МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Т. Ф. ГОРБАЧЕВА»

Кафедра прикладных информационных технологий

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА»

Методические указания и задания
к лабораторным работам для студентов направления
подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»

Составители М. А. Тынкевич
К. Э. Рейзенбук
Е. В. Буйная

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 14 от 12.04.2016
Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
направления 09.03.03
Протокол № 11 от 13.04.2016
Электронная копия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2016

Здесь читателю, интересы которого связаны с приобретением знаний для последующей работы в практически необъятной сфере разработки и применения информационных технологий, предлагается освоить методы решения небольшой группы задач.

С первой из них мы сталкиваемся, прочитав, что в городе N. проживает 3567013 человек или на ремонт котельной потребуется 245045. 72 руб. (фантастическая точность! Вы этому верите?). Какова точность результата расчета при реальной точности измерения исходных данных? А с какой точностью их надо измерить для получения результата с необходимой точностью? А на чем основана уверенность в разумности Ваших выводов?

Планируя объемы выпуска нескольких видов мясопродуктов при ограниченных объемах исходных ингредиентов, приходится решать системы линейных алгебраических уравнений. Почему полученное решение абсурдно (ведь «компьютер посчитал»)?

Как только «за окном» обнаружится нелинейная (непропорциональная) связь между ценами, объемами, спросом и т.п. и возникает желание найти баланс в их противоречии, возникают системы нелинейных уравнений. Как их решать? Если некто, решая уравнение $x = \mathrm{tg}x$, приходит к выводу $x = 1/\mathrm{tg}$, предложите ему протрезветь или обратиться к психиатру.

На экране телевизора мелькают изящные, гладкие, непрерывные кривые роста благосостояния, колебаний цен на нефть или рейтинга претендентов в избирательной гонке. Откуда они берутся, если замеры проводятся отнюдь не каждую секунду? А нельзя ли громоздкое выражение заменить более простым без потери нужной точности? А нельзя ли избавить компьютер от необходимости хранить «многотонные» статистические таблицы?

Сколько стационарных телефонов установить в районе с недоступной сотовой связью, чтобы не ждать соединения 15 минут? Каковы должны быть параметры аэродромной сети, чтобы очередь на приземление ожидаемого потока самолетов была приемлемой? Постановка подобных задач массового обслуживания приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. А как в экосистеме добиться, чтобы «и волки сыты, и овцы целы»? Кстати, отсутствие проблем бесперебойного освещения в Вашей квартире или хороший прогноз погоды обеспечен с помощью таких уравнений.

Мы не пытаемся «объять необъятное», хотя к этому следует стремиться каждому способному читать и понимать умные книги, познавать (может быть, и творить) новое в будущей деятельности.

Лабораторная работа 1

Действия над приближенными величинами

Задание 1. Вычислите значение соответствующей функции при заданных приближенных значениях аргументов, оцените его погрешность и правильно запишите найденную оценку.

Задание 2. Выясните погрешность задания исходных данных, необходимую для получения результата с m верными значащими цифрами.

Приступая к выполнению работы, необходимо знать следующие факты.

В основе многих процедур численного анализа лежит представление большинства «хороших функций» (непрерывных и непрерывно дифференцируемых) в виде рядов Тейлора – их разложения в окрестности некоторой точки. Так для функции от одной переменной

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x \cdot \frac{du}{dx} + \Delta x^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \Delta x^3 \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots + \Delta x^k \cdot \frac{d^ku}{dx^k} + \ldots \qquad (1)$$

где производные вычислены в точке x.

В случае функции нескольких переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Delta = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$

$$u(X+\Delta) = u(X) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \ldots \qquad (2)$$

Если значения отклонений Δx_i достаточно малы, то их степени и произведения становятся пренебрежимо малыми и, при определенных требованиях к точности вычисляемых значений, соответствующие слагаемые в (1) и (2) можно не учитывать.

Поскольку абсолютная погрешность приближенной величины характеризует максимально возможное ее отклонение от точного (**без учета знака**) и известное соотношение $|a+b| \le |a|+|b|$, очевидно, что *абсолютная погрешность суммы (разности) не больше суммы абсолютных погрешностей операндов* – $\Delta(x \pm y) \le \Delta x + \Delta y$.

Относительная погрешность приближенной величины (опять-таки без учета знака) определяется отношением абсолютной ее погрешности к точному значению. Легко показать, что *относительная погрешность произведения (частного) не больше суммы относительных погрешностей операндов* – $\delta(x \cdot y) \le \delta x + \delta y$

Из (2) при малых Δx_i с очевидностью следует

$$|\,u(X+\Delta\,) - u(X)\,| \le |\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i\,|$$

откуда возникают оценки абсолютной и относительной погрешности вычисляемого значения функции $u\,(x_1,x_2,..x_k)$ в виде

$$\Delta u = \sum_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta x_i\,, \quad \delta u = \sum_i \left|\frac{\partial}{\partial x_i} ln(u)\right|\Delta x_i\,, \tag{3}$$

где Δx_i – абсолютные погрешности аргументов.

Для решения обратной задачи (поиска абсолютных погрешностей аргументов, гарантирующих требуемую погрешность результата) можно использовать соотношения

$$\Delta x_i = \frac{|x_i| \cdot \Delta u}{\sum_i \left|x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}, \quad i = 1...k \tag{4}$$

При выводе (4) использован *принцип равных влияний* – предположение, что все аргументы дают одинаковый вклад в итоговую погрешность.

Пример[1].

1. Вычисляем значение $F(a,b,t)=(a^2+b^3)/cos(t)$,

при

$$a = 28.3 \pm 0.02,\ b = 7.45 \pm 0.01,\ t = 0.7854 \pm 0.0001.$$

Абсолютные погрешности исходных данных:

$$\Delta a = 0.02,\ \Delta b = 0.01,\ \Delta t = 0.0001.$$

Относительные погрешности исходных данных:

$$\delta a = 0.02 / 28.3 = 0.00071, \quad \delta b = 0.01 / 7.45 = 0.00135,$$

$$\delta t = 0.0001/ 0.7854 = 0.00013.$$

Находим значение функции и оценки ее частных производных

$$F=(a^2+b^3)/Cos(t) = 1214.4 / 0.7071 = 1717.44$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = {2a}/{cos(t)} = 80.05; \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = {3b^2}/{cos(t)} = 235.48;$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{a^2+b^3}{cos^2 t} sin(t) = 1717.4;$$

Используя (3), получаем

---

[1] Последующие вычисления выполняем с помощью калькулятора или в среде MatLab с достаточно большим числом значащих цифр, что практически исключает влияние погрешностей округления.

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|\Delta t \ = 4.1275;$$

$$\delta F = \Delta F\ /F = 0.0024\ (\sim 0.25\ \%).$$

Итак, найденное значение $F = 1717.44 = 1.71744 \cdot 10^3$ (порядок числа $n = 3$), соотношение для оценки числа m верных десятичных цифр $\Delta F = 4.1275 < 0.5 \cdot 10^{n-m+1} = 0.5 \cdot 10^{4-m} = 5 \cdot 10^{3-m}$ выполняется при $m \le 3$. Следовательно, в значении F можно доверять 3 значащим цифрам и с учетом округления имеем итог $\boldsymbol{F = 172 \cdot 10^1}$ (но не. 1720).

К тому же выводу можно прийти и другим, примитивным путем. Достаточно сравнить $F - \Delta F = 1717.44 - 4.1275 \sim$ **1713**.31 и $F + \Delta F = 1717.44 + 4.1275 \sim$ **1721**.57 на совпадение значащих цифр.

2. Предлагается вычислить значение $F = (a^2+b^3)\ /\ cos(t)$ при заданных значениях $a = 28.3$, $b = 7.45$, $t = 0.7854$ и выяснить, можно ли доверять в нем не менее чем $m = 5$ значащим цифрам.

Находим $a^2 = 800.9$, $b^3 = 413.5$, $cos(t) = 0.7071$, $a^2 + b^3 = 1214.4$, $F = (a^2+b^3)/cos(t) = 1214.4\ /\ 0.7071 = 1717.4$ (результат записан с 5 значащими цифрами, но следует ли всем им верить?).

Ориентируясь на (4), находим

$$|a \cdot (dF/da|) = 2a^2/cos(t) = 1601.9\ /\ 0.7071 = 2265.45,$$

$$|b \cdot (dF/db)\ | = 2b^3/cos(t) = 827.0\ /\ 0.7071 = 1169.\ 57,$$

$$|t \cdot (dF/dt)\ | = t \cdot\ (a^2+b^3)/cos^2(t)\ \cdot sin(t) = 0.7071 \times 1214.4/\ 0.7071 = 1214.4,$$

знаменатель $\sim 2265.45+1169.57+1214.4=4649.4$;

отсюда *допустимая погрешность* исходных параметров равна:

$$\Delta a = 28.3 \times 0.008572\ /\ 4649.4 = 0.00005 = 0.5 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta b = 7.45 \times 0.008572\ /\ 4649.4 = 0.00001 = 0.1 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta t = 0.7071 \times 0.008572/4649.4 = 0.000001 = 0.1 \cdot 10^{-5}.$$

Сравнивая найденные оценки с фактическими погрешностями входных величин ($\Delta a = 0.05 > 0.5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta b = 0.005 > 0.1 \cdot 10^{-4}$, $\Delta t = 0.00005 > 0.1 \cdot 10^{-5}$), видим, что доверять 5 цифрам в найденном значении F нельзя.

Контрольные вопросы

1. Выберите вариант – оценку по абсолютной погрешности разумнее использовать для значений, близких к единице, нулю, 1000, 10^{-9} или 10^{19}.

2. Выберите вариант – оценку по абсолютной погрешности разумнее использовать для значений, близких к единице, нулю, 1000,

10^{-9} или 10^{19}.

3. Оценку по относительной погрешности необходимо использовать для значений, возникающих при измерении – расстояния от Земли до Альфы Центавра, диаметра молекулы воды, численности шахматистов в г. Нью-Васюки, ширины тротуара около учебного корпуса?

4. Выберите вариант – относительная погрешность $a \times b$ при $\delta a = 0.01$ и $\delta b = 0.001$ равна 0.01, 0.011, 0.009, 0.00001.

5. На экран калькулятора выдано значение 12.333333. Если известно, что его относительная погрешности равна 0.001, то его запись с верными цифрами имеет вид: 12.3300000, 12.33, 12.3, 12.300000 или 12?

6. Известно, что в найденном в результате компьютерного расчета значении 0.000123454321 можно верить лишь 5 значащим цифрам. Правильна ли его запись в виде: $12345 \cdot 10^{-8}$, $0.12345 \cdot 10^{-3}$, $0.123450000 \cdot 10^{-3}$, 54321, $12345.4321 \cdot 10^{-3}$?

7. При вычислении $sin(x)$ от малых x абсолютная погрешность остается неизменной, удваивается, уменьшается вдвое, меняется в $cos\,(x)$ раз, становится относительной?

Варианты заданий

№		$F(a,b,c)$	a	b	c	m
1	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a+b)\,sin(3c)$	2456 ±0.0005	0.00078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b}\,arcsin(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
2	1	$\left[\frac{(a+b)c}{a-b}\right]ln(1+c)$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^7\,cos(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
3	1	$ab(a^3+b)\,sin^2(c)$	0.12456 ±0.0005	0. 0078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b}\,arctg(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
4	1	$\left[\frac{a+b)}{a-b^2}\right]ln(1+c^2)$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^2}{13}(a-b)^3\,cos(ac^2)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
5	1	$ab(a+b)^2\,sin(c)/c$	0.12456 ±0.0005	0.078 ±0.0003	0.2468 ±0.00013	

№		$F(a,b,c)$	a	b	c	m
	2	$\frac{a+b^2}{a-b} arccos(c)$	0.02456	0.007823	0.835	4
6	1	$\left[\frac{(a+b)c}{a-b}\right]^2 ln(1+c)$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^3 cos(a^2c)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
7	1	$\frac{ab}{c}(1+b) sin(2c)$	2456 ±0.0005	0.00078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b} ln(1+ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
8	1	$\left[\frac{(a+b)c}{a-b}\right] ln^2(1+c)$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^7 cos(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
9	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{1+c}}(a+b)Sin(c)$	0.12456 ±0.0005	0. 0078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b} arctg(2c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
10	1	$\left[\frac{(a+b^2)c}{a-b^2}\right] ln(1+c^2)$	0.2556 ±0.0005	0.50078 ±0.00003	0. 8 ±0.013	
	2	$(a-b)cos(ac^2)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
11	1	$(a^2-b)Sin(cb)$	0.2456 ±0.0005	0.0078 ±0.00003	8 ±1.23	
	2	$\frac{(a+b)}{a-b} arcsin(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
12	1	$\frac{a+b}{a-b}(a^2+b) ln(3+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	0.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}} arccos(c)$	0.02456	0.01823	0.0348	5
13	1	$\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}} Sin(cb)+cb$	0.2456 ±0.0005	0.078 ±0.003	8 ±1.25	
	2	$\frac{c(a+b)^2}{a-b} + arcsin(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
14	1	$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a-b}} a \cdot ln(a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}} - arccos(a+c)$	0.02456	0.01823	0.0348	5
15	1	$\frac{a+b}{(ab)}(a-b) \cdot ln(c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}(1+c+\frac{c^4}{4!}) lg(c)$	0.02456	0.01823	0. 348	5

№		$F(a,b,c)$	a	b	c	m
16	1	$\frac{a+b^2}{b}a\cdot ln(a+c)$	0.1245 ±0.0005	0.120 ±0.0003	2.08 ±0.015	
	2	$a+\frac{a+b}{a-b}lg(ac)$	0.02456	0.01823	3.0148	4
17	1	$\frac{2}{\sqrt[3]{a-b}}a\cdot ln(2a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b^2}}-arcsin(a+c)$	0.2456	0.1823	0.0348	5
18	1	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}a\cdot ln(\pi c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}lg(arccos(c))$	0.02456	0.01823	0.0348	5
19	1	$\frac{a+b}{(ab)^2}(a^2-b)\cdot ln(a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}(1+a+\frac{c^4}{4!})lg(c)$	0.02456	0.01823	0. 348	5
20	1	$\frac{a+b}{a-b}\|sin(ln(a+c))\|$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+c}{\sqrt{a-b}}(1+c)lg(bc)$	0.02456	0.01823	2. 348	4
21	1	$\frac{a^2+b}{(ab)^2}\cdot ln^2(a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a^2+b}{\sqrt{a-b}}(1+bc)lg(c)$	0.02456	0.01823	0. 348	3
22	1	$\frac{a^3-b^2}{(ab)^2}\cdot ln(a+c)$	0.22456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b^2}{\sqrt{a-b}}(1+c)lg(c)$	0.02456	0.01823	0. 348	3
23	1	$\frac{a^2-b^2}{(ab)^2}arctg(ln(a+c))$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}arctg(ln(a+c))$	0.12456	0.01823	2. 08	4
24	1	$\frac{a^4-b^4}{(ab)^2}ln(sin(a+c))$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}ln(sin(a+c))$	0.02456	0.01823	0. 348	5
25	1	$\frac{ln(a+b)}{(ab)^2}(a-b)\cdot ln(ac)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{ln(a+b)}{\sqrt{a-b}}(1+c)ln(ac)$	0.12456	0.11823	2. 08	5

Лабораторная работа 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Задание 1. Выполните обращение матрицы A и решение системы AX = B методом Гаусса по любой из известных его схем – вручную, ограничиваясь в записи чисел тремя значащими цифрами, и в среде MatLab. Сравните полученные результаты.

Задание 2. Решите систему CX = D методом квадратных корней (C – симметрическая матрица).

Задание 3. Выполните преобразование AX = B к виду X = αX+β, где норма матрицы α меньше 1 (уясните смысл этого условия), и найдите решение системы с установленной точностью любым из итерационных методов. Воспользуйтесь программными средствами MatLab.

1. Как известно, идея различных схем метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений (для краткости, СЛАУ) абсолютно проста – выбранное в очередной раз уравнение разрешаем относительно какой-то переменной (делим его коэффициенты на коэффициент при этой переменной) и исключаем эту переменную из остальных уравнений – из них вычитаем разрешенное уравнение, умноженное на соответствующий этой переменной коэффициент. Во избежание лишней обозначений и для удобства компьютерных расчетов используют матричные представления (A – матрица коэффициентов при неизвестных, B – вектор правой части, A^{-1} – обратная матрица).

Схема Гаусса единственного деления позволяет одновременно решать СЛАУ AX=B (даже с несколькими разными B) и находить A^{-1}. Здесь расширенную матрицу { A | B | E } преобразуют за n шагов к виду { E | X =A^{-1} B= | A^{-1} }, где E – единичная матрица, n – размерность, число неизвестных.

Пример.

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 \phantom{{}+4x_3} &= 5\\
-2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 15
\end{aligned}
$$

3	-1	0	5	1	0	0
-2	1	1	0	0	1	0
2	-1	4	15	0	0	1

$\Rightarrow$

1	-1/3	0	5/3	1/3	0	0
0	1/3	1	10/3	2/3	1	0
0	-1/3	4	35/3	-2/3	0	1

$\Rightarrow$

1	0	1	5	1	1	0
0	1	3	10	2	3	0
0	0	5	15	0	1	1

$\Rightarrow$

1	0	0	2	1	4/5	-1/5
0	1	0	1	2	12/5	-3/5
0	0	1	3	0	1/5	1/5

В итоге найдены $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, определитель матрицы произведению делителей det (A)= 3 (1/3) 5 = 5 и обратная матрица (убедитесь, что $A^{-1}A=E$).

При использовании системы MatLab можно использовать операторы типа X= A/B (решение AX=B), X=div(A)*B (эквивалент X= $A^{-1}B$).

Имейте в виду, что при ведущих элементов (делителях), близких к нулю, сильно растет погрешность и получаемое далеко от истины. Поэтому в стандартных компьютерных реализациях метода Гаусса используют **схему главных элементов**, где на всех шагах ведущим выбирается элемент матрицы коэффициентов, наибольший по модулю; соответствующее уравнение делится на этот элемент и соответствующая переменная исключается из остальных уравнений. На следующих шагах за ведущий принимается наибольший по модулю элемент преобразованной матрицы коэффициентов без учета ранее рассмотренных уравнений (если ведущий элемент нулевой, система не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений).

Например,

3	-1	0	5
-2	1	1	0
2	-1	4	15

3	-1	0	5
-5/2	5/4	0	-15/4
1/2	-1/4	1	15/4

1	-1/3	0	5/3
0	5/12	0	5/12
0	-1/12	1	35/12

1	0	0	2
0	1	0	1
0	0	1	3

2. Многочисленные задачи обработки данных приводят к СЛАУ с симметрической[2] матрицей коэффициентов, которые удобнее решать методом квадратных корней (объем хранения данных почти вдвое меньше).

Рассмотрим случай симметрической матрицы коэффициентов (матрица A называется симметрической, если для ее элементов выполняется условие $A_{ij} = A_{ji}$ при всех i и j).

Симметрическую матрицу можно представить произведением взаимно транспонированных матриц $A = R^T R$, где

[2] Матрица A симметрическая, если для ее элементов выполняется условие $A_{ij} = A_{ji}$ при всех i и j).

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Согласно [1], для определения R имеем систему

$$r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + \ldots + r_{ii}^2 = a_{ii} \qquad i\,, j = 1,\ldots,n$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + \ldots + r_{ii}r_{ij} = a_{ij}\,, \qquad i < j$$

решение которой имеет вид

$$r_{i\,i} = \sqrt{a_{i\,i} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{k\,i}^2} \qquad , \quad i = 1,\ldots,n$$

$$r_{i\,j} = \frac{1}{r_{i\,i}}[a_{i\,j} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{k\,i}\cdot r_{k\,j}]\;, \quad j = i+1,\ldots,n$$

Все элементы R либо вещественные, либо чисто мнимые числа.

Решение системы $AX=B$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов $R^{\mathrm{T}}Y=B$ и $R\,X=Y$, сводящемуся к поиску

$$y_1 = \tfrac{b_1}{r_{11}}\,,\;\; y_i = \tfrac{1}{r_{i\,i}}(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{i\,k}\cdot y_k)\;,\; i = 2,\ldots,n$$

$$x_n = y_n / r_{nn}\;,\; x_i = [y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{i\,k}\cdot x_k] / r_{i\,i}\;,\;\; i = n-1,\ldots,1$$

Возьмем систему, в которой

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{vmatrix}$$

Получаем

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1\;,\quad r_{12} = \tfrac{a_{12}}{r_{11}} = 2\,,\quad r_{13} = \tfrac{a_{13}}{r_{11}} = 3$$

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{5 - 2^2} = 1\;,\;\; r_{23} = \tfrac{1}{r_{22}}[a_{23} - r_{12}\cdot r_{13}] = -2$$

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{5 - 3^2 - (-2)^2} = i\sqrt{8}$$

т.е.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & i\sqrt{8} \end{vmatrix}$$

Решение возникающих систем $R^{\mathrm{T}}Y=B$, $\quad R\,X=Y$

$$y_1=\frac{5}{1}=5,\quad y_2=\frac{8-2\cdot5}{1}=-2\ ,\quad y_3=\frac{11-3\cdot5-2\cdot(-2)}{i\sqrt{8}}=\frac{-8}{i\sqrt{8}}=i\sqrt{8}$$

$$x_3=\frac{i\sqrt{8}}{i\sqrt{8}}=1,\quad x_2=\frac{-2-(-2)\cdot1}{1}=0\ ,\quad x_1=\frac{5-2\cdot0-3\cdot1}{1}=2.$$

Библиотека функций MatLab обеспечивает разложение Холецкого A=R′R (для положительно определенной симметрической матрицы[3], что гарантирует вещественность элементов R, R – верхняя треугольная матрица.

Подробнее о методе квадратных корней см. [1].

3. Решение больших систем чревато большой погрешностью результата и для его уточнения используют методы итераций (последовательных приближений).

Здесь система $AX=B$ обычно преобразуется к эквивалентной системе $X = \alpha X + \beta$, которая заменяется итерационным процессом

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta,\quad k = 0, 1, 2, ...$$

где начальное приближение $X^{(0)}$ выбирается произвольно, например, $X^{(0)} = 0$ или оценке другими методами.

Это преобразование выполняют так, чтобы итерационный процесс был сходящимся. Достаточным условием сходимости является требование, чтобы норма матрицы α, определяемая, например, как $\|\alpha\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i\,j}|$, оказалась меньше 1.

Это сделать особенно просто, если диагональные элементы матрицы A больше суммы внедиагональных для всех строк.

Так, систему

$$\begin{aligned}4\ x_1 + 0.24\ x_2 - 0.08\ x_3 &= 8\\ 0.09\ x_1 + 3\ x_2 - 0.15\ x_3 &= 9\\ 0.04\ x_1 - 0.08\ x_2 + 4\ x_3 &= 20\end{aligned}$$

без затруднений преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 0.06\ x_2 + 0.02\ x_3\\ x_2 &= 3 - 0.03\ x_1 + 0.05\ x_3\\ x_3 &= 5 - 0.01\ x_1 + 0.02\ x_2.\end{aligned}$$

Строим процесс **простой итерации** с $X^{(0)}=0$, получая

$$X^{(1)} = \begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}\qquad X^{(2)} = \begin{vmatrix}0 & -0.06 & 0.02\\ -0.03 & 0 & 0.05\\ -0.01 & 0.02 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1.92\\3.19\\5.04\end{vmatrix}$$

[3] Симметрическая матрица положительно определенная, если ее главные миноры положительны.

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.9094 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{vmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.9094 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.90923 \\ 3.19495 \\ 5.04485 \end{vmatrix}$$

(продолжаем процесс до обнаружения $| X^{(k+1)} - X^{(k)} | < \varepsilon$ (требуемой точности); найденное приближение гарантирует, по крайней мере, три верных цифры после десятичной точки).

Более быстрый метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что на очередной итерации используются не оценки предыдущей итерации, а самые последние из полученных оценок

Понятие **нормы** матрицы (вектора) используется при решении многих задач, связанных с сходимостью итерационных процессов. В MatLab для поиска нормы предлагается функция **norm(A)**. Если A – вектор, норма определяется как корень из суммы квадратов элементов.

Контрольные вопросы

1.Что такое обратная матрица?

2. Как создать транспонированную матрицу?

3. Что такое положительно определенная матрица?

4. Что такое единичная матрица?

5. В чем отличие схем главных элементов и единственного деления?

6. Можно ли в программе условием окончания итераций поставить выполнение требования $X^{(k+1)} = X^{(k)}$?

7. В каком случае СЛАУ имеет единственное решение?

8. Как связано условие $||\alpha|| < 1$ с погрешностью вычислений?

9. Предсказуемо ли время решения СЛАУ методом Гаусса и итерационными методами?

Варианты заданий

№	A				B	C			D
1	1	0.47	–0.11	0.55	1.33	1	2	3	13
	0.42	1	0.35	0.17	1.29	2	3	5	4
	-0.25	0.67	1	0.36	2.11	3	5	9	17
	0.54	-0.32	–0.74	1	0.10				
2	0.63	1	0.11	0.34	2.08	1	2	3	0.55
	0.17	1.18	-0.45	0.11	0.17	1	4	9	1.35
	0.31	–0.15	1.17	–2.35	1.28	1	8	27	3.55
	0.58	0.21	–3.45	–1.18	0.05				
3	0.77	0.04	–0.21	0.18	1.24	0.42	1.43	0.27	1
	–0.45	1.23	–0.06	0	-0.88	1.43	–0.84	0.93	2
	–0.26	–0.34	1.11	0	0.62	0.27	0.93	-0.48	3
	–0.05	0.26	–0.34	1.12	–1.17				
4	0.79	-0.12	0.34	0.16	-0.64	0.64	0.54	-0.33	3
	-0.34	1.18	-0.17	0.18	1.42	0.54	-0.92	0.24	2
	-0.16	-0.34	0.85	0.31	-0.42	-0.33	0.24	0.78	1
	-0.12	0.26	0.08	0.75	0.83				
5	-0.68	-0.18	0.02	0.21	-1.83	0.5	1.77	0.39	1.5
	0.16	-0.88	-0.14	0.27	0.65	0.84	1.79	0.95	2.5
	0.37	0.27	-1.02	-0.24	-2.23	0.24	1.03	-0.41	3
	0.12	0.21	-0.18	-0.75	1.13				
6	-0.58	-0.32	0.03	0	-0.44	0.19	0.51	0.86	0.35
	0.11	-1.26	-0.36	0	-1.42	0.51	0.32	0.95	0.42
	0.12	0.08	-1.14	-0.24	0.83	0.86	0.95	-0.12	0.45
	0.15	-0.35	-0.18	0	1.42				
7	-0.83	0.31	-0.18	0.22	1.71	0.64	1.54	-0.33	0.3
	-0.21	-0.67	0	0.22	-0.62	1.54	-0.92	0.24	0.2
	0.32	-0.18	-0.95	-0.19	0.89	-0.33	0.24	0.78	0.1
	0.12	0.28	-0.14	-1	-0.94				
8	-0.87	0.27	-0.22	-0.18	-1.21	0.55	1.77	0.39	1.5
	-0.21	-1.	-0.45	0.18	0.33	0.84	1.79	0.95	2.5
	0.12	0.13	-0.33	0.18	0.48	0.24	1.03	-0.41	3
	0.33	-0.41	0	-1	1.21				

9

-0.81	-0.07	0.38	-0.21	0.81
-0.22	-0.92	0.11	0.33	0.64
0.51	-0.07	-0.81	-0.11	1.71
0.33	-0.41	0	-1	1.21

0.59	1.77	1.39	1.5
0.84	1.79	0.95	2.5
1.24	1.03	-0.41	3

10

-1	0.22	-0.11	0.31	-2.7
0.38	-1	-0.12	0.22	1.5
0.11	0.23	1	-0.51	1.2
0.17	-0.21	0.31	-1	0.17

1.42	1.43	0.27	0.1
1.43	-0.84	0.93	0.2
0.27	0.93	-0.48	0.3

11

-0.93	-0.08	0.11	-1.18	0.51
0.18	-0.48	0	0.21	-1.17
0.13	0.31	-1	-0.21	1.02
0.08	0	-0.33	-0.72	0.28

-0.93	-0.08	0.11	1.18
0.18	-0.48	0	0.21
0.13	0.31	-1	0.21

12

-0.95	-0.06	-0.12	0.14	2.17
0.04	-1.12	0.08	0.11	1.4
0.11	0.12	0	1.03	0.8
0.34	0.08	-1.06	0.14	2.1

-1	-0.07	0.21	0.92
1	0.03	-0.42	0.92
-0.03	1	-0.04	1.2

13

0	-0.19	0.27	-0.88	1.2
-0.33	-1	-0.07	0.21	0.92
0.11	0	1.03	-0.42	0.92
-0.92	-0.03	0	-0.04	1.2

-1	-0.07	0.21	0.92
0.07	0.03	-0.42	0.92
0.21	0.42	-0.04	1.2

14

-0.88	-0.23	0.25	-0.16	1.24
0.33	0.03	-0.84	-0.32	-1.15
0.14	-0.66	-0.18	0.24	0.89
0.12	-0.05	0	-0.85	0.57

0.08	-0.12	-0.77	0.32
0.25	0.22	0.14	-1
-0.77	-0.14	0.06	-0.12

15

0.12	-1	0.32	-0.18	0.72
0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
0.25	0.22	0.14	-1	-1.56
-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21

0.08	0.25	-0.77	0.32
0.25	0.22	0.14	-1
-0.77	0.14	0.06	-0.12

16

-0.86	0.23	0.18	0.17	1.42
0.12	-1.14	0.08	0.09	0.83
0.16	0.24	-1	-0.35	-1.21
0.23	-0.08	0.05	-0.75	-0.65

1	2	3	0.55
2	4	9	0.35
3	9	5	0.55

17

76	21	6	-34	-142
12	-114	8	9	83
16	24	-100	-35	-121
23	-8	5	-75	85

1	2	4	0.55
1	4	16	1.35
1	8	64	3.55

18

-83	27	-13	-11	142
5	-68	13	24	26
9	54	127	36	23
13	27	34	156	49

0.64	0.53	-0.33	3
0.53	-0.92	0.23	2
-0.33	0.23	0.78	1

19

1	2	3	9	1.11
2	1	9	4	1.16
3	9	1	4	1.24
9	1	3	4	1.55

5	3	1	11
3	5	3	17
1	3	5	19

20

-1	0.28	-0.17	0.06	-21
0.52	-1	0.12	0.17	117
0.17	-0.18	-0.79	0	0.81
0.11	0.22	0.03	-0.95	-0.72

11	12	13	13
12	13	15	4
13	15	19	17

21

76	21	6	-34	142
12	-114	8	9	83
16	24	-100	35	121
23	-8	5	-75	85

1	2	4	0.55
2	4	7	1.35
3	6	14	3.55

22

-83	27	-13	-11	142
5	-68	13	24	26
9	54	127	36	23
13	27	34	156	49

1.64	0.53	-0.33	3
0.53	-0.92	0.23	2
-0.33	0.23	1.78	1

23

25	3	5	4	1.11
5	4	3	25	1.16
3	25	4	5	1.24
4	5	25	3	1.55

15	13	11	11
13	15	13	17
11	13	15	19

24

0.12	-1	0.32	-0.18	0.72
0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
0.25	0.02	0.14	-1	-1.56
-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21

0.08	0.25	-1.77	0.32
0.25	0.22	0.14	-1
-1.77	0.14	0.06	-0.12

25

-0.86	0.23	0.18	0.17	1.42
0.12	-1.14	0.08	0.09	0.83
0.16	0.24	-1	-0.35	-1.21
0.23	-0.08	0.05	-0.75	-0.65

11	21	31	0.55
21	41	91	0.35
31	91	51	0.55

Лабораторная работа 3

Решение нелинейных уравнений

Задание 1. Выполните отделение корней уравнений $f_1(x) = 0$ с использованием аналитических оценок. Средства компьютерной графики использовать лишь для иллюстрации выводов.

Задание 2. Найдите оценки какого-либо из корней уравнения $f_1(x) = 0$ методами дихотомии и хорд с заданной погрешностью. Сравните объем вычислений при использовании указанных методов.

Задание 3. Найдите один из корней уравнений $f_2(x) = 0$ методами Ньютона (касательных) и простой итерации с заданной погрешностью, обеспечив условия сходимости процесса итераций. Найдите оценку корня с помощью функции MatLab x = fzero(f_2,x_0).

Задание 4. Решите систему уравнений $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$ методом Ньютона с точностью 0.0005.

1. Идея отделения корней связана с тем, что для непрерывной функции $f(x)$ факт $f(a)\cdot f(b)<0$ говорит о наличии в интервале (a,b) хотя бы одного корня [1].

Если $f(x)$ алгебраический многочлен n-й степени, то уравнение

$$P_n(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$$

с действительными коэффициентами, имеет n корней (различных, совпадающих, действительных или комплексно-сопряженных). Так уравнение $x^3 + 8 = 0$ имеет 3 корня -2, $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$.

Для таких (алгебраических) уравнений проблема отделения корней упрощается за счет некоторых известных теорем.

<u>Теорема 1.</u> Все корни x_k ($k=1, \ldots, n$) полинома, в том числе и комплексные лежат в кольце $r < |x_k| < R$, где

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|}\ ,\ r = 1/(1 + \frac{B}{|a_n|}),$$

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, .., |a_n|\},\ B = \max\{|a_0|, |a_1|, .., |a_{n-1}|\}.$$

Так для уравнения $P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1 = 0$, обладающего 5 корнями, имеем $A = \max(0,0,100,2,1\} = 100$, $B = \max(2,0,0,100,2\} = 100$, соответственно $R = 51$, $r = 1/101 \sim 0.01$. Действительные корни уравнения разумно искать в интервалах (0.01, 51) и (–51, –0.01).

<u>Теорема 2.</u> Если $a_0 > 0$ и a_k – первый из отрицательных коэффициентов полинома. Для положительных корней имеет место неравенство

$$x < 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{|a_0|}}, \quad B = \max_{a_i < 0} |a_i|.$$

Для вышеприведенного полинома k=3, B=max(100, 1)=100 и верхняя граница положительных корней равна $1+\sqrt[3]{50} \approx 4.7$ <<51.

Теорема 3. Если при $x = Z$ значения полинома и его производных неотрицательны, то Z можно принять за верхнюю границу положительных корней полинома.

Если для нашего полинома взять $x = 4$, то видим при этом значении

$$P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1 > 0, \quad P'(x) = 10x^4 - 200x + 2 > 0,$$

$$P''(x) = 40x^3 - 200 > 0, \quad P'''(x) = 120x^2 > 0, \quad P^{(4)}(x) = 240x > 0,$$

$$P^{(5)}(x) = 240.$$

Вывод: верхняя граница положительных корней не превышает 4.

Для установления нижней границы отрицательных корней можно выполнить аналогичные оценки для полинома $P(-x)$.

Теорема 4. Число положительных корней полинома равно числу перемен знаков его коэффициентов или меньше его на четную величину.

Для рассматриваемого $P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1$ число положительных корней равно 3 или 1. Поскольку в полиноме

$$P(-x) = -2x^5 - 100x^2 - 2x - 1$$

перемен знаков нет, то отрицательных корней нет.

Оценки корней полинома в среде MatLab легко найти с помощью функции roots(P), где P – массив значений коэффициентов,

2. В основе методов дихотомии и хорд последовательное изменение границ интервала $[a,b]$ в зависимости от знака $f(a)\cdot f(x_k)$:

1) $x_k = (a + b)/2$: требование $|b-a| < \varepsilon$;

2) $x_k = \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$; требование $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ или $|f(x_k)| < \varepsilon$.

3. В основе итерационных методов выбор начального приближения x_0 и последовательное уточнение до выполнения $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

1) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0.1,2,\ldots$

2) $f(x) = 0$ преобразуется к эквивалентному $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$, и далее $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$

4. Итерации по методу Ньютона

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - W^{-1}(X^{(k)})\, F(X^{(k)}) = 0, \quad k = 0.1,2,\ldots,$$

где X – вектор неизвестных, $F(X)$ – вектор функций, $W^{-1}(X)$ – обратная матрица частных производных. Для системы $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix},\ W(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Этот метод является условно сходящимся и значимо зависит от выбора начального приближения.

При решении задачи в среде MatLab для оценки начального приближения можно заменить решение системы минимизацией функции $z(x,y) = f_1^2(x,y) + f_2^2(x,y)$, построением ее изолиний (линий уровня) с помощью функций [X,Y] = `meshgrid`(..,..); Z = ….; [C,h] = `contour`(X,Y,Z) и последующим визуальным обзором.

Контрольные вопросы

1. Что такое корень уравнения?
2. Способы отделения корней без компьютерной графики?
3. Средствами компьютерной графики построен график функции. Гарантирована информация обо всех корнях уравнения?
4. Гарантирует ли выполнение $f(a)\cdot f(b)>0$ отсутствие корней на $[a,b]$?
5. На вопрос о корнях уравнения $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ предложены варианты ответа: 1) 4 разных корня, 2) один действительный и три комплексных, 3) два действительных и два комплексных, 4) нет корней, 5) 4 комплексных корня. Какие следует отвергнуть?
6. Почему в методе хорд не используют критерий $|b–a|< \varepsilon$?
7. Какой метод гарантирует предсказуемый объем вычислений?
8. Для метода простой итерации ставится условие $|\varphi'(x)| < 1$. Зачем?
9. Решение системы $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$ иногда заменяют задачей минимизации до нуля функции $A_1\ f_1^2(x,y) + A_2\ f_2^2(x,y)$, где $A_1, A_2 > 0$. Правомерность такой замены?

Варианты заданий

№	1	2	3
1	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	$ln(x)+(x+1)^3=0$	$sin(x+1) - y=1.2$ $2x+cos(x)=2$
2	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x\cdot 2^x=1$	$tg(xy+0.4)= x^2$ $0.6\,x^2 +2\,y^2=1$

№	1	2	3
3	$x^4 – x – 1 = 0$	$x + cos(x) = 1$	$cos(x–1) + y = 0.5$ $x – cos(x) = 3$
4	$2x^4 – x^2 – 10 = 0$	$x + lg(1+x) = 1.5$	$sin(x) + 2y = 2$ $cos(y–1) + x = 0.7$
5	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 10 = 0$	$lg(2+x) + 2x = 3$	$cos(x–1) + y = 1$ $sin(y) + 2x = 1.6$
6	$x^4 – 18x^2 + 5x – 8 = 0$	$2^x + 5x – 3 = 0$	$sin(x+1) – y = 1$ $2x + cos(y) = 2$
7	$x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1 = 0$	$5^x + 3x = 0$	$sin(x–y) – xy = 0$ $x^2 – y^2 = 0.75$
8	$x^4 – x^3 – 2x^2 + 3x – 3 = 0$	$3e^x = 5x + 2$	$sin(x+y) – 1.5xy = 0$ $x^2 + y^2 = 1$
9	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1 = 0$	$5^x = 6x + 3$	$sin(x–y) – xy + 1 = 0$ $x^2 – y^2 = 0.75$
10	$3x^4 – 8x^3 – 18x^2 + 2 = 0$	$2e^x + 5x – 6 = 0$	$y = 1/(x^{3/2} + 1)$ $x^2 + y^2 = 9$
11	$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$	$2arctg(x) - x + 3 = 0$	$x^2 + y^2 = 9$ $y = 1 + e^{–x}$
12	$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 – 1 = 0$	$(x–3) \cdot cos(x) = 1$	$x^2 + y^2 = 5$ $y = 1 - 2e^{–xy}$
13	$x^4 – 4x^3 – 8x^2 + 1 = 0$	$x^x = 20 – 9x$	$x^2 + y^2 = 5$ $y = e^{–xy}$
14	$2x^4 – 9x^3 – 60x^2 + 1 = 0$	$x \cdot lg(x) = 1$	$sin(x–0.6) – y = 1.6$ $3x – cos(y) = 0.9$
15	$x^5 + x^2 – 5 = 0$	$tg^3 x = x – 1$	$x^2 + y^2 = 6 \quad y = e^{–x}$
16	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 – 7 = 0$	$5^x = 1 + e^{–x}$	$x^3 + y^3 = 6 \quad y = e^{–x}$
17	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 11 = 0$	$5^x = 3 – e^x$	$x^4 + y^4 = 5 \quad y = e^{–x}$
18	$x^4 – 18x^3 – 10 = 0$	$arctg(x^2 + 1/x) = x$	$x^2 + y^2 = 1$ $sin(x+y) = 1.2x$
19	$3x^4 – 8x^3 – 18x^2 + 2 = 0$	$tg(0.55x + 0.1) = x^2$	$x^2 + y^2 = 1$ $sin(x+y) = 0.2 + x$
20	$x^4 – 18x – 10 = 0$	$5^x – 6x = 7$	$x + cos(y–1) = 0.8$ $y – cos(x) = 2$
21	$x^4 + 18x – 10 = 0$	$5^x – 6x = 3$	$x^2 + y^2 = 1 \quad x^3 + y^3 = 2$
22	$x^4 + 18x^3 – 6x^2 + x – 10 = 0$	$5^x = 1 + e^{-2x}$	$x^2 + y^2 = 1 \quad x – y^3 = 0.5$
23	$x^5 + 12x^3 – 6x^2 + x – 10 = 0$	$7^x – 6x = 2$	$x^3 + y^3 = 8 \quad y = x^{3/2}$
24	$3x^5 – 8x^3 – 18x^2 + 2 = 0$	$5^x = 2 + e^{-2x}$	$x^3 + y^3 = 8 \quad y = 1 + x^{3/2}$
25	$x^3 – 18x – 10 = 0$	$x \cdot 2^x = 3$	$x^3 + y^3 = 8 \quad y = 1 – x^{3/2}$

Лабораторная работа 4

Аппроксимация функций

Задание 1. Выберите в таблице в разделе «Варианты заданий» к данной лабораторной работе значения функции $y(x)$, начиная с узла, равного номеру вашего варианта. Постройте таблицы конечных разностей, проследите за динамикой изменения значений и дайте объяснение замеченным фактам. Выполните экстраполяцию на два узла от начала и от конца таблицы.

Задание 2. Для начальных трех узлов выбранной таблицы постройте интерполяционный многочлен Лагранжа и с его помощью найдите значения функции в узлах, соответствующих полушагу таблицы. Выполните аналогичные действия для всей таблицы программным путем и с помощью функций MatLab – аппроксимация функции полиномом n-й степени P = polifit(X,F,n) и вычисления значений полинома y = polyval(P,x).

Задание 3. Для выбранной таблицы возьмите какое-то значение x в окрестности центрального узла таблицы и найдите значение $y(x)$ с помощью формул Ньютона интерполирования вперед или назад.

Задание 4. Найдите оценку значений производных первого и второго порядка с погрешностью, не превышающей $O(h^2)$.

Задание 5. Выполните среднеквадратическую аппроксимацию тригонометрическим многочленом (отрезком ряда Фурье) третьей степени. Оцените качество аппроксимации сравнением с исходным материалом, дайте графическую интерпретацию этого сравнения

Задание 6. Выполните аппроксимацию алгебраическими многочленами разных степеней (от 1 и выше) и оцените их качество по отношению значений остаточного и исходного среднеквадратичного отклонений или по отношению двух его последовательных значений. Можете воспользоваться функциями MatLab – аппроксимации табличной функции полиномом заданной степени `P=polyfit (X,F,k)` и вычисления значений полинома `Y = polyval(P,X)`.

Задание 7. Для выбранной таблицы постройте квадратичную сплайн-интерполяцию, используя только 6 узлов (шаг 0.2). Оцените качество полученного сплайна сравнением оценок для промежуточных узлов, дайте графическую интерпретацию этого сравнения.

1. Построение таблицы конечных разностей для функции $f(x)$, заданной значениями f_k при равноотстоящих $x = x_k$ (k=0÷N)

$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, ($k=0\div n-1$), $\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$, ($k = 0\div n-2$) и использование ее для экстраполяции можно увидеть из примера:

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	1	2	4	0
1	3	6	4	0
2	9	10	4	0
3	19	14	4	**0**
4	33	18	**4**	
5	51	**22**		
6	**73**			

Здесь обнаружив обращение в нуль всех значений $\Delta^3 f_k$ (постоянство $\Delta^2 f_k$; признак, что $f(x)$ алгебраический многочлен степени 2), допускаем, что это верно при $x > 5$ и обратным ходом находим $f(6)$.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа в случае n+1 несовпадающих узлов имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})....(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)},$$

где узлы таблично заданной функции необязательно равноотстоящие. Для функции, заданной значениями $f(0) = 1$, $f(1)= 3$, $f(2) = 9$, получаем многочлен второй степени

$$L_2(x) = 1\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 3\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 9\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = 2x^2+1$$

Вычислить $L_2(x)$ при $x = 0.5$, 1,5 не составит труда.

При использовании функций MatLab в случае n+1 узлов задаем n+1-мерные массивы X, F, Z и выполняем операторы

P = polyfit(X,F,n) и FF = polyval(P, Z)

3. При узлах таблицы, равноотстоящих с шагом h, *формула Ньютона интерполирования вперед*

$$f(x_k + t\cdot h) = f_k + t\cdot\Delta f_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_k + ... + \frac{t(t-1)...(t-m+1)}{m!}\Delta^m f_k + ...$$

используется в диапазоне узлов, удаленных от конца таблицы, и узел x_k подбирают для конкретного x так, чтобы $0 < t = (x-x_k)/h < 1$.

Формула Ньютона интерполирования назад

$$f(x_k - t\cdot h) = f_k - t\cdot\Delta f_{k-1} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_{k-2} - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_{k-3} + ..$$

$$+ (-1)^m\cdot\frac{t(t-1)...(t-m+1)}{m!}\Delta^m f_{k-m} + ...$$

используется в диапазоне узлов, удаленных от начала таблицы. Узел x_k подбирают так, чтобы величина $0< t = (x_k - x)/h < 1$.

4. Для численного дифференцирования табличной функции в узлах таблицы можно рекомендовать

$$f'(x_k)=\frac{f_{k+1}-f_k}{h}+O(h)\ ;\quad f'(x_k)=\frac{f_k-f_{k-1}}{h}+O(h);$$

$$f'(x_k)=\frac{f_{k+1}-f_{k-1}}{2h}+O(h^2);$$

$$f''(x_k)=\frac{f_{k+1}-2f_k+f_{k-1}}{h^2}+O(h^2)$$

Для начального и конечного узлов

$$f'(x_0)=\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}+O(h^2)\ ;\quad f'(x_n)=\frac{f_{n-2}-4f_{n-1}+f_n}{2h}+O(h^2).$$

Убедиться в правомерности этих оценок можно подстановкой в их представление разложений функции в ряд Тейлора в окрестности x_k

$$f(x_k+h) = f(x_k) + h\cdot\frac{df}{dx} + h^2\cdot\frac{d^2f}{dx^2} + h^3\cdot\frac{d^3f}{dx^3} + \ldots + h^m\cdot\frac{d^mf}{dx^m} + \ldots.$$

5. Заменой $z=2\pi\frac{x-x_0}{x_n-x_0}$ переходим к диапазону от 0 до 2π. Отрезок аппроксимирующего ряда Фурье m-й степени ($2m+1<n$)

$$P_m(z)=a_0+\sum_{k=1}^{m}[a_k\cdot Cos(kz)+b_k\cdot Sin(kz)],$$

$$a_0=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(z_i);\qquad a_k=\frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(z_i)\cdot Cos(kz_i),$$

$$b_k=\frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(z_i)\cdot Sin(kz_i)\ ,\ k=\overline{1,m}$$

6. Построение аппроксимирующего многочлена m-го порядка

$$P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$$

по критерию минимума суммы квадратов отклонений его значений от табличной функции сводится к решению системы

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x^2} + \ldots + a_m\overline{x^m} = \overline{F} \\ a_0\overline{x} + a_1\overline{x^2} + a_2\overline{x^3} + \ldots + a_m\overline{x^{m+1}} = \overline{F\cdot x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\overline{x^m} + a_1\overline{x^{m+1}} + a_2\overline{x^{m+2}} + \ldots + a_m\overline{x^{2m}} = \overline{F\cdot x^m} \end{array}\ ;\quad \overline{x^k}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^k.$$

Качество аппроксимации определяет величина стандартного отклонения

$$s=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[P(x_i)-F_i\right]^2}$$

является минимальной.

7. Считаем, что интервал аппроксимации разбит на N подынтервалов с граничными узлами $x_0, x_1, ..., x_{N-1}, x_N$.

Квадратичный сплайн для $f(x)$ – это кусочная функция

$$P(x)=\{P_1(x), P_2(x), ..., P_N(x)\},$$

где $P_k(x) = A_k(x-x_{k-1})^2+B_k(x-x_{k-1})+C_k$, $k = 1\div N$, соблюдаются условия интерполяции и непрерывности $P_1(x_0) = f_0$, $P(x_k)=P_{k+1}(x_k) = f_k$, $k = 1\div N-1$, $P_N(x_N) = f_N$, а в промежуточных узлах и условия непрерывности первой производной $P_k'(x_k) = P_{k+1}'(x_k)$, $k = 1\div N-1$.

При поиске коэффициентов полиномов возникает система $3N-1$ уравнений с $3N$ неизвестными и приходится задавать $B_1= P'_1(x_0)$ равной аппроксимации производной, например

$$f'(x_0)=\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}+O(h^2) \; -$$

$$C_k=f_{k-1}\;,k=\overline{1,N};\; B_1=f'(x_0),\quad B_k=2\cdot\frac{f_k-f_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}-B_{k-1}\;,\; k=\overline{2,N};$$

$$A_k=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})-B_k(x_k-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})^2}\;,\; k=\overline{1,N}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое аппроксимация и каковы ее критерии?
2. На какой интервал можно осуществлять экстраполяцию?
3. Связь между конечными разностями и производными?
4. Максимальная степень аппроксимирующего многочлена?
5. Чему равны значения интерполяционного многочлена Лагранжа в узлах таблицы?
6. Минимальное число узлов, необходимое для аппроксимации многочленом10-й степени?
7. Что такое сплайн и зачем он нужен?
8. Требования к линейному сплайну. Как выглядит его графическое изображение?
9. Почему не столь популярен кубический сплайн и тем более сплайны более высоких порядков?
10. Как можно выполнять интерполяцию в случае табличной функции двух переменных?

Варианты заданий

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	0	4,7	-17,8711	8,4	-2,8763	12,1	-1,12952
1,1	0,324097	4,8	-13,5425	8,5	-3,04297	12,2	-2,15806
1,2	0,643881	4,9	-7,41942	8,6	-2,91168	12,3	-2,98314
1,3	0,922415	5,0	0	8,7	-2,49175	12,4	-3,52184
1,4	1,1253	5,1	8,037451	8,8	-1,82115	12,5	-3,71872
1,5	1,224745	5,2	15,89357	8,9	-0,96308	12,6	-3,55153
1,6	1,20301	5,3	22,72513	9,0	-10^{-13}	12,7	-3,03371
1,7	1,054847	5,4	27,73269	9,1	0,97427	12,8	-2,21331
1,8	0,788625	5,5	30,25	9,2	1,863736	12,9	-1,16858
1,9	0,425989	5,6	29,82532	9,3	2,579679	13,0	-0,00055
2,0	$4{,}62\cdot10^{-5}$	5,7	26,2854	9,4	3,049516	13,1	0,447264
2,1	-0,44776	5,8	19,77381	9,5	3,224158	13,2	0,871348
2,2	-0,87178	5,9	10,75785	9,6	3,083118	13,3	1,226577
2,3	-1,2269	6,0	0,001176	9,7	2,636854	13,4	1,473176
2,4	-1,47335	6,1	-11,4973	9,8	1,926069	13,5	1,581139
2,5	-1,58114	6,2	-22,5932	9,9	1,01801	13,6	1,533737
2,6	-1,53356	6,3	-32,1089	10,0	0,000108	13,7	1,329751
2,7	-1,3294	6,4	-38,9547	10,1	-1,02845	13,8	0,984119
2,8	-0,98363	6,5	-42,25	10,2	-1,96638	13,9	0,526919
2,9	-0,52634	6,6	-41,4287	10,3	-2,72032	14,0	0,000735
3,0	-0,00011	6,7	-36,3182	10,4	-3,21408	14,1	-0,54336
3,1	0,543966	6,8	-27,1814	10,5	-3,3964	14,2	-1,05084
3,2	1,051358	6,9	-14,7151	10,6	-3,24618	14,3	-1,46919
3,3	1,469572	7,0	0,00018	10,7	-2,77495	14,4	-1,75341
3,4	1,753617	7,1	0,856485	10,8	-2,02598	14,5	-1,87083
3,5	1,870829	7,2	1,640842	10,9	-1,07035	14,6	-1,80476
3,6	1,804553	7,3	2,27459	11,0	-0,00023	14,7	-1,55668
3,7	1,556275	7,4	2,692863	11,1	1,080087	14,8	-1,14651
3,8	1,145949	7,5	2,851227	11,2	2,064282	14,9	-0,61111
3,9	0,610438	7,6	2,730379	11,3	2,854531	15,0	-0,00091
4,0	0,000196	7,7	2,338403	11,4	3,37121	15,1	0,624825
4,1	-5,19505	7,8	1,710348	11,5	3,560925	15,2	1,203832
4,2	-10,3689	7,9	0,905108	11,6	3,402017	15,3	1,677044
4,3	-14,959	8,0	$-9{,}6\cdot10^{-5}$	11,7	2,90698	15,4	1,994648
4,4	-18,4126	8,1	-0,91714	11,8	2,121544	15,5	2,12132
4,5	-20,25	8,2	-1,75557	11,9	1,120452	15,6	2,040105
4,6	-20,1243	8,3	-2,43156	12,0	0,000357	15,7	1,754519

x	*y(x)*	*x*	*y(x)*	*x*	*y(x)*	*x*	*y(x)*
15,8	1,288629	19,0	-0,00059	22,2	-1,49251	25,4	1,021332
15,9	0,685062	19,1	0,328168	22,3	-2,08686	25,5	1,077122
16,0	0,001095	19,2	0,661197	22,4	-2,49087	25,6	1,027476
16,1	-0,6968	19,3	0,95903	22,5	-2,6582	25,7	0,876673
16,2	-1,33944	19,4	1,183327	22,6	-2,56506	25,8	0,638952
16,3	-1,86182	19,5	1,301545	22,7	-2,21332	25,9	0,337172
16,4	-2,20969	19,6	1,29113	22,8	-1,63099	26,0	-0,00055
16,5	-2,34521	19,7	1,142726	22,9	-0,87009	26,1	0,328549
16,6	-2,25098	19,8	0,86201	23,0	-0,00046	26,2	0,627288
16,7	-1,93222	19,9	0,46989	23,1	0,309544	26,3	0,866148
16,8	-1,41658	20,0	0,000974	23,2	0,591083	26,4	1,021332
16,9	-0,7518	20,1	-0,49956	23,3	0,816324	26,5	1,077122
17,0	-0,00128	20,2	-0,98043	23,4	0,962789	26,6	1,027476
17,1	0,761981	20,3	-1,38957	23,5	1,015605	26,7	0,876673
17,2	1,462508	20,4	-1,67979	23,6	0, 969005	26,8	0,638952
17,3	2,029831	20,5	-1,8141	23,7	0,826959	26,9	0,337172
17,4	2,405585	20,6	-1,77023	23,8	0,602835	27,0	0,000606
17,5	2,549509	20,7	-1,54364	23,9	0,318152	27,1	-0,33789
17,6	2,443738	20,8	-1,14883	24,0	0,000505	27,2	-0,64508
17,7	2,094918	20,9	-0,6186	24,1	-0,3191	27,3	-0,89064
17,8	1,533913	21,0	-0,00133	24,2	-0,60929	27,4	-1,05011
17,9	0,8131	21,1	0,643412	24,3	-0,84138	27,5	-1,10737
18,0	0	21,2	1,250753	24,4	-0,99223	27,6	-1,05623
18,1	-0,06906	21,3	1,757043	24,5	-1,04654	27,7	-0,90112
18,2	-0,20633	21,4	2,106558	24,6	-0,99841	27,8	-0,65672
18,3	-0,36975	21,5	2,257585	24,7	-0,85196	27,9	-0,34653
18,4	-0,52416	21,6	2,187247	24,8	-0,62099	28,0	-0,00066
18,5	-0,63728	21,7	1,894532	24,9	-0,32771	28,1	0,347125
18,6	-0,68247	21,8	1,401147	25,0	-0,00055	28,2	0,662688
18,7	-0,64188	21,9	0,750042	25,1	0,328549	28,3	0,914876
18,8	-0,50883	22,0	0,001688	25,2	0,627288	28,4	1,078594
18,9	-0,28908	22,1	-0,77156	25,3	0,866148	28,5	1,137301

Лабораторная работа 5

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Задание 1. Рассмотрите задачу, состоящую в поиске решения $y = y(t)$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ для t от t_0 до t_k с шагом Δt при начальном условии $y(t_0) = y_0$. Попытайтесь найти аналитическое решение задачи.

Задание 2. Выполните решение задачи модифицированным методом Эйлера

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}), \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

при Δt, равном десятой доле интервала интегрирования. Сопоставьте с аналитической оценкой и дайте графическую иллюстрацию роста погрешности.

Задание 3. Выполните решение задачи в среде MatLab с использованием какой-нибудь функции группы solver(fun,[t_0 t_k],y_0...).

Задание 4. Здесь читателю предлагается ознакомиться с постановкой и реализацией решения группы любопытных задач, не всегда упоминаемых в учебных пособиях по численному анализу.

При оценке динамики и устойчивости экономических и экологических систем используются т.н. автономные (динамические) системы уравнений $\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1 \div m$, где t не входит явно в правую часть системы.

Так, при $m = 2$ линия $\{ y_1(t), y_2(t), t \geq t_0 \}$ определяет **фазовый портрет** (фазовую кривую, траекторию) двухпараметрической системы в виде гладкой спиралеобразной или замкнутой кривой, характеризующей поведение системы во времени.

Примером может служить задача, связанная с обеспечением уровню банковского актива, обеспечивающего надлежащую его доходность путем регулирования предложения в зависимости от спроса на актив.

Согласно теории спроса, изменение уровня актива $y(t)$ пропорционально разности между предложением $s(t)$ и спросом на активы $d(t)$, т.е. $\frac{dy}{dt}=k(s–d)$, $k>0$, а изменение цены $z(t)$ пропорционально отклонению актива $y(t)$ от некоторого уровня q_0, т.е. $\frac{dz}{dt}=–m(y–q_0)$, $m > 0$. Естественно, предложение и спрос зависят от цены, например, $s(z) = a\cdot z+ s_0$, $d(z) = d_0 – c\cdot z$ (с ростом цены на активы банк заинтересован в росте предложения, но спрос уменьшается).

Соответственно возникает задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = k\cdot(s(z) –d(z)) ,$$

$$\frac{dz}{dt} = – m\cdot (y–q_0)$$

при начальных значениях $y(0) = y_0$ и $z(0) = z_0$.

Получить аналитическое решение этой задачи возможно лишь в уникальных вариантах.

Численное решение, например, модифицированным методом Эйлера для t от 0 до некоторого большого значения с достаточно малым Δt

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\cdot f(t_n, y_n, z_n); \qquad z_{n+\frac{1}{2}} = z_n + \frac{\Delta t}{2}\cdot f(t_n, y_n, z_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\cdot f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}); \qquad z_{n+1} = z_n + \Delta t\cdot f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}});$$

Построив таблицы значений $y(t)$ и $z(t)$, получаем возможность графического отображения (годографа) зависимости z от y.

Если читатель испытывает затруднения в программной реализации этого процесса и отсутствие желания задуматься о точности получаемого решения, он может воспользоваться средствами MatLab.

Пример такой реализации представлен в документации этой системы, где предлагается построить функцию вычисления вектора значений правых частей (выбор названия `odu2` не принципиален)

```
function f=odu2(t,X)
a=20;  c=10;  s0=10; d0=50;
 k=0.3; m=0.1; q0=19;
 y=X(1); z=X(2);
s=a*z+s0; d= d0-c*z;
f(1)=k*(s-d) ; f(2)=-m*(y-q0);
f=f';
```

Теперь для поиска решения при $y_0= 19$, $z_0 = 2$ для $t \in [0,5]$ достаточно обратиться к стандартной функции `ode45` (здесь `Y` двумерный массив)

```
» [T,Y]=ode45('odu2', [0:0.3:9],[19 2]);
» [T Y]         % может отсутствовать
» plot(T,Y)  % графики  искомых функций y(t), z(t)
```

и их графики (рис. 1).

Если же предварительно установить опции построения двумерного фазового портрета (функция odephas2) и номера соответствующих переменных состояния

```
»opt=odeset('OutputSel',[12],'OutputFcn','odephas2');
»[T,Y]=ode45('odu2', [0:0.3:9],[19  2],opt);
```

будет выведен фазовый портрет системы, свидетельствующий о ее устойчивости – гармонии между активом и ценами (рис. 2).

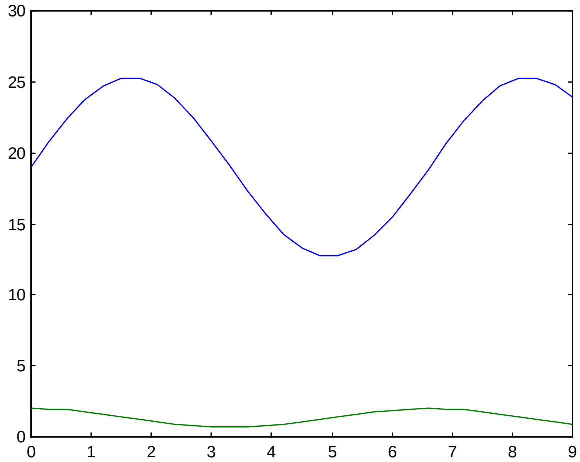

Рис. 1

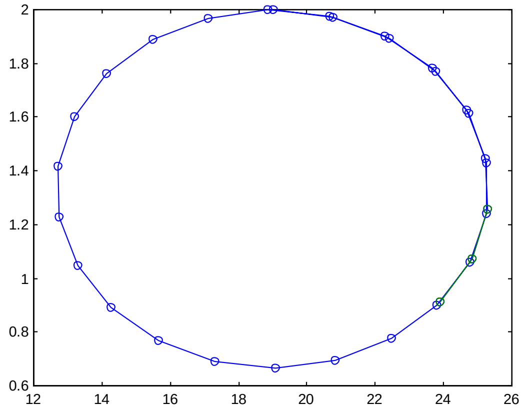

Рис. 2

Заметим, что MatLab имеет средства и для построения пространственого годографа

Выясните, как сказывается на решении изменение соотношений между параметрами задачи (поиграйте на соотношении параметров m и k).

При решении некоторых задач экологии и социологии популярна так называемая модель Лотки−Вольтерры, устанавливающая взаимодействие в системе «хищник−жертва. В простейшем варианте она сводится к задаче Коши для динамической системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y), \quad \frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y.$$

и ее решение аналогично рассмотренной выше.

Варианты заданий

№	$f(t,y)$	t_0	t_k	y_0	№	$f(t,y)$	t_0	t_k	y_0
1	$t^3 \cdot cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	0	1	3	14	$ln\,t \cdot sin\frac{y}{3}$	1	2	0
2	$ln\,t \cdot cos\frac{y}{3}$	1	2	0	15	$y \big/ 1{-}t^2$	0	0.5	1
3	$-t \cdot tg\frac{y}{3}$	0	2	1	16	$y^2 t$	0	2	1
4	$ln\,t \,/\, sin^2\frac{y}{3}$	1	2	0	17	ye^{-2t}	0	1	1
5	$\frac{ty}{\sqrt{t^2-4}}$	2	3	1	18	$t \cdot ye^{-2t}$	0	1	1
6	$\frac{ty^2}{\sqrt{t^2-4}}$	2	3	1	19	$t^2 ye^{-2t}$	0	1	1
7	$tg(t) \,/\, y^2$	0	π/4	1	20	$tg(t) \,/\, y$	0	π/4	1
8	ye^{2t}	0	1	1	21	$y^2 t^2$	0	1	1
9	$y\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$	0	1	1/e	22	y^2/t^2	1	3	1
10	$\frac{t^2 y}{\sqrt{1+t}}$	0	1	1/e	23	$y\, ln(t) \,/\, t$	1	3	1
11	$3\sqrt[3]{y^2}$	0	1	0	24	$y^2\, ln(t) \,/\, t$	1	3	1
12	$\frac{t}{2y} \cdot \frac{2-t}{(1-t)^2}$	0	0.9	0	25	$ye^{t/2}$	0	1	2
13	$t^3 sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	0	1	3	26	$ctg(t)/y^2$	π/4	π/2	1

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Тынкевич, М. А.* Численные методы / КузГТУ. – Кемерово. 1997. – 122 с.

2. *Тынкевич, М. А.* Система MATLAB. Справочное пособие к курсу «Численные методы анализа» / КузГТУ. – Кемерово, 2011.

3. *Мэтьюз, Д. Г.* Численные методы (Использование MATLAB) / *Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк*. – Москва–Санкт-Петербург–Киев: Вильямс. 2001.

4. *Плис, А. И.* MATHCAD 2000. Практикум для экономистов и инженеров / *А. И. Плис, Н. А. Сливина*. – Москва: Финансы и стати-

стика, 2000.

5. *Иглин, С. П.* Математические расчеты на базе MATLAB. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005.

6. *Потемкин В. Г.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x. : в 2 т. – Москва: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999.

7. *Воробьева, Г. Н.* Практикум по вычислительной математике / *Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова*. – Москва: Высшая школа, 1990.

8. *Демидович, Б. П.* Основы вычислительной математики // *Б. П. Демидович, И. А. Марон*. – Санкт-Петербург: Лань, 2007.

9. *Демидович, Б. П.* Численные методы анализа / *Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова*. – Санкт-Петербург: Лань, 2008.

10. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева*. – Москва: Физматгиз, 1963. [Электронный ресурс] http://edu.prometey. org/ read.php/djvu=15551

11. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков*. – Москва: Наука, 2003.

12. *Самарский, А. А.* Численные методы / *А. А. Самарский, А. В. Гулин*. – Москва: Наука, 1989.

13. Сайт кафедры прикладных информационных технологий [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vtit.kuzstu.ru/

Оглавление

Введение……………………………………………………………...1
Лабораторная работа 1. Действия над приближенными величинами…………………………………………………………………… 2
Контрольные вопросы…………………………………………….. 4
Варианты заданий………………………………………………… 5
Лабораторная работа 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений…………………………………………………………8
Контрольные вопросы………………………………………… 12
Варианты заданий…………………………………………………12
Лабораторная работа 3. Решение нелинейных уравнений………16
Контрольные вопросы………………………………………… 18
Варианты заданий…………………………………………………18
Лабораторная работа 4. Аппроксимация функций………………20
Контрольные вопросы………………………………………… 23
Варианты заданий…………………………………………………24
Лабораторная работа 5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений……………………………………………………….. 26
Варианты заданий…………………………………………………29
Рекомендуемая литература……………………………………….. 30

Составители
Моисей Аронович Тынкевич
Кристина Эдуардовна Рейзенбук
Елена Васильевна Буйная

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА»

Методические указания и задания
к лабораторным работам для студентов направления
подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 23.05.2016. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе.
Уч.-изд. л. 1,7. Тираж 50 экз. Заказ
КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.
Издательский центр КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А.