Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

М. А. Тынкевич Г. Н. Речко

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» (ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ)

Учебное пособие

Кемерово 2017

УДК 519.852(075.8)

Рецензенты:

Заведующий отделом экономической информатики федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт экономики и организации промышленного производства» СО РАН, профессор кафедры применения математических методов в экономике и планировании ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный национальный исследовательский университет», кандидат экономических наук, доцент *Ю. Ш. Блам*

Институт фундаментальных наук федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет» (директор института, доктор технических наук, доцент *А. М. Гудов*)

Тынкевич, М. А.

Практикум по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» (линейная оптимизация) : учеб. пособие / М. А. Тынкевич, Г. Н. Речко ; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – 72 с.

ISBN 978-5-906888-54-9

Учебное пособие содержит задачи и примеры по основным методам линейной оптимизации. Рассматриваются следующие темы: графическое решение задачи линейной оптимизации, симплексный метод решения оптимизационных задач, двойственность в линейном программировании, параметрическое линейное программирование, решение задач линейного целочисленного программирования, классическая транспортная задача и ее решение методом Данцига. Приводятся теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий к циклу практических занятий, примеры решения типовых задач, варианты контрольных заданий и вопросы для текущего контроля.

Пособие подготовлено для бакалавров направления 09.03.03 «Прикладная информатика», может быть полезно всем интересующимся методами исследования операций и экономико-математического моделирования.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 519.852(075.8)

© КузГТУ, 2017

© Тынкевич М. А., Речко Г. Н., 2017

© Дизайн обложки.
Тайлакова А. А., 2017

ISBN 978-5-906888-54-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Говоря о «применении математики в экономике», мы подразумеваем не просто выполнение различного рода экономических расчетов, а использование аппарата математики для нахождения наилучших экономических решений, изучения экономических закономерностей, получения новых теоретических выводов (синтез экономических и математических знаний раскрывает новые возможности экономического анализа). Главные преимущества математики как средства научного познания раскрываются при построении математических моделей, заменяющих в определенном отношении исследуемые объекты. *Математические модели экономики, отражающие с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования экономических проблем* (обычно такие модели называют экономико-математическими).

Основными этапами экономико-математического моделирования считаются:

1) <u>постановка экономической проблемы и ее качественный анализ</u> (главное – четко сформулировать сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы);

2) <u>построение математической модели</u> – этап формализации экономической ситуации (выражение ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений – функций, уравнений, неравенств и т.п.), где сначала определяется тип модели, а затем уточняются детали модельной конструкции (переменные, параметры, форма связей);

3) <u>математический анализ модели</u> с целью выяснить общие свойства модели (чисто математические приемы);

4) <u>подготовка исходной информации</u> – реальные возможности получения информации (сроки, затраты) ограничивают выбор моделей, предназначаемых для практического использования;

5) <u>численное решение</u> – разработка алгоритмов для решения задачи, программное обеспечение и непосредственное проведение расчетов (обычно многовариантных);

6) <u>анализ численных результатов и их применение</u> – по результатам этого этапа, помимо прочего, определяются и направления совершенствования модели, ее информационного и математического обеспечения.

По мере расширения и уточнения экономических и математических знаний, развития компьютерных технологий границы математической формализуемости экономических проблем неизбежно изменяются, хотя всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование недостаточно эффективно.

В соответствии с современными научными представлениями системы разработки и принятия хозяйственных решений должны рационально сочетать формальные и неформальные методы, взаимоусиливающие и взаимодополняющие друг друга. *Формальные методы являются, прежде всего, средством научно обоснованной подготовки материала для действий человека в процессе управления.* Это способствует продуктивному использованию его опыта, интуиции при решении слабо формализуемых задач.

Существует обширная литература по экономико-математическому моделированию и математическому аппарату задач принятия решений, часть которой, сохраняя краткость и математическую культуру изложения, доступна не только математикам.

Ниже описаны, в основном, простейшие экономические ситуации, представленные в виде задач *линейной оптимизации*, для решения которых не требуется использовать сложный математический аппарат, выходящий за пределы традиционных школьного и вузовского курсов.

Авторы учебного пособия, ориентируясь на компетенции бакалавров направления подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» и интерес читателей, не обладающих профессиональной математической подготовкой, постарались увязать математическую строгость изложения и алгоритмическое описание методов с примерами экономической постановки решаемых задач.

1. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель практического занятия

На примере двумерных задач линейной оптимизации получить наглядное, графическое представление о сути решаемых линейных оптимизационных моделей экономических процессов.

Содержание занятия

1.1. Теоретические положения

Общая задача линейного программирования состоит в поиске значений некоторых показателей (переменных величин), удовлетворяющих каким-либо *линейным ограничениям* (ограниченные объемы сырья, рабочей силы и денежных средств, экологические требования и др.) и обеспечивающих наибольшее (наименьшее) значение заданной *линейной функции* (прибыли, издержек). Например, в примере такой задачи компактное, немногословное требование:

максимизировать

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

означает желание не только отыскать значения неких величин, обозначенных как x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющих вышеприведенным четырем условиям, но и среди них найти такие, что функция $L(x_1, x_2, x_3)$ принимает самое большое значение.

Количество неизвестных величин, фигурирующих в постановке задачи, называют ее *размерностью*. Набор их значений, удовлетворяющих условиям задачи, называют *планом* (примером может служить программа производства – набор значений показателей, удовлетворяющий сырьевым, социальным и прочим ограничениям).

Может обнаружиться, что задача неразрешима – не существует ни одного плана (ограничения задачи противоречат друг другу). Может быть единственный план или много (множество) планов, среди которых нужно найти наилучший (*оптимальный*), дающий максимум прибыли или минимум затрат.

Размерность реальных задач, как правило, велика (от десятков до нескольких сотен). Здесь мы намерены на примере двумерных задач дать наглядное, графическое представление о существе решаемых линейных программ (полагая, что всякий человек способен рисовать на плоском листе бумаги и воспринимать конструкции окружающего нас двумерного пространства).

Решение задачи графически осуществляется в два этапа:

1-й этап – *построение множества планов* (допустимых решений). Очевидно, что уравнение $\alpha X + \beta Y = \gamma$ на плоскости (X, Y) изображает прямую линию и для ее построения достаточно взять пару подходящих точек. Неравенства же $\alpha X + \beta Y \leq \gamma$ или $\alpha X + \beta Y \geq \gamma$ определяют полуплоскости, ограниченные прямой $\alpha X + \beta Y = \gamma$. Тогда система подобных ограничений определит множество допустимых решений в виде некоторого выпуклого многоугольника (ограниченного или неограниченного), отрезка прямой линии (ограниченного или неограниченного), точки. Возможен исход, когда, построив полуплоскости (прямые), соответствующие ограничениям, может обнаружиться отсутствие общей области – множество планов пусто (ограничения задачи противоречивы).

2-й этап – *поиск оптимального плана* (такого допустимого плана, который обеспечивает максимум (минимум) заданной целевой функции). Следует вспомнить понятие *градиента* функции в точке как вектора, составленного из частных производных функции, вычисленных в этой точке [1], и факт, что *градиент указывает направление наибольшего возрастания функции в окрестности точки*. В случае линейной функции составляющие градиента неизменны в любой точке. Соответственно, экстремумы (максимум или минимум) линейной функции достигаются лишь в вершинах множества планов (или на какой-то грани множества, если градиент перпендикулярен этой грани), но не внутри множества. Более того, в двумерном случае при достаточно аккуратных построениях с соблюдением масштаба можно не перебирать все вершины (количество их конечно, но может быть сравнительно большим), а сразу видеть точку экстремума.

Пример 1. Решим задачу максимизации

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad (1)$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 56 \qquad (2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 4 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

Решение. *Находим множество допустимых решений (планов)* задачи, т. е. множество точек (x_1, x_2), удовлетворяющих заданной системе ограничений (1)–(5), для чего строим полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи, и определяем их общую область.

Берем первое из условий, строим прямую линию $-x_1 + 2x_2 = 6$. Для этого находим любые две ее точки, например, точки пересечения с координатными осями: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ и $x_2 = 0$, $x_1 = -6$, т. е. точки (0, 3) и (–6, 0). Чтобы выделить соответствующую полуплоскость относительно построенной прямой, подставляем координаты какой-либо другой точки (например, начало координат) в левую часть неравенства (1). Так, при подстановке значений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ видим, что проверяемое условие выполняется (0 < 6). Следовательно, область допустимых решений рассматриваемого неравенства $-x_1 + 2x_2 \leq 6$ – та полуплоскость, которая включает начало координат. Отображение второго ограничения абсолютно идентично.

Относительно полуплоскости третьего ограничения: она располагается от граничной прямой по другую сторону, нежели начало координат.

Четвертое и пятое ограничения ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) соответствуют полуплоскостям, лежащим справа от оси ординат и над осью абсцисс (первому квадранту плоскости).

В итоге *получаем* общую область для всех пяти полуплоскостей (множество планов) – *выпуклый пятиугольник* (рис. 1).

Теперь следует *среди множества допустимых планов найти оптимальный план*. Воспользуемся градиентом функции $L(x) = 2x_1 + 3x_2$. Здесь grad $L(x)$ = (2, 3). Строим этот вектор на рисунке в отсчете от начала координат (или от любой точки плоскости, или от любой точки множества планов). Если точка экстремума не очевидна, возьмите «нить», перпендикулярную градиенту, и перемещайте над множеством планов в направлении градиента функции. Нетрудно видеть, что точка последнего касания «нити» с множеством планов будет искомой точкой максимума функции $L(x)$ (точка первого касания – точкой минимума). В нашем примере точка максимума функции $L(x)$ – это точка C. Остается найти ее координаты.

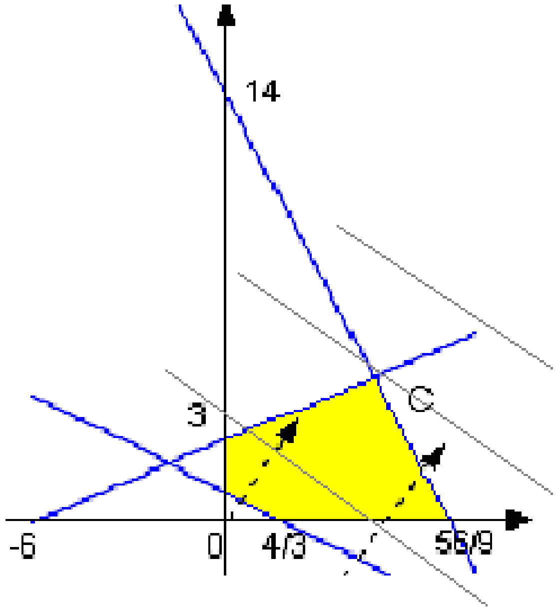


Рис. 1

Поскольку она получается пересечением первой и второй прямых, то достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$-x_1 + 2x_2 = 6;$$
$$9x_1 + 4x_2 = 56.$$

Человек, знакомый с определителями и правилом Крамера, решает ее в виде

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 56 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6\cdot 4 - 2\cdot 56}{-1\cdot 4 - 2\cdot 9} = \frac{-88}{-22} = 4; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 56 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-1\cdot 56 - 6\cdot 9}{-1\cdot 4 - 2\cdot 9} = \frac{-110}{-22} = 5.$$

Читатель может, конечно, решать подобные системы методом подстановок или другим допотопным приемом, не считаясь с непроизводительными затратами труда.

Итог решения: максимум целевой функции достигается в точке (4, 5) и равен $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$.

Пример 2. Найдем экстремальные значения функции

$$L(x) = 3x_1 - x_2$$

при ограничениях

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6 \qquad (1)$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 4 \qquad (2)$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 5 \qquad (3)$$
$$x_1 \geq 0 \qquad (4)$$

Решение. Построение присутствующих здесь ограничений в принципе ничем не отличается от ограничений предыдущего примера, но в итоге построения получается множество планов в виде выпуклого неограниченного многоугольника (рис. 2). Если построить градиент grad $L(x) = (3, -1)$ и перпендикулярные ему «нити» (линии уровня), то легко видеть, что по максимуму $L(x)$ не ограничена ($L(X) \to +\infty$), а минимум достигается в точке (0, 2) и равен

$$L(0, 2) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2.$$

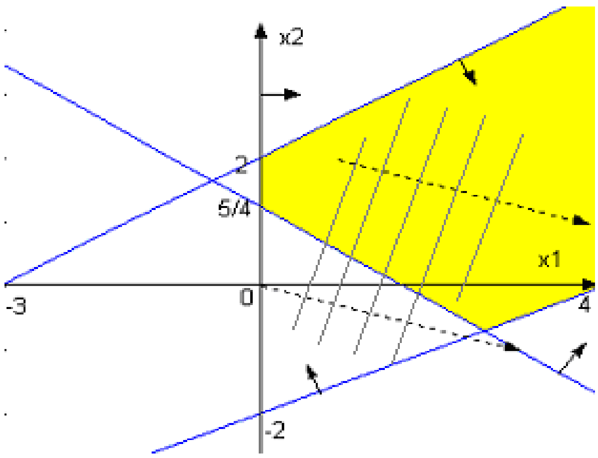


Рис. 2

Пример 3. Найдем экстремумы функции $L(x) = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$-x_1 + 2x_2 \le 5 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

Решение. Поскольку ограничение (2) представляет собой уравнение прямой (прямая явно проходит через начало координат, и для ее построения достаточно отыскать лишь одну точку вне координатных осей), то в результате получаем множество планов в виде отрезка AB (рис. 3).

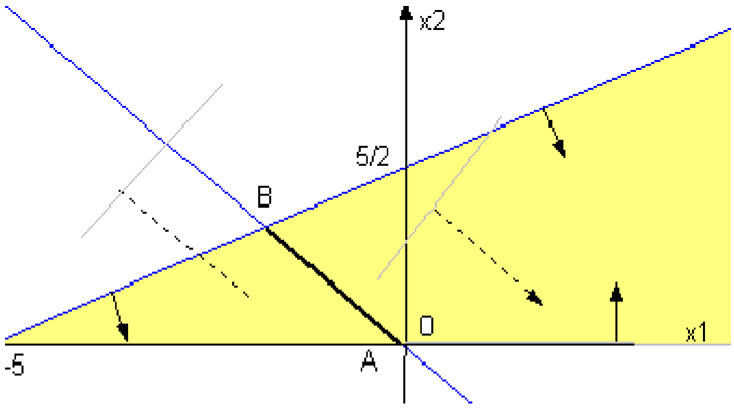


Рис. 3

Если учесть grad $L(x) = (1, -1)$, легко видеть, что максимум $L(x)$ достигается в точке A (начало координат) и равен нулю, а минимум – в точке B на пересечении прямых $-x_1 + 2x_2 = 5$ и $x_1 + x_2 = 0$, с координатами $(-5/3, 5/3)$, и $L_{\min}(X) = -10/3$.

В заключение заметим, что обнаруженные здесь свойства линейных программ переносятся и на общий случай более чем двух измерений, где прямые превращаются в плоскости, а полуплоскости – в полупространства, многоугольник – в многогранник, но использовать графические приемы решения здесь почти всегда нереально.

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под задачей линейной оптимизации?
2. Допустимый план, опорный план, оптимальный план: в чем разница между понятиями?
3. Что означает выражение «найти оптимальное решение задачи»?
4. Как вы понимаете заявление о желании найти «наиболее оптимальный план»?
5. Зачем нужен градиент функции при решении задачи линейной оптимизации?
6. Алгоритм графического решения задачи линейной оптимизации.

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

1.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; для закрепления материала можно дополнительно выполнить любой другой вариант).

Решить задачу линейной оптимизации, рассматривая ее как задачу максимизации (минимизации) функции $L(x)$ на заданном множестве планов. Объяснить полученные результаты.

1. $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $5x_1 - 2x_2 \le 7$ $-x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 \ge 0$	**2.** $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 15$ $3x_1 - 5x_2 \le 8$ $5x_1 + 3x_2 \ge 26$ $x_2 \ge 0$
3. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $8x_1 - 5x_2 \le 16$ $-x_1 + 3x_2 \le 2$ $2x_1 + 7x_2 \ge 9$ $x_1 \ge 1$	**4.** $L(x) = x_1 + x_2$ при условиях $7x_1 + 5x_2 \le 40$ $-5x_1 + 4x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \ge 8$ $x_1 = 3$
5. $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $2x_1 + x_2 \le 14$ $-3x_1 + 2x_2 \le 9$ $3x_1 + 4x_2 \ge 27$ $x_2 \le 7$	**6.** $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $5x_1 - 2x_2 \le 4$ $-x_1 - 2x_2 \le 4$ $x_1 - x_2 \ge 4$ $x_1 = 4/3$
7. $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 14$ $3x_1 - 5x_2 \le 5$ $5x_1 + 3x_2 \ge 21$ $x_1 = 3$	**8.** $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $8x_1 - 5x_2 \le 11$ $-x_1 + 3x_2 \le 1$ $2x_1 + 7x_2 \ge 7$
9. $L(x) = x_1 + x_2$ при условиях $7x_1 + 5x_2 \le 28$ $-5x_1 + 4x_2 \le 7$ $x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 + 3x_2 = 9$	**10.** $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $2x_1 + x_2 \le 11$ $3x_1 + 4x_2 \ge 20$ $-3x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 \le 4$ $x_2 \le 6$

11. $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $5x_1 - 2x_2 \le 7$ $-x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_2 \ge 2$	**12.** $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 10$ $3x_1 - 5x_2 \le 8$ $5x_1 + 3x_2 \ge 20$ $x_1 \ge 2$
13. $L(x) = x_1 + x_2$ при условиях $8x_1 - 5x_2 \le 16$ $-x_1 + 3x_2 \le 2$ $2x_1 + 7x_2 \ge 9$ $x_1 \ge 1$	**14.** $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $7x_1 + 5x_2 \le 40$ $-5x_1 + 4x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \ge 8$ $x_2 \le 4$
15. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $2x_1 + x_2 \le 14$ $-3x_1 + 2x_2 \le 9$ $3x_1 + 4x_2 \ge 27$ $x_1 \le 4$	**16.** $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $5x_1 - 2x_2 \le 4$ $-x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1 \ge 4/3$
17. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \le 14$ $3x_1 - 5x_2 \le 5$ $5x_1 + 3x_2 \ge 21$ $x_2 \ge 2$	**18.** $L(x) = x_1 + x_2$ при условиях $8x_1 - 5x_2 \le 11$ $- x_1 + 3x_2 \le 1$ $2x_1 + 7x_2 \ge 7$ $x_2 \ge 1$
19. $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $7x_1 + 5x_2 \le 27$ $-5x_1 + 4x_2 \le 8$ $x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 \le 5/2$ $x_2 \ge 3/2$	**20.** $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях $2x_1 + x_2 \le 14$ $-3x_1 + 2x_2 \le 11$ $3x_1 + 4x_2 \ge 19$ $x_2 \le 8$ $x_1 \ge 0$
21. $L(x) = -2x_1 - x_2$ при условиях $-3x_1 + 2x_2 \le 10$ $9x_1 + 4x_2 \le 56$ $3x_1 + 5x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	**22.** $L(x) = 2x_1 - 3x_2$ при условиях $-x_1 + x_2 \le 2$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $5x_1 - 2x_2 \le 10$ $x_2 \le 4$

23. $L(x) = -2x_1 + 3x_2$ при условиях $-x_1 + 2x_2 \le 4$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $7x_1 + 4x_2 \le 28$	**24.** $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \ge -1$ $-5x_1 + 2x_2 \le 10$ $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $x_2 \ge 0$
25. $L(x) = 3x_1 - 2x_2$ при условиях $2x_1 + 5x_2 \le 3$ $-3x_1 + 8x_2 \le -5$ $-2x_1 + 4x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**26.** $L(x) = -8x_1 + 9x_2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \ge 8$ $-x_1 + 2x_2 \le 0$ $x_1 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
27. $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 - 5x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \le 9$ $-x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**28.** $L(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 - x_2 \ge -7$ $x_1 - x_2 \le -2$ $x_1 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
29. $L(x) = -2x_1 + x_2$ при условиях $x_1 + x_2 \le 8$ $2x_1 - x_2 \le 4$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	**30.** $L(x) = - x_1 + x_2$ при условиях $-2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1 + 4x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
31. $L(x) = -4x_1 + x_2$ при условиях $x_1 - x_2 \le 1$ $x_1 - x_2 \ge -1$ $x_2 \ge 2$ $x_1 \le 4$ $x_1 \ge 0$	**32.** $L(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях $2x_1 + 3x_2 \le 6$ $2x_1 + x_2 \le 4$ $2x_1 + x_2 \ge 1$ $x_1 - x_2 \ge -1$ $x_1, x_2 \ge 0$
33. $L(x) = x_1$ при условиях $-x_1 + x_2 \le 7$ $x_1 + x_2 = 0$ $x_2 \ge 0$	**34.** $L(x) = x_1 + x_2$ при условиях $-3x_1 + 2x_2 \le -1$ $x_1 - x_2 \le 2$ $3x_1 + 2x_2 \ge 3$ $x_2 \ge 0$

2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Цель практического занятия

Овладеть навыками практического решения задач линейной оптимизации симплексным методом.

Содержание занятия

2.1. Теоретические положения

Для иллюстрации обратимся к примеру.

Экономическая постановка задачи. На вашем предприятии образовалось 150 м^3 свободных остатков пиломатериалов и 1600 м^2 листового стекла. Эти материальные ресурсы можно использовать для производства «непрофильных» товаров, например сервантов, книжных полок и зеркал (маркетологи «дают добро» на возможность сбыта этих товаров по следующим ценам: сервант – 91, книжная полка – 14,5, зеркало – 11 денежных единиц).

Нормы расхода материалов на единицу каждого вида продукции:

Продукция	Ресурсы	
	Пиломатериалы, м^3	Стекло, м^2
Сервант	0,25	2,0
Книжная полка	0,05	0,5
Зеркало	0,025	0,4

Себестоимость производства одного серванта составляет 80 денежных единиц (д. е.), книжной полки – 12, зеркала – 8,9.

Сформируйте план производства указанных товаров, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Рассмотренная задача «*Что производить из имеющихся ресурсов?*» может быть обобщена задачей получения максимальной прибыли от производства n видов продукции, в котором используются m видов ресурсов.

Формальная постановка и математическая запись такой задачи выступает в следующей форме.

<u>Дано:</u>

m – количество видов используемых ресурсов;

n – количество видов производимой продукции;

B_i – наличный объем i-го вида ресурса (i = 1, 2, ..., m);

A_{ij} – норма расхода i-го вида ресурса на производство единицы продукции j-го вида (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, …, n);

C_j – прибыль от реализации единицы продукции j-го вида (j = 1, 2, …, n).

Искомые величины:

X_j – объем производства продукции j-го вида (j = 1, 2, …, n).

Требуется найти такие значения переменных (объемов производства) $X_1, X_2, .., X_n$, при которых достигаются:

• целевая «установка» (получение максимальной прибыли)

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j; \tag{2.1}$$

• ограничения задачи (не превзойти имеющихся объемов ресурсов):

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \le B_i \quad (i = 1 \ldots m); \tag{2.2}$$

• условия неотрицательности искомых величин (объемы производства не могут быть отрицательными числами):

$$X_j \ge 0 \qquad (j = 1, ..., n). \tag{2.3}$$

Напомним ***основные понятия линейных программ.***

Любой вектор $X = (X_1, X_2, .., X_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2) – (2.3) задачи, называют *допустимым решением (планом),* а совокупность таких векторов – *множеством допустимых решений (планов).*

• Если учесть, что каждое из ограничений (2.2) – (2.3) имеет своим геометрическим образом полупространство, ограниченное гиперплоскостью (плоскостью n-мерного пространства), то по аналогии с приведенным ранее графическим рассмотрением двумерной линейной программы напрашивается вывод о том, что *множество планов является выпуклым многогранником и оптимум (максимум, минимум) достигается только в его вершинах*.

• Множество планов нашей n-мерной задачи ограничено $m + n$ гиперплоскостями. Поскольку всякая вершина получается пересечением хотя бы n плоскостей, количество вершин не превышает числа сочетаний из $m + n$ по n и для поиска их координат достаточно перебрать все возможные системы уравнений, формируемые на основе (2.2) – (2.3).

Синонимом понятия вершины многогранника планов является понятие опорного плана. *План называют опорным*, если он обращает в равенство хотя бы n независимых ограничений (2.2) – (2.3) (в вершине пересекаются хотя бы n граничных гиперплоскостей. Можно доказать, что *число ненулевых составляющих опорного плана не превышает* числа m ограничений (2.2). Опорный план, содержащий ровно m положительных компонент, называется *невырожденным* (в противном – *вырожденным*).

Очевидно, что *оптимальный план* – это план $X = (X_1, X_2, .., X_n)$, обеспечивающий наибольшее (наименьшее) значение целевой функции – *всегда является опорным (но не любой опорный план является оптимальным).*

Перепишем (2.2) в компактном виде:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j X_j \leq B, \tag{2.4}$$

где A_j – вектор коэффициентов при X_j; B – вектор правой части.

Система m векторов A_j при положительных компонентах опорного плана называется *базисом* этого плана (эта система линейно независима, и знание базиса автоматически определяет соответствующий опорный план).

Числовая модель рассматриваемой ситуации.

Пусть X_1 – искомый объем производства сервантов;
X_2 – искомый объем производства книжных полок;
X_3 – искомый объем производства зеркал;
X_4 – остаток пиломатериалов;
X_5 – остаток стекла;
$L(X)$ – искомая прибыль.

В соответствии с исходными данными модель имеет вид:

$$\max L(X) = 11X_1 + 2{,}5X_2 + 2{,}1X_3$$

при условиях

$$0{,}25X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}025X_3 + X_4 = 150$$
$$2X_1 + 0{,}5X_2 + 0{,}4X_3 + X_5 = 1600$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Как было сказано выше, достаточно отыскать опорные планы (перебрать и решить все возможные подсистемы 5 уравнений, выяснить допустимость этих решений), оценить значения $L(X)$ и выбрать среди них оптимальный. Но даже для этой крошечной задачи число таких систем достаточно велико (= 21).

Существует более быстрый **симплексный метод** – *метод упорядоченного перебора опорных планов* (упорядоченность обеспечивается монотонным изменением значения целевой функции при переходе к очередному опорному плану). При использовании этого метода число перебираемых опорных планов не превышает m (в худшем случае до $2m$).

Прежде чем прибегнуть к симплексному методу, ***ограничения*** *исходной задачи* ***приводят к канонической форме***:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \; X_j = B \geq 0 \;, \quad X_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n). \qquad (2.5)$$

Для этого:

– *если на переменную* X_k *отсутствуют условия неотрицательности*, ее заменяют разностью двух неотрицательных переменных

$$X_k = X_k' - X_k'' \,,\; X_k' \geq 0 \,,\; X_k'' \geq 0; \qquad (2.6)$$

– *если на переменную* X_k *стоит условие неположительности,* производится замена $X_k = -X_k'$, $X_k' \geq 0;$ (2.7)

– *если некоторое из основных ограничений (2.2) допускает неравенство,* вводят т. н. *ослабляющую*, неотрицательную *переменную*, уравновешивающую разность между левой и правой частями ограничения;

– *если некоторое из основных ограничений (2.2) имеет отрицательную правую часть*, ограничение умножают на –1.

Более сложный этап подготовки связан с ***выбором начального опорного плана (начального базиса)***. Здесь в системе коэффициентов при переменных (матрице A) ищем единичную подматрицу из m векторов; эти линейно независимые векторы образуют базис опорного плана, а правые части ограничений определяют значения ненулевых (базисных) компонент этого плана.

В нашей задаче обнаруживается очевидный базис (A_4, A_5) и начальный опорный план X^0 = (0, 0, 0, 150, 1600).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ A = & \boxed{\begin{array}{ccccc} 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}025 & 1 & 0 \\ 2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0 & 1 \end{array}} \end{array} \qquad B = \boxed{\begin{array}{c} 150 \\ 1600 \end{array}}$$

Обратим внимание на целевую функцию $L(X) = 11X_1 + 2{,}5X_2 + 2{,}1X_3$. Очевидно, что $L(X^0) = 0$, но если бы мы смогли найти опорный план с ненулевым значением X_1, X_2 или X_3, то ее значение стало бы бóльшим.

Попытаемся найти опорный план с ненулевым значением X_1, для чего выразим X_1 из какого-то уравнения и исключим его из остальных уравнений, но так чтобы в правой части ограничений значения остались неотрицательными. Поэтому находим *минимум из отношений компонент правой части к положительным коэффициентам при* X_1. Здесь min (150/0,25; 1600/2) = 600 соответствует первому уравнению. Соответственно выражаем X_1 из первого уравнения и исключаем из второго, получая:

$$X_1 + 0{,}2X_2 + 0{,}1X_3 + 4X_4 = 600,$$
$$0{,}1X_2 + 0{,}2X_3 - 8X_4 + X_5 = 400,$$

откуда очевиден базис (A_1, A_5) и опорный план $X^1 = (600, 0, 0, 0, 400)$. Подставляя выражение X^1 в целевую функцию, получаем:

$$L(X^1) = 11X_1 + 2{,}5X_2 + 2{,}1X_3 =$$
$$= 11\,(600 - 0{,}2X_2 - 0{,}1X_3 - 4X_4) + 2{,}5X_2 + 2{,}1X_3 =$$
$$= 6600 + 0{,}3X_2 + X_3 - 44X_4.$$

Видим $L(X^1) = 6600 >> L(X^0)$, но если бы мы смогли найти опорный план с $X_2 > 0$ или $X_3 > 0$, то значение $L(X)$ стало бы еще бóльшим.

Как и на предыдущем шаге, находим минимум из отношений компонент правой части к положительным коэффициентам при X_3. Здесь $\min(600/0{,}1;\ 400/0{,}2) = \min(6000,\ 2000) = 2000$ соответствует второму уравнению. Соответственно выражаем X_3 из второго уравнения и исключаем из первого, получая:

$$X_1 + 0{,}15X_2 + 8X_4 - 0{,}5X_5 = 400,$$
$$0{,}5X_2 + X_3 - 40X_4 + 5X_5 = 2000,$$

откуда видим опорный план $X^2 = (400, 0, 2000, 0, 0)$. Подставляя выражение X^2 в целевую функцию, получаем:

$$L(X^2) = 6600 + 0{,}3X_2 + X_3 - 44X_4 =$$
$$= 6600 + 0{,}3X_2 + (2000 - 0{,}5X_2 + 40X_4 - 5X_5) - 44X_4 =$$
$$= 8600 - 0{,}2X_2 - 4X_4 - 5X_5.$$

Видим $L(X^2) = 8600 > L(X^1)$ и, заметив неположительность коэффициентов в $L(X)$ при небазисных (нулевых) компонентах и нежелательность придания им ненулевых значений, приходим к выводу об оптимальности найденного плана.

Во избежание никчемного переписывания имен искомых величин и вспоминая об известных гауссовых преобразованиях при решении систем линейных алгебраических уравнений, всю приведенную *симплексную процедуру* разумнее представлять в табличной форме (т. н. симплексными таблицами).

$C_{баз}$	Базис	План X^k	C_1	C_2	...	C_n
			A_1	A_2	...	A_n
C_1	A_1	B_1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
C_2	A_2	B_2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
C_m	A_m	B_m	A_{m1}	A_{m2}	...	A_{mn}
Z_k		$L(X)$	Z_1	Z_2	...	Z_n
Δ_k			Δ_1	Δ_2	...	Δ_n

Как уже было сказано выше, задачу предварительно приводят к канонической форме (приводят основные ограничения к форме равенств, используя ввод дополнительных неотрицательных переменных; заменяют переменные, на которые отсутствует требование неотрицательности, разностью двух неотрицательных переменных; и др.) и информацию о задаче переносят в симплексную таблицу.

В верхней строке записывают коэффициенты целевой функции C_k (k = 1, …, n). Эта строка неизменна во всех последующих таблицах.

Под ними размещают коэффициенты при переменных в ограничениях – векторы A_k (k = 1, …, n) и справа от них – вектор правой части ограничений – вектор B.

После этого начинается ***выбор начального опорного плана***. В системе векторов A_k (k = 1, …, n) ищем m векторов, из которых можно было бы построить единичную матрицу. Если такой поиск увенчается успехом, то номера этих векторов переносим в столбец <Базис> (мы нашли номера базисных переменных – их значения в столбце B), а в столбец <$C_{баз}$> переносим соответствующие коэффициенты целевой функции (из первой строки таблицы).

Замечание. Если указанный поиск не дал результата, *прибегают к искусственному базису*: к матрице ограничений приписывают лишние столбцы так, чтобы возникла единичная матрица, в строке коэффициентов целевой функции появившимся новым переменным сопоставляют коэффициент +M для задачи на минимум и –M для задачи на максимум, где M > 0 – очень большое число (считайте бесконечно большим). Далее задача решается обычным путем до получения оптимального плана. Если в этом плане какая-то из искусственных переменных осталась ненулевой, то делаем вывод о противоречивости ограничений исходной задачи (подробнее см. [1]).

Выполнив указанные выше действия, приступаем к ***проверке найденного плана на оптимальность***.

Сумму парных произведений столбцов <$C_{баз}$> и <План> записываем как значение <$L(X)$> целевой функции на выбранном плане. Аналогичные суммы парных произведений столбцов <$C_{баз}$> и <A_k> записываем как значения Z_k и, наконец, находим элементы последней строки таблицы $\Delta_k = Z_k - C_k$ (из предпоследней строки таблицы вычитаем первую).

Критерий оптимальности. *Если все значения Δ_k неположительны (неотрицательны), то для задачи на минимум (максимум) найденный план оптимален.*

Если этот критерий не выполняется, придется ***перейти к другому опорному плану***, более близкому к оптимальному.

Новый план отличается от старого тем, что k-я переменная, для которой Δ_k не соответствует критерию, принимает некое ненулевое значение $\Theta > 0$ (становится базисной), а одна из бывших базисных (ненулевых) переменных выйдет из базиса. При этом значение целевой функции изменится по правилу:

$$L(X_{\text{новый}}) = L(X_{\text{старый}}) - \Theta\Delta_k. \qquad (2.8)$$

Выбираем k и отыскиваем минимум из отношений компонент плана (столбец <План>) к положительным коэффициентам при k-й переменной (столбец <A_k>):

$$\Theta = \min_{A_{ik}>0} \frac{X_i}{A_{ik}} \qquad (2.9)$$

(ошибка в этом выборе приведет к отрицательным значениям компонент плана, что неприемлемо). *Если не обнаружится положительных коэффициентов, можно утверждать неограниченность целевой функции* – можно увеличивать $L(X)$ до $+\infty$ (уменьшать до $-\infty$).

Приступаем к ***пересчету симплексной таблицы***. Выбираем p-ю строку (уравнение), которой соответствует величина Θ. Выбранное уравнение (правая часть и коэффициенты при неизвестных) делим на коэффициент при X_k:

$$X'_p = X_p / A_{pk}; \quad A'_{pj} = A_{pj}/A_{pk}; \quad j = 1\ldots n.$$

Остальные уравнения получаем вычитанием из них преобразованного выбранного, умноженного на соответствующий коэффициент при k-й переменной:

$$X'_i = X_i - X'_p A_{ik}; A'_{ij} = A_{ij} - A'_{pj} A_{ik}; j = 1..n; i \neq p.$$

В итоге p-ю переменную в базисе заменили k-й и получили новый опорный план. Выполняем упомянутые выше расчеты, необходимые для проверки на оптимальность, и повторяем процесс до получения оптимального плана или вывода о неограниченности значений целевой функции.

Вернемся к рассмотренной выше задаче:

$$\max L(X) = 11X_1 + 2{,}5X_2 + 2{,}1X_3$$

при условиях

$$0{,}25X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}025X_3 + X_4 = 150$$
$$2X_1 + 0{,}5X_2 + 0{,}4X_3 + X_5 = 1600$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Переносим данные в симплексную таблицу; обнаружив единичный базис (A^4, A^5), видим начальный опорный план X^0, в котором четвертая и пятая компоненты равны соответственно 150 и 1600, а остальные – нулю.

Выбираем значения $C_4 = 0$ и $C_5 = 0$ в столбец <$C_{баз}$>, умножаем его на остальные и суммы произведений заносим в клетку $L(X)$ и строку Z_k. Вычитанием из этой строки первой строки таблицы получаем значения Δ_k, которые позволят проверить найденный план на оптимальность.

$C_{баз}$	Базис	План X^0	11	2,5	2,1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_4	150	**0,25**	0,05	0,025	1	0
0	A_5	1600	2	0,5	0,4	0	1
Z_k		0	0	0	0	0	0
Δ_k			**–11**	–2,5	–2,1	0	0

Сопоставляя полученные оценки с (2.8), видим возможность увеличения $L(X)$ при переходе к новому плану, где одна из первых трех компонент плана отлична от нуля. Берем $\Delta_1 = –11$ и находим $\Theta = \min(150/0{,}25;\ 1600/2) = 600$, что соответствует первому уравнению.

Делим первое уравнение на коэффициент при x_1 (0,25); из второго уравнения вычтем полученное первое, умноженное на 2.

$C_{баз}$	Базис	План X^1	11	2,5	2,1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
11	A_1	600	1	0,2	0,1	4	0
0	A_5	400	0	0,1	**0,2**	–8	1
Z_k		6600	11	2,2	1,1	44	0
Δ_k			0	–0,3	**–1,0**	44	0

Из полученных оценок видим два значения $\Delta_k < 0$ (обратите внимание, что строка совпадает с точностью до противоположного знака с коэффициентами целевой функции, которые мы получали при подстановке в нее выражения x_1 через остальные переменные – см. приведенное выше неформализованное решение задачи).

Берем $\Delta_3 = –1$ и находим $\Theta = \min(600/0{,}1;\ 400/0{,}2) = 2000$, соответствующее второму уравнению.

Делим второе уравнение на 0,2 (коэффициент при x_3) и из первого уравнения вычитаем полученное второе, умноженное на 0,1.

Теперь имеем лишь неотрицательные значения Δ_k; следовательно, достигнут максимум целевой функции.

$C_{баз}$	Базис	План X^2	11	2,5	2,1	0	0
			A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
11	A_1	**400**	1	0,15	0	8	–0,5
2,1	A_3	**2000**	0	0,5	1	–40	5
Z_k		**8600**	11	2,7	2,1	4	5
Δ_k			0	0,2	0	4	5

Получен оптимальный план производства X^2 = (400, 0, 2000, 0, 0) – выпуск 400 сервантов и 2000 зеркал. При этом прибыль составляет 8600 д. е.

2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что означает выражение «найти оптимальное решение задачи»?

2. В чем состоит идея симплексного метода?

3. В чем преимущества симплекс-метода поиска оптимального плана перед перебором всех вариантов решения задачи?

4. Объясните, почему при поиске оптимального решения задачи рассматривают только опорные планы.

5. Почему искусственные переменные в целевой функции отражаются с коэффициентом +M для задачи минимизации и –M для задачи максимизации?

6. Когда дальнейший перебор опорных планов становится невозможен?

7. Как убедиться, что найденный оптимальный план не единственный и как найти остальные варианты оптимального поведения?

8. В каких случаях, решая задачу линейного программирования симплексным методом, вы сделаете вывод, что она неразрешима?

9. Предположим, что задача линейной оптимизации состоит в поиске максимума линейной функции при 3 ограничениях на 5 неотрицательных переменных. Может ли ее план с компонентами (1, 2, 3, 4, 5) быть оптимальным? А набор значений (5, 4, 3, 2, 1)?

10. Имеет ли верхняя строчка симплексной таблицы какое-нибудь отношение к понятию «градиента»?

11. Как вы сможете объяснить обнаружение факта неограниченности значения целевой функции при решении реальной задачи максимизации прибыли от какой-то деятельности?

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

2.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Решить задачу линейной оптимизации симплексным методом. Объяснить полученные результаты (математическая и экономическая интерпретация).

1. Минимизировать $L(x) = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ при условиях $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22$ $x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$	**2.** Максимизировать $L(x) = 4\,x_1 - 3x_2 + x_3$ при условиях $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 5$ $5x_1 - x_3 \ge 10$ $-5 \le x_1 \le 2$ $x_2, x_3 \ge 0$
3. Минимизировать $L(x) = 2x_1 - x_2 - x_3$ при условиях $x_1 - 2x_2 + x_3 = 10$ $2x_1 - x_2 - 2x_3 \le 18$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 30$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$	**4.** Максимизировать $L(x) = 4x_1 - 3x_2 + x_3$ при условиях $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 5$ $5x_1 - x_3 \ge 10$ $-5 \le x_2 \le 2$ $x_1, x_3 \ge 0$
5. Максимизировать $L(x) = x_1 + x_2 - 4(x_3 + x_4)$ при условиях $5 \le x_1 + x_2 \le 20$ $2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \le 10$ $x_3 \ge 3$ $x_3, x_2, x_4 \ge 0$	**6.** Максимизировать $L(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$ при условиях $x_1 + x_2 + x_4 \le 12$ $2(x_2 + x_4) \ge 0$ $3x_2 - 5x_3 + x_4 \ge 2$ $x_2, x_4 \ge 0$
7. Минимизировать $L(x) = 10x_1 + 2x_2 - 6x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \le 30$ $4x_2 - 2x_3 \ge 2$ $5x_1 + x_3 \le 0$ $x_3 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$	**8.** Максимизировать $L(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3$ при условиях $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 16$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 21$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

9. Максимизировать $L(x) = -x_1 + 3x_2 + 3x_3$ при условиях $x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$ $x_1 - x_2 \leq -2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	**10.** Минимизировать $L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ при условиях $x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0$ $2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \geq 0$ $x_2 + x_3 - 4 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$
11. Максимизировать $L(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ при условиях $18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360$ $6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192$ $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	**12.** Минимизировать $L(x) = x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4$ при условиях $5 \leq x_1 + x_2 \leq 20$ $2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \leq 10$ $x_3 \geq 3$ $x_1, x_2, x_4 \geq 0$
13. Минимизировать $L(x) = -4x_1 + 4x_2 + 12x_3$ при условиях $x_1 - x_2 + x_3 + 1 \leq 0$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 \leq 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	**14**. Максимизировать $L(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$ при условиях $2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 24$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
15. Максимизировать $L(x) = 5x_1 + 3x_2 +2x_3 - 5x_4 - 10x_5$ при условиях $3x_4 + 10x_5 \geq 50$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$ $x_1 - x_5 \leq 20$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	**16.** Минимизировать $L(x) = 5x_1 + x_2 + 5x_3$ при условиях $4x_1 - 10x_2 + 4x_3 \geq 100$ $3x_2 + 2x_3 = 10$ $x_2 \geq 0$
17. Максимизировать $L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ при условиях $x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0$ $2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \geq 0$ $x_2 + x_3 - 4 \geq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$	**18.** Минимизировать $L(x) = 2x_1 - 3x_2 - 3x_4$ при условиях $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq 3$ $x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

21. Максимизировать $L(x) = 3x_1 + 2x_3 – 6x_6$ при условиях $2x_1 + x_2 – 3x_3 + 6x_6 = 18$ $–3x_1 + 2x_3 + x_4 – 2x_6 = 24$ $x_1 + 3x_3 + x_5 – 4x_6 = 36$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$	**22.** Минимизировать $L(x) = 2x_1 + 3x_2 – x_4$ при условиях $2x_1 – x_2 – 2x_4 \leq 16$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 – 3x_4 = 18$ $– x_1 + 3x_2 + 4x_4 \leq 24$ $x_2, x_3, x_4 \geq 0$
23. Максимизировать $L(x) = x_1 + 3x_2 – 5x_4$ при условиях $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28$ $–3x_1 + 5x_2 – 3x_4 \leq 30$ $4x_1 – 2x_2 + 8x_4 \leq 32$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	**24.** Максимизировать $L(x) = x_1 + 2x_2 – x_3$ при условиях $– x_1 + 4x_2 – 2x_3 \leq 6$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$ $2x_1 – x_2 + 2x_3 = 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
25. Максимизировать $L(x) = 2x_1 + 5x_2 – x_3 – x_4$ при условиях $3(x_1 + x_2 – x_3) \leq 20$ $2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10$ $x_2 – x_4 = 2$ $3 \leq x_1 \leq 6$ $x_3, x_4 \geq 0$	**26**. Максимизировать $L(x) = 8x_2 + 7x_4 + x_6$ при условиях $x_1 – 2x_2 – 3x_4 – 2x_6 = 12$ $4x_2 + x_3 – 4x_4 – 3x_6 = 12$ $5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25$ $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
27. Минимизировать $L(x) = x_1 + 2x_2 – x_3$ при условиях $–x_1 + 4x_2 – 2x_3 \geq 6$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$ $2x_1 – x_2 + 2x_3 = 4$ $x_1 \leq 0$ $x_2, x_3 \geq 0$	**28.** Минимизировать $L(x) = –3x_1 + x_2 + x_3$ при условиях $4x_2 – 5x_3 \geq 3$ $3 \leq x_1 – x_2 + 2x_3 \leq 12$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ $5x_1 – 20 \geq 2$ $x_1, x_3 \geq 0$
29. Максимизировать $L(x) = 8x_1 – 3x_2 + x_3 + 6x_4 – 5x_5$ при условиях $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 – 2x_5 = 28$ $x_1 – 2x_2 + x_4 + x_5 = 31$ $–x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 – 8x_5 = 118$ $x_2, x_3, x_4 \geq 0$	**30.** Минимизировать $L(x) = x_1 +3x_2 – 5x_4$ при условиях $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 28$ $–3x_1 + 5x_2 – 3x_4 \leq 30$ $4x_1 – 2x_2 + 8x_4 \leq 32$ $x_2, x_3, x_4 \geq 0$

31. Минимизировать $L(x) = 18x_1 + 16x_2 + 5x_3 + 21x_4 - 5x_5$ при условиях $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2$ $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	**32.** Максимизировать $L(x) = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3$ при условиях $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 12$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -10$ $x_2, x_3 \geq 0$
33. Максимизировать $L(x) = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4$ при условиях $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 35$ $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30$ $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $x_4 \leq 0$	**34.** Минимизировать $L(x) = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4$ при условиях $-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ $x_1 - x_2 - x_4 \leq -1$ $5x_1 - 3(x_3 + x_4) \geq 12$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
35. Максимизировать $L(x) = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 - 2x_6$ при условиях $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \leq 36$ $-x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24$ $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_5 - x_6 \leq 20$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 12$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$	**36.** Минимизировать $L(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$ при условиях $3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$ $-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
37. Минимизировать $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ при условиях $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6$ $-x_1 + x_3 \leq 2$ $2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8$ $x_1 \geq 10,\ x_2 \geq 2$ $x_3, x_4 \geq 0$	**38.** Максимизировать $L(x) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4$ при условиях $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 280$ $x_1 + x_3 + x_4 \leq 80$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 250$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
39. Максимизировать $L(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$ при условиях $3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 12$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$ $-2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8$ $x_1 \geq 0$	**40.** Минимизировать $L(x) = 3x_1 + 2x_5 - 6x_6$ при условиях $2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34$ $4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28$ $-3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Цель практического занятия

Приобретение теоретических знаний и элементарных практических навыков построения пары двойственных линейных оптимизационных моделей экономических процессов, их решения с применением известной определенной связи между этими решениями, анализа полученного решения и использования для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

1.1. Теоретические положения

Зачем нужна некая двойственность для решения линейных программ? Любой человек, познакомившийся с симплексным методом в процессе решения хотя бы двух-трех не слишком громоздких задач, может быть уверен, что ему посильно решение любой задачи линейного программирования. Не будем его разочаровывать, но хотелось бы посмотреть на выражение его лица, когда ему предложат несложную, по нашему мнению, задачу с 20 ограничениями на 3 переменные.

Приводя задачу к каноническому виду для последующего решения симплексным методом, ему придется ввести до 20 дополнительных переменных и получить задачу с 20 ограничениями на 23 переменные. Хорошо, если начальный опорный план очевиден, иначе, возможно, придется вводить до 20 искусственных переменных.

Если же ему предложить задачу с тремя ограничениями на 20 переменных, то сравнительная трудоемкость решения этой задачи ничтожна.

Здесь читатель может уяснить, что решение задачи с m ограничениями на n переменных при $m << n$ значительно проще решения для случая $m >> n$.

Оказывается, что упомянутый тяжелый случай может быть сведен к более простому случаю, если на помощь призвать хотя бы элементарные истины теории двойственности[1].

Пусть имеются две задачи, состоящие в поиске значений компо-

[1] Здесь мы не вдаемся в обоснование приводимых формулировок, которое выступает частным следствием известной теоремы Куна-Таккера [1].

нент вектора $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, которые обеспечивают:

максимум	минимум
$L(X) = C^T X$	$L(X) = C^T X$
при условиях	при условиях
$AX = B$	$AX = B$
$X \ge 0$	$X \ge 0$

где C, X – n-мерные векторы-столбцы; A – матрица размерности $m \times n$; B – m-мерный вектор-столбец (требование неотрицательности компонент B необязательно); T – знак транспонирования. Принятая здесь форма ограничений, как известно, называется *канонической*.

Соответствующие задачи поиска вектора $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, обеспечивающего

минимум	максимум
Ł$(Y) = B^T Y$	Ł$(Y) = B^T Y$
при условиях	при условиях
$A^T Y \ge C$	$A^T Y \le C$

где Y – m-мерный вектор-столбец, называются ***сопряженными*** к исходным задачам.

Прямая и сопряженная задачи образуют ***пару двойственных задач***. Например,

исходная задача	*сопряженная задача*
максимум	минимум
$L(X) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$	Ł$(Y) = 13y_1 + 17y_2$
при условиях	при условиях
$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 13$	
$-x_1 + x_2 + 5x_3 = 17$	
$x_1 \ge 0$	$4y_1 - y_2 \ge 3$
$x_2 \ge 0$	$2y_1 + y_2 \ge -2$
$x_3 \ge 0$	$8y_1 + 5y_2 \ge 4$

Сразу же заметим, что условие $x_k \ge 0$ и построенное по коэффициентам при x_k условие сопряженной задачи называют **парой двойственных условий**!

В нашем примере присутствуют три таких пары:

$$\{x_1 \ge 0;\ 4y_1 - y_2 \ge 3\},$$

$$\{x_2 \ge 0;\ 2y_1 + y_2 \ge -2\},$$

$$\{x_3 \ge 0;\ 8y_1 + 5y_2 \ge 4\}$$

(для условий $4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 13$ и $-x_1 + x_2 + 5x_3 = 17$, заданных в виде равенств, пар нет).

Если условия исходной задачи заданы в произвольной (не канони-

ческой) форме, то постановка сопряженной задачи чуть-чуть усложняется.

Например, если стоит задача минимизации

$$L(X) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

при условиях

$$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 13 \qquad \textbf{(1)}$$
$$-x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 17 \qquad \textbf{(2)}$$
$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 23 \qquad \textbf{(3)}$$
$$x_1 \geq 0 \qquad \textbf{(4)}$$
$$x_2 \geq 0 \qquad \textbf{(5)}$$
$$x_3 \geq 0 \qquad \textbf{(6)}$$

(мы нарочно пронумеровали все условия задачи, чтобы осознанно сопоставить им двойственные условия, если таковые обнаружатся).

Приведем эти условия к канонической форме:

$$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 13$$
$$-x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 17$$
$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 23 \qquad \textbf{(3)}$$
$$x_1 \geq 0 \qquad \textbf{(4)}$$
$$x_2 \geq 0 \qquad \textbf{(5)}$$
$$x_3 \geq 0 \qquad \textbf{(6)}$$
$$x_4 \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$
$$x_5 \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

(например, исходное неравенство 1 тождественно соответствующему уравнению и неравенству $x_4 \geq 0$).

Теперь, поставив сопряженную задачу максимизации

$$Ł(Y) = 13y_1 + 17y_2 + 23y_3$$

при условиях

$$4y_1 - y_2 + y_3 \leq 3 \qquad \textbf{(4)}$$
$$2y_1 + y_2 + 3\,y_3 \leq -2 \qquad \textbf{(5)}$$
$$8y_1 + 5\,y_2 - 4y_3 \leq 4 \qquad \textbf{(6)}$$
$$-\,y_1 \leq 0 \qquad \textbf{(1)}$$
$$y_2 \leq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

и пометив соответствующие пары, видим, что **для каждого неравенства исходной задачи есть пара в сопряженной задаче**, тогда как для уравнения (3) пары там не находится.

Если в условиях последней исходной задачи «потерять» условие неотрицательности, например переменной $x_1 \geq 0$, то для приведения к каноническому виду придется выполнить замену ее разностью неотрицательных переменных $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1' \geq 0$, $x_1'' \geq 0$. Тогда в сопряженной задаче вместо условия $4y_1 - y_2 + y_3 \leq 3$ возникает пара условий:

$$4y_1 - y_2 + y_3 \leq 3$$
$$-4y_1 + y_2 - y_3 \leq -3,$$

которая порождает уравнение (!) $4y_1 - y_2 + y_3 = 3$.

Таким образом, *отсутствие условия неотрицательности на некоторую переменную приводит к возникновению условия – равенства в сопряженной задаче*.

Итак, мы видим возможность трудно решаемой задаче с числом ограничений, существенно бóльшим числа переменных, сопоставить проще решаемую сопряженную задачу. Вне сомнений, эта возможность была бы бесполезной, если бы между решениями двойственных задач не существовало определенной связи.

Первая теорема двойственности. ***Если одна из двойственных задач имеет решение, то разрешима и сопряженная к ней задача, причем экстремальные значения их целевых функций равны.***

Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то ограничения сопряженной задачи противоречивы.

Если в одной из задач противоречивы ограничения, то в другой задаче либо не ограничена целевая функция, либо противоречивы ограничения.

Таким образом, если при решении одной задачи обнаружится неограниченность целевой функции или противоречивость ограничений, то нет нужды решать двойственную (сопряженную к ней) задачу.

Если же обнаруживается разрешимость решаемой задачи, то для сопряженной задачи приведенная теорема дает лишь оптимальную оценку значения ее целевой функции, но не оптимальные значения ее переменных.

Вторая теорема двойственности. ***Если пара двойственных задач разрешима, то для их оптимальных планов в каждой паре двойственных условий, если одно выполняется строгим неравенством, то другое выполняется как строгое равенство.***

Возьмем пару двойственных задач:

максимум	минимум
$L(X) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$	$Ł(Y) = 13y_1 + 17y_2$
при условиях	при условиях
$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$	
$-x_1 + x_2 + 5x_3 = 17$	
$x_1 \geq 0$	$4y_1 - y_2 \geq 3$
$x_2 \geq 0$	$2y_1 + y_2 \geq 2$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 5y_2 \geq 4$

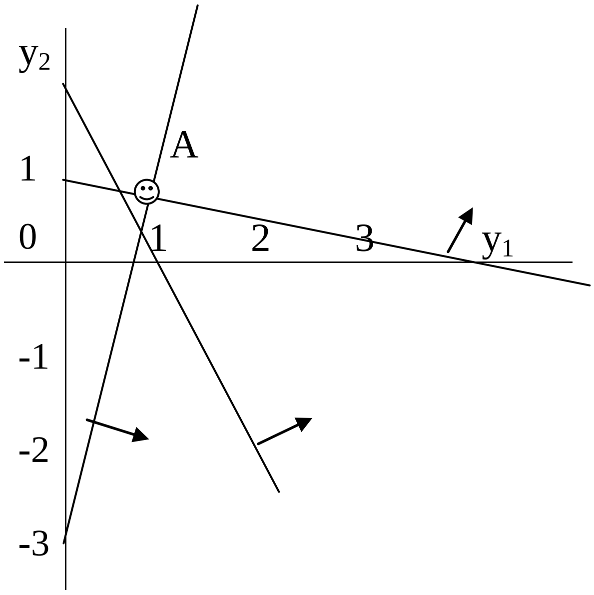


Рис. 4

Очевидно, что сопряженную задачу можно решить графически (рис. 4) и убедиться, что искомый минимум достигается на пересечении прямых: $4y_1 - y_2 = 3$,

$$y_1 + 5y_2 = 4.$$

Решая эту систему, получаем:

$$Y_{\text{опт}} = (19/21,\ 13/21)$$

и минимум Ł(Y) равен 156/7.

При подстановке найденного решения в условия сопряженной задачи видим, что второе условие выполняется неравенством $2y_1 + y_2 = 2\cdot(19/21) + (13/21) =$ $= (51/21) > 2$. Тогда соответствующее условие в исходной задаче (по второй теореме двойственности) должно выполниться строгим равенство, то есть $x_2 = 0$. В сочетании с уже присутствующими двумя равенствами получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решение которой дает $X_{\text{опт}} = (16/7, 0, 27/7)$ и максимум $L(X) = 156/7$.

Вернемся к рассмотренной выше паре задач, записав двойственные пары условий в порядке их соответствия:

$\min L(X) = 3x - 2x_2 + 4x_3$	$\max Ł(Y) = 13y_1 + 17y_2 + 23y_3$
при условиях	при условиях
$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 13$ **(1)**	$-y_1 \leq 0$ **(1)**
$-x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 17$ **(2)**	$y_2 \leq 0$ **(2)**
$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 23$ **(3)**	y_3
$x_1 \geq 0$ **(4)**	$4y_1 - y_2 + y_3 \leq 3$ **(4)**
$x_2 \geq 0$ **(5)**	$2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -2$ **(5)**
$x_3 \geq 0$ **(6)**	$8y_1 + 5y_2 - 4y_3 \leq 4$ **(6)**

Посмотрев на первую из задач, увидев желательность для минимизации взять значения x_1 и x_3 как можно меньшими, а x_2 по возможности большим, берем вариант $X = (0, 23/3, 0)$ и подстановкой в условия (1)–(6) обнаруживаем, что все 6 условий задачи выполняются. Это уже достижение, но будет ли этот **план** оптимальным?

Если этот план оптимален, то в итоге подстановки, согласно теоремам двойственности, имеем

min		max
$L(X) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -46/3$	$\rightarrow$	$Ł(Y) = 13y_1 + 17y_2 + 23y_3 = -46/3$
при условиях		при условиях
$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 > 13$ **(1)**	$\rightarrow$	$-y_1 = 0$ **(1)**
$-x_1 + x_2 + 5x_3 < 17$ **(2)**	$\rightarrow$	$y_2 = 0$ **(2)**
$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 23$ **(3)**		
$x_1 = 0$ **(4)**	$\rightarrow$	$4y_1 - y_2 + y_3 \le 3$ **(4)**
$x_2 > 0$ **(5)**	$\rightarrow$	$2y_1 + y_2 + 3y_3 = -2$ **(5)**
$x_3 = 0$ **(6)**	$\rightarrow$	$8y_1 + 5y_2 - 4y_3 \le 4$ **(6)**

Решив систему уравнений (1–2, 5), убедившись в выполнении неравенств (4, 6) и в равенстве значений целевых функций, видим оптимальность решения $Y = (0, 0, -2/3)$. Если бы решение системы не отвечало остальным условиям, оптимальность нашей догадки пришлось бы отклонить.

Заметим, что *если одна из задач решается симплексным методом, то решение сопряженной задачи получается в итоговой симплексной таблице среди значений оценок Z_k в позициях, соответствующих начальному единичному базису.*

Так при попытке решения исходной задачи максимизации нам приходится прибегнуть к искусственному базису (переменные x_4, x_3) и выполнить цикл преобразований симплексного метода:

$C_{баз}$	Базис	План	3	2	4	–M	–M
	плана	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
–M	A_4	13	4	2	1	1	0
–M	A_5	17	–1	1	**5**	0	1
Z_k		$L(X)$ = –30M	–3M	–M	–6M	–M	–M
Δ_k			–3M–3	–M–2	**–6M–4**	0	0

$C_{баз}$	Базис	План	3	2	4	–M	–M
	плана	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
–M	A_4	48/5	**21/5**	9/5	0	1	–1/5
4	A_3	17/5	–1/5	1/5	1	0	1/5
Z$_k$		$L(X)$ =	–21/5M–4/5	–9/5M+4/5	4	–M	1/5 M+4/5
Δ_k		–48/5M+68/5	**–21/5–19/5**	–9/5M–6/5	0	0	6/5 M+4/5

$C_{баз}$	Базис плана	План X	3 A_1	2 A_2	4 A_3	–M A_4	–M A_5
3	A_1	**16/7**	1	3/7	0	5/21	–1/21
4	A_3	**27/7**	0	2/7	1	1/21	4/21
Z_k		$L(X)$=**116/7**	3	17/7	4	**19/21**	**13/21**
Δ_k			0	3/7	0	M+19/21	M+136/21

Получаем в итоге решение обеих задач.

Замечание 1. Обратите внимание на то, что на месте начального единичного базиса получается матрица, обратная к матрице векторов оптимального базиса Баз = $[A_1, A_3]$: в нашем случае

$$\begin{vmatrix} 5/21 & -1/21 \\ 1/21 & 4/21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}^{-1},$$

которая может оказаться полезной в так называемом постоптимальном анализе для некоторых оптимизационных задач. Умножая эту матрицу на исходный вектор-столбец правой части системы ограничений, получаем вектор значений соответствующих базисных компонент плана $X_{опт}$ = Баз$^{-1}\cdot B$; умножая вектор-строку, составленную из коэффициентов целевой функции при базисных переменных, на Баз$^{-1}$, получаем решение сопряженной задачи $Y_{опт} = C_{баз}\cdot$ Баз$^{-1}$.

Замечание 2. Иногда может возникнуть задача максимизации $L(X) = C^TX$ при условиях $AX \le B$, $X \ge 0$, где X – вектор объемов производства некоторых видов продукции; B – вектор запасов сырья; A – матрица расходных норм сырья на производство продукции; C – вектор объявленных цен на продукцию. Вектор двойственных переменных в таком случае интерпретируется как объективная стоимость используемого сырья (иногда используют такие термины, как удельная ценность или теневая цена [2, 3]).

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Как запишется сопряженная задача для задачи минимизации $L(X) = C^TX$ при условиях $AX \le B$, $X \ge 0$?

2. Как запишется сопряженная задача для задачи максимизации $L(X) = C^TX$ при условиях $AX \ge B$, $X \ge 0$?

3. Как запишется сопряженная задача для задачи максимизации $L(X) = C^TX$ при условиях $AX \le B$?

4. Записана пара двойственных задач. Какую из них можно принять за исходную задачу?

5. Какую пользу может принести постановка сопряженной задачи?

6. На одну из переменных в постановке задачи отсутствует требование ее неотрицательности. Как запишется соответствующее условие сопряженной задачи?

7. Одно из условий задачи записано в виде равенства. Как запишется соответствующее условие сопряженной задачи?

8. Какими путями предпочтительнее решать задачу с 2 условиями на 8 переменных?

9. Что бы вы предложили при решении задачи с одним ограничением на 8 неотрицательных переменных?

10. Для некоторой задачи при поиске начального опорного плана вы прибегли к искусственным переменным. Запишите для полученной задачи сопряженную задачу и докажите ее тождественность задаче, сопряженной к исходной.

11. В процессе подбора начального опорного плана для симплексной процедуры одно из уравнений умножили на (–1). Что произойдет со значениями двойственных переменных?

12. Решая задачу максимизации $L(X) = C^T X$ при условиях $AX \leq B$, $X \geq 0$, мы получили вектор X, при котором одно из условий $AX \leq B$ выполняется строгим неравенством. Что вы скажете о значении соответствующей двойственной переменной?

3.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Для представленных ниже задач поставить сопряженные, выделить пары двойственных условий и найти решение обеих задач двумя способами: (1) решить одну из задач графически и найти решение сопряженной задачи на основе второй теоремы двойственности; (2) решить задачи с использованием симплексного метода и проверить правильность найденных решений на основе теорем двойственности.

1.	$\max L(x) = 6x_1 + 5x_2$ при $x_1 + 3x_2 \leq 4$ $2x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	**2.**	$\max L(x) = x_1 + x_2$ при $2x_1 + 3x_2 \geq 5$ $x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_2 \geq 0$

3.	$\max L(x) = x_1 + x_2$ при $2x_1 + 3x_2 \le 6$ $3x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	**4.**	$\max L(x) = x_1 + x_2$ при $x_1 + x_2 \le 3$ $-2x_1 + x_2 \ge 2$
5.	$\min L(x) = x_1 + x_2$ при $-2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 - x_2 \le 2$	**6.**	$\min L(x) = x_1 + x_2$ при $x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1 - 2x_2 \ge 0$ $x_1 \ge 0$
7.	$\min L(x) = 7x_2$ при $-5x_1 + 3x_2 \ge 5$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 \ge 0$	**8.**	$\min L(x) = 2x_1 - 3x_2$ при $2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3$ $x_1 - x_2 + x_2 \ge 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$
9.	$\min L(x) = x_1$ при $- x_1 + x_2 \le 7$ $x_1 + x_2 = 0$ $x_2 \ge 0$	**10.**	$\max L(x) = 3x_1 + 2x_2$ при $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + x_2 \ge -3$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$
11.	$\max L(x) = 3x_1 + x_2$ при $-x_1 + x_2 \le 1$ $x_1 + x_2 \ge -1$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	**12.**	$\max L(x) = x_1 - 2x_2$ при $5x_1 - 2x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 1$ $-3x_1 + x_2 \le 3$ $-3x_1 - 3x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
13.	$\min L(x) = 3x_1 + 3x_3 + + 2x_4$ при $5x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \ge -2$ $x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$	**14.**	$\max L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$ при $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4$ $-x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 10$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$
15.	$\max L(x) = 8x_1 + 19x_2 + 7x_3$ при $3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1$ $x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$	**16.**	$\max L(x) = x_1 + x_2$ при $x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 + 2x_2 \ge 2$ $2x_1 + x_2 \le 10$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

17.	$\min L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при $x_1 + x_2 \le 4$ $3x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1 + 5x_2 \le 4$ $0 \le x_1 \le 3$ $x_2 \ge 0$	**18.**	$\min L(x) = x_1 - x_2$ при $3x_1 + 2x_2 \ge 6$ $x_1 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_2 \ge 0$
19.	$\max L(x) = x_1 + 3\,x_2 + x_3$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $3x_1 - x_2 - x_3 = 1$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$	**20.**	$\max L(x) = x_1 + 2x_2$ при $-3x_1 + 2x_2 \le 6$ $5x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 + x_2 \ge -1$ $x_1 \ge 0$
21.	$\min L(x) = x_1 + x_2$ при $x_1 + x_2 \ge 1$ $x_1 - 2x_2 \le 1$ $3x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	**22.**	$\min L(x) = 2x_1 + x_2$ при $x_1 + x_2 \ge 1$ $3x_1 - 2x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \ge 1$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$
23.	$\max L(x) = x_1 + x_2 + 3x_3$ при $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$ $2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$	**24.**	$\max L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при $x_1 + x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \ge 2$ $x_2 \ge 0$
25.	$\min L(x) = 2x_1 - 3x_2$ при $-4x_1 + 5x_2 \le 20$ $2x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 - x_2 \le 6$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	**26.**	$\max L(x) = x_1 + 3x_2$ при $-x_1 - x_2 \ge -3$ $6x_1 + x_2 \le 14$ $2x_1 - 3x_2 \le 6$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
27.	$\min L(x) = x_1 + x_2$ при $3x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	**28.**	$\min L(x) = x_1 - x_2$ при $3x_1 + 2x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_2 \ge 0$
29.	$\max L(x) = 2x_1 - 3x_2$ при $-x_1 + x_2 \le 2$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $5x_1 - 2x_2 \le 10$ $x_2 \le 4$ $x_1 \ge 0$	**30.**	$\max L(x) = 2x_1 + x_2$ при $5x_1 - 2x_2 \le 7$ $-x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_2 \ge 0$

31.	$\min L(x) = 2x_1 + x_2$ при $x_1 - 2x_2 \le 1$ $2x_1 - x_2 \le 1$ $-3x_1 + x_2 \le 0$ $2x_1 - x_2 \le 0$ $2x_1 - 3x_2 \ge 3$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	**32.**	$\min L(x) = 5x_1 - 10x_2$ при $-2x_1 + x_2 \le 1$ $-x_1 + x_2 \le 2$ $3x_1 + x_2 \le 8$ $-2x_1 + 3x_2 \ge -9$ $4x_1 + 3x_2 \ge 0$ $x_1 \ge 0$
33.	$\max L(x) = x_1 + x_2$ при $x_1 + 2x_2 \le 1$ $2x_1 + x_2 \le 1$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**34.**	$\min L(x) = x_1 - x_2$ при $x_1 + x_2 \le 1$ $2x_1 + 3x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
35.	$\max L(x) = x_1 - x_2$ при $-2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 + 5x_2 \le 15$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge -1$ $x_1 \le 1$	**36.**	$\max L(x) = x_1 - x_2$ при $-x_1 + 14x_2 \le 14$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + x_2 \ge -1$ $-2x_1 + x_2 \le 3$ $4x_1 + 3x_2 \ge 0$ $x_1 \ge -1$
37.	$\min L(x) = 4x_1 + 4x_2$ при $2x_1 + x_2 \ge -1$ $3x_1 - x_2 \ge -1$ $x_1 + 2x_2 \ge 1$ $x_2 \ge 0$	**38.**	$\min L(x) = 4x_1 + 5x_2$ при $x_1 + x_2 \ge -1$ $-x_1 + 2x_2 \ge -1$ $2x_1 + x_2 \ge 1$ $x_2 \ge 0$
39.	$\min L(x) = x_1 + 6x_2$ при $x_1 + 2x_2 \ge 1$ $-x_1 + 2x_2 \ge 0$ $x_1 + x_2 \ge 1$ $x_2 \ge 0$	**40.**	$\min L(x) = 6x_1 + 4x_2$ при $2x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $3x_1 + x_2 \ge 0$ $-x_1 + 2x_2 \ge 1$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель практического занятия

Получение теоретических знаний и элементарных практических навыков по формулированию прикладных экономико-математических моделей параметрической линейной оптимизации, их решению, анализу полученного решения и использованию для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

4.1. Теоретические положения

Параметрическое программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения зависят от одного или нескольких параметров.

Необходимость рассмотрения подобных задач обусловлена различными причинами. Одной из основных является та, что исходные данные для численного решения любой реальной задачи оптимизации в большинстве случаев определяются приближенно или могут изменяться под влиянием каких-то факторов, что может существенно сказаться на оптимальности выбираемой программы (плана) действий. Соответственно, разумно указывать не конкретные данные, а *диапазон возможного изменения данных*, чтобы в результате решения иметь наилучшие планы для любого варианта исходных данных.

С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как одно из средств анализа чувствительности решения к вариации исходных данных, оценки устойчивости решения.

Заметим, что существуют различные подходы к подобному анализу (например, на основе постановки двойственной задачи). Здесь мы, не ссылаясь на двойственные оценки, рассмотрим самые простейшие варианты решения для самых простейших параметрических программ.

Рассмотрим задачу параметрического линейного программирования, в которой только ***коэффициенты целевой функции линейно зависят от некоторого единственного параметра*** $\boldsymbol{\lambda}$ (времени, температуры и т. п.):

отыскать максимум (или минимум) функции

$$L(X, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} (C_j + D_j \lambda) X_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j X_j = B, \quad X_j \geq 0, j = 1, ..., n, \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2.$$

Если обратиться к геометрической интерпретации задачи, то можно заметить, что вектор-градиент линейной формы определяется ее параметром. Например, для целевой функции $L(X, \lambda) = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ при различных значениях параметра λ градиент определяет различные направления роста функции (рис. 5).

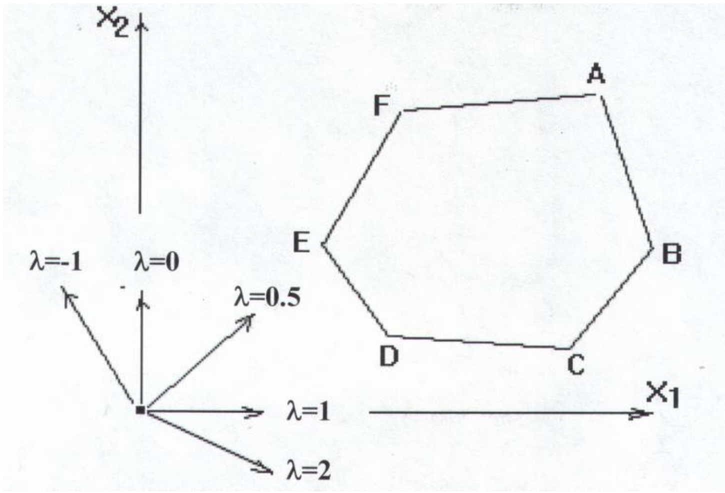


Рис. 5

Нетрудно видеть, что если при некотором значении параметра максимум достигается в вершине A, то небольшая вариация этого значения несколько изменит направление градиента, но не изменит положение точки максимума. Отсюда напрашивается вывод о том, что некоторый план, оптимальный при $\lambda = \lambda_0$, оптимален и в окрестности λ_0, т. е. при $\alpha \le \lambda \le \beta$, где $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$.

Можно заметить, что при градиенте, ставшем перпендикулярным некоторой стороне многоугольника планов, имеем два разных оптимальных опорных плана с одним и тем же значением линейной формы, откуда можно утверждать непрерывность экстремума линейной формы по λ.

В случае неограниченности множества планов можно утверждать, что *если линейная форма не ограничена при $\lambda = \lambda_0$, то она не ограничена при всех λ, больших или меньших λ_0.*

Алгоритм для решения задач параметрического линейного программирования в случае зависимости от параметра коэффициентов целевой функции незначительно отличается от обычного симплексного метода (примеры решения подобных задач приведены ниже).

В случае ***зависимости от параметра компонент вектора правых частей ограничений***, то есть при поиске экстремума функции

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j X_j = B + \lambda D$$

$$X_j \ge 0, \quad (j = 1, ..., n)$$

$$\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$$

возникают сложности, связанные с требованием неотрицательности компонент плана при любых λ (сохранения неотрицательности правой части системы уравнений при всех ее тождественных преобразованиях). Поэтому разумнее поставить двойственную задачу и воспользоваться алгоритмом решения параметрической линейной программы при зависимости от параметра коэффициентов целевой функции и с помощью известных двойственных соотношений находить решение исходной задачи.

Пример 1. Рассмотрим задачу минимизации

$$L(X, \lambda) = \lambda X_1 - \lambda X_2 - X_3 + X_4$$

при условиях:

$$3X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 \geq 5$$
$$2X_1 - 2X_2 + X_3 - X_4 \leq 3$$
$$X_k \geq 0 \ (k = 1, ..., 4)$$
$$-\infty < \lambda < \infty$$

Решение. Как обычно, приводим задачу к канонической форме и с использованием метода искусственного базиса отыскиваем начальный опорный план $X^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 3, 5)$ с $L(X^0, \lambda) = 5$M.

$C_{баз}$	Базис 1	План $X_{баз}$	λ	–λ	–1	1	0	0	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
M	A_7	**5**	3	–3	–1	**1**	–1	**0**	**1**
0	A_6	**3**	2	–2	1	–1	0	**1**	**0**
Δ_k		5M	3M– λ	–3M+λ	–M+1	**M–1**	–M	0	0

Так как определяющую роль на этом шаге решения играет величина M, превышающая все величины задачи, то не обращаем внимания на λ и, обнаружив невыполнение критерия оптимальности для X^0, вводим в базис A_4 вместо A_7 (переходим к следующему опорному плану):

$C_{баз}$	Базис 2	План $X_{баз}$	λ	–λ	–1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	**5**	3	–3	–1	**1**	–1	**0**
0	A_6	**8**	**5**	–5	0	**0**	–1	**1**
Δ_k		5	**3 – λ**	–3 + λ	0	0	–1	0

Полученный опорный план $X^1 = (0, 0, 0, 5, 0, 8)$ с $L(X^1, \lambda) = 5$ будет оптимальным, если все значения Δ_k неположительны, т. е.

$$\begin{cases} \Delta_1 = 3 - \lambda \leq 0 \\ \Delta_2 = -3 + \lambda + \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \geq 3 \\ \lambda \leq 3 \end{cases}$$

Решаем систему двух линейных неравенств и обнаруживаем, что найденный *план* X^1 *оптимален при* $\lambda = 3$.

Исследуем оставшиеся из заданного диапазона значения λ.

Пусть $\lambda > 3$. Тогда $\Delta_2 > 0$ и вектор A_2 подлежит вводу в базис, но в силу неположительности его компонент приходим к выводу, что *при $\lambda > 3$ линейная форма задачи не ограничена снизу.*

Пусть $\lambda < 3$. Тогда $\Delta_1 > 0$ и в базис вводится вектор A_1:

$C_{баз}$	Базис 3	План $X_{баз}$	λ	$-\lambda$	-1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	**1/5**	**0**	**0**	–1	1	–2/5	–3/5
λ	A_1	**8/5**	**1**	**–1**	0	0	–1/5	1/5
Δ_k		$(8\lambda+1)/5$	0	0	0	0	**$-(\lambda+2)/5$**	$(\lambda-3)/5$

Полученный опорный план является оптимальным, если все значения Δ_k неположительны, т. е.

$$\begin{cases} \Delta_5 = -(\lambda+2)/5 \le 0 \\ \Delta_6 = (\lambda-3)/5 \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \ge -2 \\ \lambda \le 3 \end{cases}$$

Решая эту систему линейных неравенств, обнаруживаем, что найденный *план* $X = (8/5, 0, 0, 1/5)$ с $L(X, \lambda) = (8\lambda + 1)/5$ *оптимален при* $-2 \le \lambda \le 3$.

Пусть $\lambda < -2$. Тогда $\Delta_5 > 0$ и вектор A_5 подлежит вводу в базис; в силу неположительности его компонент приходим к выводу, что *при $\lambda < -2$ линейная форма задачи не ограничена снизу.*

Таким образом, мы получили решение задачи:

$$L_{\min}(X, \lambda) = \begin{cases} \to -\infty, & \lambda < -2 \\ (8\lambda+1)/5, & -2 \le \lambda \le 3; \quad X_{опт} = (8/5, 0, 0, 1/5) \\ 5, & \lambda = 3; \quad X_{опт} = (0, 0, 0, 5) \\ \to -\infty, & \lambda > 3. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим задачу минимизации

$$L(X, \lambda) = (2-\lambda)X_1 - 3\lambda X_2 + (\lambda - 3)X_3$$

при условиях

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 5$$
$$3X_1 - X_2 - 2X_3 \le 6$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 8$$
$$X_k \ge 0 \ (k = 1, 2, 3); \ -\infty < \lambda < \infty$$

Решение.

$C_{баз}$	Базис 1	План $X_{баз}$	$2-\lambda$	-3λ	$\lambda-3$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	A_4	**5**	1	1	1	**1**	**0**	**0**
0	A_5	**6**	3	–1	–2	**0**	**1**	**0**
0	A_6	**8**	1	2	**2**	**0**	**0**	**1**
Δ_k		0	$\lambda-2$	3λ	**$3-\lambda$**	0	0	0

Находим начальный опорный план задачи X^0 = (0, 0, 0, 5, 6, 8) с $L(X^0, \lambda) = 0$, который был бы оптимален при выполнении условий:

$$\Delta_1 = \lambda - 2 \le 0$$
$$\Delta_2 = 3\lambda \le 0$$
$$\Delta_3 = 3 - \lambda \le 0$$

Однако попытка решения этой системы трех линейных неравенств обнаруживает ее противоречивость ($\lambda \le 2$, $\lambda \le 0$, $\lambda \ge 3$).

Пусть $\lambda < 3$. Тогда $\Delta_3 > 0$ и вводим в базис A_3:

$C_{баз}$	Базис 2	План $X_{баз}$	$2-\lambda$	-3λ	$\lambda-3$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	A_4	**1**	1/2	0	**0**	**1**	**0**	–1/2
0	A_5	**14**	4	1	**0**	**0**	**1**	1
$\lambda-3$	A_3	**4**	1/2	**1**	**1**	**0**	**0**	1/2
Δ_k		$4(\lambda-3)$	$(3\lambda-7)/2$	$\boxed{\mathbf{4\lambda-3}}$	0	0	0	$(\lambda-3)/2$

Полученный опорный план оптимален, если

$$\Delta_1 = (3\lambda - 7)/2 \le 0$$
$$\Delta_2 = 4\lambda - 3 \le 0$$
$$\Delta_6 = (\lambda - 3)/2 \le 0$$

Решение этой системы неравенств обнаруживает, что *план* $X = (0, 0, 4)$ с $L(X, \lambda) = 4(\lambda - 3)$ *оптимален при* $\lambda \le 3/4$.

Пусть $\lambda > 3/4$. Тогда $\Delta_2 > 0$ и вводим в базис A_2:

$C_{баз}$	Базис 3	План $X_{баз}$	$2-\lambda$	-3λ	$\lambda-3$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	A_4	**1**	1/2	**0**	0	**1**	**0**	–1/2
0	A_5	**10**	7/2	**0**	–1	**0**	**1**	1/2
-3λ	A_2	**4**	1/2	**1**	1	**0**	**0**	1/2
Δ_k		-12λ	$-(\lambda+4)/2$	0	$-4\lambda+3$	0	0	$-3\lambda/2$

Полученный план оптимален, если

$$\Delta_1 = -(\lambda + 4)/2 \le 0;\ \Delta_3 = -4\lambda + 3 \le 0;\ \Delta_6 = -3\lambda/2 \le 0.$$

Решение системы трех неравенств обнаруживает, что *план* $X = (0, 4, 0)$ с $L(X, \lambda) = -12\lambda$ *оптимален при всех* $\lambda \ge 3/4$.

Таким образом, рассмотрен весь диапазон значений λ. Итог решения:

$$L_{\min}(X, \lambda) = \begin{cases} 4(\lambda - 3), & \lambda \le \frac{3}{4}; \qquad X_{опт} = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 4\ ) \\ -12\lambda, & \lambda \ge \frac{3}{4}; \qquad X_{опт} = (\ 0\ ,\ 4\ ,\ 0) \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим задачу максимизации

$$L(X, \lambda) = X_1 - X_2 - 2X_3$$

при условиях $X_1 + X_2 + X_3 \le 3 + \lambda$

$$2X_1 - X_2 + X_3 \le 5 - \lambda$$

$$X_k \ge 0 \ (k = 1, 2, 3); -\infty < \lambda < \infty$$

<u>Решение</u>. Чтобы решить эту задачу, достаточно решить двойственную к ней задачу, имеющую вид:

минимизировать $L(Y, \lambda) = (3 + \lambda)\, Y_1 + (5 - \lambda)\, Y_2$

при условиях $Y_1 + 2Y_2 \ge 1$

$$Y_1 - Y_2 \ge -1$$

$$Y_1 + Y_2 \ge -2$$

$$Y_1, Y_2 \ge 0; -\infty < \lambda < \infty$$

Приводим двойственную задачу к канонической форме (умножив предварительно второе и третье неравенства на –1) и начинаем решение обычным симплексным методом. Заметьте, что указанное умножение тождественно смене знака у переменных x_2 и x_3 исходной задачи.

$C_{баз}$	Базис	План	$3 + \lambda$	$5 - \lambda$	0	0	0	M
	1	$Y_{баз}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
M	A_6	**1**	**1**	2	–1	**0**	**0**	**1**
0	A_4	**1**	–1	1	0	**1**	**0**	**0**
0	A_5	**2**	–1	–1	0	**0**	**1**	**0**
Δ_k		M	**M–3–λ**	2M–5+λ	–M	0	0	0

$C_{баз}$	Базис	План	$3 + \lambda$	$5 - \lambda$	0	0	0	M
	2	$Y_{баз}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$3 + \lambda$	A_1	**1**	**1**	2	–1	**0**	**0**	1
0	A_4	**2**	**0**	3	–1	**1**	**0**	1
0	A_5	**3**	**0**	1	–1	**0**	**1**	1
Z_k		$3 + \lambda$	$3 + \lambda$	$6 + 2\lambda$	$-(3 + \lambda)$	0	0	$3 + \lambda$
Δ_k			0	**1 + 3λ**	$-(3 + \lambda)$	0	0	$3 + \lambda - M$

Найденный план $Y = (1, 0)$ оптимален, если $\Delta_2 = (1 + 3\lambda) \le 0$ и $\Delta_3 = -(3 + \lambda) \le 0$, т. е. при $-3 \le \lambda \le -1/3$ имеем $Y_{опт} = (1, 0)$. В строке Z_k (в позициях 6, 4 и 5 в соответствии с начальным базисом) находим решение прямой задачи: $\boldsymbol{X_{опт} = (3 + \lambda, -0, -0)}$, $L(X_{опт}) = 3 + \lambda$.

Пусть $\lambda < -3$. Попытка ввода в базис вектора A_3 обнаруживает, что в этом случае *линейная форма решаемой (двойственной) задачи* *не ограничена снизу и, следовательно, ограничения исходной задачи противоречивы*.

В случае $\lambda > -1/3$ имеем:

$C_{баз}$	Базис 3	План $Y_{баз}$	$3+\lambda$ A_1	$5-\lambda$ A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	M A_6
$5-\lambda$	A_2	**1/2**	1/2	1	–1/2	0	0	1/2
0	A_4	**1/2**	–3/2	0	1/2	1	0	–1/2
0	A_5	**5/2**	–1/2	0	–1/2	0	1	1/2
Z_k		$(5-\lambda)/2$	$(5-\lambda)/2$	$5-\lambda$	$-(5-\lambda)/2$	**0**	**0**	$\mathbf{(5-\lambda)/2}$
Δ_k			$-(3\lambda+1)/2$	0	$\mathbf{-(5-\lambda)/2}$	0	0	–M+...

Решаем систему неравенств:

$\Delta_1 = -(3\lambda + 1)/2 \le 0$,

$\Delta_3 = -(5-\lambda)/2 \le 0$.

Обнаруживаем: при $-1/3 \le \lambda \le 5$ $Y_{опт} = (0, 1/2)$, $\boldsymbol{X_{опт} = ((5-\lambda)/2, -0, -0)}$, $L(X_{опт}) = (5-\lambda)/2$.

Продолжаем решение задачи при $\lambda > 5$. Получаем:

$C_{баз}$	Базис 4	План $Y_{баз}$	$3+\lambda$ A_1	$5-\lambda$ A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	M A_6
$5-\lambda$	A_2	**1**	–1	1	0	1	0	0
0	A_3	**1**	–3	0	1	2	0	–1
0	A_5	**3**	–2	0	0	1	1	0
Z_k		$5-\lambda$	$-(5-\lambda)$	$5-\lambda$	0	$\mathbf{5-\lambda}$	**0**	**0**
Δ_k			–8	0	0	$5-\lambda$	0	–M

Видим, что при $\lambda \ge 5$ $Y_{опт} = (0, 1)$, $\boldsymbol{X_{опт} = (0, -5+\lambda, -0)}$, $L(X_{опт}) = 5-\lambda$.

Итог:

при $\lambda < -3$	*$L(Y, \lambda) \to -\infty$*	ограничения исходной задачи противоречивы
при $-3 \le \lambda \le -1/3$	$Y_{опт} = (1, 0)$	$\boldsymbol{X_{опт} = (3+\lambda, 0, 0)}$ $L(X_{опт}) = 3+\lambda$
при $-1/3 \le \lambda \le 5$	$Y_{опт} = (0, 1/2)$	$\boldsymbol{X_{опт} = ((5-\lambda)/2, 0, 0)}$ $L(X_{опт}) = (5-\lambda)/2$
при $\lambda \ge 5$	$Y_{опт} = (0, 1)$	$\boldsymbol{X_{опт} = (0, 5-\lambda, 0)}$ $L(X_{опт}) = 5-\lambda$

Увы, в случае зависимости от параметра компонент матрицы ограничений столь простого *универсального* подхода к решению не существует. Нет простых решений и в случае зависимости характеристик задачи от нескольких параметров.

4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Как распространить рассмотренный подход на линейные программы с двумя параметрами?

2. Могут ли вне интервала по λ, в котором целевая функция неограничена, присутствовать интервалы с оптимальным решением?

4.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Решить задачу параметрического линейного программирования. Объяснить полученные результаты.

1. Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 - \lambda)x_1 - (2 + 3\lambda)x_2 + x_3$ при условиях $x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**2.** Максимизировать $L(x, \lambda) = x_1 - (5 + \lambda)x_2 - (1 + \lambda)x_3 + x_4$ при условиях $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$ $2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
3. Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 - \lambda)x_1 + (1 + \lambda)x_2 - x_3$ при условиях $x_1 - x_2 - x_3 = 4$ $x_1 + 15x_2 + x_3 = 2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**4.** Минимизировать $L(x, \lambda) = -x_1 - (4 - \lambda)x_2 - (1 + 2\lambda)x_3$ при условиях $4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7$ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
5. Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 - \lambda)x_1 + (8 - 2\lambda)x_2 +$ $+ (10 + \lambda)x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$ $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**6.** Минимизировать $L(x, \lambda) = (\lambda - 1)x_1 + (1 + 2\lambda)x_2 - x_3 -$ $- x_4$ при условиях $x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6$ $x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$

7. Максимизировать $L(x, \lambda) = x_1 + (2 - 10\lambda)x_2 - \lambda x_3$ при условиях $x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 8$ $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**8.** Минимизировать $L(x, \lambda) = -(1 + 2\lambda)x_1 - (1 - \lambda)x_2 - x_3$ при условиях $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
9. Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 - \lambda)x_1 + (8 - 2\lambda)x_2 +$ $+ (10 + \lambda)x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ $x\,, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**10.** Максимизировать $L(x, \lambda) = -\lambda x_1 - 3x_2 - (5 + \lambda)x_3 -$ $- 2\lambda x_4$ при условиях $x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$ $x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
11. Минимизировать $L(x, \lambda) = -(1 + \lambda)x_1 - x_2 -$ $- (3 - 2\lambda)x_3 + 2x_4$ при условиях $x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3$ $3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**12.** Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 - 4\lambda)x_1 + (2 + \lambda)x_2 +$ $+ \lambda x_3 + x_4$ при условиях $x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1$ $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
13. Минимизировать $L(x) = (\lambda - 1)x_1 - (1 + 2\lambda)x_2 -$ $- x_3 - x_4$ при условиях $x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6$ $x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**14.** Максимизировать $L(x) = (1 + 2\lambda)x_1 + (1 - \lambda)x_2 + x_3 +$ $+ x_4$ при условиях $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$ $2x_1 - x_3 = 1$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
15. Максимизировать $L(x) = x_1 - 2x_2 + x_3$ при условиях $x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 + 2\lambda$ $x_1 - 2x_2 - x_3 = 4\lambda - 1$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**16.** Максимизировать $L(x) = x_1 + 7x_2 - x_3$ при условиях $x_1 - x_2 - 2x_3 = 2\lambda - 1$ $x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 14 - \lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$

17. Максимизировать $L(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$ при условиях $x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 8 + 5\lambda$ $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 + \lambda$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**18.** Максимизировать $L(x) = x_1 + 3x_2 + 5x_3$ при условиях $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - \lambda$ $x_1 - x_2 = 3\lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
19. Максимизировать $L(x) = x_1 + 4x_2 + x_3$ при условиях $x_1 - x_2 + x_3 = 3 + \lambda$ $2x_1 - 5x_2 - x_3 = -5\lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**20.** Максимизировать $L(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 - \lambda$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 10\lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
21. Максимизировать $L(x) = x_1 + x_2 + x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \lambda$ $3x_1 + x_2 - x_3 = 3\lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**22.** Максимизировать $L(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$ при условиях $x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 + 3\lambda$ $2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 - 2\lambda$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$
23. Максимизировать $L(x, \lambda) = \lambda x_1 + (2 - \lambda)x_2 + (1 + \lambda)x_3$ при условиях $x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**24.** Максимизировать $L(x, \lambda) = (1 + \lambda)x_1 - 2\lambda x_2$ при условиях $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 - 4x_2 \leq 2$ $x_1 - x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$ $-2 < \lambda < +2$
25. Минимизировать $L(x) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$ при условиях $x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2 - \lambda$ $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -3\lambda$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq \lambda - 3$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**26.** Минимизировать $L(x, \lambda) = (-1 + \lambda)x_1 - (4 + \lambda)x_2 -$ $- (1 + 5\lambda)x_3$ при условиях $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ $2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$

27. Минимизировать $L(x, \lambda) = (3\lambda - 1)x_1 + (3 - \lambda)x_2 +$ $+ \lambda x_3$ при условиях $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 7$ $x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 3$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$	**28.** Минимизировать $L(x) = -x_1 - 7x_2 + x_3$ при условиях $x_1 - x_2 - 2x_3 = 2\lambda - 1$ $x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 14 - \lambda$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $-\infty < \lambda < +\infty$

5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель практического занятия

Приобретение теоретических знаний и элементарных практических навыков по формулированию прикладных экономико-математических моделей линейной целочисленной оптимизации, их решению, анализу полученного решения и использованию для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

5.1. Теоретические положения

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом:

найти такое решение (план)

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

при котором линейная функция

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

принимает максимальное (минимальное) значение при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, ..., m$$

$$x_j \geq 0 \;, j = 1, 2, ... n$$

x_j – ***целые числа***, $j = 1, 2, ... n$.

Заметим, что последнее условие может накладываться не на все неизвестные, и тогда говорят о частично целочисленных задачах.

Такие задачи связаны с определением оптимальной численности работников в структурных подразделениях предприятия, количеством станков в заводском цехе, объемом производства дорогой крупногабаритной, неделимой продукции (подводных лодок, вертолетов, угольных комбайнов) и т. д. Попытки округления получаемых оценок порождают ситуацию нехватки ресурсов или их избытка, который можно использовать на выпуск другого продукта.

Иногда встречаются задачи, где некоторая величина x_s может принимать лишь какие-то дискретные значения, например, A, B или C. Если провести замену $x_s = Az_1 + Bz_2 + Cz_3$ и наложить требования

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1,\ z_1, z_2, z_3 \geq 0 \text{ – целые числа,}$$

то получим эквивалентную задачу целочисленного программирования. Часто возникают задачи с так называемыми *булевыми переменными*, решениями которых являются суждения типа «да – нет». Если значению «да» сопоставить единицу, а «нет» – нуль, то добавлением условий $0 \leq x_s \leq 1$, x_s – *целое*, мы опять-таки получаем целочисленную программу.

В литературе среди методов целочисленного линейного программирования наиболее популярен *метод ветвей и границ*.

Идея метода исключительно проста. Получив нецелочисленный оптимальный план задачи, в котором какая-то составляющая x_k оказалась нецелочисленной ($x_k = A$), мы ставим две задачи на основе ограничений исходной задачи и дополнительных условий $x_k \leq [A]$ и $x_k \geq [A] + 1$ соответственно. Так, если в найденном оптимальном плане $x_3 = 4{,}7$, то в новых задачах будут условия $x_3 \leq 4$ и $x_3 \geq 5$ (недопустимость найденного плана в будущем очевидна). Каждую из полученных задач решаем до получения оптимального плана и нового разветвления. Процесс ветвления продолжается до обнаружения противоречивости ограничений или получения целочисленных решений, из которых потом остается выбрать наилучшее.

В задачах небольшой размерности или при малом числе вариантов значений переменных метод вполне эффективен, но компьютерная его реализация едва ли доставит удовольствие программисту. Что касается многих рекламируемых разработок, то реклама не всегда соответствует факту.

Идея метода последовательных отсечений (метода Гомори), высказанная еще в 1950-е годы Джорджем Данцигом и развитая Ральфом Гомори, доказавшим конечность процесса отсечений, сводится к построению дополнительного ограничения, «отсекающего» найденные очередное нецелочисленное решение (нецелочисленный оптимальный план) задачи, но «не отсекающего» ни одного целочисленного плана. Мы пользуемся термином «отсекает» в смысле «делает неприемлемым», «делает недопустимым», «делает не удовлетворяющим новой системе условий».

Алгоритм решения задачи линейного целочисленного программирования этим методом определяется следующими действиями:

1. Решаем поставленную задачу обычным симплексным методом без учета условия целочисленности компонент плана. Естественно, что если все компоненты оптимального плана окажутся целочисленными, то он дает решение поставленной задачи. Столь же очевидно, что и обнаруженная неразрешимость задачи при отказе от требования целочисленности тем более свидетельствует о неразрешимости целочисленной задачи.

2. Если же среди компонент найденного оптимального решения есть нецелые, то к ограничениям задачи добавляем новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

– должно быть линейным;

– должно отсечь найденный оптимальный нецелочисленный план;

– не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Для построения такого ограничения Р. Гомори предлагает выбрать компоненту оптимального плана ***с наибольшей дробной частью*** и по соответствующей этой компоненте k-й строке симплексной таблицы (k-му уравнению) построить ограничение вида

$$\sum_{j \notin Б} f_{kj} x_j \geq f_k$$

или его эквивалент

$$f_k = \sum_{j \notin Б} f_{kj} x_j - S^*, \quad S^* \geq 0 \ ,$$

где $f_k = x_j - [x_j]$; $f_{kj} = z_{kj} - [z_{kj}]$; S^* – новая переменная; $[x_j]$, $[z_{kj}]$ – целая часть, не превосходящая x_j и z_{kj} соответственно.

Обратите внимание, что [2,57] = 2, но [–2,57] = –3 и соответственно значения f_{kj} равны 0,57 и 0,43. Так, если выбранное уравнение имеет вид $3{,}14 = -2{,}57x_1 + x_2 + 3{,}12x_3 - 4{,}12x_4$, то получаем новое (дополнительное) ограничение

$$0{,}14 = 0{,}43x_1 + 0{,}12x_3 + 0{,}88x_4 - S, \quad S \geq 0.$$

3. Составленное ограничение присоединяем к имеющимся в симплексной таблице, тем самым получая расширенную задачу. Поскольку для продолжения ее решения опять возникает вопрос о выборе начального опорного плана, то для включения в число базисных

выбираем ту переменную, для которой величина $\left|\frac{\Delta_j}{f_{kj}}\right|$ минимальна.

Если для этой переменной величина $\theta = \min\limits_{z_{ij}>0} \frac{x_j}{z_{ij}}$ достигается по дополнительной строке, то эту строку (уравнение) разрешаем относительно выбранной переменной и исключаем ее из остальных (получен опорный план для расширенной задачи). Если же величина θ не соответствует дополнительной строке, то приходится вводить в нее искусственную переменную и надеяться, что в дальнейшем эта переменная покинет базис (этого не случится, если новое множество планов окажется пустым – новая система ограничений противоречива).

4. Повторяем упомянутые действия 2 и 3 до получения целочисленного решения или установления неразрешимости задачи.

Существует доказательство конечности этого процесса, но предсказать заранее количество таких шагов невозможно. Все зависит от количества нецелочисленных планов задачи и ее размерности (хотя и многие задачи малой размерности решаются весьма долго).

Необходимо сделать *некоторые замечания:*

1) если для дробного x_j обнаружится целочисленность всех коэффициентов соответствующего уравнения (строки), то задача не имеет целочисленного решения;

2) если дополнительная переменная S^* вошла в число базисных, то соответствующие ей строку и столбец можно удалить (соблюдение этого правила сохраняет размерность решаемой задачи в разумных пределах – число уравнений не превысит $m+n$ (суммы числа уравнений и переменных в исходной задаче).

Пример решения задачи методом Гомори

Экономическая ситуация. Для приобретения нового оборудования предприятие выделяет 19 денежных единиц (д. е.). Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 16 м^2. Предприятие может заказать оборудование двух видов: (1) машины типа «А» стоимостью 2 д. е., требующие производственную площадь 4 м^2 и обеспечивающие производительность за смену 8 т продукции; (2) машины типа «В» стоимостью 5 д. е., занимающие площадь 1 м^2 и обеспечивающие производительность за смену 6 т продукции.

Требуется сформировать оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность работы оборудования.

«Числовая» модель. Обозначив через x_1, x_2 количество приобретаемых машин типа «A» и «B» соответственно и через $L(X)$ – их общую производительность, получаем математическую модель задачи:

$$\max L(X) = 8x_1 + 6x_2$$

при ограничениях:

$$2x_1 + 5x_2 \le 19$$
$$4x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \text{ – \textit{целые числа}}$$

Решаем задачу симплексным методом без учета целочисленности (предполагаем, что читатель знаком с технологией этого метода).

C_0	$Б_0$	X_0	8	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	19	2	5	1	0
0	x_4	16	**4**	1	0	1
z_j		0	0	0	0	0
Δ_j			**–8**	–6	0	0

C_1	$Б_1$	X_1	8	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	11	0	**9/2**	1	–1/2
8	x_1	4	1	1/4	0	1/4
z_j		32	8	2	·0	2
Δ_j			0	**–4**	0	2

C_2	$Б_2$	X_2	8	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
6	x_2	22/9	0	1	2/9	–1/9
8	x_1	61/18	1	0	–1/18	5/18
z_j		376/9	8	6	8/9	14/9
Δ_j			0	0	8/9	14/9

Получен оптимальный нецелочисленный план

$$X_{опт} = (61/18;\ 22/9).\ L(X_{опт}) = 376/9.$$

Так как максимальной дробной частью обладает компонента плана x_2, относительно которой разрешено первое уравнение (4/9 > 7/18), дополнительное ограничение записываем по первой строке и получаем $\mathbf{4/9 = 2/9x_3 + 8/9x_4 - S_1}$, $\mathbf{S_1 \ge 0}$ – *первое ограничение*

Гомори (подставьте найденный оптимальный план в это условие и убедитесь в его «отсечении»).

Составленное уравнение дописываем к уже имеющимся уравнениям в симплексной таблице:

C_2	$Б_2$	X_2	8	6	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1
6	x_2	22/9	0	1	2/9	–1/9	0
8	x_1	61/18	1	0	–1/18	5/18	0
z_j		376/9	8	6	8/9	14/9	·
Δ_j			0	0	8/9	14/9	·
		4/9	0	0	2/9	8/9	–1

Теперь имеем новую (расширенную) задачу линейного программирования, в которой 3 ограничения на 5 неотрицательных переменных. Для получения опорного плана этой задачи необходимо найти третью базисную переменную. Для этого определяем: $\min\frac{\Delta_j}{f_{kj}} = \min\left(\frac{8/9}{2/9};\frac{14/9}{8/9}\right) = 7/4$ и предлагаем для ввода в базис переменную x_4.

Отыскав величину $\theta = \min\limits_{z_{ij}>0}\frac{x_j}{z_{ij}} = \min\left(-;\frac{61/18}{5/18};\frac{4/9}{8/9}\right) = 1/2$ и обнаружив ее соответствие дополнительной строке (третьему уравнению), не прибегая к искусственной переменной, выражаем x_4 из этого уравнения и получаем опорный план расширенной задачи.

C_3	$Б_3$	X_3	8	6	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2
6	x_2	5/2	0	1	1/4	0	–1/8	0
8	x_1	13/4	1	0	–1/8	0	5/16	0
0	x_4	1/2	0	0	1/4	1	–9/8	0
z_j		41	8	6	1/2	0	7/4	·
Δ_j			0	0	1/2	0	7/4	·
		1/2	0	0	1/4	0	7/8	–1

Найденный план оптимален $X_{опт}$ = (13/4; 5/2), но нецелочисленный. Строим новое ограничение Гомори. Так как максимальная дробная часть среди компонент плана равна 1/2, записываем дополнительное ограничение по первой строке (можно было бы и по третьей, но по условиям задачи требуется только x_1, x_2 – *целые числа*). *Второе ограничение Гомори*: $\mathbf{1/2 = 1/4\, x_3 + 7/8\, S_1 - S_2,\ \ S_2 \geq 0}$.

Это ограничение добавляем в последнюю симплексную таблицу и получаем задачу с 4 ограничениями.

Определяя переменную, вводимую в базис, из совпадения $\min\left(\frac{1/2}{1/4};\frac{7/4}{7/8}\right)=2$, видим свободу выбора между x_3 и S_1. Выбрав S_1 и обнаружив соответствие $\theta=\min\left(-;\frac{13/4}{5/16};-;\frac{1/2}{7/8}\right)=4/7$ дополнительному ограничению, получаем:

C_4	$Б_4$	X_4	8	6	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3
6	x_2	18/7	0	1	2/7	0	0	–1/7	0
8	x_1	43/14	1	0	–3/14	0	0	5/14	0
0	x_4	8/7	0	0	4/7	1	0	–9/7	0
0	S_1	4/7	0	0	0	0	1	–8/7	0
z_j		40	8	6	0	0	0	2	.
Δ_j			0	0	0	0	0	2	.
		4/7	0	0	2/7	0	0	6/7	–1

Новый оптимальный нецелочисленный план $X_{опт}$ = (43/14; 18/7). Учитывая сделанное выше замечание 2, вычеркиваем строку и столбец, соответствующие переменной S_1.

В полученном плане максимальную дробную часть имеет компонента x_2, поэтому записываем дополнительное ограничение по первой строке: **4/7 = 2/7 x_3 + 6/7 S_2 – S_3, $S_3 \geq 0$** – *третье ограничение Гомори.*

Отыскав $\min\left(\frac{0}{2/7};\frac{2}{6/7}\right)=0$, вводим в базис переменную x_3. Минимальное значение θ = 2, что соответствует дополнительной строке, и после очередных симплексных преобразований получаем:

C_5	$Б_5$	X_5	8	6	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_4
6	x_2	2	0	1	0	0	–1	1	0
8	x_1	7/2	1	0	0	0	1	–3/4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	–3	2	0
0	x_3	2	0	0	1	0	3	–7/2	0
z_j		40	8	6	0	0	2	0	.
Δ_j			0	0	0	0	2	0	.
		1/2	0	0	0	0	0	1/4	–1

Обнаружив оптимальность, но нецелочисленность найденного плана $X_{опт}$ = (7/2; 0), строим **1/2 = 1/4 S_3 – S_4, $S_4 \geq 0$** – *четвертое ограничение Гомори.*

Выявив намерение ввести в базис переменную S_3, обнаруживаем, что $\theta = \min\left(\frac{2}{1};–;\frac{0}{2};–;\frac{1/2}{1/4}\right) = 0$ соответствует не дополнительному уравнению, а третьему. Как это не прискорбно, приходится прибегнуть к искусственной переменной (обозначаем ее x_5).

C_5'	$Б_5'$	X_5'	8	6	0	0	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_4	x_5
6	x_2	2	0	1	0	0	–1	1	0	0
8	x_1	7/2	1	0	0	0	1	–3/4	0	0
0	x_4	0	0	0	0	1	–3	**2**	0	0
0	x_3	2	0	0	1	0	3	–7/2	0	0
–M	x_5	1/2	0	0	0	0	0	1/4	–1	1
z_j		40–M/2	8	6	0	0	2	–M/4	M	–M
Δ_j			0	0	0	0	2	**–M/4**	M	0
C_6	$Б_6$	X_6	8	6	0	0	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_4	x_5
6	x_2	2	0	1	0	–1/2	1/2	0	0	0
8	x_1	7/2	1	0	0	3/8	–1/8	0	0	0
0	S_3	0	0	0	0	1/2	–3/2	1	0	0
0	x_3	2	0	0	1	7/4	–9/4	0	0	0
–M	x_5	1/2	0	0	0	–1/8	**3/8**	0	–1	1
z_j		40–M/2	8	6	0	M/8	2–3M/8	0	M	–M
Δ_j			0	0	0	M/8	**2–3M/8**	0	M	0

C_7	$Б_7$	X_7	8	6	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_4	S_5
6	x_2	4/3	0	1	0	–1/3	0	4/3	0
8	x_1	11/3	1	0	0	1/3	0	–1/3	0
0	x_3	5	0	0	1	1	0	-6	0
0	S_2	4/3	0	0	0	–1/3	1	–8/3	0
z_j		112/3	8	6	0	2/3	0	16/3	.
Δ_j			0	0	0	2/3	0	16/3	.
		2/3	0	0	0	1/3	0	2/3	–1

Опять нецелочисленный оптимальный план $X_{опт}$ = (11/3; 4/3). На основе второго уравнения строим: **2/3 = 1/3 x_4 + 2/3 S_4 – S_5, $S_5 \geq$ 0** *– пятое ограничение Гомори.*

Выбрав для ввода в базис переменную x_4 и обнаружив соответствие $\theta = \min\left(-; \frac{11/3}{1/3}; \frac{5}{1}; \frac{2/3}{1/3}\right) = 2$ новому уравнению, получаем:

C_8	$Б_8$	X_8	8	6	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_4	S_5
6	x_2	2	0	1	0	0	2	–1
8	x_1	3	1	0	0	0	–1	1
0	x_3	3	0	0	1	0	–8	3
0	x_4	2	0	0	0	1	2	–3
z_j		36	8	6	0	0	4	2
Δ_j			0	0	0	0	4	2

Получен оптимальный целочисленный план X_8 = (**3**; **2**; 3; 2); $L(X_8)$ = 36.

В чем же результат столь длительного решения?

Экономическая интерпретация: согласно полученному решению, предприятию необходимо закупить 3 машины типа «А» и 2 машины типа «В». При этом будет достигнута максимальная производительность работы оборудования, равная 36 тонн продукции за смену. Полученную экономию денежных средств в размере x_3 = 3 д. е. можно будет направить на какие-либо иные цели, например, на премирование рабочих, которые будут заниматься отладкой полученного оборудования. На излишнюю площадь x_4 = 2 м^2 можно поставить ящик с цветами, если рабочие не страдают аллергией на цветы.

Геометрическую интерпретацию процедуры выполненных отсечений начинаем с построения множества планов (см. рис. 6). В точке 1 – оптимальный нецелочисленный план.

Из первого условия задачи находим $x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2$.

Из второго условия задачи находим $x_4 = 16 - 4x_1 - x_2$.

Подставляем эти выражения в первое ограничение Гомори:

$$2/9\, x_3 + 8/9\, x_4 - S_1 = 4/9, \quad S_1 \geq 0$$

и после преобразований получаем $S_1 = 18 - 4x_1 - 2x_2 \geq 0$.

Отсюда имеем: $4x_1 + 2x_2 \leq 18$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 1. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 2.

Подставляя выражения $x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2$ и $S_1 = 18 - 4x_1 - 2x_2$

во второе ограничение Гомори

$$1/4x_3 + 7/8\,S_1 - S_2 = 1/2,\ S_2 \geq 0,$$

получаем $S_2 = 20 - 4x_1 - 3x_2 \geq 0$ или $4x_1 + 3x_2 \leq 20$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 2. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 3.

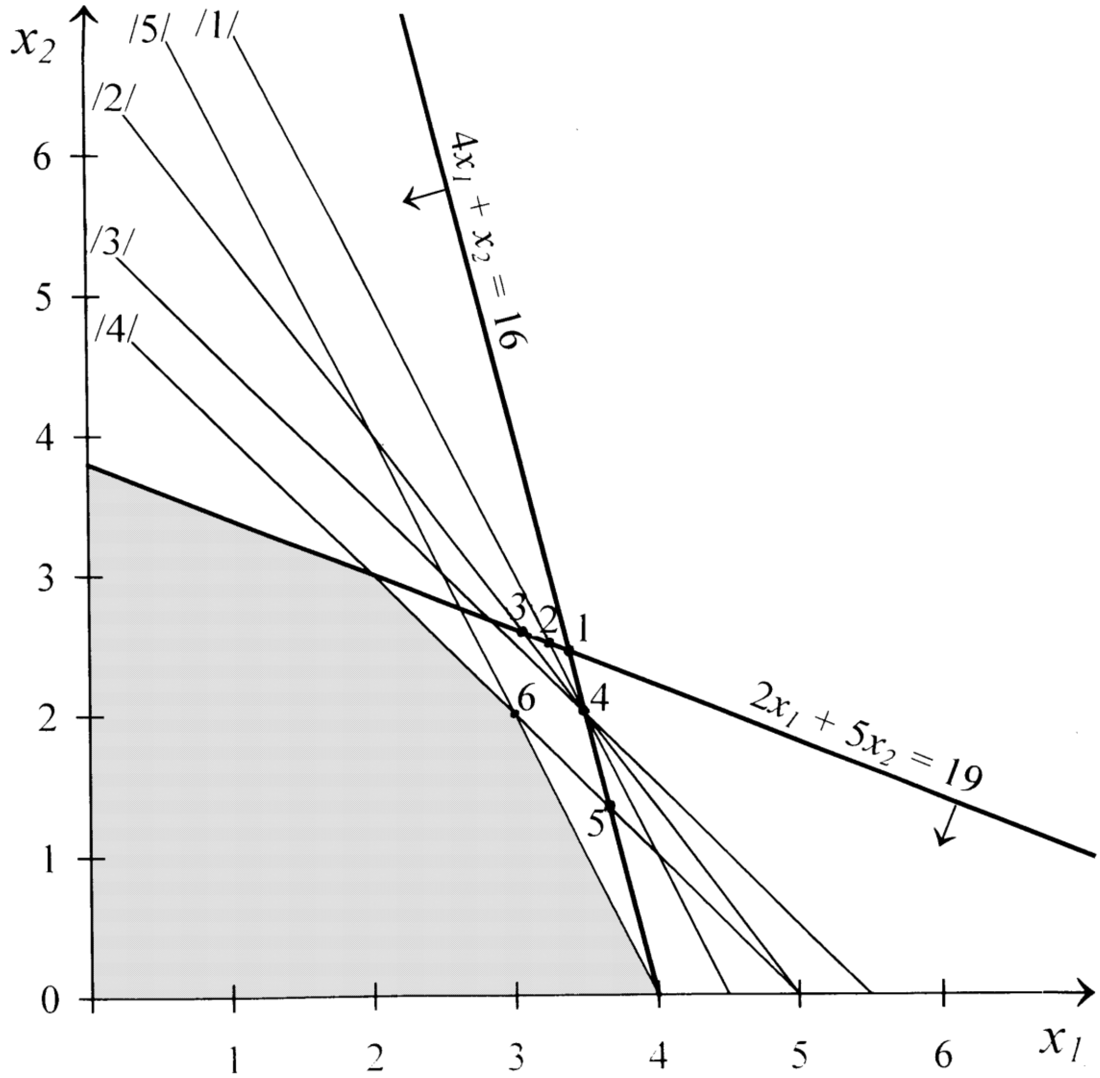


Рис. 6

Аналогичные подстановки в третье ограничение Гомори:

$$2/7\,x_3 + 6/7\,S_2 - S_3 = 4/7,\ S_3 \geq 0$$

дают $S_3 = 22 - 4x_1 - 4x_2 \geq 0$. На рисунке видно, что условие $4x_1 + 4x_2 \leq 22$ отсекает от множества планов область, содержащую точку 3. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 4.

Подстановки в четвертое ограничение Гомори

$$1/4\,S_3 - S_4 = 1/2,\ S_4 \geq 0$$

дают $S_4 = 5 - x_1 - x_2 \geq 0$, и наблюдаем, как условие $x_1 + x_2 \leq 5$ делает недопустимой точку 4. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 5.

Наконец, пятое ограничение Гомори

$$1/3\ x_4 + 2/3\ S_4 - S_5 = 2/3,\ S_5 \geq 0$$

преобразуется к эквивалентному виду $S_5 = 8 - 2x_1 - x_2 \geq 0$, и наблюдаем, как условие $2x_1 + x_2 \leq 8$ отсекает от множества планов область, содержащую точку 5.

В итоге устанавливаем оптимальность и целочисленность плана – точки 6 с координатами (3; 2).

5.2. Вопросы для самоконтроля

1. Может ли задача линейного целочисленного программирования иметь несколько решений?
2. Может ли ограничение Гомори иметь вид $1/5\ x_5 - 7/8\ x_6 \geq 1/3$?
3. Может ли ограничение Гомори иметь вид $1/5\ x_5 + 7/8\ x_6 \geq 1/3$?
4. Как можно убедиться, что целочисленная программа не имеет ни одного допустимого плана?
5. Как проверить, что найденный оптимальный план становится недопустимым после ввода дополнительного ограничения Гомори?
6. Может ли целевая функция задачи линейного целочисленного программирования оказаться неограниченной?
7. В некоторой задаче линейного целочисленного программирования переменные принимают лишь значения: 0 или 1. Какой экономический смысл данного решения? Приведите примеры.
8. Может ли оптимальное значение целевой функции целочисленной линейной программы оказаться нецелочисленным?
9. Как известно старым поклонникам бардовской песни, «из ливерпульской гавани всегда по четвергам корабль уходит в плаванье к далеким берегам…». Но на сей раз лишь небольшая комфортабельная яхта ожидает отплытия из Калькутты к туманному Альбиону. Капитан, пользуясь отсутствием хозяина яхты, с целью подзаработать, готов принять на борт состоятельных нуворишей, нажившихся на торговле оружием, и к его изумлению желающих оказалось весьма много. Каждый из них готов платить солидную сумму, но везет с собой такой багаж, что удовлетворить все желания нереально – яхту придется доставать со дна гавани. Если вы хоть что-то смыслите в оптимальном планировании, сформулируйте задачу и предложите пути ее решения (может быть, в следующий раз капитан найдет место и для вас).

10. В области планируется построить машиностроительное предприятие. Существует 7 вариантов размещения строительных площадок, каждый из которых характеризуется различным уровнем затрат на строительство, затрат на экологическое обеспечение и ожидаемой прибылью. Как можно было бы сформулировать соответствующую оптимизационную задачу?

11. Так что все-таки отсекает очередное дополнительное ограничение (оптимальные планы, планы, план, оптимальный план, найденный оптимальный план, множество планов, множество оптимальных планов, множество нецелочисленных планов) и чего не отсекает? Если вы не в состоянии разумно ответить на этот вопрос, вы не поняли суть метода.

5.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Решить задачу линейного целочисленного программирования при $\boldsymbol{x_j \geq 0}$ **– целые** (j = 1, 2, ..., n).

1. min $3x_1 + x_2$ при ограничениях $-4x_1 + x_2 \leq 29$ $3x_1 - x_2 \leq 15$ $5x_1 + 2x_2 \geq 38$	**2.** min $5x_1 + 7x_2$ при ограничениях $-3x_1 + 14x_2 \leq 78$ $5x_1 - 6x_2 \leq 26$ $x_1 + 4x_2 \geq 25$
3. max $2x_1 + x_2$ при ограничениях $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ $3x_1 - 3x_2 \leq 9$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$	**4.** max $3x_1 + 2x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leq 13$ $x_1 - x_2 \leq 6$ $-3x_1 + x_2 \leq 9$
5. max $7x_1 + x_2$ при ограничениях $9x_1 + 4x_2 \leq 110$ $11x_1 - 3x_2 \geq 24$ $2x_1 - 7x_2 \geq 15$	**6.** max $3x_1 - x_2$ при ограничениях $3x_1 - 2x_2 \leq 3$ $-5x_1 - 4x_2 \leq -10$ $2x_1 + x_2 \leq 5$
7. max $2x_1 + 3x_2$ при ограничениях $6x_1 + 7x_2 \leq 57$ $3x_1 + 11x_2 \leq 47$	**8.** max $x_1 + x_2$ при ограничениях $3x_1 + 5x_2 \leq 45$ $13x_1 + 10x_2 \leq 130$

9. max $4x_1 + 5x_2 + x_3$ при ограничениях $3x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 + 4x_2 \le 11$ $3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13$	**10.** max $-x_1 + 3x_2 + 6x_3$ при ограничениях $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 16$ $3x_1 + 17x_2 \le 33$ $-6x_2 + 13x_3 \le 43$
11. max $2x_1 + 7x_2$ при ограничениях $3x_1 + 8x_2 \le 23$ $3x_1 + 11x_2 \le 31$	**12.** max $8x_1 + 11x_2$ при ограничениях $11x_1 + 2x_2 \le 25$ $3x_1 + 8x_2 \le 12$
13. max $4x_1 + 3x_2$ при ограничениях $-6x_1 + 5x_2 \le 14$ $3x_1 + x_2 \le 17$	**14.** min $5x_1 - 3x_2$ при ограничениях $-6x_1 + 8x_2 \le 11$ $-7x_1 + x_2 \le 5$
15. max $5x_1 - 3x_2$ при ограничениях $-6x_1 + 8x_2 \le 11$ $-7x_1 + x_2 \le 5$ $7x_1 - 3x_2 \le 13$	**16.** min $2x_1 - 9x_2$ при ограничениях $-3x_1 + 7x_2 \le 10$ $3x_1 + x_2 \le 5$ $5x_1 - 7x_2 \le 13$
17. max $2x_1 + 4x_2 - 4x_3$ при ограничениях $2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 9$ $7x_1 + x_2 + 3x_3 \le 11$	**18.** min $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ при ограничениях $9x_1 - 4x_2 + x_3 \le 16$ $-5x_1 + x_2 + 3x_3 \le 9$
19. max $x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4$ при ограничениях $2x_1 + x_3 - 3x_4 \ge 12$ $3x_1 - x_2 + x_4 \le 20$	**20.** max $2x_1 - x_2 + 6x_4$ при ограничениях $3x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 16$ $-2x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 18$
21. max $x_1 + 10x_2$ при ограничениях $3x_1 + 4x_2 \le 23$ $-x_1 + 2x_2 = 4$ $2x_1 + 3x_2 \le 14$	**22.** min $-7x_1 - x_2$ при ограничениях $5x_1 + 2x_2 \le 24$ $12x_1 - 7x_2 \le 15$ $6x_1 + 8x_2 \le 9$
23. max $3x_1 + 2x_2 + 2x_3$ при ограничениях $4x_2 + 3x_3 \le 7$ $6x_1 + 5x_2 + x_3 = 12$	**24.** max $-4x_1 + x_2$ при ограничениях $-7x_1 + 13x_2 + 3x_3 \le 7$ $x_1 - 6x_2 + 7x_3 \le -9$
25. max $-10x_1 - 14x_2 - 21x_3$ при ограничениях $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \ge 14$ $8x_1 + 11x_2 + 9x_3 \ge 12$ $9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 10$	**26.** max $4x_1 + 3x_2 + 8x_3$ при ограничениях $21x_1 - 17x_2 + 19x_3 \le 77$ $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 29$ $10x_1 + 11x_3 \le 65$

27. max $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ при ограничениях $x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 37$ $-9x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 20$ $-x_1 + 8x_2 \ge 8$	**28.** max $x_1 - 5x_2 + x_3$ при ограничениях $4x_1 + x_2 - 6x_3 \le 41$ $-2x_1 - x_3 \le 2$ $3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 34$
29. max $5x_1 + 8x_2$ при ограничениях $-8x_1 + 12x_2 \le 40$ $13x_1 - 9x_2 \le 37$	**30.** max $x_1 + 8x_2$ при ограничениях $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $-5x_1 + 7x_2 \le 34$
31. min $19x_1 + 21x_2$ при ограничениях $2x_1 + 5x_2 \ge 20$ $4x_1 + x_2 \ge 20$	**32.** max $2x_1 + 5x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \le 6$ $4x_1 + 11x_2 \le 44$
33. min $10x_1 - 11x_2$ при ограничениях $-x_1 + 10x_2 \le 40$ $x_1 + x_2 \le 20$	**34.** max $8x_1 + 10x_2 + 7x_3$ при ограничениях $x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 50$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
35. min $-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4$ при ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15$ $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120$ $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100$	**36.** max $3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4$ при ограничениях $2x_1 + x_2 + 5x_3 + 8x_4 \le 10$ $9x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 21$ $3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 10x_4 \le 40$
37. max $2x_1 + 3x_2$ при ограничениях $x_1 + 19x_2 \le 30$ $2x_1 + x_2 \le 20$	**38.** max $-2x_1 + 3x_2$ при ограничениях $4x_1 + x_2 \le 8$ $-5x_1 + 6x_2 \le 7$
39. min $6x_1 - 2x_2$ при ограничениях $2x_1 - 6x_2 \le -39$ $7x_1 + 3x_2 \ge 24$ $-2x_1 + 5x_2 \le 33$	**40.** min $3x_1 + 4x_2$ при ограничениях $2x_1 + 19x_2 \ge 24$ $13x_1 + 12x_2 \ge 50$ $x_1 - 5x_2 \le 1$

6. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель практического занятия

Приобретение теоретических знаний и элементарных практических навыков по формулированию прикладных экономико-математических моделей транспортного типа, их решению, анализу полученного решения и использованию для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

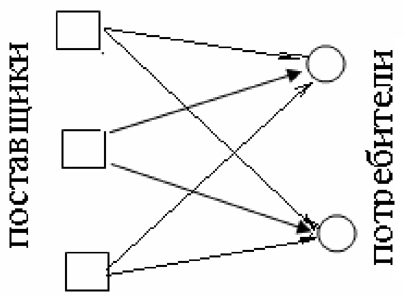
6.1. Теоретические положения

Сам термин «транспортная задача» уже говорит о необходимости решения проблемы, возникающей при организации перемещения тех или иных продуктов с помощью некоторых транспортных средств (транспортировка угля из угольных центров Кузбасса по существующей сети железных дорог к потребителям, доставка ночной выпечки от хлебокомбината в булочные города, перекачка нефти (газа, воды) по трубопроводам от источников к потребителям и др.).

Ниже мы предлагаем решение одной из самых простых задач транспортного типа, которую принято называть классической.

Здесь предполагается наличие поставщиков (производителей, источников) некоторой однородной продукции и заинтересованных в ней потребителей. Примечательно, что ***поставки происходят напрямую*** без промежуточных пунктов (как показано ниже).

В таких условиях возникает естественный вопрос: ***от кого, кому и сколько везти***, чтобы были обеспечены жизненные потребности населения? Поиск ответа на этот вопрос, поиск какого-нибудь плана перевозок, едва ли вызовет затруднения. Однако может возникнуть естественное желание, чтобы найденный план требовал для своей реализации минимума денежных затрат.



Другими словами, мы хотели бы найти план перевозок, который отвечал бы критерию минимума стоимости.

Экономическая постановка задачи. В трех соседних хозяйствах выращен урожай зерна: «Береговое» – 5, «Озерное» – 8, «Речное» – 7 тыс. ц. Из-за отсутствия местных зернохранилищ это зерно необходимо доставить для соответствующей обработки на любой из элеваторов, расположенных в пунктах «Лесное», «Ровное», «Боровое» и «Степное». Производственные мощности элеваторов одинаковы – 5 тыс. ц. Транспортные затраты (в денежных единицах) на перевозку одного центнера зерна из пунктов производства на элеваторы приведены в таблице:

Хозяйства	*Элеваторы*			
	Лесное	Ровное	Боровое	Степное
Береговое	4	5	7	8
Озерное	9	3	6	2
Речное	7	8	4	5

Нужно определить ***план прямых поставок*** зерна из пунктов производства на элеваторы, при котором все поставщики доставили бы имеющееся зерно до элеваторов, мощности элеваторов были бы загружены полностью, но суммарная величина затрат на перевозку зерна была бы минимальной.

Поставленная задача выступает как образец так называемой однопродуктовой (зерно) классической транспортной модели.

Формальная постановка и математическая запись задачи.

Дано:

m – количество пунктов производства;

n – количество пунктов потребления;

a_i – объем произведенной продукции в i-ом пункте (i = 1, 2, ..., m);

b_j – спрос на продукцию в j-ом пункте (j = 1, 2, …, n);

C_{ij} – стоимость прямой поставки единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления.

Требуется найти план прямых поставок, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальны.

Обозначим через X_{ij} объем поставки от i-го производителя к j-му потребителю.

Очевидно, что *задача будет сведена к поиску значений X_{ij}, обеспечивающих минимум суммарных затрат:*

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}. \qquad (6.1)$$

Предположим наличие *баланса производства – потребления*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A. \qquad (6.2)$$

Тогда ограничения задачи можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m; \qquad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n; \qquad (6.4)$$

$$X_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \qquad (6.5)$$

Если баланс (6.2) *нарушен, вводим **фиктивного*** производителя (потребителя) разницы объемов производства – потребления, задав стоимости общения с ним равными нулю.

В отличие от общей линейной программы, ограничения транспортной задачи непротиворечивы, множество планов ограничено и, соответственно, эта задача всегда разрешима.

Следует отметить, что $m + n$ ограничений (6.3) – (6.4) линейно зависимы и одним из них можно пренебречь. Соответственно, ***опорный план*** транспортной задачи может содержать ***не более*** $\boldsymbol{m + n - 1}$ ***положительных компонент***. Опорные планы, в которых положительных компонент меньше $m + n - 1$, называются *вырожденными*.

Поставленную задачу можно решать с помощью приведенного выше алгоритма симплексного метода, но симплексная таблица с $m + n$ строками и $m \cdot n$ переменными едва ли удобна даже в компьютерной реализации.

Идея рассматриваемого ниже метода принадлежит Д. Данцигу, используемый аппарат компактного табличного представления симплексной процедуры впервые предложил С. Гасс.

Решение задачи методом Данцига

Предварительно проверив сбалансированность совокупного спроса и предложения (закрытость модели), приступаем к **выбору начального опорного плана**. Руководствуемся правилом: *на очередной выбранный маршрут ставить максимальную допустимую перевозку,* исчерпывая тем самым возможности поставщика или потребителя.

Суть одного из методов поиска начального опорного плана – ***метода северо-западного угла***: начинаем с «северо-западного угла» таблицы, с клетки (1, 1), и берем $X_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(5, 5) = 5$ (максимально возможная перевозка при соответствующих предложении и спросе). Очевидно, что тогда $X_{12} = X_{13} = X_{14} = 0$ и $X_{21} = X_{31} = 0$. Берем северо-западный угол матрицы без учета заполненных строки и столбца, т. е. клетку (2, 2), и находим $X_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(8, 5) = 5$. Очевидно, что тогда $X_{32} = 0$. Затем аналогично отыскиваем $X_{23} = \min(a_2 - X_{22}, b_3) = \min(8 - 5, 5) = 3$ и $X_{24} = 0$. Так как осталась нерассмотренной лишь одна строка компонент плана, то порядок выбора не имеет значения и получаем значения X_{33} и X_{34}.

$X_0 =$

5	·	·	·	**5**
·	5	3	·	**8**
·	·	2	5	**7**
5	**5**	**5**	**5**	***b\a***

Суммарные затраты на реализацию этого плана поставок составляют $L(X_0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 86$ д. е.

Достаточно востребованным методом выбора начального опорного плана является ***метод минимального элемента матрицы стоимостей***.

$X_0^* =$

5	·	·	·	**5**
·	3	·	5	**8**
·	2	5	·	**7**
5	**5**	**5**	**5**	***b\a***

Основное здесь правило: ставить

максимально возможную перевозку на самый «дешевый» маршрут. Так, здесь начинаем с клетки (2, 4) самого дешевого маршрута, задавая $X_{24} = \min(a_2, b_4) = \min(8, 5) = 5$, $X_{14} = = X_{34} = 0$ и т. д. В конечном счете получается начальный опорный план X_0^* с затратами, равными $4 \cdot 5 + + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 75$ (< 86).

Заметим, что в обоих планах число положительных компонент равно $5 < m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ (оба найденные планы вырожденные).

Для разрешения ***проблемы вырожденности*** в компьютерной реализации можно все a_i увеличить на достаточно малое $\varepsilon > 0$ и для баланса увеличить на $m\varepsilon$, а по завершении решения выполнить «округления». Для задач небольшой размерности, решаемых вручную, можно просто включить в число базисных – задействованных направлений (занятых клеток «шахматки») нулевые перевозки, по возможности, с малой стоимостью, но так, чтобы не возникало *«замкнутой цепочки по базису»* (среди занятых клеток) [1].

Для нашей задачи выберем начальный план X_0^*, построенный методом наименьших стоимостей и среди допустимых нулевых перевозок X_{12}, X_{13} X_{14}, X_{31}, X_{21} (принципиально недопустимы X_{34}, X_{23}) выберем для включения в базис $X_{12} = 0$.

Проверка плана на оптимальность. Критерий оптимальности, позволяющий определить, является ли построенный план перевозок оптимальным, строится на утверждениях второй теоремы двойственности [1].

Соответственно *признак оптимальности* формулируется следующим образом: допустимый план перевозок только тогда является оптимальным, когда каждому пункту производства и потребления можно поставить в соответствие оценки (двойственные переменные), удовлетворяющие двум условиям:

- сумма оценок пунктов производства (u_i) и потребления (v_j), между которыми запланированы перевозки, равна затратам на транспортировку единицы продукта (C_{ij}) между этими пунктами, т. е.

$$u_i + v_j = C_{ij} \qquad \text{для} \qquad X_{ij} > 0;$$

- аналогичные суммы для всех остальных направлений (не вошедших в план) не превосходят затрат на транспортировку, т. е.

$$u_i + v_j \le C_{ij} \qquad \text{для} \qquad X_{ij} = 0.$$

С помощью сформулированного признака оптимальности можно не только проверить на оптимальность любой допустимый план, но и в случае его неоптимальности указать способ улучшения этого плана.

Обратимся к рассматриваемому нами примеру:

$$C = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad X_0 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot & 5 \\ \cdot & 2 & 5 & \cdot \end{vmatrix}$$

Используя принятые обозначения, запишем следующие уравнения для перевозок, вошедших в план (занятые клетки «шахматки» X_0):

$$u_1 + v_1 = 4, \qquad u_1 + v_2 = 5, \qquad u_2 + v_2 = 3,$$
$$u_2 + v_4 = 2, \qquad u_3 + v_2 = 8, \qquad u_3 + v_3 = 4$$

Число неизвестных в данной системе уравнений на единицу больше числа уравнений, поэтому решение может быть получено с точностью до постоянного слагаемого. Приравняв значение одной из переменных какому-либо числу, однозначно находим значения других переменных.

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_1 = 4$, $v_2 = 5$, $u_2 = –2$, $u_3 = 3$, $v_3 = 1$, $v_4 = 4$. Найденные оценки подставляем в остальные условия $u_i + v_j \le C_{ij}$, тождественные $\Delta_{ij} = u_i + v_j – C_{ij} \le 0$, и проверяем, выполняются ли они.

Построение системы уравнений, ее решение и поиск Δ_{ij} реализуем в достаточно удобной табличной форме:

$$u_i + v_j = \begin{array}{r|cccc} u\backslash v & 4 & 5 & 1 & 4 \\ \hline 0 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 1 & 4 \\ –2 & 2 & \mathbf{3} & –1 & \mathbf{2} \\ 3 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{4} & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta_{ij} = \\ = u_i + v_j – C_{ij} \end{array} \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & –6 & –4 \\ –7 & \bullet & –7 & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Критерий оптимальности задачи ($\Delta_{ij} = u_i + v_j – C_{ij} \le 0$) здесь не выполняется; следовательно, найденный план не оптимален и целесообразно **перейти к другому опорному плану**, более близкому к оптимальному – $L(X_{\text{нов}}) = L(X_{\text{пред}}) – \theta\Delta_{ij}$.

Отрицательные величины Δ_{ij} показывают, что перевозки по данным направлениям невыгодны (на каждой единице транспортируемого продукта можно понести убытки, по сравнению с предыдущим опорным планом, в размере Δ_{ij}). В клетках, где $\Delta_{ij} > 0$, наоборот, может быть получен эффект в размере Δ_{ij} на объем θ задаваемой перевозки.

В нашем примере такая клетка одна $\Delta_{34} = +2$. Определяя объем поставок в эту клетку, руководствоваться следующим:

- поставив в нее какой-то объем перевозки, следует вычесть эту же величину из других занятых клеток, чтобы не нарушать балансовых соотношений по ввозу и вывозу;
- число клеток, включенных в новый план перевозок, должно

оставаться неизменным $m + n - 1$. Следовательно, вместо вошедшей клетки одна из клеток предыдущего плана перевозок должна быть исключена.

Оба условия легко выполнить, если перераспределение поставок осуществлять по «замкнутому контуру».

Пусть объем новой поставки равен $\Theta > 0$.

$$X_1 = \begin{array}{|cccc|} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{3}+\Theta & \cdot & \mathbf{5}-\Theta \\ \cdot & \mathbf{2}-\Theta & \mathbf{5} & +\Theta \end{array} = \{\Theta=2\} \begin{array}{|cccc|} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{5} & \cdot & \mathbf{3} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{array}$$

В нашем случае $\Theta = \min(2, 5) = 2$; на соответствующем маршруте появится ненулевая перевозка $X_{34} = \Theta = 2$ (при этом выборе сохраняется неотрицательность объемов перевозок и одна из бывших перевозок X_{32} исключается из числа «работающих»). Очевидно, что значение целевой функции (транспортные затраты) при переходе к плану X_1 уменьшается на $\Theta \cdot \Delta_{34} = 2 \cdot 2 = 4$.

Найденный план опять-таки проверяем на оптимальность. Строим в соответствии с занятыми клетками «шахматки» систему уравнений, решаем ее при $u_1 = 0$ и отыскиваем значения Δ_{ij}:

$$u_i + v_j = \begin{array}{c|cccc} u \backslash v & 4 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 3 & 4 \\ -2 & 2 & \mathbf{3} & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 5 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta_{ij} = \\ = u_i + v_j - C_{ij} \end{array} \begin{array}{|cccc|} \bullet & \bullet & -10 & -4 \\ -7 & \bullet & -5 & \bullet \\ -2 & -2 & \bullet & \bullet \end{array}$$

Так как все значения Δ_{ij} неположительны, можно утверждать оптимальность найденного плана. По сравнению с первым опорным планом затраты удалось снизить на 4 д. е. ($L(X_0) = 75 \to L(X_1) = 71$).

Кстати, если для найденного оптимального плана обнаружится *нулевое значение* Δ_{ij} для какой-то «незанятой клетки» (небазисной составляющей), то это свидетельствует о существовании других оптимальных планов (переход к плану, где соответствующая компонента равна Θ, не сопровождается изменением значения целевой функции, $\Theta\,\Delta_{ij} = 0$).

6.2. Вопросы для самоконтроля

1. Могут ли оказаться оптимальными планы:

а)

1	3	2
2	1	3
3	2	1

б)

6	0	0
0	6	0
0	0	6

2. Могут ли условия классической транспортной задачи оказаться противоречивыми?

3. Как вы поступите при решении задачи, если какой-нибудь маршрут окажется запрещенным?

4. Чем будет отличаться процесс решения задачи транспортного типа на максимизацию «эффекта»?

5. Что изменится, если в процессе решения транспортной задачи вместо $u_1 = 0$ задавать $u_1 = 1000$?

6. Что изменится, если в процессе решения транспортной задачи вместо $u_1 = 0$ задавать $v_1 = 0$?

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

6.3. Варианты заданий для практических занятий (номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Найти решение транспортных задач минимизации затрат.

Дать экономическую интерпретацию решения.

1.

B=	15	15	20	10	A=
	3	7	9	4	11
C=	1	2	10	5	29
	4	1	2	8	10
	7	3	6	5	10

2.

B=	7	7	7	7	7	A=
	8	3	2	5	6	15
C=	4	3	5	8	2	5
	5	6	3	8	2	7
	4	4	7	5	4	8
	1	8	3	4	10	1
	7	3	6	5	1	10

3.

B=	30	45	70	90	A=
	1	2	3	7	60
C=	9	10	4	5	80
	6	3	11	7	40
	2	1	5	4	90

4.

B=	12	8	5	6	A=
	5	8	3	4	11
C=	6	2	1	8	7
	0	9	10	3	4
	5	6	4	2	3

5.

B=	12	18	14	20	A=
	5	7	6	4	10
C=	2	1	3	8	14
	6	8	6	4	16
	11	2	3	8	18

6.

B=	20	20	15	15	A=
	1	3	6	4	15
C=	3	4	4	3	20
	6	5	2	2	15
	9	8	6	7	20

7.

B=	9	10	7	13	8	A=
C=	5	6	4	3	2	17
	1	8	3	5	6	8
	4	3	7	8	6	5
	3	2	1	8	5	14

8.

B=	18	17	16	15	10	A=
C=	5	8	4	3	2	15
	1	3	7	8	2	10
	6	4	5	1	7	5
	8	3	4	9	5	20

9.

B=	5	7	8	9	4	A=
C=	3	4	5	6	7	15
	8	9	10	1	2	6
	3	2	7	4	5	7
	3	4	2	1	6	8

10.

B=	9	10	11	12	7	A=
C=	8	1	9	3	6	5
	4	5	1	7	7	6
	3	6	2	4	3	7
	2	7	8	5	1	8

11.

B=	15	28	35	10	A=
C=	9	3	10	12	21
	1	7	13	15	28
	7	5	3	4	35
	8	2	9	1	10

12.

B=	7	14	12	10	A=
C=	1	4	5	8	8
	7	8	3	5	16
	3	0	4	6	14
	2	4	9	1	12

13.

B=	10	30	50	10	A=
C=	5	4	9	11	11
	7	1	8	3	40
	5	6	5	7	9

14.

B=	10	10	15	5	10	10	A=
C=	5	8	6	3	4	1	12
	8	7	6	3	4	2	18
	2	7	4	6	3	8	10

15.

B=	5	8	11	12	18	A=
C=	8	9	0	7	1	3
	5	4	3	1	5	4
	6	7	10	2	8	17

16.

B=	14	16	20	30	20	A=
C=	3	4	5	6	7	13
	2	8	9	6	11	23
	3	4	4	5	1	33

17.

B=	7	3	8	9	10	A=
C=	1	0	7	4	5	11
	8	9	3	1	2	10
	5	6	3	7	9	20

18.

B=	16	26	30	10	A=
C=	8	5	6	7	17
	3	4	2	1	27
	9	10	11	2	37

19.

B=	5	15	10	20	A=
C=	3	4	1	2	10
	2	1	7	5	10
	6	2	4	1	15
	5	6	3	4	15

20.

B=	27	31	45	19	A=
C=	5	7	6	8	45
	3	4	5	7	17
	2	1	9	11	13
	15	13	3	1	28

21.

B=	20	20	30	60	A=
	8	3	5	1	18
C=	3	4	8	5	28
	4	1	6	10	36
	12	7	9	2	48

22.

B=	13	15	17	19	A=
	2	7	4	8	14
C=	5	8	3	1	16
	7	12	4	9	18
	4	5	10	7	20

23.

B=	10	11	12	18	A=
	3	4	5	6	11
C=	7	8	9	9	12
	5	6	7	8	14

24.

B=	8	10	12	12	5	A=
	5	4	3	2	1	11
C=	1	2	3	4	5	18
	8	9	6	11	3	14

25.

B=	3	7	9	2	A=
	2	5	2	2	4
C=	4	3	7	5	5
	6	2	1	8	6
	3	7	3	9	8

26.

B=	15	15	20	40	A=
	5	8	3	4	20
C=	1	2	5	6	10
	3	4	7	8	30
	8	9	5	3	10

27.

B=	17	10	30	10	20	A=
	5	8	11	3	12	27
C=	5	3	7	4	9	37
	10	1	2	8	4	20
	8	2	4	5	6	10

28.

B=	7	7	7	7	7	A=
	8	3	5	2	6	15
C=	4	3	7	8	2	5
	5	6	3	5	6	5
	4	4	2	8	2	8

29.

B=	30	45	65	95	A=
	1	2	5	4	60
C=	9	10	3	7	80
	6	3	4	5	40
	2	1	11	7	90

30.

B=	13	9	6	7	A=
	5	6	0	5	12
C=	8	2	9	6	8
	3	1	10	4	5
	4	7	3	2	4

31.

B=	12	18	14	20	A=
	5	7	6	4	10
	1	3	5	4	24
C=	2	1	3	8	16
	3	4	11	3	19
	11	2	3	8	21

32.

B=	20	20	15	15	A=
	1	3	6	4	15
	6	8	3	8	20
C=	9	8	6	7	15
	6	5	2	2	20
	11	2	3	8	15

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тынкевич, М. А. Исследование операций и имитационное моделирование : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» / М. А. Тынкевич, А. Г. Пимонов, С. А. Веревкин ; КузГТУ. – Кемерово, 2015. – 248 с.

2. Тынкевич, М. А. Экономико-математические методы (исследование операций) [электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов инж.-экон. специальностей и направлений вузов / КузГТУ. – Кемерово, 2011. – 222 с. – Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90515&type=utchposob:common

3. Тынкевич, М. А. Исследование операций [электронный ресурс] : электронное учеб. пособие / М. А. Тынкевич, А. А. Тайлакова ; КузГТУ. – Кемерово, 2012. Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90797&type=utchposob:common

4. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов вузов, изучающих экон.-мат. методы и модели. – Санкт-Петербург : Лань, 2011. Режим доступа:
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1cid= 25&pl1_id=2027

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тынкевич Моисей Аронович
Речко Галина Николаевна

Практикум по дисциплине
«Исследование операций и методы оптимизации»
(линейная оптимизация)

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 15.03.2017. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 5,0
Тираж 100 экз. Заказ №

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А