Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

М. А. Тынкевич Г. Н. Речко

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» (НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ)

Учебное пособие

Кемерово 2018

УДК 519.852(075.8)

Рецензенты:

Заведующий отделом экономической информатики федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт экономики и организации промышленного производства» СО РАН, профессор кафедры применения математических методов в экономике и планировании федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный национальный исследовательский университет», кандидат экономических наук, доцент *Ю. Ш. Блам*

Директор института фундаментальных наук федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет» доктор технических наук, доцент *А. М. Гудов*)

Тынкевич, М. А.

Практикум по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» (нелинейная оптимизация и статистические решения) : учеб. пособие / М. А. Тынкевич, Г. Н. Речко ; КузГТУ. – Кемерово, 2018. – 58 с.

ISBN 978-5-906969-65-1

Содержит задачи и примеры по основным методам нелинейной оптимизации и элементам теории статистических решений. Приводятся теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий к практическим занятиям, примеры решения типовых задач, контрольные задания и вопросы для текущего контроля.

Учебное пособие подготовлено для направления 09.03.03 «Прикладная информатика», может быть полезно всем, кто интересуется методами исследования операций и экономико-математического моделирования.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 519.852(075.8)

ISBN 978-5-906969-65-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние 60 лет возникла обширная литература по экономико-математическому моделированию и математическому аппарату задач принятия решений.

В 1950-е годы метод линейного программирования представлял любопытную и многообещающую новинку, позволяющую математикам оказать реальную помощь в оптимизации планирования и управления народным хозяйством, создать возможность замены демагогии лозунгов и волевых решений конкретикой Числа. Относительно успешная реализация этих намерений связана как с фантастически быстрым ростом возможностей вычислительной техники, так и с используемым в линейном программировании аппаратом линейной алгебры, доступным для понимания любым вчерашним школьникам, интересы и финансовые возможности которых выходят за пределы «сладкой жизни».

К сожалению, линейные экономические и другие модели лишь в первом приближении отражают реальную жизнь, полную нелинейных связей. Снаряд летит по нелинейной баллистической кривой. Некое новое производство какое-то время развивается по нарастающей траектории, затем наступает фаза стабильного существования и далее стадия одряхления. Рост численности работников на уборке яблок положительно, хотя и не пропорционально, сказывается на финансах работодателя, но избыточность числа работников не только чревата убытками, но и неприятными последствиями для сада.

Для задач линейного программирования примечательно, что множество решений (планов) представляет выпуклый многомерный многогранник и экстремальное решение достаточно искать упорядоченным перебором его вершин.

Учет нелинейности приводит к необходимости несоизмеримо более сложного решения задач нелинейной оптимизации. Здесь наряду с глобальным экстремумом могут обнаружиться локальные экстремумы. При нелинейных ограничениях подозрению в оптимальности может подвергаться бесчисленное множество граничных точек. К тому же математики не придумали аппарата перемещения по кривой (эффективного «кривого ружья»), и предлагается маленькими шажками по прямой добираться до желаемой цели. Даже при могуществе современных компьютеров решение многоэкстремальных задач нелинейного программирования сравнимо с поиском предмета, утерянного где-то в Горном Алтае.

«Никто не может объять необъятное». В настоящем учебном пособии рассмотрены примеры предельно простых нелинейных экономических задач и базовый математический аппарат их решения, не выходящий за пределы традиционных школьного и вузовского курсов, но требующий «напряжения извилин» и хотя бы минимальных представлений о «жизни за окном».

Наряду с этим предлагаем осознать выработанные практикой экономических исследований критерии принятия решения в ситуации неопределенности – риска принятия какого-то из возможных решений при том или ином отклике «судьбы».

Читатель должен понимать, что цель выполнения предлагаемых заданий не в решении конкретных задач, а в уяснении идеологической базы этих решений, формировании способности ставить подобные задачи из реальной жизни и осознанно искать методы их решения.

Хотя все работы предлагаемого практикума сопровождаются необходимыми комментариями, читателю рекомендуется для осознанного понимания используемого аппарата обратиться к предлагаемой литературе (итог поиска в Интернете не всегда соответствует уровню ваших знаний и требует многократно больших затрат энергии).

1. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель практического занятия

Получить наглядное представление о сути решаемых задач нелинейной оптимизации. Овладеть навыками практического решения задач квадратичного программирования методом Вулфа – Фрэнка.

Содержание занятия

1.1. Теоретические положения

Теорема Куна – Таккера

Рассмотрим ***задачу выпуклого программирования*** в формате поиска минимума выпуклой функции $F(X)$ при условиях:

$$f_i(X) \le 0 \quad (i = 1, ..., m), \tag{1.1}$$

$$X \ge 0, \tag{1.2}$$

где X – n-мерный вектор; $f_i(X)$ – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции.

В отличие от произвольной задачи нелинейного программирования, где множество допустимых решений может быть любым (рис. 1), а целевая функция обладать локальными экстремумами (рис. 2), *рассматриваемая задача характеризуется выпуклым множеством планов и единственностью искомого минимума* (рис. 3).

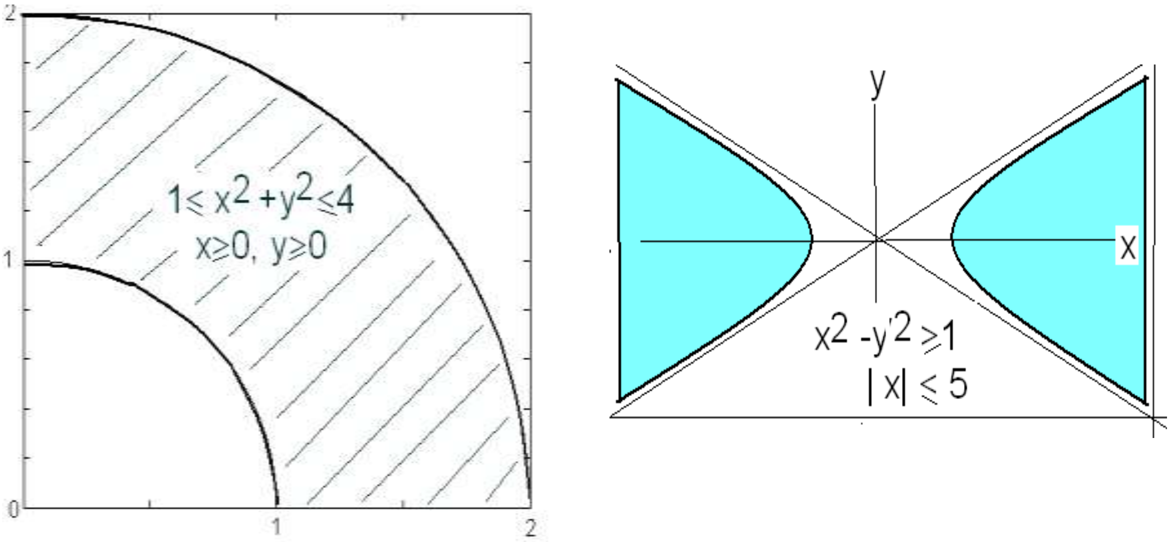


Рис. 1

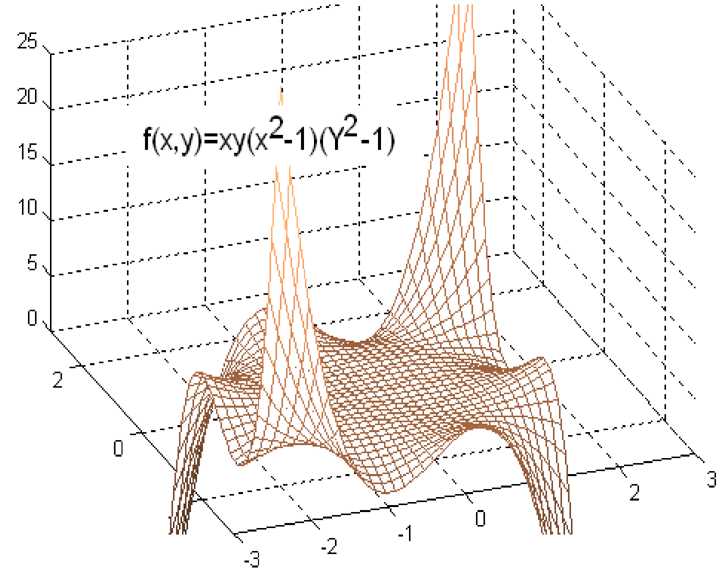


Рис. 2

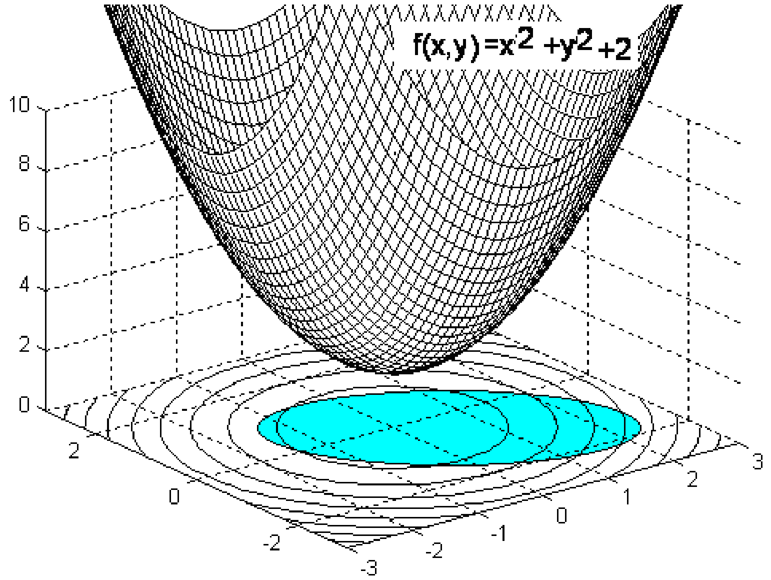


Рис. 3

Многие из методов решения подобных задач связаны с *функцией Лагранжа*, обычно выбираемой в виде

$$\Phi\ (X, \lambda)\ =\ F(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ f_i(X), \tag{1.3}$$

и рассматриваются на множестве пар векторов $X \geq 0$ и $\lambda \geq 0$. Компоненты m-мерного вектора $\lambda = (\lambda_i,\ i = 1, ..., m)$ называют *множителями Лагранжа.*

Теорема Куна – Таккера утверждает, что вектор $X^* \geq 0$ является решением поставленной задачи тогда и только тогда, если существует вектор $\lambda^* \geq 0$ такой, что пара (X^*, λ^*) удовлетворяет системе уравнений и неравенств:

$$\frac{\partial \Phi\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial X} \geq 0, \quad X^{*T} \frac{\partial \Phi\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial X} = 0, \quad X^* \geq 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Phi\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial \lambda} \leq 0, \quad \lambda^{*T} \frac{\partial \Phi\left(X^*, \lambda^*\right)}{\partial \lambda} = 0, \quad \lambda^* \geq 0. \quad (1.5)$$

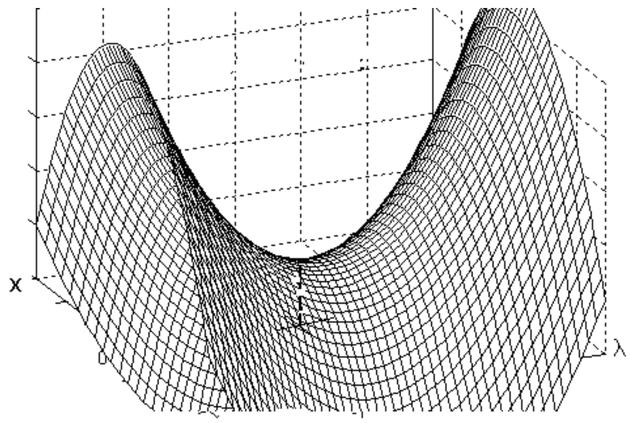


Рис. 4

Эту теорему обычно называют *теоремой о седловой точке* – в окрестности «точки» (X^*, λ^*) функция Лагранжа возрастает по X и убывает по λ (рис. 4).

Совокупность условий (1.4)–(1.5) называют *условиями Куна – Таккера*.

Квадратичное программирование

Частным случаем задачи выпуклого программирования является *задача квадратичного программирования* – задача минимизации квадратичной функции n переменных

$$F(X) = C^T X + X^T D X \quad (1.6)$$

при линейных ограничениях

$$AX \leq B, \quad X \geq 0, \quad (1.7)$$

где A – матрица размерности m на n; C, X – n-мерные векторы; B – m-мерный вектор; T – знак транспонирования; D – положительно определенная n-мерная квадратная матрица.

Напомним, что матрица D называется положительно определенной, если $X^T D X \geq 0$ при любом X и $X^T D X = 0$ лишь при $X = 0$. Для проверки положительной определенности достаточно убедиться в положительности ее главных миноров:

$$D_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} > 0, \; ..., \; |D| > 0.$$

Например, для задачи с целевой функцией

$$F(X) = -4X_1 - 5X_2 + 7X_3 + X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^2 + 10X_2X_3 + 13X_3^2$$

при условиях

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \le 4;$$
$$-2X_1 + 5X_2 + X_3 \le 5;$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

можно ввести обозначения

$$X = \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} -4 \\ -5 \\ 7 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 \end{Vmatrix},$$

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \end{Vmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы D и линейность ограничений (множество планов выпукло) позволяют использовать теорему Куна – Таккера. *Функция Лагранжа* здесь имеет вид

$$\Phi(X, \lambda) = C^TX + X^TDX + \lambda^T(AX - B) \tag{1.8}$$

и *условия Куна – Таккера* приводятся к форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = C + 2DX + A^T\lambda \ge 0, \quad X^T\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0, \quad X \ge 0; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = AX - B \le 0, \quad \lambda^T\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad \lambda \ge 0. \tag{1.10}$$

Если ввести векторы ослабляющих переменных $V \ge 0$ и $Y \ge 0$, то условия (1.9)–(1.10) примут вид

$$C + 2DX + A^T\lambda - V = 0, \quad X^TV = 0, \quad X \ge 0, \quad V \ge 0;$$
$$AX - B + Y = 0, \quad -\lambda^TY = 0, \quad \lambda \ge 0, \quad Y \ge 0.$$

С учетом неотрицательности переменных можно поставить задачу *минимизации (до нуля)* выпуклой функции

$$g(X, \lambda, Y, V) = X^TV + \lambda^TY \tag{1.11}$$

при условиях

$$2DX + A^T\lambda - V = -C, \tag{1.12}$$
$$AX + Y = B, \tag{1.13}$$
$$X, \lambda, Y, V \ge 0. \tag{1.14}$$

Если обозначить

$$W = (X^T, \lambda^T, Y^T, V^T)^T, \tag{1.15}$$

то (1.12)–(1.14) преобразуются к виду:

$$RW = S, \quad W \geq 0, \tag{1.16}$$

где
$$R = \begin{Vmatrix} 2D & A^T & 0 & -E \\ A & 0 & E & 0 \end{Vmatrix}, \qquad S = \begin{Vmatrix} -C \\ B \end{Vmatrix}. \tag{1.17}$$

Обратите внимание на своеобразие целевой функции. Она сможет обратиться в нуль, если в каждом из слагаемых хотя бы один из сомножителей (размерности n и m соответственно) равен нулю. Но тогда искомый оптимальный план с $(n + m + m + n)$ компонентами будет обращать в равенство хотя бы $2(n + m)$ ограничений (1.12)–(1.14) из имеющихся там $3(n + m)$ ограничений. Соответственно нет нужды перебирать все допустимые решения системы линейных ограничений (1.12)–(1.14), а достаточно перебирать *только опорные планы* (вспомните, что опорный план n-мерной задачи с линейными ограничениями обращает в равенство хотя бы n из них [1]).

Таким образом, применение теоремы Куна – Таккера позволяет свести задачу квадратичного программирования (1.6)–(1.7) к задаче (1.11)–(1.16) поиска опорного плана W^*, для которого $g(W^*) = 0$.

Метод Вулфа – Фрэнка

Высказанные выше соображения порождают идею метода решения задачи: найти некоторый опорный план W для системы ограничений (1.16); посмотреть, нет ли по соседству других опорных планов с ме́ньшим значением $g(W)$; при наличии такового перейти к нему и продолжать такой процесс до тех пор, пока не окажемся «на дне ямы». *Такая идея воплощена в градиентном методе П. Вулфа и М. Фрэнка*.

Согласно этому методу отыскивается некоторый опорный план W^0. Если $g(W^0) = 0$, то этот план оптимален. В противном случае отыскивается градиент функции $g(W) = X^TV + \lambda^TY$ на выбранном плане

$$\text{grad } g(W^0) = (V^T, Y^T, \lambda^T, X^T)^T \tag{1.18}$$

и осуществляется переход к другому опорному плану в направлении, обратном градиенту. При реализации этого перехода с использованием симплексного преобразования составляющие градиента принимаются за коэффициенты целевой «линейной функции». Для нового опорного плана W^1 проверяется условие $g(W^1) = 0$ и так далее до получения оптимального плана.

Для иллюстрации метода рассмотрим простой **пример**, который позволит дать геометрическую интерпретацию получаемому решению.

Минимизировать

$$F(X_1, X_2) = -5X_1 - 6X_2 + X_1^2 + 3X_2^2$$

при условиях $X_1 + 2X_2 \le 4,$

$$X_1, X_2 \ge 0.$$

Ставим задачу минимизации до нуля функции

$$g(X_1, X_2, \lambda, Y, V_1, V_2) = X_1V_1 + X_2V_2 + \lambda Y$$

при условиях $RW = S$, $W \ge 0$, где

$$R = \left\|\begin{array}{cc|c|c|cc} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \text{ и } S = \left\|\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ \hline 4 \end{array}\right\|$$

Ищем начальный опорный план W^0 методом искусственного базиса (без учета коэффициентов «целевой функции» при обычных переменных, заведомо меньших M) и затем стандартными симплексными преобразованиями исключаем из базиса искусственные векторы Z_1 и Z_2 (см. подробнее в [1]):

$C_{баз}$	Базис	План							M	M
		W	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2	Z_1	Z_2
M	Z_1	5	2	0	1	0	–1	0	1	0
M	Z_2	6	0	6	2	0	0	–1	0	1
	Y	4	1	2	0	1	0	0	0	0
	Δ_k	11M	2M	6M	3M	0	–M	–M	0	0

$C_{баз}$	Базис	План							M
		W	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2	Z_1
M	Z_1	2	2	–3	0	0	–1	1 / 2	1
	λ	3	0	3	1	0	0	–1 / 2	0
	Y	4	1	2	0	1	0	0	0
	Δ_k	2M	2M	–3M	0	0	–M	M / 2	0

$C_{баз}$	Базис	План						
		W	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2
	V_2	4	4	–6	0	0	–2	1
	λ	5	2	0	1	0	–1	0
	Y	4	1	2	0	1	0	0
	Δ_k							

В итоге выполненных преобразований найден начальный опорный план задачи (вектор-столбец)

$$W^0 = (X_1, X_2, \lambda, Y, V_1, V_2)^T = (0, 0, 5, 4, 0, 4)^T.$$

Находим значение функции

$$g(W^0) = X_1V_1 + X_2V_2 + \lambda Y = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 20 \neq 0.$$

Следовательно, нужно выбрать новый опорный план.

Находим

$$\text{grad}\, g(W^0) = \{V_1, V_2, Y, \lambda, X_1, X_2\}^T = \{0, 4, 4, 5, 0, 0\}^T$$

и берем его компоненты в качестве коэффициентов «целевой функции»:

$C_{баз}$	Базис	grad $g(W^0)$	0	4	4	5	0	0
		План W^0	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2
0	V_2	4	4	–6	0	0	–2	1
4	λ	5	2	0	1	0	–1	0
5	Y	4	1	2	0	1	0	0
Δ_k		40	13	6	0	0	–4	0

Заметьте, что произведение (W^T, grad $g(W)$) = $2g(W)$ (здесь 40 = 2 · 20).

Выполнив обычные симплексные преобразования (выражаем X_1 из первого уравнения, исключая X_1 из остальных уравнений), получаем новый опорный план W^1 = (1, 0, 3, 3, 0, 0), для которого градиент

$$\text{grad}\, g(W^1) = \{V_1, V_2, Y, \lambda, X_1, X_2\}^T = \{0, 0, 3, 3, 1, 0\}^T$$

и $g(W^1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 18 / 2 = 9 > 0$:

$C_{баз}$	Базис	grad $g(W^1)$	0	0	3	3	1	0
		План W^1	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2
0	X_1	1	1	–3 / 2	0	0	–1 / 2	1 / 4
3	λ	3	0	3	1	0	0	–1 / 2
3	Y	3	0	7 / 2	0	1	1 / 2	–1 / 4
Δ_k		18	0	39 / 2	0	0	1 / 2	–9 / 4

Поскольку $g(W^1) \neq 0$, переходим к новому опорному плану, получая очередную симплексную таблицу:

$C_{баз}$	Базис	grad $g(W^2)$	0	0	0	3 / 7	16 / 7	6 / 7
		План W^2	X_1	X_2	λ	Y	V_1	V_2
0	X_1	16 / 7	1	0	0	3 / 7	–2 / 7	1 / 7
0	λ	3 / 7	0	0	1	–6 / 7	–2 / 7	–2 / 7
0	X_2	6 / 7	0	1	0	2 / 7	1 / 7	–1 / 14
Δ_k		**= 0**	0	0	0	–3 / 7	–16 / 7	–6 / 7

Здесь обнаруживаем $\boldsymbol{W^2 = (X_1, X_2, \lambda, Y, V_1, V_2)^T = (16 / 7, 6 / 7, 3 / 7, 0, 0, 0)^T}$ и значение $\boldsymbol{g(W^2)} = (16 / 7) \cdot 0 + (6 / 7) \cdot 0 + (3 / 7) \cdot 0 = \mathbf{0}$.

Следовательно, получен оптимальный план и для исходной задачи квадратичного программирования **$X = (16 / 7, 6 / 7)$**.

Нетрудно видеть, что минимум $F(X_1, X_2) = -5X_1 - 6X_2 + X_1^2 + 3X_2^2 = -64 / 7$ и найденная точка минимума лежит на границе множества планов $X_1 + 2X_2 = 4$, $X_1, X_2 > 0$.

Отыскав точку минимума $F(X_1, X_2)$ без учета ограничений из системы

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} = -5 + 2X_1 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial X_2} = -6 + 6X_2 = 0,$$

т. е. $X_1 = 2{,}5$ и $X_2 = 1$ (точку за пределами множества планов), можно видеть полное соответствие найденного решения задачи с ограничениями здравому смыслу (см. приведенные на рис. 5 так называемые линии уровня).

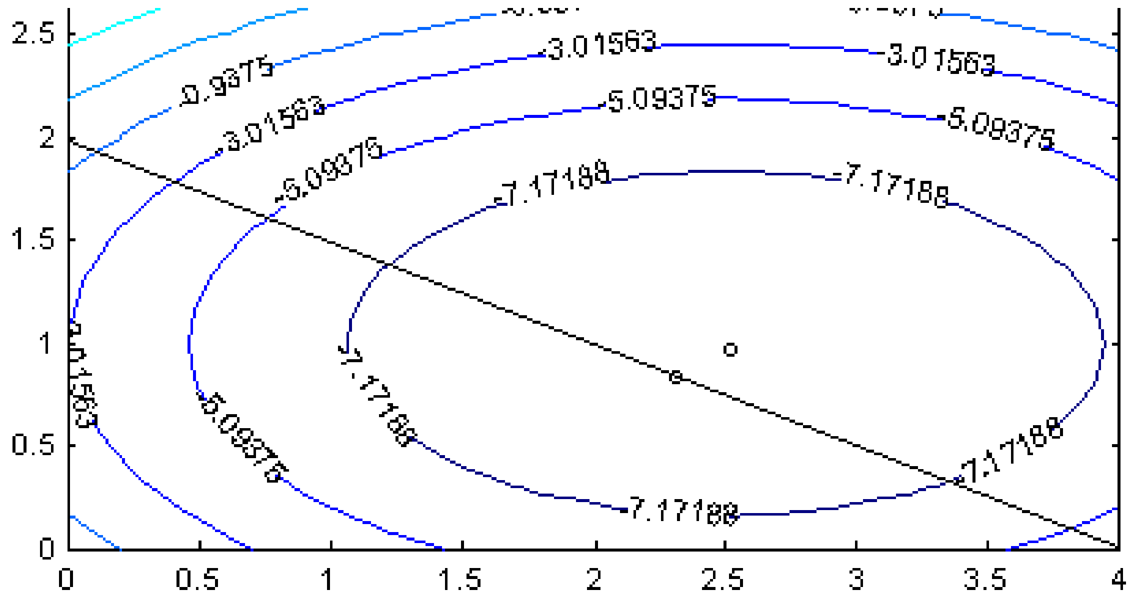


Рис. 5

Замечания. Обратившись к теореме Куна – Таккера, можно убедиться, что при ограничениях $AX = B$, $X \geq 0$ задача сводится к минимизации функции $g(X, \lambda, V) = X^T V$ при условиях:

$$2DX + A^T\lambda - V = -C, \quad AX = B, \quad X, V \geq 0.$$

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Как решать задачу максимизации квадратичной функции при линейных ограничениях?

2. Как решать задачу минимизации квадратичной функции при ограничениях $AX = B$?

3. Может ли значение функции $g(W)$ быть отрицательным?

4. Как изменятся условия Куна – Таккера для задачи квадратич-

ного программирования при максимизации вогнутой функции?

5. Может ли задача квадратичного программирования быть неразрешимой?

6. Существует ли гарантия решения задачи квадратичного программирования за конечное число симплексных преобразований?

7. Возможно ли решение задач квадратичного программирования графически?

8. Зачем ставится условие выпуклости для минимизируемой квадратичной функции?

9. Почему (зачем) изменяется верхняя строка в последовательности симплексных таблиц?

10. Можно ли применить метод Вулфа – Фрэнка для минимизации квадратичной функции при ограничениях $AX \geq B$, $X \geq 0$?

1.3. Контрольные задания для практических занятий

(номер варианта задания определяется преподавателем; для закрепления материала можно дополнительно выполнить любой другой вариант).

Решить задачу квадратичного программирования методом Вулфа – Фрэнка.

Объяснить полученные результаты.

1. Максимизировать $F(x) = -2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_4^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $2x_1 - x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$	**2.** Максимизировать $F(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ при условиях $x_1 + 3x_2 \leq 9$ $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$
3. Максимизировать $F(x) = x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ при условиях $2x_1 + x_2 \geq 2$ $3x_1 + x_2 \leq 6$ $x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	**4.** Максимизировать $F(x) = -10x_1 + 12x_2 + 11x_3 - x_1^2 +$ $+ 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3^2$ при условиях $2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20$ $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Максимизировать $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 - 4x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**6.** Максимизировать $F(x) = 9x_1 - 8x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2 -$ $- 5x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 24$ $x_1, x_2 \ge 0$
7. Максимизировать $F(x) = 3x_1 - 9x_2 + 2x_3 - x_1^2 + 2x_1x_2 -$ $- 2x_2^2 - 1{,}5x_2x_3 - x_3^2$ при условиях $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 18$ $3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 16$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**8.** Максимизировать $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 - x_2 \ge 0$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
9. Максимизировать $F(x) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 2$ $-5x_1 + 4x_2 \le 7$ $x_1, x_2 \ge 0$	**10.** Максимизировать $F(x) = 6x_1 + x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 -$ $- 3x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 1$ $2x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
11. Максимизировать $F(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 6$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**12.** Максимизировать $F(x) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
13. Максимизировать $F(x) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 12$ $3x_1 + x_2 \le 15$ $x_1, x_2 \ge 0$	**14.** Максимизировать $F(x) = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 12$ $-x_1 + x_2 \ge -8$ $x_1, x_2 \ge 0$

15. Максимизировать $F(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 7$ $x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**16.** Максимизировать $F(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \le 18$ $x_1 + 2x_3 \le 14$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
17. Минимизировать $F(x) = -2x_1 - 3x_2 + 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ при условиях $x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**18.** Минимизировать $F(x) = -x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 2$ $3x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
19. Максимизировать $F(x) = x_1 + 2x_2 - 0{,}5x_1^2 - 0{,}5x_2^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 + 4x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**20.** Минимизировать $F(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 +$ $+ 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
21. Максимизировать $F(x) = 10x_1 + 7x_2 - 2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 10$ $3x_1 + 4x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$	**22.** Максимизировать $F(x) = -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 3x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 4$ $5x_1 - 2x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$
23. Минимизировать $F(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 +$ $+ 6x_1x_3 + x_3^2$ при условиях $x_1 - 2x_2 - x_3 \le 2$ $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 1$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**24.** Максимизировать $F(x) = -x_1^2 - x_2^2$ при условиях $x_1 + 0{,}5x_2 \ge 1$ $x_1 + 0{,}5x_2 \ge 4$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
25. Минимизировать $F(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + x_1x_2$ при условиях $x_1 + x_2 \ge 1$ $2x_1 + 3x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$	**26.** Минимизировать $F(x) = 4x_1 - 5x_2 + x_1^2 + 6x_2^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1 - x_2 \le 1$ $x_1, x_2 \ge 0$

27. Минимизировать $F(x) = 6x_1 + 7x_2 - 3x_1^2 + 4x_2^2$ при условиях $4x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 9$ $x_1, x_2 \ge 0$	**28.** Минимизировать $F(x) = x_1 - 5x_2 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ при условиях $3x_1 + 2x_2 \le 2$ $5x_1 - 3x_2 \le 1$ $x_1, x_2 \ge 0$
29. Максимизировать $F(x) = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 4$ $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$	**30.** Минимизировать $F(x) = -x_1 - x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 1$ $x_1, x_2 \ge 0$
31. Минимизировать $F(x) = -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_1^2 -$ $- 2x_2^2 - 3x_3^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**32.** Минимизировать $F(x) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_1^2 +$ $+ x_2^2 + 3x_3^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
33. Максимизировать $F(x) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_1^2 - 2x_2^2 +$ $+ x_3^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$ $x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**34.** Минимизировать $F(x) = -3x_1 + 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ при условиях $2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
35. Максимизировать $F(x) = -3x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_1^2 + x_2^2 -$ $- x_1x_2$ при условиях $3x_1 - x_2 \le 7$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**36.** Минимизировать $F(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях $2x_1 + 6x_2 + x_3 \le 7$ $x_1 + 2x_3 \le 6$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

37. Максимизировать $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1 + 3x_2 -$ $- x_3$ при условиях $x_1 - 5x_2 + 4x_3 \le 16$ $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \le -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**38.** Максимизировать $F(x) = -2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 8$ $2x_1 - x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$
39. Максимизировать $F(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$ при условиях $3x_1 + 2x_2 \le 7$ $10x_1 - x_2 \le 8$ $-18x_1 + 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$	**40.** Максимизировать $F(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \ge 6$ $3x_1 - 2x_2 \le 18$ $-x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
41. Максимизировать $F(x) = 2(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 3)^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \ge 6$ $3x_1 - 2x_2 \le 18$ $-x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$	**42.** Минимизировать $F(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \ge 6$ $3x_1 - 2x_2 \le 18$ $-x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
43. Максимизировать $F(x) = x_1x_2$ при условиях $6x_1 + 4x_2 \ge 12$ $2x_1 + 3x_2 \le 24$ $-3x_1 + 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$	**44.** Максимизировать $F(x) = x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях $x_1 + x_2 \le 4$ $x_2 + x_3 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
45. Максимизировать $F(x) = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 24$ $x_1 + 2x_2 \le 15$ $3x_1 + 2x_2 \le 24$ $x_1, x_2 \ge 0$	**46.** Минимизировать $F(x) = 5x_1 + 6x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ при условиях $x_1 + 3x_2 = 9$ $3x_1 - 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$

2. МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ (ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ)

В основе метода динамического программирования, предназначенного в первую очередь для принятия решений в многошаговых (многоэтапных) процессах управления какими-либо системами, лежит интуитивный **принцип оптимальности**, определяющий свойство оптимальной стратегии:

Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и начальное поведение, дальнейшее поведение образует оптимальную стратегию относительно состояния, возникшего в результате начального поведения. (Р. Беллман)

Другими словами, если вы ставите перед собой некоторую удаленную на несколько этапов во времени цель (достижение максимума удовлетворения своих потребностей к некоторому моменту, управление капиталовложениями на период до 2030 года, выбор траектории полета на Марс с минимальным расходом горючего, перехват ракеты противника за минимальное время и т. п.), то совокупность ваших действий будет оптимальной, если на каждом очередном этапе вы принимаете решение о последующих действиях, оптимальное с точки зрения достижения указанной конечной цели, с учетом обстановки, создавшейся в результате ваших предшествующих действий (решений).

Первоначальное знакомство с задачами математического программирования (поиск экстремальных значений некоторой целевой функции при наличии ограничений на ее параметры) убеждает в том, что с ростом количества параметров (размерности задачи) трудоемкость решения значительно возрастает и легче решить десяток одномерных задач, чем одну десятимерную. *Использование же метода динамического программирования сводит многомерную задачу оптимизации к последовательности задач меньшей размерности* (если последние поддаются реальному решению, то и исходная задача окажется разрешимой).

Процесс решения оптимизационных задач с помощью известных численных методов (симплексный, градиентные, Монте-Карло и др.) приводит к результату, приемлемому для выбранного сочетания численных значений входных параметров, но сомнительному при малейшем их изменении (*проблема устойчивости решений*). Метод динамического программирования обеспечивает решение не для частного случая, а для некоторых диапазонов значений параметров (обладание таким решением избавляет от необходимости заново выполнять расчеты при «незначительных» изменениях обстановки).

Несомненно, что появление дополнительных условий (ограничений задачи) осложняет ее решение любыми методами. Тем не менее, численные процедуры динамического программирования достаточно часто требуют меньших затрат за счет уменьшения объема перебора приемлемых вариантов.

Метод динамического программирования сводится к построению и решению системы рекуррентных отношений

$$f_{k+1}(x) = \underset{k}{\mathrm{extr}}\, T(y, f_k), \quad k = 1, \ldots, N,$$

понимание сущности которых может быть достигнуто в результате знакомства с представленным ниже циклом заданий для аудиторной и самостоятельной работы.

Студент должен стремиться не столько добросовестно выполнять арифметику численных процедур в подражание приведенным примерам, сколько осмысливать полученные оценки и основные идеи предлагаемых приемов, находить ответы на вопросы, сопровождающие каждое задание, и стараться за алгебраическими символами видеть жизнь, учиться алгеброй проверять гармонию.

2.1. Складирование однородного продукта

Цель практического занятия

Получить теоретические знания и элементарные навыки формулирования прикладных задач складирования однородного продукта, их решения методом динамического программирования, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

2.1.1. Теоретические положения

Постановка задачи и описание метода решения. Предлагаемая для рассмотрения задача существенно идеализирует реальность, но дает возможность прекрасной иллюстрации метода динамического программирования (построение рекуррентных соотношений и тем самым сведение многомерной задачи оптимизации к последовательности задач меньшей размерности; аналитическое решение рекуррентных соотношений и выявление структуры полученного решения).

Пусть имеется склад вместимостью B с начальным запасом V некоторого продукта, цены на который подвержены сезонным изменениям.

В начале i-го сезона часть продукта Y_i можно продать по цене P_i и в конце сезона закупить X_i этого продукта по цене C_i. Образовавшийся на складе запас хранится до следующего сезона. Найти политику продажи-покупки, максимизирующую суммарный доход за N сезонов.

Если пренебречь затратами на хранение, то задачу можно свести к максимизации линейной функции

$$\sum_{i=1}^{N}\left[PiYi - CiXi\right] \tag{2.1}$$

при условиях

$$\begin{array}{lll} 0 \le Y_1 \le V, & X_1 \ge 0, & V_1 = V - Y_1 + X_1 \le B; \\ 0 \le Y_2 \le V_1, & X_2 \ge 0, & V_2 = V_1 - Y_2 + X_2 \le B; \\ 0 \le Y_3 \le V_2, & X_3 \ge 0, & V_3 = V_2 - Y_3 + X_3 \le B. \end{array} \tag{2.2}$$

Таким образом, получена задача линейного программирования с $2N$ неизвестными и $4N$ ограничениями, которую можно решить при фиксированном значении V.

Рассмотрим задачу с других позиций, для чего введем следующие обозначения:

k – номер сезона, отстоящего на k шагов до конца N-шагового процесса (k = 1 соответствует последнему сезону, k = 2 – предпоследнему, $k = N$ – первому);

Y, X – объемы продажи-покупки в соответствующем сезоне (в первом из k оставшихся сезонов);

P_k, C_k – цены продажи-покупки в соответствующем сезоне;

$F_k(V)$ – максимальный доход в k-шаговом процессе при начальном запасе V;

$Y_k(V)$, $X_k(V)$ – оптимальные объемы продажи-покупки на первом шаге k-шагового процесса с начальным запасом V.

В случае одношагового процесса (с таковым мы столкнемся, если доберемся до последнего шага и к тому же будем знать уровень запаса V перед этим шагом)

$$F_1(V) = \max\{P_1Y - C_1X\}, \tag{2.3}$$

где область максимизации определяется условиями $0 \le Y \le V$; $X \ge 0$.

Очевидно, что максимум здесь достигается при $Y = V$ и $X = 0$ (естественно при завершении деятельности по купле-продаже продать весь запас и ничего не покупать):

$$F_1(V) = P_1V;\; Y_1(V) = V;\; X_1(V) = 0.$$

Обратимся к случаю k-шагового процесса при $k > 1$, повторив традиционные рассуждения с позиций известного *принципа оптимальности* Р. Беллмана.

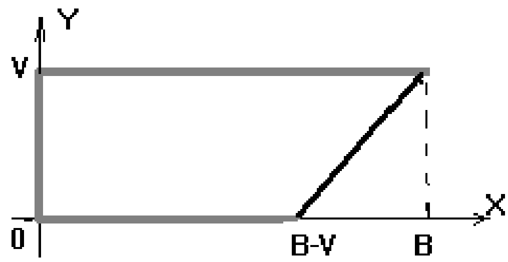
Очевидно, что доход в k-шаговом процессе складывается из дохода на первом шаге $\{P_kY - C_kX\}$ и дохода на последующих $(k - 1)$ шагах. Если мы желаем действовать оптимально, то обязаны руководствоваться принципом оптимальности: независимо от начального состояния (запаса V) и начального поведения (объемов Y, X продажи-покупки на первом шаге) дальнейшая политика должна быть оптимальной, исходя из возникающего состояния (запаса $V - Y + X$). Тогда доход на оставшихся $k - 1$ шагах будет равен $F_{k-1}(V - Y + X)$ и

$$F_k(V) = \max\{P_kY - C_kX + F_{k-1}(V - Y + X)\},\ k = 2, ..., N, \tag{2.4}$$

где область максимизации определяется условиями:

$$0 \le Y \le V; \quad X \ge 0; \quad V - Y + X \le B. \tag{2.5}$$

Легко видеть, что множество планов – выборов для начального поведения (область максимизации) при любом k – это многоугольник с координатами вершин, линейно зависящими от V.



Учитывая линейность по V функции $F_1(V) = P_1V$, при поиске $F_2(V)$ мы сталкиваемся с максимизацией функции, линейной по X и Y, над указанным множеством планов, т. е. с задачей линейного программирования с экстремумами в вершинах множества.

Можно показать, что аналогичное явление наблюдается при любом $k > 1$. Соответственно рекуррентные соотношения (2.4) упрощаются к виду

$$F_k(V) = \max \left| \begin{array}{lll} F_{k-1}(V) & ;\ Y_k(V) = 0; & X_k(V) = 0 \\ P_kV + F_{k-1}(0) & ;\ Y_k(V) = V; & X_k(V) = 0 \\ -C_k(B - V) + F_{k-1}(B) & ;\ Y_k(V) = 0; & X_k(V) = B - V \\ P_kV - C_kB + F_{k-1}(B) & ;\ Y_k(V) = V; & X_k(V) = B \end{array} \right.$$

$$k = 2, ..., N.$$

Так исходная задача линейного программирования с $2N$ неизвестными сведена к N элементарным линейным программам с двумя неизвестными. Более того, здесь мы имеем решение для произвольных V и B.

Пример решения задачи. Пусть $N = 5$ и цены определяются:

Сезон	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Продажная цена (P)	7	6	4	4	8
Закупочная цена (C)	6	7	5	3	5

Процесс решения задачи дает:

$F_1(V) = 8V;$ $\qquad$ $Y_1(V) = V;\ X_1(V) = 0;$

$$F_2(V) = \max \left| \begin{array}{l} F_1(V) = 8V \\ 4V + F_1(0) = 4V \\ -3(B - V) + F_1(B) = 3V + 5B \\ 4V - 3B + F_1(B) = 4V + 5B \end{array} \right| = \begin{array}{l} 4V + 5B; \\ Y_2(V) = V;\ X_2(V) = B; \end{array}$$

$$F_3(V) = \max \left| \begin{array}{l} F_2(V) = 4V + 5B \\ 4V + F_2(0) = 4V + 5B \\ -5(B - V) + F_2(B) = 5V + 4B \\ 4V - 5B + F_2(B) = 4V + 4B \end{array} \right| = \begin{array}{l} 4V + 5B; \\ Y_3(V) = 0, V;\ X_3(V) = 0; \end{array}$$

$$F_4(V) = \max \left| \begin{array}{l} F_3(V) = 4V + 5B \\ 6V + F_3(0) = 6V + 5B \\ -7(B - V) + F_3(B) = 7V + 2B \\ 6V - 7B + F_3(B) = 6V + 2B \end{array} \right| = \begin{array}{l} 6V + 5B; \\ Y_4(V) = V;\ X_4(V) = 0; \end{array}$$

$$F_5(V) = \max \left| \begin{array}{l} F_4(V) = 6V + 5B \\ 7V + F_4(0) = 7V + 5B \\ -6(B - V) + F_4(B) = 6V + 5B \\ 7V - 6B + F_4(B) = 7V + 5B \end{array} \right| = \begin{array}{l} 7V + 5B; \\ Y_5(V) = V;\ X_5(V) = 0 \\ \text{или } B. \end{array}$$

Отсюда искомый максимум дохода в 5-шаговом процессе при начальном запасе V равен $F_5(V) = 7V + 5B$ и *оптимальная политика по шагам* определяется следующим порядком действий:

1	Объем продажи = $Y_5(V) = V$ Объем закупок = $X_5(V) = 0$ или B	– весь запас – ничего или полный склад
2	Объем продажи = $Y_4(0$ или $B) = 0$ или B Объем закупок = $X_4(0$ или $B) = 0$	– весь запас, если он есть – ничего не покупать

3	Объем продажи = $Y_3(0) = 0$ Объем закупок = $X_3(0) = 0$	– все продать, но нечего – ничего не покупать
4	Объем продажи = $Y_2(0) = 0$ Объем закупок = $X_2(0) = B$	– продать запас, но его нет – закупить полный склад
5	Объем продажи = $Y_1(B) = B$ Объем закупок = $X_1(V) = 0$	– продать весь запас – ничего не покупать

Обратите внимание на систему обозначений и правила построения оптимальной политики, т. к. использованный подход типичен для решения всех подобных задач.

2.1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Поясните суть принципа оптимальности Беллмана.
2. В чем состоит идея метода динамического программирования?
3. В чем преимущества метода динамического программирования перед известными численными методами (симплексным, градиентными, Монте-Карло и др.)?

2.1.3. Контрольные задания для практических занятий

Требования:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи и подходом к ее решению методом рекуррентных соотношений.
2. Выберите вариант контрольного задания и выполните его.
3. Оцените полученное оптимальное решение с позиций здравого смысла.
4. Постройте рекуррентные соотношения и выясните структуру решения для следующих видоизменений задачи:
   - хранение продукции на складе сопровождается затратами, пропорциональными хранимому объему;
   - хотя бы половина имеющегося запаса на каждом этапе должна быть продана;
   - объем закупки на каждом этапе не должен превышать половины емкости склада.
5. Сопоставьте необходимые затраты энергии на решение этой задачи методом линейного программирования и использованным вами методом.

Варианты заданий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

В первой строке каждого варианта – цена продаж, во второй – цена закупок. Число сезонов $N = 8$.

№	*Сезоны*								№	*Сезоны*							
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	12	18	14	15	10	17	14	16	**2**	18	24	10	10	9	6	10	24
	8	14	7	12	8	7	9	10		15	2	10	22	8	9	15	18
3	14	21	19	15	9	16	20	13	**4**	7	4	8	2	4	20	18	1
	2	8	5	5	5	18	22	22		1	5	16	11	12	24	9	17
5	19	10	18	20	1	4	9	19	**6**	18	13	7	22	21	23	24	21
	24	7	6	4	21	23	18	7		20	11	22	15	21	17	12	24
7	4	7	15	18	5	19	13	2	**8**	12	15	1	18	2	8	14	5
	2	19	15	12	15	11	3	14		12	2	11	9	12	10	19	19
9	13	21	17	23	24	4	7	4	**10**	7	15	20	20	16	23	3	3
	17	14	13	20	12	23	3	12		6	12	8	12	19	2	11	2
11	10	7	9	16	20	1	10	22	**12**	1	12	16	9	12	10	22	14
	20	20	6	16	13	5	5	11		7	9	18	15	22	9	23	17
13	13	10	13	8	20	8	3	9	**14**	2	17	4	14	22	4	24	8
	24	23	1	5	21	18	2	5		17	9	7	20	11	3	7	2
15	8	17	10	3	10	24	23	9	**16**	12	6	1	3	20	18	3	2
	18	4	22	18	24	17	3	4		16	10	3	13	17	7	18	9
17	18	21	20	1	16	10	2	15	**18**	23	17	20	1	10	16	3	4
	10	17	20	5	1	13	4	5		8	21	16	2	7	2	4	13
19	18	20	4	4	23	6	15	6	**20**	21	11	3	24	19	7	13	12
	15	4	24	13	13	4	12	11		12	2	8	11	8	7	24	12
21	10	3	10	2	16	7	4	15	**22**	9	5	17	24	22	15	17	1
	5	14	23	2	15	3	8	7		15	2	7	10	13	10	15	6
23	14	19	14	8	22	20	21	1	**24**	9	3	18	16	19	14	6	24
	1	3	5	13	22	22	1	11		19	9	10	5	15	17	16	5
25	19	1	19	2	22	6	18	9	**26**	21	21	11	5	22	13	19	2
	6	19	2	15	5	9	7	3		9	17	22	2	19	1	21	3
27	22	8	22	11	12	5	19	12	**28**	23	23	6	22	22	20	17	8
	6	12	3	18	23	10	6	3		24	19	15	19	11	4	4	17
29	17	3	9	15	23	12	21	10	**30**	10	4	14	13	24	22	19	12
	21	22	18	21	9	14	14	8		7	8	11	18	21	5	5	9
31	13	22	17	17	23	18	22	11	**32**	24	12	9	15	23	6	11	18
	9	3	24	3	10	24	21	14		9	19	21	21	16	21	21	11
33	9	21	23	12	22	14	15	19	**34**	1	22	19	24	10	15	9	19
	19	14	24	20	14	17	27	5		19	14	7	17	17	18	21	3

35	15	4	23	9	17	2	20	15	**36**	12	13	14	23	4	3	9	6
	10	9	22	23	9	4	3	14		11	20	11	3	6	9	11	3
37	6	23	6	23	6	23	6	23	**38**	9	15	7	16	23	6	9	15
	21	9	4	9	21	9	4	9		10	17	10	17	10	17	10	17
39	5	12	4	18	6	19	7	21	**40**	13	18	24	23	16	20	24	23
	21	13	11	13	11	13	11	8		8	10	18	22	24	22	18	16
41	12	18	14	15	10	17	14	16	**42**	18	24	10	10	9	6	10	24
	9	14	8	13	8	7	9	10		15	12	10	22	18	9	15	18
43	14	21	19	15	9	16	20	13	**44**	7	4	8	2	4	20	18	1
	2	8	15	15	15	18	22	22		11	5	16	11	12	24	9	17
45	19	10	18	20	11	4	9	19	**46**	18	13	17	22	21	23	24	21
	14	7	6	4	21	23	18	7		20	11	22	15	21	17	12	24
47	14	17	15	18	15	19	13	12	**48**	12	15	11	18	12	8	14	5
	12	19	15	12	15	11	8	14		12	12	11	9	12	10	19	19
49	13	21	17	23	24	4	7	4	**50**	7	15	20	20	16	23	13	8
	17	15	23	20	12	23	3	12		6	12	18	12	19	12	11	12

2.2. Управление запасами в процессе конечной длительности

Цель практического занятия

Получить теоретические знания и элементарные навыки формулирования прикладных задач управления запасами в процессе конечной деятельности, их решения методом динамического программирования, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

2.2.1. Теоретические положения

Постановка задачи и описание метода решения. Рассмотрим задачу разработки программы выпуска некоторой продукции в течение N периодов при наличии точного прогноза спроса на эту продукцию.

Допустим, что продукция, изготавливаемая в некотором периоде, не является скоропортящейся и может быть использована не только для покрытия спроса в этом периоде, но имеется возможность сохранения ее остатка в будущем. Требуется разработать программу, при которой общая сумма затрат на производство и хранение минимальна при условии полного и своевременного удовлетворения спроса.

Что дешевле – производить новое или сохранять имеющееся? Может быть, выгоднее производить в какие-то отрезки времени излишки продукции с тем, чтобы в другие отрезки времени производить меньше или вообще отдыхать?

Введем обозначения:

k – число периодов до конца процесса;

X_k – объем производства в периоде, отстоящем от конца процесса на k шагов (при N = 5 индекс k = 5 соответствует первому шагу, k = 4 – второму шагу, и т. д.);

Y_k – уровень запаса на конец периода, отстоящего от конца процесса на k шагов;

$C_k(X_k,Y_k)$ – функция затрат на производство и хранение в этом же периоде (по аналогии);

S_k – спрос на продукцию в соответствующем периоде;

R_k – максимальный объем производства в соответствующем периоде;

T_k – максимальная емкость склада в соответствующем периоде.

Обозначив через $F_k(Y)$ минимум затрат в k-шаговом процессе с начальным запасом Y, а через $X_k(Y)$ – оптимальный объем производства на первом шаге такого процесса, имеем систему рекуррентных соотношений

$$F_k(Y) = \min[C_k(X_k, Y + X_k - S_k) + F_{k-1}(Y + X_k - S_k)], \quad k = 2, ..., N, \quad (2.6)$$

где область минимизации определяется условиями

$$0 \le X_k \le R_k, \quad 0 \le Y + X_k - S_k \le T_k. \quad (2.7)$$

При одношаговом процессе политика очевидна: производить лишь минимум продукции, необходимый для покрытия спроса, т. е.

$$F_1(Y) = C_1(S_1 - Y, 0),\ X_1(Y) = S_1 - Y \quad \text{при } Y \le S_1; \quad (2.8)$$

$$F_1(Y) = C_1(0, Y - S_1), \quad X_1(Y) = 0 \quad \text{при } Y \ge S_1.$$

Пример решения задачи. Возьмем пример с характеристиками, независимыми от номера временного интервала:

$$C_k(X, Y) = C_k(X) + H_k(Y),$$

$$C_k(X) = C(X) = \begin{cases} A + BX & ; X > 0 \\ 0 & ; X = 0 \end{cases} \qquad H_k(Y) = H \cdot Y, \quad (2.9)$$

$$A = 13,\ B = 2,\ H = 1,\ R_k = 5,\ T_k = 4,\ S_k = 3,\ N = 6.$$

В этих условиях

при $Y \le 3$ $\quad F_1(Y) = 13 + 2 \cdot (3 - Y),\ X_1(Y) = 3 - Y;$

при $Y \ge 3$ $\quad F_1(Y) = 1 \cdot (Y - 3),\ X_1(Y) = 0;$

$F_k(Y) = \min[C(X) + 1 \cdot (Y + X - 3) + F_{k-1}(Y + X - 3)]$, $k = 2, ..., 6$,
где область минимизации определена требованиями

$$0 \le X \le 5,\ 0 \le Y + X - 3 \le 4.$$

Для численного решения берем целочисленную сетку значений Y от 0 до 4 (в общем случае придется брать сетку с шагом, большим 1, и, соответственно, прибегать к интерполированию на очередных этапах решения).

Для $k = 1$ имеем

Y	0	1	2	3	4
$F_1(Y)$	19	17	15	0	1
$X_1(Y)$	3	2	1	0	0

При $k = 2$ имеем расчетную таблицу значений

$$C(X) + H(Y + X - 3) + F_1(Y + X - 3)$$

Y	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$F_2(Y)$	$X_2(Y)$
0				19+0+19	21+1+17	23+2+15	38	3
1			17+0+19	19+1+17	21+2+15	23+3+0	26	5
2		15+0+19	17+1+17	19+2+15	21+3+0	23+4+1	24	4
3	0+0+19	15+1+17	17+2+15	19+3+0	21+4+1		19	0
4	0+1+17	15+2+15	17+3+0	19+4+1			18	0

При $k = 3$ имеем

Y	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$F_3(Y)$	$X_3(Y$
0				19+0+38	21+1+26	23+2+24	48	4
1			17+0+38	19+1+26	21+2+24	23+3+19	45	5
2		15+0+38	17+1+26	19+2+24	21+3+19	23+4+18	43	4
3	0+0+38	15+1+26	17+2+24	19+3+19	21+4+18		38	0
4	0+1+26	15+2+24	17+3+19	19+4+18			27	0

Аналогичный расчет дает сводную таблицу $F_k(Y)$, $X_k(Y)$ при всех k:

	$F_1(Y)$	$X_1(Y)$	$F_2(Y)$	$X_2(Y)$	$F_3(Y)$	$X_3(Y)$	$F_4(Y)$	$X_4(Y)$	$F_5(Y)$	$X_5(Y)$	$F_6(Y)$	$X_6(Y)$
0	19	3	38	3	48	4	67	3,4	79	5	96	4
1	17	2	26	5	45	5	64	5	74	5	93	5
2	15	1	24	4	43	4	54	5	72	4	91	4
3	0	0	19	0	38	0	48	0	67	0	79	0
4	1	0	18	0	27	0	46	0	65	0	75	0

Если принять уровень запаса на начало процесса равным нулю, оптимальные объемы производства по периодам от начала процесса равны:

$$X_1 = X_6(0) = 4, \qquad X_2 = X_5(0 + 4 – 3) = 5,$$
$$X_3 = X_4(1 + 5 – 3) = 0, \qquad X_4 = X_3(3 + 0 – 3) = 4,$$
$$X_5 = X_2(0 + 4 – 3) = 5, \qquad X_6 = X_1(1 + 5 – 3) = 0.$$

2.2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Поясните суть принципа оптимальности Беллмана.

2. В чем преимущества метода динамического программирования перед известными численными методами (симплексным, градиентными, Монте-Карло и др.)?

3. Алгоритм численного решения рекуррентных соотношений.

2.2.3. Контрольные задания для практических занятий

Требования:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи и подходом к ее решению методом рекуррентных соотношений.

2. Выберите вариант контрольного задания и выполните его.

3. Оцените полученное решение с позиций здравого смысла.

4. Постройте рекуррентные соотношения и оцените соответствующие упрощения (усложнения) для следующих видоизменений задачи:

– к следующему периоду (сезону) объем сохраняемой на складе продукции уменьшается на P %;

– функция затрат на производство X и сохранение Z единиц продукции линейная: $C_k(X, Z) = C_kX + H_kZ$.

Варианты заданий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

№	T_k	R_k	*Спрос по сезонам*						A	B	H
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**			
1	4	5	3	4	3	4	3	4	15	2	3
2	4	5	3	4	3	4	3	4	17	3	4
3	4	5	3	4	3	4	3	4	17	3	4
4	4	5	3	4	3	4	3	4	12	3	3
5	5	6	4	4	3	4	4	3	15	2	1
6	5	6	4	3	3	4	3	3	15	2	1
7	5	6	3	4	4	3	4	4	15	2	3
8	6	5	3	4	3	4	3	4	20	2	4
9	6	5	4	3	4	3	4	3	20	6	4
10	6	4	2	4	2	4	2	4	20	6	4
11	5	4	4	2	4	2	4	2	20	6	4
12	5	4	4	2	4	2	4	2	15	2	3
13	5	4	3	4	3	4	3	4	15	2	3
14	6	6	2	3	2	3	2	3	25	3	2
15	6	6	3	4	5	3	4	5	15	3	2
16	5	6	4	3	5	4	3	5	15	3	2
17	5	6	1	5	1	5	1	5	20	3	3
18	5	4	5	3	1	5	3	1	17	2	3
19	5	4	3	4	3	4	3	4	17	3	3
20	6	6	3	3	5	3	3	5	20	3	2
21	5	5	3	4	2	3	4	2	21	2	4
22	5	5	4	4	4	4	4	3	17	2	3
23	5	6	2	4	2	4	2	4	20	2	3
24	5	6	3	2	3	2	3	2	19	3	2
25	5	6	6	6	4	6	6	4	17	2	1
26	4	6	3	4	3	4	3	4	17	2	1
27	4	6	3	5	3	5	3	5	20	2	4
28	4	7	5	6	5	6	5	6	17	2	3
29	4	7	6	5	6	5	6	5	17	2	3
30	6	5	1	8	1	8	1	8	15	4	5

2.3. Управление запасами в процессе бесконечной длительности

Цель практического занятия

Получить теоретические знания и элементарные навыки формулирования прикладных задач управления запасами в бесконечношаговом процессе, их решения, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

2.3.1. Теоретические положения

Постановка задачи и описание метода решения. При рассмотрении конечношагового процесса управления запасами проблема минимизации затрат на производство и хранение продукции для удовлетворения спроса сводилась к системе рекуррентных соотношений:

$$F_k(Y) = \min[C_k(X_k, Y + X_k - S_k) + F_{k-1}(Y + X_k - S_k)],\ k = 2 \dots N, \quad (2.10)$$

где область минимизации определяется условиями

$$0 \le X_k \le R_k,\ 0 \le Y + X_k - S_k \le T_k. \quad (2.11)$$

При спросе и других характеристиках задачи (емкость склада, максимальный объем производства, стоимостные оценки), неизменных во времени или меняющихся по некоторому закону, и больших N процесс явно становится стационарным и оптимальная политика независимой от N.

Если обозначить через $F(Y)$ величину интегрального дисконтированного эффекта (ИДЭ) при начальном запасе Y и использовании оптимальной политики, то возникает функциональное уравнение

$$F(Y) = \min[C(X, Y + X - S) + \alpha F(Y + X - S)], \quad (2.12)$$

где α – коэффициент дисконтирования, а область минимизации определяется условиями $0 \le X \le R,\ 0 \le Y + X - S \le T.$

Поставленную задачу при дискретных спросе и объемах складирования и производства можно интерпретировать как систему переходов между состояниями (уровнями запаса).

Если обозначить Y через i, $F(Y)$ – через $F(i)$, $Y + X - S$ – через j и $C(X, Y + X - S)$ – через C_{ij}, то C_{ij} можно понимать как затраты на переход из состояния i в состояние j и уравнение (2.12) переписать в виде

$$F(i) = \min_j[C_{ij} + F(j)],\quad i = 0, 1, \dots, T. \quad (2.13)$$

Естественно ожидать, что по прошествии некоторого времени значения очередных затрат стабилизируются на каком-то среднем уровне. Поэтому обозначим: C – средние затраты (СЭ); F_k – составляющие затрат, определяемые начальным состоянием (запасом).

С учетом

$$\text{СЭ} = \lim_{\alpha \to 1}(1 - \alpha)\ \text{ИДЭ}(\alpha)$$

примем

$$F(i) = F_i + C / (1 - \alpha). \tag{2.14}$$

При $\alpha \to 1$ уравнения (2.13) примут вид

$$F_i + C = \min_j [C_{ij} + F(j)],\ i = 0, 1, ..., T.$$

Решение этих уравнений осуществляется «приближением в поведениях».

Пример решения задачи. Рассмотрим пример, аналогичный представленному в предшествующей лабораторной работе:

$$C(X, Y) = \left| \begin{array}{ll} A + BX & ; X > 0 \\ 0 & ; X = 0 \end{array} \right. + HY\ , \qquad A = 13, B = 2, H = 1.$$

Максимальный объем производства $R = 5$, емкость склада $T = 4$, спрос $S = 3$, $N = 6$.

Здесь систему управления запасами можно интерпретировать как систему с пятью состояниями ($i \equiv Y = 0, 1, 2, 3, 4$).

Для удобства последующей работы рассчитаем таблицу значений C_{ij}($j = i + X - 3$), где учитываются затраты на производство, равные $13 + 2X$ при $X > 0$ и равные 0 при $X = 0$, а затраты на хранение – равны $1 \cdot j$ (при этом X не превышает 5).

$C_{ij} =$

i / j	0	1	2	3	4
0	19 + 0	21 + 1	23 + 2		
1	17 + 0	19 + 1	21 + 2	23 + 3	
2	15 + 0	17 + 1	19 + 2	21 + 3	23 + 4
3	0 + 0	15 + 1	17 + 2	19 + 3	21 + 4
4		0 + 1	15 + 2	17 + 3	19 + 4

Берем за начальное поведение политику производства, обеспечивающую минимальный объем выпуска, достаточный для покрытия спроса.

Тогда для $i = 0$ берем $X = 3$, для $i = 1$ берем $X = 2$, для $i = 2$ берем $X = 1$, для $i = 3$ и $i = 4$ берем $X = 0$; начальное поведение определяется системой переходов

$$(\mathbf{0 \to 0}), (\mathbf{1 \to 0}), (\mathbf{2 \to 0}), (\mathbf{3 \to 0}), (\mathbf{4 \to 1}).$$

Для этого поведения возникает система 5 уравнений с 6 неизвестными, которую решаем с точностью до константы (при выборе, например, F_0, равном какой-то константе, другие F_i определятся с точностью до константы, тогда как значение C не зависит от этого выбора):

$$\begin{array}{l|ll} F_0 + C = 19 + F_0 & F_0 = 0, & C = 19, \\ F_1 + C = 17 + F_0 & F_1 = -2, & \\ F_2 + C = 15 + F_0 & F_2 = -4, & \\ F_3 + C = 0 + F_0 & F_3 = -19, & \\ F_4 + C = 1 + F_1 & F_4 = -20. & \end{array}$$

Обнаружив, что выбранная политика обеспечивает средние затраты, равные 19, попытаемся найти улучшенное поведение:

$i = 0$: $\min[C_{0j} + F_j] = \min[19 + 0,\ 22 - 2,\ 25 - 4,\ -,\ -]$ при $j = 0$;
$i = 1$: $\min[C_{1j} + F_j] = \min[17 + 0,\ 20 - 2,\ 23 - 4,\ 26 - 19,\ -]$ при $j = 3$;
$i = 2$: $\min[C_{2j} + F_j] = \min[15 + 0,\ 18 - 2,\ 21 - 4,\ 24 - 19,\ 27 - 20]$ при $j = 3$;
$i = 3$: $\min[C_{3j} + F_j] = \min[0 + 0,\ 16 - 2,\ 19 - 4,\ 22 - 19,\ 5 - 20]$ при $j = 0$;
$i = 4$: $\min[C_{4j} + F_j] = \min[-,\ 1 - 2,\ 17 - 4,\ 20 - 19,\ 23 - 20]$ при $j = 1$.

Найденное улучшенное поведение определяет систему переходов:

$$(\mathbf{0 \to 0}), (\mathbf{1 \to 3}), (\mathbf{2 \to 3}), (\mathbf{3 \to 0}), (\mathbf{4 \to 1}).$$

Строим и решаем соответствующую систему уравнений:

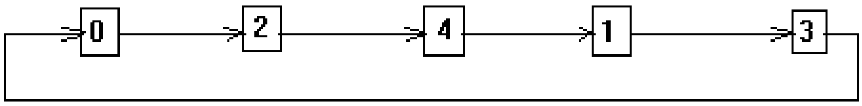
$$\begin{array}{l|ll} F_0 + C = 19 + F_0 & F_0 = 0, & C = 19, \\ F_1 + C = 26 + F_3 & F_1 = -12, & \\ F_2 + C = 24 + F_3 & F_2 = -14, & \\ F_3 + C = 0 + F_0 & F_3 = -19, & \\ F_4 + C = 1 + F_1 & F_4 = -30. & \end{array}$$

Видим, что и эта выбранная политика обеспечит средние затраты, равные 19.

Аналогичные попытки улучшения дают поведения:

(0 → 1), (1 → 3), (2 → 3), (3 → 4), (4 → 1), *C* = 17,3;
(0 → 2), (1 → 2), (2 → 4), (3 → 0), (4 → 1), *C* = 17;
(0 → 2), (1 → 3), (2 → 3), (3 → 0), (4 → 1), *C* = 16,3;
(0 → 1), (1 → 3), (2 → 4), (3 → 0), (4 → 1), *C* = 16;
(0 → 2), (1 → 3), (2 → 4), (3 → 0), (4 → 1), *C* = 15,8;
(0 → 2), (1 → 3), (2 → 4), (3 → 0), (4 → 1).

Поскольку два очередных приближения в поведениях совпали, можно утверждать, что оптимальная политика переходов между состояниями имеет вид



и оптимальный производственный цикл определяется последовательностью объемов производства [5 – 5 – 0 – 5 – 0]. Найденная политика может быть принята за отправную при скользящем планировании.

2.3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Объясните правомерность замены процесса большой длительности бесконечношаговым процессом.
2. Поясните эффективность замены процесса большой длительности бесконечношаговым процессом.
3. Можно ли в бесконечношаговом процессе пользоваться критериями эффективности, обычными для конечношаговых процессов (минимум суммарных затрат, максимальная прибыль, максимальный объем добычи и т. п.)?
4. В чем смысл интегрального дисконтированного эффекта?
5. Понятие функционального уравнения.
6. Методы решения функциональных уравнений.
7. Приближение в поведениях – что это такое?
8. Почему начальное поведение выбирается по минимальному приемлемому объему производства?

2.3.3. Контрольные задания для практических занятий

Требования:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи и подходом к ее решению.
2. Выберите вариант контрольного задания и выполните его.
3. Оцените полученное решение с позиций здравого смысла.
4. Постройте функциональные уравнения и оцените соответствующие упрощения (усложнения) для следующих видоизменений задачи:

– к следующему периоду (сезону) объем сохраняемой на складе продукции уменьшается на P %;

– функция затрат на производство X и сохранение Z единиц продукции линейная: $C_k(X, Z) = C_kX + H_kZ$.

Варианты заданий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

№	*R*	*T*	*S*	*A*	*B*	*H*	№	*R*	*T*	*S*	*A*	*B*	*H*
1	5	4	3	13	2	3	**2**	5	4	3	17	2	3
3	5	4	3	13	3	2	**4**	5	4	3	17	3	2
5	6	5	4	15	2	3	**6**	6	5	3	15	2	3
7	6	5	4	15	3	2	**8**	6	5	3	15	3	2
9	5	5	4	15	2	3	**10**	5	5	4	19	2	4
11	5	5	4	15	3	2	**12**	5	5	4	19	4	2
13	4	4	3	13	3	2	**14**	6	4	5	13	3	2
15	4	4	3	15	2	3	**16**	4	6	5	15	2	3
17	8	5	4	20	2	4	**18**	3	7	2	13	3	2
19	8	5	4	20	4	2	**20**	3	7	2	15	2	3
21	7	5	4	20	2	4	**22**	5	4	4	15	2	3
23	7	5	4	20	4	4	**24**	5	4	4	20	4	4
25	7	5	4	20	3	2	**26**	5	4	4	20	3	2
27	4	6	4	27	4	6	**28**	4	6	4	28	4	6
29	4	6	4	27	4	3	**30**	4	6	4	30	4	2
31	6	4	5	20	4	2	**32**	3	7	2	28	4	6
33	4	6	5	20	2	4	**34**	3	7	2	30	4	2
35	3	7	2	20	4	4	**36**	10	5	4	20	4	2
37	3	7	2	20	3	2	**38**	10	5	4	20	2	4
39	4	6	4	30	4	4	**40**	4	6	4	20	4	4
41	4	6	4	30	3	6	**42**	4	6	4	20	3	2
43	7	5	5	28	4	6	**44**	10	5	4	28	4	6
45	7	5	5	30	4	2	**46**	10	5	4	30	4	2
47	6	4	4	20	2	1	**48**	6	5	5	28	4	6
49	6	4	4	20	2	7	**50**	6	5	5	30	4	2

2.4. Стохастические процессы принятия решений. Задача дихотомического выбора

Цель практического занятия

Получить теоретические знания и элементарные навыки формулирования прикладных задач дихотомического выбора, их решения, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

2.4.1. Теоретические положения

Постановка задачи и описание метода решения. Как правило, при изучении реальных процессов мы не испытываем 100%-ной уверенности в точности используемых оценок спроса, дохода, затрат и т. п. Обычно значения подобных параметров оптимизационной задачи являются функциями от многих факторов, которые невозможно или затруднительно учесть в математической модели, и с позиций решающего задачу выступают в роли случайных величин, для которых известны лишь параметры соответствующего распределения вероятностей или другие вероятностные оценки.

Естественно, что в таких условиях мы не можем говорить о точных значениях прибыли, затрат и т. п., а говорим лишь об ожидаемых значениях этих величин или о вероятностях того, что указанные величины принимают значения в некотором заданном диапазоне.

Более того, если в случае детерминированного процесса обнаруживается одна или несколько оптимальных стратегий, представляющих вполне определенную последовательность управляющих воздействий (такие стратегии называют чистыми), то для стохастического процесса оптимальная стратегия часто представляет совокупность таких воздействий, смешанных в некоторых пропорциях (соответственно такие стратегии и называют смешанными).

Рассмотрим в качестве примера многошагового стохастического процесса принятия решений известную задачу ***дихотомического выбора (задачу о золотодобыче)***.

Пусть имеются два прииска A и B с запасами золота соответственно X и Y, но лишь единственная добывающая машина, которую приходится перебрасывать с одного прииска на другой. При работе на прииске A машина в течение сезона с вероятностью P_1 добывает долю R_1 имеющегося запаса и с вероятностью $(1 - P_1)$ ломается навсегда. При работе на прииске B значения вероятностей и доли добычи равны соответственно P_2, R_2, $(1 - P_2)$.

Требуется найти оптимальную перестановку машины между приисками, которая максимизирует *ожидаемый объем* добычи за N сезонов.

Обозначим через $F_k(X, Y)$ максимум математического ожидания суммарного объема добычи за k сезонов при начальных запасах X и Y. Так как есть лишь два выбора при установке машины в очередном сезоне, то

$$F_k(X, Y) = \max \left| \begin{array}{l} A\text{: } P_1\{R_1X + F_{k-1}((1 - R_1)X, Y)\} \\ B\text{: } P_2\{R_2Y + F_{k-1}(X, (1 - R_2)Y)\} \end{array} \right. \qquad (2.15)$$

$$F_1(X, Y) = \max \left| \begin{array}{l} A\text{: } P_1R_1X \\ B\text{: } P_2R_2Y \end{array} \right. \qquad (2.16)$$

Решение полученных рекуррентных соотношений обычным численным методом осложняется двухмерностью искомых функций. На помощь приходит факт, что эти функции обладают свойством однородности $F(rX, rY) = rF(X, Y)$, откуда можно сделать вывод, что оптимальная политика для точки (X, Y) остается оптимальной для всех точек луча из (0, 0), проходящего через указанную точку. Следовательно, оптимальная политика определяется соотношением между X и Y.

Если учесть, что при $X >> Y$ оптимальным первым выбором является выбор A, а при $Y >> X$ – выбор B, то легко видеть, что совокупность всех допустимых точек (X, Y) (положительный квадрант плоскости) разбивается на две области оптимального первого выбора (рис. 6).

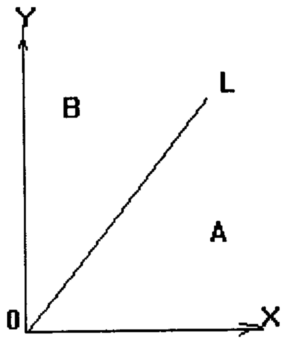


Рис. 6

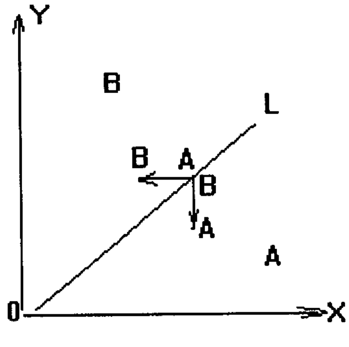


Рис. 7

Возникает вопрос об отыскании граничной линии L, где оба выбора равноценны. При $k = 1$ она определяется элементарным равенством:

$$P_1R_1X = P_2R_2Y. \qquad (2.17)$$

При $k > 1$ воспользуемся следующими соображениями. Если в точке (X, Y) линии L использовать выбор A, то последующее состояние определяется точкой $((1 - R_1)X, Y)$, которая лежит в области первого выбора B. При использовании в точке (X, Y) линии L первого выбора B возникает состояние, определяемое точкой $(X, (1 - R_2)Y)$, для которой заведомо оптимален первый выбор A.

Следовательно, для точек граничной линии равноценны выборы «*AB + оптимальное продолжение*» и «*BA + оптимальное продолжение*» (рис. 7).

Для этих последовательностей выборов находим представления:

$$(AB +)\ F_k(X, Y) = P_1[R_1X + F_{k-1}((1 - R_1)X, Y)] =$$
$$= P_1[R_1X + P_2[R_2Y + F_{k-2}((1 - R_1)X, (1 - R_2)Y)]] =$$
$$= P_1R_1X + P_1P_2R_2Y + P_1P_2F_{k-2}((1 - R_1)X, (1 - R_2)Y),$$
$$(BA +)\ F_k(X, Y) = P_2[R_2Y + F_{k-1}(X, (1 - R_2)Y)] =$$
$$= P_2[R_2Y + P_1[R_1X + F_{k-2}((1 - R_1)X, (1 - R_2)Y)]] =$$
$$= P_2R_2Y + P_2P_1R_1X + P_2P_1F_{k-2}((1 - R_1)X, (1 - R_2)Y).$$

Сравнивая оба выражения, получаем искомое уравнение граничной линии при $k > 1$:

$$P_1R_1X + P_1P_2R_2Y = P_2R_2Y + P_2P_1R_1X$$

или в более изящной форме:

$$\frac{P_1R_1}{1-P_1}X = \frac{P_2R_2}{1-P_2}Y. \qquad (2.18)$$

Отсюда возникает простой путь решения. На первом шаге проверяем исходное состояние (точку) на положение относительно граничной линии (2.18) и запоминаем соответствующий выбор. Отыскиваем координаты очередной точки в соответствии со сделанным выбором и проводим аналогичные действия. На последнем шаге (в оставшемся одношаговом процессе) суждение о выборе определяется линией (2.17).

Пример решения задачи. Пусть $N = 5$, $X = 10$, $Y = 20$, $P_1 = 1 / 3$, $P_2 = 1 / 2$, $R_1 = 3 / 4$, $R_2 = 2 / 3$.

Уравнение (2.18) граничной линии при $k > 1$ имеет вид $Y = (9 / 16)X$.

Точка (10, 20) лежит выше граничной линии, что отвечает выбору *B*. Этот выбор порождает точку (10, (1 – 2 / 3) · 20), т. е. (10, 20 / 3), принадлежащую области *B*. Этот выбор, в свою очередь, порождает точку (10, 20 / 9), принадлежащую области *A*. Выбор *A* порождает точку (10 / 4, 20 / 9), лежащую в области *B*.

В итоге проделанных четырех выборов к последнему шагу возникает точка (10, 20 / 27), для которой

$$Y = \frac{9}{16}X,$$

что соответствует выбору *A*.

Таким образом, оптимальная последовательность выборов имеет вид $\{B\ B\ A\ B\ A\}$. Что касается значения $F_5(10, 20)$, то его можно найти обратным ходом по ранее найденным состояниям:

A: $F_1(10 / 4, 20 / 27) = 0{,}625$;

B: $F_2(10 / 4, 20 / 9) = 1 / 2 \cdot [2 / 3 \cdot 20 / 9 + F_1(10 / 4, 20 / 27)] = 1{,}05$;

A: $F_3(10, 20 / 9) = 1 / 3 \cdot [3 / 4 \cdot 10 + F_2(10 / 4, 20 / 9)] = 2{,}85$;

B: $F_4(10, 20 / 3) = 1 / 2 \cdot [2 / 3 \cdot 20 / 3 + F_3(10, 20 / 9)] = 3{,}65$;

B: $F_5(10, 20) = 1 / 2 \cdot [2 / 3 \cdot 20 + F_4(10, 20 / 3)] = 8{,}49$.

В случае бесконечношагового процесса соответствующее функциональное уравнение имеет вид

$$F(X, Y) = \max \left| \begin{array}{l} A\colon P_1\{R_1X + F((1 - R_1)X, Y)\} \\ B\colon P_2\{R_2Y + F(X, (1 - R_2)Y)\} \end{array} \right. \qquad (2.19)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что области A и B первого выбора разделяются линией (2.18), и тем самым с легкостью делать очередной выбор по заданному соотношению запасов.

К сожалению, малейшее усложнение задачи многократно увеличивает трудоемкость решения [1].

2.4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что является признаком стохастического процесса?

2. Как бы вы поступили в случае добычи до тех пор, когда она станет нерентабельной?

3. Усложнится ли решение задачи для трех приисков? При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

2.4.3. Контрольные задания для практических занятий

Требования:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи и подходом к ее решению методом рекуррентных соотношений.

2. Выберите вариант контрольного задания и выполните его.

3. Оцените полученное оптимальное решение с позиций здравого смысла.

4. Как изменится математическая постановка задачи, если допустить, что машина выходит из строя не навсегда, а допускает ремонт к следующему сезону?

5. Как вы подойдете к решению рассмотренной задачи в случае процесса бесконечной длительности?

Варианты заданий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

№	*X*	*Y*	*P*1	*P*2	*R*1	*R*2	*N*	№	*X*	*Y*	*P*1	*P*2	*R*1	*R*2	*N*
1	40	70	0,6	0,7	0,3	0,1	7	**2**	50	70	0,6	0,7	0,3	0,3	7
3	10	15	0,7	0,6	0,2	0,4	7	**4**	15	15	0,7	0,6	0,3	0,4	7
5	55	33	0,2	0,6	0,8	0,4	7	**6**	45	33	0,2	0,6	0,8	0,5	7
7	80	20	0,3	0,9	0,7	0,5	7	**8**	60	80	0,3	0,8	0,7	0,5	7
9	20	25	0,5	0,7	0,7	0,5	7	**10**	20	25	0,5	0,7	0,7	0,5	7
11	65	50	0,1	0,4	0,7	0,3	7	**12**	65	50	0,1	0,4	0,7	0,3	7
13	100	75	0,7	0,9	0,6	0,5	7	**14**	100	75	0,7	0,8	0,6	0,5	7
15	55	20	0,3	0,5	0,6	0,3	7	**16**	50	20	0,2	0,5	0,6	0,3	7
17	15	50	0,1	0,3	0,6	0,5	7	**18**	15	40	0,2	0,3	0,6	0,5	7
19	45	70	0,8	0,9	0,5	0,4	7	**20**	60	70	0,8	0,9	0,5	0,4	7
21	120	100	0,4	0,3	0,5	0,7	7	**22**	120	90	0,4	0,3	0,5	0,7	7
23	33	40	0,9	0,7	0,5	0,7	7	**24**	50	40	0,9	0,7	0,5	0,7	7
25	20	15	0,5	0,6	0,3	0,2	7	**26**	30	15	0,5	0,3	0,3	0,8	7
27	90	50	0,5	0,6	0,4	0,4	7	**28**	90	60	0,5	0,7	0,4	0,4	7
29	150	200	0,6	0,5	0,7	0,9	7	**30**	150	200	0,6	0,5	0,7	0,8	7
31	100	100	0,4	0,3	0,5	0,7	7	**32**	50	100	0,3	0,3	0,5	0,7	6
33	60	40	0,9	0,7	0,5	0,7	7	**34**	75	40	0,8	0,7	0,5	0,7	6
35	20	25	0,5	0,6	0,3	0,2	7	**36**	25	25	0,5	0,6	0,3	0,2	6
37	80	50	0,5	0,6	0,5	0,4	7	**38**	60	50	0,5	0,6	0,5	0,4	6
39	50	200	0,6	0,5	0,6	0,9	7	**40**	75	100	0,6	0,5	0,6	0,8	6
41	60	50	0,4	0,3	0,5	0,7	6	**42**	50	100	0,4	0,4	0,5	0,7	6
43	35	40	0,8	0,7	0,5	0,7	6	**44**	75	40	0,9	0,7	0,5	0,7	6
45	20	45	0,5	0,8	0,3	0,2	6	**46**	25	25	0,5	0,8	0,3	0,2	6
47	80	50	0,6	0,6	0,4	0,4	6	**48**	60	50	0,4	0,5	0,5	0,4	6
49	150	100	0,6	0,5	0,7	0,5	6	**50**	75	100	0,5	0,4	0,6	0,8	6

2.5. Марковские процессы принятия решений

Цель практического занятия

Получить теоретические знания и элементарные навыки формулирования прикладных задач в терминах марковского процесса принятия решений, их решения, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

2.5.1. Теоретические положения

Постановка задачи и описание метода решения. Пусть некоторая система (сбыт, потребление, здоровье, плодородие, комнатная температура и проч.) в любой фиксированный момент t может находиться в одном из n состояний и имеет шанс перейти из этого состояния в какое-либо другое. Если вероятность $P_t(i, j)$ перехода в момент t из i-го состояния в j-е не зависит от предыстории системы, такая система называется *марковской*.

Если вероятности перехода не зависят от времени, марковская система обладает свойством *стационарности*, т. е. функция $X_t(j)$ вероятности нахождения системы в момент t в j-м состоянии при $t\to\infty$ асимптотически сходится к функции $X(j)$, удовлетворяющей уравнениям

$$X(j) = \sum_{i=1}^{m} P(i, j)\, X(i), \qquad j = 1, ..., n.$$

Это позволяет предсказать вероятность того или иного состояния на дальнюю перспективу без каких-то трудоемких вычислений.

Предположим, что вероятности перехода зависят от некоторой политики (выбора) q и переход сопровождается получением некоторого благоприятного эффекта $R_{ij}(q)$.

Обозначим через $F_k(i)$ ожидаемый эффект функционирования системы, находившейся в начальный момент в i-м состоянии, за k периодов при использовании оптимальной политики. Руководствуясь принципом оптимальности, требующим независимо от начального состояния i и от начального выбора q далее действовать оптимально, т. е. гарантировать максимум ожидаемого эффекта в последующем процессе, приходим к рекуррентным соотношениям вида

$$F_k(i) = \max_{q} \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(q)[\, R_{ij}(q) + F_{k-1}(j)\,], \; i = 1, ..., n, \; k \ge 1; \qquad (2.20)$$

$$F_0(i) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Для процессов большой длительности использование (2.20) требует существенных затрат времени даже при машинной реализации процесса вычислений. Если учесть, что при независимости значений вероятностей и эффектов от времени процесс обладает свойством *стационарности*, то в предположении *регулярности* (возможности прямого или опосредствованного перехода из любого состояния в любое) полагаем для больших k

$$F_k(i) = F_i + kG, \tag{2.21}$$

где G – средний эффект за период; F_i – составляющая суммарного эффекта, определяемая начальным состоянием.

Подставляя (2.21) в (2.20) с учетом $\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(q) = 1$, получаем систему функциональных уравнений:

$$F_i + G = \max_q \sum_{j=1}^{n} P_{i\,j}(q)\,[\,R_{i\,j}(q) + F_j\,], \; i = 1, ..., n, \tag{2.22}$$

которую можно решать приближением в поведениях. Приведенную систему можно получить, если записать уравнение для бесконечношагового процесса с учетом дисконтирования, положить величину дисконтированного эффекта равной $F_i + G / (1 - \alpha)$ и принять $\alpha = 1$.

Для иллюстрации марковского процесса принятия решений рассмотрим ***«задачу о такси»*** [1].

Таксист обслуживает окрестности трех городов и может руководствоваться одним из трех выборов: ездить по городу в поисках случайного пассажира, ждать вызова по радио или поехать на стоянку и стать там в очередь. Для каждого города (i) и каждого выбора (q) известны вероятности поездки в тот или иной город и соответствующие доходы, сведенные в таблицу:

Город	Выбор	Вероятности перехода			Значения дохода		
i	q	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	1	1 / 2	1 / 4	1 / 4	10	4	8
	2	1 / 16	3 / 4	3 / 16	8	2	4
	3	1 / 4	1 / 8	5 / 8	4	6	4
2	1	1 / 2	0	1 / 2	14	0	18
	2	1 / 16	7 / 8	1 / 16	8	16	8
3	1	1 / 4	1 / 2	1 / 4	10	2	8
	2	1 / 8	3 / 4	1 / 8	6	4	2
	3	3 / 4	1 / 16	3 / 16	4	0	8

Возьмем за начальное поведение $q_0 = (1, 1, 1)$, т. е. во всех городах будем придерживаться первого выбора. Для выбранного поведения строим систему n уравнений с $n + 1$ неизвестными:

$$F_i + G = \max_q \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(q)[R_{ij}(q) + F_j], \ i = 1, ..., n,$$

разрешимую с точностью до константы. Для нашего примера:

$$F_1 + G = 1/2[10 + F_1] + 1/4[4 + F_2] + 1/4[8 + F_3];$$
$$F_2 + G = 1/2[14 + F_1] + \qquad\qquad + 1/2[18 + F_3];$$
$$F_3 + G = 1/4[10 + F_1] + 1/2[2 + F_2] + 1/4[8 + F_3].$$

Полагая, например, $F_3 = 0$, получаем $F_1 = 4 / 3$, $F_2 = 7{,}47$ и $G = 9{,}2$, т. е. выбранная политика дает средний доход за одну поездку, равный 9,2.

Вычисляем

$$T_i(q) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(q)[R_{ij}(q) + F_j]$$

при всех i и q и найденных значениях F_i:

$$T_1(1) = 1/2[10 + 4/3] + 1/4[4 + 7{,}47] + 1/4[8 + 0];$$
$$T_1(2) = 1/16[8 + 4/3] + 3/4[2 + 7{,}47] + 3/16[8 + 0];$$
$$T_1(3) = 1/4[4 + 4/3] + 1/8[6 + 7{,}47] + 5/8[4 + 0];$$
$$T_2(1) = 1/2[14 + 4/3] + \qquad\qquad + 1/2[18 + 0];$$
$$T_2(2) = 1/16[8 + 4/3] + 7/8[16 + 7{,}47] + 1/16[8 + 0];$$
$$T_3(1) = 1/4[10 + 4/3] + 1/2[2 + 7{,}47] + 1/4[8 + 0];$$
$$T_3(2) = 1/8[6 + 4/3] + 3/4[4 + 7{,}47] + 1/8[2 + 0];$$
$$T_3(3) = 3/4[4 + 4/3] + 1/16[0 + 7{,}47] + 3/16[8 + 0].$$

Выбирая максимальное из значений $T_i(q)$ по q, получаем улучшенное поведение $q = (1, 2, 2)$. Строим и решаем систему уравнений:

$$F_1 + G = 1/2[10 + F_1] + 1/4[4 + F_2] + 1/4[8 + F_3];$$
$$F_2 + G = 1/16[8 + F_1] + 7/8[16 + F_2] + 1/16[8 + F_3];$$
$$F_3 + G = 1/8[6 + F_1] + 3/4[4 + F_2] + 1/8[2 + F_3],$$

получая $F_3 = 0$, $F_2 = –3{,}88$, $F_1 = 12{,}85$, $G = 13{,}15$.

Попытка дальнейшего улучшения дает политику $q = (2, 2, 2)$, для которой $F_3 = 0$, $F_2 = –1{,}18$, $F_1 = 12{,}86$, $G = 13{,}34$. Очередная попытка улучшения приводит к той же политике, откуда напрашивается вывод о том, что оптимальная политика состоит в использовании второго выбора во всех городах и обеспечивает средний ожидаемый доход за одну поездку, равный 13,34.

2.5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Характерный признак марковских процессов?

2. Что общего между марковскими процессами и принципом оптимальности?

3. Является ли марковский процесс стохастическим?

4. Кто был Марков, давший свое имя такому процессу?

5. Что вы понимаете под стационарным процессом?

2.5.3. Контрольные задания для практических занятий

Требования:

1. Выберите вариант контрольного задания и выполните его решение в предположении процесса большой длительности.

2. Оцените полученное оптимальное решение с позиций здравого смысла.

3. Как вы будете решать задачу, если процесс не является длительным?

4. Как получить систему функциональных уравнений (2.22) на основе интегрального дисконтированного эффекта? Можете сравнить с соответствующим выводом для задачи управления запасами в бесконечном процессе.

5. Приведите какой-нибудь жизненный пример марковского процесса.

Варианты заданий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

1. Станок может находиться в одном из трех состояний: хорошем (1), удовлетворительном (2) или плохом (3) – и обеспечивать доход от выпуска продукции равный 250, 150 или 50 д. е. (денежных единиц). Имеется возможность использовать обычный и капитальный ремонт или замену на новый станок. Соответствующие расходы равны:

Состояние	Обычный ремонт	Капитальный ремонт	Замена
1	10	15	30
2	50	60	100
3	150	180	200

Переходные вероятности при различных ремонтах равны:

Состояние	Обычный ремонт			Капитальный ремонт		
	1	2	3	1	2	3
1	0,8	0,2	-	0,9	0,1	-
2	0,1	0,5	0,4	0,5	0,4	0,1
3	-	0,1	0,9	-	0,7	0,3

Вероятность того, что новый станок будет находиться в соответствующем состоянии, равна 0,8, 0,15 и 0,05.

Определить оптимальную политику ремонта или замены, обеспечивающую максимальный суммарный доход.

2. Решить задачу 1 в предположении, что вероятности перехода в соответствующее состояние для нового станка равны 0,5; 0,l и 0,2.

3. Решить задачу 1 в предположении, что затраты на замену станка не зависят от его состояния и равны 100 д. е.

4. Решить задачу 1 в предположении, что затраты на замену станка не зависят от его состояния и равны 150 д. е.

5. Магазин электротоваров с целью немедленного удовлетворения спроса может ежедневно делать заказ на поставку холодильников. Каждый заказ приводит к затратам в 100 руб. Хранение одного холодильника в течение суток обходится в 5 руб. Потери магазина при неудовлетворенном спросе оцениваются в 150 руб. за каждый холодильник. Вероятности спроса, равного 0, 1 и 2 холодильникам, равны 0,2, 0,5 и 0,3 соответственно. Внутренние площади магазина не позволяют разместить более двух холодильников.

Найдите затраты на поставку и хранение при различных политиках заказа и политику, обеспечивающую минимум затрат.

6. Найдите решение задачи 5 при вероятностях спроса (равного 0, 1 и 2 холодильникам) 0,2, 0,3 и 0,5.

7. Найдите решение задачи 5 при условии, что затраты на поставку зависят от ее объема и равны соответственно 0, 100 и 200.

8. Фирма рекламирует свою продукцию с помощью радио, телевидения и газеты. Недельные затраты на рекламу оцениваются соответственно в 200, 900 и 300 руб.

Фирма оценивает недельный объем сбыта как удовлетворительный (1), хороший (2) или отличный (3).

Переходные вероятности между различными состояниями сбыта при различных способах рекламы равны:

Состояние	РАДИО			ТЕЛЕВИДЕНИЕ			ГАЗЕТА		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1	0,7	0,2	0,1	0,2	0,5	0,3
2	0,1	0,7	0,2	0,3	0,6	0,1	-	0,7	0,3
3	0,1	0,3	0,6	0,1	0,2	0,7	-	0,2	0,8

Соответствующие недельные доходы равны:

Состояние	РАДИО			ТЕЛЕВИДЕНИЕ			ГАЗЕТА		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	400	520	600	1000	1300	1600	400	530	710
2	300	400	700	800	1000	1000	350	450	800
3	200	250	500	600	700	1100	250	400	650

Покажите, что поиск способа рекламы, максимизирующего ожидаемый суммарный доход за определенный срок или средний недельный доход в случае процесса большой длительности, можно реализовать с помощью исследования марковского процесса принятия решений.

9. Состояние участка земли по ряду показателей может определяться уровнями 1, 2 или 3. При посеве хлопчатника ожидаемые доходы равны соответственно 1000, 300 и 50 д. е. При посеве свеклы – 450, 250 и 100.

Переходные вероятности между уровнями в зависимости от посеянной культуры равны:

Уровень	Хлопчатник			Свекла		
	1	2	3	1	2	3
1	0,1	0,3	0,6	0,5	0,4	0,1
2	-	0,1	0,9	0,6	0,3	0,1
3	-	-	1	0,8	0,2	-

10. Коммерческий директор фирмы должен принять решение о рекламе в местной газете (краткой или подробной). Недельные объемы продажи он определяет как высокие (1), средние (2) и низкие (3).

Вероятности перехода между этими уровнями в зависимости от вида рекламы равны:

Объем	Краткая			Подробная		
	1	2	3	1	2	3
1	0,2	0,5	0,3	0,6	0,3	0,1
2	-	0,6	0,4	0,4	0,5	0,1
3	-	0,3	0,7	0,2	0,7	0,1

Краткая реклама стоит 100 руб., подробная – 300 руб.

Недельная прибыль (без учета затрат на рекламу) при соответствующих объемах продажи равна 1200, 1000 и 800 руб.

11. Некто озабочен состоянием своего здоровья, которое он оценивает тремя состояниями: хорошим (1), удовлетворительным (2) или плохим (3). Находясь в соответствующем состоянии, он может заработать за день 60, 30 или 10 у. е. (адрес фирмы, дающей такой заработок, нам неизвестен).

В результате скрупулезного изучения медицинских справочников он выбрал три препарата A, B и C, стоимость которых составляет 50, 20 и 5 у. е.

Опытным путем обнаружены вероятности перехода в то или иное состояние при потреблении дозы соответствующего препарата:

Состояние	A			B			C		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,8	0,1	0,05	0,7	0,2	0,1	0,6	0,2	0,2
2	0,5	0,4	0,1	0,5	0,3	0,2	0,2	0,4	0,4
3	0,3	0,3	0,4	0,2	0,2	0,6	-	0,4	0,6

Помогите человеку в выборе медицинского препарата для создания рабочего состояния (другие стимуляторы здоровья временно не рассматривать).

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Цель практического занятия

Получить наглядное представление о сути применения экономико-математических методов и моделей в процессе подготовки и принятия управленческих решений в экономических системах. Овладеть навыками решения прикладных задач выбора решения в условиях неопределенности.

Содержание занятия

3.1. Теоретические положения

Теория статистических решений может быть истолкована как теория поиска оптимального поведения в условиях неопределенности (неполноты / неточности информации). Поведение может быть детерминированным или недерминированным (предлагающим использовать те или иные возможные выборы с некоторыми вероятностями). Следствием неопределенности, как известно, является риск. Современная концепция статистического решения считает поведение оптимальным, если оно минимизирует риск в последовательных экспериментах, т. е. математическое ожидание убытков статистического эксперимента. В такой постановке любая задача статистических решений может рассматриваться как игра двух лиц, в которой одним из игроков является «природа».

Выбор наилучших решений в условиях неполной информации – одно из основных занятий людей. Например, собираясь в туристический поход, мы укладываем вещи в рюкзак с учетом неизвестной (непредсказуемой) погоды и преследуем цель получить максимум удовольствий, не превратившись в рекордсмена по переноске тяжестей.

Одним из наиболее распространенных видов управленческой деятельности также является принятие решений в условиях неполной или неточной информации, что сопряжено с неизбежным риском (убытками) в случае принятия ошибочного решения.

При принятии решений в условиях неполной информации следует различать *ситуацию риска* и *ситуацию неопределенности*. Собственно разница между риском и неопределенностью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определенных событий.

Риск присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях / о подобных изучаемых ситуациях / проч.).

Неопределенность существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т. к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

Задача выбора решения в условиях неопределенности сводится к следующему. Пусть задан некоторый вектор $S = (S_1, S_2, ..., S_n)$, описывающий n состояний внешней среды, и вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$, описывающий m допустимых решений.

Требуется найти такой вектор $X^* = (0, 0, ..., 0, X_i, 0, ..., 0)$, который бы обеспечивал ***оптимум*** некоторой ***функции полезности*** $W(X, S)$ ***по*** некоторому ***критерию***.

Значение оптимума функции $W(X, S)$ раскрывается исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если обсуждается себестоимость – минимизировать). Информацию об указанной функции полезности (по сути, *исходные данные задачи* такого типа) представляют *матрицей* размерности $m \times n$ с элементами $W_{ij} = F(X_i, S_j)$, где F – *решающее правило* (определяемое из постановки конкретной задачи).

Следует отметить, что формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности / ошибок даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим). При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\{W_{ij}\}$ (ниже предлагается к рассмотрению несколько простых примеров, наглядно иллюстрирующих это положение).

Критерий принятия решения в ситуации риска. Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W(X, S, P)$ и определить вектор X^*, обеспечивающий $W = \max\limits_{i=1..m} \sum\limits_{j=1}^{n} W_{ij} P_j$.

Критерии принятия решения в ситуации неопределенности достаточно многообразны.

А. Критерий Лапласа. По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют *равные вероятности*, находят *средний эффект для каждого из рассматриваемых вариантов решения* и выбирают тот из них, где средний эффект максимален:

$$W = \max_{i=1..m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} .$$

Б. Критерий Вальда (критерий наибольшей осторожности / пессимиста). *Для каждого* из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается *самая худшая ситуация* (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max_{i=1...m} \min_{j=1...n} W_{ij} .$$

В. Критерий Гурвица. Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица *предлагает некоторый компромисс:*

$$W = \max_{i=1...m} [\, \alpha \max_{j=1...n} W_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=1...n} W_{ij} \,],$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как *коэффициент оптимизма*. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0{,}5$ мы расцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0{,}2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0,2), чем возможную неудачу.

Г. Критерий Сэвиджа. Суть его – *нахождение минимального риска*. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица – *матрица сожалений*

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_{i}(W_{ij}),$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т. е. выгоду, упущенную в результате принятия i-го решения в j-м состоянии;

- по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1...m} \min_{j=1...n} D_{ij} .$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения**. Вместе с тем *возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения* (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). *Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям*.

Пример экономической постановки задачи, формирования исходных данных и решения по различным критериям

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 д. е. Цена яхты – 170 д. е. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 д. е. в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват, и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий, расчет).

Итак: $x = \{x_i\} = (2, 3, 4, 5)$ – количество яхт ($i = 1, 2, 3, 4$); $S = \{S_j\}$ (10, 15, 20, 25) – количество членов яхт-клуба ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i-го решения при j-м количестве членов яхт-клуба:

$$W_{ij} = 100\min(5x_i; S_j) - 170x_i - 730,$$

т. е. решающее правило в задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности:

$\{W_{ij}\} =$

	$S_1 = 10$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$x_1 = 2$	–70	–70	–70	–70
$x_2 = 3$	–240	260	260	260
$x_3 = 4$	–410	90	590	590
$x_4 = 5$	–580	–80	420	920

Например, $W_{11} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2, 10) - 170 \cdot 2 - 730 = -70$;

$$W_{12} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2, 15) - 170 \cdot 2 - 730 = -70;$$

$$W_{13} = W_{14} = -70.$$

Спрос на яхты останется неудовлетворенным. Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска. Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: $P = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}3)$. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$W_1 = (-70 \cdot 0{,}1) + (-70 \cdot 0{,}2) + (-70 \cdot 0{,}4) + (-70 \cdot 0{,}3) = -70;$

$W_2 = (-240 \cdot 0{,}1) + (260 \cdot 0{,}2) + (260 \cdot 0{,}4) + (260 \cdot 0{,}3) = 210;$

$\boldsymbol{W_3 = 390}$;

$W_4 = 370.$

__Вывод__: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 д. е.).

Принятие решения в ситуации неопределенности.

А. Для применения *критерия Лапласа* находим средний эффект для каждого из вариантов приобретения яхт:

$W_1 = ((-70) + (-70) + (-70) + (-70)) / 4 = -70;$

$W_2 = ((-240) + (260) + (260) + (260)) / 4 =135;$

$\boldsymbol{W_3 = 215}$;

$W_4 = 170.$

__Вывод__: в условиях равной вероятности возникновения любого из рассматриваемых спросов на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты, и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д. е.

Б. Критерий Вальда (выбор осторожной, пессимистической стратегии) – для каждой альтернативы (различное количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект: $W = \max(-\mathbf{70}; -240; -410; -580) = -\mathbf{70}$.

__Вывод__: принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д. е.

В. Критерий Гурвица (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}8$
$x_1 = 2$	**–70**	–70	–70
$x_2 = 3$	–140	10	160
$x_3 = 4$	–210	90	390
$x_4 = 5$	–280	**170**	**620**

Вывод: при $\alpha \geq 0{,}5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль, не меньшую 170 д. е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей); при $\alpha = 0{,}2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

Г. Критерий Сэвиджа (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D – для нашего примера, вычитанием (–70) из первого столбца матрицы полезности, 260 – из второго столбца, 590 и 920 – из третьего и четвертого столбцов соответственно:

	$S_1 = 10$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$x_1 = 2$	0	–330	–660	**–990**
$x_2 = 3$	–170	0	–330	**–660**
$x_3 = 4$	**–340**	–170	0	–330
$x_4 = 5$	**–510**	–340	–170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$$\max(-990; -660; -340; -510) = \mathbf{-340}.$$

Вывод: покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д. е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. В чем разница между понятиями риск и неопределенность?
2. В чем разница между ситуацией риска и ситуацией неопределенности? Приведите примеры.

3. Сформулируйте критерии принятия решения для ситуации риска.

4. Сформулируйте критерии принятия решения для ситуации неопределенности.

3.3. Контрольные задания для практических занятий

Для предложенной экономической ситуации (номер варианта задания определяет преподаватель, учитывая повышенную сложность отдельных задач):

1) сформулируйте математическую ее постановку: установите вектор состояний внешней среды, вектор решений и функцию полезности;

2) найдите оптимальное решение *в ситуации риска* и *в ситуации неопределенности* (с позиций критериев Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа);

3) дайте соответствующие комментарии к их применению.

1. Фирма может за определенную плату (100 д. е.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчетов на ПЭВМ. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов. Стоимость аренды машинного времени составляет 800 д. е. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ). Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. *Определить число сотрудников фирмы*, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

2. Землевладелец на знойном юге решает *вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке томатов*. Урожайность колеблется в зависимости от погоды от 500 до 600 ц, закупочная цена стабильна и равна 5 д. е. / кг. Рабочий за сезон собирает 20 ц, получая 1,2 д. е. / кг за уборку и 280 д. е. для оплаты стоимости проезда к месту работ. Затраты на обеспечение рабочих жильем (речь не идет даже о трехзвездочной гостинице) составляют 300 д. е. и не зависят от численности.

3. В сельскохозяйственном районе с посевной площадью 1430 га решено *построить элеватор по одному из типовых проектов* на 20, 30, 40, 50 или 60 тыс. ц зерна. Привязка проекта обойдется в 37 тыс. руб. Стоимость материалов и оборудования для элеватора мощностью 20 тыс. ц равна 60 тыс. руб. и растет на 10 % с ростом мощности на 10 тыс. ц. Затраты на эксплуатацию элеватора на 20 тыс. ц равны 10 тыс. руб. и растут на 10 тыс. руб. с ростом мощности на 10 тыс. ц. За хранение зерна на счет элеватора вносится плата 10 руб. за центнер. Урожайность колеблется от 14 до 20 ц / га.

4. Председатель сельхозкооператива решает *закупить бочки для засолки огурцов*. Виды на урожай колеблются от 700 до 1000 кг, в бочку вмещается 50 кг, цена бочки – 300 д. е., затраты на засолку – 20 д. е. за бочку, аренда места на рынке – 50 д. е., реализационная цена – 7,20 д. е. / кг.

5. Фирма, действующая в живописном Горном Алтае, планирует десятидневные маршруты для туристов в летнем сезоне (60 дней). Известно, что число туристов в течение десятидневки колеблется от 1 до 1,5 тыс. чел. Группы комплектуются из 25 чел. Стоимость путевки – 2 тыс. руб. Заработная плата инструктора составляет 6 тыс. руб. в месяц. На экипировку группы затрачивается 1,5 тыс. руб., на питание группы – 12 тыс. руб. К тому же приходится оплачивать ремонт помещений и снаряжение при подготовке к сезону – 30 тыс. руб. *Сколько же инструкторов разумно пригласить на работу?*

6. В транспортном цехе ежедневно выходит из строя до 8 агрегатов, каждый из которых мог бы дать продукции на 350 руб. Слесарь-ремонтник, получающий 2500 руб. в месяц, не может в день обслужить более двух станков. *Сколько же слесарей должен привлечь на работу* начальник транспортного цеха?

7. Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10 % имеют право бесплатного проезда. Цена билета 6 д. е. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 д. е. Оплата шофера за одну поездку – 60 д. е. *Сколько же организовать рейсов?*

8. В райцентре решается вопрос о строительстве сыроваренного завода. Известно, что дневной объем поставок молока колеблется от 4800 до 5600 л в день. Один сепаратор ежедневно перерабатывает 600 л молока в 50 кг сыра. Стоимость аппарата 40000 д. е., ежемесячные эксплуатационные расходы – 1500 д. е., аренда помещения – 12000 д. е. в год. Молоко закупается по 3 д. е. / л, сыр продается по 45 д. е. / кг. Неиспользованное молоко приходится вывозить на свинокомплекс молоковозами (вместимость 5 ц) с затратами 100 д. е. за рейс. *Сколько же сепараторов закупать?*

9. Прядильная фабрика ежемесячно получает от 35 до 50 т хлопка повышенной влажности. Один сушильный агрегат может высушить 5 т. Затраты на техническое обслуживание агрегата 1000 руб. (независимо от его использования или простоя). Потери от 1 т невысушенного хлопка – 7000 руб. *Сколько агрегатов разумно иметь на фабрике?*

10. В 1950-е годы в одном из небольших городов области планировалось строительство кинотеатра. Имелись проекты на 400, 500, 600 и 750 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляли 40 руб. в день и дополнительно 10 руб. за каждые сто мест (свыше 600). В день можно было дать 6 сеансов, стоимость билета составляла в среднем 40 коп. Количество посетителей колебалось от 2000 до 3000 чел. *Какой из проектов следовало выбрать?*

11. Требуется *выяснить потребности транспортного агентства в автобусах для экскурсионного обслуживания.* Обычно число заявок на автобусы колеблется в пределах от 10 до 50. Затраты на эксплуатацию каждого автобуса составляют 10 д. е. плюс 100 на содержание автопарка в целом в день. Экскурсионное бюро выплачивает транспортному агентству 20 д. е. за каждую заявку.

12. Бюро трудоустройства населения планирует открытие курсов компьютерной грамотности. Ожидаемая численность слушателей в пределах от 100 до 200 чел. За каждого из них бюро получает от работодателя 1000 руб. Преподаватель работает с группой, не превышающей 10 чел. Расходы на хозяйственные нужды составляют 5000 руб. и на оплату преподавателя – 4500 руб. *Сколько преподавателей разумно привлечь?*

13. В условиях задачи 12 по некоторым мотивам было решено увеличить оплату преподавателя до 6500 руб. *Сколько преподавателей приглашать* в этом случае?

14. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине колеблется от 1000 до 1500. Булочки покупаются лотками по 100 штук по цене 16 руб. и продаются по цене 22 руб. за штуку. Непроданные булочки распродаются по цене 8 руб. на следующее утро. *Ваши рекомендации?*

15. В условиях задачи 14 изменились цены: закупочная цена – 25 руб.; продажные цены на свежую и черствую булочку соответственно равны 49 руб. и 15 руб. *Сколько же булочек заказывать?*

16. В условиях задачи 8 изменилась стоимость сепаратора до 50000 руб. и стоимость вывоза неиспользованного молока до 150 рублей за рейс. *Сколько покупать сепараторов?*

17. В условиях задачи 8 изменилась закупочная цена на молоко и стала равной 3,50 руб. *Сколько покупать сепараторов?*

18. В условиях задачи 8 изменилась закупочная цена на молоко и стала равной 5,00 руб. *Сколько покупать сепараторов?*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тынкевич, М. А. Исследование операций и имитационное моделирование : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» / М. А. Тынкевич, А. Г. Пимонов, С. А. Веревкин ; КузГТУ. – Кемерово, 2015. – 248 с. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

2. Тынкевич, М. А. Исследование операций [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие для студентов специальности 080801 «Прикладная информатика в экономике» / М. А. Тынкевич, А. А. Тайлакова ; КузГТУ. – Кемерово, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Доступна электронная версия: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90797&type=utchposob: common

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тынкевич Моисей Аронович
Речко Галина Николаевна

Практикум по дисциплине
«Исследование операций
и методы оптимизации»
(нелинейная оптимизация
и статистические решения)

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 19.02.2018. Формат 60×84 / 16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 4,0
Тираж 100 экз. Заказ №

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А