7.1) и (1.7.3) равны, равны и левые их части: $\frac{F_D}{(\rho - \rho_0)Vg} = \frac{F_B}{\rho Vg}$. Учитывая соотношение (1.7.2),

получаем $\frac{1}{\varepsilon(\rho - \rho_0)} = \frac{1}{\rho}$. Отсюда находим искомую плотность шариков:

$$\rho = \frac{\rho_0 \varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{900 \cdot 2}{2 - 1} = 1800 \text{ кг/м}^3.$$

Если в точку подвеса поместить третий шарик, ответ задачи не изменится, поскольку сила взаимодействия этого шарика с любым из остальных направлена вдоль нити и не может изменить угол между нитями.

Пример 1.7.3. Заряды Q и $9Q$ расположены на расстоянии $L = 1$ м друг от друга. В какой точке напряженность электрического поля такой системы зарядов равна нулю?

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность электрического поля в любой точке определяется формулой $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{9Q}$. Здесь \vec{E}_Q и \vec{E}_{9Q} – напряженности полей, создаваемых зарядами Q и $9Q$ соответственно. Для того чтобы вектор напряженности был равен нулю, необходимо, чтобы векторы \vec{E}_Q и \vec{E}_{9Q} были равны по модулю и антипараллельны. Точка O , в которой может выполняться данное условие, расположена на отрезке, соединяющем заряды. Действительно, лишь на этом отрезке напряженности \vec{E}_Q и \vec{E}_{9Q} направлены противоположно друг другу. В остальных точках (рис. 1.7.3) эти напряженности либо направлены параллельно (точки A и B), либо не лежат на одной прямой (точка C). Пусть расстояние от заряда Q до точки O равно x . Тогда модули напряженностей, создаваемых зарядами, равны, соответственно,

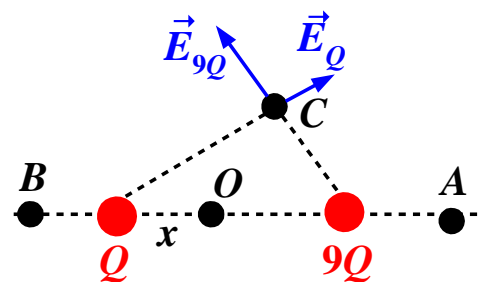


Рисунок 1.7.3

$E_Q = k \frac{Q}{x^2}$,

$E_{9Q} = k \frac{9Q}{(L-x)^2}$, и положение точки O определяется равенством

$k \frac{Q}{x^2} = k \frac{9Q}{(L-x)^2}$. Данное уравнение имеет два решения:

$x = \frac{L}{4} = 0,25$ см и $x = -\frac{L}{2}$. Последнее решение, очевидно, не имеет смысла, так как знак минус означает, что точка расположена по дру-

гую сторону от заряда Q , то есть в области, где напряженность заведомо не равна нулю. Таким образом, остается лишь одна точка:

$$x = \frac{L}{4}.$$

Пример 1.7.4. Два равных по величине заряда $Q_1 = Q_2 = +Q$ расположены в противоположных углах квадрата. Какой заряд Q_3 надо поместить в третий угол квадрата, чтобы напряженность в четвертом углу была равна нулю?

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$, где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ – напряженности полей, создаваемых зарядами Q_1, Q_2, Q_3 (рис. 1.7.4). Поскольку напряженности \vec{E}_1, \vec{E}_2 направлены от зарядов Q_1, Q_2 , сумма этих векторов \vec{E}_{12} направлена вдоль линии диагонали квадрата от центра.

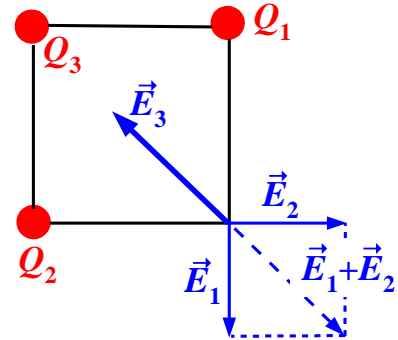


Рисунок 1.7.4

Поэтому для равенства нулю вектора \vec{E} необходимо, чтобы напряженность поля \vec{E}_3 , создаваемого третьим зарядом, была направлена к центру, то есть внутрь квадрата. Это возможно лишь, если заряд Q_3 будет отрицательным и $|\vec{E}_3| = |\vec{E}_{12}|$, где $|\vec{E}_{12}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Если сторона квадрата равна a , то $E_1 = E_2 = k \frac{Q}{a^2}$, $|\vec{E}_{12}| = 2k \frac{Q}{a^2} \cos \frac{\pi}{4}$, $|\vec{E}_3| = k \frac{Q_3}{2a^2}$. От-

сюда находим $Q_3 = -4Q \cos \frac{\pi}{4} = -2Q\sqrt{2} = -2,82 Q$. Заметим, что полученный результат не зависит от длины стороны квадрата.

Пример 1.7.5. Треть кольца радиусом $R = 0,1$ м несет положительный заряд $q = 0,5$ нКл, равномерно распределенный по длине. Определите напряженность электрического поля в центре кольца на воздухе.

Решение. Линейная плотность заряда $\tau = q/l = 3q/2\pi R$. Воспользуемся приемом, описанным в разделе 1.3: разобьем заряженный участок на ма-

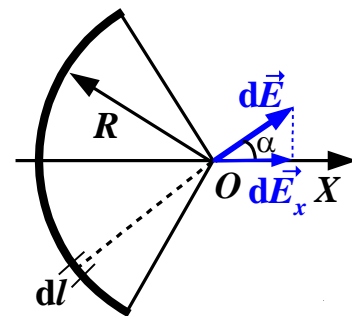


Рисунок 1.7.5

лые элементы длиной dl , такие, чтобы каждый из элементов можно было считать точечным зарядом (рис. 1.7.5). Заряд такого элемента $dq = \tau dl = \tau R d\alpha$ (в последнем равенстве учтено, что угол $d\alpha = dl/R$). Напряженность электрического поля, создаваемого этим элементом в центре (точка O), направлена от элемента и равна $d\vec{E} = k \frac{dq \vec{r}}{r^2}$. Поскольку модуль радиус-вектора r равен радиусу кольца R , модуль вектора $dE = k \frac{\tau R d\alpha}{R^2} = k \frac{\tau d\alpha}{R}$. Проецируя этот вектор на оси X и Y , получаем

$$dE_x = k \frac{\tau d\alpha}{R^2} \cos \alpha, \quad dE_y = k \frac{\tau d\alpha}{R} \sin \alpha.$$

Интегрируя оба выражения, получаем

$$E_x = \int dE_x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} k \frac{\tau d\alpha}{R} \cos \alpha = k \frac{\tau}{R} [\sin \frac{\pi}{3} - \sin(-\frac{\pi}{3})] =$$

$$= k \frac{\tau}{R} \sqrt{3} = k \frac{3q}{2\pi R^2} \sqrt{3} \approx 372 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}};$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} k \frac{\tau d\alpha}{R} \sin \alpha = k \frac{\tau}{R} [\cos \frac{\pi}{3} - \cos(-\frac{\pi}{3})] = 0.$$

Таким образом, искомая напряженность электрического поля направлена вдоль оси X и равна 372 Н/Кл .

Направление вектора напряженности электрического поля можно было бы предсказать и до выполнения вычислений. Действительно, каждому элементу dl можно сопоставить симметричный относительно оси X элемент dl' ; векторная сумма напряженностей полей, создаваемых этими элементами в точке O , направлена вдоль оси X . Поэтому и результирующая напряженность, получаемая при суммировании (интегрировании) полей, создаваемых всеми элементами, также направлена вдоль оси X .

Пример 1.7.6. Тонкий стержень длиной $l = 0,2 \text{ м}$ равномерно заряжен зарядом $Q = -3 \text{ нКл}$. Определите напряженность электрического

поля в точке C , находящейся на продолжении стержня на расстоянии $b = 20$ см от его середины (рис. 1.7.6).

Решение. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем стержень на элементарные участки длиной dl . Заряд каждого такого участка равен $dQ = \tau dl = (Q/l)dl$. Напря-

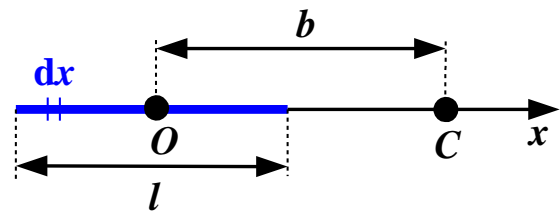


Рисунок 1.7.6

женность электрического поля, созданного этим участком, направлена к стержню (ввиду отрицательности заряда Q) и равна по модулю $dE = k \frac{|dq|}{r^2} = k \frac{Q}{l} \frac{dl}{r^2}$. Учитывая, что $dl = dr$ и все векторы напряженности направлены одинаково, получаем выражение для модуля результирующего вектора напряженности:

$$E = \int_{b-1/2}^{b+1/2} k \frac{Q}{l} \frac{dr}{r^2} = k \frac{Q}{l} \left(\frac{1}{b-1/2} - \frac{1}{b+1/2} \right) = k \frac{Q}{(b-1/2)(b+1/2)}.$$

Подставляя численные данные, получаем $E = 900$ Н/Кл.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Для решения задач 1.8.1.1–1.8.1.11 достаточно знать закон Кулона и помнить о векторном характере сил, в частности о том, что сложение сил выполняется по правилу параллелограмма.

1.8.1.1. В углах правильного шестиугольника расположены шесть равных по величине и знаку зарядов Q . Какой заряд надо поместить в центр шестиугольника, чтобы вся система находилась в равновесии?

1.8.1.2. В углах правильного шестиугольника со стороной a расположены шесть равных по величине и знаку зарядов Q . Определите силу, действующую на один из зарядов со стороны всех остальных.

1.8.1.3. В углах квадрата расположены четыре равных по величине и знаку заряда Q . Какой заряд надо поместить в центр квадрата, чтобы вся система находилась в равновесии?

1.8.1.4. В углах квадрата со стороной a расположены четыре равных по величине и знаку заряда Q . Определите силу, действующую на один из зарядов со стороны всех остальных.

- 1.8.1.5.** Два точечных заряда $+16$ нКл и $+64$ нКл находятся на расстоянии $0,12$ м друг от друга в вакууме. На каком конечном расстоянии от меньшего заряда следует поместить третий заряд, равный 8 нКл, чтобы он под действием электрических сил оставался в равновесии?
- 1.8.1.6.** В двух углах при гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным 10 см, находятся заряды 3 нКл и 6 нКл, в третьем углу – заряд 4 нКл. Определите силу, действующую на заряд 5 нКл, помещенный посередине гипотенузы.
- 1.8.1.7.** Два шарика одинакового радиуса массой 5 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной 10 см. Какой заряд надо сообщить шарикам, чтобы натяжение нитей стало равным $0,098$ Н?
- 1.8.1.8.** Два шарика одинакового радиуса массой 5 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной 10 см. Определите заряды шариков, если известно, что один заряд втрое больше другого, а угол между нитями составляет 60° .
- 1.8.1.9.** Какой угол с вертикалью составляет нить, на которой висит шарик массой $0,25$ г, помещенный в горизонтальное электрическое поле напряженностью 5000 В/м, если заряд шарика $5 \cdot 10^{-7}$ Кл?
- 1.8.1.10.** При внесении заряженного металлического шарика на изолирующей нити в однородное горизонтальное электрическое поле нить образовала с вертикалью угол 45° . Каким станет угол после стекания с шарика 10% его заряда?
- 1.8.1.11.** В вершинах при острых углах ромба со стороной $a = 0,1$ м, составленного из правильных треугольников, находятся равные заряды $q = 10$ нКл. В вершине при одном из тупых углов помещен заряд $Q = 30$ нКл. Определите силу, действующую на заряд $q_{\text{пр}} = 1$ нКл, помещенный в четвертую вершину.

Задачи 1.8.2.1–1.8.2.11 имеют одно и то же условие; различаются лишь значения зарядов и расстояния между ними. Обратите внимание на знаки зарядов!

Условие. Заряды Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии b друг от друга. Где находится точка, напряженность электрического поля в которой равна нулю?

1.8.2.1. $Q_1 = 4$ мкКл, $Q_2 = 25$ мкКл, $b = 0,7$ м.

1.8.2.2. $Q_1 = 4$ мкКл, $Q_2 = -25$ мкКл, $b = 0,5$ м.

1.8.2.3. $Q_1 = 9$ мкКл, $Q_2 = 25$ мкКл, $b = 0,16$ м.

1.8.2.4. $Q_1 = -9$ мкКл, $Q_2 = 25$ мкКл, $b = 0,2$ м.

1.8.2.5. $Q_1 = 4$ мкКл, $Q_2 = 16$ мкКл, $b = 0,6$ м.

1.8.2.6. $Q_1 = 4$ мкКл, $Q_2 = -16$ мкКл, $b = 0,4$ м.

1.8.2.7. $Q_1 = 9$ мкКл, $Q_2 = 16$ мкКл, $b = 0,7$ м.

1.8.2.8. $Q_1 = -9$ мкКл, $Q_2 = 16$ мкКл, $b = 0,4$ м.

1.8.2.9. $Q_1 = 16$ мкКл, $Q_2 = 1$ мкКл, $b = 0,5$ м.

1.8.2.10. $Q_1 = 16$ мкКл, $Q_2 = -1$ мкКл, $b = 0,3$ м.

1.8.2.11. $Q_1 = 25$ мкКл, $Q_2 = 16$ мкКл, $b = 0,18$ м.

При решении задач 1.8.3.1–1.8.3.11 следует воспользоваться методами, приведенными в примерах 1.7.5–1.7.6, и (или) принципом суперпозиции.

1.8.3.1. Тонкий стержень длиной 20 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью 1 мкКл/м. Определите напряженность электрического поля в точке A , лежащей на стержне на расстоянии 5 см от его конца.

1.8.3.2. Три стороны квадрата равномерно заряжены по длине с одинаковой плотностью заряда. При этом напряженность электрического поля в центре квадрата составляет 100 В/м. Как изменится величина и направление электрического поля в центре квадрата, если оставить заряженными только две соседние стороны?

1.8.3.3. Две стороны равностороннего треугольника равномерно заряжены по длине с одинаковой плотностью заряда τ . Какую плотность заряда должна иметь третья сторона, чтобы напряженность электрического поля в центре треугольника удвоилась?

1.8.3.4. По тонкому полукольцу радиусом 0,1 м равномерно распределен заряд с линейной плотностью 0,2 мкКл/м. Определите напряженность электрического поля в точке O , совпадающей с центром кольца.

1.8.3.5. Тонкая нить согнута в виде фигуры, представленной на рис. 1.8.1, и заряжена с линейной плотностью заряда τ . Определите напряженность электрического поля в точке O . Радиусы R_1 и R_2 заданы.

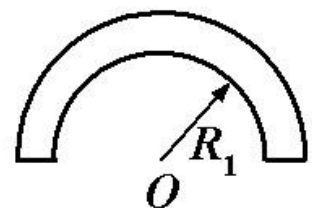


Рисунок 1.8.1

1.8.3.6. Электрическое поле создано тонким стержнем, согнутым так, как показано на рис. 1.8.2, и равномерно заряженным с линейной плотностью заряда τ . Определите напряженность электрического поля в точке O . Радиус R задан.

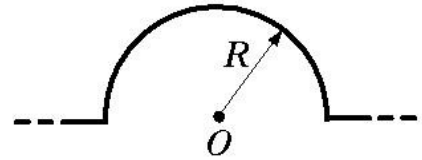


Рисунок 1.8.2

1.8.3.7. Электрическое поле создано тонким стержнем, согнутым так, как показано на рис. 1.8.3, и равномерно заряженным с линейной плотностью заряда τ . Определите напряженность электрического поля в точке O . Радиус R задан.

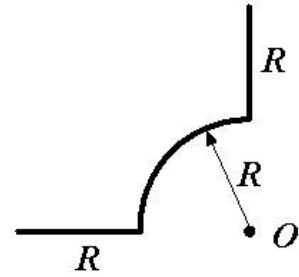


Рисунок 1.8.3

1.8.3.8. Четыре последовательных стороны правильного шестиугольника равномерно заряжены по длине с линейной плотностью заряда τ . При этом в центре шестиугольника создается электрическое поле напряженностью E . Какой должна быть линейная плотность заряда, который нужно сообщить двум оставшимся сторонам, чтобы напряженность электрического поля в центре удвоилась?

1.8.3.9. Четыре последовательных стороны правильного шестиугольника равномерно заряжены по длине с линейной плотностью заряда τ . При этом в центре шестиугольника создается электрическое поле напряженностью E . Какой должна быть линейная плотность заряда, который нужно сообщить двум оставшимся сторонам, чтобы напряженность электрического поля в центре утроилась?

1.8.3.10. Тонкое кольцо несет равномерно распределенный заряд $Q = 0,2$ мкКл. Определите напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 20 см. Радиус кольца равен 10 см.

1.8.3.11. Четыре последовательных стороны правильного шестиугольника равномерно заряжены по длине с линейной плотностью заряда τ . При этом в центре шестиугольника создается электрическое поле напряженностью E . Какой должна быть линейная плотность заряда, который нужно сообщить двум ос-

тавшимся сторонам, чтобы напряженность электрического поля в центре уменьшилась в два раза?

1.9. Задачи повышенной сложности

- 1.9.1.** Пользуясь выражением для напряженности электрического поля точечного заряда и принципом суперпозиции, рассчитайте напряженность электрического поля, созданного бесконечной равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда τ на расстоянии b от этой нити.
- 1.9.2.** Определите величину и направление напряженности электрического поля, создаваемого тонким прямолинейным стержнем в точке A , не лежащей на продолжении стержня, если кратчайшее расстояние от прямой, на которой лежит стержень, до точки A равно b , а углы между стержнем и отрезками, проведенными из точки A к концам стержня, равны соответственно α_1 и α_2 .
- 1.9.3.** Определите напряженность электрического поля, созданного в точке O конфигурациями линейных зарядов, показанных на рис. 1.9.1 и 1.9.2. Линейную плотность заряда τ , все геометрические параметры, заданные на рисунке, считать известными.

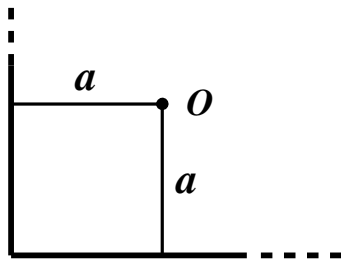


Рисунок 1.9.1

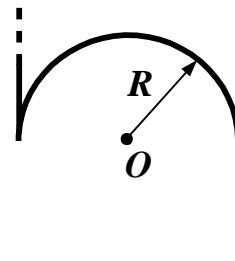


Рисунок 1.9.2

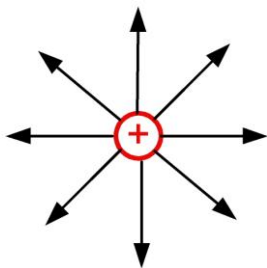
- 1.9.4.** Определите напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным диском радиусом R в точке, находящейся на оси диска на расстоянии h от его центра. Найдите предельные значения напряженности при $h \gg R$ и $h \ll R$. Поверхностная плотность заряда диска равна σ .
- 1.9.5.** Электрическое поле создается равномерно заряженной полусферой радиусом R . Определите напряженность электрического поля в центре сферы, если поверхностная плотность заряда равна σ .

2. Теорема Гаусса

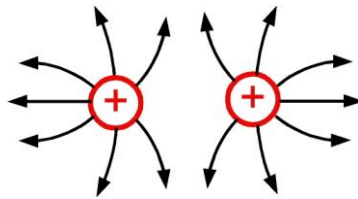
2.1. Силовые линии и линии смещения

Электрическое поле можно изобразить графически. Для этого используют линии напряженности (силовые линии). Эти линии проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора напряженности \vec{E} , а густота линий, то есть число линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данной точке, была равна модулю вектора \vec{E} .

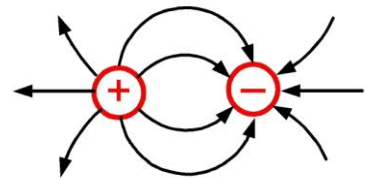
Линиям напряженности приписывают направление, совпадающее с направлением вектора \vec{E} . По полученной картине можно судить о величине и направлении электрического поля в различных точках пространства. На рис. 2.1.1 показаны силовые линии полей, создаваемых различными конфигурациями зарядов.



Положительный
точечный заряд



Два равных
положительных заряда



Два равных заряда
противоположного знака

Рисунок 2.1.1

Аналогичным образом можно провести и линии смещения, касательная к которым совпадает с направлением вектора смещения \vec{D} , а густота равна численному значению этого вектора.

2.2. Поток вектора напряженности. Поток вектора смещения

Потоком dN_E вектора напряженности электрического поля \vec{E} через элементарную площадку dS называется величина

$$dN_E = E_n dS = E dS \cos \alpha, \quad (2.2.1)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS ; α – угол между векторами \vec{E} и \vec{n} .

Следует отметить, что поток вектора напряженности зависит не только от конфигурации электрического поля, но и от направления вектора \vec{n} . Знак потока вектора \vec{E} определяется углом α :

$$dN_E > 0, \text{ если } 0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2};$$

$$dN_E < 0, \text{ если } \frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi;$$

$$dN_E = 0, \text{ если } \alpha = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим элементарную площадку dS , направленную произвольно по отношению к вектору \vec{E} (рис. 2.2.1). Число линий напряженности, пересекающих эту площадку, равно

$$EdS_n = EdS \cos \alpha = E_n dS = dN_E.$$

Таким образом, поток вектора напряженности через площадку dS равен по модулю количеству силовых линий, пересекающих эту площадку.

Поток вектора напряженности через произвольную (не элементарную) поверхность равен сумме потоков через элементарные площадки, составляющие эту поверхность. Эта сумма выражается интегралом:

$$N_E = \int_S E_n dS. \quad (2.2.2)$$

Если поверхность замкнута, интеграл записывается особым образом:

$$N_E = \oint_S E_n dS. \quad (2.2.3)$$

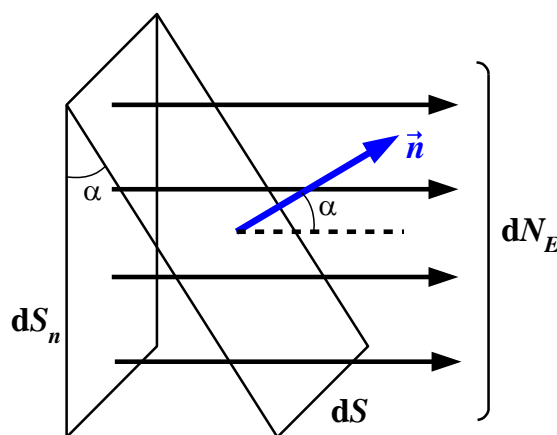


Рисунок 2.2.1

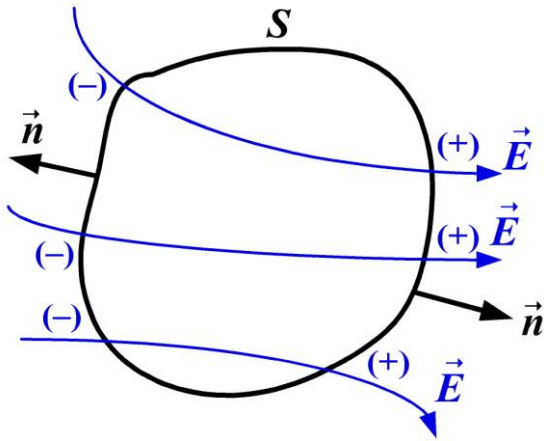


Рисунок 2.2.2

Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль (рис. 2.2.2). При расчете потока вектора напряженности через замкнутую поверхность силовые линии, выходящие из поверхности, суммируются со знаком плюс, а линии, входящие в поверхность, – со знаком минус.

Аналогично потоку вектора напряженности можно ввести и поток вектора смещения \vec{D} как через элементарную поверхность dS :

$$dN_D = D_n dS, \quad (2.2.4)$$

так и через замкнутую поверхность:

$$N_D = \oint_S D_n dS. \quad (2.2.5)$$

Поток вектора смещения через замкнутую поверхность равен числу линий смещения, пересекающих эту поверхность. Как и в случае потока вектора напряженности, линии смещения, выходящие из поверхности, суммируются со знаком плюс, а линии, входящие в поверхность, – со знаком минус.

2.3. Теорема Гаусса

Поток вектора смещения обладает замечательным свойством, выражаемым теоремой Гаусса.

Поток вектора смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала поток вектора смещения, создаваемого точечным зарядом Q , через сферическую поверхность радиусом r , центр которой совпадает с зарядом (рис. 2.3.1).

Линии смещения, пересекающие эту сферу, перпендикулярны ее поверхности, а величина вектора \vec{D} в любой точке определяется

формулой (1.4.2). Поэтому поток вектора смещения через указанную сферу равен

$$N_D = \oint_S D_n dS = DS = D \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = Q. \quad (2.3.1)$$

Отметим, что полученный результат не зависит от r и поэтому справедлив для всех значений радиуса сферы. Таким образом, число линий смещения, пересекающих сферические поверхности радиусами r_1, r_2, r_3, \dots , одинаково.

Отсюда следует, что линии смещения не могут начинаться или заканчиваться вне заряда Q , поэтому число линий, пересекающих произвольную поверхность S , окружающую точечный заряд, также равно Q (рис. 2.3.2).

Более того, результат не изменится даже в случае «морщинистой» поверхности, которую одна линия смещения может пересечь несколько раз (рис. 2.3.3). Действительно, если линия смещения выходит из поверхности, то пересечение суммируется со знаком плюс, если входит в поверхность – со знаком минус.

Нечетное число пересечений при вычислении потока сводится в конце концов к одному пересечению. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то число линий смещения, входящих в поверхность и выходящих из нее, одинаково и поток вектора смещения равен нулю.

Предположим теперь, что замкнутая поверхность охватывает несколько зарядов: Q_1, Q_2, Q_3, \dots . Поток вектора смещения через такую поверхность равен

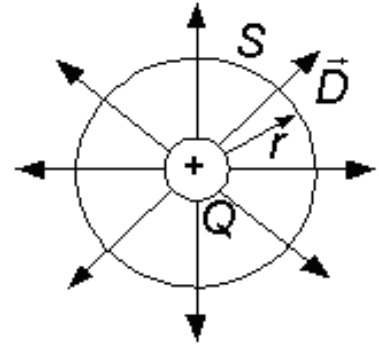


Рисунок 2.3.1

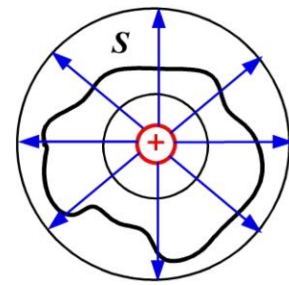


Рисунок 2.3.2

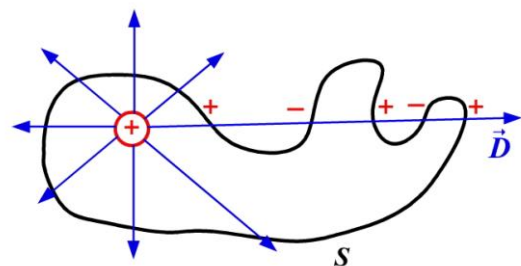


Рисунок 2.3.3

$$N_D = \oint_S D_n dS = \oint_S \left(\sum_i \vec{D}_i \right)_n dS = \sum_i \oint_S D_{in} dS = \sum_i Q_i, \quad (2.3.2)$$

где \vec{D}_i – вектор смещения поля, созданного зарядом Q_i .

Но это и есть выраженное в математической форме утверждение теоремы Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = \sum_i Q_i. \quad (2.3.3)$$

Подчеркнем еще раз, что в правой части формулы стоит сумма зарядов, находящихся *внутри* поверхности S , по которой выполняется интегрирование.

Если заряды распределены непрерывно с объемной плотностью ρ , зависящей от координат, то каждый элемент объема dV , заключенного внутри замкнутой поверхности S , имеет заряд $dQ = \rho dV$. Тогда в правой части формулы (2.3.3) $\sum_i Q_i = \int_V \rho dV$ и теорема Гаусса

записывается в форме

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV, \quad (2.3.4)$$

где интегрирование производится по объему V , заключенному внутри замкнутой поверхности S .

Учитывая, $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$, можно сформулировать теорему Гаусса и для вектора напряженности электрического поля в вакууме или в однородной изотропной среде.

Поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на $\epsilon\epsilon_0$.

Математически это утверждение описывается равенством

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (2.3.5)$$

или в случае непрерывного распределения зарядов:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.3.6)$$

Следует еще раз обратить внимание на то, что, хотя сами векторы \vec{E} и \vec{D} зависят от величины и расположения всех зарядов, поток любого из этих векторов через произвольную замкнутую поверхность S зависит лишь от зарядов, находящихся *внутри* этой поверхности. При перемещении зарядов векторы \vec{E} и \vec{D} изменятся везде, но если передвижение зарядов произойдет без пересечения поверхности S , поток каждого из этих векторов через данную поверхность останется неизменным.

2.4. Примеры применения теоремы Гаусса

При помощи теоремы Гаусса можно в ряде случаев довольно просто рассчитать напряженность и вектор смещения для полей, создаваемых симметрично распределенными зарядами, не прибегая к сложному интегрированию. К сожалению, набор таких случаев ограничивается распределениями зарядов, имеющими сферическую, цилиндрическую или плоскую симметрию. Поверхность интегрирования (ее называют гауссовой поверхностью) при этом выбирают таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- поверхность должна проходить через точку, в которой необходимо определить напряженность или вектор смещения;
- поток вектора напряженности или вектора смещения можно легко рассчитать, пользуясь симметрией задачи.

Поясним сказанное несколькими примерами.

Электрическое поле равномерно заряженного шара

Рассмотрим шар радиусом R , равномерно заряженный с объемной плотностью заряда ρ . Диэлектрическая проницаемость материала, из которого изготовлен шар, равна ϵ , шар находится в вакууме. Поле такого шара обладает центральной симметрией: вектор \vec{E} в любой точке направлен радиально (от центра шара, если заряд шара положителен, к центру – если отрицателен), а величина напряженности зависит только от расстояния r до центра шара.

Чтобы найти напряженность электрического поля в точке A , находящейся на расстоянии r от центра, проведем мысленно через эту точку сферу, центр которой совпадает с центром заряженного шара, и применим к этой поверхности теорему Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV.$$

Во всех точках этой сферы вектор \vec{D} перпендикулярен ее поверхности ($|D| = D_n$) и имеет постоянную величину. Следовательно,

$$\oint_S D_n dS = \oint_S D dS = D \cdot \oint_S dS = 4\pi r^2 D.$$

Если $r < R$ (точка, через которую проведена воображаемая сфера, лежит внутри шара, рис. 2.4.1), то

$$\int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \frac{4}{3} \rho \pi r^3.$$

Откуда $D \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$.

$$D = \frac{1}{3} \rho r. \quad (2.4.1)$$

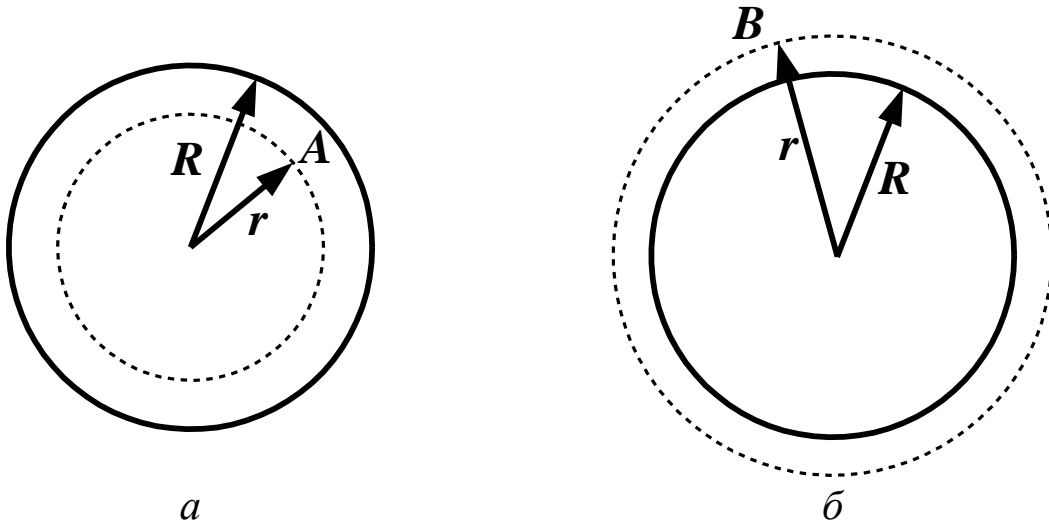


Рисунок 2.4.1

Напряженность электрического поля внутри шара

$$E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{1}{3} \frac{\rho r}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.4.2)$$

Если же $r > R$ (рис. 2.4.2), то $\int_V \rho dV = \rho \int_{V_{\text{шара}}} dV = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$, по-

скольку плотность заряда в пространстве между заряженным шаром

и воображаемой сферой равна нулю. В этом случае

$$D \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\rho\pi R^3;$$

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}; \quad (2.4.3)$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}. \quad (2.4.4)$$

Графики зависимости $D(r)$ и $E(r)$ при $\varepsilon = 2$ представлены на рис. 2.4.2. Следует обратить внимание на то, что вектор смещения при возрастании расстояния r изменяется непрерывно, просто при $r = R$ линейное возрастание функции $D(r)$ заменяется квадратичным убыванием. Вектор же напряженности электрического поля при $r = R$ испытывает скачок, обусловленный различием диэлектрической проницаемости вещества шара и вакуума.

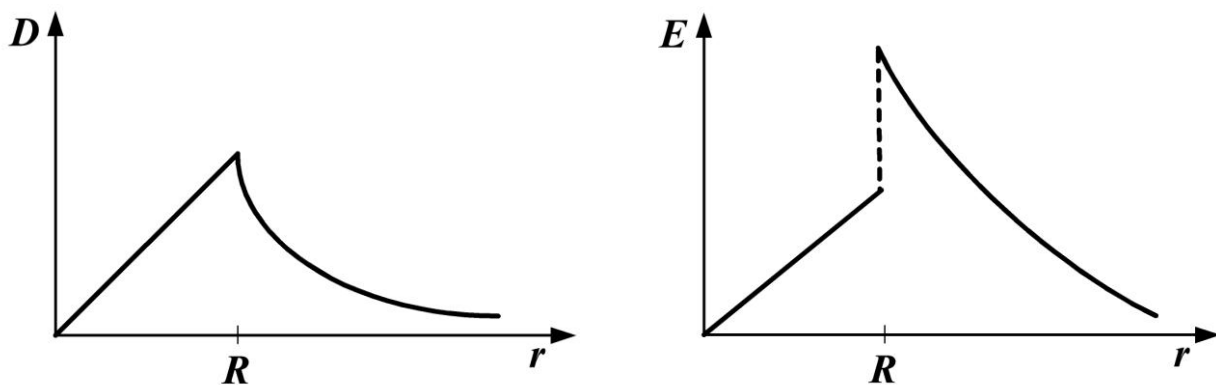


Рисунок 2.4.2

И, наконец, следует отметить, что для точек вне шара значения напряженности и вектора смещения поля, создаваемого шаром, совпадают с соответствующими значениями характеристик поля, создаваемого точечным зарядом, равным заряду шара. Действительно, используя равенство $\frac{4}{3}\rho\pi R^3 = Q$, получаем

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

*Электрическое поле
бесконечной равномерно заряженной плоскости*

Рассмотрим бесконечную плоскость, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда σ . Из соображений симметрии

вытекает, что вектор смещения электрического поля в любой точке пространства перпендикулярен плоскости и может зависеть лишь от расстояния до плоскости. Очевидно также, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность электрического поля одинакова по модулю и противоположна по направлению (на рис. 2.4.3 плоскость заряжена положительно; в случае отрицательной плотности заряда напряженность была бы направлена к плоскости).

Проведем мысленно цилиндрическую поверхность с основаниями площадью S , расположенными симметрично относительно плоскости, и образующей, перпендикулярной плоскости (см. рис. 2.4.3), и применим к этой поверхности теорему Гаусса. Поток вектора смещения через данную поверхность складывается из потока через боковую поверхность и двух равных потоков через основания:

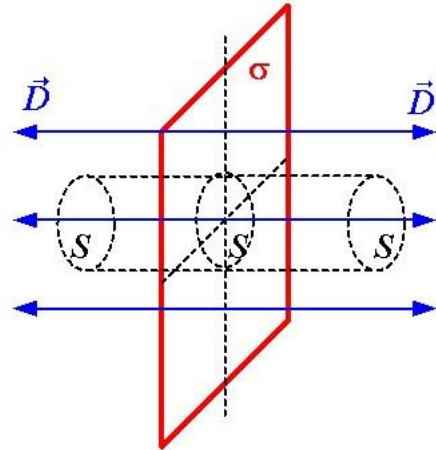


Рисунок 2.4.3

$$\oint_S D_n dS = \int_{S_{\text{бок}}} D_n dS + 2 \int_{S_{\text{осн}}} D_n dS.$$

Но интеграл по боковой поверхности равен нулю, поскольку $D_n = 0$ в каждой точке (вектор смещения направлен параллельно боковой поверхности и не пересекает ее). Для оснований D_n совпадает с D ; следовательно, поток вектора через каждое основание равен $DS_{\text{осн}}$ и $\oint_S D_n dS = 2DS_{\text{осн}}$. Поверхность вырезает из плоскости элемент площадью $S_{\text{осн}}$, заряд которого $Q = \sigma S_{\text{осн}}$ сосредоточен внутри поверхности.

Согласно теореме Гаусса, $\oint_S D_n dS = Q$, то есть $2DS_{\text{осн}} = \sigma S_{\text{осн}}$, откуда получаем

$$D = \frac{\sigma}{2}. \quad (2.4.5)$$

Полученный результат не зависит от расстояния до плоскости: величина вектора смещения везде одинакова. Картина линий смещения показана на рис. 2.4.4, *а*. Для отрицательно заряженной плоскости картина аналогична, но направление вектора \vec{D} изменяется на противоположное.

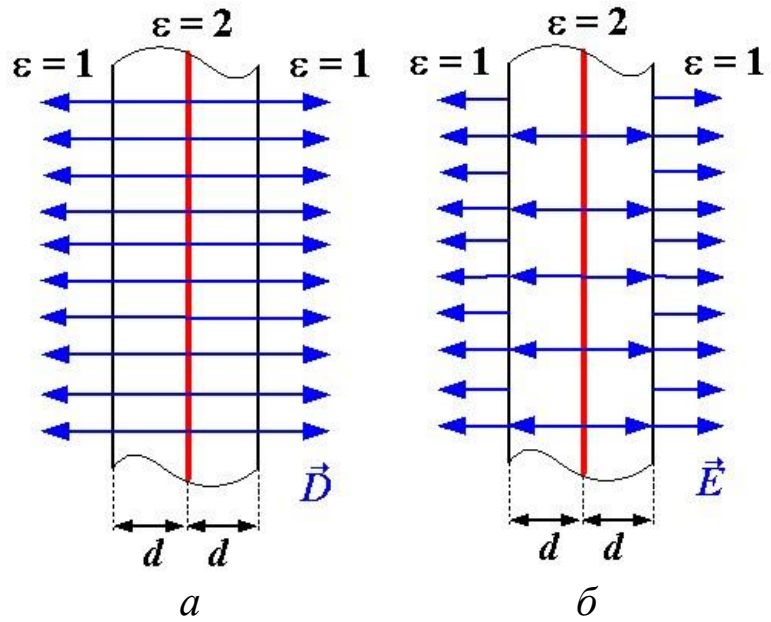


Рисунок 2.4.4

Чтобы найти напряженность электрического поля в любой точке, достаточно разделить выражение (2.4.5) на $\epsilon\epsilon_0$:

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.4.6)$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость вещества может изменяться от точки к точке, напряженность электрического поля тоже может зависеть от координат. На рис. 2.4.4, *б* показаны линии напряженности электрического поля для случая, когда заряженная пластина окружена с обеих сторон диэлектриком с $\epsilon = 2$ толщиной d , а вне диэлектрика находится воздух.

В заключение следует отметить, что бесконечная плоскость – понятие достаточно абстрактное. Однако если взять заряженную пластину конечных размеров, полученный результат можно применить для точек, расстояние от которых до любого края пластины значительно больше расстояния до самой пластины. По мере удаления от пластины или приближения к ее краям электрическое поле будет все значительнее отличаться от рассчитанного по формулам (2.4.5) и (2.4.6). На расстояниях, значительно превышающих размеры пластины, создаваемое ею поле будет близко к полю, создаваемому точечным зарядом.

*Электрическое поле
бесконечной равномерно заряженной нити*

Рассмотрим бесконечно длинную прямолинейную нить, заряженную с линейной плотностью заряда τ . Из соображений симметрии следует, что вектор смещения электрического поля в любой точке направлен перпендикулярно нити, а величина этого вектора зависит только от расстояния r до нити. Проведем мысленно замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом r , ось которой совпадает с нитью, а основания перпендикулярны нити (рис. 2.4.5). Поток вектора \vec{D} через основания этого цилиндра равен нулю, поскольку линии смещения параллельны основаниям и $D_n = 0$. Та-

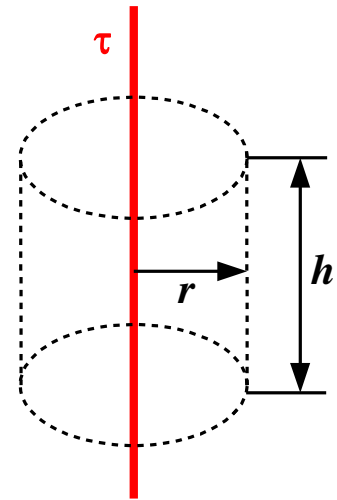


Рисунок 2.4.5

ким образом, $\oint_S D_n dS = \int_{S_{\text{бок}}} D dS = D \cdot 2\pi r h$ (при интегрировании использовался тот факт, что на боковой поверхности $D_n = D = \text{const}$). Заряд, сосредоточенный внутри гауссовой поверхности, – это заряд участка нити длиной h , вырезанный этой поверхностью и равный τh . Тогда теорему Гаусса можно записать в виде

$$D \cdot 2\pi r h = \tau h. \quad (2.4.7)$$

Откуда получаем

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}; \quad (2.4.8)$$

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (2.4.9)$$

Как и в предыдущем случае, следует отметить, что бесконечная нить – это некоторая абстракция, но метод расчета вполне применим для точек, находящихся вблизи нити, то есть для таких точек, расстояние от которых до любого из концов нити значительно больше расстояния до нити.

2.5. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

2.5.1. Могут ли через одну точку электрического поля проходить две силовые линии? Две линии смещения?

- 2.5.2.** Дайте определение потока вектора напряженности; потока вектора смещения.
- 2.5.3.** Однородное электрическое поле с напряженностью E направлено под углом 30° к плоской поверхности площадью S . Определите поток вектора смещения.
- 2.5.4.** Сформулируйте теорему Гаусса для вектора смещения и для вектора напряженности электрического поля.
- 2.5.5.** Уединенный точечный заряд q находится в вакууме. Определите поток вектора смещения через поверхности S_1 и S_2 , показанные на рис. 2.5.1.
- 2.5.6.** Электрическое поле создано положительной сферой, заряженной равномерно по поверхности с плотностью заряда σ . Какова напряженность электрического поля внутри сферы? Вне сферы?
- 2.5.7.** Требуется рассчитать напряженность электрического поля, создаваемого полым бесконечно длинным цилиндром в точке A (рис. 2.5.2). Изобразите гауссову поверхность, которой следует воспользоваться при расчете.

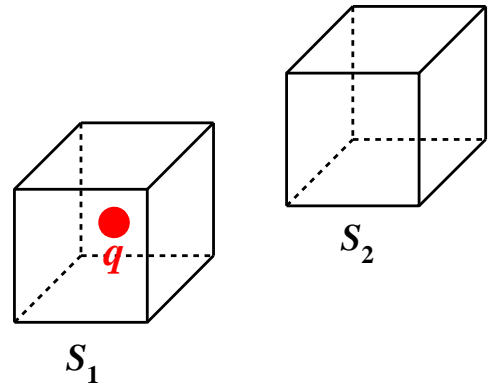


Рисунок 2.5.1

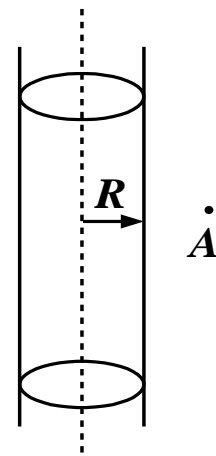


Рисунок 2.5.2

2.6. Примеры решения задач

Пример 2.6.1. Определите напряженность электрического поля, создаваемого двумя бесконечными пересекающимися под прямым углом плоскостями, заряженными равномерно с поверхностными плотностями заряда $+\sigma_1$ и $-\sigma_2$ соответственно. Пластины находятся на воздухе.

Решение. Сначала, используя формулу (2.4.6), определим модули напряженности электрического поля, созданного каждой из пластин:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}; E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Направления напряженностей показаны на рис. 2.6.1. Направление вектора напряженности электрического поля видно из рис. 2.6.1. Складывая напряженности по правилу параллелограмма, получаем модуль вектора \vec{E} :

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

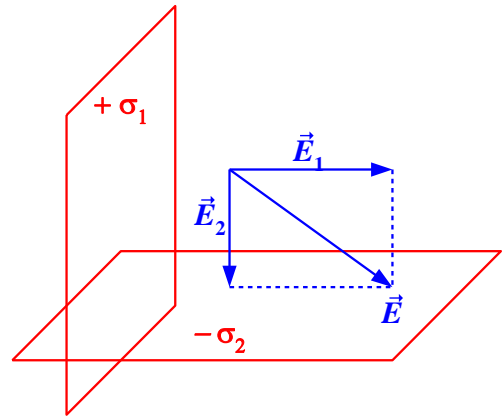


Рисунок 2.6.1

Пример 2.6.2. Сферический конденсатор представляет собой две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), между которыми находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε . Определите напряженность электрического поля в любой точке пространства, если внутренняя сфера несет заряд $Q_1 = +Q$, а внешняя – заряд $Q_2 = -Q$.

Решение. Ввиду симметрии задачи напряженность электрического поля зависит только от расстояния до центра и может быть направлена лишь радиально: к центру конденсатора либо от центра. Поэтому любая сфера радиусом r , центр которой совпадает с центром конденсатора, может быть использована в качестве гауссовой поверхности. По теореме Гаусса

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества в той области, через которую проходит сфера; $\sum_i Q_i$ – суммарный заряд, сосредоточенный внутри сферы.

Поток вектора \vec{E} через такую поверхность $\oint_S E_n dS = ES = E \cdot 4\pi r^2$.

Величина $\sum_i Q_i$ зависит от радиуса

r . При $r < R$ (поверхность 1 на рис. 2.6.2) обе заряженные сферы находятся вне гауссовой поверхности, по-

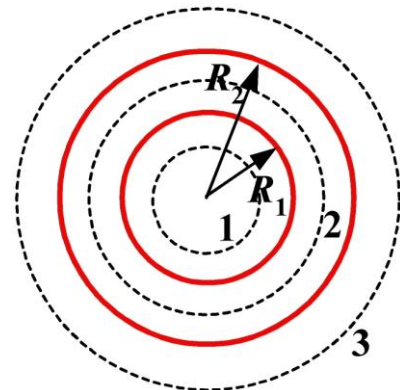


Рисунок 2.6.2

этому $\sum_i Q_i = 0$. Следовательно, $E \cdot 4\pi r^2 = 0$ и $E = 0$.

При $R_1 < r < R_2$ (поверхность 2 на рис. 2.6.2) внутри гауссовой поверхности находится только заряд меньшей сферы, то есть $\sum_i Q_i = +Q$, и $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}$, откуда получаем $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon\epsilon_0}$. Наконец, при $R_2 < r$ (поверхность 3 на рис. 2.6.2) обе обкладки конденсатора находятся внутри гауссовой поверхности, поэтому $\sum_i Q_i = Q_1 + Q_2 = 0$, следовательно, $E = 0$. Таким образом, электрическое поле существует только в области между обкладками конденсатора, где оно определяется формулой $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon\epsilon_0}$.

Пример 2.6.3. В равномерно заряженном с объемной плотностью $\rho > 0$ бесконечно длинном цилиндре радиусом R просверлили сквозное цилиндрическое отверстие радиусом r , ось которого параллельна оси цилиндра и расположена на расстоянии b от нее. Определите напряженность электрического поля в произвольной точке полости.

Решение. Электрическое поле внутри полости можно представить как суперпозицию полей заряженного с плотностью ρ сплошного цилиндра радиусом R и заряженного с плотностью $-\rho$ цилиндра радиусом r .

Пользуясь теоремой Гаусса, рассчитаем сначала вектор смещения электрического поля, создаваемого сплошным цилиндром радиусом R на расстоянии $r_1 < R$ от оси цилиндра. В качестве гауссовой поверхности выберем цилиндрическую поверхность радиусом r_1 и высотой h , ось которой совпадает с осью цилиндра (рис. 2.6.3). Ввиду осевой симметрии задачи вектор смещения направлен перпендикулярно оси цилиндра, а его величина зависит только от расстояния до оси. Поэтому поток вектора \vec{D}_1 через основания этого цилиндра равен нулю, поскольку линии смещения параллельны основаниям и $D_{1n} = 0$.

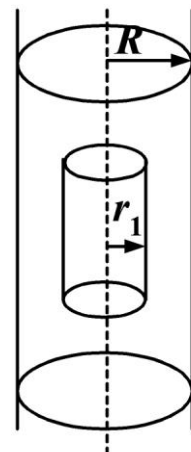


Рисунок 2.6.3

Таким образом, $\oint_S D_{1n} dS = \int_{S_{\text{бок}}} D_1 dS = D_1 \cdot 2\pi r_1 h$. Внутри цилиндра находится заряд $Q_+ = \rho V = \rho \pi r_1^2 h$. По теореме Гаусса получаем $D_1 \cdot 2\pi r_1 h = \rho \pi r_1^2 h$, то есть $D_1 = \frac{\rho r_1}{2}$. Так как вектор смещения направлен по радиус-вектору \vec{r}_1 , проведенному от оси в данную точку перпендикулярно оси ($\rho > 0$), полученное равенство можно записать и в векторной форме $\vec{D}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{2}$.

При помощи аналогичного расчета получаем вектор смещения электрического поля, создаваемого цилиндром радиусом r на расстоянии $r_2 < r$ от его оси: $\vec{D}_2 = -\frac{\rho \vec{r}_2}{2}$. Минус перед дробью возник потому, что малый цилиндр заряжен с плотностью $-\rho$.

Рассмотрим теперь произвольную точку A внутри отверстия. Проведем в эту точку радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (рис. 2.6.4). В соответствии с принципом суперпозиции вектор смещения электрического поля в точке A равен $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{\rho}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

Но на рис. 2.6.4 показано, что $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{b}$. Поэтому $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{b}$, следовательно, $\vec{D} = \frac{\rho}{2} \vec{b}$, а напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{b}.$$

Полученный результат достаточно интересен: поле внутри полости оказывается однородным (одинаковым по величине и направлению в любой точке полости). Мало того, напряженность электрического поля не зависит от радиусов цилиндра и отверстия и определяется лишь плотностью заряда и расстоянием между осями цилиндра и отверстия. В предельном случае, когда оси цилиндра и отверстия совпадают, $b = 0$ и поле внутри отверстия отсутствует.

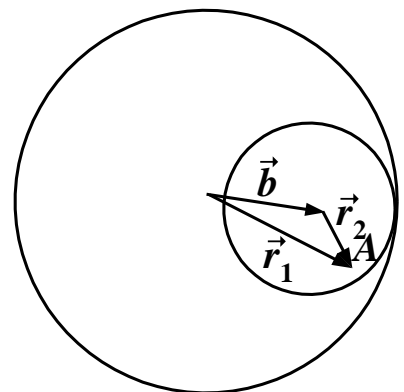


Рисунок 2.6.4

2.7. Задачи для самостоятельного решения

При решении задач данного раздела следует использовать теорему Гаусса и принцип суперпозиции. При этом следует выполнять расчет напряженности полей, создаваемых различными элементами каждой системы зарядов, даже если этот расчет приведен в предыдущих разделах главы. Если вывод формул не представлен, задача считается нерешенной.

2.7.1. На двух концентрических сферах радиусами R_1 и R_2 равномерно распределены заряды с плотностями σ_1 и σ_2 . Пространство внутри малой сферы заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ε_1 , пространство между сферами – веществом с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Определите напряженность электрического поля на расстояниях r_1 , r_2 , r_3 от центра сфер при следующих условиях:

2.7.1.1. $R_1 = 6$ см, $R_2 = 10$ см, $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = -5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см.

2.7.1.2. $R_1 = 10$ см, $R_2 = 20$ см, $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = 5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 25$ см.

2.7.1.3. $R_1 = 6$ см, $R_2 = 12$ см, $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 3$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 12$ см.

2.7.1.4. $R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см, $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = -10$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 15$ см.

2.7.1.5. $R_1 = 10$ см, $R_2 = 15$ см, $\sigma_1 = 30$ нКл/м², $\sigma_2 = -20$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 20$ см.

2.7.1.6. $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см, $\sigma_1 = 100$ нКл/м², $\sigma_2 = -100$ нКл/м², $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см.

2.7.1.7. $R_1 = 6$ см, $R_2 = 10$ см, $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -10$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см.

2.7.1.8. $R_1 = 16$ см, $R_2 = 20$ см, $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = -5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 15$ см, $r_2 = 18$ см, $r_3 = 25$ см.

2.7.1.9. $R_1 = 3$ см, $R_2 = 9$ см, $\sigma_1 = 120$ нКл/м², $\sigma_2 = 30$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см.

2.7.1.10. $R_1 = 6$ см, $R_2 = 10$ см, $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = 5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 3$,
 $\varepsilon_2 = 2$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см.

2.7.1.11. $R_1 = 6$ см, $R_2 = 12$ см, $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -5$ нКл/м², $\varepsilon_1 = 2$,
 $\varepsilon_2 = 3$, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 12$ см.

2.7.2. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 . Определите напряженность электрического поля в любой точке пространства и постройте картину силовых линий, если:
 а) плоскости параллельны; б) плоскости взаимно перпендикулярны при следующих условиях:

2.7.2.1. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = 30$ нКл/м².

2.7.2.2. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -30$ нКл/м².

2.7.2.3. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -20$ нКл/м².

2.7.2.4. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = 10$ нКл/м².

2.7.2.5. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = -10$ нКл/м².

2.7.2.6. $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = 20$ нКл/м².

2.7.2.7. $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = -20$ нКл/м².

2.7.2.8. $\sigma_1 = 40$ нКл/м², $\sigma_2 = 30$ нКл/м².

2.7.2.9. $\sigma_1 = 20$ нКл/м², $\sigma_2 = 15$ нКл/м².

2.7.2.10. $\sigma_1 = 40$ нКл/м², $\sigma_2 = -30$ нКл/м².

2.7.2.11. $\sigma_1 = 10$ нКл/м², $\sigma_2 = 15$ нКл/м².

2.7.3. Пластик, из которого изготавливается леска, в процессе производства электризуется, что может привести к возникновению разрядов и порче изделия. Считая, что пробой воздуха происходит при напряженности электрического поля $E = 3 \cdot 10^6$ Н/Кл, определите максимальную допустимую объемную плотность заряда на леске, если диаметр лески равен:

2.7.3.1. 1 мм.

2.7.3.2. 0,8 мм.

2.7.3.3. 0,6 мм.

2.7.3.4. 0,5 мм.

2.7.3.5. 0,4 мм.

2.7.3.6. 0,25 мм.

2.7.3.7. 0,2 мм.

2.7.3.8. 0,15 мм.

2.7.3.9. 0,1 мм.

2.7.3.10. 0,08 мм.

2.7.3.11. 0,05 мм.

Леску считать однородным цилиндром.

2.8. Задачи повышенной сложности

2.8.1. Система состоит из равномерно заряженной сферы радиусом R и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \frac{\alpha}{r}$, где α – положительная постоянная; r – расстояние до центра сферы. Определите заряд Q сферы, при котором напряженность электрического поля вне сферы не будет зависеть от r . Диэлектрическая проницаемость везде равна 1.

2.8.2. Равномерно заряженную по поверхности сферу разрезали на две половинки. Определите силу отталкивания между этими половинками.

3. Потенциал

3.1. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Консервативность электростатических сил

Покажем, что электростатические силы консервативны, то есть работа этих сил не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения тела.

Рассмотрим сначала работу, совершаемую электрическим полем по перемещению точечного заряда q под действием электростатической силы $\vec{F} = q\vec{E}$ на элементарном пути $d\vec{l}$:

$$dA = (\vec{F}d\vec{l}) = q(\vec{E}d\vec{l}) = qEdl \cos \alpha, \quad (3.1.1)$$

где $d\vec{l}$ – перемещение заряда q ; круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов; α – угол между перемещением и напряженностью электрического поля.

Электрическое поле \vec{E} может быть создано произвольной системой зарядов, как точечных, так и протяженных. При этом любые протяженные заряды можно представить как систему точечных, а затем воспользоваться принципом суперпозиции: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, где

суммирование производится по всем точечным зарядам, создающим поле. Тогда работу по перемещению заряда dq можно записать как

$$dA = q\left(\sum_i \vec{E}_{il}\right)d\vec{l} = q\sum_i (E_{il}dl) = \sum_i dA_i. \quad (3.1.2)$$

Поскольку равенство (3.1.2) выполняется на любом участке траектории, оно выполняется и для всей траектории в целом:

$$A = \sum_i A_i. \quad (3.1.3)$$

Работа по перемещению заряда в поле, созданном системой зарядов, равна сумме работ, совершаемых в поле каждого из зарядов системы в отдельности.

Рассчитаем теперь работу по перемещению точечного заряда q в вакууме в поле неподвижного точечного заряда Q на элементарном пути $d\vec{l}$. Напряженность поля точечного заряда определяется формулой (1.3.4) : $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

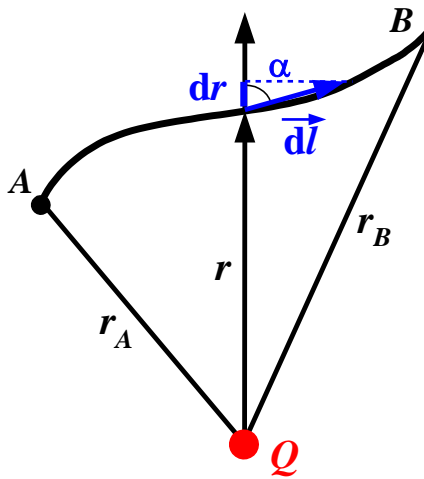


Рисунок 3.1.1

Подставляя это выражение в формулу (3.1.1), получаем

$$dA = q \cdot k \frac{Q}{r^2} dl \cos \alpha = q \cdot k \frac{Q}{r^2} dr \quad (\text{рис. 3.1.1}).$$

В данной формуле $dr = dl \cos \alpha$ – это просто изменение расстояния между зарядами Q и q . Чтобы рассчитать работу A_{AB} на конечном участке AB траектории заряда q , необходимо проинтегрировать полученное выражение по этой траектории:

$$A_{AB} = q \int_A^B k \frac{Q}{r^2} dr = q \left(k \frac{Q}{r_A} - k \frac{Q}{r_B} \right). \quad (3.1.4)$$

Из формулы (3.1.3) видно, что работа по перемещению заряда q в поле точечного заряда Q не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения заряда q . Поэтому и каждое из слагаемых, и вся сумма в правой части формулы (3.1.3) не зависят от формы траектории, а значит не зависят от пути и работа по перемещению заряда в поле системы зарядов. Следовательно, *электростатические силы являются консервативными*.

Напомним, что поля, в которых действуют консервативные силы, называются *потенциальными*. Таким образом, выше была доказана потенциальность электростатического поля.

3.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Следствием потенциальности электростатического поля является равенство нулю работы, совершаемой силами поля при перемещении заряда по замкнутому контуру: $A_{\text{замкн}} = q \oint (\vec{E} d\vec{l}) = 0$. Но поскольку заряд q не равен нулю, это означает, что

$$\oint (\vec{E} d\vec{l}) = 0. \quad (3.2.1)$$

Величина $\oint (\vec{E} d\vec{l}) = \oint E_l dl$ называется *циркуляцией* вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру, а равенство (3.2.1) представляет собой математическое выражение теоремы о циркуляции вектора \vec{E} по замкнутому контуру.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Следует учесть, что формула (3.2.1) справедлива только для электростатических полей. Как будет показано далее, существуют электрические поля, для которых теорема о циркуляции не выполняется.

3.3. Потенциал

Из курса механики известно, что тело, находящееся в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией. Следовательно, работу по перемещению заряда q из точки A в точку B можно представить формулой

$$A_{AB} = W_{p1} - W_{p2}, \quad (3.3.1)$$

где W_{p1} и W_{p2} – значения потенциальной энергии соответственно в начальной и конечной точках траектории.

Сопоставляя выражения (3.1.4) и (3.3.1), получаем

$$q \left(k \frac{Q}{r_1} - k \frac{Q}{r_2} \right) = W_{p1} - W_{p2}. \quad (3.3.2)$$

Откуда легко вывести выражение для потенциальной энергии заряда q в поле точечного заряда Q :

$$W_p = qk \frac{Q}{r} + \text{const}. \quad (3.3.3)$$

Выражение для константы обычно выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда q на бесконечность ($r \rightarrow \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. Это возможно, если в выражении (3.3.3) $\text{const} = 0$. Тогда

$$W_p = qk \frac{Q}{r}. \quad (3.3.4)$$

Для более общего случая поля, создаваемого системой точечных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_n , из формул (3.1.4) и (3.3.2) нетрудно получить равенство

$$W_{p1} - W_{p2} = q \left(\sum_i \frac{Q_i}{r_{i1}} - \sum_i \frac{Q_i}{r_{i2}} \right). \quad (3.3.5)$$

Сопоставляя это выражение с соотношением (3.3.4), получаем

$$W_p = q \sum_i k \frac{Q_i}{r_i}. \quad (3.3.6)$$

Как и в предыдущем случае, в данной формуле принято значение $\text{const} = 0$.

Из соотношения (3.3.6) следует, что потенциальная энергия заряда q пропорциональна этому заряду. Отношение же W_p/q не зависит от заряда и является характеристикой электрического поля, в которое помещен этот заряд. Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q} \quad (3.3.7)$$

называется *потенциалом* электрического поля в данной точке.

Потенциалом φ электрического поля называется отношение потенциальной энергии заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.

Единицей измерения потенциала является вольт (В).

$$1 \text{ В} = [1 \text{ Дж}] / [1 \text{ Кл}].$$

Потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке единичный положительный заряд.

Пользуясь формулами (3.3.4) и (3.3.7), нетрудно вывести формулу потенциала поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом:

$$\varphi = k \frac{Q}{r}, \quad (3.3.8)$$

а с учетом формулы (3.3.6) получить выражение для потенциала поля системы зарядов:

$$\varphi = \sum_i k \frac{Q_i}{r_i}. \quad (3.3.9)$$

Следовательно, выполняется принцип суперпозиции для потенциалов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (3.3.10)$$

Потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Из формулы (3.3.1) и определения (3.3.7) нетрудно выразить работу по перемещению зарядов из точки A в точку B :

$$A_{AB} = q(\varphi_A - \varphi_B). \quad (3.3.11)$$

Работа по перемещению заряда в электрическом поле равна произведению заряда на разность потенциалов между начальной и конечной точками траектории.

Как и потенциальная энергия, потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной. Значение этой постоянной не играет роли, так как работа зависит лишь от разности потенциалов, а не от значения потенциала в отдельной точке. В формулах (3.3.9) и (3.3.10) постоянная была принята равной нулю, чтобы обеспечить равенство нулю потенциала в бесконечно удаленных точках.

3.4. Связь потенциала с напряженностью

Введение силовой характеристики электрического поля – напряженности $\vec{E}(\vec{r})$ – позволяет полностью описать электрическое поле. Не менее полным является описание поля и с помощью скалярной функции – потенциала, являющегося энергетической характеристикой поля. В ряде случаев такое описание является предпочтительным, поскольку скалярное суммирование (3.3.9) выполнить втрое проще, чем покомпонентно произвести векторное суммирование (1.3.5). В других случаях, однако, проще рассчитать напряженность электрического поля, например, пользуясь теоремой Гаусса. При этом каждую из этих характеристик можно выразить через другую.

Действительно, из (3.1.1) известно, что работа на элементарном участке dl равна $dA = q(\vec{E}d\vec{l}) = qE_l dl$, а из (3.3.11) ту же работу можно выразить как $dA = -q d\phi$. Сопоставляя эти выражения, получаем

$$E_l = -\frac{d\phi}{dl}. \quad (3.4.1)$$

Пусть перемещение $d\vec{l}$ параллельно оси X . Тогда из последнего выражения получаем

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}. \quad (3.4.2)$$

Символ частной производной указывает на то, что потенциал дифференцируется только по x , а y и z считаются при этом постоянными.

Аналогично можно получить равенства:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad (3.4.3)$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (3.4.4)$$

По полученным проекциям можно рассчитать и сам вектор \vec{E} :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \quad (3.4.5)$$

Величина в скобках есть не что иное, как градиент потенциала φ , который обозначается $\vec{\nabla}\varphi$. Это позволяет записать уравнение (3.4.5) более компактно:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (3.4.6)$$

Можно решить и обратную задачу: определить разность потенциалов между двумя любыми точками через напряженность электрического поля. Для этого достаточно сопоставить формулы (3.1.1) и (3.3.11) и получить выражение

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B (\vec{E}d\vec{l}). \quad (3.4.7)$$

3.5. Эквипотенциальные поверхности

Электрическое поле можно изобразить наглядно, воспользовавшись вместо линий напряженности эквипотенциальными поверхностями.

Эквипотенциальной называется поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковое значение.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля, однако условились строить эквипотенциальные поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была одинаковой (например составляла 1 В).

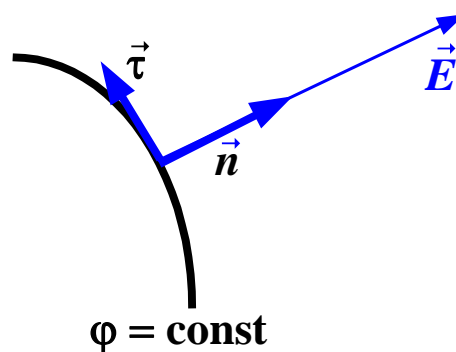
Вектор напряженности электрического поля в любой точке перпендикулярен эквипотенциальной поверхности и направлен в сторону убывания потенциала. Чтобы убедиться в этом, проведем в некоторой точке касательную $\vec{\tau}$ к эквипотенциальной поверхности (рис. 3.5.1).

При смещении вдоль $\vec{\tau}$ (то есть вдоль поверхности) на бесконечно малую величину $d\tau$ потенциал φ не изменяется, так что $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$. Следовательно, равна нулю и тангенциальная составляющая вектора напряженности:

$$E_{\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0,$$

откуда вытекает, что вектор напряженности электрического поля перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Рассмотрим теперь перемещение $d\vec{l} = d\vec{n}$ по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала. В этом случае $\partial\varphi < 0$, и согласно (3.4.1) $E_1 > 0$, то есть вектор \vec{E} направлен так же, как $d\vec{l}$ – в сторону убывания потенциала.



$\varphi = \text{const}$

Рисунок 3.5.1

3.6*. Примеры расчета потенциалов

Существуют два основных способа расчета потенциалов (разности потенциалов). Первый основан на применении формулы потенциала поля точечного заряда (3.3.8) и принципа суперпозиции (3.3.10). Второй способ – расчет разности потенциалов при помощи формулы (3.4.7). Этот метод особенно удобен, когда напряженность поля легко определить, например, при помощи теоремы Гаусса. В данном разделе приведены примеры использования обоих методов.

Потенциал электрического поля диполя

Диполем называется система двух равных по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов, находящихся на расстоянии l друг от друга. В самом общем виде потенциал электрического поля диполя можно рассчитать на основании формул (3.3.8) и (3.3.10):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = k\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right) = kQ\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right), \quad (3.6.1)$$

где r_1 и r_2 – соответственно расстояния от положительного и отрицательного зарядов до данной точки поля.

Для точки A , лежащей на оси диполя (рис. 3.6.1), $r_1 = r - \frac{l}{2}$, $r_2 = r + \frac{l}{2}$,

$$\text{поэтому } \varphi = kQ \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) = k \frac{Ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)}.$$

При $r \gg l$ членом $\frac{l^2}{4}$ можно пренебречь, что дает

$$\varphi = k \frac{Ql}{r^2} = k \frac{p}{r^2}, \quad (3.6.2)$$

где $p = Ql$ – величина, называемая *дипольным моментом*.

Аналогичным образом, для точки B получаем $\varphi = -k \frac{Ql}{r^2} = -k \frac{p}{r^2}$.

Для точки C , симметричной относительно зарядов Q и $-Q$, $r_1 = r_2$, $\varphi = 0$. Таким образом, плоскость, проходящая через центр диполя перпендикулярно его оси, является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $\varphi = 0$.

В произвольной точке D (рис. 3.6.2), достаточно удаленной от центра диполя ($r \gg l$), $r_2 - r_1 = l \cos \theta$, поэтому

$$\varphi = k \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (3.6.3)$$

Очевидно, что рассмотренные выше частные случаи соответствуют данной формуле при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$.

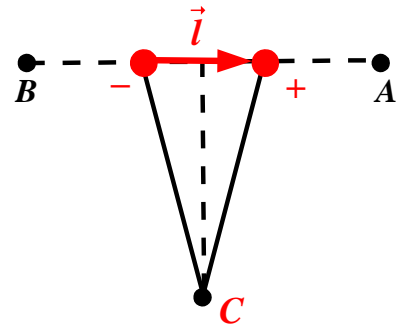


Рисунок 3.6.1

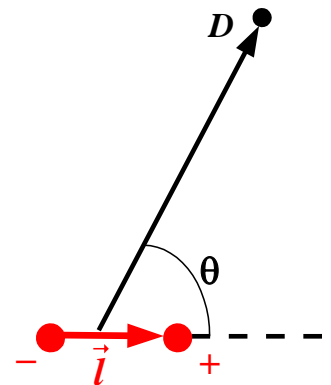


Рисунок 3.6.2

Разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора

Плоский конденсатор представляет собой две металлические пластины (обкладки) площадью S каждая, разделенные слоем диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ϵ , причем толщина слоя значительно меньше геометрических размеров пластин. Рассчитаем разность потенциалов между пластинами для случая, когда заряды обкладок составляют $+Q$ и $-Q$ соответственно.

Поскольку для расчета необходимо знать значения напряженности лишь между пластинами, то есть в точках, удаленных от пластин не более чем на d , для расчета можно воспользоваться приближением, в котором пластины рассматриваются как бесконечные равномерно заряженные плоскости, плотность заряда на каждой из которых составляет $\pm \sigma = \pm \frac{Q}{S}$.

Напряженность поля, создаваемого каждой из пластин в любой точке промежутка между пластинами, равна по модулю

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

По направлению эти напряженности совпадают: оба вектора направлены от положительной пластины к отрицательной (рис. 3.6.3). Следовательно, результирующая напряженность электрического поля между обкладками,

равная векторной сумме напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , направлена также перпендикулярно пластинам от положительной пластины

к отрицательной и равна по модулю $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

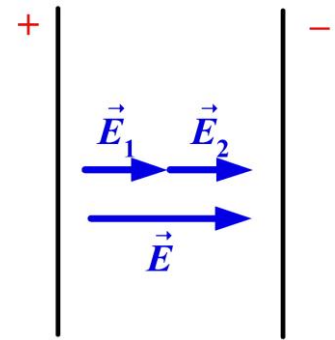


Рисунок 3.6.3

В соответствии с формулой (3.4.7)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}. \quad (3.6.4)$$

Разность потенциалов между обкладками сферического конденсатора

Пусть обкладки сферического конденсатора с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) имеют заряды $+Q$ и $-Q$ соответственно. В примере 2.6.2 показано, что в этом случае напряженность электрического поля между обкладками равна $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0}$. Подставляя это выражение в

(3.4.7), получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.6.5)$$

Отметим, что в предельном случае, когда расстояние между сферами $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$, формулу (3.6.5) можно преобразовать следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2} = \frac{Qd}{4\pi R^2 \epsilon\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon\epsilon_0 S},$$

что совпадает с формулой (3.6.4).

*Разность потенциалов между обкладками
цилиндрического конденсатора*

Цилиндрический конденсатор состоит из двух коаксиальных цилиндров (обкладок) равной высоты H радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), между которыми находится слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . Если радиусы обкладок значительно меньше высоты H , при расчете напряженности поля между обкладками каждую из них можно рассматривать как бесконечно длинный полый цилиндр. Пусть обкладки несут заряды $+Q$ и $-Q$ соответственно. Выбирая в качестве гауссовой поверхности цилиндр произвольного радиуса r ($R_1 < r < R_2$) высотой $h \ll H$ (рис. 3.6.4) и применяя теорему Гаусса, получаем

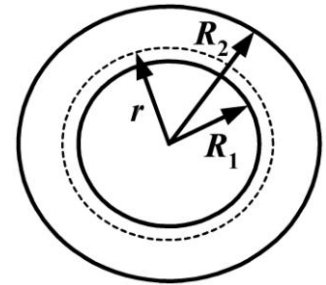


Рисунок 3.6.4

где $Q_{\text{внутр}}$ – заряд, сосредоточенный внутри гауссовой поверхности.

Этот заряд можно рассчитать, если знаешь поверхностную плотность заряда внутреннего цилиндра, которую, в свою очередь, нетрудно найти по формуле $\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 H}$. Поскольку внутри гауссовой поверхности находится часть внутренней обкладки высотой h , заряд этой части равен $Q_{\text{внутр}} = \sigma \cdot 2\pi R_1 h = Q \frac{h}{H}$. Подставляя это выражение в (3.6.6), получаем $E \cdot 2\pi r h = \frac{Qh}{\epsilon\epsilon_0 H}$, откуда следует

ражение в (3.6.6), получаем $E \cdot 2\pi r h = \frac{Qh}{\epsilon\epsilon_0 H}$, откуда следует

$$E = \frac{Q}{2\pi r \epsilon\epsilon_0 H}. \quad (3.6.7)$$

Наконец из (3.4.7) и (3.6.7) получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 rH} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.6.8)$$

3.7. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

3.7.1. Всегда ли электростатические силы являются консервативными?

3.7.2. Дайте определение потенциала электрического поля.

3.7.3. Точечный заряд q находится на расстоянии r от точечного заряда Q в вакууме. Определите потенциальную энергию заряда q .

3.7.4. Определите потенциал электрического поля, созданного в вакууме точечным зарядом $Q = 2$ нКл на расстоянии 3 см от этого заряда.

3.7.5. Сформулируйте принцип суперпозиции потенциалов.

3.7.6. Электрическое поле создано зарядами $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = -5$ нКл (рис. 3.7.1). Определите знак потенциала электрического поля в точках A, B, C, D .

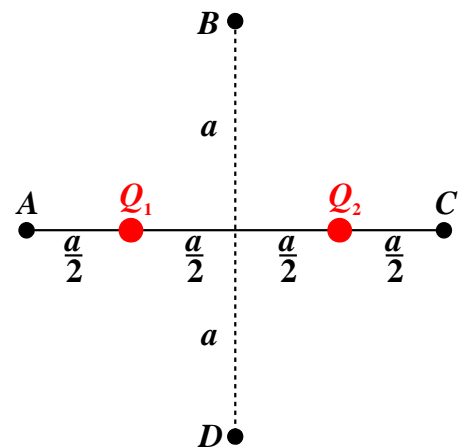


Рисунок 3.7.1

3.7.7. Заряд 1 нКл переносится из точки с потенциалом 200 В в точку с потенциалом 300 В. Чему равна работа электростатических сил по перемещению этого заряда?

3.7.8. Определите разность потенциалов между точками A и B . Расстояние между точками равно 10 см, напряженность электрического поля составляет 1000 В/м, а угол между линиями напряженности и отрезком, соединяющим точки A и B , равен 60° .

3.7.9. Потенциал электрического поля задается выражением $\varphi = Ax^2 + By$, где $A = 2$ В/м², $B = 3$ В/м. Определите величину и направление напряженности в точке с координатами (1,1,1).

3.8. Примеры решения задач

Пример 3.8.1. Тонкое кольцо радиусом R равномерно заряжено и несет заряд Q . Определите потенциал и напряженность электриче-

ского поля в точке A , лежащей на оси кольца на расстоянии z от его центра.

Решение. Разобьем кольцо на бесконечно малые участки длиной dl , каждый из которых несет заряд dq . Расстояние r от каждого из участков до точки A (рис. 3.8.1) нетрудно определить: $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Каждый участок создает потенциал $d\varphi = k \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$. Потенциал

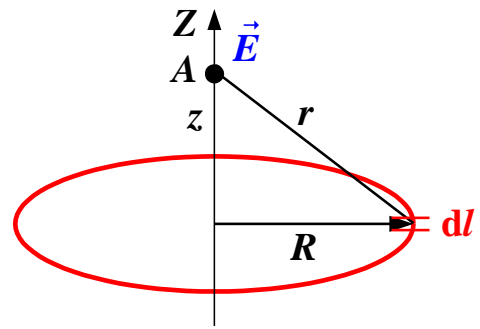


Рисунок 3.8.1

всего кольца находим суммированием (интегрированием) по всему кольцу:

$$\varphi = \int k \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (3.8.1)$$

Ввиду осевой симметрии задачи напряженность электрического поля направлена вдоль оси Z (на рис. 3.8.1 представлен случай положительно заряженного кольца). Поэтому

$$E = E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.8.2)$$

Следует обратить внимание на то, что знак проекции E_z совпадает со знаком координаты z , то есть направления напряженности в точках, симметричных относительно центра кольца, противоположны. В центре кольца $\vec{E} = 0$. Потенциал же электрического поля во всех точках положителен и достигает максимума в центре кольца.

Задачу можно решить и другим способом: сначала при помощи закона Кулона и принципа суперпозиции рассчитать напряженность электрического поля, а затем, используя формулу (3.4.7) и рассматривая в качестве точки B бесконечно удаленную точку, рассчитать потенциал в точке A . Результаты обоих решений, разумеется, одинаковы.

Пример 3.8.2. Электрическое поле создано зарядами $Q_1 = 4$ мкКл и $Q_2 = -2$ мкКл, расположенными на расстоянии $a = 0,2$ м. Определите работу сил поля по перемещению заряда $q = 50$ нКл из точки A в точку B (рис. 3.8.2).

Решение. Искомая работа $A_{AB} = q(\varphi_A - \varphi_B)$. Потенциалы φ_A и φ_B нетрудно определить, пользуясь формулой (3.3.8) и принципом суперпозиции:

$$\varphi_A = k \frac{Q_1}{a/2} + k \frac{Q_2}{a/2} = \frac{2k(Q_1 + Q_2)}{a};$$

$$\varphi_B = k \frac{Q_1}{a\sqrt{2}} + k \frac{Q_2}{a}.$$

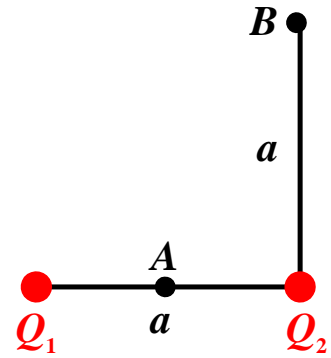


Рисунок 3.8.2

Следовательно, $A_{AB} = \frac{kq}{a} [2(Q_1 + Q_2) - (Q_1/\sqrt{2} + Q_2)] = 14,3 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Пример 3.8.3. Тонкое полукольцо радиусом R равномерно заряжено с линейной плотностью заряда τ . Определите работу сил поля по удалению заряда q из центра полукольца O в бесконечно удаленную точку.

Решение. Искомая работа $A = q\varphi_0$, где φ_0 – потенциал электрического поля в точке O . Для определения φ_0 разобьем полукольцо на участки dl , каждый из которых несет заряд $dq = \tau dl$ и, соответственно, создает в точке O потенциал $d\varphi = k \frac{\tau dl}{R}$. Согласно

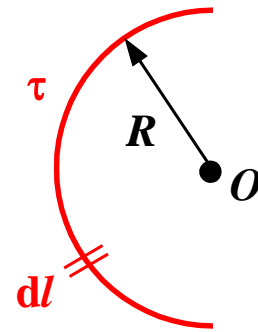


Рисунок 3.8.3

принципу суперпозиции, потенциал

$$\varphi_0 = \int d\varphi = k \frac{\tau}{R} l = \pi k \tau.$$

Соответственно

$$A = q\pi k \tau.$$

Полученный результат достаточно интересен: работа не зависит от радиуса кольца. Почему?

Пример 3.8.4. Тонкая равномерно заряженная сфера радиусом $R = 10$ см имеет потенциал $\varphi_0 = 100$ В. Определите скорость, которую наберет электрон приблизившись к сфере с расстояния $r_1 = 50$ см до расстояния $r_2 = 20$ см, если начальная скорость электрона равна нулю. Расстояние отсчитывается от центра сферы. Заряд электрона $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Решение. Работа электрического поля по перемещению электрона $A = q_e(\varphi_1 - \varphi_2)$. Но эта же работа равна изменению кинетической

энергии электрона: $A = \frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2}$. Приравнивая правые части этих равенств и учитывая, что начальная скорость электрона равна нулю, получаем $\frac{m_e v_2^2}{2} = q_e (\varphi_1 - \varphi_2)$;

$$v = \sqrt{\frac{2q_e(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_e}}. \quad (3.8.3)$$

Остается лишь найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Это трудно сделать, если вспомнить, что напряженность электрического поля вне сферы определяется по той же формуле, что и напряженность поля точечного заряда, равного заряду сферы Q и помещенного в центр сферы. Следовательно, и потенциал электрического поля вне сферы определяется так же, как потенциал поля точечного заряда: $\varphi_{\text{вне}} = k \frac{Q}{r}$. При $r = R$ получаем потенциал сферы: $\varphi_0 = k \frac{Q}{R}$, от-

куда определяем заряд сферы: $Q = \frac{\varphi_0 R}{k}$. Потенциалы на расстояниях

r_1 и r_2 равны соответственно $\varphi_1 = k \frac{Q}{r_1} = \varphi_0 \frac{R}{r_1}$; $\varphi_2 = \varphi_0 \frac{R}{r_2}$. Подстав-

ляя эти выражения в (3.8.4), получаем

$$v = \sqrt{\frac{2q_e \varphi_0 R}{m_e} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Пример 3.8.5. Потенциал электрического поля в некоторой области пространства задается формулой $\varphi = Ax + By^2$. Определите напряженность электрического поля в точке с координатами $(x, y, z) = (1, 2, 3)$, если $A = 3 \text{ В/м}$, $B = 1 \text{ В/м}^2$.

Решение. Напряженность электрического поля в любой точке определяется формулой (3.4.5):

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\vec{E} = -(A\vec{i} + 2B\vec{j}) = -(3\vec{i} + 4\vec{j}).$$

Модуль напряженности при этом равен

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ В/м.}$$

3.9. Задачи для самостоятельного решения

3.9.1. Заряды Q_1 , Q_2 и Q_3 расположены в трех углах квадрата со стороной $a = 10$ см (рис. 3.9.1). Определите работу по перемещению заряда $q = 20$ нКл:

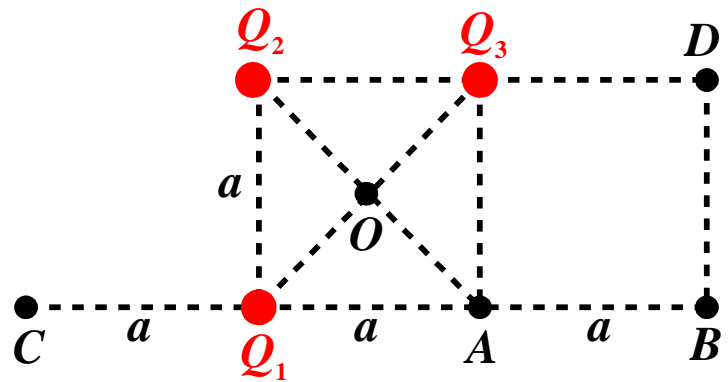


Рисунок 3.9.1

3.9.1.1. Из точки O в точку A , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -20$ мкКл.

3.9.1.2. Из точки O в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.3. Из точки O в точку C , если $Q_1 = 20$ мкКл, $Q_2 = -10$ мкКл, $Q_3 = 10$ мкКл.

3.9.1.4. Из точки O в точку D , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.5. Из точки A в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.6. Из точки A в точку C , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.7. Из точки A в точку D , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.8. Из точки C в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.9. Из точки D в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.10. Из точки O в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.1.11. Из точки O в точку B , если $Q_1 = Q_2 = 10$ мкКл, $Q_3 = -10$ мкКл.

3.9.2. Тонкая сфера радиусом R равномерно заряжена и несет заряд Q . Определите значения потенциала в точках A и B , находящихся на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы, если:

3.9.2.1. $Q = 10$ нКл, $R = 10$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 20$ см.

3.9.2.2. $Q = 20$ нКл, $R = 20$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 25$ см.

3.9.2.3. $Q = -10$ нКл, $R = 15$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 30$ см.

3.9.2.4. $Q = -15$ нКл, $R = 30$ см, $r_1 = 10$ см, $r_2 = 40$ см.

3.9.2.5. $Q = 10$ нКл, $R = 10$ см, $r_1 = 15$ см, $r_2 = 20$ см.

3.9.2.6. $Q = 20$ нКл, $R = 10$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 15$ см.

3.9.2.7. $Q = -10$ нКл, $R = 30$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 50$ см.

3.9.2.8. $Q = 10$ нКл, $R = 15$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 20$ см.

3.9.2.9. $Q = 40$ нКл, $R = 12$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 15$ см.

3.9.2.10. $Q = 10$ нКл, $R = 10$ см, $r_1 = 9$ см, $r_2 = 30$ см.

3.9.2.11. $Q = 5$ нКл, $R = 12$ см, $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см.

Указание к задаче 3.9.2. При решении задачи следует пользоваться формулой (3.4.7) и помнить, что внутри заряженной сферы напряженность электрического поля равна нулю. Потенциал в бесконечно удаленной точке считать равным нулю.

3.9.3. Какую скорость приобретет электрон, двигаясь от внутренней обкладки цилиндрического конденсатора к внешней, если заряд внутренней обкладки равен Q , радиусы внутренней обкладки составляют R_1 и R_2 соответственно, а высота конденсатора равна H . Между обкладками – вакуум. Задачу решить при следующих значениях параметров:

3.9.3.1. $Q = -1$ мкКл, $R_1 = 1$ см, $R_2 = 2$ см, $H = 10$ см.

3.9.3.2. $Q = -10$ мкКл, $R_1 = 1$ см, $R_2 = 1,5$ см, $H = 10$ см.

3.9.3.3. $Q = -5$ мкКл, $R_1 = 0,5$ см, $R_2 = 1$ см, $H = 20$ см.

3.9.3.4. $Q = -3$ мкКл, $R_1 = 1$ см, $R_2 = 3$ см, $H = 20$ см.

3.9.3.5. $Q = -12$ мкКл, $R_1 = 0,8$ см, $R_2 = 2$ см, $H = 30$ см.

3.9.3.6. $Q = -10$ мкКл, $R_1 = 1,6$ см, $R_2 = 2$ см, $H = 20$ см.

3.9.3.7. $Q = -8$ мкКл, $R_1 = 0,9$ см, $R_2 = 1,8$ см, $H = 10$ см.

3.9.3.8. $Q = -14$ мкКл, $R_1 = 0,7$ см, $R_2 = 2,1$ см, $H = 10$ см.

3.9.3.9. $Q = -8$ мкКл, $R_1 = 0,8$ см, $R_2 = 1,6$ см, $H = 20$ см.

3.9.3.10. $Q = -10$ мкКл, $R_1 = 1,2$ см, $R_2 = 2,4$ см, $H = 12$ см.

3.9.3.11. $Q = -5$ мкКл, $R_1 = 1,5$ см, $R_2 = 3$ см, $H = 15$ см.

Указание. Перед решением данной задачи следует прочесть пример расчета разности потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора в разделе 3.6 и пример 3.9.2.

3.9.4. Определите величину и направление напряженности электрического поля в точке с координатами (1,1,1), если потенциал электрического поля задается уравнением:

3.9.4.1. $\varphi = \varphi_0 \cos(kx + \alpha)$, $\varphi_0 = 5 \text{ В}$, $k = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha = \pi/6$.

3.9.4.2. $\varphi = \varphi_0 \sin(kx + \alpha)$, $\varphi_0 = 4 \text{ В}$, $k = 6 \text{ м}^{-1}$, $\alpha = \pi/3$.

3.9.4.3. $\varphi = \varphi_0 \cos(k_1x + k_2y)$, $\varphi_0 = 5 \text{ В}$, $k_1 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $k_2 = \pi/6 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.4. $\varphi = \varphi_0 \sin(k_1x + k_2y)$, $\varphi_0 = 5 \text{ В}$, $k_1 = \pi/2 \text{ м}^{-1}$, $k_2 = \pi/4 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.5. $\varphi = \varphi_0 \cos(k_1x + k_2z)$, $\varphi_0 = 10 \text{ В}$, $k_1 = k_2 = \pi/4 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.6. $\varphi = \varphi_0 \sin(k_1x + k_2z)$, $\varphi_0 = 2 \text{ В}$, $k_1 = \pi/6 \text{ м}^{-1}$, $k_2 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.7. $\varphi = \varphi_0 \cos(k_1x + k_2z)$, $\varphi_0 = 5 \text{ В}$, $k_1 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $k_2 = \pi/6 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.8. $\varphi = \varphi_0 \sin(k_1x + k_2z)$, $\varphi_0 = 20 \text{ В}$, $k_1 = \pi/4 \text{ м}^{-1}$, $k_2 = \pi/2 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.9. $\varphi = \varphi_0 \cos(k_1x + k_2y + k_3z)$, $\varphi_0 = 12 \text{ В}$, $k_1 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$,
 $k_2 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $k_3 = \pi/2 \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.10. $\varphi = \varphi_0 \sin(k_1x + k_2y + k_3z)$, $\varphi_0 = 9 \text{ В}$, $k_1 = \pi/6 \text{ м}^{-1}$,
 $k_2 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $k_3 = \pi \text{ м}^{-1}$.

3.9.4.11. $\varphi = \varphi_0 \cos(k_1x + k_2y + \alpha)$, $\varphi_0 = 5 \text{ В}$, $k_1 = \pi/6 \text{ м}^{-1}$,
 $k_2 = \pi/3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha = \pi/6$.

3.10. Задачи повышенной сложности

3.10.1. Определите потенциальную энергию системы, состоящей из шести равных зарядов Q , расположенных в углах правильного шестиугольника со стороной a .

3.10.2. Электрон пролетает мимо положительно заряженного шара радиусом R . При каком минимальном прицельном параметре ρ (рис. 3.10.1) электрон не будет захвачен шаром? Заряд шара $+Q$. Скорость электрона на бесконечности v .

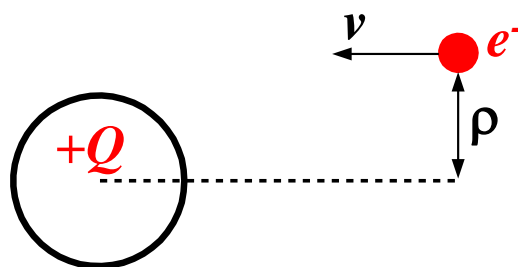


Рисунок 3.10.1

3.10.3. Пять параллельно заряженных плоскостей расположены на одинаковых расстояниях друг от друга. Поверхностные плотности зарядов у всех плоскостей одинаковы и равны σ . Постройте графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния x от средней плоскости.

- 3.10.4.** Два электрона летят навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 . На какое минимальное расстояние могут сблизиться эти электроны?
- 3.10.5.** Определите потенциал электрического поля равномерно заряженного по объему шара радиусом R , изготовленного из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε . Объемная плотность заряда шара ρ .
- 3.10.6.** Протон и дейтрон (ядро атома дейтерия) летят навстречу друг другу. Скорости частиц на большом расстоянии равны по модулю v . На какое минимальное расстояние сблизятся частицы?
- 3.10.7.** Две тонкостенные металлические сферы радиусами $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см образуют сферический конденсатор. Внешней сфере сообщен заряд $Q = 10^{-8}$ Кл, внутренняя сфера не заряжена и соединена через разомкнутый ключ тонким проводом с землей (рис. 3.10.2). Какой заряд протечет по проводу, если замкнуть ключ K ?
- 3.10.8.** В условиях предыдущей задачи внутреннюю сферу зарядили, а внешнюю соединили тонким проводом через ключ с землей. Какой заряд теперь протечет по проводу, если разомкнуть ключ?
- 3.10.9.** Металлическая сфера радиусом 1 м окружена сферическим слоем диэлектрика толщиной 0,5 м, вплотную прилегающим к сфере. Сфера несет заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Определите потенциал сферы, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 3$. Изменится ли ответ задачи, если сферический слой диэлектрика той же толщины будет расположен на расстоянии 50 см от поверхности сферы?
- 3.10.10.** По тонкому проволочному кольцу радиусом R и массой M равномерно распределен заряд $+Q$. На расстоянии h от центра кольца на оси кольца находится маленький заряженный шарик с зарядом $-Q$ и массой m . В начальный момент времени кольцо и шарик неподвижны. Определите скорость шарика в тот момент, когда он будет пролетать через центр кольца. Система находится в невесомости. Каким будет дальнейшее движение системы?

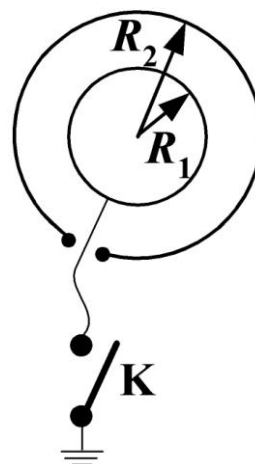


Рисунок 3.10.2

4. Проводники в электрическом поле

4.1. Электрическое поле внутри и снаружи проводника

Условия равновесия зарядов в проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому условием равновесия зарядов на проводнике является *равенство нулю напряженности электрического поля внутри проводника*.

Рассмотрим для определенности металлический проводник. Свободными зарядами в этом случае являются электроны. Если поместить проводник во внешнее электрическое поле напряженностью \vec{E}_0 , на все свободные электроны будет действовать сила $\vec{F} = -e\vec{E}_0$, под действием которой электроны придут в движение и будут смещаться против поля, что приведет к перераспределению зарядов в проводнике, частичному разделению положительных и отрицательных зарядов, появлению нескомпенсированных зарядов различного знака.

Описанное явление называется *электростатической индукцией*, а появившиеся в результате такого разделения заряды – индуцированными зарядами. Индуцированные заряды создают собственное электрическое поле \vec{E}' , на-

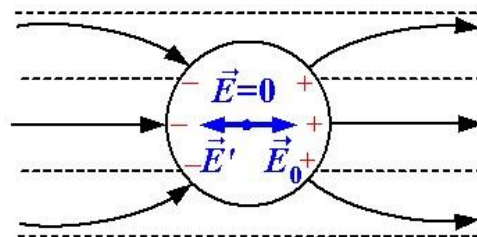


Рисунок 4.1.1

правленное против внешнего поля \vec{E}_0 (рис. 4.1.1). Перемещение зарядов прекратится, когда электрическое поле индуцированных зарядов компенсирует внешнее электрическое поле и напряженность электрического поля внутри проводника обратится в нуль:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0. \quad (4.1.1)$$

Если проводник зарядить, то заряды, полученные проводником, придут в движение, причем перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока не установится такое распределение, при котором напряженность электрического поля внутри проводника обратится в нуль. Таким образом, *в статическом случае внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю*.

Распределение зарядов по проводнику

Если проводник зарядить, сообщив ему некоторый избыточный заряд q , то он распределится по проводнику таким образом, что равенство (4.1.1) будет выполнено.

Выберем произвольную замкнутую поверхность внутри проводника (эта поверхность обозначена пунктиром на рис. 4.1.2, *а*). Поскольку напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, поток через данную поверхность также равен нулю. В соответствии с теоремой Гаусса это означает, что суммарный электрический заряд внутри этой поверхности равен нулю, то есть внутри поверхности отсутствуют избыточные (нескомпенсированные) заряды. Так как данное утверждение справедливо для *любой* замкнутой поверхности, расположенной внутри проводника, можно сделать вывод, что *внутри проводника избыточных зарядов нет*.

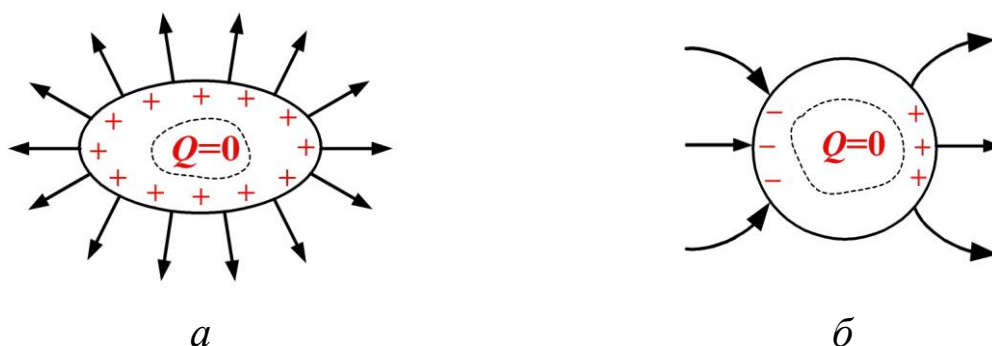


Рисунок 4.1.2

Нескомпенсированные заряды могут располагаться лишь на поверхности проводника, причем поверхностная плотность заряда σ в общем случае различна в разных точках этой поверхности. Избыточные заряды располагаются в очень тонком поверхностном слое проводника (толщина слоя составляет лишь несколько межатомных расстояний).

Распределение сообщенного проводнику заряда по поверхности проводника, в частности, легко объяснить взаимным отталкиванием одноименных зарядов, в результате которого они стремятся максимально удалиться друг от друга. Однако и индуцированные внешним полем заряды на незаряженном проводнике также располагаются в тонком приповерхностном слое, причем в разных точках проводника заряды отличаются не только плотностью, но и знаком (рис. 4.1.2, *б*).

*Эквипотенциальность проводника. Электрическое поле
вблизи поверхности проводника*

Выберем любые две точки A и B , расположенные внутри проводника (рис. 4.1.3), и рассчитаем разность потенциалов между ними по формуле (3.4.7):

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B (\vec{E} d\vec{l}) = 0,$$

поскольку вектор \vec{E} равен нулю в любой точке проводника.

Следовательно, *проводник, находящийся в равновесии, является эквипотенциальным телом, а его поверхность – эквипотенциальной поверхностью.*

Земля также является проводником. Поэтому во многих задачах можно считать, что все точки Земли имеют равный потенциал, и рассчитывать потенциал остальных тел не относительно бесконечно удаленной точки, а относительно Земли (то есть выбрать при определении потенциала произвольную постоянную таким образом, чтобы на поверхности Земли потенциал обращался в нуль).

Если два проводника соединить металлической проволокой, то система, состоящая из этих проводников и проволоки, образует единый проводник. Если до соединения проводников их потенциалы были различными, то при соединении электроны придут в движение и в проволоке возникнет электрический ток, который будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы проводников не станут равными.

Электрическое поле вблизи поверхности проводника

Поскольку поверхность проводника, находящегося в равновесии, является эквипотенциальной, силовые линии в любой его точке перпендикулярны этой поверхности (см. раздел 3.5).

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образующая которой нормальна к поверхности проводника, а основания площадью dS параллельны этой поверхности, причем одно из оснований расположено внутри, а другое – вне проводника, очень близко к его поверхности (на рис. 4.1.4 поверхность заряжена положительно).

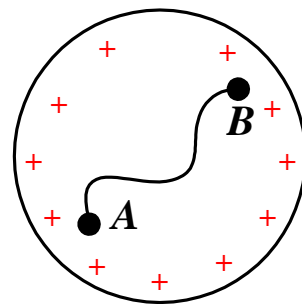


Рисунок 4.1.3

Поток вектора смещения через эту поверхность складывается из потока через внешнее основание, потока через внутреннее основание и потока через боковую поверхность. Но поток через внутреннее основание цилиндра равен нулю вследствие отсутствия электрического поля внутри проводника. Поток через боковые поверхности равен нулю, так как вектор напряженности, а следовательно и вектор смещения перпендикулярны поверхности проводника, то есть параллельны боковой поверхности цилиндра. Следовательно, поток через выбранную цилиндрическую поверхность равен потоку через ее внешнее основание DdS , где D – величина смещения вблизи поверхности проводника. Внутри этой цилиндрической поверхности попадает свободный заряд σdS (σ – плотность заряда вблизи данной точки поверхности проводника). Применяя к данной поверхности теорему Гаусса, получаем $DdS = \sigma dS$, то есть $D = \sigma$. Напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника

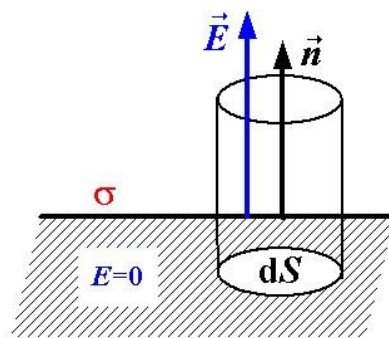


Рисунок 4.1.4

$$E = E_n = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (4.1.2)$$

Если плотность заряда $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$: вектор \vec{E} совпадает по направлению с внешней нормалью и направлен от поверхности проводника. Если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$: вектор \vec{E} направлен к поверхности проводника.

Таким образом,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \vec{n}, \quad (4.1.3)$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к элементу dS .

Рассмотрим поле, создаваемое положительно заряженным проводником, изображенным на рис. 4.1.5, *a*. На больших расстояниях от проводника его заряд можно считать точечным, и эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы (для экономии места на рисунке сфера приближена к проводнику).

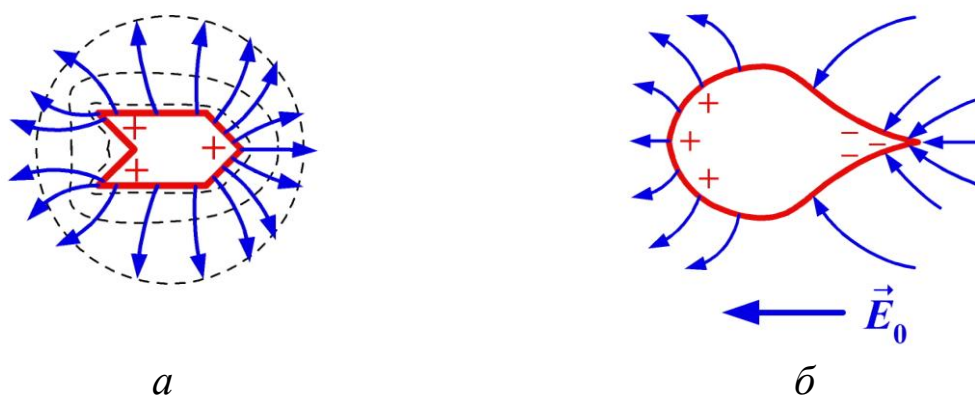


Рисунок 4.1.5

Вблизи проводника эквипотенциальные поверхности повторяют его форму. По мере удаления от проводника они все более приближаются к сферическим. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности расположены ближе друг к другу, поэтому напряженность поля здесь выше, следовательно, выше и поверхностная плотность зарядов. Вблизи же углублений эквипотенциальные поверхности расположены реже, следовательно, и напряженность, и плотность заряда здесь ниже. Особенно велики плотность зарядов и напряженность на остриях, поэтому вблизи острия может происходить стекание заряда с проводника, вызванное либо ионизацией молекул воздуха, окружающего проводник, либо вырыванием электронов с отрицательно заряженного острия.

Стекание заряда может происходить и с острия незаряженного проводника, помещенного в электрическое поле. В ситуации, показанной на рис. 4.1.5, б, индуцированные заряды резко усиливают электрическое поле вблизи острия, в результате чего происходит стекание электронов с острия. Проводник заряжается положительно.

4.2. Сила, действующая на поверхность проводника

Рассмотрим заряженный участок поверхности проводника, граничащий с вакуумом. На любой элемент dS поверхности проводника действует сила

$$d\vec{F} = dq\vec{E}_0 = \sigma dS\vec{E}_0, \quad (4.2.1)$$

где $dq = \sigma dS$ – заряд этого элемента; \vec{E}_0 – напряженность электрического поля, созданного *всеми остальными зарядами* в точке, где расположен элемент dS . Очевидно, что напряженность электрического поля \vec{E} вблизи данного элемента проводника складывается из напряженности \vec{E}_σ поля этого элемента и напряженности \vec{E}_0 :

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_0. \quad (4.2.2)$$

В точках, очень близких к площадке dS , площадку можно рассматривать как бесконечную равномерно заряженную плоскость. Напряженность \vec{E}_σ в этом случае направлена перпендикулярно площадке и определяется формулой (2.4.6): $E_\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (в нашем случае

$\varepsilon = 1$). Направления полей \vec{E} , \vec{E}_σ и \vec{E}_0 в случае положительной плотности заряда показаны на рис. 4.2.1.

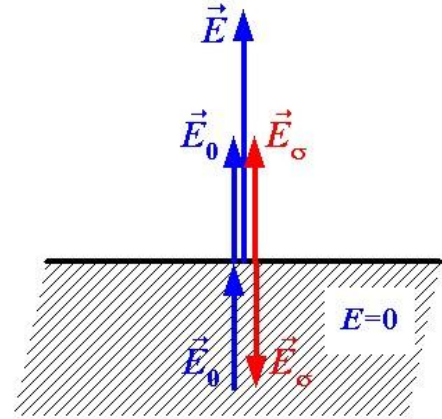


Рисунок 4.2.1

Поскольку внутри проводника $\vec{E} = 0$, $\vec{E}_\sigma + \vec{E}_0 = 0$, и модули напряженностей \vec{E}_σ и \vec{E}_0 равны: $E_\sigma = E_0$.

Вне проводника направления полей \vec{E}_σ и \vec{E}_0 совпадают, поэтому $E = E_\sigma + E_0 = 2E_0$. Следовательно, $\vec{E}_0 = \frac{\vec{E}}{2}$, поэтому

$$d\vec{F} = \frac{\sigma \vec{E} dS}{2}. \quad (4.2.3)$$

С учетом (4.1.3) в вакууме ($\varepsilon = 1$)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}. \quad (4.2.4)$$

Подставляя (4.2.4) в (4.2.3), получаем

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2 dS}{2} \vec{n}. \quad (4.2.5)$$

Заметим, что при любом знаке поверхностной плотности заряда и при любом направлении напряженности электрического поля сила $d\vec{F}$ направлена по внешней нормали, наружу проводника, стремясь его растянуть.

4.3. Свойства замкнутой проводящей оболочки

Поскольку в состоянии равновесия внутри проводника нескомпенсированных зарядов нет, удаление вещества из произвольного объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на распределении зарядов по поверхности проводника. Электрическое поле

внутри образовавшейся полости останется равным нулю, как это было бы в сплошном проводнике. Это свойство замкнутой проводящей оболочки используется для создания *электростатической защиты*: чтобы защитить, например, электрические приборы от влияния внешних полей, их достаточно окружить замкнутой проводящей оболочкой – поля внешних зарядов не проникнут в полость. На практике достаточно заменить сплошную оболочку густой металлической сеткой.

Рассмотрим теперь случай, когда в полости внутри оболочки содержится электрический заряд. Проведем внутри оболочки гауссову поверхность S произвольной формы, охватывающую полость, в которой расположен заряд (рис. 4.3.1). Поскольку напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, поток вектора напряженности через проведенную гауссову поверхность также равен нулю. По теореме Гаусса это означает, что суммарный электрический заряд внутри этой поверхности также равен нулю.

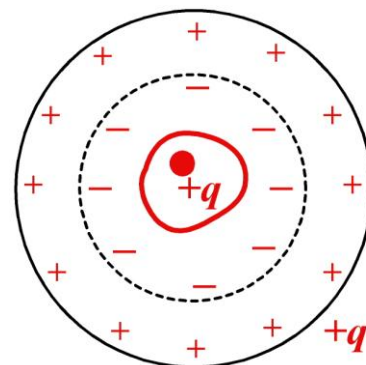


Рисунок 4.3.1

Это может произойти лишь в одном случае: если сумма индуцированных на поверхности полости зарядов равна по модулю и противоположна по знаку заряду, находящемуся внутри этой полости. Этот индуцированный заряд располагается таким образом, чтобы полностью скомпенсировать внутри проводника поле заряда, находящегося внутри полости.

Если оболочка, окружающая заряд, электрически нейтральна, то на внешней поверхности этой оболочки индуцируется заряд, равный заряду внутри полости. Распределение этого внешнего заряда определяется формой внешней поверхности проводника и не зависит от положения внутреннего заряда. Так, в ситуации, показанной на рис. 4.3.1, точечный заряд q находится внутри электрически нейтральной оболочки, внешняя поверхность которой представляет собой сферу. На внутренней поверхности оболочки индуцируется отрицательный заряд $-q$, распределенный таким образом, что поле внутри металла отсутствует. Заряд же на внешней поверхности оболочки равен q и распределен равномерно по этой поверхности. Это распределение не изменяется при перемещении заряда q внутри полости, и поле вне оболочки эквивалентно электрическому полю

сплошного металлического шара или равномерно заряженной сферы, несущих заряд q .

Еще более интересного эффекта можно добиться, соединив эту оболочку при помощи проводника с землей (такое соединение называется заземлением). В этом случае весь заряд с внешней поверхности оболочки распределится между самой оболочкой и Землей, а так как Земля по сравнению с оболочкой очень велика, то фактически весь внешний заряд уйдет в землю, и потенциал оболочки станет равен потенциалу Земли. Поверхностная плотность заряда Земли при этом останется неизменной опять же в силу очень больших размеров Земли. Таким образом, заземление оболочки приводит к тому, что поле вне оболочки остается таким же, как в ее отсутствие. Теперь уже электростатически экранированными оказываются внешние заряды: заряд, заключенный внутри оболочки, на них не действует. *Заземленная проводящая оболочка может служить электростатической защитой как для внутренних, так и для внешних зарядов.*

4.4*. Метод изображений

При расчете электрических полей, созданных зарядами, находящимися вблизи проводящих поверхностей, бывает полезен искусственный прием, называемый методом изображений. Метод основан на следующем. Если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником той же формы и создать на проводнике потенциал, равный потенциалу рассматриваемой эквипотенциальной поверхности, электрическое поле вне проводника не изменится. Верно и обратное: если проводник заменить каким-либо распределением дискретных зарядов, создающим в месте расположения проводника эквипотенциальную поверхность с потенциалом, равным потенциалу проводника, электрическое поле не изменится. Метод изображений состоит в том, чтобы мысленно заменить проводник одним или несколькими зарядами таким образом, чтобы поле вне проводника не изменилось, а затем все расчеты выполнять уже для поля этих воображаемых зарядов.

Рассмотрим простейший пример: точечный заряд q , находящийся на расстоянии h от бесконечной заземленной проводящей плоскости. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности в области I, содержащей заряд, показаны на рис. 4.4.1, а. По другую сто-

рону пластины (область II) электрическое поле не зависит от заряда q и в отсутствие в этой области зарядов равно нулю (осуществляется электростатическое экранирование, описанное в разделе 4.3). Сам проводник представляет собой эквипотенциальную поверхность с потенциалом $\varphi = 0$.

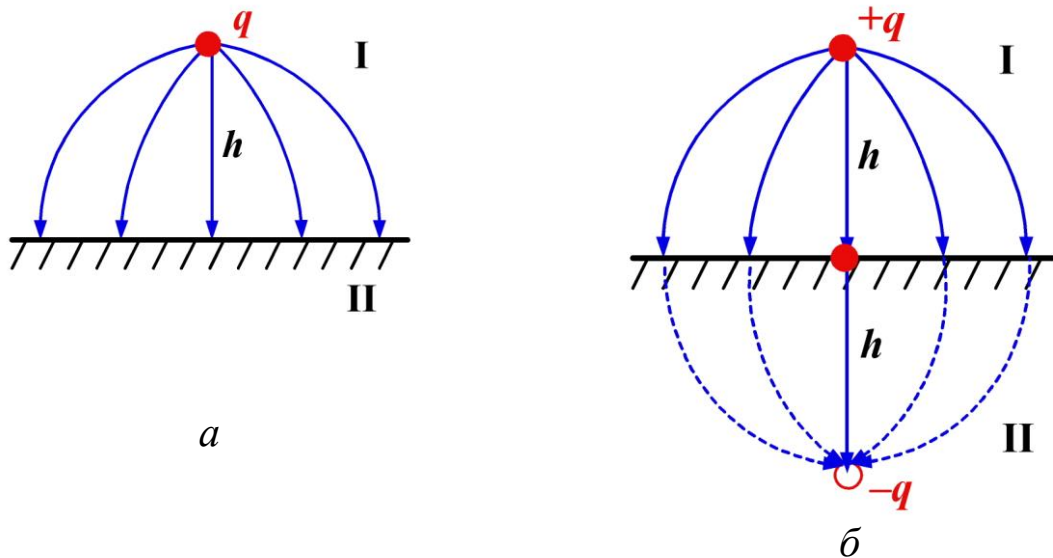


Рисунок 4.4.1

Однако электрическое поле в области I будет точно таким же, если проводящую плоскость заменить точечным зарядом $-q$, расположенным симметрично заряду q относительно плоскости (рис. 4.4.1, б). Действительно, эквипотенциальная поверхность с $\varphi = 0$ займет то же место, что и в случае проводящей плоскости. Сохранятся значения потенциала, а следовательно и напряженности в любой точке области I. Но в этом случае потенциал и напряженность электрического поля в любой точке этой области нетрудно посчитать, используя принцип суперпозиции.

Итак, метод изображений по существу основан на подгонке потенциала под условия на границе проводника: проводник заменяется другой *воображаемой* конфигурацией зарядов, создающей в исследуемой части пространства такое же поле, что и проводник.

Если это удастся сделать, задача становится более простой.

4.5. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

4.5.1. Незаряженный проводник вносят во внешнее электрическое поле, направленное так, как показано на рис. 4.5.1. Как направлена напряженность электрического поля в точках A и B ?

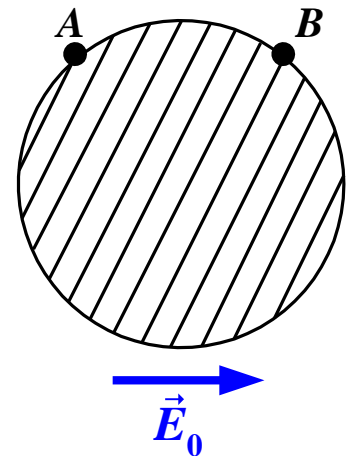


Рисунок 4.5.1

4.5.2. Зависит ли разность потенциалов между двумя точками заряженного проводника от его заряда?

4.5.3. К заземленному шару радиусом R поднесли точечный заряд q (расстояние между зарядом и центром шара равно $r > R$). Какой заряд индуцируется на шаре?

4.5.4. Вблизи плоского участка поверхности проводника напряженность электрического поля составляет 100 В/м . Какая сила действует на 1 см^2 поверхности? Как направлена эта сила?

4.5.5. Напряженность электрического поля в точке A вблизи поверхности проводника равна \vec{E} и направлена от проводника. Чему равна поверхностная плотность зарядов на проводнике вблизи этой точки?

4.5.6. На рис. 4.5.2 показана поверхность заряженного проводника. В какой из точек (A или B) напряженность электрического поля выше?

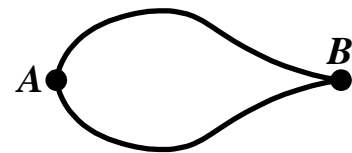


Рисунок 4.5.2

4.6. Примеры решения задач

Пример 4.6.1. Точечный заряд q поместили на расстояние r от центра O незаряженного сферического проводящего слоя, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2 . Определите потенциал электрического поля в точке O , если $r < R_1$.

Решение. Проведем мысленно сферическую поверхность, лежащую внутри проводящего слоя, с центром в точке O (рис. 4.6.1). Поскольку внутри проводника электрическое поле отсутствует, поток вектора напряженности через эту поверхность равен нулю. Заряд, заключенный внутри этой поверхности, складывается из заряда q и заряда q_1 , индуцированного на внутренней поверхности слоя. По теореме Гаусса $q + q_1 = 0$, следовательно, $q_1 = -q$.

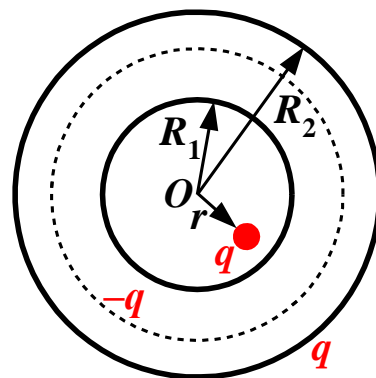


Рисунок 4.6.1

Поскольку проводящий слой электрически нейтрален, а внутри проводника заряды отсутствуют, это означает, что на внешней поверхности проводника индуцируется заряд $q_2 = -q_1 = q$.

Согласно принципу суперпозиции, потенциал в точке O можно представить как

$$\varphi = k \frac{q}{r} + k \int \frac{dq_1}{R_1} + k \int \frac{dq_2}{R_2}. \quad (4.6.1)$$

Первое слагаемое в правой части формулы – потенциал поля точечного заряда q , второе и третье – потенциалы, создаваемые соответственно внутренней и внешней поверхностями оболочки. Интегрирование выполняется по всей площади каждой из поверхностей. Поскольку R_1 и R_2 – постоянные величины, они могут быть вынесены за знак интеграла, а $\int dq_1 = q_1 = -q$ и $\int dq_2 = q$, из (4.6.1) получаем

$$\varphi = k \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q}{R_2} \right) = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.6.2)$$

Следует отметить, что эта простая формула применима лишь для точки O , по отношению к которой индуцированные заряды каждого знака находятся на равном расстоянии, и их распределение не играет роли.

Пример 4.6.2. В условиях предыдущей задачи определите напряженность электрического поля на расстоянии $2R_2$ от центра сферической оболочки.

Решение. Напряженность электрического поля внутри оболочки равна нулю. Поэтому если удалить из оболочки и заряд q , и наведенный на внутренней поверхности оболочки заряд q_1 , электрическое поле ни внутри оболочки, ни вне ее не изменится. Следовательно, напряженность электрического поля вне оболочки будет точно такой же, как напряженность электрического поля, создаваемого сферой радиуса R_2 , несущей заряд q , равномерно распределенный по ее поверхности. Для нахождения искомой напряженности проведем мысленно сферу радиусом $2R_2$ с центром в точке O и применим

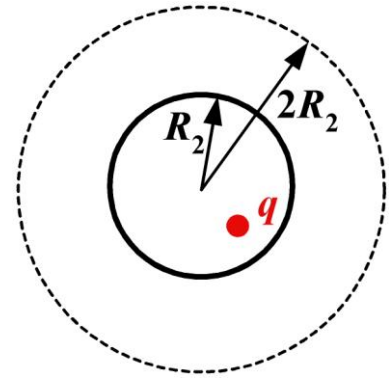


Рисунок 4.6.2

к ней теорему Гаусса: $E \cdot 4\pi(2R_2)^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, откуда $E = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R_2^2}$.

Пример 4.6.3. Точечный заряд q находится на расстоянии l от бесконечной заземленной проводящей плоскости. Определите зависимость поверхностной плотности зарядов, индуцированных на плоскости, от расстояния r до основания перпендикуляра, опущенного из заряда q на плоскость. Окружающая среда – воздух.

Решение. Согласно формуле (4.1.2), напряженность электрического поля вблизи поверхности металла

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

$$\text{соответственно } \sigma = \epsilon_0 E;$$

задача сводится к определению напряженности электрического поля вблизи плоскости.

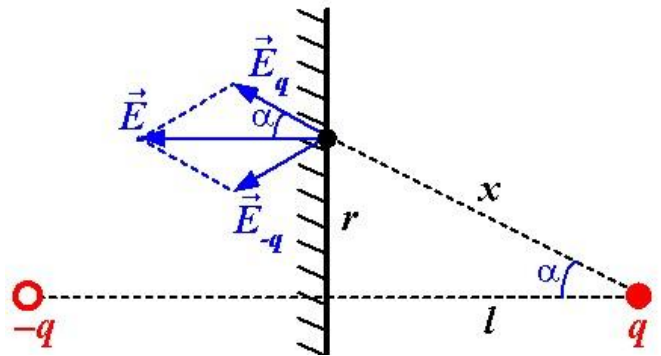


Рисунок 4.6.3

В соответствии с методом изображений поле, созданное зарядом q и плоскостью справа от плоскости (рис. 4.6.3), эквивалентно полю системы двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных симметрично относительно плоскости: $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$.

Пользуясь законом Кулона и проецируя на горизонтальную ось, получаем

$$E = 2E_q \cos \alpha = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot \frac{l}{x} = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 (l^2 + r^2)^{3/2}},$$

откуда $\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}$.

Знак минус показывает, что плотность заряда имеет знак, противоположный знаку заряда q .

Пример 4.6.4. В условиях предыдущей задачи определите работу электрического поля по удалению заряда на очень большое расстояние от плоскости.

Решение. Снова используем метод изображений. Сила притяжения между зарядом q и плоскостью равна силе притяжения между зарядом q и зарядом — «изображением» $-q$ (рис. 4.6.4). По определению работа этой силы при бесконечно малом перемещении заряда dx равна

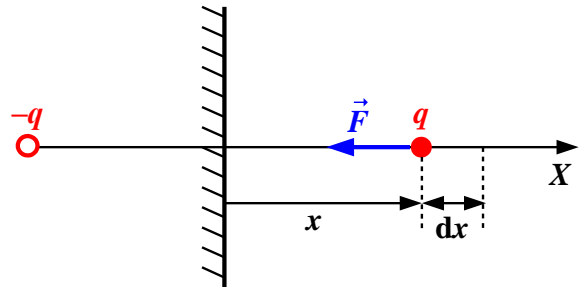


Рисунок 4.6.4

$$dA = F_x dx = -\frac{kq^2}{(2x)^2} dx.$$

Интегрируя в пределах от l до ∞ , получаем

$$A = -\int_l^{\infty} \frac{kq^2 dx}{4x^2} = -\frac{kq^2}{4l}.$$

4.7. Задачи для самостоятельного решения

4.7.1. Для изучения электрического пробоя часто используют так называемые «точечные» электроды. В действительности такие электроды представляют собой небольшие шарики, пространство между которыми заполнено исследуемым диэлектриком, причем расстояние между шариками значительно больше радиуса электродов. На один из шариков подают определенный потенциал, другой шарик заземляют. Пусть шарики имеют радиусы R_1 и R_2 . На первый шарик помещают заряд Q_1 , второй шарик заземляют. Диэлектрик

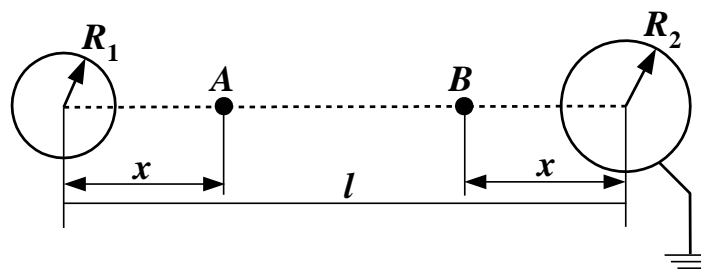


Рисунок 4.7.1

– воздух. Определите заряды первого и второго шариков и напряженность электрического поля в точках A и B (рис. 4.7.1), при потенциале $\varphi_1 = 10^4$ В, если:

- 4.7.1.1. $R_1 = R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,1$ см.
 4.7.1.2. $R_1 = R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,15$ м, $x = 0,1$ см.
 4.7.1.3. $R_1 = R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,20$ м, $x = 0,1$ см.
 4.7.1.4. $R_1 = R_2 = 0,2$ мм, $l = 0,20$ м, $x = 0,2$ см.
 4.7.1.5. $R_1 = R_2 = 0,2$ мм, $l = 0,20$ м, $x = 0,3$ см.
 4.7.1.6. $R_1 = 0,2$ мм, $R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,1$ см.
 4.7.1.7. $R_1 = 0,2$ мм, $R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,2$ см.
 4.7.1.8. $R_1 = 0,2$ мм, $R_2 = 0,1$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,3$ см.
 4.7.1.9. $R_1 = 0,1$ мм, $R_2 = 0,2$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,1$ см.
 4.7.1.10. $R_1 = 0,1$ мм, $R_2 = 0,2$ мм, $l = 0,1$ м, $x = 0,2$ см.
 4.7.1.11. $R_1 = 0,1$ мм, $R_2 = 0,2$ мм, $l = 0,2$ м, $x = 0,2$ см.

4.7.2. Точечный заряд $q = 0,1$ мкКл находится на расстоянии $l = 0,1$ м от бесконечной заземленной проводящей плоскости (рис. 4.7.2).

4.7.2.1. Определите силу притяжения заряда к плоскости.

4.7.2.2. Определите плотность индуцированных на плоскости зарядов в точке O .

4.7.2.3. Определите напряженность электрического поля в точке O , расположенной вблизи плоскости, со стороны заряда q .

4.7.2.4. Определите напряженность электрического поля в точке A , расположенной вблизи плоскости.

4.7.2.5. Определите плотность зарядов, индуцированных на плоскости вблизи точки A .

4.7.2.6. Определите напряженность электрического поля в точке B .

4.7.2.7. Определите потенциал электрического поля в точке B .

4.7.2.8. Определите напряженность электрического поля в точке C .

4.7.2.9. Определите потенциал электрического поля в точке C .

4.7.2.10. Определите напряженность электрического поля в точке D .

4.7.2.11. Определите плотность заряда, индуцированного на плоскости вблизи точки D .

4.7.2.12. Определите потенциал электрического поля в точке D .

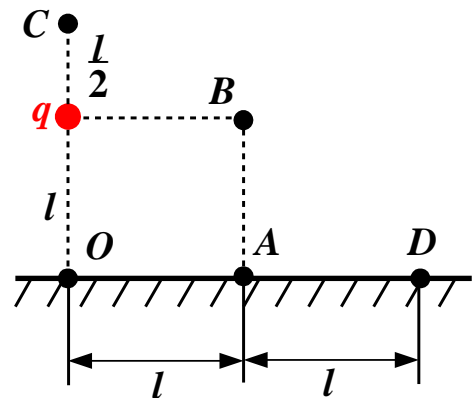


Рисунок 4.7.2

4.7.3. Тонкое проводящее кольцо радиусом R , несущее заряд Q , расположено параллельно бесконечной проводящей заземленной плоскости на расстоянии l от нее. Определите потенциал электрического поля в центре кольца (данная задача является общей для всех вариантов).

4.8. Задачи повышенной сложности

4.8.1. Точечный заряд (рис. 4.8.1) расположен внутри прямого угла, образованного заземленными проводящими плоскостями. Расстояния от заряда до плоскостей равны соответственно a и b . Определите потенциал электрического поля в точках A и B .

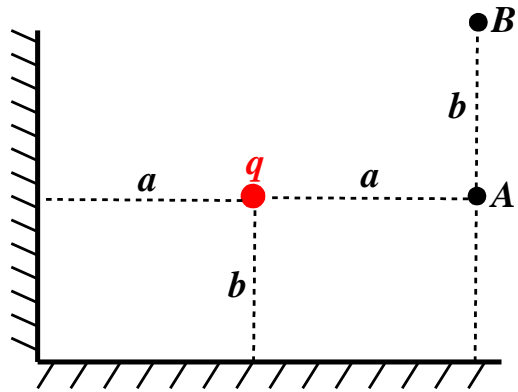


Рисунок 4.8.1

4.8.2. Длинный цилиндр радиусом R , равномерно заряженный по поверхности с поверхностной плотностью заряда σ расположен горизонтально на расстоянии H от поверхности Земли. Определите разность потенциалов между Землей и цилиндром. Поверхность Земли считать плоской.

4.8.3. Центр проволочного кольца радиусом $2R$ находится на расстоянии R от центра металлического заземленного шара радиусом R (рис. 4.8.2). Какой заряд индуцируется на шаре?

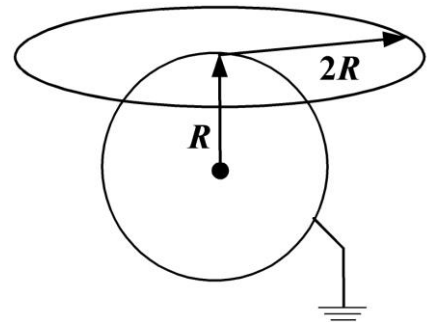


Рисунок 4.8.2

5. Электрическое поле в диэлектриках

5.1. Электрический диполь

Электрическим диполем называется система двух точечных зарядов $(+Q, -Q)$, равных по модулю и противоположных по знаку, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния r до рассматриваемых точек поля.

Вектор \vec{l} , соединяющий отрицательный заряд с положительным, называется **плечом диполя** (рис. 5.1.1).

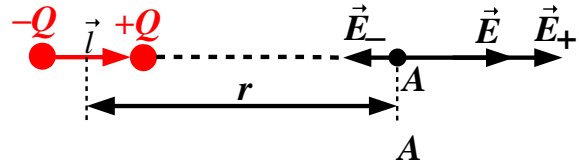


Рисунок 5.1.1

Электрическим моментом диполя или просто **дипольным моментом** называется вектор

$$\vec{p} = |Q|\vec{l}. \quad (5.1.1)$$

В соответствии с принципом суперпозиции (1.3.4) напряженность поля диполя в произвольной точке пространства $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, где \vec{E}_+ и \vec{E}_- – напряженности полей, создаваемых соответственно зарядами

$+Q$ и $-Q$ в данной точке. В вакууме $\vec{E}_+ = k \frac{Q}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}$, $\vec{E}_- = k \frac{Q}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$, где

\vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиус-векторы, соединяющие заряды $+Q$ и $-Q$ с данной точкой поля. В точке A , расположенной вне диполя на его оси (рис. 5.1.1), напряженность электрического поля составляет

$$\vec{E}_A = k \frac{Q}{(r-l/2)^2} \frac{\vec{l}}{l} - k \frac{Q}{(r+l/2)^2} \frac{\vec{l}}{l} = k \frac{2rQ\vec{l}}{(r^2 - l^2/4)^2}.$$

Так как $r^2 \gg l^2/4$, получаем

$$\vec{E}_A = k \frac{2Q\vec{l}}{r^3} = 2k \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (5.1.2)$$

Интересно отметить, что электрическое поле по обе стороны диполя направлено одинаково. Его направление совпадает с направлением дипольного момента.

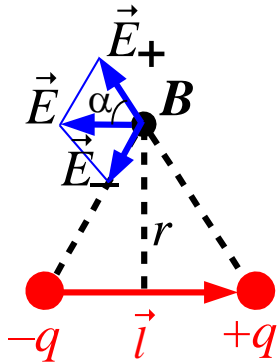


Рисунок 5.1.2

В точке B , расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины (рис. 5.1.2), $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = k \frac{Q}{r^2 + l^2/4}$, вектор \vec{E} направлен параллельно вектору \vec{p} , но в противоположную сторону, и равен по величине

$$|\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = 2|\vec{E}_+| \cos \alpha = k \frac{Ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}.$$

Вновь учитывая, что $r^2 \gg l^2/4$, получаем

$$\vec{E} = -k \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (5.1.3)$$

Интересно поведение дипольного момента во внешнем электрическом поле.

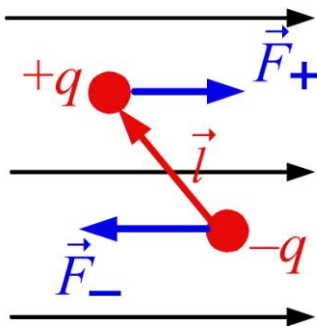


Рисунок 5.1.3

В **однородном** электрическом поле, то есть поле, величина и направление которого не меняются при переходе от точки к точке, на заряды действуют равные по величине и противоположные по знаку силы $q\vec{E}$ и $-q\vec{E}$ (рис. 5.1.3).

Эти силы стремятся повернуть диполь таким образом, чтобы его дипольный момент совпадал по направлению с напряженностью электрического поля. Суммарный вращающий момент этих сил \vec{M} равен векторному произведению дипольного момента на напряженность электрического поля: $\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}]$. Модуль момента сил $M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$.

В **неоднородном** электрическом поле силы, действующие на заряды диполя, различны по величине (рис. 5.1.4), в результате чего диполь не только стремится сориентироваться в направлении электрического поля, но и втягивается в область более сильного поля.

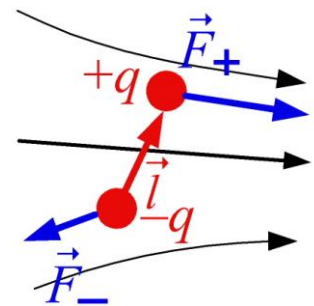


Рисунок 5.1.4

5.2. Поляризация диэлектриков. Поляризованность

Диэлектриками называют вещества, не проводящие электрический ток. Это означает, что в диэлектриках, в отличие от проводников, нет свободных зарядов, способных перемещаться под действием электрического поля на значительные расстояния. Однако при внесении диэлектрика в электрическое поле происходят существенные изменения как в поле, так и в самом диэлектрике.

Одно из проявлений таких изменений выражено появлением диэлектрической проницаемости ϵ в законе Кулона: в диэлектрике электрическое поле в ϵ раз слабее, чем в вакууме. Причиной таких изменений является *поляризация диэлектриков: смещение положительных зарядов в направлении электрического поля, а отрицательных – против поля*. Эти смещения очень малы по сравнению с перемещением зарядов в проводнике, где свободные заряды могут перемещаться по всему объему вещества, однако в результате поляризации диэлектрик приобретает дипольный момент, а на поверхности диэлектрика (иногда – и в его объеме) появляются нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис. 5.2.1).

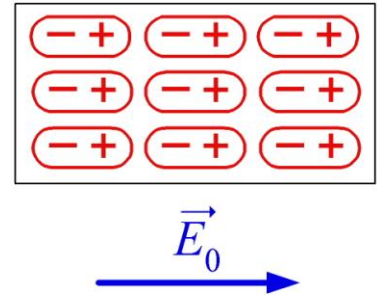


Рисунок 5.2.1

Мерой поляризации диэлектрика является векторная величина \vec{P} , называемая поляризованностью диэлектрика.

Поляризованность диэлектрика равна дипольному моменту единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{\Delta V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (5.2.1)$$

где $\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i$ – векторная сумма дипольных моментов

\vec{p}_i всех молекул, содержащихся в объеме ΔV .

Экспериментально установлено, что для большинства диэлектриков в не очень сильных электрических полях поляризованность \vec{P} линейно зависит от напряженности электрического поля \vec{E} . Исключение составляют сегнетоэлектрики, описанные далее.

Вещество называется изотропным, если его свойства не зависят от направления. В применении к диэлектрикам это означает, что их

электрические свойства не зависят от направления вектора напряженности электрического поля. Поляризованность изотропного диэлектрика сонаправлена с напряженностью электрического поля:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (5.2.2)$$

Безразмерная величина χ называется *диэлектрической восприимчивостью* диэлектрика. Диэлектрическая восприимчивость вещества всегда положительна. В газообразных диэлектриках она достаточно мала, а в твердых и газообразных диэлектриках обычно составляет несколько единиц.

5.3. Механизмы поляризации

Механизм поляризации зависит от структуры диэлектриков. Рассмотрим три основных типа диэлектриков.

Неполярные диэлектрики состоят из нейтральных молекул, в которых центры положительных и отрицательных зарядов совпадают¹. Это, например, молекулы H_2 , O_2 , N_2 , CCl_4 , одноатомные молекулы инертных газов и многие другие. В отсутствие электрического поля дипольный момент таких молекул равен нулю.

Во внешнем электрическом поле отрицательно заряженные электронные оболочки атомов и молекул смещаются против поля (положительные заряды смещаются в направлении поля, но массы атомных ядер гораздо больше масс электронов, поэтому такое смещение незначительно по сравнению с электронным). В результате молекула деформируется и приобретает *индуцированный* дипольный момент

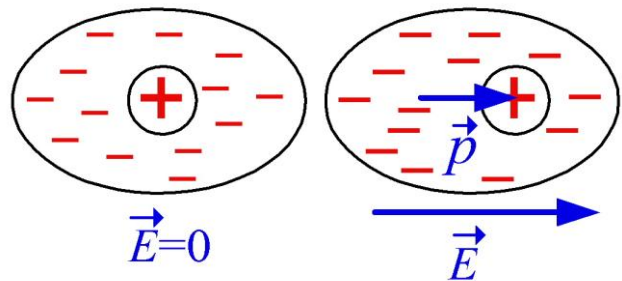


Рисунок 5.3.1

$$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (5.3.1)$$

¹ Понятие центра зарядов сходно с понятием центра масс. Так, центром положительных зарядов является точка, определяемая радиус-вектором,

$$\vec{r}^+ = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum q_i^+}. \text{ Суммирование производится по всем положительным зарядам}$$

q_i^+ ; \vec{r}_i^+ – радиус-векторы соответствующих зарядов.

направленный параллельно напряженности электрического поля (рис. 5.3.1). Величина α имеет размерность объема и называется поляризуемостью молекулы. Поляризуемость зависит только от структуры молекулы. Если концентрация молекул диэлектрика равна n , то поляризованность диэлектрика составляет

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}. \quad (5.3.2)$$

Тепловое движение неполярных молекул никак не сказывается на величине их дипольных моментов, а следовательно и на поляризованности диэлектрика.

Сопоставляя формулы (5.2.2) и (5.3.2), получаем выражение для диэлектрической восприимчивости неполярного диэлектрика

$$\chi = n\alpha. \quad (5.3.3)$$

Поляризация неполярных диэлектриков называется *электронной*, так как обусловлена смещением электронных оболочек.

Полярные диэлектрики также состоят из нейтральных молекул, но центры положительных и отрицательных зарядов в этих молекулах не совпадают. Характерным примером такой молекулы является молекула воды. Такая молекула обладает собственным дипольным моментом \vec{p}_e .

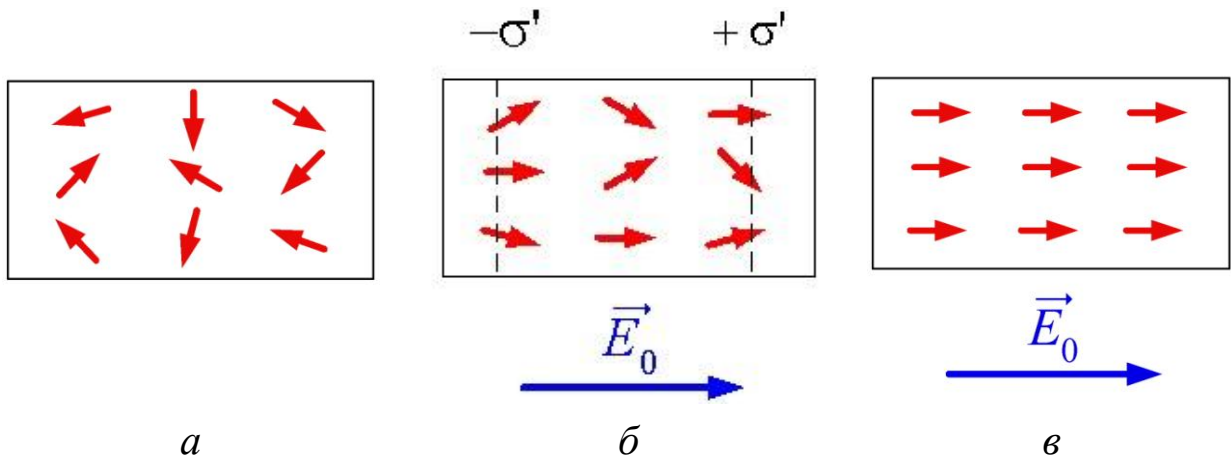


Рисунок 5.3.2

Вне электрического поля дипольные моменты различных молекул \vec{p}_{ei} направлены произвольным образом (рис. 5.3.2, а), поляри-

зованность диэлектрика $\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_{ei}}{\Delta V}$ равна нулю. Как и неполярная, по-

лярная молекула в электрическом поле деформируется. Эта деформация невелика, и индуцированным дипольным моментом можно пренебречь по сравнению с собственным дипольным моментом молекулы. В электрическом поле на полярные молекулы действует вращающий момент, в результате чего наблюдается *ориентационная поляризация*: положительные заряды смещаются в направлении электрического поля, а отрицательные – против поля: молекулы ориентируются таким образом, что их дипольные моменты становятся параллельны вектору напряженности электрического поля.

Это явление называется *ориентационной поляризацией*. Процессу ориентационной поляризации препятствует тепловое движение, хаотично изменяющее ориентацию молекул. В результате совместного действия этих двух процессов возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул в направлении электрического поля, возрастающая при увеличении электрического или снижении температуры (рис. 5.3.2, б). Поляризованность полярного диэлектрика

$$\vec{P} = n \langle \vec{p}_e \rangle, \quad (5.3.4)$$

где n – концентрация молекул; $\langle \vec{p} \rangle_e$ – среднее значение вектора дипольного момента всех молекул, содержащихся в объеме ΔV . В слабых электрических полях

$$\langle \vec{p}_e \rangle = \frac{p_e^2 \vec{E}}{3kT}, \quad (5.3.5)$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Поляризованность диэлектриков составляет

$$\vec{P} = \frac{np_e^2 \vec{E}}{3kT}. \quad (5.3.6)$$

Сопоставляя (5.3.6) с (5.2.2), получаем выражение для диэлектрической восприимчивости полярного диэлектрика в слабых полях

$$\chi = \frac{np_e^2}{3\varepsilon_0 kT}. \quad (5.3.7)$$

В очень сильном электрическом поле и при достаточно низкой температуре дипольные моменты практически всех молекул располагаются параллельно вектору напряженности электрического поля \vec{E} (рис. 5.3.2, в). При этом поляризованность полярного диэлектрика достигает максимального значения

$$P_{\max} = n p_e. \quad (5.3.8)$$

Таким образом, линейная зависимость поляризованности полярного диэлектрика от напряженности электрического поля сохраняется только в слабых полях. В более сильных полях эта зависимость становится нелинейной, а затем поляризованность совсем перестает зависеть от напряженности (рис. 5.3.3).

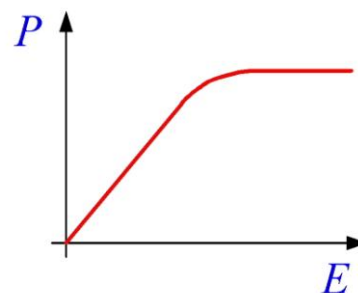


Рисунок 5.3.3

Ионные диэлектрики, простейшим примером которых являются кристаллы поваренной соли NaCl, состоят из отдельных положительных и отрицательных ионов, образующих кристаллическую решетку (рис. 5.3.4). Под действием электрического поля положительные ионы смещаются по полю, отрицательные – против поля. Кристалл приобретает дипольный момент. Это явление называется *ионной поляризацией*.

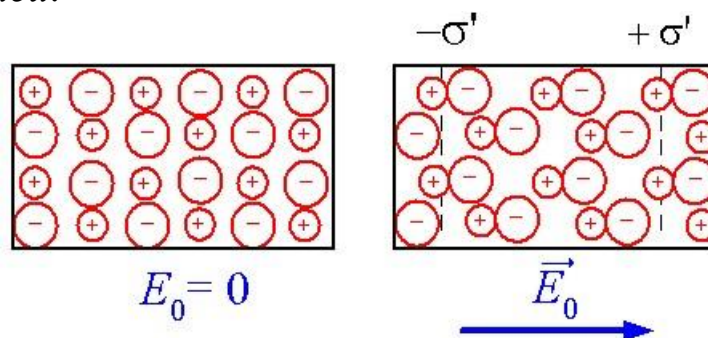


Рисунок 5.3.4

5.4. Напряженность электрического поля внутри диэлектрика

Пусть в вакууме создано однородное электрическое поле \vec{E}_0 . Внесем в это поле пластинку из однородного диэлектрика, расположив ее так, как показано на рис. 5.4.1. Каким бы ни был диэлектрик, под действием электрического поля он поляризуется: положительные заряды смещаются по полю, отрицательные – против поля. В результате на правой границе диэлектрика образуется скопление положительных зарядов (поверхностная плотность зарядов $+\sigma'$), а у левой границы – отрицательных ($-\sigma'$). Эти нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации, называются *поля-*

ризациянными или связанными (в отличие от сторонних зарядов, не входящих в состав вещества диэлектрика).

Сторонние заряды могут находиться как вне, так и внутри диэлектрика, но они не входят в состав его молекул. Внутри диэлектрика связанные заряды создают собственное электрическое поле \vec{E}' , направленное против внешнего поля \vec{E}_0 . Вне диэлектрика напряженность электрического поля связанных зарядов равна нулю.

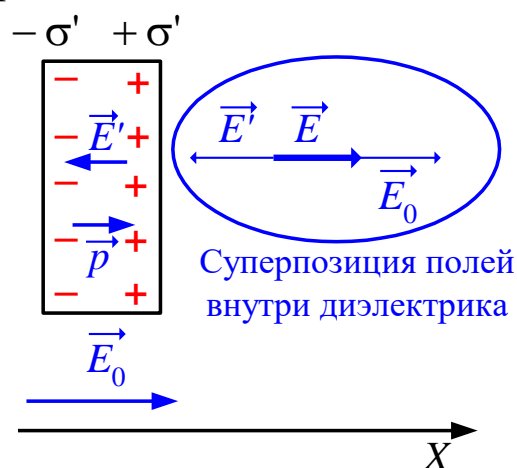


Рисунок 5.4.1

Результирующее электрическое поле складывается из внешнего поля и поля связанных зарядов: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. В проекции на направление внешнего электрического поля (ось X на рис. 5.4.1) получаем

$$E = E_0 - E'. \quad (5.4.1)$$

Поле \vec{E}' эквивалентно полю двух параллельных плоскостей, заряженных с поверхностной плотностью заряда $+\sigma'$ и $-\sigma'$ соответственно. Используя теорему Гаусса и принцип суперпозиции для вектора напряженности электрического поля, нетрудно определить напряженность этого поля:

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (5.4.2)$$

В свою очередь, плотность поляризационных зарядов σ' связана с поляризованностью диэлектрика. Действительно, из определения поляризованности (5.2.1) следует, что полный дипольный момент пластинки по модулю равен $p_{\text{пл}} = PV = PSd$, где S – площадь грани пластинки; d – ее толщина. В то же время дипольный момент пластинки можно рассчитать и другим способом: $p_{\text{пл}} = Q'd$, где $Q' = \sigma' S$ – модуль связанного заряда на каждой из поверхностей. Таким образом, $PSd = \sigma' Sd$ и

$$\sigma' = P. \quad (5.4.3)$$

Из (5.4.1), (5.4.2) и (5.4.3) получаем

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (5.4.4)$$

В слабых полях, принимая во внимание (5.2.2), получаем $E = E_0 - \chi E$ или

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (5.4.5)$$

Величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (5.4.6)$$

есть не что иное, как уже известная нам диэлектрическая проницаемость среды. Как уже отмечалось, *диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз напряженность электрического поля внутри диэлектрика слабее, чем в вакууме*. Диэлектрическая проницаемость среды определяется способностью диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

5.5. Поляризованность и вектор смещения

Из определения вектора смещения $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ и формул (5.2.2) и (5.4.6) нетрудно получить равенство

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (5.5.1)$$

а из (5.4.5) следует, что

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0. \quad (5.5.2)$$

Таким образом, *вектор смещения характеризует электрическое поле, созданное сторонними (свободными) зарядами, не входящими в состав диэлектрика, тогда как напряженность является характеристикой поля всех зарядов – как свободных, так и связанных*.

5.6. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим границу двух диэлектриков, диэлектрические проницаемости которых различны и составляют ε_1 и ε_2 соответственно. Пусть на этой границе нет сторонних зарядов. Проведем вблизи границы раздела небольшой прямоугольный замкнутый контур $ABCD$, ориентированный так, как показано на рис. 5.6.1.

Пусть длина стороны AB контура равна l , а длины сторон AD и BC ничтожно малы (но стороны, тем не менее, пересекают границу раздела диэлектриков).

Согласно теореме о циркуляции вектора напряженности электрического поля (3.2.1), $\oint_{ABCD} (\vec{E} d\vec{l}) = 0$.

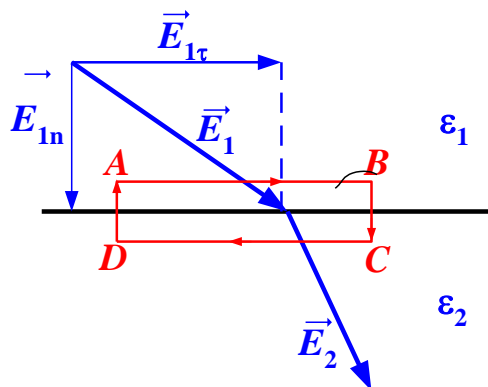


Рисунок 5.6.1

$$\text{Но } \oint_{ABCD} (\vec{E} d\vec{l}) = \int_{AB} (\vec{E} d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E} d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E} d\vec{l}) + \int_{DA} (\vec{E} d\vec{l}) = E_{1\tau} l - E_{2\tau} l,$$

где $E_{1\tau}, E_{2\tau}$ – тангенциальные составляющие векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 (интегралы по отрезкам AB и CD имеют разные знаки, так как пути интегрирования противоположны; интегралы по отрезкам BC и DA пренебрежимо малы). Поэтому

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (5.6.1)$$

Заменив, согласно (5.5.2) проекции вектора \vec{E} проекциями вектора \vec{D} , получаем

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (5.6.2)$$

Построим теперь на границе раздела двух диэлектриков цилиндр бесконечно малой высоты с основаниями, лежащими в разных диэлектриках и параллельными границе раздела (рис. 5.6.2).

Пусть основания цилиндра будут настолько малы, что в пределах каждого из них вектор смещения \vec{D} не изменяется. Согласно теореме Гаусса, поток вектора смещения через поверхность цилиндра $\oint D_n dS = D_{2n} S - D_{1n} S = 0$, поскольку внутри цилиндра свободных зарядов нет. Следовательно,

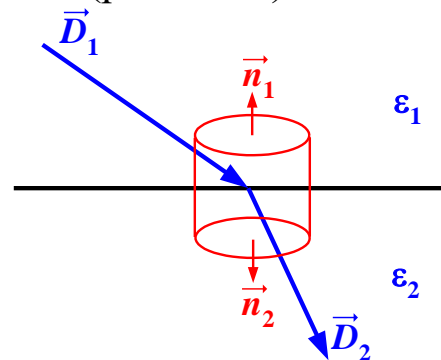


Рисунок 5.6.2

$$D_{2n} = D_{1n}; \quad (5.6.3)$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (5.6.4)$$

Таким образом, если на границе раздела двух однородных диэлектриков сторонних зарядов нет, то при переходе этой границы составляющие E_τ и D_n не изменяются, а составляющие E_n и D_τ испытывают скачок.

Это означает, что силовые линии и линии смещения на границе преломляются (рис. 5.6.3). Найдем соотношение между углами α_1 и α_2 . Из рисунка видно,

что $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}$, откуда

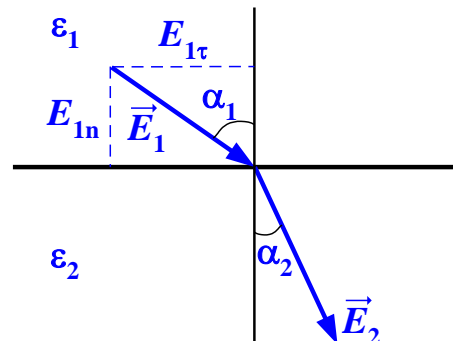


Рисунок 5.6.3

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (5.6.5)$$

Силовые линии и линии смещения на границе вакуум-диэлектрик ($\varepsilon_2 = 2$) показаны на рис. 5.6.4. Так как $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_1$, $\alpha_2 > \alpha_1$.

Кроме того, $E_2 < E_1$, поэтому в диэлектрике линии напряженности идут реже, а линии смещения – гуще, чем в вакууме.

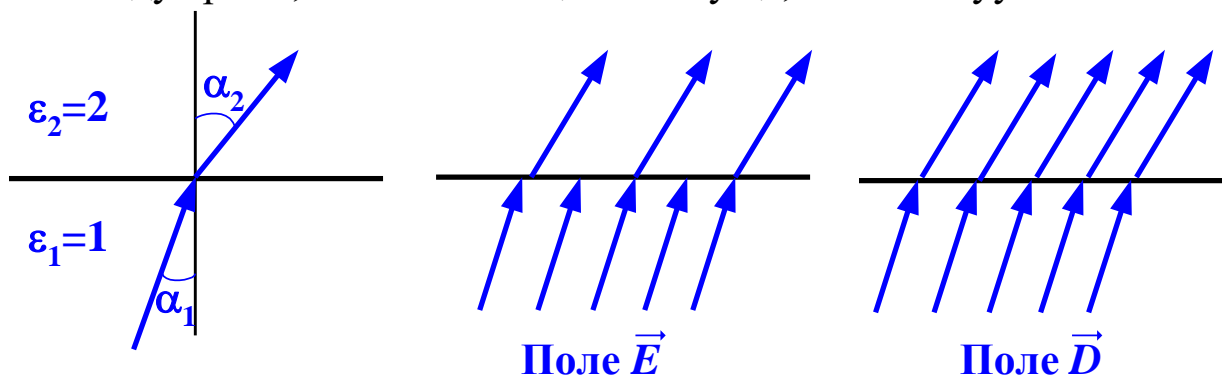


Рисунок 5.6.4

5.7*. Анизотропные диэлектрики

До сих пор мы рассматривали лишь *изотропные* диэлектрики, электрические свойства которых не зависят от направления электрического поля. К таким диэлектрикам относятся все газообразные и почти все жидкие диэлектрики, а также аморфные твердые диэлектрики и кристаллические диэлектрики с симметричной структурой

(например ионные кристаллы типа NaCl). Существуют, однако, *анизотропные* кристаллы, поляризация которых зависит от направления электрического поля: в одних направлениях ионы смещаются в электрическом поле легче, чем в перпендикулярном ему. Такие вещества называются *анизотропными*. В анизотропных диэлектриках зависимость $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ нарушается, и зависимость вектора \vec{D} от напряженности электрического поля описывается значительно более сложным образом:

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_0(\epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z); \\ D_y = \epsilon_0(\epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z); \\ D_z = \epsilon_0(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z). \end{cases} \quad (5.7.1)$$

Такая более сложная зависимость является причиной многих необычных свойств анизотропных кристаллов, например явления двойного лучепреломления, которое мы подробно рассмотрим в курсе оптики.

5.8*. Сегнетоэлектрики

Некоторые кристаллические диэлектрики обладают необычными диэлектрическими свойствами. Впервые эти свойства были обнаружены у кристаллов сегнетовой соли $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, и потому все вещества, обладающие подобными свойствами, названы *сегнетоэлектриками*. Свойства сегнетовой соли, характерные для всех сегнетоэлектриков, впервые изучены советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко в 1930–1934 годах. Помимо сегнетовой соли, сегнетоэлектрическими свойствами обладают фосфат калия, титанат бария и многие другие соединения. Все сегнетоэлектрики – это ионные кристаллы с кристаллической решеткой, обладающей низкой симметрией. В таких решетках под влиянием сильного взаимодействия между частицами образуются области спонтанной (самопроизвольной) поляризации, называемые *доменами*. Домены обладают огромными (по сравнению с отдельными молекулами) дипольными моментами. В отсутствие электрического поля (если кристалл сегнетоэлектрика не находился в электрическом поле ранее) сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из доменов с самыми различными направлениями поляризованности. (Эта ситуация схематично показана на рис. 5.8.1, а).

Поскольку поляризованность различных доменов направлена по-разному, результирующее значение дипольного момента всего сегнетоэлектрика близко к нулю, а следовательно близка к нулю и его поляризованность. При внесении сегнетоэлектрика в электрическое поле происходит переориентация дипольных моментов доменов: векторы их поляризованности приближаются к направлению поля, и тем ближе, чем сильнее поле. Кроме того, границы между отдельными доменами могут смещаться, увеличивая объем наиболее энергетически выгодных доменов за счет наименее выгодных (рис. 5.8.1, б). Так как в поле переориентируются не отдельные молекулы, а домены, состоящие из тысяч молекул, сегнетоэлектрики имеют огромную диэлектрическую проницаемость (например, для сегнетовой соли $\epsilon \approx 10^4$). При этом смещение D оказывается не пропорциональным напряженности поля E . Следовательно, диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика оказывается зависящей от напряженности поля. Если после первоначального увеличения напряженности электрического поля (кривая 1 на рис. 5.8.2) затем уменьшать внешнее поле, то уменьшение смещения будет происходить по участку 2. Когда напряженность поля становится равной нулю, смещение не равно нулю и изображается отрезком D_1 . Это происходит потому, что собственное электрическое поле доменов поддерживает их некоторую ориентацию, и сегнетоэлектрик остается поляризованным даже в отсутствие внешнего поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризацию, необходимо создать электрическое поле E_c обратного направления. Эта величина называется *коэрцитивной силой*.

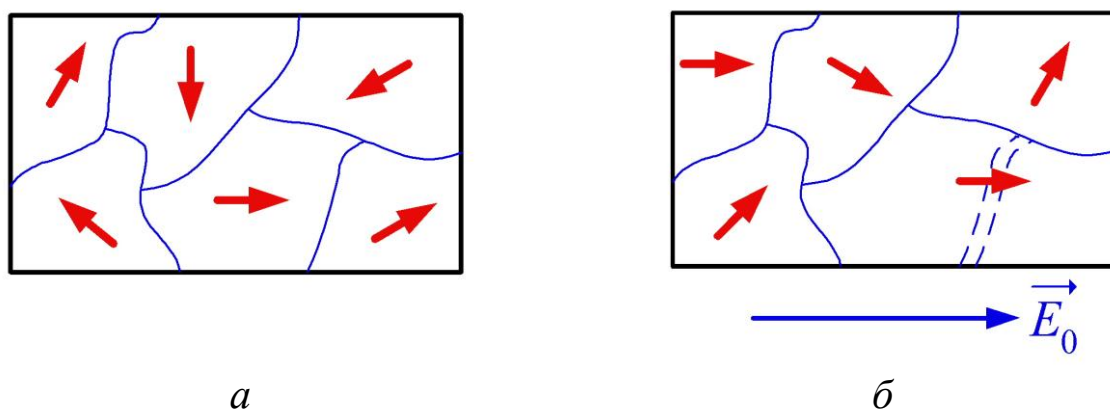


Рисунок 5.8.1

При дальнейшем циклическом изменении напряженности поля изменение смещения описывается изображенной на рис. 5.8.2 петлеобразной кривой – *петлей гистерезиса*.

Сегнетоэлектрические свойства зависят от температуры. При температуре выше некоторого значения T_K (значения T_K различны для разных сегнетоэлектриков) сегнетоэлектрические свойства исчезают, и сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик. Эта температура называется *точкой Кюри*. Некоторые диэлектрики имеют две точки Кюри, например сегнетова соль имеет две температуры Кюри: $+24\text{ }^\circ\text{C}$ и $-18\text{ }^\circ\text{C}$, ее сегнетоэлектрические свойства наблюдаются только при температурах, лежащих между этими точками.

Сегнетоэлектрики нашли большое научно-техническое применение. Так, титанат бария, благодаря его высокой химической устойчивости и сохранению сегнетоэлектрических свойств в широком температурном диапазоне ($T_K = 120\text{ }^\circ\text{C}$) используется в качестве генератора и приемника ультразвуковых волн, многие сегнетоэлектрики используются в качестве материалов с высокими значениями диэлектрической проницаемости (например, в конденсаторах).

5.9*. Пьезоэффект

Некоторые анизотропные кристаллы, обладающие достаточно низкой симметрией (в том числе все сегнетоэлектрики), при деформации поляризуются. Величина поляризации пропорциональна деформации, а следовательно, в пределах упругости, и механическому напряжению. Это явление называется прямым пьезоэлектрическим эффектом, а кристаллы, в которых проявляется *пьезоэффект*, – пьезоэлектриками. Важнейшими пьезоэлектриками являются кварц, сегнетова соль, титанат бария и другие.

Возникновение пьезоэффекта можно пояснить на примере. На рис. 5.9.1 схематически показано расположение положительных ионов кремния и отрицательных ионов кислорода в кристалле кварца (реально эта конфигурация несколько более сложна, но симметрия взаимного расположения ионов передана верно). На рис. 5.9.1, а показан недеформированный кристалл. На грани *A* кристалла, перпен-

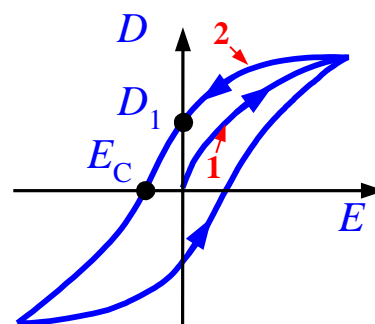


Рисунок 5.8.2

дикулярной оси X , выступают положительные ионы, на грани B – отрицательные. При сжатии вдоль оси X ячейка кристалла деформируется (рис. 5.9.1, б). При этом положительный ион 1 и отрицательный ион 2 вдавливаются внутрь кристалла, благодаря чему выступающие заряды (положительный на плоскости A и отрицательный на плоскости B) уменьшаются, и плоскость A заряжается отрицательно, а плоскость B – положительно. При растяжении (рис. 5.9.1, в), напротив, ионы 1 и 2 «вытягиваются» из элементарной ячейки, поэтому на грани A возникает дополнительный положительный заряд, а на грани B – отрицательный.

Если на грани A и B нанести электроды, то при сжатии и растяжении между этими электродами возникнет разность потенциалов, а если электроды соединить проводником, то при изменении деформации кристалла по проводнику будут течь токи. Это определяет использование пьезоэлектриков, например, в пьезоэлектрических микрофонах – знакопеременная деформация пьезоэлектрика под действием звуковой волны преобразуется в переменный ток той же частоты.

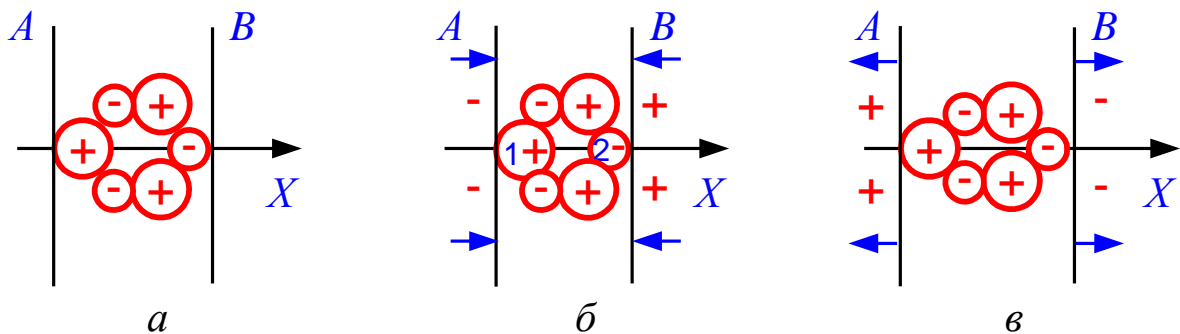


Рисунок 5.9.1

Наряду с прямым пьезоэффектом, существует и обратный пьезоэффект: поляризация пьезоэлектриков под действием электрического поля приводит к их деформации. Так, если к пьезоэлектрику, изображенному на рис. 5.9.1, а, приложить переменное электрическое поле, направленное вдоль оси X , то пластинка будет попеременно растягиваться и сжиматься вдоль этой оси, то есть в ней будут возбуждаться механические колебания. Эти колебания станут особенно интенсивными, если частота переменного напряжения совпадет с собственной резонансной частотой колебаний пластинки. Такие настроенные в резонанс пластинки используются для возбуждения ультразвуковых волн, для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний в радиотехнике.

5.10. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

5.10.1. Чем полярные диэлектрики отличаются от неполярных?

5.10.2. Что такое поляризованность диэлектрика?

5.10.3. Зависит ли от температуры поляризованность полярного диэлектрика? Неполярного диэлектрика?

5.10.4. Всегда ли поляризованность диэлектрика пропорциональна напряженности электрического поля?

5.10.5. Всегда ли вектор смещения направлен параллельно напряженности?

5.10.6. На рис. 5.10.1 показаны линии смещения электрического поля при переходе из одного диэлектрика в другой. Диэлектрическая проницаемость какого диэлектрика выше?

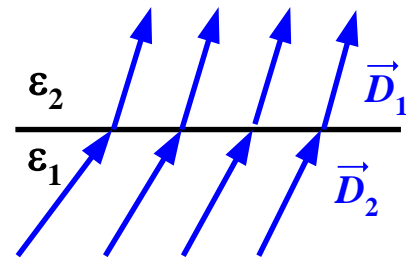


Рисунок 5.10.1

5.10.7. На рис. 5.10.2 показано направление силовой линии вблизи перехода из диэлектрика 1 в диэлектрик 2. Известно, что диэлектрическая проницаемость ϵ_2 диэлектрика 2 выше, чем диэлектрическая проницаемость ϵ_1 диэлектрика 1. Изобразите схематически направление силовой линии в диэлектрике 2.

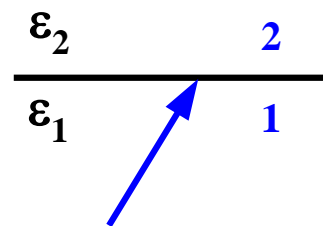


Рисунок 5.10.2

5.11. Примеры решения задач

Пример 5.11.1. Металлический шар радиусом $R_1 = 2$ см, несущий заряд $Q = 3 \cdot 10^8$ Кл, окружен вплотную прилегающим к нему слоем парафина (наружный радиус $R_2 = 4$ см, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$). Определите поверхностные плотности связанных зарядов на обеих поверхностях диэлектрика. Постройте графики зависимости $E(r)$ и $D(r)$.

Решение. Электрическое поле как внутри, так и вне диэлектрика создается сторонним (по отношению к диэлектрику) зарядом шара Q и поляризационными (связанными) зарядами на границах диэлектрического слоя. Векторы \vec{D} и \vec{E} направлены радиально ввиду симметрии задачи. Проводя сферическую гауссову поверхность через произвольную точку вне шара (рис. 5.11.1) и применяя теорему Гаусса для вектора смещения, находим вектор смещения на любом расстоянии от центра шара: $\oint_S D_n dS = Q; 4\pi R^2 D = Q; \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{r}$.

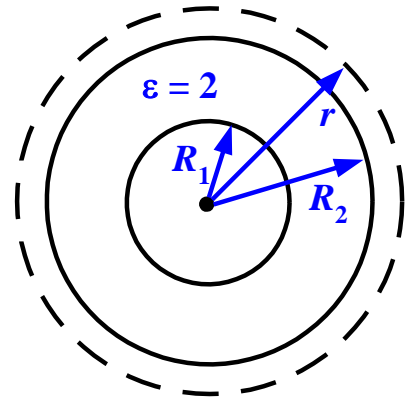


Рисунок 5.11.1

Вектор смещения не зависит от присутствия или отсутствия диэлектрика.

Напряженность электрического поля в любой точке $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon\epsilon_0}$, так что внутри слоя парафина ($\epsilon = 2$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.11.1)$$

а вне этого слоя

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.11.2)$$

В отсутствие диэлектрика напряженность в любой точке была бы равной

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.11.3)$$

Напряженность поля внутри диэлектрика создается как зарядом шара Q , так и связанными зарядами, индуцированными на внутренней поверхности диэлектрика Q' :

$$\vec{E} = \frac{Q + Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.11.4)$$

Сравнивая (5.25) и (5.28), получаем $\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q + Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$;

$$Q' = -\frac{Q}{2}. \quad (5.11.5)$$

Поскольку заряд Q' располагается на внутренней границе диэлектрика – сфере радиуса R_1 , поверхностная плотность заряда составляет

$$\sigma' = \frac{Q'}{4\pi R_1^2} = -\frac{Q}{8\pi R_1^2}. \quad (5.11.6)$$

Напряженность поля вне диэлектрика создается зарядом Q , зарядом Q' , индуцированным на внутренней поверхности диэлектрика, и зарядом Q'' , индуцированным на его внешней поверхности. Поскольку вне диэлектрика $\vec{E} = \vec{E}_0$, из теоремы Гаусса получаем $Q'' = -Q'$, следовательно, поверхностная плотность заряда на внешней поверхности диэлектрика

$$\sigma'' = \frac{Q''}{4\pi R_2^2} = \frac{Q}{8\pi R_2^2}. \quad (5.11.7)$$

Подставляя численные данные, получаем

$$\sigma' = -3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2; \quad \sigma'' = 0,75 \cdot 10^6 \text{ Кл/м}^2.$$

Графики зависимости $D(r)$ и $E(r)$ представлены на рис. 5.11.2.

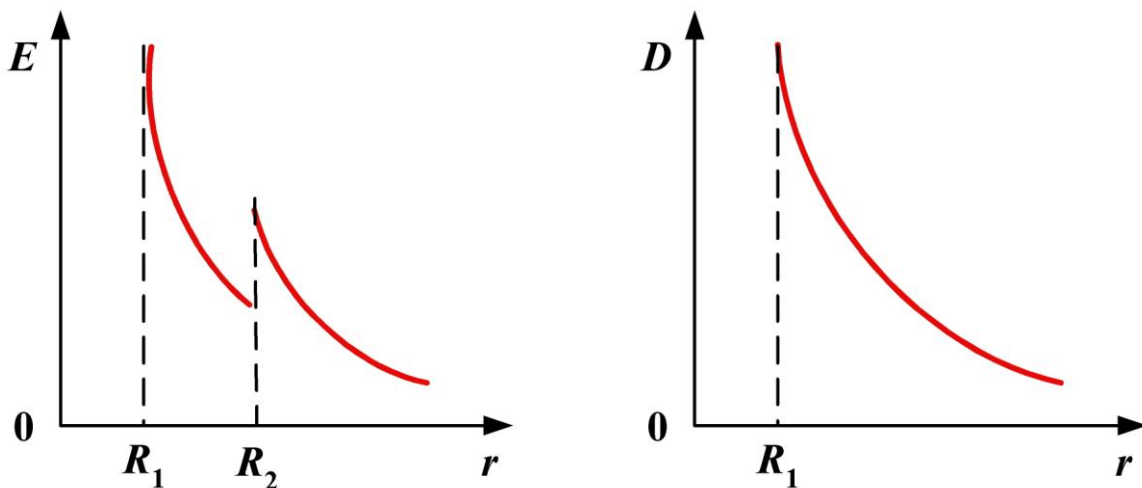


Рисунок 5.11.2

Пример 5.11.2. В условиях предыдущей задачи определите потенциал шара.

Решение. Металлический шар представляет собой эквипотенциальную поверхность, поэтому его значение в любой точке шара и на его поверхности одинаково. Потенциал на поверхности шара легко оп-

ределить, используя формулу связи потенциала с напряженностью и выражения (5.11.1) и (5.11.2):

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{R_1}^{\infty} (\vec{E} d\vec{r}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qdr}{8\pi\epsilon_0 r^2} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_1} + 0 - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right).\end{aligned}$$

Пример 5.11.3. В пространстве, наполовину заполненном парафином ($\epsilon = 2$), создано однородное электрическое поле, напряженность которого в воздухе составляет $E_1 = 2$ В/м и образует угол $\alpha = 60^\circ$ с плоской границей парафин – воздух (рис. 5.11.3). Определите векторы напряженности \vec{E}_2 , смещения \vec{D}_2 и поляризованности \vec{P}_2 в парафине. Какой угол β составляют эти векторы с границей парафин – воздух?

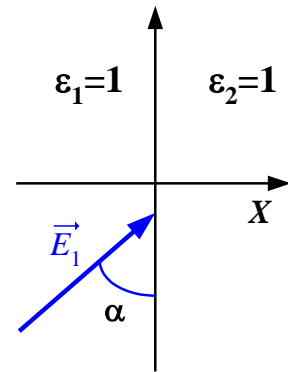


Рисунок 5.11.3

Решение. На воздухе вектор смещения $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1$. Проекции векторов \vec{E}_1 и \vec{D}_1 на оси X и Y (рис. 5.11.4) на воздухе составляют соответственно:

$$\begin{aligned}E_{1x} &= E_1 \sin \alpha; \quad E_{1y} = E_1 \cos \alpha; \\ D_{1x} &= D_1 \sin \alpha = \epsilon E_1 \sin \alpha; \\ D_{1y} &= D_1 \cos \alpha = \epsilon_0 E_1 \cos \alpha.\end{aligned}$$

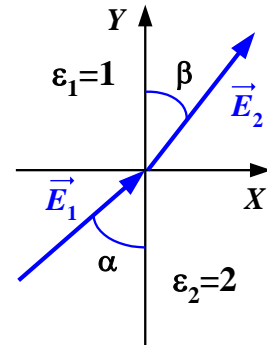


Рисунок 5.11.4

В соответствии с (5.6.1) $E_{2y} = E_{1y} = E_1 \cos \alpha$, откуда получаем $D_{2y} = \epsilon \epsilon_0 E_{2y} = \epsilon \epsilon_0 E_1 \cos \alpha$. В то же время из (5.6.3) вытекает, что

$$D_{2x} = D_{1x} = \epsilon_0 E_1 \sin \alpha \text{ и, следовательно, } E_{2x} = \frac{D_{2x}}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{E_1 \sin \alpha}{\epsilon}.$$

$$D_2 = \sqrt{D_{2x}^2 + D_{2y}^2} = \epsilon_0 E_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + \epsilon^2 \cos^2 \alpha} = 2,3 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2;$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2} = E_1 \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1,3 \text{ В/м};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_{2x}}{E_{2y}} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg}\alpha; \beta = 40^\circ.$$

Наконец, из (5.5.1) имеем: $\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2$;

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2 = 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2.$$

5.12. Задачи для самостоятельного решения

5.12.1. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 помещают плоскопараллельную диэлектрическую пластину с диэлектрической проницаемостью ε . Определите: 1) напряженность E электрического поля внутри пластины; 2) вектор смещения D внутри пластины; 3) поляризованность P диэлектрика; 4) поверхностную плотность σ связанных зарядов на поверхностях пластины; 5) разность потенциалов между поверхностями пластины, если:

5.12.1.1. $E_0 = 700$ В/м, диэлектрик – стекло ($\varepsilon = 7$), толщина пластины $d = 5$ мм.

5.12.1.2. $E_0 = 800$ В/м, диэлектрик – парафин ($\varepsilon = 2$), толщина пластины $d = 10$ мм.

5.12.1.3. $E_0 = 390$ В/м, диэлектрик – воск ($\varepsilon = 7,8$), толщина пластины $d = 10$ мм.

5.12.1.4. $E_0 = 540$ В/м, диэлектрик – эбонит ($\varepsilon = 2,6$), толщина пластины $d = 4$ мм.

5.12.1.5. $E_0 = 600$ В/м, диэлектрик – слюда ($\varepsilon = 6$), толщина пластины $d = 2$ мм.

5.12.1.6. $E_0 = 360$ В/м, диэлектрик – парафинированная бумага ($\varepsilon = 2$), толщина пластины $d = 0,1$ мм.

5.12.1.7. $E_0 = 900$ В/м, диэлектрик – фарфор ($\varepsilon = 6$), толщина пластины $d = 5$ мм.

5.12.1.8. $E_0 = 350$ В/м, диэлектрик – стекло ($\varepsilon = 7$), толщина пластины $d = 8$ мм.

5.12.1.9. $E_0 = 780$ В/м, диэлектрик – вошенная бумага ($\varepsilon = 7,8$), толщина пластины $d = 0,2$ мм.

5.12.1.10. $E_0 = 300$ В/м, диэлектрик – фарфор ($\varepsilon = 5$), толщина пластины $d = 12$ мм.

5.12.1.11. $E_0 = 400$ В/м, диэлектрик – парафин ($\varepsilon = 2$), толщина пластины $d = 8$ мм.

5.12.2. Все пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика, параллельными пластинам: диэлектрическая проницаемость первого ε_1 , толщина d_1 , диэлектрическая проницаемость второго ε_2 , толщина d_2 . Разность потенциалов между пластинами U . Определите напряженность и электрическое смещение в каждом из слоев, поляризованность каждого слоя и поверхностную плотность зарядов, индуцированных на каждой границе каждого слоя, если:

5.12.2.1. $\varepsilon_1 = 7$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 2$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 500$ В.

5.12.2.2. $\varepsilon_1 = 6$, $d_1 = 0,5$ мм, $\varepsilon_2 = 2,6$, $d_2 = 1$ мм, $U = 560$ В.

5.12.2.3. $\varepsilon_1 = 2,6$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 2$, $d_2 = 1$ мм, $U = 360$ В.

5.12.2.4. $\varepsilon_1 = 7$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 2$, $d_2 = 2$ мм, $U = 400$ В.

5.12.2.5. $\varepsilon_1 = 6$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 2$, $d_2 = 2$ мм, $U = 600$ В.

5.12.2.6. $\varepsilon_1 = 2,6$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 7$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 500$ В.

5.12.2.7. $\varepsilon_1 = 7$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 2$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 500$ В.

5.12.2.8. $\varepsilon_1 = 2$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 3,6$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 720$ В.

5.12.2.9. $\varepsilon_1 = 6$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 3,6$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 390$ В.

5.12.2.10. $\varepsilon_1 = 2$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 6$, $d_2 = 0,5$ мм, $U = 500$ В.

5.12.2.11. $\varepsilon_1 = 7$, $d_1 = 1$ мм, $\varepsilon_2 = 6$, $d_2 = 1$ мм, $U = 650$ В.

5.13. Задачи повышенной сложности

5.13.1. Как известно, продолговатые кусочки диэлектрика, если их предоставить самим себе, устанавливаются вдоль силовых линий электрического поля. Но ведь отдельные молекулы неполярного диэлектрика, казалось бы, должны только растягиваться вдоль поля, но не поворачиваться. В полярном же диэлектрике среднее число молекул, поворачивающихся при включении поля по часовой стрелке, равно числу молекул, поворачивающихся в противоположную сторону. Почему же в электрическом поле весь кусок диэлектрика будет поворачиваться?

5.13.2. Диэлектрический шар радиусом R поляризован однородно, то есть дипольные электрические моменты всех молекул равны и параллельны друг другу. Найдите напряженность электриче-

ского поля внутри диэлектрика, если в единице объема содержится N молекул, дипольный момент каждой из которых $p = ql$.

- 5.13.3.** Найдите закон распределения поверхностного заряда на сфере, если известно, что этот заряд создает внутри сферы однородное поле напряженности E .
- 5.13.4.** Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . В центре сфер находится точечный заряд $+q$. Найдите напряженность и потенциал поля как функцию расстояния от центра сфер, а также поляризационный заряд.
- 5.13.5.** Две расположенные параллельно металлические пластины заряжены зарядами $+q_1$ и $-q_2$, причем $q_1 > q_2$. Пространство между пластинами заполнено однородным изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . Определите силу, действующую на единицу площади поверхности диэлектрика. Площадь каждой пластины равна S .

6. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля

6.1. Электроемкость уединенного проводника

Экспериментально установлено, что потенциал φ уединенного заряженного проводника прямо пропорционален его заряду q , то есть величина

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (6.1.1)$$

зависит лишь от формы и размеров проводника и среды, окружающей проводник, но не от его заряда q . Эту величину, равную отношению заряда проводника к его потенциалу, называют *электроемкостью* или просто *емкостью* проводника. Электроемкость численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику для повышения его потенциала на единицу.

Единица электроемкости – фарад (Ф). $[\Phi] = [\text{Кл}]/[\text{В}]$. *1 Ф – емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл.*

Чтобы оценить возможные значения электроемкости реальных проводников, рассчитаем емкость шара радиусом R . Для этого надо мысленно сообщить шару заряд Q и рассчитать его потенциал:

$$\varphi = \int_R^{\infty} k \frac{Q}{r^2} dr = k \frac{Q}{R}, \text{ где } k \text{ – кулоновская постоянная. Подставляя по-}$$

лученное выражение в (6.1.1), получаем $C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$. Если про-

водник имеет радиус, равный радиусу Земли ($R = 6400$ км), его емкость $C = \frac{6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 7,1 \cdot 10^{-4}$ Ф. Таким образом, фарад – это очень

большая величина. На практике чаще приходится иметь дело с емкостями от микро- до пикофарад.

При приближении к проводнику других тел его электроемкость увеличивается. Рассмотрим простой пример: приближение к уединенному заряженному проводнику A проводника произвольной формы B (рис. 6.1.1).

Пусть заряд проводника $Q > 0$. Тогда отрицательные индуцированные заряды окажутся ближе к этому проводнику, чем положительные, и потенциал шара, являющийся суммой потенциала собственного заряда шара и индуцированных на проводнике B зарядов, будет меньше, чем потенциал уединенного шара. Следовательно, в соответствии с (6.1.1), емкость проводника увеличится.

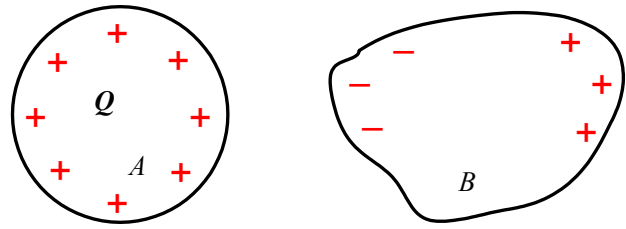


Рисунок 6.1.1

6.2. Конденсаторы. Емкость конденсатора

Рассмотрим систему из двух проводников, один из которых несет заряд Q , а другой заземлен. Считая потенциал Земли равным нулю, можно утверждать, что потенциал заземленного проводника φ_2 также равен нулю и, следовательно, разность потенциалов между проводниками равна потенциалу незаземленного проводника:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \frac{Q}{C}.$$

Ввиду того, что на заземленном проводнике появляется индуцированный заряд, знак которого противоположен знаку заряда Q , разность потенциалов между проводниками значительно меньше потенциала, который бы имел незаземленный проводник в отсутствие второго проводника. Соответственно емкость такой системы

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}.$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ называют *напряжением* между проводниками.

Особый интерес представляют такие системы проводников,

в которых практически все электрическое поле сосредоточено между двумя такими проводниками. Такие системы называются *конденсаторами*, а проводники, входящие в эту систему, — *обкладками* конденсатора.

Мысленно окружим конденсатор произвольной поверхностью S (рис. 6.2.1). Ввиду отсутствия электрического поля поток вектора напряженности через эту поверхность $\oint_S E_n dS = 0$, следовательно, и

суммарный заряд, находящийся на обкладках конденсатора, должен

быть равен нулю: $Q_1 + Q_2 = 0$, то есть обкладки конденсатора должны нести равные по величине и противоположные по знаку заряды: $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$.

Электроемкостью конденсатора называется отношение заряда Q к напряжению между обкладками:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (6.2.1)$$

Рассчитаем для примера электроемкость плоского конденсатора. Этот конденсатор состоит из двух параллельных металлических пластин площадью S , разделенных зазором шириной

d , причем размеры пластин значительно больше расстояния d . Если сообщить обкладкам конденсатора заряды $+Q$ и $-Q$, разность потенциалов между обкладками составит $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon \epsilon_0 S}$ (см.

раздел 3.6.4). Следовательно, электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (6.2.2)$$

В разделах 6.5 и 6.6 приводится расчет электроемкости цилиндрического и сферического конденсаторов.

6.3. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора

Процесс сообщения проводнику заряда связан с совершением работы по преодолению кулоновских сил отталкивания между зарядами. Эта работа идет на увеличение энергии заряженного проводника. Элементарная работа dA' , совершаемая внешними силами по перемещению заряда dq из бесконечно удаленной точки на проводник, равна работе dA , совершаемой электрическим полем при перемещении этого заряда с проводника в бесконечно удаленную точку:

$$dA' = dA = \varphi dq = \frac{q}{C} dq, \quad (6.3.1)$$

где q – заряд, которым уже обладает проводник.

Работа внешних сил, совершаемая при увеличении заряда проводника от 0 до Q , равна

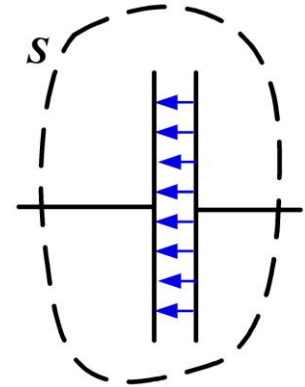


Рисунок 6.2.1

$$A' = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C}. \quad (6.3.2)$$

Следовательно, энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (6.3.3)$$

Аналогичным образом можно рассчитать энергию заряженного конденсатора. Если заряд конденсатора q , а разность потенциалов между его обкладками U , то для переноса малого заряда dq с отрицательной обкладки на положительную внешние силы должны совершить работу $dA' = Udq = \frac{q}{C} dq$, где C – емкость конденсатора. Работа при увеличении заряда конденсатора от 0 до Q

составляет $A' = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C}$, и энергия заряженного конденсатора составляет

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (6.3.4)$$

6.4. Энергия электрического поля

Рассмотрим плоский конденсатор, заряженный до разности потенциалов U . Емкость этого конденсатора определяется формулой (6.2.2), а энергия – формулой (6.3.3). Подставляя (6.2.2) в (6.3.3), получаем

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}. \quad (6.4.1)$$

Поскольку поле внутри конденсатора однородно, $U = Ed$, где E – напряженность электрического поля внутри конденсатора. Следовательно,

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V}{2} = \frac{ED}{2} V, \quad (6.4.2)$$

где $V = Sd$ – объем конденсатора.

Таким образом, энергию конденсатора можно выразить как через заряд этого конденсатора Q (формула 6.3.3), так и через характеристики электрического поля (формула 6.4.2) – напряженность E и смещение D . Возникает естественный вопрос: что является носителем этой энергии – заряды или поле? В электростатике этот вопрос

носит чисто риторический характер, поскольку ни зарядов без поля, ни поля без зарядов в статическом случае быть не может. Однако далее, изучая электромагнитные явления, мы увидим, что электрическое поле может быть создано не только зарядами, но и переменным магнитным полем. Такие переменные электрические и магнитные поля могут переносить энергию в форме электромагнитной волны. И это служит поводом для утверждения, что носителем энергии является именно электрическое поле.

Объемная плотность энергии w электростатического поля – это энергия единицы объема:

$$w = \frac{dW}{dV}. \quad (6.4.3)$$

Из (6.4.2) и (6.4.3) получаем

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}. \quad (6.4.4)$$

Выражение (6.4.4) справедливо только для изотропных диэлектриков, для которых выполняется соотношение $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$.

Пользуясь выражениями (6.4.3) и (6.4.4), нетрудно рассчитать энергию, заключенную в произвольном объеме неоднородного поля:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{ED}{2} dV. \quad (6.4.5)$$

6.5*. Электроемкость сферического конденсатора

Сферический конденсатор состоит из двух concentрических сферических обкладок, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε .

Разность потенциалов между обкладками сферического конденсатора определяется по формуле (3.6.5):

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Электроемкость сферического конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (6.5.1)$$

Интересно отметить, что при очень близких значениях $R_1 \approx R_2 \approx R$ формулу (6.5.1) можно переписать следующим образом:

$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}{d}$, где $d = R_2 - R_1$ – расстояние между обкладками. Учитывая, что площадь обкладок $S = 4\pi R^2$, получаем $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$, что совпадает с формулой (6.2.2) емкости плоского конденсатора.

6.6*. Емкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор – это два коаксиальных металлических цилиндра (обкладки) одинаковой высоты H , радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ .

В соответствии с (3.6.8) разность потенциалов между обкладками $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1}$, где Q – заряд конденсатора. Емкость цилиндрического конденсатора составляет

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (6.6.1)$$

6.7*. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

Для варьирования емкости конденсаторы соединяют в батареи, при этом используют их последовательное и параллельное соединение.

Последовательное соединение конденсаторов показано на рис. 6.7.1. У последовательно соединенных конденсаторов заряды равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи $U = \sum_i U_i$, где $U_i = \frac{Q}{C_i}$ – разность потенциалов на обкладках i -го конденсатора.

В то же время $U = \frac{Q}{C}$, где C – емкость батареи. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (6.7.1)$$

Суммирование производится по всем последовательно соединенным конденсаторам.

При *параллельном соединении* (рис. 6.7.2) разность потенциалов на обкладках всех конденсаторов одинакова и равна U , а заряд батареи равен сумме зарядов на каждом из конденсаторов: $Q = \sum_i Q_i$. Электроемкость батареи

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sum_i Q_i}{U} = \sum_i \frac{Q_i}{U}.$$

Но $\frac{Q_i}{U} = C_i$ – емкость i -го конденсатора. Следовательно, при параллельном соединении

$$C = \sum_i C_i. \quad (6.7.2)$$

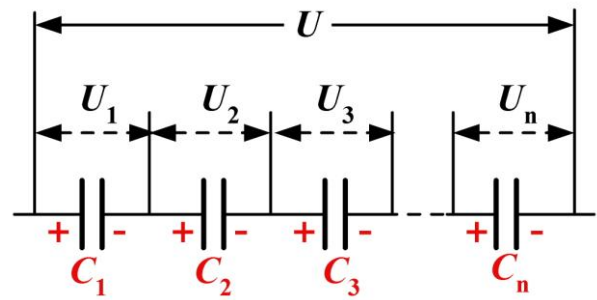


Рисунок 6.7.1

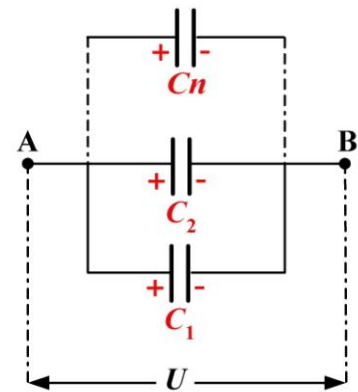


Рисунок 6.7.2

6.8. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

- 6.8.1.** При сообщении проводнику заряда 10^{-9} Кл его потенциал стал равным 10 В. Определите электроемкость проводника.
- 6.8.2.** Два металлических удаленных друг от друга шара радиусами R и $2R$ несут равные по величине и знаку заряды Q . Шары соединяют проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. Будет ли происходить перераспределение заряда? Если да, то заряд какого шара увеличится в результате соединения?
- 6.8.3.** Металлический шарик падает с большой высоты на землю. Как изменяется емкость шарика при его приближении к земле? (*Напоминание.* Земля – проводник)

- 6.8.4.** Обкладки плоского воздушного конденсатора сдвигают, уменьшая расстояние между ними в 2 раза. Как изменяется при этом емкость конденсатора?
- 6.8.5.** Заряженный и отключенный от источника напряжения воздушный конденсатор заполняют маслом ($\varepsilon = 2$). Как изменяется при этом: а) емкость конденсатора; б) энергия конденсатора; в) напряжение на конденсаторе?
- 6.8.6.** Заряженный воздушный конденсатор, не отключая от источника напряжения, заполняют маслом ($\varepsilon = 2$). Как изменяется при этом: а) емкость конденсатора; б) энергия конденсатора; в) заряд конденсатора?
- 6.8.7.** Напряженность электрического поля в диэлектрике составляет 100 В/м. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$. Чему равна объемная плотность энергии электрического поля?
- 6.8.8.** Конденсаторы емкостью 2 мкФ и 3 мкФ соединены последовательно. Какова емкость полученной батареи?
- 6.8.9.** Конденсаторы емкостью 2 мкФ и 3 мкФ соединены параллельно. Какова емкость полученной батареи?

6.9. Примеры решения задач

Пример 6.9.1.1. Два удаленных друг от друга шарика радиусами $R_1 = 20$ см и $R_2 = 30$ см зарядили, сообщив каждому из них заряд $Q = 2$ нКл. Шарики соединили металлической проволокой, емкостью которой можно пренебречь. Какой заряд протечет по проволоке? Какая энергия при этом выделится?

Решение. Несмотря на то, что шарики несут одинаковые заряды, потенциалы их различны: $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$, $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$. После соединения шариков проволокой их потенциалы выравниваются:

$$\varphi'_1 = \varphi'_2, \quad (6.9.1)$$

что возможно лишь в случае перераспределения заряда между шариками. При этом суммарный заряд шариков остается постоянным:

$$Q'_1 + Q'_2 = 2Q. \quad (6.9.2)$$

Учитывая, что

$$\varphi'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, \quad \varphi'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}. \quad (6.9.3)$$

Из (6.9.1) получаем $Q'_2 = \frac{R_2}{R_1} Q_1$.

Подставляем полученное выражение в (6.9.2)

$$Q'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 2Q, \text{ получаем}$$

$$Q'_1 = \frac{2QR_1}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 0,2}{0,5} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$Q'_2 = \frac{R_2}{R_1} Q_1 = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Сравнивая эти значения с зарядом Q , видим, что с малого шарика на большой перетек заряд $Q - Q'_1 = Q'_2 - Q = 0,4 \cdot 10^{-9}$ Кл.

До соединения шарики обладали энергиями

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 0,2} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ Дж};$$

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}.$$

После соединения энергии шариков составляют:

$$W'_1 = \frac{Q'^2_1}{2C_1} = \frac{Q'^2_1}{8\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 0,2} = 5,76 \cdot 10^{-8} \text{ Дж};$$

$$W'_2 = \frac{Q'^2_2}{2C_2} = \frac{Q'^2_2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2,4^2 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 0,3} = 8,64 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}.$$

Выделившаяся энергия равна

$$W = W_1 + W_2 - W'_1 - W'_2 = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}.$$

Пример 6.9.1.2. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0,01 \text{ м}^2$, расстояние между пластинами $d_1 = 2 \text{ см}$. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 3 \text{ кВ}$. Конденсатор отключают от источника напряжения, а затем пластины раздвигают, увеличивая расстояние между ними до 5 см . Определите до и после изменения расстояния между пластинами: а) емкость конденсатора; б) напряженность электрического поля внутри конденсатора; в) заряд конденсатора; г) энергию конденсатора. Какую работу совершают внешние силы при изменении расстояния между пластинами?

Решение. Емкость конденсатора определяется формулой (6.2.2):

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01}{0,02} = 4,425 \cdot 10^{-12} \text{ Ф};$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01}{0,05} = 1,77 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$$

(здесь и далее индекс 1 относится к конденсатору до изменения расстояния между обкладками, а индекс 2 – после изменения этого расстояния).

Заряд на обкладках конденсатора

$$Q_1 = C_1 U_1 = 4,425 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^3 = 1,33 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

Так как конденсатор отключен от источника напряжения, при изменении расстояния между обкладками его заряд не изменяется: $Q_2 = Q$.

Напряженность электрического поля между обкладками определяется лишь поверхностной плотностью заряда на обкладках, поэтому, как и заряд, остается постоянной. Используя формулу связи разности потенциалов с напряженностью, получаем

$$E_2 = E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{3000}{0,02} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Энергию конденсатора в начальном состоянии находим по формуле (6.3.4):

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{4,425 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^6}{2} = 19,9 \text{ мкДж.}$$

После увеличения расстояния между пластинами напряжение между ними увеличится и станет равным $U_2 = E_2 d_2 = 7,5 \cdot 10^3 \text{ В}$.

Соответственно энергия конденсатора увеличится до

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{1,77 \cdot 10^{-12} \cdot 7,5^2 \cdot 10^6}{2} = 33,2 \text{ мкДж.}$$

Увеличение энергии конденсатора происходит за счет работы A , совершаемой внешними силами при изменении расстояния между пластинами, следовательно,

$$A = W_2 - W_1 = 25,7 \text{ мкДж.}$$

Пример 6.9.1.3. Решить предыдущую задачу при условии, что пластины раздвигают без отключения конденсатора от источника напряжения.

Решение. Емкость и начальный заряд конденсатора определяются точно так же, как в предыдущей задаче. Однако постоянным теперь остается не заряд конденсатора, а напряжение между обкладками.

Конечный заряд конденсатора $Q_2 = C_2 U = 5,31 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Напряженность электрического поля теперь зависит от расстояния x между пластинами: $E = \frac{U}{x}$. Начальное значение напряженности – такое же, как в предыдущей задаче. Конечное значение

$$E_2 = \frac{U}{d_2} = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Начальная энергия конденсатора – такая же, как в предыдущей задаче, а конечное значение определяется формулой

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = 7,6 \text{ мкДж.}$$

Таким образом, энергия конденсатора в данном случае не увеличивается, а уменьшается.

Тем не менее, для увеличения расстояния между обкладками внешние силы должны совершить работу по преодолению притяжения между пластинами. Эта работа равна $A = \int_{d_1}^{d_2} F dx$, где F – внешняя

сила, равная по величине и противоположная по направлению силе взаимодействия между пластинами. Эта сила $F = QE'$, где Q – заряд одной пластины; E' – напряженность электрического поля, создаваемого другой пластиной. При расстоянии между обкладками конденсатора, равном x , его емкость $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{x}$, заряд $Q = CU = \frac{\epsilon_0 S U}{x}$.

Поскольку напряженность поля внутри конденсатора складывается из двух равных напряженностей, создаваемых обкладками, напря-

женность, создаваемая *одной* обкладкой, $E' = \frac{E}{2} = \frac{U}{2x}$, и сила

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2}.$$

$$\text{Работа } A = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\varepsilon_0 S U^2}{4x^2} dx = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{4} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = 12,85 \text{ мкДж.}$$

Эта работа не равна изменению энергии конденсатора, более того, она имеет положительный знак. Это означает, что и работа, и часть энергии конденсатора расходуются на подзарядку источника питания и выделение энергии в подводящих проводах.

Пример 6.9.1.4. Заряженный проводящий шар радиусом $R = 5$ см окружен слоем однородного изотропного диэлектрика, внешний радиус которого равен $2R$. Диэлектрическая проницаемость слоя ε . Заряд шара Q . Определите энергию электрического поля, созданного шаром.

Решение. Внутри шара электрического поля нет. Вне шара величину вектора смещения электрического поля, созданного шаром, нетрудно определить, используя теорему Гаусса для произвольной сферы радиусом $r > R$, concentричной с шаром: $\oint D_n dS = Q$, откуда

$$D = D_n = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Напряженность электрического поля $E_1 = \frac{D_n}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2}$ при

$R < r < 2R$ и $E = \frac{D_n}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$ при $r > 2R$.

Энергия электрического поля, сосредоточенного внутри слоя диэлектрика:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{V_1} w_1 dV = \int_{V_1} \frac{E_1 D}{2} dV = \int_R^{2R} \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{Q^2}{16\pi \varepsilon \varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Энергия электрического поля вне диэлектрика:

$$W_2 = \int_{V_2} w_2 dV = \int_{V_2} \frac{E_2 D}{2} dV = \int_{2R}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{Q^2}{16\pi \varepsilon_0 R}.$$

Полная энергия электрического поля:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{16\pi \varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Пример 6.9.1.5. В плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого составляло $d = 5$ мм, ввели металлическую пластину толщиной $d_0 = 3$ мм, площадь которой совпадает с площадью обкладок конденсатора. Увеличилась или уменьшилась емкость конденсатора? Во сколько раз? Зависит ли ответ от положения пластины?

Решение. Емкость конденсатора до введения пластины определяется формулой (6.2.2): $C_I = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

Введение в конденсатор пластины эквивалентно образованию двух последовательно соединенных конденсаторов с расстояниями между обкладками d_1 и d_2 (рис. 6.9.1), причем $d_0 + d_1 + d_2 = d$. Емкость такой системы конденсаторов определяется формулой (6.7.1):

$$\frac{1}{C_{II}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Подставляя в эту формулу емкость каждого конденсатора, определенную по формуле (6.2.2), получаем

$$\frac{1}{C_{II}} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d_0}{\varepsilon_0 S}.$$

Откуда $C_{II} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}$; $\frac{C_{II}}{C_I} = \frac{d}{d - d_0} = 2,5$.

Емкость конденсатора увеличилась в 2,5 раза.

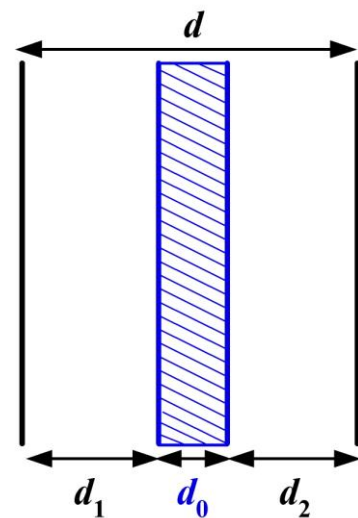


Рисунок 6.9.1

Пример 6.9.1.6. Определите емкость системы конденсаторов, показанной на рис. 6.9.2, если $C_1 = C_2 = C_3 = 0,5$ мкФ.

Решение. Сначала найдем емкость участка AB , состоящего из двух параллельно соединенных конденсаторов: $C_{AB} = C_1 + C_2 = 1$ мкФ. Емкость всей системы

$$C = \frac{C_3 C_{AB}}{C_3 + C_{AB}} = 0,33 \text{ мкФ.}$$

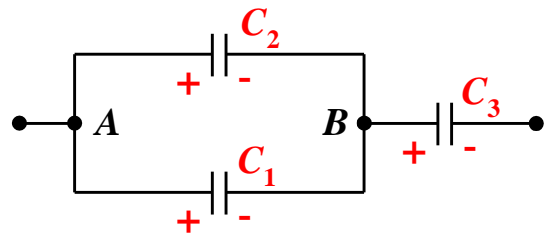


Рисунок 6.9.2

6.10. Задачи для самостоятельного решения

6.10.1. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 , заряженные до разностей потенциалов U_1 и U_2 , соединяют параллельно одноименными обкладками. Какова емкость полученной батареи? Какое напряжение на ней установится? Какими станут заряды конденсаторов после соединения? Какая энергия выделится при соединении?

6.10.1.1. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 200$ В.

6.10.1.2. $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $U_1 = 100$ В, $U_2 = 300$ В.

6.10.1.3. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $U_1 = 100$ В, $U_2 = 200$ В.

6.10.1.4. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 600$ В.

6.10.1.5. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $U_1 = 200$ В, $U_2 = 500$ В.

6.10.1.6. $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $U_1 = 150$ В, $U_2 = 100$ В.

6.10.1.7. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 600$ В.

6.10.1.8. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 150$ В.

6.10.1.9. $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $U_1 = 150$ В, $U_2 = 100$ В.

6.10.1.10. $C_1 = 5$ мкФ, $C_2 = 10$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 150$ В.

6.10.1.11. $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $U_1 = 300$ В, $U_2 = 200$ В.

6.10.2. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 5$ пФ заряжен до энергии $W = 10$ мкДж. Определите, какой станет энергия конденсатора, если:

6.10.2.1. Конденсатор после отключения от источника напряжения заполнить диэлектриком ($\epsilon = 2$).

- 6.10.2.2.** Конденсатор, не отключая от источника напряжения, заполнить жидким диэлектриком ($\varepsilon = 2$).
- 6.10.2.3.** После отключения от источника напряжения увеличить вдвое расстояние между обкладками конденсатора.
- 6.10.2.4.** Не отключая конденсатор от источника напряжения, увеличить вдвое расстояние между обкладками конденсатора.
- 6.10.2.5.** После отключения от источника напряжения обкладки конденсатора погрузить наполовину в масло ($\varepsilon = 2$).
- 6.10.2.6.** Не отключая конденсатор от источника напряжения, обкладки конденсатора погрузить наполовину в масло ($\varepsilon = 2$).
- 6.10.2.7.** После отключения от источника напряжения в конденсатор ввести слюдяную ($\varepsilon = 7$) пластину толщиной, равной половине расстояния между обкладками.
- 6.10.2.8.** Не отключая конденсатор от источника напряжения, в конденсатор ввести слюдяную ($\varepsilon = 7$) пластину толщиной, равной половине расстояния между обкладками.
- 6.10.2.9.** После отключения от источника напряжения между обкладками конденсатора ввести металлическую пластину, площадь которой равна площади обкладок, а толщина составляет $1/4$ расстояния между обкладками.
- 6.10.2.10.** Не отключая конденсатор от источника напряжения, между обкладками конденсатора ввести металлическую пластину, площадь которой равна площади обкладок, а толщина составляет $1/4$ расстояния между обкладками.
- 6.10.2.11.** После отключения от источника напряжения уменьшить расстояние между обкладками в 4 раза.
- 6.10.3.** Определите объемную плотность энергии электрического поля в следующих случаях:
- 6.10.3.1.** На расстоянии 10 см от точечного заряда $Q = 10^{-9}$ Кл, погруженного в масло ($\varepsilon = 5$).
- 6.10.3.2.** На воздухе на расстоянии 2 см от бесконечной прямолинейной равномерно заряженной нити ($\tau = 10^{-8}$ Кл/м).
- 6.10.3.3.** На расстоянии 2 см от бесконечной прямолинейной равномерно заряженной нити ($\tau = 10^{-8}$ Кл/м), погруженной в масло ($\varepsilon = 5$).
- 6.10.3.4.** На воздухе вблизи равномерно заряженной плоскости ($\sigma = 16,7$ мкКл/м²).

- 6.10.3.5.** Вблизи равномерно заряженной плоскости ($\sigma = 16,7$ мкКл/м²), покрытой парафином ($\varepsilon = 2$).
- 6.10.3.6.** На воздухе, на расстоянии 2 см от центра шара радиусом 1 см. Заряд шара $Q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл.
- 6.10.3.7.** На воздухе вблизи поверхности равномерно заряженного шара радиусом 5 см. Заряд шара $Q = 0,04$ мкКл.
- 6.10.3.8.** На расстоянии 2 см от центра равномерно заряженного по объему шара радиусом 5 см. Диэлектрическая проницаемость шара $\varepsilon = 2$, объемная плотность заряда $\rho = 80$ нКл/м³.
- 6.10.3.9.** На воздухе на расстоянии 3 см от равномерно заряженного по поверхности шарика радиусом 1 см. Поверхностная плотность заряда шарика 20 мкКл/м².
- 6.10.3.10.** На расстоянии 3 см от равномерно заряженного по поверхности шарика радиусом 1 см. Поверхностная плотность заряда шарика 20 мкКл/м². Шарик погружен в керосин ($\varepsilon = 2$).
- 6.10.3.11.** Вблизи поверхности равномерно заряженного по поверхности шарика радиусом 5 см. Поверхностная плотность заряда шарика 10 мкКл/м². Шарик покрыт парафином ($\varepsilon = 2$).

6.11. Задачи повышенной сложности

- 6.11.1.** Два параллельных провода с одинаковым радиусом сечения расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между осями проводов в k раз больше радиуса сечения каждого провода. Определите емкость проводников на единицу длины. $k \gg 1$.
- 6.11.2.** Бесконечно длинный прямолинейный проводник проходит над землей на высоте H . Определите емкость единицы длины проводника, если радиус его сечения равен R .
- 6.11.3.** Четыре одинаковые пластины находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, причем наружные пластины соединены между собой проводником. Определите емкость этой системы.
- 6.11.4.** Две тонкостенные сферы радиусами $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см образуют сферический конденсатор. На внешней сфере заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Внутренняя сфера не заряжена и через разомкнутый ключ соединена проводом с землей. Какой заряд протечет по проводу, если замкнуть ключ?

- 6.11.5.** Пробой в воздухе наступает при напряженности электрического поля $E = 3 \cdot 10^6$ В/м. Имеется воздушный сферический конденсатор, внешний радиус которого равен 4 см, а радиус внутренней сферы подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при максимальном значении разности потенциалов. Определите эту максимальную разность потенциалов.
- 6.11.6.** Определите емкости систем конденсаторов, показанных на рис. 6.11.1.

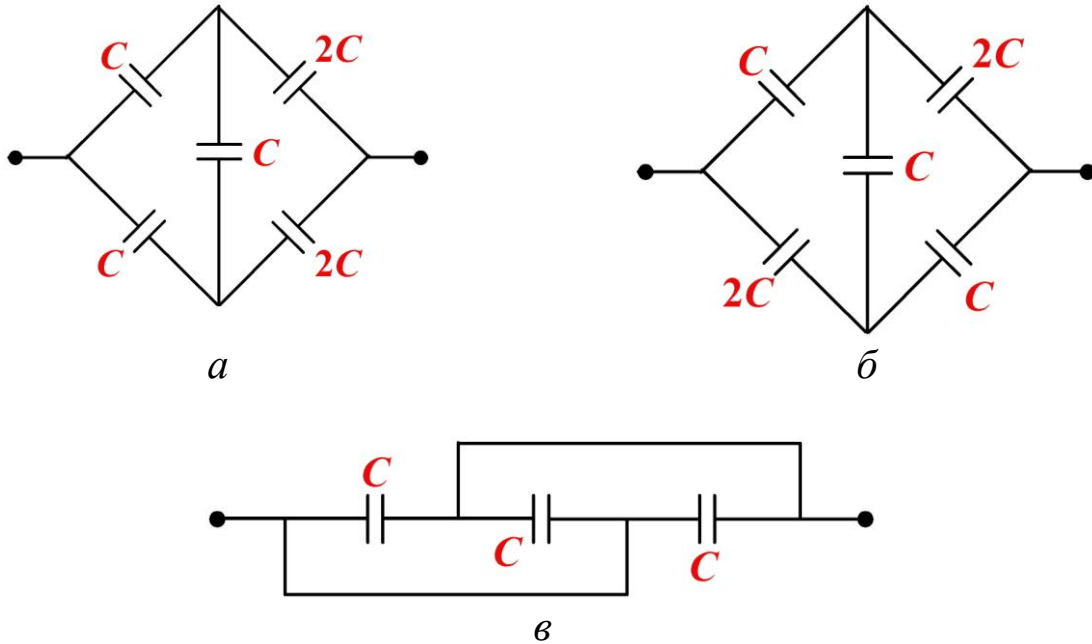


Рисунок 6.11.1

- 6.11.7.** Металлическая сфера радиусом 1 м окружена слоем диэлектрика толщиной 20 см ($\epsilon = 3$). Определите емкость сферы.

7. Постоянный электрический ток

7.1. Электрический ток и его характеристики

Электрическим током называется любое направленное движение электрических зарядов. Это может быть как движение носителей заряда в неподвижных проводниках (токи проводимости), так и движение макроскопических заряженных тел (конвекционные токи). В данной главе рассматриваются лишь токи проводимости в проводящей среде. Носителями тока в металлах являются электроны, в электролитах – ионы, в газах – как электроны, так и ионы.

Количественной характеристикой электрического тока является *сила тока*, равная заряду, переносимому через рассматриваемую поверхность S за единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (7.1.1)$$

Единицей тока является ампер (А). Это основная единица в Международной системе единиц (СИ). $[Кл] = [А] \cdot [с]$.

Ток, величина и направление которого с течением времени не изменяются, называется постоянным. Для постоянного тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{t}.$$

Электрический ток может быть неравномерно распределен по поверхности, через которую он протекает. Поэтому для более детального описания тока вводится *вектор плотности тока* \vec{j} . Модуль этого вектора равен отношению силы тока dI через элементарную площадку dS_n , перпендикулярную направлению движения зарядов, к площади этой площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_n}. \quad (7.1.2)$$

За направление вектора \vec{j} принято направление движения *положительных* зарядов, даже если в действительности носители тока заряжены отрицательно (например, электроны в металлах).

Плотность тока зависит от средней скорости упорядоченного движения зарядов $\langle \vec{v} \rangle$. Если каждый носитель тока имеет заряд q , а концентрация носителей тока равна n , то за время dt через попе-

речное сечение S проводника протечет заряд $dQ = nq\langle v \rangle S dt$, сила тока $I = \frac{dQ}{dt} = nqvS$, а плотность тока

$$\vec{j} = nq\langle \vec{v} \rangle. \quad (7.1.3)$$

Сила тока, протекающего через произвольную поверхность, равна потоку вектора \vec{j} :

$$I = \int_S j_n dS. \quad (7.1.4)$$

Проведем мысленно замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V . Так как за направление нормали к замкнутой поверхности принято выбирать направление внешней нормали, интеграл $\oint_S j_n dS$ – это ток, вытекающий наружу из объема V . Этот ток

$I = -\frac{dQ}{dt}$, где Q – заряд, находящийся внутри поверхности S . Таким образом,

$$\oint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}. \quad (7.1.5)$$

Это соотношение называется *уравнением непрерывности* и является математическим выражением закона сохранения электрического заряда.

В случае постоянного тока перераспределение зарядов в пространстве не происходит, следовательно, для любой точки $\frac{dQ}{dt} = 0$, и уравнение непрерывности имеет вид $\oint_S j_n dS = 0$.

7.2. Закон Ома для однородного участка цепи

Однородным (пассивным) называется участок цепи, на котором действуют только электростатические силы. Закон Ома, открытый экспериментально, утверждает:

Сила тока, протекающего по однородному участку цепи, пропорциональна разности потенциалов на его концах:

$$I = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{R}, \quad (7.2.1)$$

где R – *сопротивление* проводника. Сопротивление измеряется в омах (Ом).

$$[\text{Ом}] = [\text{В}]/[\text{А}].$$

Обозначение однородного участка с сопротивлением R , используемое в электрических схемах, показано на рис. 7.2.1.

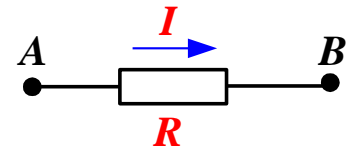


Рисунок 7.2.1

Сопротивление R зависит от формы и размеров проводника, его поперечного сечения, а также от распределения тока по проводнику. В простейшем

случае однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (7.2.2)$$

где l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения; ρ – *удельное сопротивление* проводника. Размерность удельного сопротивления $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$. Удельное сопротивление зависит от материала проводника и его температуры.

Наименьшими удельными сопротивлениями обладают серебро ($\rho = 1,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) и медь ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). На практике часто применяют алюминиевые провода, имеющие более высокое удельное сопротивление ($\rho = 2,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), но зато алюминий значительно легче меди.

Очень часто уравнение (7.2.1) используют в форме

$$IR = \varphi_A - \varphi_B. \quad (7.2.3)$$

Напомним, что разность потенциалов между двумя точками – это не что иное, как работа электростатических сил по перемещению единичного заряда между этими точками.

7.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Если в цепи на носители тока действуют только электростатические силы, то носители заряда перемещаются в электрическом поле до тех пор, пока потенциалы всех точек цепи не выровняются и электростатическое поле внутри проводников не обратится в нуль. Реально этот процесс протекает очень быстро, в течение нескольких микросекунд. Чтобы обеспечить протекание в цепи постоянного тока, необходимо наличие источника тока – устройства, способного поддерживать разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Силы неэлектростатического проис-

хождения, действующие на свободные заряды со стороны источника тока, называются *сторонними*. Участок цепи, на котором действуют не только электростатические, но и сторонние силы, называется *неоднородным* или, что то же, *активным*.

На неоднородном участке работу по перемещению заряда совершают не только электростатические, но и сторонние силы. Поэтому в случае неоднородного участка к правой части уравнения

(7.2.3) следует добавить величину $\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$, равную работе сторонних сил по перемещению единичного заряда и называемую

электродвижущей силой (ЭДС) источника тока:

$$IR = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}. \quad (7.3.1)$$

Схематическое изображение неоднородного участка цепи показано на рис. 7.3.1.

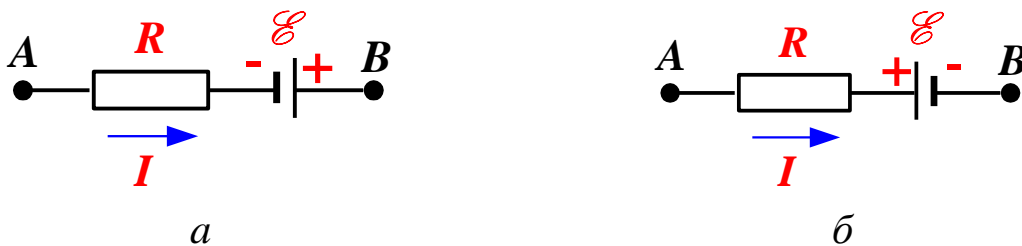


Рисунок 7.3.1

Выражение (7.3.1) представляет собой *закон Ома для неоднородного участка цепи*. Отметим, что выражение в правой части уравнения (7.3.1) представляет собой работу всех сил по перемещению единичного заряда по данному участку цепи, как электростатических, так и сторонних.

Применяя равенство (7.3.1), следует помнить, что сила тока и ЭДС – величины алгебраические, то есть могут быть как положительными, так и отрицательными. Если ток течет от точки A к точке B, он берется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. ЭДС принимается со знаком плюс, если совершаемая источником работа способствует движению зарядов в выбранном направлении (то есть *внутри* источника тока перемещение от A к B происходит от катода к аноду (рис. 7.3.1, a). В противном случае ЭДС берется со знаком минус (рис. 7.3.1, б).

При рассмотрении конкретных схем бывает удобно применить следующий прием: всегда за точку A принимать точку, из которой течет ток, а за точку B – точку, куда он течет. Тогда ток будет иметь

знак плюс, а знак ЭДС выбирается следующим образом: если *внутри источника* ток течет от минуса к плюсу, ЭДС берется со знаком плюс, если от плюса к минусу – со знаком минус (так называемое «правило последнего знака»).

Нетрудно заметить, что при $\mathcal{E} = 0$ уравнение (7.3.1) переходит в уравнение (7.2.1), справедливое для однородного участка цепи.

Если электрическая цепь замкнута, то есть точки A и B совпадают, то $\varphi_A = \varphi_B$ и $IR = \mathcal{E}$. В общем случае суммарное сопротивление цепи R складывается из сопротивления внешней цепи R_1 и внутреннего сопротивления источника тока r : $R = R_1 + r$.

Наконец, если ток по участку цепи не идет ($I = 0$), то $\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$. Это условие выполняется, в частности, в разомкнутой цепи: ЭДС в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах.

7.4. Дифференциальная форма закона Ома

Рассмотрим короткий участок однородного цилиндрического проводника. Подставляя выражение (7.2.2) в уравнение (7.2.3), получаем

$$I\rho \frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi. \quad (7.4.1)$$

Но $\frac{I}{S} = j$ – плотность тока в проводнике, $-\frac{\partial\varphi}{\partial l} = E$ – напряженность электрического поля. Поэтому равенство (7.4.1) можно переписать как

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (7.4.2)$$

Величина $\gamma = \frac{1}{\rho}$ называется *удельной электропроводностью* проводника. Как и удельное сопротивление, она зависит только от материала проводника и температуры. Поскольку направление вектора плотности тока совпадает с направлением движения положительных зарядов, а следовательно с направлением напряженности электрического поля, уравнение (7.4.2) справедливо и в векторной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (7.4.3)$$

Это равенство представляет собой закон Ома в дифференциальной (локальной) форме и позволяет определить плотность тока в любой точке однородного проводника.

Для того чтобы обобщить равенство (7.4.3) для случая неоднородного участка цепи, вводят понятие поля сторонних сил и напряженности поля сторонних сил: $\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q}$. Тогда уравнение (7.4.3)

можно обобщить как

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (7.4.4)$$

Это закон Ома в локальной (дифференциальной) форме для неоднородного участка цепи.

7.5. Правила Кирхгофа

Закон Ома в интегральной форме предполагает, что на всем участке цепи ток одинаков. Однако на практике большинство электрических цепей имеют достаточно сложную структуру, содержащую ветвления, состоящую из ряда контуров, возможно имеющих общие части. Любую такую цепь можно рассчитать, используя для каждого неразветвленного участка закон Ома в форме (7.2.3) или (7.3.1), однако задачу можно решить гораздо проще, используя два *правила Кирхгофа*, рассматриваемые далее.

Узлом называется любая точка ветвления цепи, в которой сходятся не менее трех проводников.

Первое правило Кирхгофа относится к любому узлу.

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

$$\sum_k I_k = 0. \quad (7.5.1)$$

При этом токи, входящие в узел, принято считать положительными, а токи, выходящие из узла, – отрицательными. Так, для узла, представленного на рис. 7.5.1, токи I_1 , I_2 , I_3 положительны, а токи I_4 , I_5 отрицательны, и уравнение (7.5.1) имеет вид:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения электрического заряда. Действительно, если бы сумма (7.5.1) не была равна нулю (например, сумма токов, втекающих в узел, пре-

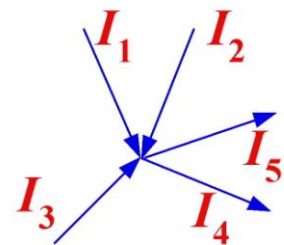


Рисунок 7.5.1

вышла сумма токов, вытекающих из узла), это означало бы, что в узле накапливаются электрические заряды. А накопление зарядов привело бы к изменению потенциалов в цепи и изменению токов: токи не могли бы оставаться постоянными.

Второе правило Кирхгофа выводится из закона Ома и применимо к контурам.

Контуром называется такой участок цепи, который можно обойти, пройдя каждый из его элементов ровно один раз, и вернуться в исходную точку.

Рассмотрим контур ABC , состоящий из трех участков (рис. 7.5.2). Точки A, B, C – узлы, в которые входят как принадлежащие, так и не принадлежащие контуру проводники. Запишем закон Ома для каждого из участков AB, BC, CD :

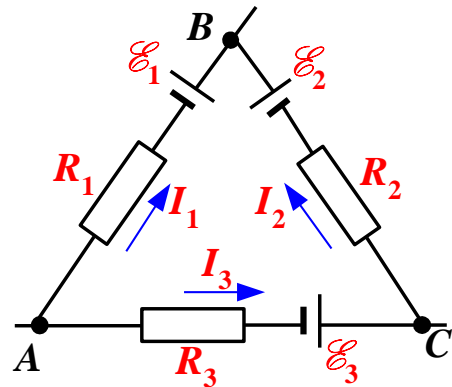


Рисунок 7.5.2

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1; \\ -I_2 R_2 &= \varphi_B - \varphi_C - \mathcal{E}_2; \\ -I_3 R_3 &= \varphi_C - \varphi_A - \mathcal{E}_3. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Сложение этих трех уравнений позволяет избавиться от потенциалов точек A, B, C и приводит к равенству

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3. \quad (7.5.3)$$

Уравнение (7.5.3) выражает *второе правило Кирхгофа*.

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме ЭДС всех источников электрической энергии, включенных в этот контур:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (7.5.4)$$

Используя правила Кирхгофа для расчета электрических цепей, разумно придерживаться следующего порядка действий.

1. Произвольно выбрать и обозначить на схеме направления токов на всех участках цепи.

2. Подсчитать число k узлов в цепи. Записать для $k-1$ узла первое правило Кирхгофа (входящие токи берутся с плюсом, выходящие – с минусом).

3. Записать уравнения второго правила Кирхгофа для различных замкнутых контуров, входящих в цепь. При этом записывать уравнения для всех контуров не надо: каждый из контуров, для которого записывается очередное уравнение, должен содержать хотя бы один участок, не входящий в контуры, для которых уравнения уже записаны. В цепи, состоящей из p неразветвленных участков и k узлов, число независимых контуров равно $p - k + 1$.

4. Решить полученную систему уравнений. Если в результате расчетов значение тока на каком-либо участке цепи оказывается отрицательным, это означает, что по данному участку ток течет в направлении, противоположном обозначенному на схеме.

7.6. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим однородный (пассивный) участок цепи. За время dt через произвольное сечение этого участка протекает заряд $dq = Idt$. Так как этот заряд перемещается в электрическом поле, работа по перемещению этого заряда равна

$$dA = dq(\varphi_A - \varphi_B) = I(\varphi_A - \varphi_B)dt = I^2 R dt. \quad (7.6.1)$$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}. \quad (7.6.2)$$

Если ток течет по неподвижному проводнику, то вся работа, совершенная током, расходуется на выделение в проводнике теплоты $dQ = dA$.

Поэтому теплота, выделяемая в проводнике:

$$dQ = I^2 R dt = IU dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (7.6.3)$$

Это равенство представляет собой *закон Джоуля – Ленца*.

В случае неоднородного участка цепи работу совершают не только электростатические, но и сторонние силы, поэтому разность потенциалов в выражении (7.6.1) следует заменить на выражение $\varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}$, однако и в этом случае, учитывая (7.3.1), получаем

$$dQ = dA = I^2 R dt. \quad (7.6.4)$$

И работа тока, и выделяемая теплота в Международной системе единиц (СИ) выражаются в джоулях, а мощность – в ваттах. Однако на практике часто применяются внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). Один ватт-час равен работе тока мощностью в 1 Вт за 1 час:

$$1 \text{ Вт}\cdot\text{ч} = 1 \text{ Вт}\cdot 3600 \text{ с} = 3600 \text{ Дж}.$$

Соответственно, $1 \text{ кВт}\cdot\text{ч} = 3,6\cdot 10^6 \text{ Дж}$.

Как и закон Ома, закон Джоуля – Ленца можно выразить в дифференциальной форме. Для этого выделим в проводнике цилиндрический объем $dV = dl \cdot dS$ таким образом, чтобы ось цилиндра совпадала с направлением тока (рис. 7.6.1). Сопротивление этого участка

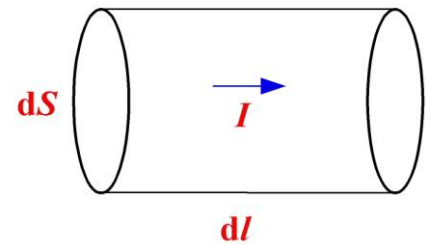


Рисунок 7.6.1

$R = \rho \frac{dl}{dS}$. По закону Джоуля – Ленца в этом цилиндре за время dt выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \cdot \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt. \quad (7.6.5)$$

Количество теплоты, выделяемое за единицу времени в единице объема:

$$w = \frac{dQ}{dV dt}, \quad (7.6.6)$$

называется *удельной тепловой мощностью* тока. Из (7.6.5) и (7.6.6) следует, что

$$w = \rho j^2. \quad (7.6.7)$$

Выражение (7.6.7) представляет собой *закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*.

7.7. КПД источника тока

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь, состоящую из источника тока с внутренним сопротивлением r и внешнего сопротивления R (рис. 7.7.1). Мощность тока, текущего по этой цепи, равна $P = I^2(R + r)$. Однако полезной является лишь мощность, выделяемая во внешней цепи, равная $P_{\text{полезн}} = I^2 R$. Отношение

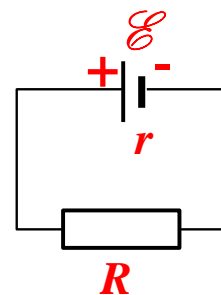


Рисунок 7.7.1

полезной мощности к полной мощности, выделяемой в цепи, называется коэффициентом полезного действия (КПД) источника тока. КПД обозначается греческой буквой η .

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P}. \quad (7.7.1)$$

Очевидно, что

$$\eta = \frac{R}{R + r}. \quad (7.7.2)$$

Из (7.7.2) видно, что КПД источника тока тем выше, чем меньше внутреннее сопротивление источника по сравнению с сопротивлением внешней цепи.

7.8. Классическая теория электропроводности металлов

В начале XX века П. Друде и Г. Лоренцом была сделана достаточно успешная попытка объяснить экспериментальные закономерности, описанные в предыдущих разделах данной главы на основе модельных представлений о природе тока в металлических проводниках. К тому времени было уже доказано экспериментально, что носителями тока в металлах являются именно электроны. Была принята следующая простая модель: кристаллическая решетка проводника состоит из положительно заряженных ионов, а электроны проводимости рассматриваются как электронный газ, обладающий свойствами одноатомного идеального газа. Электронами проводимости становятся не все электроны отдельных атомов, из которых состоит металл, а только их валентные электроны. Концентрация электронов n_0 в одновалентном металле равна числу атомов этого металла в единице объема.

В отсутствие электрического поля электроны проводимости движутся хаотично, причем их средняя кинетическая энергия определяется так же, как кинетическая энергия поступательного движе-

ния молекул: $\frac{m\langle u_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, где m – масса электрона; $\langle u_{\text{кв}} \rangle$ – сред-

няя квадратичная скорость его теплового движения; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. При температуре 273 К средняя квадратичная скорость, рассчитанная при помощи этого равенства, составляет 10^5 м/с.

Под действием электрического поля начинается упорядоченное движение электронов. В соответствии с формулой (7.1.3) плотность тока в металлах

$$\vec{j} = -n_0 e \langle \vec{v} \rangle, \quad (7.8.1)$$

где $\langle \vec{v} \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения электронов. В формуле (7.8.1) учтено, что заряд электрона равен $-e$.

Даже при самых высоких значениях плотности тока в проводках скорость упорядоченного движения электронов не превышает 10^{-3} м/с. Таким образом, эта скорость ничтожно мала по сравнению со средней скоростью $\langle u \rangle$ теплового движения электронов.

В классической теории электропроводности металлов предполагается, что между двумя соударениями с ионами кристаллической решетки электроны движутся равноускоренно:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E},$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля в проводнике.

При соударении с ионом электрон полностью теряет скорость упорядоченного движения. Если среднее время между двумя столкновениями с ионами равно τ , то за это время электрон успевает приобрести в электрическом поле скорость $\vec{v}_{\max} = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$, а средняя скорость упорядоченного движения электрона

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{v}_{\max}}{2} = -\frac{e\vec{E}\tau}{2m}. \quad (7.8.2)$$

Среднее время τ между соударениями электронов с ионами кристаллической решетки определяется скоростью их теплового движения $\langle u \rangle$:

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle u \rangle}, \quad (7.8.3)$$

где λ – средняя длина свободного пробега электрона между двумя столкновениями с ионами. Подставляя (7.8.3) в (7.8.2), получаем

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\lambda\vec{E}}{2m\langle u \rangle}. \quad (7.8.4)$$

Из (7.8.1) и (7.8.4) получаем

$$\vec{j} = -n_0 e \langle \vec{v} \rangle = \frac{n_0 e^2 \lambda}{2m \langle u \rangle} \vec{E}. \quad (7.8.5)$$

Сопоставляя уравнения (7.8.5) и (7.4.3), нетрудно заметить, что выражение (7.8.5) представляет собой не что иное, как закон Ома в дифференциальной форме, при этом удельная электропроводность

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \lambda}{2m \langle u \rangle}. \quad (7.8.6)$$

Из (7.8.5) и (7.8.6) видно, что закон Ома выполняется лишь в том случае, если ни концентрация носителей n_0 , ни длина свободного пробега λ не зависят от напряженности электрического поля. В металлах это условие выполняется с очень высокой степенью точности. Однако для тока в вакууме, в полупроводниках, в газах реализуются другие механизмы электропроводности, и закон Ома не выполняется.

Классическая теория электропроводности очень хорошо объясняет проводимость металлов на качественном уровне. Однако экспериментально обнаружено, что ряд выводов этой теории противоречит опыту. Например, в соответствии с этой теорией скорость теплового движения электронов пропорциональна \sqrt{T} , где T – абсолютная температура. Тогда, в соответствии с (7.8.6), удельная электропроводность γ должна быть пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{T}}$, а удельное сопротивление $\rho = \frac{1}{\gamma}$ – пропорционально \sqrt{T} . В действительности же наблюдается линейное возрастание удельного сопротивления металла с температурой.

Это и другие противоречия были устранены в квантовой теории электропроводности металлов, которая будет рассмотрена в других разделах курса физики.

7.9. Вопросы для самоконтроля и экспресс-контроля

7.9.1. Какая физическая величина называется электродвижущей силой источника тока (ЭДС)?

7.9.2. Запишите закон Ома для участков цепи, представленных на рис. 7.9.1.

7.9.3. По участку цепи сопротивлением $R=2$ Ом течет ток $I=5$ А. Какую работу совершают все силы, перемещая заряд 1 Кл по этому участку?

7.9.4. По участку цепи сопротивлением $R=2$ Ом течет ток $I=5$ А. Какую работу совершают все силы за 1 минуту?

7.9.5. Определите ток на участке цепи, представленном на рис. 7.9.2, если $\varphi_1 = 1$ В, $\varphi_2 = 5$ В, $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом.

7.9.6. Сколько узлов и сколько контуров содержит цепь, представленная на рис. 7.9.3? Сколько уравнений Кирхгофа для узлов и контуров достаточно записать, чтобы рассчитать такую цепь?

7.9.7. Каков КПД источника тока в случае, когда внешнее сопротивление равно сопротивлению источника?

7.9.8. Электроплитка имеет две одинаковые спирали. Если включена одна спираль, мощность электроплитки составляет 500 Вт. Какой будет мощность плитки, если спирали включить последовательно? Параллельно?

7.9.9. Если на сопротивление R подать напряжение U , мощность тока составит 200 Вт. Какой будет мощность тока, если соединить последовательно 5 таких сопротивлений и подать на полученную цепь напряжение $2U$?

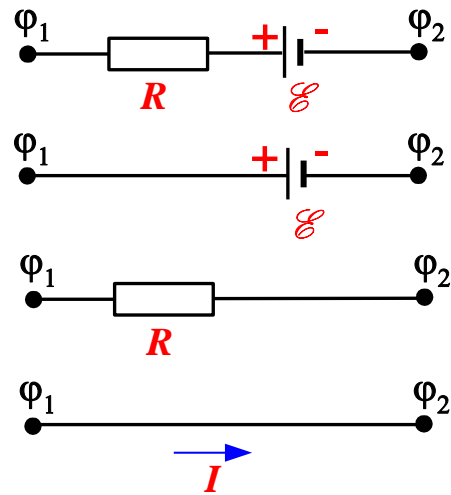


Рисунок 7.9.1

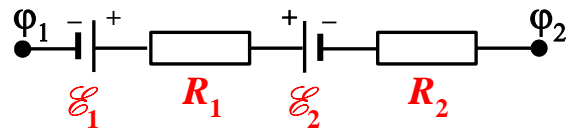


Рисунок 7.9.2

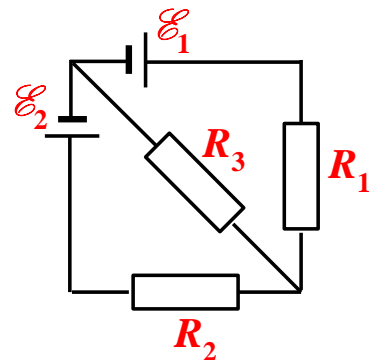


Рисунок 7.9.3

7.10. Примеры решения задач

Расчет сопротивлений

Пример 7.10.1. Сферический конденсатор с радиусами внутренней и внешней обкладок, равными a и b , заполнен слабо проводящим диэлектриком с удельным сопротивлением ρ . Определите сопротивление диэлектрика.

Решение. Выделим мысленно тонкий сферический слой между радиусами r и $r + dr$ (рис. 7.10.1). Плотность тока во всех точках этого слоя перпендикулярна слою и одинакова, поэтому такой слой можно рассматривать как проводник длиной dr с площадью поперечного сечения $S = 4\pi r^2$. Воспользовавшись

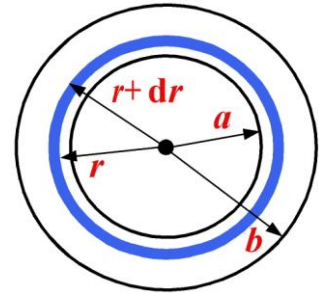


Рисунок 7.10.1

формулой (7.2.2), находим сопротивление этого слоя: $dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$.

Общее сопротивление диэлектрика равно $R = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Пример 7.10.2. Заземление выполнено в виде шара радиусом a , закопанного в землю на большую глубину. Шар соединен с заземленным прибором изолированным проводом. Определите сопротивление такого заземления, если удельная электропроводность земли ρ . Удельное сопротивление шара и провода существенно меньше.

Решение. Пользуясь приемом, показанным в предыдущей задаче, и интегрируя от a до бесконечности, получаем

$$R = \int_a^{\infty} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi a}.$$

Следует отметить, что при реальном заземлении важно знать удельное сопротивление грунта именно в той точке планеты Земля, где производится заземление. Ведь удельное сопротивление различных пород может различаться более чем в 100 раз. Например, удельное сопротивление влажной глины составляет 20 Ом·м, а удельное сопротивление гранита иногда достигает 22000 Ом·м. Очевидно, что для заземления лучше выбирать зоны почвы с низким удельным сопротивлением.

Расчет электрических цепей

Пример 7.10.3. На участке цепи, представленном на рис. 7.10.2, $R_1 = 2,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $r = 0,5 \text{ Ом}$, $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$, $I = 2$. Определите токи, протекающие через сопротивления R_1 и R_2 .

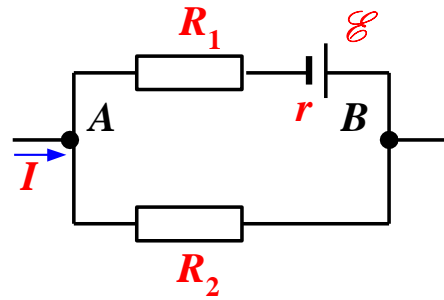


Рисунок 7.10.2

Решение. Предположим, что токи направлены так, как показано на рисунке. Запишем I правило Кирхгофа для узла A:

$$I - I_1 - I_2 = 0.$$

Согласно II правилу Кирхгофа для контура $AR_1\mathcal{E}BR_2A$ (обход по часовой стрелке)

$$I_1(R_1 + r) - I_2R_2 = \mathcal{E}.$$

Решая уравнения совместно, получаем

$$I_2 = \frac{I_1(R_1 + r) - \mathcal{E}}{R_1 + r + R_2} = 0, \quad I_1 = I = 2 \text{ А}.$$

Пример 7.10.4. В схеме, показанной на рис. 7.10.3, $\mathcal{E}_1 = 110 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 220 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 500 \text{ Ом}$. Найти показания амперметра.

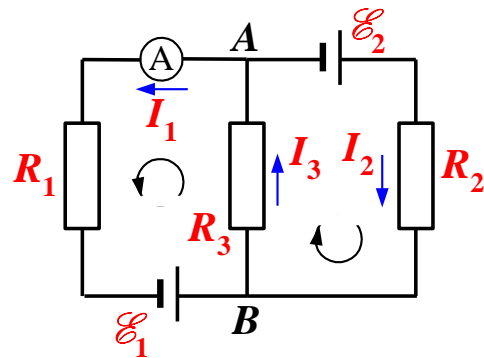


Рисунок 7.10.3

Решение 1. Предположим, что токи текут так, как показано на рис. 7.10.3. Через амперметр течет ток I_1 . Запишем правила Кирхгофа для узла B и двух контуров (направления обхода показаны на рисунке):

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0; \quad (7.10.1)$$

$$I_1R_1 + I_3R_3 = \mathcal{E}_1; \quad (7.10.2)$$

$$I_2R_2 + I_3R_3 = \mathcal{E}_2. \quad (7.10.3)$$

Из (7.10.1) выражаем $I_3 = I_1 + I_2$ и подставляем в (7.10.2) и (7.10.3) вместе с численными данными:

$$600I_1 + 500I_2 = 110; \quad (7.10.4)$$

$$500I_1 + 600I_2 = 220, \quad (7.10.5)$$

откуда $I_1 + I_2 = 0,3$; $I_2 = 0,3 - I_1$. Подставляя это выражение в любое из уравнений (7.10.4) или (7.10.5) и производя вычисления, получаем $I_1 = -0,4$ А. Знак минус показывает, что ток течет в направлении, противоположном показанному на рисунке.

Решение 2. Задачу можно решить и другим способом.

Запишем закон Ома для каждого из неразветвленных участков цепи и первое правило Кирхгофа для узла B :

$$I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1; \quad (7.10.6)$$

$$I_2 R_2 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_2; \quad (7.10.7)$$

$$I_3 R_3 = \varphi_B - \varphi_A; \quad (7.10.8)$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (7.10.9)$$

Выразим токи I_1 , I_2 , I_3 из уравнений (7.10.6)–(7.10.8) и подставим в уравнение (7.10.9):

$$(\varphi_A - \varphi_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = 0,$$

откуда находим

$$(\varphi_A - \varphi_B) = - \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} = -150 \text{ В.}$$

Подставляя это значение в (7.10.6), получаем

$$I_1 = \frac{-150 + 110}{100} = -0,4 \text{ А.}$$

Второй из приведенных методов решения (он называется методом узловых потенциалов) можно успешно применять в тех случаях, когда схема содержит всего два узла.

Закон Джоуля – Ленца. КПД источника тока

Пример 7.10.5. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В дает максимальный ток $I = 3$ А. Какое максимальное количество теплоты может выделиться во внешнем сопротивлении за 1 секунду при использовании этого элемента?

Решение. Элемент дает максимальный ток при коротком замыкании, когда внешнее сопротивление $R_1 = 0$. В этом случае ток $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$, где r – внутреннее сопротивление элемента. Подставляя численные значения, получаем $r = 2$ Ом.

Количество теплоты, выделяемое на внешнем сопротивлении R_1 за 1 секунду, – это мощность тока P . Мощность тока зависит от внешнего сопротивления R_1 и определяется равенством

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

Полученное выражение максимально, когда производная его по R равна нулю. Дифференцируя, получаем условие максимума

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 (R + r)^{-2} - 2R \mathcal{E}^2 (R + r)^{-3} = 0.$$

Это равенство выполняется при $R = r$, следовательно, максимальное значение мощности $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2 r}{4r^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 4,5$ Вт.

Пример 7.10.6. Ток в цепи изменяется по закону $I = kt^2$, где $k = 2$ А/с. Сопротивление цепи равно 10 Ом. Определите количество теплоты, выделившейся в цепи за первые 2 секунды протекания тока.

Решение. Мощность тока $P = I^2 R = k^2 t^4 R$. Выделившееся количество теплоты $Q = \int_0^t P dt = \int_0^t k^2 t^4 R dt = \frac{k^2 t^5 R}{5} = 2,5 \cdot 10^4$ Дж.

Переходные процессы

Пример 7.10.7. Обкладки конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ, заряженного до разности потенциалов $U_0 = 1$ В, замкнули через внешнее сопротивление $R = 10^4$ Ом (рис. 7.10.4). Выведите закон изменения напряжения на конденсаторе со временем. За какое время напряжение на конденсаторе уменьшится вдвое?

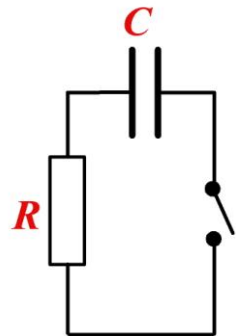


Рисунок 7.10.4

Решение. Ток в цепи

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (7.10.10)$$

где q – заряд на конденсаторе. Знак минус показывает, что заряд на конденсаторе убывает. Согласно закону Ома, $I = \frac{U}{R}$. В то же время $q = CU$. Подставляя эти выражения в (7.10.10), получаем $\frac{U}{R} = -C \frac{dU}{dt}$.

Разделяем переменные: $\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} dt$. Интегрируем:

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{U} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt;$$

$$\ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{RC}; \quad (7.10.11)$$

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (7.10.12)$$

Уравнение (7.10.12) выражает искомую зависимость напряжения на конденсаторе от времени. Оно показывает, что напряжение экспоненциально убывает со временем, причем процесс разрядки происходит тем быстрее, чем меньше значения R и C . Величина $\tau = RC$ имеет размерность времени и численно равна времени, в течение которого напряжение на конденсаторе уменьшается в e раз.

Время, в течение которого напряжение уменьшится в 2 раза, удобно определить из уравнения (7.10.12), подставив вместо U величину $\frac{U_0}{2}$:

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{t}{RC};$$

$$t = RC \ln 2 = 10^{-6} \cdot 10^4 \cdot 0,69 = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Пример 7.10.8. В схеме, представленной на рис. 7.10.5, $\mathcal{E} = 6$ В, $R = 20$ кОм, $C = 2$ мкФ. Первоначально конденсатор не заряжен, ключ разомкнут. Выведите закон изменения напряжения U_C на конденсаторе со временем. Через какое время после замыкания ключа напряжение на конденсаторе составит 5 В?

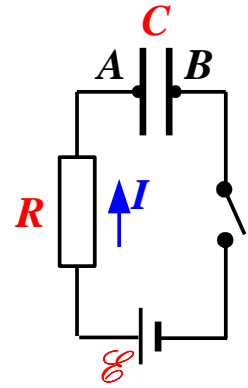


Рисунок 7.10.5

Решение. В момент времени t заряд на конденсаторе равен нулю. При замыкании ключа в цепи идет ток, заряжающий конденсатор. Однако заряд, накапливающийся на конденсаторе, будет препятствовать прохождению тока, ввиду чего ток у цепи будет уменьшаться со временем.

Направление тока показано на рис. 7.10.5. Применим к участку $AR\mathcal{E}B$ закон Ома:

$$RI = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}.$$

Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$ (на этот раз ток приводит к увеличению заряда и производная заряда по времени берется с плюсом) и $\varphi_B - \varphi_A = \frac{q}{C}$, получаем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{R}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{Rdq}{\mathcal{E} - q/C} = dt.$$

Интегрируем левую часть от 0 до q , а правую – от 0 до t :

$$RC \ln\left(1 - \frac{q}{\mathcal{E}C}\right) = -t.$$

Учитывая, что $\frac{q}{C} = U_C$, получаем

$$RC \ln\left(1 - \frac{U_C}{\mathcal{E}}\right) = -t; \quad (7.10.13)$$

$$U_C = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (7.10.14)$$

Уравнение (7.10.14) представляет собой закон изменения напряжения на конденсаторе со временем.

Время, в течение которого напряжение на конденсаторе U_C достигнет 5 В, удобнее найти из выражения (7.10.13). Учитывая, что $1 - \frac{U_C}{\varepsilon} = \frac{1}{6}$, а $\ln \frac{1}{6} = -\ln 6 = -1,79$, получаем

$$t = 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1,79 = 7,16 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

7.11. Задачи для самостоятельного решения

7.11.1. Определите сопротивление изоляции между обкладками цилиндрического конденсатора, если радиусы внутренней и внешней обкладок составляют соответственно a и b , длина конденсатора l , а удельное сопротивление изоляции между ними $\rho = 10^{10}$ Ом·м.

7.11.1.1. $a = 4$ см, $b = 5$ см, $l = 10$ см.

7.11.1.2. $a = 1$ см, $b = 2$ см, $l = 5$ см.

7.11.1.3. $a = 10$ см, $b = 12$ см, $l = 20$ см.

7.11.1.4. $a = 0,1$ см, $b = 0,5$ см, $l = 10$ см.

7.11.1.5. $a = 0,1$ см, $b = 0,2$ см, $l = 5$ см.

7.11.1.6. $a = 0,8$ см, $b = 1$ см, $l = 4$ см.

7.11.1.7. $a = 1$ см, $b = 2$ см, $l = 1$ м.

7.11.1.8. $a = 0,5$ см, $b = 1$ см, $l = 1$ см.

7.11.1.9. $a = 1,2$ см, $b = 1,5$ см, $l = 30$ см.

7.11.1.10. $a = 2$ см, $b = 3$ см, $l = 20$ см.

7.11.1.11. $a = 3$ см, $b = 4$ см, $l = 20$ см.

7.11.2. Обкладкам конденсатора в условиях предыдущей задачи сообщили заряд Q . За какое время заряд уменьшится вдвое, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 2$?

7.11.3. Запишите уравнения Кирхгофа для схем, показанных на рисунках 7.11.1 – 7.11.11.

7.11.3.1. Рис. 7.11.1.

7.11.3.2. Рис. 7.11.2.

7.11.3.3. Рис. 7.11.3.

7.11.3.4. Рис. 7.11.4.

7.11.3.5. Рис. 7.11.5.

7.11.3.6. Рис. 7.11.6.

7.11.3.7. Рис. 7.11.7.

7.11.3.8. Рис. 7.11.8.

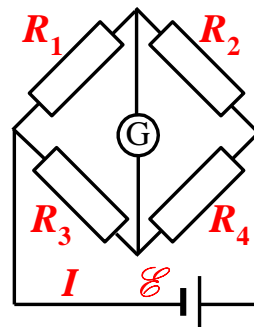


Рисунок 7.11.1

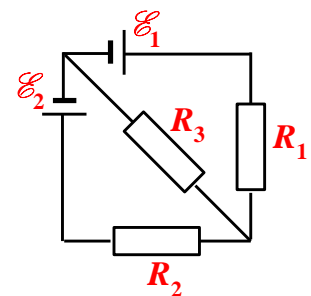


Рисунок 7.11.2

7.11.3.9. Рис. 7.11.9.

7.11.3.10. Рис. 7.11.10.

7.11.3.11. Рис. 7.11.11.

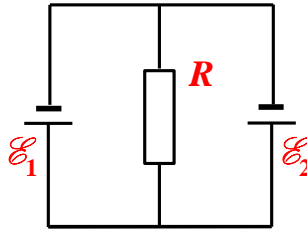


Рисунок 7.11.3

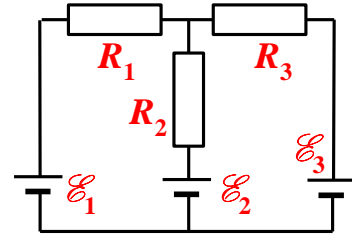


Рисунок 7.11.4

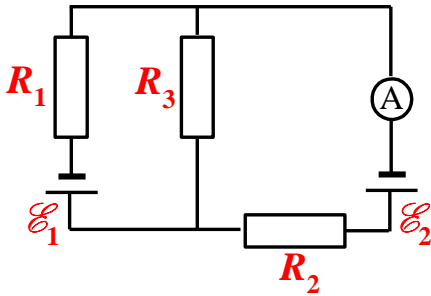


Рисунок 7.11.5

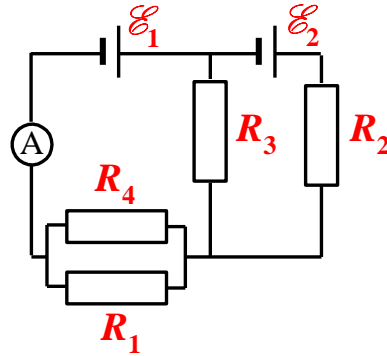


Рисунок 7.11.6

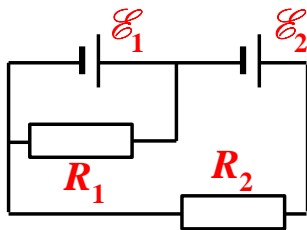


Рисунок 7.11.7

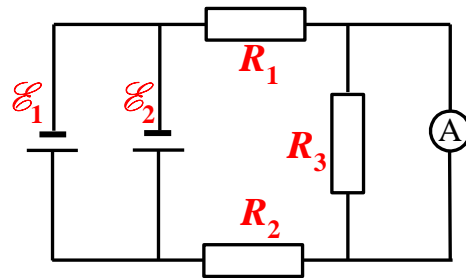


Рисунок 7.11.8

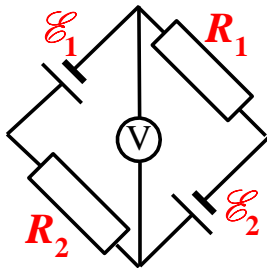


Рисунок 7.11.9

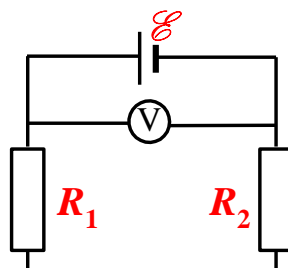


Рисунок 7.11.10

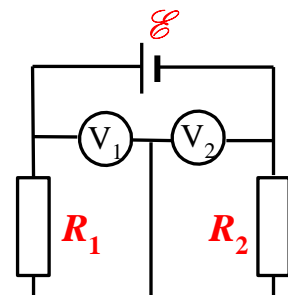


Рисунок 7.11.11

7.11.4. В задачах 7.11.4.1–7.11.4.11 требуется выполнить численные расчеты, используя уравнения Кирхгофа:

7.11.4.1. На рис. 7.11.2 $\mathcal{E}_1 = 3$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 4$ Ом. Определите токи во всех участках цепи.

7.11.4.2. На рис. 7.11.3 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, через элемент \mathcal{E}_1 течет ток $I_1 = 1$ А. Определите остальные токи в цепи.

7.11.4.3. На рис. 7.11.3 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 6$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, через элемент \mathcal{E}_1 течет ток $I_1 = 3$ А. Определите сопротивление R .

7.11.4.4. На рис. 7.11.3 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 0,5$ Ом, через элемент \mathcal{E}_1 течет ток $I_1 = 2$ А. Определите остальные токи в цепи.

7.11.4.5. На рис. 7.11.3 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 4$ В, $R_1 = R_2 = 0,5$ Ом, через элемент \mathcal{E}_1 течет ток $I_1 = 2$ А. Определите сопротивление R .

7.11.4.6. На рис. 7.11.12 $\mathcal{E}_1 = 3$ В, $\mathcal{E}_2 = 6$ В, $R_1 = 0,5$ Ом. Разность потенциалов на сопротивлении R_2 равна $U = 1,5$ В (ток по этому сопротивлению течет справа налево). Определите показания амперметра. Сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

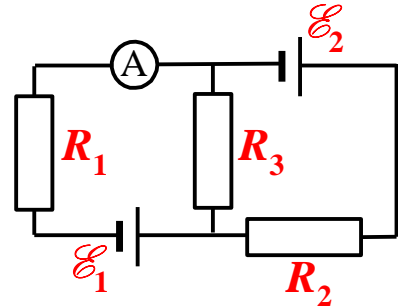


Рисунок 7.11.12

7.11.4.7. На рис. 7.11.12 $\mathcal{E}_1 = 30$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом. Через амперметр течет ток $I = 1$ А, направленный от R_3 к R_1 . Определите сопротивление R_1 .

7.11.4.8. На рис. 7.11.5 $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 1$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0,5$ кОм. При каком сопротивлении R_3 ток через амперметр не потечет?

7.11.4.9. На рис. 7.11.5 $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, сопротивление амперметра $R_A = 200$ Ом. Напряжение на сопротивлении R_3 $U_3 = 1$ В (ток через это сопротивление направлен снизу вверх). Определите все токи в цепи.

7.11.4.10. На рис. 7.11.4 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 18$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом. При коротком замыкании верхнего узла схемы с отрицательным зажимом батареи через замыкающий провод потечет ток $I = 4,8$ А. Найдите токи во всех участках цепи и сопротивление R_3 (до короткого замыкания).

7.11.4.11. На рис. 7.11.4 $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $\mathcal{E}_3 = 6$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 8$ Ом. Определите токи во всех участках цепи.

7.11.5. Решение задач данной группы требует применения закона Джоуля – Ленца.

7.11.5.1. Напряжение в цепи изменяется по закону $U = At$, где $A = 6$ В/с. Сопротивление цепи 3 Ом. Какое количество теплоты выделяется в цепи за первые 2 секунды нарастания тока?

7.11.5.2. Напряжение в цепи изменяется по закону $U = At^2$, где $A = 6$ В/с². Сопротивление цепи 10 Ом. Какое количество теп-

лоты выделяется в цепи за первую секунду нарастания напряжения?

- 7.11.5.3.** Сила тока в цепи изменяется по закону $I = At - Bt^2$, где $A = 5 \text{ А/с}$, $B = 2 \text{ А/с}^2$. Сопротивление цепи 5 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за первую секунду?
- 7.11.5.4.** Сила тока в цепи изменяется по закону $I = At + Bt^2$, где $A = 5 \text{ А/с}$, $B = 2 \text{ А/с}^2$. Сопротивление цепи 5 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за первую секунду нарастания тока?
- 7.11.5.5.** Сила тока в цепи изменяется по закону $I = At$, где $A = 3 \text{ А/с}$. Сопротивление цепи 2 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за первую секунду нарастания тока?
- 7.11.5.6.** Напряжение в цепи изменяется по закону $U = At^2$, где $A = 6 \text{ В/с}^2$. Сопротивление цепи 10 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за вторую секунду?
- 7.11.5.7.** Сила тока в цепи изменяется по закону $I = At$, где $A = 2 \text{ А/с}$. Сопротивление цепи 9 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за вторую секунду?
- 7.11.5.8.** Сила тока в цепи изменяется по закону $I = At^2$, где $A = 3 \text{ А/с}^2$. Сопротивление цепи 25 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за первые три секунды нарастания тока?
- 7.11.5.9.** Напряжение в цепи изменяется по закону $U = At^2$, где $A = 6 \text{ В/с}^2$. Сопротивление цепи 10 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за третью секунду нарастания напряжения?
- 7.11.5.10.** Напряжение в цепи изменяется по закону $U = U_0 - At$, где $U_0 = 1 \text{ В}$, $A = 1 \text{ В/с}$. Сопротивление цепи 10 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за первую секунду?
- 7.11.5.11.** Напряжение в цепи изменяется по закону $U = U_0 - At$, где $U_0 = 10 \text{ В}$, $A = 1 \text{ В/с}$. Сопротивление цепи 10 Ом . Какое количество теплоты выделяется в цепи за вторую секунду?
- 7.11.6.** Батарея с ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r замкнута на внешнее сопротивление R_1 . Во сколько раз изменится КПД батареи и мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, если сопротивление R_1 заменить на сопротивление R_2 ?

7.11.6.1. $r = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$.

7.11.6.2. $r = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$.

7.11.6.3. $r = 3 \text{ Ом}$, $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 9 \text{ Ом}$.

7.11.6.4. $r = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 9 \text{ Ом}$.

7.11.6.5. $r = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$.

7.11.6.6. $r = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$.

7.11.6.7. $r = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 8 \text{ Ом}$.

7.11.6.8. $r = 3 \text{ Ом}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 7 \text{ Ом}$.

7.11.6.9. $r = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 18 \text{ Ом}$.

7.11.6.10. $r = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$.

7.11.6.11. $r = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 18 \text{ Ом}$.

7.12. Задачи повышенной сложности

7.12.1. Рассчитайте сопротивление бесконечных цепочек, показанных на рис. 7.12.1–7.12.3.

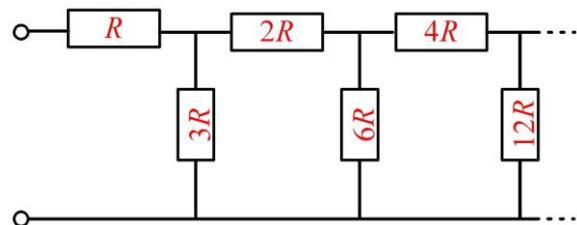


Рисунок 7.12.1

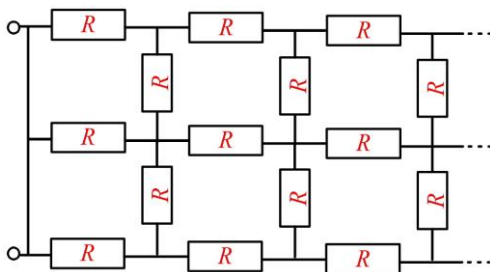
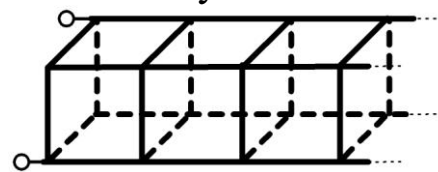


Рисунок 7.12.2



Сопротивление каждой стороны
проволочных кубов R

Рисунок 7.12.3

7.12.2. Определите закон изменения со временем напряжения на обкладках конденсатора при замыкании ключа K (рис. 7.12.4). Через какое время после включения напряжение на конденсаторе достигнет 99 % своего максимального значения, если $R_1 = 30 \text{ кОм}$, $R_2 = 15 \text{ кОм}$, $C = 0,2 \text{ мкФ}$?

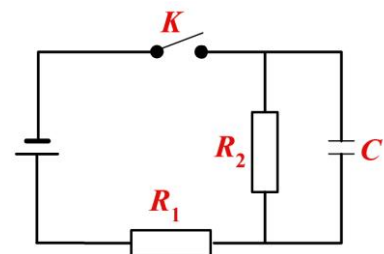


Рисунок 7.12.4

7.12.3. Конденсатор емкостью C подключен последовательно с резистором R к источнику с электродвижущей силой \mathcal{E} . Определи-

те работу, совершенную источником при зарядке конденсатора после замыкания ключа, и количество джоулевой теплоты, выделившейся в цепи.

7.12.4. Электрическая цепь состоит из диода, подключенного через сопротивление $R=10$ Ом к источнику с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В (рис. 7.12.5). Ток через диод связан с напряжением на нем уравнением $I=\alpha U^2$. Определите напряжение на диоде и силу тока в цепи.

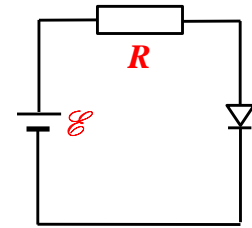


Рисунок 7.12.5

7.12.5. Цепь состоит из двух одинаковых резисторов с сопротивлениями R и двух одинаковых нелинейных элементов, у которых напряжение и ток связаны соотношением $U=\alpha I^2$ (рис. 7.12.6). При какой ЭДС источника ток через гальванометр равен нулю? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

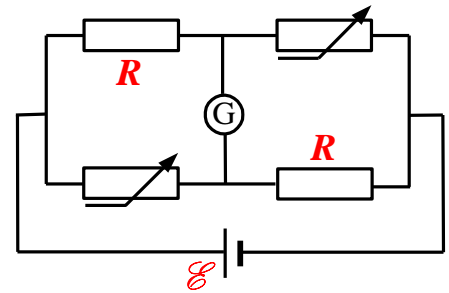


Рисунок 7.12.6

7.12.6. Определите заряды на конденсаторах на рис. 7.12.7 и 7.12.8.

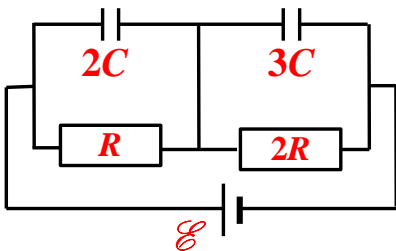


Рисунок 7.12.7

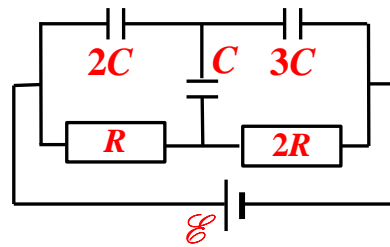


Рисунок 7.12.8

Список рекомендуемой литературы

1. Детлаф, А. А. Курс физики : учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва : Академия, 2007. – 720 с.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов. – 14-е изд. – Москва : Академия, 2007. – 560 с.

3. Чертов, А. Г. Задачник по физике : учебное пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2007. – 640 с.

4. Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям и специальностям : в 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 4-е изд., стереотип. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 480 с.

5. Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям и специальностям. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 352 с.

Окушко Наталия Борисовна

ФИЗИКА
Электромагнитные явления
Электростатика и постоянный ток

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 09.12.2019. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 8,00
Тираж 100 экз. Заказ

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово,
ул. Д. Бедного, 4а