МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Г. А. Липина
О. М. Мальцева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические материалы

Рекомендованы учебно-методической комиссией
направления подготовки бакалавров
09.03.03 Прикладная информатика
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Липина Галина Александровна
Мальцева Оксана Михайловна
Дискретная математика [Электронный ресурс]: методические материалы для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатик» всех форм обучения / сост. Г. А. Липина, О. М. Мальцева, КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины «Дискретная математика» и организации самостоятельной работы.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Дискретная математика» всех форм обучения.

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Тема 1. Элементы математической логики

Тема 1.1. Основы теории множеств

Общие понятия теории множеств. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера–Венна. Абстрактные законы операций над множествами. Декартово произведение множеств. Отношения. Бинарные отношения и их свойства.

Практическое занятие
по теме «Операции над множествами»

1. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера–Венна множества:

а) $A \subset B$ и $B \subset C$;

б) $A \subset B$; $B \subset C$ и $A \setminus B = \varnothing$

в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский – 28; немецкий – 30; испанский и немецкий – 8; испанский и французский – 10; немецкий и французский – 5; все три языка – 3.

а) Сколько студентов не изучают ни одного языка?

б) Сколько студентов изучают один французский язык?

Решение.

Нарисовать диаграмму Эйлера–Венна в виде трех кругов, обозначающих множество студентов, изучающих соответственно французский, немецкий и испанский языки. В каждую из восьми областей вписать данные, используя приведенные цифры. Начинать с конца списка и двигаться к началу.

Ответ: а) 20; б) 30.

3. Из множеств $\{a,b,c\}$ и $\{1,2\}$ составьте кортежи.

Решение.

Из данных множеств можно составить 6 кортежей длины 2.

$\langle a,1\rangle;\langle a,2\rangle;\langle b,1\rangle;\langle b,2\rangle;\langle c,1\rangle;\langle c,2\rangle$.

4. Пусть $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{x,y\}$.

Выписать все элементы декартова произведения $A\times B$ и $B\times A$.

5. Пусть $A=\{1,2\}$. Выписать все элементы декартова произведения $A\times A$.

6. Из цифр 1,2,3,4,5 составьте все двузначные числа. Как связано получившееся множество с декартовым произведением $A\times A$, где $A=\{1,2,3,4,5\}$?

Самостоятельная работа

1. Дано универсальное множество *U* и множества *A*, *B* и *C*. Найти множество *D*. Записать ответ в виде списка.

1.1

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

$A=\{1,3,5,7\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{1,2,3,5\}$;

$D=\left(A\cup\bar{B}\right)-C$.

1.2

$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;

$A=\{a,d,e,g\}, B=\{b,d,g,h\}, C=\{a,b,c,g\}$;

$D = \left(A \cup \bar{B}\right) \cap C$.

1.3

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 8\}$;

$D = \left(A \cap \bar{B}\right) - C$.

1.4

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A = \{a, c, e, h\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, h\}$;

$D = \left(A - \bar{B}\right) \cup C$.

1.5

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A = \{1, 4, 5, 7\}, B = \{2, 4, 5, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\}$;

$D = \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) - C$.

1.6

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$A = \{a, c, d, g\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, g\}$;

$D = \left(\bar{A} \cup B\right) - C$.

2. На диаграмме Венна–Эйлера изобразить результат действия:

2.1 $\left(\bar{C} - \bar{B}\right) \cup A$.

2.2 $\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)\cup A$.

2.3 $\left(\bar{C}\cup\bar{B}\right)\cup A$.

2.4 $\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)\cap A$.

2.5 $\left(\bar{C}\cap\bar{B}\right)-A$.

2.6 $\left(C\cap\bar{B}\right)\cap A$.

2.7 $\left(C\cap\bar{B}\right)-\bar{A}$.

3. Следующий опрос 100 студентов выявил следующие данные о числе студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий – 18; немецкий, но не испанский – 23; немецкий и французский – 8; немецкий – 26; французский – 48; французский и испанский – 8; никакого языка – 24.

а) Сколько студентов изучают испанский язык?

б) Сколько студентов изучают испанский и немецкий языки?

Тема 1.2. Алгебра высказываний

Составные высказывания. Простейшие связки. Другие связки. Логические отношения. Варианты импликации. Основные законы, определяющие свойства введенных логических операций.

Практическое занятие
по теме «Логические операции»

1. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{X} \to (X \to Y)$.

Решение. Составим таблицу истинности:

X	Y	$\overline{X}$	$X \to Y$	$\overline{X} \to (X \to Y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Последний столбец состоит из единиц, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

2. Докажите эквивалентность

$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y)(X \wedge Z)$.

Решение. Пусть $f_1 = X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$. Составим таблицу истинности:

X	Y	Z	$X \vee Z$	$Y \vee Z$	$X \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пусть $f_2 = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y)$.

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Так как таблицы истинности для f_1 и f_2 совпадают, следовательно, эквивалентность доказана.

3. Даны три истинных суждения о четырёх подозреваемых: а) Если Абрамов виновен, то Сидоров тоже виновен; б) Неверно, что если Васильев виновен, то и Дубов виновен; в) Неверно, что если Сидоров виновен, а Дубов нет. Определите, кто из подозреваемых виновен.

Решение: Простые суждения: А – «Виновен Абрамов», В – «Виновен Васильев», С – «Виновен Сидоров», Д – «Виновен Дубов».

Формулы сложных суждений:

а) $A \to C = 1$; б) $\overline{B \to D} = 1$; в) $\overline{C \wedge \overline{D}} = 1$.

Снимем отрицание с суждения $\overline{B \to D} = 1$, получим $B \to D = 0$. Импликация равна нулю только в одном случае: $1 \to 0 = 0$, то есть $B = 1$ и $D = 0$.

Снимем отрицание с суждения $\overline{C \wedge \overline{D}} = 1$, получим $C \wedge \overline{D} = 0$. Известно, что $D = 0$, следовательно $\overline{D} = 1$. Подставим значение в формулу $C \wedge 1 = 0$. Получаем $C = 0$.

Рассмотрим первую формулу $A \rightarrow C = 1$. Подставим в неё значение *C*, получим *A* = 0.

Окончательный ответ: *A* = 0, *B* = 1, *C* = 0, *Д* = 0. Выходит, что Васильев виновен.

Самостоятельная работа

1. Логичны ли следующие рассуждения?

1.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

1.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

1.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

1.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать н а себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

1.5. Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключат елей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.

1.6. Пусть каждый из трех членов комитета голосуют «за», нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».

2. Чему эквивалентна конъюнкция контрапозиции и её конверсии?

3. Докажите, что контрапозиция эквивалентна первоначальной импликации.

4. Постройте составные высказывания, эквивалентные:

а) $X \leftrightarrow Y$;

б) $X \vee Y$, используя только связки отрицания и конъюнкции.

5. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях: «*A*, если *B*», «коль скоро *A*, то *B*»,«в случае *A* имеет место *B*»,«как *A*, так и *B*»,«для *A* необходимо *B*»,«для *A* достаточно

В»,«А вместе с *В»,«А*, только если В»,«А, пока В»,«или А, или В»,«А одновременно с В»,«А – то же самое, что и В «.

6. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний:

6.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон : Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

6.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

6.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

Практическое занятие
По теме «Логические отношения»

1. Преобразуйте формулу $\left(X \to \left(Y \to Z\right)\right) \leftrightarrow \overline{Y \to X}$ к виду, не содержащему импликацию и эквивалентность.

Решение. Запишем цепочку преобразований:

$$\left(X \to \left(Y \to Z\right)\right) \leftrightarrow \overline{Y \to X} = \left(X \to \left(\overline{Y} \vee Z\right)\right) \leftrightarrow Y \wedge \overline{X} =$$
$$= \overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee Z\right) \leftrightarrow \left(Y \wedge \overline{X}\right) =$$
$$\left(\left(\overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee Z\right)\right) \wedge \left(Y \wedge \overline{X}\right)\right) \vee \left(\overline{\overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee Z\right)}\right) \wedge \left(\overline{Y \wedge \overline{X}}\right)$$

2. Докажите равносильность $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$ с помощью формул алгебры высказываний.

Решение. Используя формулу $X \to Y = \overline{X} \vee Y$, запишем: $\overline{X \to Y} = \overline{\overline{X} \vee Y}$, тогда $\overline{\overline{X} \vee Y} = \overline{\overline{X}} \wedge \overline{Y}$ по закону де Моргана, т. е. $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$, т.к. по закону двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$, что и требовалось доказать.

3. Пусть *X* означает: «Я сдам этот экзамен»; а *Y*: «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

а) «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания».

б) «Регулярное выполнение домашних заданий является необходимым условием того, что я сдам этот экзамен».

в) «Сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания».

г) «Я сдам этот экзамен в том и только том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания».

д) «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Тема 1.3. Булевы функции

Понятие булевой функции. Свойства элементарных булевых функций. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы алгебры высказываний. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы.

Практическое занятие по теме «Булевы функции»

1.Составьте таблицу истинности булевой функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \to \overline{x_3} \vee x_1 \middle| \left(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}\right)$ и найдите её двоичный набор.

Решение. Для вычисления значений функции следует определить порядок выполнения операций. Это можно сделать многими способами. Пусть, например, порядок будет такой:

$$f_1 = x_1 \oplus x_2;\ f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_1};\ f_3 = x_1 | f_2;\ f_4 = \overline{x_3} \vee f_3;\ f_5 \to f_4.$$

Последовательно составляются таблицы истинности всех указанных функций.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Лексикографическое упорядочение наборов в таблице истинности булевой функции позволяет задать функцию двоичным набором длины 2^n, который будем обозначать буквой *F*. Двоичный набор данной функции $F = 11111111$. Отметим, что двоичный набор определяет булеву функцию в том и только в том случае, когда его длина есть степень двойки, а соответствующий показатель степени определяет число переменных данной функции.

2. Докажите тождественную истинность формулы $\bar{x} \to (x \to y)$.

Решение. Необходимо показать, что двоичный набор данной формулы $F = 1111$.

Составим таблицу истинности:

x	y	$\bar{x}$	$x \to y$	$\bar{x} \to (x \to y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

3. Докажите эквивалентность функций:

$f(x, y, z) = x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ и $f(x, y, z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge z)$.

Решение. Для доказательства построим таблицы истинности этих функций и сравним их двоичные наборы.

x	y	z	$x \vee z$	$y \vee z$	$x \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

x	y	z	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Получаем $F_1 = 00000111$ и $F_2 = 00000111$. Значит, функции эквивалентны.

4. Упростить выражение (привести к ДНФ). Построить СДНФ и СКНФ.

1.1) $F(x,y,z) = \overline{\overline{xy} \vee \overline{(x\bar{z} \vee y)}} \vee \overline{\overline{x\bar{y}z} \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z)}$

1.2) $f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$

1.3) $f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$

Тема 1.4. Нечеткие множества

Нечеткие множества. Применение нечетких множеств в финансовом анализе. Нечеткие числа.

Практическое занятие по теме «Нечеткие множества»

Множество – это неопределяемое понятие математики. Каждый раздел математики использует свои множества.

Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют универсальным. Универсальное множество принято обозначать буквой U.

Одним из способов задания множеств является задание с помощью характеристической функции.

Определение. Характеристической функцией множества A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающее значение 1 на тех элементах множества U, которые принадлежат A, и значение 0 на тех элементах, которые не принадлежат не принадлежат A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin A \\ 1, \text{ если } x \in A \quad (x \in U) \end{cases}$$

Пример: Пусть дано $U=\{1,2,3,...10\}$ и два его подмножества: A – множество чисел, меньших 7, и множество чисел, немного меньших 7. Характеристическая функция множества A имеет вид

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \prec 7;\\ 0, \text{ если } x \geq 7.\end{cases}$$

Записать характеристическую функцию множества B, используя лишь 0 и 1 невозможно. Например, включать ли в B числа 1 и 2? Намного или «ненамного» 3 меньше 7.Ответы на эти и подобные вопросы могут быть получены в зависимости от условий задачи.

Множество A в данном примере является обычным множеством, а множество B – нечетким множеством. При составлении характеристической функции $\mu_B(x)$, решающий задачу (эксперт) может высказать своё мнение относительно того, в какой степени каждое из чисел множества U принадлежит множеству B. В качестве степени принадлежности можно выбрать любое число из промежутка $[0,1]$. При этом, $\mu_B(x)=1$ означает полную уверенность эксперта в том, что элемент принадлежит множеству, $\mu_B(x)=0$ столь же полную уверенность, что элемент не принадлежит множеству, $\mu_B(x)=0{,}5$ говорит о том, что эксперт затрудняется в ответе на вопрос о принадлежности. Если $\mu_B(x)\succ 0{,}5$, то эксперт склонен отнести элемент к множеству B, если же $\mu_B(x)\prec 0{,}5$, то не склонен.

Установленные экспертом степени принадлежности нечеткому множеству B каждого из элементов универсального множества представляют собой функцию, определенную на множестве U, и принимающие значения на отрезке $[0,1]$. Такую функцию называют *функцией при-*

надлежности нечеткому множеству. Для приведенного выше примера, функцию принадлежности можно представить в виде следующей таблицы.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0	0	0,5	0,6	0,8	0,9	0	0	0	0

Можно использовать более компактную запись:

$$A = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6;$$

$$B = 0{,}5/3 + 0{,}6/4 + 0{,}8/5 + 0{,}9/6.$$

Общая форма записи нечеткого подмножества для случаев, когда U конечно или счетно, имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i \qquad (u_i \in U).$$

Пример. Игра в кости заключается в подбрасывании двух игральных костей – кубиков, на каждой грани которых выставлены очки от 1 до 6. Игрок делает следующие ставки: на выпадение числа очков от 2 до 4 он ставит 5 рублей, от 5 до 7–10 рублей, от 8 до 10–20 рублей, от 11 до 12–10 рублей. Пусть ставки, сделанные игроком, – это значения функции принадлежности нечеткому множеству A – ожидаемое число очков, выпадающих при подбрасывании двух костей. Носителем нечеткого множества A является множество $U = \{2, 3, \ldots ...12\}$. Множество A, разделив все ставки на максимальную ставку – 20 рублей. Запишем множество A в трех различных формах:

1) табличной:

u_i – число выпавших очков	2,3,4	5,6,7	8,9,10	11,12
$\mu_i(u_i)$	0,25	0,5	1	0,5

2) в виде поэлементной суммы по множеству *U*:

$$A = 0{,}25/2 + 0{,}25/3 + 0{,}25/4 + 0{,}5/5 + 0{,}5/6 + 0{,}5/7 + 0{,}5/11 + $$
$$+ 0{,}5/12 + 1/8 + 1/9 + 1/10$$

3) как сумму по множеству *U*:

$$A = \sum_{i=2}^{12} \mu_A(u_i)/u_i = \sum_{i=2}^{4} 0{,}25/u_i + \sum_{i=5}^{7} 0{,}5/u_i + \sum_{i=8}^{10} 1/u_i + \sum_{i=11}^{12} 0{,}5/u_i .$$

Множества α - уровня

*Определени*е. Множеством α-уровня нечеткого множества (U, μ_A) называют обычное множество, состоящее из всех тех элементов универсального множества *U*, для которых выполняется неравенство $\mu_A \ge \alpha$.

Пример. Пусть $A = 0{,}1/1 + 0{,}3/2 + 0{,}4/5 + 0{,}7/6 + 0{,}8/9 + 1/10$ и $\alpha = \{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9\}$.

Составим множества α-уровня для всех возможных значений α:

$A^{0,1} = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$;

$A^{0,3} = \{\ 2, 5, 6, 9, 10\}$;

$A^{0,5} = \{\ 6, 9, 10\}$;

$A^{0,7} = \{\ 6, 9, 10\}$;

$A^{0,9} = \{\ 10\}$

Множество $0{,}1\, A^{0,1} = \overline{A}^{0,1}$ – это нечеткое множество

$\overline{A}^{0,1} = \quad 0,1\,A^{0,1} = \quad 0,1/1 + 0,1/2 + 0,1/5 + 0,1/6 + 0,1/9 + 0,1/10$ с функцией принадлежности $\mu_{\overline{A}^{0,1}} \equiv 0,1$.

Аналогично

$\overline{A}^{0,3} = 0,3\,A^{0,3} = 0,3/2 + 0,3/5 + 0,3/6 + 0,3/9 + 0,3/10,\ \mu_{\overline{A}^{0,3}} \equiv 0,3;$

$\overline{A}^{0,5} = 0,5\,A^{0,5} = 0,5/6 + 0,5/9 + 0,5/10,\ \mu_{\overline{A}^{0,5}} \equiv 0,5;$

$\overline{A}^{0,7} = 0,7\,A^{0,7} = 0,7/6 + 0,7/9 + 0,7/10,\ \mu_{\overline{A}^{0,7}} \equiv 0,7;$

$\overline{A}^{0,9} = 0,9\,A^{0,9} = 0,9/10,\ \mu_{\overline{A}^{0,9}} \equiv 0,9;$

Составим нечетное множество $\overline{A}$, выполнив последовательно два действия:

1. объединим множества $\overline{A}^{0,1}$, $\overline{A}^{0,3}$, $\overline{A}^{0,5}$, $\overline{A}^{0,7}$, $\overline{A}^{0,9}$:

$\overline{A}^{0,1} + \overline{A}^{0,3} + \overline{A}^{0,5} + \overline{A}^{0,7} + \overline{A}^{0,9} =$

$+ 0,1A^{0,1} + 0,3A^{0.3} + 0.5A^{0,5} + 0,7A^{0,7} + 0,9A^{0,9} =$

$= 0,1/1 + 0,1/2 + 0,1/5 + 0,1/6 + 0,1/9 + 0,1/10 +$

$+ 0,3/2 + 0,3/5 + 0,3/6 + 0,3/9 + 0,3/10 +$

$+ 0,5/6 + 0,5/9 + 0,5/10 + 0,7/6 + 0,7/9 + 0,7/10 + 0,9/10 =$
$0,1/1 + (0,1 \vee 0,3)/2 + (0,1 \vee 0,3)/5 + (0,1 \vee 0,3 \vee 0,5 \vee 0,7)/6 +$
$(0,1 \vee 0,3 \vee 0,5 \vee 0,7)/9 + (0,1 \vee 0,3 \vee 0,5 \vee 0,7 \vee 0,9)/10.$

2. Из значений функции принадлежности, соединенных знаками логических сумм, выберем наибольшее и будем считать его значением функции принадлежности нечеткого множества $\overline{A}$ на соответствующем элементе несущего множества:

$\overline{A} = 0,1/1 + 0,3/2 + 0,3/5 + 0,7/6 + 0,7/9 + 0,9/10.$

В данном случае $\overline{A} \neq A$, так как $\mu_A(5) = 0{,}4 \neq \mu_{\overline{A}}(5) = 0{,}3$; $\mu_A(9) = 0{,}8 \neq \mu_{\overline{A}}(9) = 0{,}7$. Однако, если бы множество значений α включало все значения функции принадлежности множества *A*, то множества A и $\overline{A}$ совпали бы.

Практическое занятие
По теме «Применение производящих функций для решения комбинаторных задач. Рекуррентные соотношения. Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям. Числа Фибоначчи. Способы решения рекуррентных соотношений»

Комбинаторный анализ – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Часто решения комбинаторных задач записываются в виде тех или иных рекуррентных соотношений.

Определение. Пусть a_0, a_1, a_2,.. – произвольная числовая последовательность. Если для любого $n > m$ число a_{n+m} является некоторой функцией от m предыдущих членов последовательности, т.е. $a_{n+m} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1})$, то такая последовательность называется *рекуррентной последовательностью*, а соотношение – рекуррентным соотношением m-го порядка.

Самый простой случай рекуррентного соотношения – это линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами

$a_{n+m} = b_1 . a_{n+m-1} + b_2 . a_{n+m-2} + ... + b_{m-1} . a_{n+1} + b_m . a_n$.

Очевидно, что для однозначного определения всех a_n необходимо наряду с самим рекуррентным соотношением задать в общем виде и первые m членов a_0, a_1,..., a_{m-1} данной последовательности, то есть задать *начальные условия* для рекуррентного соотношения.

Наличие рекуррентного соотношения и начальных условий позволяет нам последовательно, шаг за шагом, определить любое наперед заданное количество n членов рекуррентной числовой последовательности**.**

Линейное однородное рекуррентное соотношение первого порядка имеет вид: $a_{n+1} = b_1 \cdot a_n$, где $n = 0,1,2,..$; a_0 – заданное число.

Пример 1. Популяция лягушек в озере увеличивается в четыре раза каждый год. В последний день каждого года 100 лягушек отлавливают и переправляют на другие озера. Предполагая, что в начале первого года в озере было 50 лягушек, найти количество лягушек в начале любого последующего года.

Решение: Обозначим через a_n количество лягушек в начале (n+1)-го года. По условию задачи, $a_0 = 50$. Тогда, очевидно, $a_1 = 4 \cdot 50 - 100 = 100$, $a_2 = 4 \cdot 100 - 100 = 300$, а в общем случае $a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 100$, где $n = 0,1,2,...$

Полученное равенство является примером линейного однородного рекуррентного соотношения первого порядка.

Линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка имеет вид*:* $a_{n+2} = b_1 \cdot a_{n+1} + b_2 \cdot a_n$, где $n = 0,1,2,...$, a_0, a_1 – заданные числа.

<u>Определение.</u> Последовательность натуральных чисел, определяемая в форме $\boldsymbol{F_0 = F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}}$ для всех $k \geq 2$, называется числами Фибоначчи.

Числа F_k, определяемые данным рекуррентным соотношением, названы числами Фибоначчи по имени впервые рассмотревшего эти числа крупнейшего математика средневековой Европы Фибоначчи (Леонардо Пизанского) (1180–1240), принесшего в Европу с Востока десятичную систему счисления.

<u>Пример 2.</u> Выпишите несколько первых чисел Фибоначчи.

Решение. $F_0 = F_1 = 1$; $F_2 = F_1 + F_0 = 1+1 = 2$;

$F_3 = F_2 + F_1 = 2+1 = 3$; $F_4 = F_3 + F_2 = 3+2 = 5$; $F_5 = F_4 + F_3 = 5+3 = 8$; $F_6 = F_5 + F_4 = 8+5 = 13$ и так далее.

Ответ:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987; 1597; 2584; 4181; 6765; 10946; …

Математика делится на две части – дискретную и непрерывную. Часто к изучению одного явления можно подойти с разных сторон. Рассмотрим метод решения задач с помощью производящих функций, который позволяет сделать переход от дискретной математики к непрерывной, и наоборот.

Понятие производящей функции является, пожалуй, самым важным понятием современной перечислительной комбинаторики. Метод производящих функций является мощным средством для работы с различными множествами дискретной природы. Основная идея этого метода достаточно проста. Она заключается в отображении исследуемых множеств дискретной природы во множество степенных рядов, которые являются непрерывными объектами, и последующей работе с рядами средствами математического анализа при помощи развитого аппарата теории функций.

Определение. Пусть a_1, a_2, a_3, … – произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Производящей функцией (производящим рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 + \ldots + a_n \cdot s^n + \ldots,$$

или, в сокращенной записи $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot s^n$

Таким образом, производящая функция последовательности – это алгебраическое понятие, которое позволяет работать с разными комбинаторными объектами аналитическими методами.

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является производящим многочленом. Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных и целых чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, часто обозначают одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 + \ldots + a_n \cdot s^n + \ldots$$

Верно утверждение: $A(0) = a_0$, то есть мы всегда знаем значение производящей функции в нуле.

Пример 3. Сколькими способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно n?

Решение: Обозначим белый шар символом ○, чёрный – ●, T_n – искомое количество расположений шаров. Символом Ø – обозначим нулевое количество шаров. Как и любое решение комбинаторной задачи начнём с тривиальных случаев:

Если $n = 1$, то очевидно имеется 2 способа – взять либо белый шар ○, либо взять чёрный шар ●, таким образом, $T_1 = 2$.

Если $n = 2$, то имеется 4 способа расположений: ○○, ○●, ●○, ●●. Рассмотрим случай для $n = 3$. Можно начать белым шаром и продолжить 4-мя комбинациями, рассмотренными при $\boldsymbol{n = 2}$ ○○○, ○○●, ○●○, ○●●, или же можно начать чёрным шаром и аналогично продолжить 4-мя комбинациями, получится ●○○, ●○●, ●●○, ●●●.

В итоге количество шаров удвоилось, то есть $T_3 = 2T_2$. Аналогично $T_4 = 2T_3$, то есть, обобщая для всех n, получаем рекуррентное уравнение $T_n = 2T_{n-1}$ которое и является решением для данной задачи. Решение такого уравнения можно легко угадать: $T_n = 2^n$ (так как $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$).

«Просуммируем» все возможные комбинации расположений шаров: G = Ø + ○ + ● + ○○ + ○● + ●○ + ●● + ○○○ + ○○● + ○●○ + ○●● + ●○○ + ●○● + ●●○ + ●●● +…

Заметим, что произведение шаров в отличие от произведения чисел не является коммутативным, так как ○●·●○ ≠ ●○·○●. Символ Ø – в произведении играет роль мультипликативной единицы, то есть Ø · ○○● = ○○● · Ø = ○○● и коммутирует с любой последовательностью шаров. Вынося за скобки левый белый и чёрный шары, получим

$G = \varnothing + \circ\ (\varnothing + \circ + \bullet + \circ\circ + \circ\bullet + \bullet\circ + \bullet\bullet + \ldots) + \bullet\ (\varnothing + \circ + \bullet + \circ\circ + \circ\bullet + \bullet\circ + \bullet\bullet + \ldots) = \varnothing + \circ G + \bullet G$

Таким образом, получается уравнение $G = \varnothing + \circ G + \bullet G$. «Решим» это уравнение относительно G. Получим:

$$G = \frac{\varnothing}{\varnothing - (\circ + \bullet)}$$

Учитывая формулу суммы геометрической прогрессии

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$, имеем:

$$G = \frac{\varnothing}{\varnothing - (\circ + \bullet)} = \varnothing + (\circ + \bullet) + (\circ + \bullet)^2 + (\circ + \bullet)^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\circ + \bullet)^n$$

В этой сумме так же учтены все возможные варианты разбиения в точности по одному разу. Далее воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n по k. Тогда с учетом этого имеем:

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} (\circ + \bullet)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \cdot \circ^n \cdot \bullet^{n-k}$$

Коэффициент при $\circ^k\ \bullet^{n-k}$ равный числу сочетаний из n по k, показывает общее количество последовательностей из n шаров содержащих $\circ$ шары в количеств k штук и $\bullet$ шары в количестве n–k штук. Таким образом, общее количество расположений n шаров есть сумма по всем возможным значениям k. Как известно из комбинаторики, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 0$.

Эту формулу можно было получить непосредственно из $G = \frac{\varnothing}{\varnothing - (\circ + \bullet)}$, заменив $\varnothing$ на 1, а $\circ$ и $\bullet$ на z (в виду их равнозначности). Получим $G = \dfrac{1}{1-(z+z)} = \dfrac{1}{1-2z} = 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots$, то есть коэффициент при z^n равен 2^n.

Производящие функции дают возможность просто описывать многие сложные последовательности в комбинаторике, а иногда помогают найти для них явные формулы. Метод производящих функций был разработан Эйлером в 1750-х годах.

Пример 4. (задача, которую решал Эйлер)

Какие грузы можно взвесить с помощью гирь в 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^n грамм и сколькими способами?

Решение. Эйлер рассматривает произведение $G(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots$, которое после раскрытия скобок представляется в виде бесконечного ряда $G(z) = 1 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \ldots$.

Каждый g_k – это коэффициент при z^k, а z^k – получается как произведение каких-то одночленов z^{2m}, то есть g_k – это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел 1, 2, 2^2, 2^3,..., 2^m,…. Другими словами, g_k – это число способов взвешивания груза в k грамм заданными гирями. Получили ответ на один вопрос.

Следующий шаг Эйлера: он умножает обе части равенства на $(1–z)$ и применяет формулы сокращенного умножения.

$(1-z)\cdot G(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots$

$(1-z)\cdot G(z) = (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots$

$(1-z)\cdot G(z) = (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\ldots$

……………………..

$(1-z)\cdot G(z) = 1$, если $|z|<1$, то в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

$$G(z)=\frac{1}{1-z}.$$

С одной стороны, $G(z) = 1 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 +\ldots$, с другой стороны, получилось $G(z)=\dfrac{1}{1-z}$.

Последнее равенство есть не что иное, как сумма геометрической прогрессии, которая равна $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$. Сопоставляя эти два равенства, получаем $g_1 = g_2 = g_3 =\ldots = 1$, то есть любой груз в k грамм можно взвесить гирями в 1, 2, 4, 8,… грамм, притом единственным способом.

Производящие функции подходят для решения не только комбинаторных задач. Оказывается, с их помощью можно решать рекуррентные соотношения.

<u>Пример 5</u>. Найти формулу общего члена для последовательности чисел Фибоначчи.

Решение. Рекуррентный вид чисел Фибоначчи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Выведем эту формулу в замкнутом виде (она содержит иррациональное число («золотое сечение») в своём составе).

Итак, имеем

$F_0 = 0$,

$F_1 = 1$,

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$.

Умножим каждую строчку на z^0, z^1,..., z^n соответственно:

$z^0 \cdot F_0 = 0,$

$z^1 \cdot F_1 = z,$

$z^n \cdot F_n = z^n \cdot F_{n\text{-}1} + z^n \cdot F_{n\text{-}2},\ n \geq 2$

Просуммируем эти равенства:

$$F_0 + zF_1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n$$

Обозначим левую часть $G(z) = F_0 + zF_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} F_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$.

Рассмотрим каждое из слагаемых в правой части:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^{n-1} = zG(z)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^{n-2} = z^2 G(z)$$

Имеем следующее уравнение $G(z) = z + z{\cdot}G(z) + z^2{\cdot}G(z)$, решая которое относительно *G(z)* находим

$G(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$ – производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи.

Разложим её на сумму простейших дробей, для этого найдем корни уравнения $1 - z - z^2 = 0$. Решая это простое квадратное уравнение, получаем: $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда нашу производящую функцию можно разложить следующим образом:

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z}$$

Следующим шагом является нахождение коэффициентов a и b. Для этого умножим дроби на общий знаменатель:

$z = a\cdot (z_2 - z) + b\cdot (z_1 - z)$

Подставляя в это уравнение значение $z = z_1$ *и* $z = z_2$, находим

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Можно преобразовать выражение для производящей функции

$$G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z} = \frac{a}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{a}{z_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}$$

Теперь каждая из дробей представляет собой сумму геометрической прогрессии.

По формуле $\frac{1}{1-az} = 1 + az + (az)^2 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ находим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) z^n$$

Изначально мы искали $G(z)$ в виде $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$. Отсюда можно сделать вывод, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Эту формулу можно переписать в другом виде, не используя «золотое сечение»:

$$F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

С учетом исходного рекуррентного уравнения данная формула общего члена была не очевидна.

Можно записать общий алгоритм решения рекуррентных уравнений, используя производящие функции. Он записывается в 4 шага:

1. Запишите одно уравнение, выражающее g_n через другие элементы последовательности. Это уравнение должно оставаться справедливым для всех целых n с учетом того, что $g_1 = g_2 =.... = 0$. Умножьте обе части уравнения на z^n и просуммируйте по всем n. В левой части получится сумма $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^n$, которая равна производящей функции $G(z)$. Правую часть следует преобразовать так, чтобы она превратилась в какое-то другое выражение, включающее $G(z)$.

2. Решите полученное уравнение, получив для $G(z)$ выражение в замкнутом виде.

3. Разложите $G(z)$ в степенной ряд и определите коэффициент при z^n, это и будет замкнутый вид для g_n.

Причина, по которой данный метод работает, заключается в том, что единая функция $G(z)$ представляет всю последовательность g_n и это представление допускает многие преобразования.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому вместе с термином «производящая функция» используют также термин «формальный степенной ряд».

Определение. Суммой двух производящих функций

$A(s) = a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 + \ldots$ и $B(s) = b_0 + b_1 \cdot \mathrm{s} + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3 + \ldots$ называется производящая функция

$A(s)+B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot \mathrm{s} + (a_2 + b_2) \cdot \mathrm{s}^2 + (a_3 + b_3) \cdot \mathrm{s}^3 + \ldots$.

Определение. Произведением двух производящих функций $A(s)$ и $B(s)$ называется производящая функция вида**:**

$$A(s) \cdot B(s) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot s^2 + \ldots .$$

Операции сложения и умножения производящих функций обладают свойством коммутативности и ассоциативности.

Для удобства записи некоторых часто встречающихся производящих функций используется сокращенная запись, так как записывать их в виде ряда бывает неудобно.

Определение.

$$(1+s)^a = 1 + \frac{a}{1!} \cdot s + \frac{a(a-1)}{2!} \cdot \frac{a(a-1)}{2!} \cdot s^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} \cdot s^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} \cdot s^4 + \ldots$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n\text{-}1) \cdot n$ и a – произвольное число.

Коэффициент при s^n в этой производящей функции называется числом сочетаний из a элементов по n и обозначается через

$$C_a^n = \frac{a(a-1)(a-2) \cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!}$$

Разложение $(1 + s)^a$ в определении было введено Ньютоном и называется биномом Ньютона. При целом положительном значении a оно совпадает с обычным определением степени бинома. Пользуясь этим, мы можем получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, значения $s = 1$ и $s = -1$, получаем

$$C_a^1+C_a^2+\ldots+C_a^a=1+\frac{a}{1!}+\frac{a(a-1)}{2!}+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}+\ldots+\frac{a}{a!}=2^a$$

$$C_a^1-C_a^2+\ldots+(-1)^a C_a^a=0$$

для любого целого положительного a.

Кроме бинома Ньютона сокращенная запись используется еще для некоторых производящих функций. Например:

$$e^s=\exp s=1+\frac{1}{1!}s+\frac{1}{2!}s^2+\frac{1}{3!}s^3+\frac{1}{4!}s^4+\ldots;$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-s}\right)=s+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{4}s^4+\ldots;$$

$$\sin s=s-\frac{1}{3!}s^3+\frac{1}{5!}s^5-\ldots;$$

$$\cos s=1-\frac{1}{2!}s^2+\frac{1}{4!}s^4-\ldots.$$

Числа Шрёдера S_n в комбинаторике описывают количество путей из левого нижнего угла с координатами (0;0) квадратной решётки $n\times n$ в противоположный по диагонали угол с координатами ($n;n$), используя ходы вверх (0,1), вправо (1,0) или вверх-вправо (1,1), при этом пути не поднимаются выше диагонали квадратной решётки.

Эта последовательность чисел названа в честь немецкого математика Эрнеста Шрёдера. Выпишем несколько первых чисел Шрёдера:

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, …..

Другая интерпретация чисел Шрёдера. Числа Шрёдера равны количеству способов разрезания данного прямоугольника на (n–1) меньших прямоугольников с помощью n разрезов. Эти разрезы проводятся через заданные n точек внутри прямоугольника, никакие две из которых не лежат на одной прямой, параллельной сторонам прямоугольника, при этом каждый разрез проходит через одну из этих точек и делит только один прямоугольник на два.

Числа Шрёдера считают количество путей из точки (0,0) в (2n,0), использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги (1,1) или (1,–1)) или двойные шаги вправо (2,0), которые не опускаются ниже оси x.

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Шрёдера, запишем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел:

$$S_n = s_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} s_k s_{n-1-k}.$$

Будем искать производящую функцию в виде $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n$.

Решая это соотношение, находим производящую функция для чисел Шрёдера

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{2x}.$$

Явная формула для вычисления чисел Шрёдера:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k \cdot C_{n+k}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} \cdot C_k.$$

Самостоятельная работа

№1. Найти a_5, если $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + \sin(\pi n/2)$ и $a_1 = 1$.

№2. Найти a_4, если $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ и $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

№3. Найти a_5, если $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2} + 2^n$ и $a_1 = a_2 = 1$.

№4. Найти x_3, y_3, если $x_n = x_{n-1} + y_{n-1} + 1$, $y_n = 3 \cdot x_{n-1} + y_{n-1} - 1$ и $x_1 = y_1 = 1$.

Тема 1.5. Элементы комбинаторного анализа

Основные правила комбинаторики. Перечислительная комбинаторика или теория перечислений. Комбинации элементов с повторениями. Бином Ньютона.

Практическое занятие
по теме «Комбинаторные формулы. Бином Ньютона»

1. Составьте все перестановки: а) из трех букв: a, b, c;

б) из четырех цифр: 5, 4, 3, 2.

Решение.

а) *abc, acb, bac, bca, cab, cab*;

б) 5432, 5423, 5342, 5324, 5343, 5234, 4532, 4523, 4324, 4352, 4235 4253, 3542, 3524, 3452, 3425, 3245, 3254, 2345, 2354, 2435, 2453, 2534, 2543.

2. Составьте все размещения из четырех цифр: 1, 3, 5, 7 по две цифры в каждом.

Решение.

13; 15; 17; 31; 35; 37; 53; 57; 71; 73; 75.

3. Вычислите:

1) $A_6^3, A_7^4, A_8^5, \dfrac{A_8^3 + A_7^2}{A_6^4}, \dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4};$

2) $P_4, P_6, P_9, \dfrac{P_5 + P_4}{P_3}$;

3) $C_6^2, C_8^3, C_{11}^4, C_{12}^7$.

4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

5. Найдите:

1) четвертый член разложения $(a+3)^7$;

2) четвертый член разложения $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

3) восьмой член разложения $\left(a^2+b^2\right)^{13}$;

4) средний член разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

6. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Решение.

Число способов равно: $P(7,7,7,7) = \dfrac{28!}{(7!)^4}$.

7. В аквариуме 13 рыбок, из них 5 красных. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок была ровно 1 красная?

8. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для бега на дистанцию 1000 м?

9. На прилавке 11 банок рыбных консервов. Из них – одна испорчена. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок попалась испорченная?

10. Сколько способов составить слово БАБА из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

11. В темном погребе 10 банок с огурцами. Из них 3 – помутнели. Наугад выбирают 3 банки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок была ровно 1 помутневшая?

12. Сколько способов составить слово СПОР из карточек разрезной азбуки слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ, выбирая их случайным образом?

13. В корзинке 13 опенков, из них 4 ложных. Наугад выбирают 7 опят. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных грибов было ровно 2 ложных?

14. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для участия в эстафете на 200, 300 и 400 м?

15. В ведерке 10 зернышек, из них 3 не взойдут. Наугад выбирают 5 для посадки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных зернышек взойдут ровно 2?

16. В коробке 12 карандашей, 10 цветных и 2 простых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных карандашей было ровно 2 цветных?

17. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 – один для Маши, а другой для Вити?

18. В колхозном гараже 4 трактора и 3 сеялки. Наугад выбирают 4 машины. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных было ровно 3 трактора?

19. Сколькими способами можно набрать последние 3 цифры телефонного номера?

Самостоятельная работа

1. В курятнике 11 куриц, из них 7 рябок, остальные белые. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных куриц было ровно 3 белых?

2. Сколько способов составить слово АБРАКАДАБРА из карточек разрезной азбуки, переставляя их случайным образом?

3. В хлеву 9 коров, из них 6 доятся. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 доящихся коровы?

4. Сколько способов составить из букв слова «МИШЕНЬ» различных слов?

5. Сколькими способами можно из 6 стандартных и 5 нестандартных болтов выбрать 3, так чтобы среди них было 1 стандартный и 2 нестандартных?

6. Сколькими способами можно посадить 6 различных цветов в 6 разных цветочных горшков?

7. Сколькими способами можно из 4 стандартных и 5 нестандартных деталей выбрать 4, так чтобы среди них было 2 стандартные и 2 нестандартные?

8. Сколькими способами можно расставить на 6 путях 4 состава?

9. В клетке 8 мышей, из них 4 белых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных мышей было ровно 2 белых?

10. Сколькими способами можно из 15 человек класса выбрать культорга, физорга и профорга?

11. В аквариуме 7 рыбок, из них 5 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

12. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 без учета порядка?

13. В ящике 7 деталей, из них 3 стандартных. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных деталей было ровно 2 стандартных?

14. Сколькими способами можно из букв a, b, c, d составить слов длины 5?

15. В аквариуме 9 рыбок, из них 4 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

16. Сколькими способами можно в кинотеатре рассадить 6 человек на ряд из 18 мест?

Тема 3. Элементы теории графов

Основные понятия теории графов. Виды графов: ориентированные и неориентированные графы. Способы задания графов. Матрицы смежности и инцидентности для графа. Эйлеровы и Гамильтоновы графы. Деревья.

Практические занятия
по темам «Общие понятия теории графов»,
«Способы задания графов».

1. Граф G задан диаграммой. Для него:

а) составить матрицу смежности;

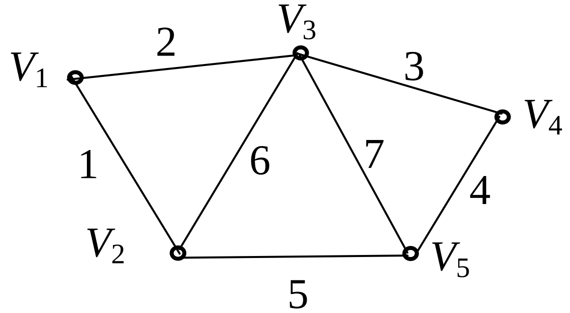
б) составить матрицу инцидентности;

в) указать степени вершин графа;

г) составить маршруты длины, равной 5;

д) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5;

е) построить простой цикл, содержащий вершину V



Решение. а) Составим матрицу смежности вершин. Она является квадратной матрицей, в которой число строк и столбцов равно числу вершин n, в данном случае $n = 5$. Составим матрицу из пяти строк и пяти столбцов, запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{array}$$

Заполняем первую строку:

$a_{11} = 0$, так как при вершине V_1 нет петли;

$a_{12} = 1$, так как вершины V_1 и V_2 соединены одним ребром;

$a_{13} = 1$, так как вершины V_1 и V_3 соединены одним ребром;

$a_{14} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_4 нет ребра;

$a_{15} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_5 нет ребра.

Аналогично заполняем 2-ю строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_2. Она соединена с вершинами V_1, V_3, V_5 одним ребром. Поэтому элементы a_{21}, a_{23}, a_{25} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем третью строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_3. Она соединена с вершинами V_1, V_2, V_4, V_5 одним ребром. Поэтому элементы a_{31}, a_{32}, a_{34}, a_{35} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 4-ю строку. Вершина V_4. соединена с вершинами V_3 и V_5. Поэтому элементы a_{43} и a_{45} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 5-ю строку. Вершина V_5. соединена с вершинами V_2, V_3 и V_4. Поэтому элементы a_{52}, a_{53}, a_{54} равны 1, остальные равны 0.

Запишем матрицу смежности, в которую подставим полученные значения элементов:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

б) Составим матрицу инцидентности. В данном случае матрица инцидентности – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин, то есть $m = 5$, а число столбцов равно числу ребер, то есть $n = 7$. Запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \end{bmatrix} \end{array}$$

Так как граф неориентированный, то элементы матрицы будут принимать значения или 1, или 0.

Заполняем первую строку. Выделяем вершину V_1, и смотрим, каким ребрам она принадлежит (инцидентна). Вершина V_1 инцидентна ребрам 1 и 2, поэтому $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем вторую строку. Выделяем вершину V_2 и смотрим, каким ребрам она инцидентна. Вершина V_2 инцидентна ребрам 1, 5, 6, поэтому $a_{21}=1$, $a_{25}=1$, $a_{26}=1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем третью строку. Вершина V_3 инцидентна ребрам 2, 3, 6, 7, поэтому $a_{32}=1$, $a_{33}=1$, $a_{36}=1$, $a_{37}=1$, остальные элементы строки равны 0.

Аналогично заполняем остальные строки.

Запишем матрицу инцидентности, подставляя найденные значения элементов.

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

в) Степенью вершин графа называется сумма инцидентных ей ребер.

Из вершины V_1 выходит два ребра, $d(V_1)=2$. Вершине V_2 инцидентны три ребра, $d(V_2)=3$. Для остальных вершин: $d(V_3)=4$, $d(V_4)=2$, $d(V_5)=3$.

г) Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Длина маршрута равна количеству ребер в нем (с повторениями). Составим маршрут длины, равной 5:

$$Ì =\{V_1, \underline{l_2}, V_3, \underline{l_3}, V_4, \underline{l_4}, V_5, \underline{l_5}, V_2, \underline{l_6}, V_3\}.$$

д) Составим цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5. В цепи все ребра различны: $M_1 = \{V_2, \underline{l_6}, V_3, \underline{l_2}, V_1, \underline{l_1}, V_2, \underline{l_5}, V_5\}$. В простой цепи все вершины (и ребра) различны: $M_2 = \{V_2, \underline{l_5}, V_5\}$.

е) Построим простой цикл, содержащий вершину V_4. Проложим через V_4 замкнутый маршрут, в котором нет повторяющихся вершин и ребер: $M_3 = \{V_4, l_4, V_5, l_5, V_2, l_6, V_3, l_3, V_4\}$.

2. Для указанных графов:

а) составить матрицу смежности;

б) составить матрицу инцидентности;

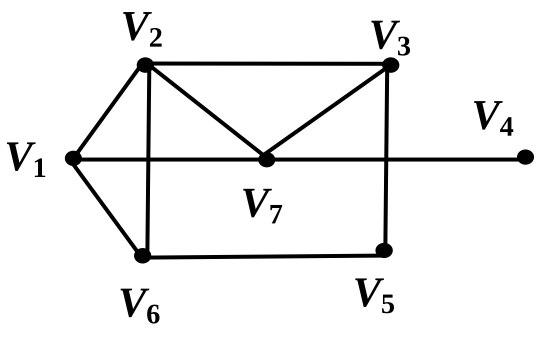
в) указать степени вершин графа;

г) составить маршруты длины, равной 5;

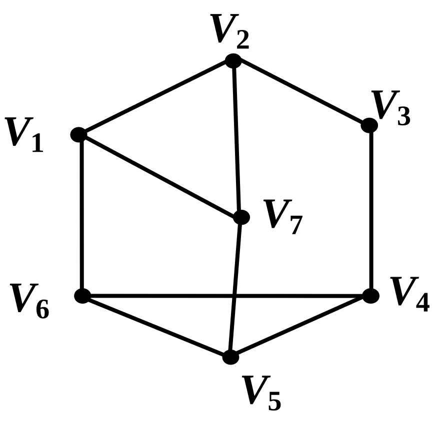
д) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5;

е) построить простой цикл, содержащий вершину V_4.

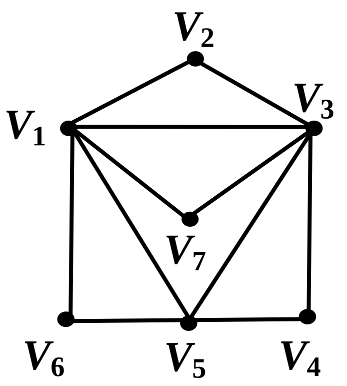
1)



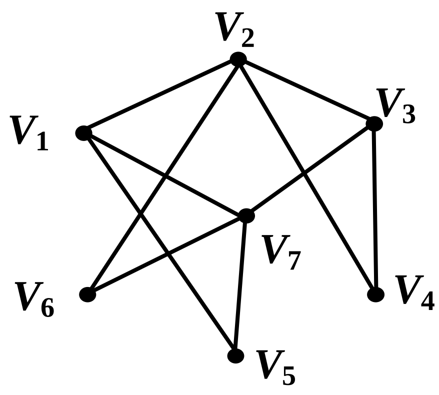
2)



3)



4)



Самостоятельная работа

Для указанных графов:

1) составить матрицу смежности;

2) составить матрицу инцидентности;

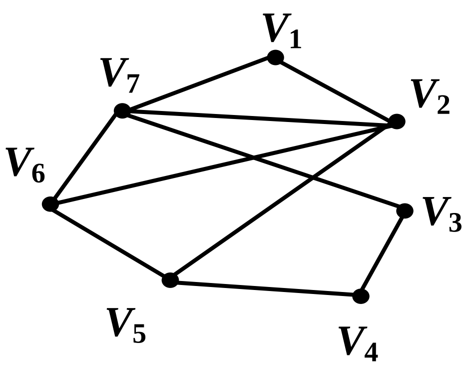
3) указать степени вершин графа;

4) составить маршруты длины, равной 5;

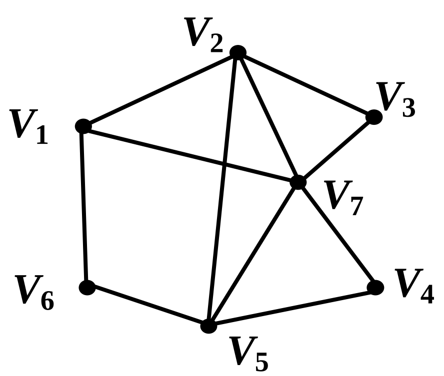
5) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5;

6) построить простой цикл, содержащий вершину V_4.

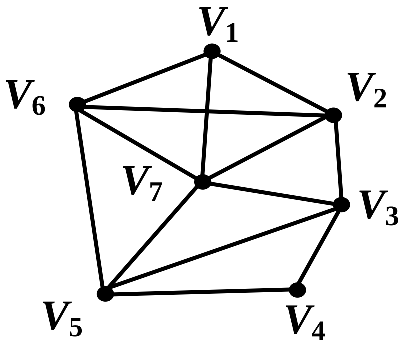
5)



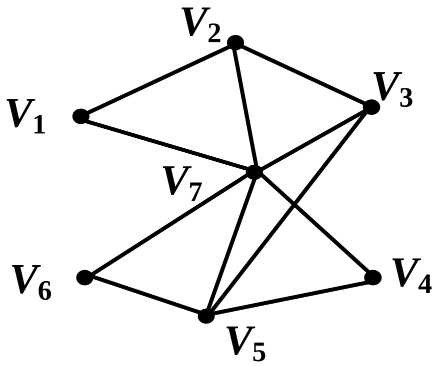
6)



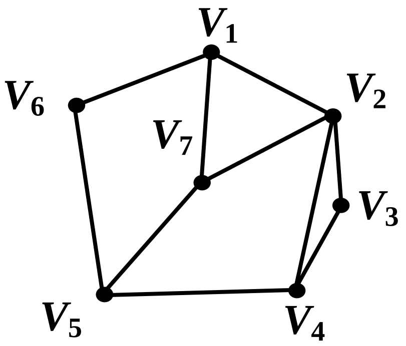
7)



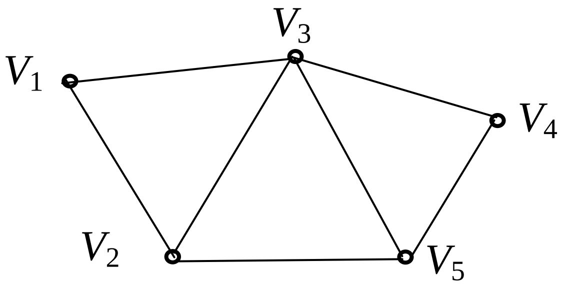
8)



9)



10)



Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К промежуточной аттестации необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Дискретная математика»

Основная литература

1. Просолупов, Е. В. Курс лекций по дискретной математике. Ч. 3. Теория алгоритмов и теория графов: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2014. – 84 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=458101. – Загл. с экрана. (06.06.2018)

2. Казунина Г. А. Элементы теории графов: материалы к лекциям [электронный ресурс] / Г. А. Казунина, Г. А. Липина; КузГТУ. – Кемерово, 2010.

3. Лихтарников, Л. М. Математическая логика: курс лекций. Задачник-практикум и решения [электронный ресурс] / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – Санкт-Петербург : Лань, 2009.

4. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум. – Санкт-Петербург: Лань, 2018. – 476 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/106869. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

5. Бережной, В. В. Дискретная математика : учебное пособие (курс лекций) [Электронный ресурс]. – Ставрополь : СКФУ, 2016. – 199 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=466802. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

6. Судоплатов, С. В. Дискретная математика [Текст]: учебник для техн. специальностей вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Москва : ИНФРА-М, 2007. – 256 с. 2.

Дополнительная литература

1. Князьков, В. С. Введение в теорию графов [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. С. Князьков, Т. В. Волченская. – Электрон. дан. – Москва, 2016. – 76 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/100733.

2. Кутыркин, В. А. Введение в дискретную математику [Электронный ресурс]: методические указания / В. А. Кутыркин, А. Ю. Бушуев. – Электрон. дан. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 119 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/103594.

3. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебное пособие для бакалавров вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. – Москва: Юрайт, 2012. – 447 с.

4. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 592 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=71772. – Загл. с экрана. (22.03.2017)

5. Дискретная математика: учебное пособие. Ч. 1 [Электронный ресурс]. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 108 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=467106. – Загл. с экрана. (09.06.2018)