

В. В. Дырдин    Т. Л. Ким    С. А. Шепелева

***Физика***  
***Квантовая физика. Квантовая механика***  
***и атомная физика***

Кемерово 2018

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва»

В. В. Дырдин    Т. Л. Ким    С. А. Шепелева

***Физика***  
***Квантовая физика. Квантовая механика***  
***и атомная физика***

Учебное пособие

Кемерово 2018

УДК 53(075.8)

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и экспериментальной физики ФБГОУ ВО «Кемеровский государственный университет» Ю. И. Польшгалов

Доктор технических наук, профессор кафедры общей и экспериментальной физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» А. М. Осинцев

Дырдин, В. В. **Физика. Квантовая физика. Квантовая механика и атомная физика** : учеб. пособие / В. В. Дырдин, Т. Л. Ким, С. А. Шепелева ; КузГТУ. – Кемерово, 2018. – 180 с.  
ISBN 978-5-00137-023-9

Учебное пособие содержит основные понятия и законы квантовой физики и квантовой механики, атомной физики, квантовых статистик, зонной теории твёрдых тел, ядерной физики и физики элементарных частиц.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 21.05.04 «Горное дело» и 21.05.05 «Физические процессы горного производства», а также может быть использовано студентами других технических специальностей и направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 53(075.8)

© КузГТУ, 2018

© Дырдин В. В., Ким Т. Л.,  
Шепелева С. А., 2018

ISBN 978-5-00137-023-9

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика принадлежит к числу фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров. Без знания законов физики невозможна успешная деятельность специалиста в любой отрасли науки и техники.

Современному инженеру требуются глубокие знания законов не только классической, но и квантовой физики, получившей применение в технических разработках, предназначенных для горной промышленности.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 21.05.04 «Горное дело» и 21.05.05 «Физические процессы горного производства». Кроме изложения основных теоретических положений и законов, оно содержит по каждой теме вопросы для самоподготовки, ответы на которые позволят студентам понять наиболее важные моменты изложенной темы. Также в конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения и тестовые задания, которые способствуют лучшему пониманию физических закономерностей.

При написании данного пособия авторами использован опыт, полученный при чтении лекций, проведении практических и лабораторных занятий в течение длительного времени в Кузбасском государственном техническом университете имени Т. Ф. Горбачёва.

В учебном пособии изложены законы теплового излучения, фотоэффекта, явления Комптона, которые невозможно объяснить с позиций классической физики, но они становятся понятными с введением новых элементарных частиц, квантов, не имеющих массы покоя, но обладающих определённой энергией и импульсом. Приведены основные положения квантовой механики, которая основывается на вероятностном методе описания состояния частиц микромира, так как совокупность уравнений классической механики Ньютона невозможно применить вследствие огромного числа и неразличимости объектов микромира на временном интервале.

В пособии рассмотрены вопросы физики атома, постулаты Бора, которые хоть и непоследовательны и в чём-то противоречат классической физике, но позволяют объяснить теорию атома водорода и его спектральные серии излучения.

Также рассмотрены вопросы естественной и искусственной радиоактивности, приведены закон радиоактивного распада химических элементов и положения дозиметрии, высвобождения значительной энергии при делении ядер урана.

В заключительной части пособия приведены основные сведения по элементарным частицам, их классификация, виды взаимодействия и переносчики взаимодействий, уделено внимание кварковой структуре адронов.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам профессору Ю. И. Плыгалову и профессору А. М. Осинцеву за ценные замечания и обсуждение некоторых научных и методических аспектов пособия, а также старшему учебному мастеру кафедры физики КузГТУ И. В. Цвеклинской за оформление рукописи и её компьютерную вёрстку.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения	Единицы измерения	Наименование
$\Phi$	Вт	Поток энергии
$E$	Вт/м <sup>2</sup>	Испускательная способность тела
$R_3$	Вт/м <sup>2</sup>	Энергетическая светимость тела
$A$	Вт/Вт	Поглощательная способность тела
$E_\nu$	Вт · с/м <sup>2</sup>	Испускательная способность на частоте $\nu$
$E_\lambda$	Вт/м <sup>3</sup>	Испускательная способность на длине волны $\lambda$
$\varepsilon_{\nu,T}$	Вт · с/м <sup>2</sup>	Испускательная способность абсолютно чёрного тела на частоте $\nu$ и при температуре $T$
$\sigma$	Вт/(м <sup>2</sup> · К <sup>4</sup> )	Постоянная Стефана – Больцмана
$c$	м/с	Скорость света в вакууме
$b$	м · К	Постоянная Вина
$k$	Дж/К	Постоянная Больцмана
$h, \hbar = \frac{h}{2\pi}$	Дж · с	Постоянная Планка
$N_A$	моль <sup>-1</sup>	Число Авогадро
$M$	кг/моль	Молярная масса
$\lambda$	м	Длина волны
$\nu$	с <sup>-1</sup>	Частота
$\theta$	град	Угол рассеяния фотонов в эффекте Комптона
$\varepsilon$	Дж	Энергия фотона
$r_{\lambda,T}^{\max}, \varepsilon_{\lambda,T}^{\max}$	Вт/м <sup>3</sup>	Максимальная спектральная плотность энергетической светимости
$\lambda_0$	м	Красная граница фотоэффекта
$\lambda_{\max}$	м	Длина волны, на которую приходится максимум излучения абсолютно чёрного тела
$\vec{k}$	м <sup>-1</sup>	Волновой вектор
$\Psi(x, y, z, t)$		Волновая функция

Обозначения	Единицы измерения	Наименование
$w$		Вероятность
$\rho_w$	$\text{м}^{-3}$	Плотность вероятности
$v_{\text{гр}}$	$\text{м/с}$	Групповая скорость
$v_{\text{ф}}$	$\text{м/с}$	Фазовая скорость
$L$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	Момент импульса частицы
$R$	$\text{с}^{-1}$	Постоянная Ридберга
$\varepsilon_0$	$\text{Ф/м}$	Диэлектрическая постоянная
$\mu_{\text{Б}} = \frac{e}{2m} \hbar$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$	Магнетон Бора
$\gamma$	$1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$	Удельная электропроводность
$\lambda$	$\text{с}^{-1}$	Постоянная радиоактивного распада
$\tau = \frac{1}{\lambda}$	$\text{с}$	Среднее время жизни радиоактивного изотопа
$T_{1/2}$	$\text{с}$	Период полураспада
$Z$		Число протонов в ядре
$N$		Число нейтронов в ядре
$A = Z + N$		Массовое число ядра
$\varphi(t)$		Временная волновая функция
$\hat{\Psi}(x, y, z)$		Волновая функция, отвечающая стационарному уравнению Шредингера
$D$		Коэффициент прозрачности потенциального барьера

## ВВЕДЕНИЕ

Физика – это наука о формах существования материи и законах её движения. В основе физики лежат экспериментальные исследования. Для полного описания физического явления необходимы и эксперимент, и теория, которая даёт описание целой области явлений с единых позиций. Задачей курса физики является формирование у студентов физического мышления для понимания широкого спектра явлений, наблюдающихся в природе, и процессов, используемых человеком в практической деятельности.

Квантовая и атомная физика – это физика микромира, которая связана с особенностями существования и превращения объектов, размеры которых составляют порядка  $10^{-9}$  м. В этой связи временные уравнения движения частиц, полученные в классической физике, не могут быть применены для описания состояния частиц микромира. Поэтому на рубеже XIX–XX веков в физике возникло новое направление – квантовая физика, позволившая теоретически объяснить ряд законов и явлений.

Законы квантовой физики отвечают принципу соответствия, т. е. они не являются чем-то исключительным и при определённых условиях переходят в законы классической физики.

Важным этапом в развитии физики явилось открытие явления квантования энергии микросистем и появление новой безмассовой и нейтральной частицы – фотона, являющейся переносчиком электромагнитного взаимодействия.

Квантовая механика и теория де Бройля позволили объяснить существование стационарных боровских орбит, при движении электрона по которым атом не излучает энергию, так как движущейся по орбите частице можно поставить в соответствие волну определённой длины, причём на длине боровских стационарных орбит их укладывается целое число.

С позиций зонной теории и квантовых статистик дано объяснение разделения твёрдых тел на проводники, полупроводники и диэлектрики. Определённое внимание уделено явлению сверхпроводимости и эффекту Джозефсона. Рассмотрена физика контактных явлений: контакт двух проводников, металла и полупроводника, а также контакт полупроводников с различным типом проводимости.



## ГЛАВА 1. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

### § 1.1. Виды электромагнитного излучения

Экспериментально установлено существование нескольких видов видимого электромагнитного излучения, цвет которых изменяется от инфракрасного до ультрафиолетового. Полагают, что инфракрасное излучение (излучение низкой частоты) вызывается колебаниями ионов, входящих в состав вещества, а видимое и ультрафиолетовое (излучения высокой частоты) – колебательным движением электронов [1].

К *неравновесным* видам излучения относятся: хемилюминесценция, фотолюминесценция, электролюминесценция и катодолюминесценция. Дадим краткую характеристику данным видам излучения.

*Хемилюминесценция* вызывается реакциями химического превращения, происходящими внутри твёрдого тела. В качестве примера можно привести процесс свечения, вызванный реакциями окисления и гниения дерева и других тел, а также химическими реакциями, сопровождающими процесс превращения белого фосфора в красный.

*Фотолюминесценция* представляет собой излучение дорожных знаков и подобных тел, вызванное предварительным освещением данных тел.

*Электролюминесценция* – это свечение разреженных паров различных газов под действием тлеющего электроразряда. Данный процесс излучения наблюдается в лампах дневного света, в которых заряды разгоняются с помощью электрического поля. Бомбардируя атомы газа, электроны вызывают их излучение, которое поглощается люминофором, покрывающим стенки лампы. В зависимости от химического состава люминофора изменяется цвет излучаемого света: от белого до жёлтого. Следовательно, электролюминесценция – это способ возбуждения свечения путём электромеханического воздействия на излучающую систему.

*Катодолюминесценция* возникает при бомбардировке быстрыми электронами объектов, покрытых специальным люминофором. В ряде случаев может возникать и свечение минералов.

Все вышеназванные виды люминесценции, кроме хемилюминесценции, возникают в результате воздействия внешних излуче-

ний. При этом люминесцентные виды излучения не определяются температурой излучающего тела. Длительность данных видов излучения после прекращения внешнего воздействия превышает период световых колебаний. А их природа заключается в переходе атомов и ионов в возбуждённое состояние под действием внешних воздействий и последующем *возвращении из данного состояния в основное*, т. е. невозбуждённое состояние. Данный переход сопровождается излучением, которое мы воспринимаем как люминесцентное.

Спектры излучения различных видов люминесценции могут быть линейчатыми, полосатыми и сплошными.

Для фотолюминесценции справедлив закон Вавилова, согласно которому *энергетический выход люминесценции* (отношение энергии люминесцентного излучения к энергии, поглощённой люминофором) прямо пропорционален длине волны  $\lambda$  поглощённого света, но только до определённой длины волны, после которой он быстро уменьшается до нуля. Смысл этого закона заключается в том, что фотолюминесценция может возбуждаться светом с длиной волны, не превышающей некоторую критическую величину, при которой энергии поглощённых фотонов недостаточно для перевода атомов люминофора в возбуждённое состояние.

На основе фотолюминесценции разработан люминесцентный анализ состава вещества. Он применяется при изучении состава малого количества вещества, например для определения доли примесей в исходном веществе.

*Тепловое излучение* – это равновесное излучение. Иногда его называют температурным излучением [1]. Оно представляет собой свечение нагретых тел.

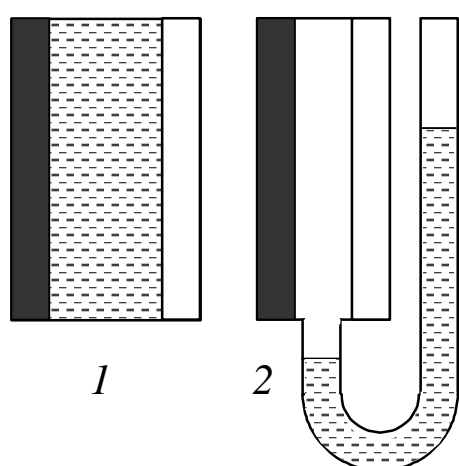
Суть *равновесного* излучения можно понять из следующего эксперимента. Тело, нагретое до определённой температуры, окружают со всех сторон идеально отражающими стенками. При этом излучение, испускаемое телом, сохраняется в пределах выделенного объёма за счёт отражения от стенок. При падении отражённого от стенок излучения на тело оно в большей или меньшей мере вновь им поглощается. Энергия такой системы представлена суммой энергий излучения и внутренней энергии тела. Распределение энергии между данными составляющими с течением времени не изменяется. Поэтому тепловое излучение и называют равновесным.

Другие виды излучения нельзя отнести к равновесным. Например, при хемилюминесценции излучение сопровождается химическими реакциями, следовательно, изменяется состав вещества и его внутренняя энергия. А обратное поглощение света не приводит к восстановлению химического состава тела. Со временем данное излучение прекращается.

Фотолюминесценция также не может являться равновесным излучением в силу действия закона Стокса, суть которого сводится к тому, что при фотолюминесценции излучается свет большей длины волны, чем необходимо для возбуждения фотолюминесценции. Поэтому даже светоотражающие стенки не могут способствовать возбуждению фотолюминесценции.

## § 1.2. Правило Прево

Температура является основной величиной, характеризующей тепловое излучение. При тепловом нагреве излучающего тела изменяется цвет излучения. Например, цвет излучения тугоплавкого вольфрама изменяется от тёмно-красного (при температуре около 500 °С) до белого (при температуре порядка 1500 °С). Спектр излучения различных веществ при нагревании различен. При этом поглощающие вещества обладают большей способностью к излучению, т. е. при определённой температуре их спектр может быть видимый, а спектр непоглощающих веществ – невидимым. Если два тела поглощают разные количества энергии, то и испускание этими



*Рис. 1.1. Схема устройства для демонстрации правила Прево: 1 – излучающий сосуд с горячей водой; 2 – воздушный термометр*

телами энергии должно быть различно. Это установил Прево в 1809 г. (правило Прево). Оно имеет качественный характер. Схема устройства для демонстрации правила Прево показана на рис. 1.1.

Одна стенка сделана из полированного металла и поглощает очень мало, а другая покрыта чёрным слоем и почти целиком поглощает падающую на неё энергию. По расширению воздуха в сосуде 2 можно судить о ко-

личестве поступающего тепла. Поворачивая сосуд  $I$  к термометру блестящей или чёрной стороной, можно убедиться, что блестящая поверхность меньше излучает и меньше поглощает по сравнению с чёрной.

### § 1.3. Закон Кирхгофа

Он был сформулирован в 1859 г.

Для получения количественных соотношений между параметрами теплового излучения введём несколько определений.

1. *Поток энергии  $\Phi$*  – это количество энергии, излучаемой телом в единицу времени, т. е. это мощность излучения.

2. *Испускательная способность  $E$*  – это поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям. Определённая таким образом испускательная способность соответствует *светимости*, а иногда её называют *энергетической светимостью* ( $R_s$ ). Иногда говорят об *энергетической яркости*.

Для характеристики особенностей испускательной способности тела необходимо указать, к какому частотному интервалу или интервалу длин волн она относится, т. е. элементарный поток излучения может быть выражен следующим образом:

$$d\Phi = E_\nu d\nu = E_\lambda d\lambda, \quad (1.1)$$

где  $E_\nu$ ,  $E_\lambda$  – испускательная способность тела на частоте  $\nu$  или длине волны  $\lambda$ .

Из (1.1) следует, что

$$E_\nu = E_\lambda \frac{d\lambda}{d\nu}. \quad (1.2)$$

Производная  $\frac{d\lambda}{d\nu}$  не равна единице. Её можно найти из соотношения

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c} \text{ с учётом, что } \lambda = \frac{c}{\nu},$$

где  $c$  – скорость электромагнитных волн в вакууме (воздухе).

Тогда

$$\left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{\lambda^2}{c}, \text{ а } E_\nu = E_\lambda \frac{\lambda^2}{c}. \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что зависимость испускательной способности на разных частотах не совпадает с испускательной

способностью на разных длинах волн, т. е. кривые  $E_\nu = f(\nu)$  и  $E_\lambda = f(\lambda)$  не совпадают. Также не совпадают и их максимумы, т. к. они приходятся на разные частоты. В этой связи необходимо всегда указывать, какая из двух зависимостей имеется в виду.

Излучение нагретого тела зависит от температуры. Следовательно, испускательная способность нагретого тела является функцией частоты и температуры, т. е.  $E = f(\nu, T)$ .

Поток энергии, излучаемый единицей поверхности нагретого тела до температуры  $T$  по всем частотам, может быть рассчитан по формуле

$$E_T = \int_0^{\infty} E_{\nu, T} d\nu. \quad (1.4)$$

При этом испускаемое телом количество энергии не зависит от того, какими телами оно окружено: холодными или горячими. Только тепловое равновесие в каждом конкретном случае будет определяться балансом излучаемой и поглощаемой энергии.

3. *Поглощательная способность тела  $A$*  – это отношение поглощённой телом части теплового потока  $\Phi'$  к падающему потоку  $\Phi$ . При этом поток относится к узкому спектральному интервалу  $d\nu$ . Для элементарного потока  $d\Phi$

$$A = \frac{d\Phi'}{d\Phi}. \quad (1.5)$$

Естественно, что поглощательная способность тела является функцией частоты и температуры, т. е.  $A = f(\nu, T)$ .

Её максимум равен единице, т. е.

$$\max[A(\nu, T)] = 1. \quad (1.6)$$

Если соотношение (1.6) выполняется на всех частотах, то такие тела по Кирхгофу называют *абсолютно чёрными*.

4. Формулировка закона Кирхгофа: *отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности есть функция универсальная, не зависящая от природы данного тела.*

$$\frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = f \text{ (универсальная).}$$

Для отыскания данной функции обозначим *испускательную способность абсолютно чёрного тела*  $\varepsilon_{\nu, T}$ , а *поглощательную способность* через  $\alpha_{\nu, T}$ . Поскольку закон Кирхгофа выполняется для

всех тел, в том числе и для абсолютно чёрного тела, то закон Кирхгофа можно записать для разных тел следующим образом:

$$\left( \frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} \right)_I = \left( \frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} \right)_{II} = \dots = \frac{\varepsilon_{\nu, T}}{\alpha_{\nu, T}}. \quad (1.7)$$

Для абсолютно чёрного тела  $\alpha_{\nu, T} = 1$ , поэтому окончательно закон Кирхгофа принимает следующий вид:

$$\frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = \frac{\varepsilon_{\nu, T}}{\alpha_{\nu, T}} = \varepsilon_{\nu, T}. \quad (1.8)$$

Следовательно, универсальная функция Кирхгофа – это испускательная способность абсолютно чёрного тела.

Закон Кирхгофа справедлив только для теплового излучения и не подтверждается для других видов электромагнитного излучения. Он основывается на втором начале термодинамики, определяющем направление протекания тепловых процессов в системах без компенсации, а энтропия изолированной системы при обратимых процессах не изменяется. Другими словами, тепловое равновесие в изолированной системе нельзя нарушить обменом тепла между частями системы.

Закон Кирхгофа подтверждён экспериментально.

Если коэффициент поглощения тел меньше единицы, то такие тела называют *нечёрными*. Испускательная способность таких тел всегда меньше испускательной способности абсолютно чёрного тела при одинаковой температуре, т. е.

$$E_{\nu, T} < \varepsilon_{\nu, T}.$$

В качестве примера сравним испускательную способность абсолютно чёрного тела и вольфрама при  $T = 2450$  К [1], изображённых на рис. 1.2.

Поскольку  $a = f(\lambda)$  растёт по мере уменьшения длины волны, то это послужило основанием для использования вольфрама в лампах накаливания.

#### § 1.4. Закон Стефана – Больцмана

В 1879 г. Стефан на основе известных в то время экспериментальных исследований установил, что суммарная энергия, излучаемая телом по всем частотам при температуре  $T$  с единицы его поверхности в единицу времени, пропорциональна четвёртой степени

его термодинамической температуры. Позже в 1884 г. Больцман уточнил, что это справедливо только для абсолютно чёрного тела. Математически это записывается следующим образом:

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu,T} d\nu = \sigma T^4, \quad (1.9)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана, равная  $5,67 \cdot 10^{-8}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2(\text{К})^4}$ .

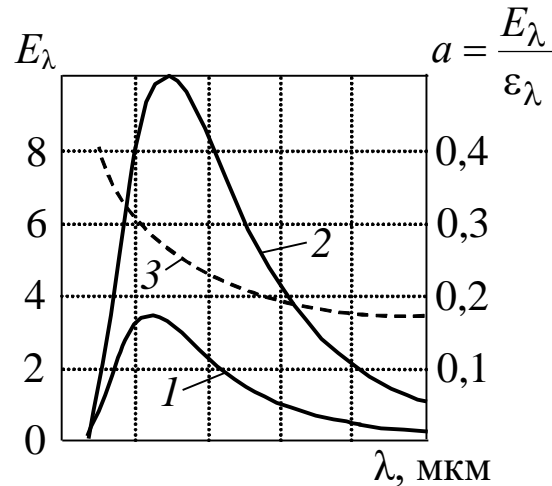


Рис. 1.2. Зависимость испускательной способности вольфрама (1) и абсолютно чёрного тела (2) от длины волны излучения  $\lambda$ :

$a = \frac{E_\lambda}{\varepsilon_\lambda}$  – отношение соответствующих

испускательных способностей (вольфрама к абсолютно чёрному телу, кривая 3)

Если известна площадь поверхности излучающего абсолютно чёрного тела, то можно рассчитать величину потока излучения, т. е. рассчитать мощность излучения:

$$\Phi = \varepsilon_T S, \quad (1.10)$$

где  $S$  – площадь излучающей поверхности абсолютно чёрного тела,  $\text{м}^2$ .

Таким образом, закон Стефана – Больцмана позволяет рассчитать суммарную энергию, излучаемую в единицу времени с единицы поверхности, но он ничего не говорит о распределении этой энергии по частотам. Изучением данного вопроса также занимался русский физик В. А. Михельсон (1887 г.). В. Вин (1893 г.) пришёл к выводу, что зависимость энергии излучения с единицы поверхно-

сти за единицу времени по частотам может быть описана функцией вида

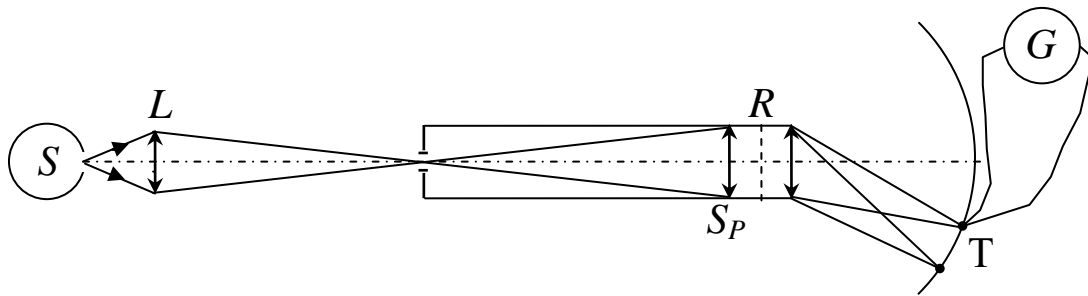
$$\varepsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (1.11)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $\nu$  – частота излучения;  $f$  – функция, зависящая от частоты и термодинамической температуры.

### § 1.5. Закон смещения Вина

Поскольку в то время отыскать вид функции Вина, основываясь на теоретических положениях, не представлялось возможным, были проведены экспериментальные исследования энергии, излучаемой на различных частотах, которые позволили также установить особенности излучения при различных температурах.

Оптическая схема экспериментальных исследований представлена на рис. 1.3.



*Рис. 1.3. Оптическая схема экспериментальных исследований энергии излучения по различным частотам (длинам волн):  $S$  – абсолютно чёрное тело;  $S_P$  – монохроматор;  $T$  – термоэлемент с гальванометром  $G$ ;  $L$  – линза, концентрирующая излучение на щель монохроматора, снабжённого дифракционной решёткой  $R$*

Излучение, исходящее через щель от тела, нагретого до температуры  $T$ , с помощью собирающей линзы концентрируется на входе монохроматора, попадает на дифракционную решётку и разлагается в спектры различного порядка. Один из спектров растягивается, и с помощью термоэлемента, соединённого с гальванометром, оценивается энергия, приходящаяся на ту или другую частоту (длину волны). На рис. 1.4 представлены экспериментальные кривые  $\varepsilon_{\lambda,T} = f(\nu)$ , полученные для разных температур. Анализ зависимостей показал, что максимум излучения при каждой температуре приходится на определённую длину волны. Причём по мере увеличения



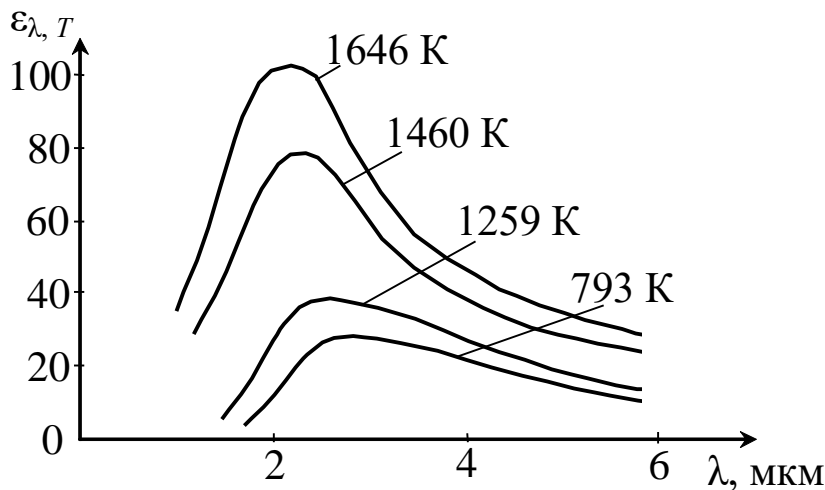
температуры максимум излучения смещается в сторону более коротких длин волн. Вин установил, что справедливо следующее соотношение, которое называется законом смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = b, \quad (1.12)$$

где  $T$  – термодинамическая температура, К;  $\lambda_{\max}$  – длина волны, на которую приходится максимум излучения, м;  $b$  – постоянная Вина, равная  $0,2898 \cdot 10^{-2}$  м · К.

Положение максимума на кривой спектрального распределения можно определить путём нахождения производной и приравнивания её нулю:

$$\left. \frac{\partial \epsilon_{\lambda, T}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0. \quad (1.13)$$



*Рис. 1.4. Экспериментальные кривые излучательной способности абсолютно чёрного тела от длины волны излучения при разных температурах [1]*

Из кривой распределения  $\epsilon_{\lambda, T} = f(\lambda)$  можно получить кривую  $\epsilon_{\nu, T} = f(\nu)$ , используя соотношение (1.3):

$$\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\lambda} \frac{\lambda^2}{c}, \quad (1.14)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Необходимо обратить внимание на то, что длина волны, соответствующая максимуму на кривой  $\epsilon_{\lambda, T}$ , отличается от длины волны, соответствующей максимуму на кривой  $\epsilon_{\nu, T}$ , в 1,76 раза, т. е. справедливо соотношение

$$T\lambda'_{\max} = a, \quad (1.15)$$

где  $a = 0,51 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$ ;  $\lambda'_{\max}$  – длина волны, соответствующая максимуму излучения на кривой  $\varepsilon_{\nu,T}$  и рассчитанная по соотношению

$$\lambda'_{\max} = \frac{c}{\nu_{\max}}.$$

$$\text{Тогда } \frac{a}{b} = 1,76.$$

### § 1.6. Гипотеза и формула излучения Планка

С позиций классической электродинамики тепловое излучение твёрдого тела можно представить как совокупность излучающих гармонических осцилляторов на низких и высоких частотах. Причём классическая физика не определяет количество энергии, которое может содержать и испускать каждый осциллятор в отдельности.

Исходя из этого была получена формула Рэля – Джинса, которая не соответствовала экспериментальным кривым (рис. 1.5).

Формула Рэля – Джинса:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (1.16)$$

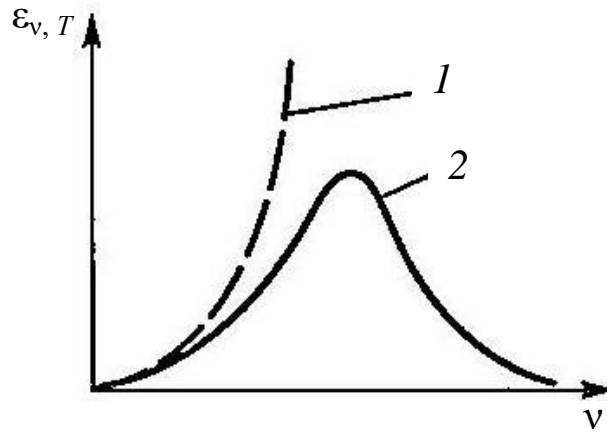
где  $k$  – постоянная Больцмана,  $1,38 \cdot 10^{-23}$ , Дж/К.

Формула (1.16) определяет зависимость удельной энергии излучения от частоты. Под удельной энергией понимают энергию, излучаемую с единицы площади нагретого абсолютно чёрного тела (джоуль на кв. метр).

График зависимости Рэля – Джинса представлен на рис. 1.5.

Таким образом, сравнивая кривые 1 и 2 (рис. 1.5), можно утверждать, что формула Рэля – Джинса даёт удовлетворительное совпадение с экспериментом только в области малых частот. При больших частотах формулу для расчёта удельной энергии излучения применять нельзя. Следовательно, к расчёту процесса теплового излучения должен быть другой подход. Его сделал Планк, согласно которому излучающее тело представляется также совокупностью гармонических осцилляторов, но гармонический осциллятор на частоте  $\nu$  может обладать только таким количеством энергии, в котором содержится целое число элементарных порций энергии величины  $h\nu$ . Постоянную  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж · с назвали постоянной

Планка. Исходя из теории Планка, можно утверждать, что каждый осциллятор излучает целое число порций энергии (квантов). При малых частотах порция энергии (энергия кванта) очень мала (например, на радиочастотах), а на больших частотах необходимо считаться с квантовыми представлениями о тепловом излучении.



*Рис. 1.5. График зависимости удельной энергии излучения абсолютно чёрного тела от частоты:*

*1 – по формуле Рэля – Джинса;  
2 – из эксперимента*

Формула Планка для расчёта спектральной удельной энергии теплового излучения имеет вид

$$\epsilon_{\nu, T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (1.17)$$

Посмотрим, отвечает ли формула (1.17) эксперименту в области низких и высоких частот.

В области малых частот  $\frac{h\nu}{kT} < 1$ , поэтому упростим её. Для этого  $e^{\frac{h\nu}{kT}}$  разложим в ряд по степеням  $\frac{h\nu}{kT}$ . Получим после разложения

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2!} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^3 + \dots$$

Так как  $h\nu \ll kT$ , то пренебрегая квадратичными и последующими величинами, получим  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT}$ .

Откуда

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 = \frac{h\nu}{kT}. \quad (1.18)$$

Подставляя данное выражение в формулу Планка, получаем формулу Рэлея – Джинса.

Таким образом, в области низких частот формула Планка соответствует эксперименту и формуле Рэлея – Джинса, т. е. выводы, полученные из квантовой теории, совпадают с классическими в области низких частот.

В области высоких частот  $h\nu \gg kT$  и единиц в знаменателе выражения (1.17) можно пренебречь. Тогда получим выражение

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (1.19)$$

которое совпадает с выражением, полученным ранее Вином, и экспериментом.

Таким образом, формула Планка соответствует экспериментальной зависимости удельной энергии теплового излучения от его частоты. Из формулы Планка можно получить законы теплового излучения: Стефана – Больцмана и Вина. Кроме того, через универсальные константы  $h$ ,  $k$  и  $c$  могут быть вычислены постоянные  $\sigma$  и  $b$ , входящие в законы Стефана – Больцмана и Вина.

### § 1.7. Применение законов теплового излучения

На основе законов теплового излучения можно определить температуру чёрных тел, сильно нагретых ( $t > 2000^\circ\text{C}$ ) и раскалённых тел. Для этого применяют радиационные пирометры.

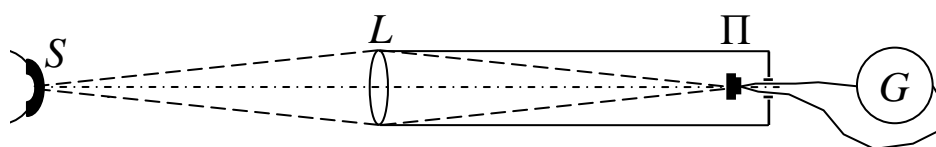


Рис. 1.6. Оптическая схема радиационного пирометра:  
*S* – источник излучения; *L* – объектив; *G* – термоэлемент  
с гальванометром; *П* – приёмник излучения

С помощью объектива  $L$  (см. рис. 1.6) получают резкое изображение источника излучения  $S$  на приёмнике. Следовательно, энергия, получаемая приёмником, будет пропорциональна энергии, излучаемой источником, а показания гальванометра будут зависеть от температуры излучающего тела. Необходимо предварительно проградуировать шкалу гальванометра по излучающему чёрному телу, после чего использовать для измерения исследуемой температуры чёрных тел. В том случае, если измеряется температура нечёрных тел, то нужно иметь в виду, что в этом случае радиационным пирометром измеряется не истинная, а радиационная температура. А истинную находят по формуле

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\alpha_T}}, \quad (1.20)$$

где  $\alpha_T = \frac{E_T}{\varepsilon_T} < 1$ . Следовательно, истинная температура всегда больше радиационной.

### § 1.8. Воздействие света на вещество. Фотоэлектрический эффект

При падении излучения определённой длины волны на вещество в ряде случаев возможно вырывание электронов из атомов

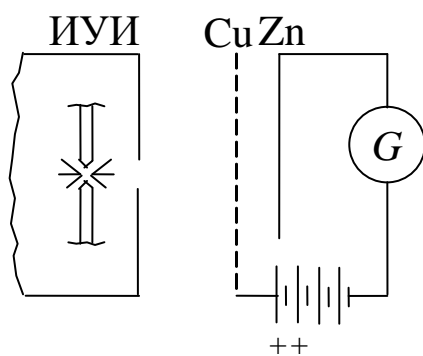


Рис. 1.7. Схема опыта А. Г. Столетова:

*ИУИ — источник ультрафиолетового излучения; Cu и Zn — сетка и пластина, к которым подводилось электрическое напряжение; G — гальванометр для фиксации тока*

и молекул. Это явление носит название фотоэлектрического эффекта. Проявление данного эффекта определяется химической природой вещества и длиной волны падающего излучения. Открытие данного явления относят к 1887 г. Г. Герц облучал ультрафиолетовым светом искровой промежуток между электродами, что вызывало проскакивание искры между электродами,

что вызывало проскакивание искры между электродами, к которым было подведено высо-

кое напряжение, но недостаточное для создания критической напряжённости электрического поля, при которой возможен пробой воздушного промежутка. Российский естествоиспытатель А. Г. Столетов в 1888 г. повторил опыт Г. Герца. На рис. 1.7 представлена схема опыта А. Г. Столетова.

Без ультразвукового излучения тока в цепи нет, поэтому показания гальванометра равны нулю. При облучении цинковой пластины вырываются электроны, которые, попадая в электрическое поле, создают определённый ток. Таким образом, *явление вырывания электронов из вещества под действием падающего на него излучения носит название внешнего фотоэлектрического эффекта.*

### § 1.9. Законы фотоэффекта

На рис. 1.8 представлена принципиальная электрическая схема стенда для изучения законов фотоэффекта.

Под действием падающего на фотокатод излучения происходит вырывание электронов с его поверхности и из объёма. Свободные электроны попадают в электрическое поле между катодом и анодом и начинают двигаться в сторону анода. Появляется фототок. Вольт-амперная характеристика фотоэлемента представлена на рис. 1.9.

При достаточно высоком вакууме и чистоте электродов получают кривую типа 1, в противном случае – кривую типа 2. Напряжение анод – катод изменяют с помощью потенциометра П. При его определённой величине достигается ток насыщения, т. е. все выбитые электроны достигают анода, поэтому ток в дальнейшем не увеличивается. Вылетающие из катода электроны обладают определённой кинетической энергией. Её можно определить из закона сохранения энергии. Для этого поменять направление электрического поля между катодом и анодом на обратное. Если бы все фотоэлектроны имели одинаковую скорость, то фототок мгновенно бы прекратился. Но он уменьшается достаточно плавно и будет равен нулю, когда работа обратного электрического поля ( $eU_{\text{обр}}$ ) будет равна кинетической энергии самых быстрых фотоэлектронов.

Были установлены следующие законы внешнего фотоэффекта.

1. Максимальная скорость фотоэлектронов определяется частотой падающего света и не зависит от его интенсивности.

2. Для каждого вещества существует *красная граница фотоэффекта*, т. е. минимальная частота  $\nu_0$  падающего на катод света, при которой ещё возможен внешний фотоэффект.

При этом  $\nu_0$  зависит от химической природы вещества фотокаатода.

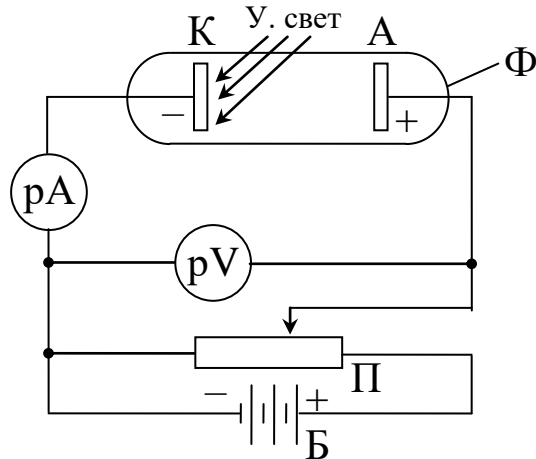


Рис. 1.8. Принципиальная электрическая схема для изучения фотоэффекта:

$Б$  – батарея;  $П$  – потенциометр;  
 $рА$ ,  $рV$  – измерители тока (микроамперметр)  
и напряжения (вольтметр);  $К$  – катод;  
 $А$  – анод;  $Ф$  – вакуумный фотоэлемент

3. Число фотоэлектронов, вырываемых из фотокатода за единицу времени, пропорционально интенсивности падающего света (энергетической освещённости фотокатода).

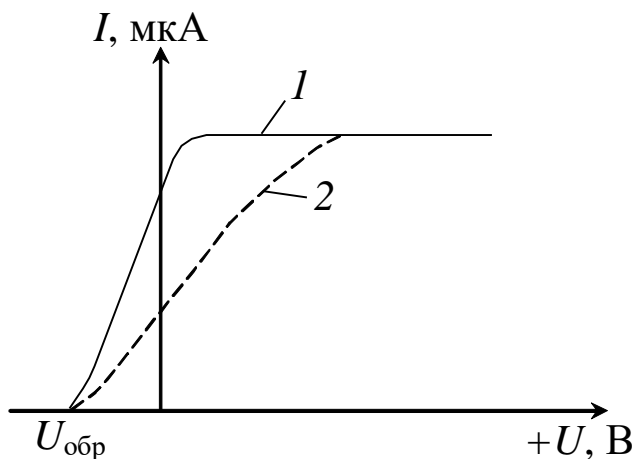


Рис. 1.9. Вольт-амперная характеристика фотоэлемента:  
1 – при высоком вакууме; 2 – при недостаточном вакууме  
и чистоте электродов

Исследования Ленарда подтвердили, что вылетающие из фотокатода электроны имеют разную скорость, а следовательно, и кинетическую энергию, которая зависит лишь от частоты падающего монохроматического света и не зависит от его интенсивности. От интенсивности падающего света зависит только величина тока насыщения. Распределение вылетающих из фотокатода электронов по

скоростям объясняется тем, что они выбиваются не только с поверхности, но и из глубины.

### § 1.10. Уравнение Эйнштейна

Известные к тому времени экспериментальные исследования обобщил А. Эйнштейн, в 1905 г. он теоретически обосновал количественную связь энергии вылетающих электронов с частотой падающего на фотокатод света. Им предложено следующее уравнение:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2}, \quad (1.21)$$

где  $h\nu$  – энергия падающих фотонов;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;  $m$  – масса электрона;  $\nu_{\text{max}}$  – максимальная скорость вылетевших электронов;  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода электрона из фотокатода, составляющая часть энергии фотона.

Из (1.21) следует, что энергия падающего фотона расходуется на выход электрона из металла (работа выхода) и сообщение ему кинетической энергии.

Если электроны выходят из глубины фотокатода или частота падающего света мала, то вся энергия фотона может пойти на совершение данной работы. Тогда соотношение (1.21) примет следующий вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}}. \quad (1.22)$$

Из выражения (1.22) можно определить красную границу фотоэффекта, т. е. минимальную частоту  $\nu_0$ , при которой ещё возможен внешний фотоэффект. Используя известное соотношение, можно рассчитать *наибольшую* длину  $\lambda_0$  волны падающего света, при которой возможен фотоэффект:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}, \quad (1.23)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

В табл. 1.1 приведены значения  $\lambda_0$ , соответствующие красной границе фотоэффекта в металлах.

Из табл. 1.1 следует, что в щелочных металлах внешний фотоэффект может вызываться фотонами видимого света, а в благородных металлах, железе и ртути – только фотонами ультрафиолетового излучения.



Таблица 1.1

Значения длины волны красной границы фотоэффекта  
для некоторых металлов

Металл	K	Na	Ag	Fe	Au	Hg
$\lambda_0$ , нм	550	540	261	262	265	273

Для прекращения фототока нужно в электрической схеме (см. рис. 1.8) поменять полярность приложенного напряжения, т. е. на катод подать плюс (+), а на анод минус (–). Тогда при некотором обратном напряжении фототок прекращается, т. е.

$$\frac{m\nu_{\max}^2}{2} = eU_{\text{обр}}. \quad (1.24)$$

А уравнение Эйнштейна (1.21) можно записать следующим образом:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + eU_{\text{обр}}. \quad (1.25)$$

С учётом (1.22) выражение (1.25) примет вид

$$h\nu = h\nu_0 + eU_{\text{обр}}. \quad (1.26)$$

Если из (1.26) выразить  $eU_{\text{обр}}$  и взять производную по  $\nu$  от правой и левой частей выражения (1.26), то получим

$$\frac{d(eU_{\text{обр}})}{d\nu} = h. \quad (1.27)$$

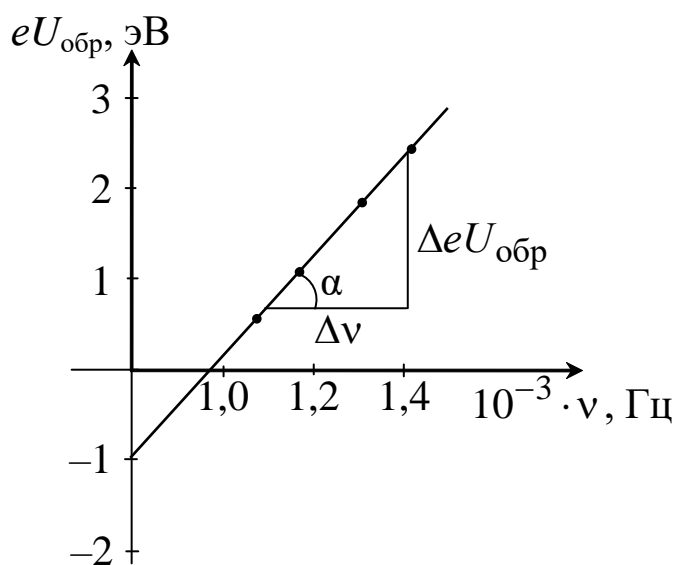


Рис. 1.10. Экспериментальная зависимость кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света

На основании выражения (1.27) можно предложить способ экспериментального определения постоянной Планка. Для этого необходимо облучать фотокатод последовательно светом разной частоты и для каждого из них определять экспериментально энергию ( $eU_{\text{обр}}$ ), соответствующую прекращению фототока. Откладывая в положительном направлении оси ординат значения ( $eU_{\text{обр}}$ ), соответ-

ствующие определённой частоте излучения, а по оси абсцисс – частоту, получим совокупность точек (рис. 1.10). Проведём через них прямую, и тангенс угла её наклона к оси абсцисс будет численно равен постоянной Планка,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta(eU_{\text{обр}})}{\Delta\nu}\right) = h$ . А отрезок, отсечённый

прямой на оси ординат в области отрицательных значений ( $eU_{\text{обр}}$ ), даст величину работы выхода для металла фотокатода.

Таким образом, в области положительных значений ( $eU_{\text{обр}}$ ) получаем величину максимальной кинетической энергии, которую получают выбитые фотоэлектроны при облучении металла фотокатода светом различной частоты, а в области отрицательных значений – работу выхода для данного металла (фотокатода).

### § 1.11. Нормальный и аномальный внешний фотоэффект

Если величина фототока плавно уменьшается по мере увеличения длины волны падающего излучения вплоть до красной границы, то это нормальный фотоэффект (рис. 1.11).

Аномальный фотоэффект может быть связан с резонансными явлениями, при которых частота собственных колебаний электронов близка к частоте излучения.

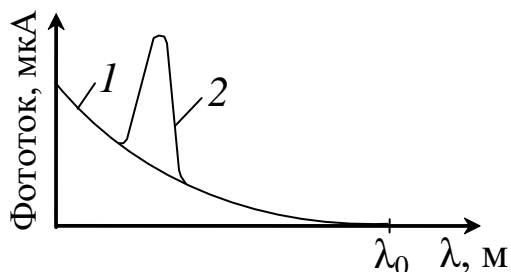


Рис. 1.11. Зависимость фототока от длины волны падающего излучения для нормального (1) и аномального (2) фотоэффекта

Необходимо отметить, что величина фототока достаточно сильно зависит от ориентации вектора поляризации падающей волны относительно плоскости падения. Если электрический вектор параллелен плоскости падения волны, то фототок резко увеличивается.

### § 1.12. Внутренний фотоэффект

Внутренний фотоэффект отличается от внешнего тем, что возбуждённые падающим излучением электроны теряют связь со своим атомом, но не покидают пределы освещаемого тела. Естественно, что при этом изменяются концентрация носителей заряда и их подвижность, но электронейтральность тела не изменяется. Внут-

ренный фотоэффект наблюдается только в полупроводниках и диэлектриках.

На основе внутреннего фотоэффекта, вызываемого в однородных полупроводниках, изготовленных из селенида, сульфида кадмия, созданы *фоторезисторы*, сопротивление которых зависит от падающего излучения, что позволяет использовать их в системах автоматического регулирования.

В неоднородных полупроводниках под действием падающего излучения образуется разность потенциалов, что связано с пространственным разделением электронов и дырок на *p-n*-переходе, вследствие чего положительные и отрицательные заряды концентрируются на разных участках тела. Следовательно, при освещении неоднородного полупроводника возникает ЭДС, величина которой зависит от падающего светового потока. Это послужило основанием для изготовления фотогальванических элементов на основе германия, кремния, галлия, индия и др.

Фотоэлементы применяются в технике и в научных исследованиях. Объективные люксометры могут использоваться для измерения освещённости рабочих мест и установления её соответствия СНиПу согласно определённому разряду зрительных работ. Это касается естественного и искусственного освещения.

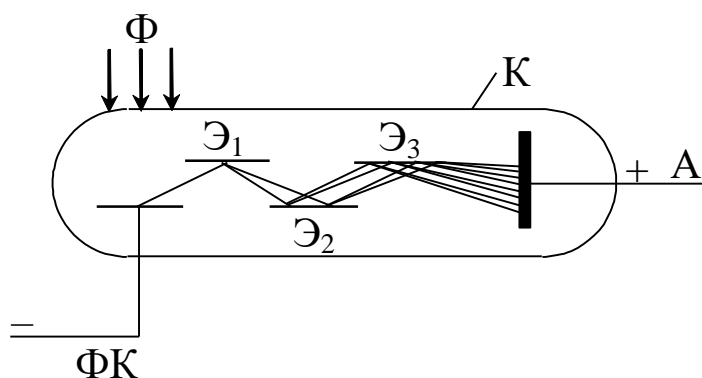


Рис. 1.12. Схема фотоэлектрического умножителя: *K* – корпус ФЭУ;

*Φ* – падающий световой поток;

*ФК* – фотокатод; *A* – анод;

*Э<sub>1</sub>, Э<sub>2</sub>, Э<sub>3</sub>, ...* – промежуточные электроды

Вакуумные фотоэлементы дают малую величину полезного электрического сигнала, что не позволяет напрямую использовать их в практических целях. Для этого необходимо полезный сигнал усилить. С этой целью используются фотоумножители (ФЭУ), которые были изго-

товлены в 1934 г. Схема фотоумножителя представлена на рис. 1.12.

ФЭУ имеет жёсткий корпус, в котором создаётся достаточно высокий вакуум. Подводится высокое постоянное напряжение та-

ким образом, что выбитые из фотокатода электроны всегда попадают в электрическое поле от фотокатода к аноду, т. е. между парами электродов  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$  и т. д. прикладывается всё возрастающая разность потенциалов. Электроны попадают последовательно на эти электроды и вызывают эмиссию вторичных электронов. Коэффициент усиления ФЭУ достаточно большой и может составлять  $10^7 \div 10^8$ . Основным недостатком ФЭУ является их нестабильность.

### § 1.13. Химическое действие света

Если вещество поглощает падающий на него свет, то это может вызвать химическое превращение вещества вследствие протекания фотохимических реакций.

Экспериментально установлен основной закон фотохимии, который носит название закона Бунзена – Роско. Суть данного закона заключается в том, что масса фотохимически прореагировавшего вещества пропорциональна энергии поглощённого света, т. е.

$$m = k\Phi t, \quad (1.28)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от частоты падающего света;  $\Phi$ ,  $t$  – световой поток и время облучения.

Различают минимальную частоту света для возбуждения фотохимической реакции

$$\nu_0 = \frac{\varepsilon}{h}$$

или минимальную энергию кванта света, возбуждающего реакцию:

$$\varepsilon = \nu_0 h, \quad (1.29)$$

где  $\varepsilon$  – энергия падающего фотона;  $h$  – постоянная Планка.

Масса прореагировавшего вещества может быть определена по формуле

$$m = \frac{NM}{N_A}, \quad (1.30)$$

где  $N$  – число прореагировавших молекул вещества;  $N_A$  – число Авогадро;  $M$  – молярная масса вещества.

Если падающий свет не вызывает в веществе фотохимической реакции, то добавляя к исходному веществу другое вещество, называемое *сенситизатором*, можно вызвать ожидаемую фотохимическую реакцию.

### § 1.14. Явление Комптона

Данное явление представляет собой рассеяние рентгеновских лучей на свободных электронах. Его установил Комптон в 1923 г. Падающее на вещество рентгеновское излучение вызывает в нём вынужденные колебания электронов. В этой связи частота излучения, вызванного колеблющимися электронами, должна быть равна частоте вынужденных колебаний. Но Комптон экспериментально установил, что в рассеянном излучении появляется составляющая, длина волны которой больше частоты вынужденных колебаний. На рис. 1.13 представлена схема экспериментальной установки для исследования явления Комптона.

В качестве рассеивающего излучения тела были использованы уголь или парафин, имеющие электроны, слабо связанные с ядром.

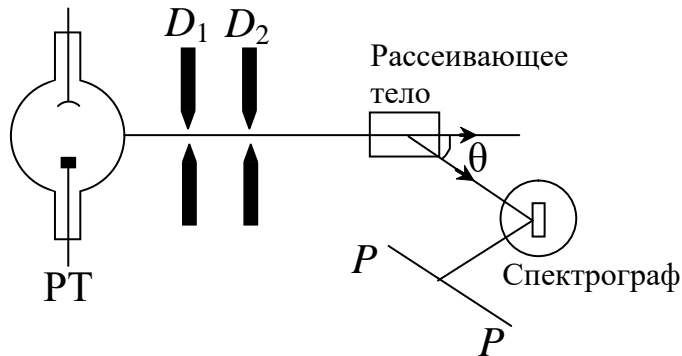


Рис. 1.13. Схема экспериментальной установки для исследования явления Комптона

Рассеянное излучение фиксировалось с помощью рентгеновского спектрографа фотографически или с помощью ионизационной камеры. Щели  $D_1$  и  $D_2$  выбирались такими, чтобы в падающем пучке присутствовало только излучение с длиной волны  $\lambda$ . Было установлено, что в рассеянном излучении наряду

с длиной волны  $\lambda$  присутствует излучение с большей длиной волны  $\lambda'$ , причём

$$\lambda' - \lambda = 2k \sin^2 \frac{\theta}{2} = k(1 - \cos \theta), \quad (1.31)$$

где постоянная  $k = 0,241 \cdot 10^{-10}$  м.

Постоянная  $k$  была определена при направлении рассеянного излучения под прямым углом к падающему.

Дальнейшие исследования показали, что это справедливо для не очень жёстких лучей и для химических элементов с малым атомным весом, например водорода, углерода, бора, алюминия и др., которые имеют электроны, связанные с ядром достаточно слабо.

### § 1.15. Расчёт явления Комптона на основе законов сохранения релятивистских и квантовых представлений

Явление Комптона можно объяснить с позиций рассеяния рентгеновских фотонов свободными или слабосвязанными с атомами электронами.

Предположим, что столкновение рентгеновских фотонов с электронами происходит по законам упругого удара. В этом случае должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. После столкновения электрон, который до удара, в первом приближении, был неподвижен, получает импульс, а рентгеновский фотон уменьшает свою энергию и, в общем случае, изменяет направление своего движения. Как следствие уменьшения энергии фотона, также

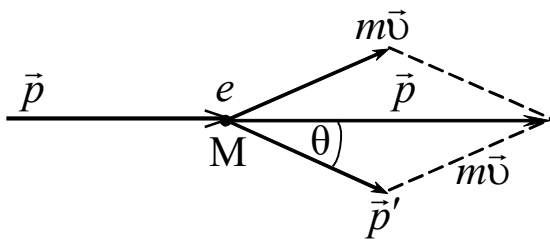


Рис. 1.14. Схема столкновения рентгеновского фотона с электроном:  $M$  – исходное положение электрона;  $\vec{p}, \vec{p}'$  – исходный и конечный импульс фотона;  $m\vec{v}$  – импульс электрона после столкновения с фотоном

уменьшается частота рентгеновского излучения, т. е. увеличивается длина волны.

Тогда должны выполняться законы:

1) закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^2 \vec{p}_i = \text{const};$$

2) закон сохранения энергии

$$\sum_{i=1}^2 E_i = \text{const}.$$

Рассчитаем кинетическую энергию электрона по формуле релятивистской механики:

$$W_{\text{кин}} = mc^2 - m_0c^2, \quad (1.32)$$

где  $mc^2$  – полная энергия электрона после столкновения;  $m_0c^2$  – энергия покоя электрона до столкновения.

Полная энергия релятивистской частицы определяется соотношением

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.33)$$

где  $v$  – скорость движения релятивистской частицы;  $c$  – скорость света в вакууме;  $m_0$  – масса покоя частицы.

Из выражений (1.32) и (1.33) следует

$$W_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (1.34)$$

Закон сохранения энергии запишется следующим образом:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (1.35)$$

где  $h\nu$  – энергия падающего фотона;  $h\nu'$  – энергия рассеянного фотона.

То есть сумма энергии падающего фотона и энергии покоя электрона до столкновения равна сумме энергии рассеянного фотона и полной энергии электрона после столкновения.

Из закона сохранения импульса при упругом ударе фотона с электроном следует, что векторная сумма импульсов рассеянного фотона и электрона равна импульсу падающего фотона. Тогда, по теореме косинусов, из рис. 1.14 следует

$$(mv^2) = \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu'}{c} \right)^2 - \frac{2h^2}{c^2} \nu\nu' \cos\theta, \quad (1.36)$$

где  $mv$  – модуль импульса электрона;  $\left( \frac{h\nu}{c} \right), \left( \frac{h\nu'}{c} \right)$  – модули импульсов падающего и рассеянного фотонов;  $\theta$  – угол между импульсами падающего и рассеянного фотонов.

Из выражения (1.35) выразим  $mc^2$ :

$$mc^2 = (h\nu - h\nu') + m_0 c^2.$$

Правую и левую части этого выражения возведём в квадрат, поскольку это не нарушает равенство:

$$(mc^2)^2 = [(h\nu - h\nu') + m_0 c^2]^2. \quad (1.37)$$

После раскрытия скобок получим

$$m^2 c^4 = h^2 \nu^2 + h^2 (\nu')^2 - 2h^2 \nu\nu' + m_0^2 c^4 + 2hm_0 c^2 (\nu - \nu'). \quad (1.38)$$

Выражение (1.36) приведём к общему знаменателю:

$$m^2 v^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu\nu' \cos\theta. \quad (1.39)$$

Далее из равенства (1.38) вычтем равенство (1.39), для этого из левой части равенства (1.38) вычтем левую часть равенства (1.39), а из правой части (1.38) – правую часть (1.39). Учтём при этом соотношение из релятивистской механики

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4, \quad (1.40)$$

которое следует из выражения  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

Действительно, возведём обе части последнего выражения в квадрат и получим

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Отсюда следует, что  $m^2 = \frac{m_0^2 c^2}{c^2 - v^2}$ . Или  $m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$ .

Умножим обе части данного равенства на  $c^2$ , получим выражение, совпадающее с (1.40):

$$m_0^2 c^4 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2.$$

После вычитания из равенства (1.38) равенства (1.39) получим

$$h\nu\nu'(1 - \cos\theta) = m_0 c^2 (\nu - \nu'). \quad (1.41)$$

Равенство (1.41) запишем для длины волны  $\lambda$  с учётом того, что  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , а  $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ :

$$\frac{hc^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = m_0 c^2 \frac{c\Delta\lambda}{\lambda\lambda'},$$

откуда выразим  $\Delta\lambda$ :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.42)$$

Постоянная явления Комптона, рассчитанная по (1.42), равна

$$K = \frac{h}{m_0 c} = 0,0242 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

что на одну десятитысячную превосходит постоянную, найденную из эксперимента.



Незначительное отличие может быть вызвано тем, что электроны в действительности не являются свободными и на их отрыв от атома требуется определённая энергия, которая должна быть учтена в уравнении баланса энергий. Следовательно, квантовые представления о рентгеновском излучении позволяют достаточно удовлетворительно объяснить явление Комптона.

### **§ 1.16. Корпускулярно-волновая двойственность свойств света**

Явления интерференции, дифракции и поляризации света достаточно хорошо объясняются с позиции волновых свойств света. Исходят из того, что свет – это электромагнитные волны определённой длины, для которых выполняются все законы волновой оптики. Если источники волн когерентные, то наблюдаются явления, называемые интерференцией волн. С волновых позиций объяснимы явления отклонения лучей света от прямолинейного распространения при прохождении через малые отверстия, при огибании непрозрачных экранов, а также явления двойного лучеобразования при прохождении света через кристаллы.

В то же время существуют явления, которые не могут быть объяснены с волновых позиций. Это явления теплового излучения, фотоэффекта и Комптона, которые достаточно хорошо объясняются исходя из того, что свет – это поток квантов света – элементарных частиц фотонов, обладающих энергией и импульсом, но их масса покоя равна нулю. Волновые и квантовые представления о свете достаточно хорошо подтверждены экспериментально. Такую двойственность свойств света нельзя объяснить с позиции несовершенства наших знаний о свойствах света и тем более их противопоставлять друг другу. Вполне очевидно, что свет обладает одновременно и волновыми, и квантовыми свойствами. Но их проявления в большей мере зависят от длины волны (частоты) света. При больших длинах волн (диапазон радиоволн и видимого излучения) в большей мере проявляются волновые свойства света, а при их уменьшении (диапазон рентгеновского и  $\gamma$ -излучения) проявляются квантовые свойства. Очевидно, с этим связано существование красной границы внешнего фотоэффекта и граничной частоты света для возбуждения химической реакции в веществе.

### Вопросы для самоподготовки

1. Какие виды электромагнитного излучения вам известны?
2. В чём смысл закона Вавилова для фотолюминесценции?
3. Почему тепловое излучение называют равновесным?
4. Назовите основные характеристики теплового излучения.
5. О чём говорит правило Прево?
6. Какое тело называется абсолютно чёрным? Сформулируйте закон Кирхгофа.
7. Как с помощью закона Стефана – Больцмана рассчитать суммарную энергию, излучаемую в единицу времени с единицы поверхности?
8. Сформулируйте законы Вина и поясните их суть. Как выглядят экспериментальные кривые зависимости  $r_{\nu,T}$  от частоты  $\nu$  и  $r_{\lambda,T}$  от длины волны  $\lambda$ ?
9. Назовите области применения законов теплового излучения.
10. В чём суть квантовой гипотезы Планка? Назовите основные характеристики фотонов.
11. Поясните формулу Рэлея – Джинса.
12. Как Эйнштейн обосновал квантовые свойства света?
13. В чём заключаются законы и квантовая теория внешнего фотоэффекта?
14. Как выглядит вольт-амперная характеристика внешнего фотоэффекта?
15. Можно ли объяснить эффект Комптона на основе волновых представлений?
16. В чём заключается суть основного закона фотохимии Бунзена – Роско?
17. Как проявляются волновые и корпускулярные свойства света?
18. В чём заключается корпускулярно-волновая двойственность свойств света?

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны 500 нм. Считая, что Солнце излучает как чёрное тело, определить: 1) энергетическую светимость  $R$ , Солнца; 2) поток энергии  $\Phi$ , излучаемой Солнцем; 3) массу  $m$  элек-

тромагнитных волн, излучаемых Солнцем за 1 с; 4) интенсивность  $I$  излучения вблизи поверхности Земли за пределами ее атмосферы.

Дано:

$$\lambda_m = 500 \text{ нм}$$

$R_\odot, \Phi, m, I - ?$

Решение

1. Энергетическая светимость чёрного тела определяется законом Стефана – Больцмана (1.9), а температура излучающей поверхности чёрного тела определяется из закона смещения Вина (1.12):

$$T = \frac{b}{\lambda_m}. \quad (1.43)$$

Подставив (1.43) в (1.9), получим

$$R_\odot = \sigma \frac{b^4}{\lambda_m^4} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,9 \cdot 10^{-3})^4}{(5 \cdot 10^{-7})^4} = 64 \cdot 10^6 \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right).$$

2. Поток энергии  $\Phi$  (мощность излучения) равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь  $S$  его поверхности

$$\Phi = R_\odot \cdot 4\pi r_C^2, \quad (1.44)$$

где  $r_C = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$  – радиус Солнца.

$$\Phi = 64 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (6,95 \cdot 10^8)^2 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ (Вт)}.$$

3. Масса  $m$  электромагнитных волн всех длин, излучаемых Солнцем ежесекундно, определяется из соотношения Эйнштейна о пропорциональности массы и энергии

$$E = mc^2,$$

где  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость электромагнитных волн в вакууме. Так как энергия электромагнитных волн, излучаемых за время  $t$ , равна произведению потока энергии (мощности излучения) на время  $t$ , то за одну секунду излучается энергия, численно равная потоку излучения:

$$\Phi = mc^2.$$

$$\text{Откуда} \quad m = \frac{\Phi}{c^2} = \frac{3,9 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{16}} = 4,3 \cdot 10^9 \text{ (кг/с)}.$$

4. Интенсивность  $I$  излучения Солнца вблизи поверхности Земли за пределами её атмосферы пропорциональна энергетической светимости  $R_\odot$  поверхности Солнца:  $I \sim R_\odot$ . Весь поток излучения

проходит сквозь поверхность сферы радиуса  $r$ , равного расстоянию от Солнца до Земли. Тогда

$$\Phi = I \cdot 4\pi r^2, \quad (1.45)$$

где  $r$  – расстояние от Солнца до Земли.

Решая совместно (1.44) и (1.45), получим

$$R_{\odot} \cdot 4\pi r_{\odot}^2 = I \cdot 4\pi r^2.$$

Следовательно, интенсивность излучения Солнца вблизи поверхности Земли

$$I = R_{\odot} \frac{r_{\odot}^2}{r^2} = 64 \cdot 10^6 \cdot \frac{(6,95 \cdot 10^8)^2}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} \approx 1,37 \cdot 10^3 \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right).$$

**Пример 2.** При изменении температуры чёрного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda, T}^{\max}$  сместился с  $\lambda_1 = 2,5$  мкм на  $\lambda_2 = 0,5$  мкм. Во сколько раз изменилась энергетическая светимость  $R_{\odot}$  нагретого тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости  $r_{\lambda, T}^{\max}$ ?

<i>Дано:</i>	<i>Решение</i>
$\lambda_1 = 2,5$ мкм	При повышении температуры излучающего абсолютно чёрного тела от $T_1$ до $T_2$ происходит уменьшение длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости. Температуры $T_1$ и $T_2$ можно определить из закона смещения Вина (1.12):
$\lambda_2 = 0,5$ мкм	
$\frac{R_{\odot 2}}{R_{\odot 1}}; \frac{r_{\lambda_2, T_2}^{\max}}{r_{\lambda_1, T_1}^{\max}} - ?$	
отсюда	$T_1 = \frac{b}{\lambda_1}; \quad T_2 = \frac{b}{\lambda_2}.$

Энергетическая светимость  $R_{\odot}$  чёрного тела выражается из закона Стефана – Больцмана (1.9):

$$R_{\odot} = \sigma T^4,$$

а максимальная спектральная плотность энергетической светимости – из закона Вина:

$$r_{\lambda, T}^{\max} = CT^5.$$

Поэтому

$$\frac{R_{\text{э}2}}{R_{\text{э}1}} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 = 625; \quad \frac{r_{\lambda_2, T_2}^{\max}}{r_{\lambda_1, T_1}^{\max}} = \frac{CT_2^5}{CT_1^5} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^5 = 3125.$$

**Пример 3.** Красная граница фотоэффекта для никеля  $\lambda_0 = 257 \text{ нм}$ . Найти длину волны  $\lambda$  света, падающего на никелевый электрод (катод), если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов:  $\Delta\varphi_3 = 1,5 \text{ В}$ .

Дано:

$$\lambda_0 = 257 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\Delta\varphi_3 = 1,5 \text{ В}$$

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\lambda - ?$$

Решение

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта  $\varepsilon_{\text{ф}} = A_{\text{в}} + W_{\text{к}}^{\max}$ .

Учитывая, что энергия фотона  $\varepsilon_{\text{ф}} = \frac{hc}{\lambda}$ ,

работа выхода  $A_{\text{в}} = \frac{hc}{\lambda_0}$  электрона из вещества, а максимальная кинетическая энергия электрона определяется через задерживающую разность потенциалов  $W_{\text{к}}^{\max} = e \Delta\varphi_3$ , получим

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + e \Delta\varphi_3.$$

Из этого соотношения выразим длину волны  $\lambda$  падающего света

$$\lambda = \left( \frac{1}{\lambda_0} + \frac{e \Delta\varphi_3}{hc} \right)^{-1}.$$

Произведём вычисления

$$\lambda = \left( \frac{1}{2,57 \cdot 10^{-7}} + \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \right)^{-1} \approx 1,96 \cdot 10^{-7} (\text{м}).$$

**Пример 4.** Свет с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$  падает нормально на зеркальную поверхность и производит на неё давление  $p = 4 \text{ мкПа}$ . Определить число фотонов  $n$ , падающих каждую секунду на  $S = 1 \text{ см}^2$  площади этой поверхности.

Дано:	Решение
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$	Давление света $p = \frac{E}{c}(1 + \rho)$ , где $E = \frac{hc}{\lambda}N$ – энергетическая освещенность поверхности, равная энергии фотона $\frac{hc}{\lambda}$ , умноженной на число фотонов $N$ , падающих на $1 \text{ м}^2$ за $1 \text{ с}$ .
$\rho = 1$	
$p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$	
$S = 10^{-4} \text{ м}^2$	
$n - ?$	

Число  $n$  фотонов, падающих за  $1 \text{ с}$  на  $S = 10^{-4} \text{ м}^2$  поверхности, будет равно  $n = NS$ . Выразим число  $N$  фотонов, падающих каждую секунду на  $1 \text{ м}^2$ , и затем число  $n$  фотонов, падающих за  $1 \text{ с}$  на  $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ :

$$p = \frac{h}{\lambda}(1 + \rho)N; \quad N = \frac{p \lambda}{h(1 + \rho)}; \quad n = \frac{p \lambda}{h(1 + \rho)}S.$$

Произведем вычисления:

$$n = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 2} \approx 1,5 \cdot 10^{17}.$$

**Пример 5.** В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол  $\theta = 90^\circ$  (рис. 1.15). Энергия рассеянного  $\varepsilon_2$  фотона равна  $0,4 \text{ МэВ}$ . Определить энергию  $\varepsilon_1$  фотона до рассеяния.

Дано:	Решение
$\theta = 90^\circ$	Для определения энергии фотона до рассеяния воспользуемся соотношением Комптона в виде (1.31):
$\varepsilon_2 = 0,4 \text{ МэВ}$	
$\varepsilon_1 - ?$	$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$

Выразим длины волн падающего и рассеянного фотона через их энергии:

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{h}{m_0 c} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части полученного выражения на скорость света в вакууме:

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{m_0 c^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Сократим обе части уравнения на  $hc$  и учтём, что энергия покоя электрона

$$E_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ};$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{2}{E_0} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Выразим энергию фотона до рассеяния:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{2}{E_0} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\varepsilon_2 E_0}{E_0 - 2 \varepsilon_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{0,4 \cdot 0,51}{0,51 - 0,8 \sin^2 45^\circ} = 1,85 \text{ (МэВ)}.$$

**Пример 6.** Гамма-фотон с энергией 1,02 МэВ в результате комптоновского рассеяния на свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол  $60^\circ$ . Определить кинетическую энергию и импульс электрона отдачи.

Дано:

$$\varepsilon_1 = 1,02 \text{ МэВ}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$T, p_e - ?$$

Решение

Для определения кинетической энергии  $W_{\text{кин}}$  электрона необходимо воспользоваться законом сохранения механической энергии при упругом взаимодействии  $\gamma$ -фотона и свободного электрона:

$$W_{\text{кин}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon_1$  – энергия падающего фотона;  $\varepsilon_2$  – энергия рассеянного фотона.

Энергию рассеянного фотона можно определить, воспользовавшись формулой Комптона (1.31):

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta),$$

где  $\lambda_1$  – длина волны падающего  $\gamma$ -фотона;  $\lambda_2$  – длина волны рассеянного  $\gamma$ -фотона. Длина волны  $\lambda$  связана с энергией  $\varepsilon$  фотона:

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}.$$

Тогда формулу Комптона можно переписать в виде

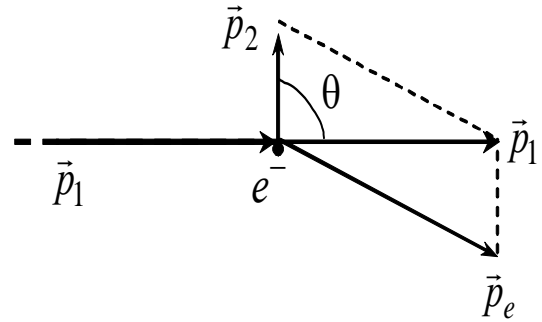


Рис. 1.15. Рассеяние фотонов на угол  $90^\circ$  свободными электронами

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \text{или} \quad \frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta).$$

После сокращения на  $hc$  имеем

$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta),$$

где  $m_0 c^2 = E_0 = 0,51$  МэВ – энергия покоя электрона. Отсюда найдём энергию рассеянного фотона  $\varepsilon_2$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{E_0} (1 - \cos \theta);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 E_0}{E_0 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1,02 \cdot 0,51}{0,51 + 1,02(1 - \cos 60^\circ)} = 0,51 \text{ (МэВ)}.$$

Кинетическая энергия электрона отдачи

$$W_{\text{кин}} = 1,02 - 0,51 = 0,51 \text{ (МэВ)}.$$

Так как кинетическая энергия электрона отдачи равна его энергии покоя, то этот электрон является релятивистской частицей и его импульс определяется по формуле

$$p_e = \frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{c} = \frac{\sqrt{E_0(E_0 + 2E_0)}}{c} = \frac{0,88 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} =$$

$$= 0,47 \cdot 10^{-2} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)},$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Чёрное тело имеет температуру  $T_1 = 500$  К. Какова будет температура  $T_2$  тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в  $n = 5$  раз?

2–6. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (табл. 1.2) и магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряжённости  $E_m$  электрического поля и циклической частотой  $\omega$ . Определить для этой волны фазовую скорость  $v$ , длину волны  $\lambda$ , волновое число  $k$ , амплитуду напряжённости  $H_m$  магнитного поля и плотность потока энергии  $S_m$ .



Таблица 1.2

№ задачи	$\varepsilon$	$\omega$ , рад/с	$E_m$ , В/м
2	2	$2\pi \cdot 10^8$	28
3	4	$\pi \cdot 10^8$	10
4	1	$(\pi/2) \cdot 10^8$	20
5	81	$(\pi/4) \cdot 10^8$	0,01
6	7	$(\pi/3) \cdot 10^8$	0,1

7. Температура чёрного тела  $T = 2$  кК. Определить длину волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$ , и спектральную плотность  $r_{\lambda,T}^{\max}$  энергетической светимости для этой длины волны.

8. Определить температуру  $T$  и энергетическую светимость  $R_\Sigma$  чёрного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}^{\max}$  приходится на длину волны  $\lambda_m = 600$  нм.

9. Из смотрового окошечка печи излучается поток  $\Phi = 4$  кДж/мин. Определить температуру  $T$  печи, если площадь окошечка  $S = 8$  см<sup>2</sup>.

10. Поток излучения чёрного тела  $\Phi = 10$  кВт. Максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}^{\max}$  приходится на длину волны  $\lambda_m = 0,8$  мкм. Определить площадь  $S$  излучающей поверхности.

11. Как и во сколько раз изменится поток излучения чёрного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}^{\max}$  переместится с красной границы видимого спектра ( $\lambda_{m1} = 780$  нм) на фиолетовую ( $\lambda_{m2} = 390$  нм)?

12. Муфельная печь, потребляющая мощность  $P = 1,2$  кВт, имеет отверстие площадью  $S = 150$  см<sup>2</sup>. Определить долю мощности, рассеиваемой стенками печи, если температура её внутренней поверхности равна 1 кК.

13. Средняя энергетическая светимость  $\langle R_\Sigma \rangle$  поверхности

Земли равна  $0,54 \text{ Дж}/(\text{см}^2 \cdot \text{мин})$ . Какова должна быть температура  $T$  поверхности Земли, если условно считать, что она излучает как серое тело с коэффициентом черноты  $\alpha_T = 0,25$ ?

14. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . Принимая Солнце за чёрное тело, определить энергетическую светимость  $R_\odot$  Солнца и поток  $\Phi$  излучаемой им энергии.

15. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости чёрного тела  $r_{\lambda,T}^{\max} = 4,16 \cdot 10^{11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ . На какую длину волны  $\lambda_{\max}$  она приходится?

16. На поверхность металла падают монохроматические лучи с длиной волны  $\lambda = 0,1 \text{ мкм}$ . Красная граница фотоэффекта  $\lambda_0 = 0,3 \text{ мкм}$ . Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

17. На металлическую пластину направлен пучок ультрафиолетовых лучей ( $0,25 \text{ мкм}$ ). Фототок прекращается при минимальной задерживающей разности потенциалов  $\Delta U_z = 0,96 \text{ В}$ . Определить работу выхода  $A$  электронов из металла.

18. На фотоэлемент с катодом из лития падают лучи с длиной волны  $\lambda = 200 \text{ нм}$ . Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов  $\Delta U_z$ , которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

19. Красная граница фотоэффекта для цинка  $\lambda_0 = 310 \text{ нм}$ . Определить максимальную кинетическую энергию  $W_k^{\max}$  фотоэлектронов в электрон-вольтах, если на цинк падают лучи с длиной волны  $\lambda = 200 \text{ нм}$ .

20. Фотон с энергией  $\varepsilon_f = 10 \text{ эВ}$  падает на серебряную пластину и вызывает фотоэффект. Определить импульс  $p$ , полученный пластиной, если принять, что скорости движения фотона и фотоэлектрона лежат на одной прямой, перпендикулярной поверхности пластин.

21. На поверхность площадью  $S = 100 \text{ см}^2$  в единицу времени падает световая энергия  $1,05 \text{ Дж/с}$ . Найти давление света, если поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на неё лучи.

22. Монохроматический пучок света ( $\lambda = 490$  нм) при нормальном падении на поверхность производит световое давление  $p = 4,9$  мкПа. Какое количество фотонов падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения 0,25.

23. Давление света на зеркальную поверхность равно 60 мПа. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности, если длина волны  $\lambda$  света, падающего на поверхность, равна 0,63 мкм.

24. На зеркальную поверхность площадью  $6,4$  см<sup>2</sup> падает нормально поток излучения  $\Phi = 1,8$  Вт. Определить давление  $p$  и силу давления  $F$  света на эту поверхность.

25. Давление света с длиной волны  $\lambda = 520$  нм, падающего нормально на зачернённую поверхность, равно 4 нПа. Определить число  $N$  фотонов, падающих за  $t = 1$  мин на площадь  $S = 5$  мм<sup>2</sup> этой поверхности.

26. В результате эффекта Комптона на свободных электронах фотон с энергией  $\varepsilon_1 = 1,02$  МэВ был рассеян на угол  $\theta = 150^\circ$ . Определить энергию рассеянного фотона  $\varepsilon_2$ .

27. Фотон с энергией  $\varepsilon_1 = 0,25$  МэВ рассеялся на свободном электроны. Энергия рассеянного фотона  $\varepsilon_2 = 0,2$  МэВ. Определить угол рассеяния  $\theta$ .

28. Какая доля энергии фотона приходится при эффекте Комптона на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол  $\theta = \pi/2$ . Энергия фотона до рассеяния  $\varepsilon_1 = 0,51$  МэВ.

29. Определить импульс  $p_e$  электрона отдачи, если фотон с энергией  $\varepsilon_1 = 1,53$  МэВ в результате рассеяния на свободном электроны потерял  $1/3$  своей энергии.

30. Фотон при эффекте Комптона на свободном электроны был рассеян на угол  $\theta = 90^\circ$ . Определить импульс  $p_e$  электрона отдачи, если энергия фотона до рассеяния была равна  $\varepsilon_1 = 1,02$  МэВ.

### Примеры тестовых заданий

1. Числовое значение постоянной Стефана – Больцмана теоретически можно определить с помощью ...

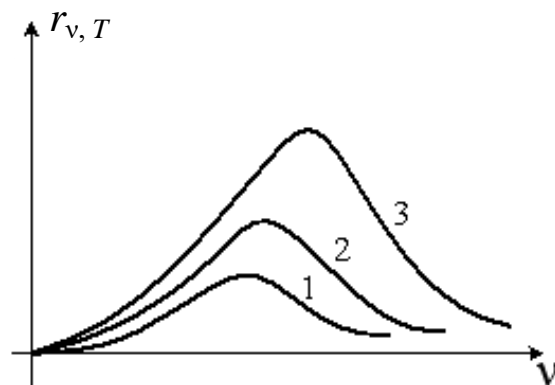
- 1) закона смещения Вина;
- 2) закона Стефана – Больцмана;

- 3) закона Кирхгофа;
- 4) формулы Планка.

2. Абсолютно чёрное тело и серое тело имеют одинаковую температуру. При этом интенсивность излучения ...

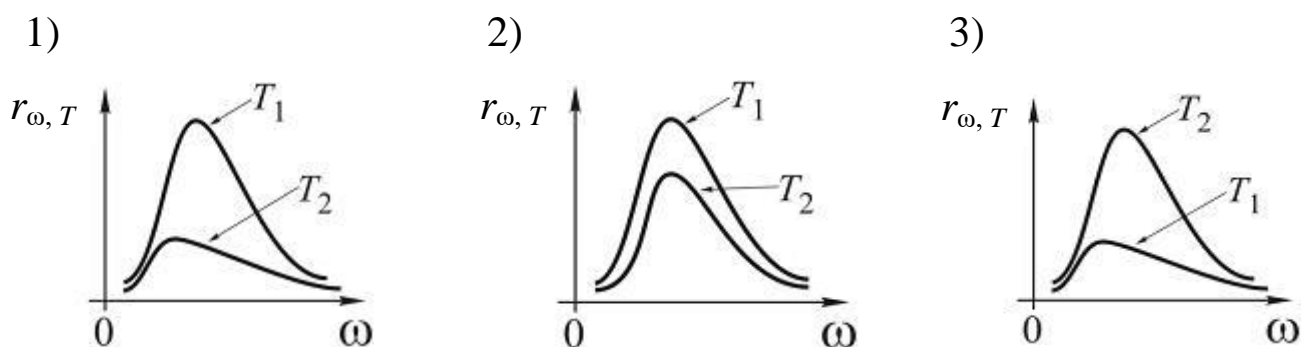
- 1) определяется площадью поверхности тела;
- 2) больше у серого тела;
- 3) одинаковая у обоих тел;
- 4) больше у абсолютно чёрного тела.

3. На рисунке представлены графики зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела от частоты при различных температурах. Наибольшей температуре соответствует график ...

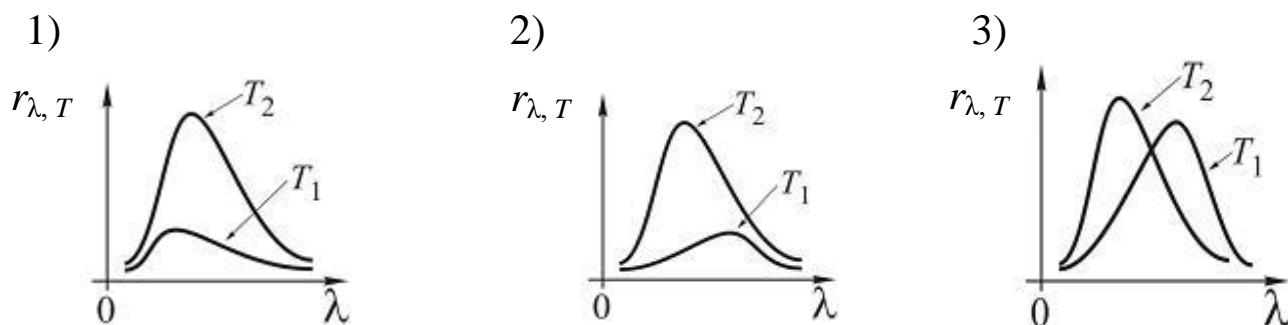


- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3.

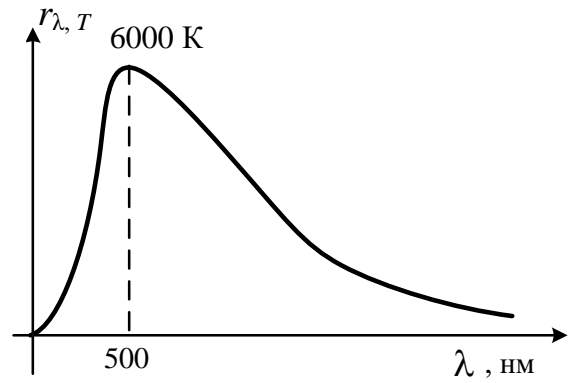
4. Распределение энергии в спектре излучения абсолютно чёрного тела в зависимости от частоты излучения для температур  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) верно представлено на рисунке ...



5. Распределение энергии в спектре излучения абсолютно чёрного тела в зависимости от длины волны для температур  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) верно представлено на рисунке ...

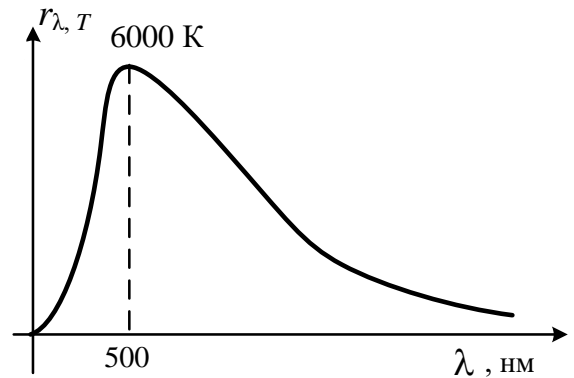


6. На рисунке показана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела от длины волны при  $T = 6000$  К. Если температуру тела уменьшить в 4 раза, то длина волны, соответствующая максимуму излучения абсолютно чёрного тела, ...



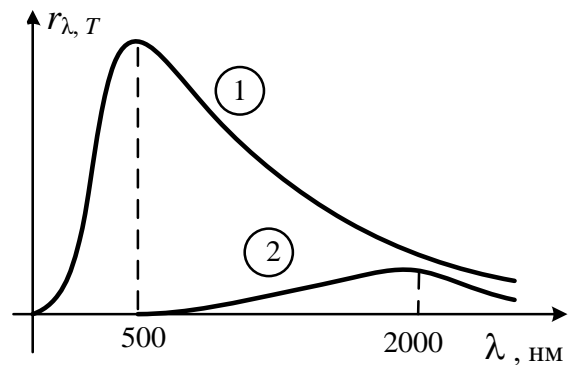
- 1) увеличится в 4 раза;
- 2) уменьшится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза;
- 4) уменьшится в 4 раза.

7. На рисунке показана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела от длины волны при  $T = 6000$  К. Если температуру тела уменьшить в 2 раза, то энергетическая светимость абсолютно чёрного тела уменьшится ...



- 1) в 16 раз; 2) в 2 раза; 3) в 4 раза; 4) в 8 раз.

8. На рисунке показаны кривые зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела от длины волны при разных температурах. Если кривая 2 соответствует спектру излучения абсолютно чёрного тела при температуре 1500 К, то кривая 1 соответствует температуре (в кельвинах) ...

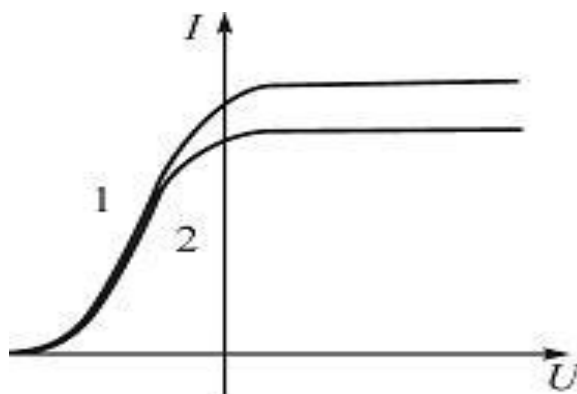


- 1) 6000; 2) 3000;
- 3) 1000; 4) 750.

9. Катод вакуумного фотоэлемента освещается светом с энергией квантов 10 эВ. Если фототок прекращается при подаче на фотоэлемент запирающего напряжения 4 В, то работа выхода электронов из катода равна ...

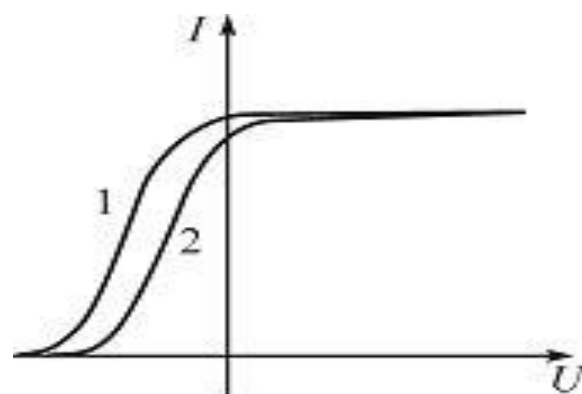
- 1) 14 эВ; 2) 6 эВ; 3) 2,5 эВ; 4) 0,4 эВ.

10. На рисунке приведены две вольт-амперные характеристики вакуумного фотоэлемента. Если  $E$  – освещённость фотоэлемента, а  $\nu$  – частота падающего на него света, то ...



- 1)  $\nu_1 > \nu_2$ ,  $E_1 = E_2$ ;
- 2)  $\nu_1 < \nu_2$ ,  $E_1 = E_2$ ;
- 3)  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $E_1 < E_2$ ;
- 4)  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $E_1 > E_2$ .

11. На рисунке приведены две вольт-амперные характеристики вакуумного фотоэлемента. Если  $E$  – освещённость фотоэлемента, а  $\nu$  – частота падающего на него света, то для данного случая справедливы соотношения ...



- 1)  $\nu_1 > \nu_2$ ,  $E_1 = E_2$ ;
- 2)  $\nu_1 < \nu_2$ ,  $E_1 = E_2$ ;
- 3)  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $E_1 < E_2$ ;
- 4)  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $E_1 > E_2$ .

12. Катод вакуумного фотоэлемента освещается светом с энергией квантов 10 эВ. Если фототок прекращается при подаче на фотоэлемент запирающего напряжения 4 В, то работа выхода электронов из катода равна ...

- 1) 14 эВ;    2) 6 эВ;
- 3) 2,5 эВ;    4) 0,4 эВ.

13. Интенсивность монохроматического света, падающего на катод фотоэлемента, увеличилась в два раза. В результате этого ...

- 1) максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов увеличилась в два раза;
- 2) фототок насыщения увеличился в два раза;
- 3) задерживающая разность потенциалов уменьшилась в два раза;
- 4) температура фотоэлемента увеличилась в два раза.

14. Как изменится кинетическая энергия электронов при фотоэффекте, если увеличить частоту облучающего света, не изменяя общую мощность излучения?

- 1) Уменьшится.
- 2) Увеличится.
- 3) Не изменится.

15. Свет, падающий на металл, вызывает эмиссию электронов из металла. Если интенсивность света уменьшается, а его частота при этом остаётся неизменной, то ...

- 1) количество выбитых электронов уменьшается, а их кинетическая энергия остаётся неизменной;
- 2) количество выбитых электронов остаётся неизменным, а их кинетическая энергия увеличивается;
- 3) количество выбитых электронов остаётся неизменным, а их кинетическая энергия уменьшается.

16. Кинетическая энергия электронов при внешнем фотоэффекте увеличивается, если ...

- 1) увеличивается интенсивность светового потока;
- 2) уменьшается работа выхода электронов из металла;
- 3) уменьшается энергия падающего кванта.

17. Величина фототока насыщения при внешнем фотоэффекте зависит ...

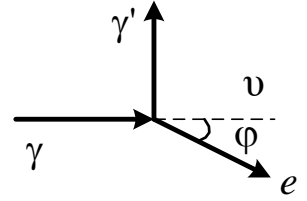
- 1) от величины задерживающего потенциала;
- 2) от частоты падающего света;
- 3) от интенсивности падающего света;
- 4) от работы выхода электрона из облучаемого материала.

18. Металл облучают светом с длиной волны  $\lambda$ . Красная граница фотоэффекта для этого металла равна  $\lambda_{\text{кр}}$ , работа выхода –  $A$ .

Если  $\lambda = \frac{1}{2} \lambda_{\text{кр}}$ , то максимальная кинетическая энергия  $W_{\text{max}}$  вырванных электронов ...

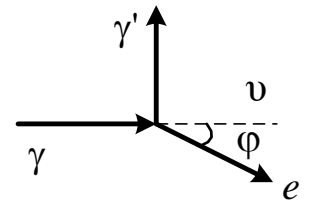
- 1) 0, фотоэффект не происходит;
- 2)  $W_{\text{max}} = \frac{1}{2} A$ ;
- 3)  $W_{\text{max}} = A$ ;
- 4)  $W_{\text{max}} = \frac{3}{2} A$ .

19. На рисунке показаны направления падающего фотона ( $\gamma$ ), рассеянного фотона ( $\gamma'$ ) и электрона отдачи ( $e$ ). Угол рассеяния  $90^\circ$ , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол  $\varphi = 30^\circ$ . Если импульс падающего фотона  $3 \text{ МэВ} \cdot \text{с/м}$ , то импульс электрона отдачи (в тех же единицах) равен...



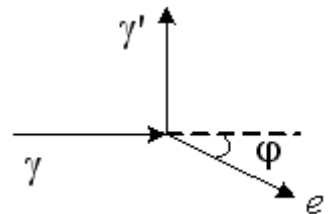
- 1)  $2\sqrt{3}$ ;    2) 1,5;  
3)  $\sqrt{3}$ ;    4)  $1,5\sqrt{3}$ .

20. На рисунке показаны направления падающего фотона ( $\gamma$ ), рассеянного фотона ( $\gamma'$ ) и электрона отдачи ( $e$ ). Угол рассеяния  $90^\circ$ , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол  $\varphi = 30^\circ$ . Если импульс рассеянного фотона  $2 \text{ МэВ} \cdot \text{с/м}$ , то импульс электрона отдачи (в тех же единицах) равен...



- 1) 4;    2)  $2\sqrt{3}$ ;  
3)  $\sqrt{3}$ ;    4) 1.

21. На рисунке показаны направления падающего фотона ( $\gamma$ ), рассеянного фотона ( $\gamma'$ ) и электрона отдачи ( $e$ ). Угол рассеяния  $90^\circ$ , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол  $\varphi = 30^\circ$ . Если импульс падающего фотона  $p_\phi$ , то импульс рассеянного фотона равен ...



- 1)  $0,5 p_\phi$ ;    2)  $1,5\sqrt{3} p_\phi$ ;  
3)  $\sqrt{3} p_\phi$ ;    4)  $p_\phi/\sqrt{3}$ .



## ГЛАВА 2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

### § 2.1. Введение в квантовую механику

Классическая механика, разработанная Ньютоном и другими учёными, описывает закономерности движения и деформаций макроскопических тел под действием внешних сил.

Для описания свойств объектов, размеры которых составляют порядка  $10^{-8} \div 10^{-15}$  м, применяется квантовая механика, законы которой позволяют истолковать механизмы излучения и поглощения атомов и молекул.

Между квантовой и классической механикой выполняется принцип *соответствия*, т. е. в случае малых квантовых скачков результаты расчёта по формулам квантовой механики совпадают с результатами, полученными из классических представлений.

Расчёты в квантовой механике являются вероятностными, и для их интерпретации применяют терминологию классической механики. В данном случае выполняется принцип *дополнительности*. Согласно данному принципу физико-механические параметры микроскопических систем в квантовой механике описываются парами переменных, которые не могут быть измерены одновременно с точностью, превышающей величину элементарного квантового скачка

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

### § 2.2. Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества

Французский учёный Луи де Бройль в 1923 г. выдвинул гипотезу об универсальности корпускулярно-волновых свойств, согласно которой все частицы материи, в том числе фотоны, электроны и др., наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами.

Корпускулярные характеристики: энергия  $E$  и импульс  $\vec{p}$ , а волновые – частота  $\nu$  и длина волны  $\lambda$ . Соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц: 1)  $E = h\nu$ ; 2)  $c = \lambda\nu$ ; 3)  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

Следовательно, любой частице, имеющей импульс  $\vec{p}$ , можно поставить в соответствие волну, длина которой  $\lambda$ , т. е.

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Данная формула носит название формулы де Бройля.

Для классических частиц, у которых  $v \ll c$ , т. е. скорость движения много меньше скорости света в вакууме:

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (2.2)$$

Такая частица обладает кинетической энергией  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ . Отсюда следует, что  $p = \sqrt{2mW_k}$ , т. е. импульс классической частицы выразили через её кинетическую энергию.

В качестве примера рассчитаем длину волны де Бройля для некоторых частиц.

1. Пусть пуля массой  $m = 10^{-3}$  кг летит со скоростью  $v = 10^{-2}$  м/с, тогда длина волны  $\lambda = \frac{h}{mv} = 6,63 \cdot 10^{-29}$  м.

2. Длина волны электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi = 50$  В:

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e\Delta\varphi}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}} = 1,73 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

В расчёте принято, что из закона сохранения энергии следует равенство:

$$e\Delta\varphi = \frac{mv^2}{2},$$

т. е. кинетическая энергия электрона равна работе электрического поля.

3. Длина волны протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi = 50$  В:

$$\lambda_p = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}} = 4,06 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

Результаты расчётов показывают, что волновые свойства макрообъектов можно не принимать во внимание, так как практически их зафиксировать не представляется возможным. Волновые свойства тяжёлых частиц типа протона, нейтрона и др. также незначи-

тельны. Длина их волны де Бройля примерно на два порядка меньше постоянной кристаллической решётки, следовательно, поток таких частиц будет проходить через кристалл, не проявляя при этом дифракционных явлений. А вот длина волны, соответствующая движущемуся электрону, соизмерима с постоянной кристаллической решётки, поэтому необходимо сопоставить дифракционную картину рентгеновских лучей на кристалле, имеющих близкую длину волны, с электронограммой, полученной при облучении этого кристалла потоком электронов.

### § 2.3. Экспериментальное подтверждение волновой природы микрочастиц

В 1927 г. Дэвиссон и Джермер провели эксперименты по изучению рассеяния электронов на монокристалле никеля. Схема эксперимента изображена на рис. 2.1, а.

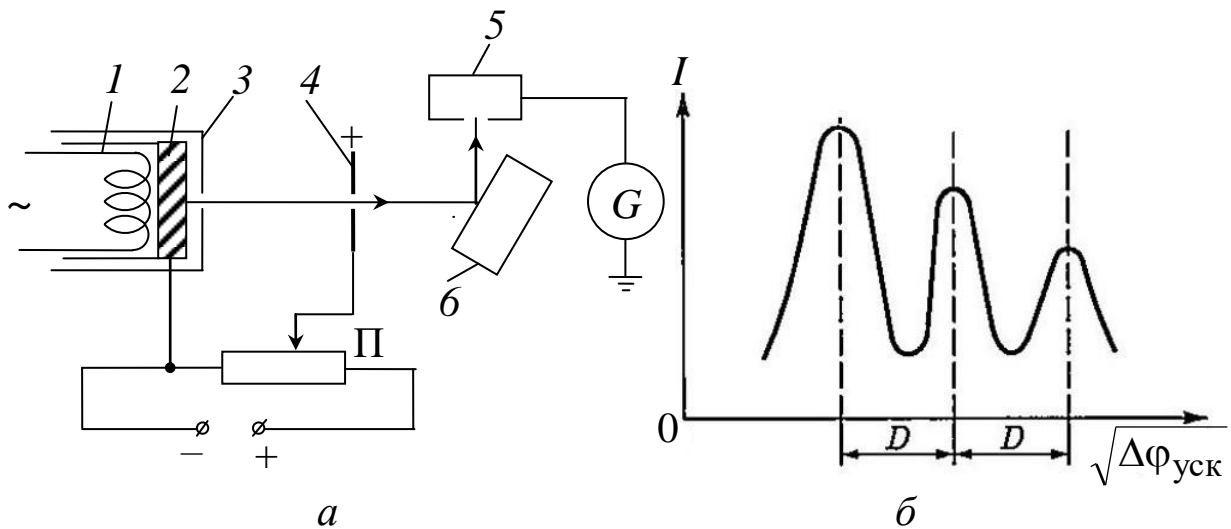


Рис. 2.1. а) Схема опыта Дэвиссона и Джермера по изучению рассеяния электронов на кристалле: 1 – спираль подогрева; 2 – катод; 3 – диафрагма; 4 – ускоряющий электрод; 5 – ловушка электронов; 6 – кристалл никеля; П – потенциометр; G – гальванометр; б) кривая зависимости  $I$  от  $\sqrt{\Delta\phi_{\text{уск}}}$

Ускоряющую разность потенциалов между катодом 2 и электродом 4 изменяли с помощью потенциометра П, тем самым изменялась кинетическая энергия летящих электронов. Гальванометр фиксировал ток в цепи. Изменение тока в цепи при изменении разгоняющего напряжения представлено на рис. 2.1, б.

Было экспериментально установлено, что при изменении разгоняющего напряжения максимумы тока находятся на расстоянии  $D$  друг от друга.

Поскольку дебройлевская длина волны электрона близка к длине волны рентгеновского электромагнитного излучения, то для описания наблюдаемого дифракционного явления дебройлевских волн можно в данном случае использовать для расчёта дифракционных максимумов формулу Вульфа – Брэггов, т. е.

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (2.3)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – порядок дифракционного максимума;  $d$  – постоянная кристаллической решётки;  $\theta$  – угол падения волнового луча относительно плоскости кристалла.

С учётом выражения для длины волны электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов, получим

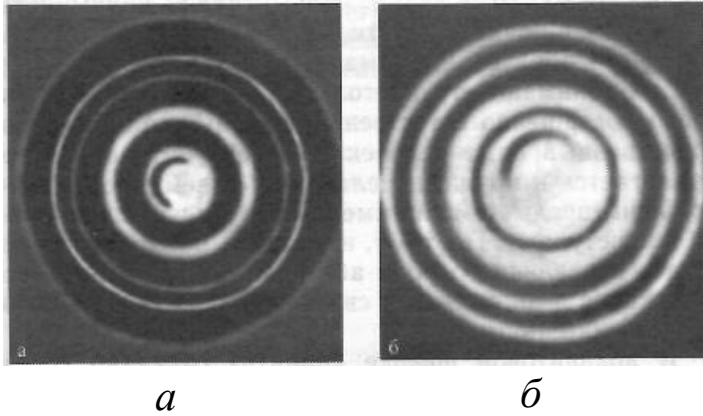
$$\sqrt{\Delta\phi} = n \frac{h}{\sqrt{2em \cdot 2d \sin \theta}} = nD, \quad (2.4)$$

где  $D = \frac{h}{\sqrt{2em \cdot 2d \sin \theta}}$  – постоянная при фиксированном угле падения электронов на кристалл, которая численно равна разности потенциалов, определяющей расстояние между соседними дифракционными максимумами. Поскольку изменение ускоряющей разности потенциалов изменяет также и длину падающей на кристалл волны, то была получена формула для определения положения максимумов для различных длин волн в дифракционной картине.

Опыты Штерна (1929 г.) по изучению рассеяния нейтральных легких атомов и молекул ( $\text{H}_2$ , He) подтвердили результаты эксперимента Дэвиссона и Джермера. Была получена чёткая дифракционная картина.

Томсон и Тартаковский изучали рассеяние пучка электронов, падающего на металлическую фольгу, т. е. на тонкую поликристаллическую структуру. Толщина фольги составляла порядка  $10^{-7}$  м. Постановка данного эксперимента соответствовала опыту Дебая и Шеррера по изучению дифракции рентгеновских волн. Полученная Тартаковским и Томсоном электронограмма (рис. 2.2, а) вполне сопоставима с рентгенограммой (рис. 2.2, б), полученной в аналогичных условиях [2].

По электронограмме Томсон рассчитал период кристаллической решётки металла фольги, через которую проходят электроны.



*Рис. 2.2. Электронограмма (а) и рентгенограмма (б), полученные на поликристаллической фольге*

Полученные результаты соответствовали результатам рентгеноструктурного анализа для данного металла.

Во всех экспериментах была подтверждена формула де Бройля для расчёта длины волны, соответствующей летящей микрочастице, а дифракционная картина этих волн соответствовала дифрак-

ционной картине рентгеновского электромагнитного излучения.

## § 2.4. Свойства волн де Бройля

Как установил де Бройль, движению свободного электрона можно поставить в соответствие волну длиной (2.1), (2.2)

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}.$$

Если из данного соотношения выразить импульс  $p$ , то получим

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot 2\pi}{2\pi\lambda}.$$

В этом соотношении  $\frac{h}{2\pi}$  обозначим через  $\hbar$ , т. е.  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

А соотношение  $\frac{2\pi}{\lambda}$  показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке  $2\pi$ , т. е. этот параметр носит название волновой параметр  $k$ . Введём волновой вектор  $\vec{k}$ , модуль которого  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Тогда импульс

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (2.5)$$

При движении волны и волнового пакета в общем случае необходимо различать групповую и фазовую скорости. Какой физический смысл имеют данные параметры волны применительно к волнам де Бройля?

Известно, что *фазовая скорость* плоской волны  $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$ , где  $\omega$  – циклическая частота. Тогда после несложных преобразований для волн де Бройля получим

$$v_{\phi} = \frac{\omega \hbar}{k \hbar} = \frac{E}{p}, \quad (2.6)$$

где  $E$  – энергия кванта;  $p$  – импульс частицы.

С учётом соотношения Эйнштейна  $E = mc^2$  фазовая скорость  $v_{\phi} = \frac{mc^2}{m v} = \frac{c^2}{v}$ . Данная дробь больше единицы, чего быть не может, поэтому фазовая скорость волн де Бройля не имеет физического смысла, относится к числу принципиально ненаблюдаемых величин и имеет чисто символическое значение.

*Групповая скорость* волнового пакета определяется соотношением

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.7)$$

Числитель и знаменатель умножим на постоянную Планка  $\hbar$ . Тогда

$$v_{\text{гр}} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

С учётом соотношения для свободной релятивистской частицы, связывающего её энергию и импульс,  $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c^2 p}{c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 m v}{mc^2} = v. \quad (2.8)$$

Таким образом, групповая скорость волн де Бройля равна скорости самой частицы. Так как групповая скорость характеризует скорость переноса энергии, то применительно к волнам де Бройля – это скорость самой частицы.

Какова природа волн де Бройля? Не вызывает сомнения, что это волны не электромагнитные. Действительно, при равномерном и прямолинейном движении электрон не излучает, но как частица может проявлять волновые свойства. Следовательно, волны

де Бройля имеют специфическую квантовую природу, которая не имеет аналогии с волнами в классической механике.

Из экспериментальных исследований Дэвиссона и Джермера, а также Тартаковского и Томсона по изучению дифракции электронов на кристаллических структурах следует, что с позиции волн де Бройля, соответствующих движущимся электронам, наличие максимумов в некоторых направлениях согласно формуле  $\sin \theta = n\lambda / 2d$  означает, что интенсивность волн в этом направлении максимальна и пропорциональна квадрату их амплитуды, т. е.  $I \sim \Psi^2$ .

С позиций движущихся электронов как частиц их количество в каждой точке пространства определяется плотностью вероятности попадания в эту точку за 1 с, т. е.

$$\rho_w = \frac{dw}{dV},$$

где  $w$  – вероятность;  $dV$  – элемент объёма.

Следовательно, квадрат модуля амплитуды волн де Бройля в данной точке пространства определяет вероятность обнаружения частицы в этой точке:

$$I \sim \rho_w = \frac{dw}{dV}. \quad (2.9)$$

Введём волновую функцию  $\Psi(x, y, z, t)$ , с помощью которой будем рассчитывать вероятность нахождения частицы в точке с координатами  $(x, y, z)$  в данный момент времени. На основании соотношения (2.9) запишем

$$\rho_w = \frac{dw}{dV} = |\Psi|^2.$$

Условием нормировки вероятности является соотношение

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1,$$

т. е. частица присутствует во всём пространстве, является событием достоверным.

## § 2.5. Соотношение неопределённостей

Общим свойством для волнового пакета, а не только для квантовой теории справедливо соотношение [3]:

$$\Delta x \Delta k \geq 1, \quad (2.10)$$

где  $\Delta x$  – интервал координат;  $\Delta k$  – интервал волновых чисел применительно к волновому пакету.

Соотношение неопределённостей следует непосредственно из (2.10), если принять во внимание квантово-механическую связь между волновым числом и импульсом, которая следует из соотношения де Бройля  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ . Тогда очевидно, что

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (2.11)$$

Из (2.5) следует, что определённому импульсу соответствует и определённое волновое число. Но применительно к волновому пакету нужно иметь в виду интервалы волновых чисел и импульсов. Квантовая механика имеет вероятностное истолкование, поэтому в каждом случае определяется вероятность нахождения частицы в интервале координат  $\Delta x$  и её импульсов  $\Delta p_x$ .

В классической механике частица движется по определённой траектории, так что в любой момент времени известны и координаты точки, и её импульс. Современные средства измерений позволяют измерять данные параметры с высокой степенью точности.

Для микрочастиц неправомерно говорить о движении по определённой траектории и одновременно точных значениях координаты и импульса. Действительно, импульс микрочастицы выражается через длину волны (соотношение де Бройля), следовательно, понятие «длины волны» в определённой точке пространства лишено физического смысла. Отсюда следует, что частица с определённым импульсом имеет неопределённую координату и наоборот.

В 1927 г. В. Гейзенберг сформулировал соотношение неопределённостей:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar; \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar; \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  – неопределённость координат, т. е. это интервалы соответствующих координат, в которых находится микрочастица;  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$ ,  $\Delta p_z$  – неопределённость импульсов, т. е. это интервалы, в которых находятся проекции импульса по соответствующим осям.

Выражение (2.12) нужно понимать так, что одновременные значения соответствующих координат и проекций импульсов на оси могут быть определены с некоторой степенью точности. С позиций



квантовой механики нахождение микрочастицы в интервале  $\Delta x$  означает, что квадрат амплитуды волновой функции, т. е.  $|\Psi|^2$ , везде равен нулю, кроме интервала  $\Delta x$ . Следовательно, если импульс микрочастицы задан интервалом  $\Delta p_x$ , то с вероятностью, равной единице, можно утверждать, что сама микрочастица может находиться в интервале  $\Delta x$ , следовавшем из соотношения Гейзенберга

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Если же координата микрочастицы точно известна, т. е.  $\Delta x = 0$ , то соответствующая проекция её импульса полностью не определена, т. е.  $\Delta p_x \rightarrow \infty$  и наоборот.

Следовательно, для микрочастиц невозможно одновременно измерить координату и проекцию импульса на данную ось с любой степенью точности. Это является следствием специфики микрообъектов и не связано с несовершенством методов измерений.

В качестве примера рассмотрим применение соотношений неопределённостей для макрочастиц и микрочастиц.

1. Пусть масса макрочастицы  $m = 1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$ , неопределённость её скорости вдоль оси  $x$  равна  $\Delta v_x = 10^{-6} \text{ м/с}$ , неопределённость координаты  $\Delta x = 10^{-6} \text{ м}$ . Тогда неопределённость импульса макрочастицы  $\Delta p_x = m \Delta v_x = 10^{-9} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ , а произведение  $\Delta x \Delta p_x = 10^{-15} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ . Так как полученная величина много больше (на 19 порядков) значения  $\frac{\hbar}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , то следует вывод, что волновую природу данной макрочастицы можно не учитывать.

2. Пусть электрон в атоме движется по боровской орбите. Масса электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , а неопределённость его скорости равна  $\Delta v_x = 10^7 \text{ м/с}$ . Тогда неопределённость проекции импульса на ось  $x$  равна  $\Delta p_x = m_e \Delta v_x = 9,1 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ , а неопределённость координаты  $\Delta x = 10^{-10} \text{ м}$ , т. е. электрон находится в атоме. Следовательно,  $\Delta x \Delta p_x = 10^{-10} \cdot 9,1 \cdot 10^{-24} = 9,1 \cdot 10^{-34} \text{ (Дж} \cdot \text{с)}$ , что соизмеримо с величиной  $\frac{\hbar}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , поэтому можно сделать вывод, что волновую природу электрона в атоме необходимо учитывать.

В квантовой механике рассматривается также соотношение неопределённостей для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где  $\Delta E$  – неопределённость энергии системы;  $\Delta t$  – неопределённость длительности процесса измерений.

Из данного выражения следует, что если атом находится в возбуждённом состоянии в течение времени  $\Delta t$ , то энергия атома будет не меньше, чем

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Отсюда следует, что частота излучения фотона также имеет неопределённость:

$$\Delta \nu \geq \frac{\Delta E}{h}.$$

Следовательно, линии спектра атомов должны характеризоваться частотой  $\left( \nu \pm \frac{\Delta E}{h} \right)$  и должны быть размыты. Если измерить ширину спектральной линии, то можно оценить порядок времени существования атома в возбуждённом состоянии.

## § 2.6. Уравнение Шредингера

В классической механике уравнения Ньютона позволяют по начальным условиям найти для любого момента времени координату движущейся материальной точки и её импульс.

Для частиц в микромире применяют статистическое истолкование волн де Бройля, соответствующих движущейся частице, и соотношения неопределённостей, которые указывают на то, что уравнения движения в квантовой механике должны объяснять теоретически наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц.

Введём волновую функцию  $\Psi(x, y, z, t)$ , которая задаёт состояние частицы в пространстве в данный момент времени.

Основное уравнение квантовой механики было получено Э. Шредингером в 1926 г. Оно является постулатом. Его справедливость доказывается тем, что результаты, полученные с его помощью в атомной и ядерной физике, хорошо согласуются с опытом. Уравнение Шредингера для волновой функции

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi, \quad (2.13)$$

где  $i$  – мнимая единица, т. е. равна  $i = \sqrt{-1}$ ;  $m$  – масса частицы;  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия частицы, движущейся в силовом поле, являющаяся функцией координат и времени;  $\Psi$  – искомая волновая функция.

Уравнение (2.13) справедливо для нерелятивистской частицы, т. е. движущейся со скоростью  $v \ll c$  много меньше скорости света в вакууме. Для случая  $v \approx c$  уравнение (2.13) заменяется релятивистским уравнением Дирака.

При этом на функцию  $\Psi$  накладываются следующие условия:

1) функция  $\Psi$  должна быть конечной, однозначной и непрерывной, а также иметь непрерывные первые производные по координатам и времени;

2) интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz$  должен быть конечным.

Описание *временного* состояния частиц в микромире не является актуальным, поэтому решение уравнения Шредингера (2.13) должно быть заменено на решение стационарного уравнения, не содержащего времени. Для этого функцию  $\Psi$  представим произведением двух функций, одна из которых будет зависеть только от координат, вторая – от времени, т. е.

$$\Psi(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z) \varphi(t). \quad (2.14)$$

Функцию  $\Psi$  по выражению (2.14) подставим в (2.13) и получим

$$i\hbar \hat{\Psi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi \Delta \hat{\Psi} + U(x, y, z) \hat{\Psi} \varphi. \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) потенциальная функция  $U$  не зависит от времени.

Разделив обе части равенства (2.15) на произведение  $\hat{\Psi} \varphi$ , получим

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\hat{\Psi}} \Delta \hat{\Psi} - U(x, y, z) = -i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.16)$$

В равенстве (2.16) левая часть зависит только от координат, а правая – от времени, следовательно, они не зависят друг от друга и равны постоянной величине, т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -W; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\hat{\Psi}} \Delta \hat{\Psi} - U = -W. \end{array} \right. \quad (2.17.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\hat{\Psi}} \Delta \hat{\Psi} - U = -W. \end{array} \right. \quad (2.17.2)$$

Найдём решение уравнения (2.17.1). После упрощений оно примет вид

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} W dt,$$

а после взятия неопределённого интеграла и обозначения  $\varphi(0)$ , т. е. значения данной функции при  $t = 0$  через  $\varphi_0$ , получим

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{iWt}{\hbar}}. \quad (2.18)$$

Если поставить движущейся частице в соответствие волну, то из (2.18) следует, что  $\frac{W}{\hbar} = \omega$ , т. е. представляет циклическую частоту данной волны, т. е. состояние частицы в зависимости от времени описывается периодической функцией.

Функции  $\hat{\Psi}(x, y, z)$ , удовлетворяющие уравнению (2.17.2), называют *собственными функциями*, а значения  $W$  – *собственными значениями* энергии.

Далее будет показано, что  $W$  является полной энергией частицы, обладающей потенциальной энергией  $U(x, y, z)$ . Решение уравнения (2.17.2) в каждом случае зависит от граничных условий.

Решение уравнения Шредингера (2.13) в общем виде можно записать следующим образом:

$$\Psi(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z) e^{-\frac{iWt}{\hbar}}, \quad (2.19)$$

где  $\hat{\Psi}(x, y, z)$  – функция координат, представляющая решение стационарного уравнения (2.17.2) для конкретных граничных условий.

В качестве примера рассмотрим решение стационарного уравнения Шредингера (2.17.2) для некоторых условий.

## § 2.7. Решение уравнения Шредингера для случая движения свободной частицы вдоль оси

Свободная частица движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . Стационарное уравнение Шредингера (2.17.2) для данной частицы запишется следующим образом:

$$\frac{d^2\hat{\Psi}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}W\hat{\Psi} = 0, \quad (2.20)$$

так как  $\frac{\partial^2\hat{\Psi}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\hat{\Psi}}{\partial z^2} = 0$ , а потенциальная энергия  $U = 0$ , т. е. не зависит от координаты  $x$ .

Однородное дифференциальное уравнение второго порядка (2.20) имеет решение:

$$\hat{\Psi} = A e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mW}x} + B e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mW}x}, \quad (2.21)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые постоянные.

С учётом решения уравнения (2.17.1) для функции  $\varphi(t)$  решение полного уравнения Шредингера (2.13) можно представить в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z)\varphi(t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(Wt - \sqrt{2mW}x)} + B e^{\frac{i}{\hbar}(Wt + \sqrt{2mW}x)}. \quad (2.22)$$

С позиций волновой теории оба члена в решении (2.22) представляют собой две плоские монохроматические волны, имеющие одинаковую частоту  $\omega = \frac{W}{\hbar}$ . Но одна из этих волн движется в положительном направлении оси  $x$ , а вторая – в обратном. Действительно, выражение для плоских волн можно записать:

$$\Psi = A e^{-i(\omega t \pm kx)}, \quad (2.23)$$

где « $-kx$ » берётся для прямой волны, « $+kx$ » – для обратной волны.

Сопоставляя (2.22) и (2.23), можно утверждать, что волновое число  $k$  для свободной частицы, движущейся вдоль оси  $x$ , равно

$$k = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}. \quad (2.24)$$

Возведём обе части выражения (2.24) в квадрат и выразим величину  $W$ :

$$W = \frac{k^2\hbar^2}{2m}. \quad (2.25)$$

Учитывая квантово-механическое соотношение  $p = k\hbar$ , можно утверждать, что

$$W = \frac{p_x^2}{2m}, \quad (2.26)$$

т. е. в данном случае имеем обычную зависимость полной энергии частицы от импульса. Энергия свободной частицы может принимать любые значения, а её энергетический спектр является непрерывным.

### § 2.8. Решение уравнения Шредингера для случая движения частицы в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими бортами

Пусть частица находится в *потенциальной яме*, где её потен-

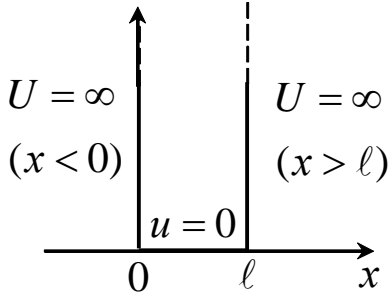


Рис. 2.3. Схема потенциальной ямы, в которой потенциальная энергия частицы равна нулю

циальная энергия равна нулю (рис. 2.3). Но яма имеет бесконечно высокие борты и при  $x < 0$  и  $x > \ell$ , т. е. за пределами ямы, потенциальная энергия равна бесконечности.

Граничные условия для потенциальной энергии можно записать следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0; \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \ell; \\ \infty & \text{при } x > \ell. \end{cases} \quad (2.27)$$

А стационарное уравнение Шредингера (2.17.2) примет вид

$$\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \hat{\Psi} = 0. \quad (2.28)$$

Поскольку вероятность нахождения частицы вне потенциальной ямы равна нулю, то примем, что функция  $\hat{\Psi}$  на её границах также равна нулю, т. е.  $\hat{\Psi}(0) = \hat{\Psi}(\ell) = 0$ . В пределах потенциальной ямы (ящика)  $U = 0$ , поэтому уравнение (2.28) переписывается так:

$$\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dx^2} + \frac{2mW}{\hbar^2} \hat{\Psi} = 0. \quad (2.29)$$

С учётом соотношения для волнового числа  $k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$  уравнение (2.29) можно переписать:

$$\frac{d^2\hat{\Psi}}{dx^2} + k^2\hat{\Psi} = 0. \quad (2.30)$$

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (2.30) можно представить следующим образом:

$$\hat{\Psi}(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (2.31)$$

Если граничное условие  $\hat{\Psi}(0) = 0$ , то из (2.31) следует, что данное условие будет выполняться, если  $B = 0$ . Действительно,  $A \sin(k \cdot 0) = 0$ , а  $B \cos(k \cdot 0)$  будет равно нулю только в случае  $B = 0$ . Решение (2.31) можно переписать следующим образом:

$$\hat{\Psi}(x) = A \sin kx. \quad (2.32)$$

В выражении (2.32) постоянную  $A$  найдём из граничных условий, а также учтём, что на второй границе потенциальной ямы функция  $\hat{\Psi}(\ell)$  также равна нулю, т. е.

$$\hat{\Psi}(\ell) = A \sin k\ell = 0. \quad (2.33)$$

При каких значениях  $k\ell$  будет выполняться условие (2.33)? Для синуса, это очевидно, должно следовать:

$$k\ell = n\pi, \quad (2.34)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , т. е. целые числа. Тогда  $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ . Учитывая со-

отношение  $k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$ , получим после приравнивания правых частей данных соотношений

$$W = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}. \quad (2.35)$$

С учётом выражения (2.35) можно сделать вывод, что решение стационарного уравнения Шредингера (2.17.2) для частицы в потенциальной яме существует только в случаях, когда собственные значения полной энергии частицы могут принимать дискретные значения, зависящие от целого числа  $n$ . Говорят в этом случае, что энергия частицы квантуется, а число  $n$ , определяющее уровни энергии, называется *главным квантовым числом*. Таким образом, решением стационарного уравнения Шредингера является функция

$$\hat{\Psi}(x) = A \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (2.36)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования, которую можно найти из условия нормировки:

$$\int_0^{\ell} |\hat{\Psi}(x)|^2 dx = 1,$$

т. е. что вероятность нахождения частицы в потенциальной яме равна 1.

Тогда  $\int_0^{\ell} A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{\ell} x dx = 1$ , откуда, после перехода к функции

двойного угла и взятия интеграла, получим  $A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$ . Следовательно,

$$\hat{\Psi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (2.37)$$

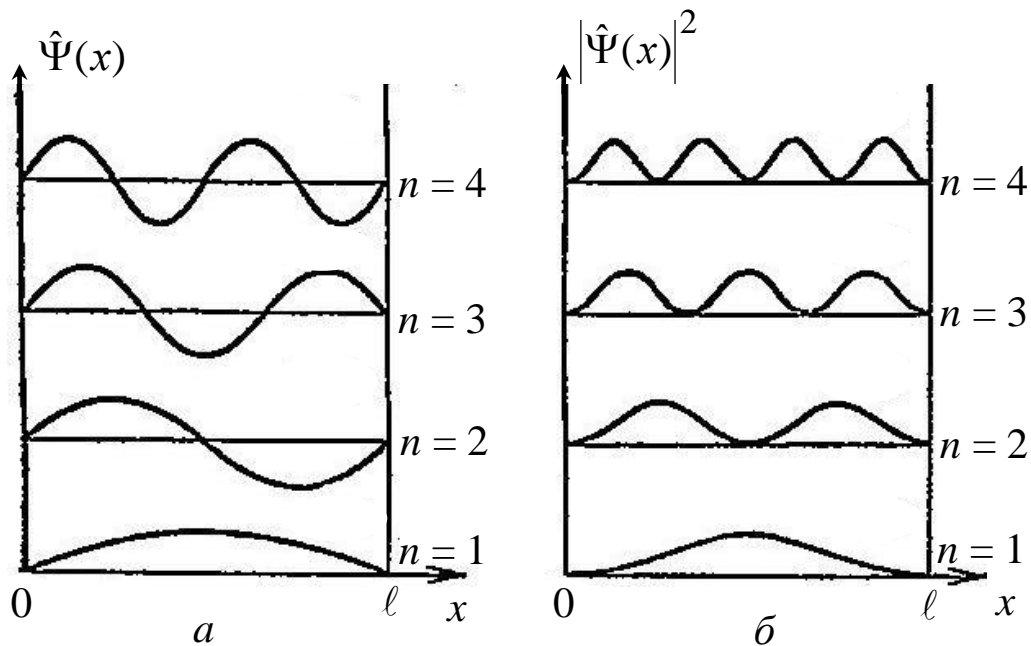


Рис. 2.4. Изменение функции  $\hat{\Psi}(x)$  (а) и вероятности нахождения частицы (б) на различных энергетических уровнях  $n$  в зависимости от координаты  $x$

Таким образом, движение частицы внутри потенциальной ямы описывается плоской волной де Бройля.

Рассчитаем величину интервала между соседними энергетическими уровнями:



$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} (2n+1) \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{m\ell^2} n, \quad (2.38)$$

где  $n$  – номер нижележащего энергетического уровня.

Оценим применение формулы (2.38) к макро- и микрообъектам.

1. Пусть частица – свободный электрон – находится в металле, размер которого  $\ell = 10^{-1}$  м. Разница между соседними энергетическими уровнями в этом случае составляет порядка  $\Delta W \approx 10^{-35} n$  Дж. То есть энергетические уровни расположены очень близко, поэтому спектр излучения в данном случае будет сплошным.

2. Рассмотрим электрон в составе атома. Размер  $\ell = 10^{-10}$  м, а энергетическая разница между уровнями составляет  $\Delta W \approx 10^2 n$  эВ =  $10^{-17} n$  Дж. В этом случае спектр излучения будет линейчатым.

Исходя из выражения (2.35) можно утверждать, что минимальная энергия частицы в потенциальной яме равна

$$W_{\min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m \ell^2}. \quad (2.39)$$

При больших значениях квантовых чисел энергетический интервал между соседними уровнями будет незначителен. Следовательно, уровни расположены очень тесно. В данном случае будет выполняться принцип *соответствия*, согласно которому законы квантовой механики должны переходить в законы классической физики при определённых условиях (больших значениях квантовых чисел).

## § 2.9. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер

В общем случае электрон, движущийся слева к границе барьера с резким изменением потенциальной энергии (рис. 2.5), можно представить в виде волнового пакета. Отражённая часть волнового пакета будет равна вероятности отражения электрона, а прошедшая часть – вероятности его прохождения через барьер. Падающую волну можно представить следующей волновой функцией:

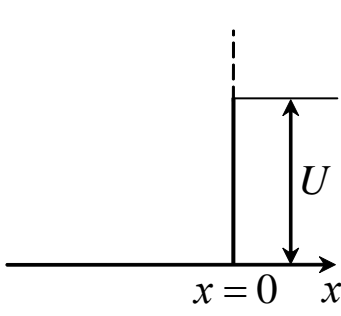


Рис. 2.5. Схема барьера для электрона, приближающегося к нему слева

$$\hat{\Psi}' = B e^{\frac{i\sqrt{2mW}x}{\hbar}}, \quad (2.40)$$

где  $W$  – полная энергия электрона.

А отражённую волну представим функцией

$$\hat{\Psi}'' = C e^{\frac{-i\sqrt{2mW}x}{\hbar}}, \quad (2.41)$$

которая по сравнению с (2.40) идёт в обратном направлении.

Тогда полную волну слева от барьера можно представить суммой падающей и отражённой волн, т. е. функцией

$$\hat{\Psi}_1 = \hat{\Psi}' + \hat{\Psi}'' = B e^{\frac{i\sqrt{2mW}x}{\hbar}} + C e^{\frac{-i\sqrt{2mW}x}{\hbar}}. \quad (2.42)$$

Волна, прошедшая через барьер:

$$\hat{\Psi}_2 = A e^{\frac{-i\sqrt{2m(W-U)}x}{\hbar}}. \quad (2.43)$$

Постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ , являющиеся амплитудами соответствующих волн, можно найти из граничных условий, согласно которым волновая функция и её первая производная непрерывны в точке  $x = 0$ , т. е. на границе барьера.

Берём производные по  $x$  от выражений (2.42) и (2.43) и получаем

$$\frac{d\hat{\Psi}_1}{dx} = \frac{i\sqrt{2mW}}{\hbar} \left( B e^{\frac{i\sqrt{2mW}x}{\hbar}} - C e^{\frac{-i\sqrt{2mW}x}{\hbar}} \right); \quad (2.44)$$

$$\frac{d\hat{\Psi}_2}{dx} = \frac{i\sqrt{2m(W-U)}}{\hbar} A e^{\frac{-i\sqrt{2m(W-U)}x}{\hbar}}. \quad (2.45)$$

При  $x = 0$  выражения (2.44) и (2.45) равны, а также равны выражения (2.42) и (2.43). Получаем два уравнения для постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$\begin{cases} A = B + C; \\ \sqrt{2m(W-U)}A = \sqrt{2mW}(B - C). \end{cases} \quad (2.46)$$

Решения данной системы относительно  $A$  и  $C$  запишем следующим образом:

$$A = \frac{2\sqrt{2mW}B}{\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)}}; \quad (2.47)$$

$$C = \frac{\sqrt{2m(W-U)} - \sqrt{2mW}}{\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)}} B.$$

В выражениях (2.47) амплитуды проходящей волны  $A$  и отражённой волны  $C$  выражены через амплитуду падающей на барьер волны  $B$ , её полную энергию  $W$  и высоту барьера  $U$ . Доля частиц (электронов), проходящих через барьер, равна отношению соответствующих плотностей вероятности, т. е. отношению интенсивностей проходящей и падающей волн:

$$D = \frac{A^2}{B^2} = \frac{4 \cdot 2mW}{(\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)})^2} = \frac{8mW}{(\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)})^2}, \quad (2.48)$$

где  $D$  – коэффициент прозрачности барьера.

Отражательную способность барьера рассчитаем по отношению интенсивностей отражённой и падающей волн:

$$R = \frac{|C|^2}{|B|^2} = \frac{(\sqrt{2mW} - \sqrt{2m(W-U)})^2}{(\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)})^2}. \quad (2.49)$$

Если  $\sqrt{2mW} \approx \sqrt{2m(W-U)}$ , то отражательная способность барьера равна нулю и он не оказывает влияние на прохождение волны. Это наблюдается в случае, когда высота *потенциального барьера* равна нулю. Если же  $\sqrt{2m(W-U)}$  стремится к нулю, т. е. высота барьера примерно равна полной энергии частицы, то коэффициент отражения стремится к единице. Отражение электронов от барьеров потенциальной энергии является чисто квантово-механическим явлением, которое вытекает из волновых свойств частиц. Оно наблюдается в том случае, если резкие изменения потенциальной энергии наблюдаются на расстояниях, соизмеримых с длиной волны де Бройля.

Волна де Бройля, описывающая состояние частицы в потенциальном ящике, на его границе должна вести себя подобно волне на границе двух сред с различными значениями показателей  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $n$ , т. е. на границе должна возникнуть преломлённая волна и отражённая. Волна де Бройля должна следовать этому правилу, но это противоречит положениям классической механики, согласно которым частица не может покинуть пределы потенциальной ямы, если её

энергия меньше его глубины. Для этого ей нужно сообщить дополнительную энергию. А квантовая механика допускает прохождение частицы сквозь потенциальный барьер, т. е. вероятность этого события больше нуля. Это явление получило название *туннельного эффекта*.

Коэффициент прозрачности барьера  $D$  можно представить как отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волны. Он определяет вероятность прохождения частицы через барьер. Используя результаты расчёта для волн де Бройля, приведённые в предыдущих параграфах, можно получить для коэффициента прозрачности  $D$  следующее выражение:

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} \ell}, \quad (2.50)$$

где  $U_0$  – глубина потенциальной ямы;  $W$  – энергия частицы;  $\ell$  – ширина ямы.

Как следует из выражения (2.50), вероятность прохождения частицы через барьер зависит от его ширины и разности энергий ( $U_0 - W$ ). Если, например, коэффициент прозрачности при некоторых их значениях равен 0,1, то увеличение ширины всего в два раза приводит к тому, что коэффициент прозрачности станет равным  $D = (0,1)^2 = 0,01$ , т. е. уменьшится в десять раз.

В случае потенциального барьера произвольной формы формула (2.50) должна быть заменена более общей формулой [2]:

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U_0 - W)} dx}, \quad (2.51)$$

где  $a, b$  – координаты границ барьера.

Туннельный эффект является квантовым явлением, не имеющим аналогов в классической физике. В квантовой механике деление *полной* энергии на *кинетическую* и *потенциальную* не имеет смысла, так как противоречит принципу неопределённости. Действительно, если частица имеет определённую потенциальную энергию, то, следовательно, она находится в определённой точке пространства. Но координата и импульс не могут быть одновременно определены.

Экспериментально туннельный эффект получил подтверждение в явлении автоэлектронной эмиссии электронов из металла. Выход электронов осуществляется посредством электрического по-

ля, напряжённость которого была значительно меньше величины, следовавшей из классических представлений.

### Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте гипотезу де Бройля. Для каких объектов она имеет смысл?
2. Какие эксперименты подтверждают гипотезу де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме свойств вещества?
3. Что характеризует групповая скорость волн де Бройля?
4. Почему невозможно одновременно точно определить координату и соответствующую проекцию импульса микрочастицы?
5. Как, исходя из соотношения неопределённостей, объяснить наличие естественной ширины спектральной линии?
6. В чём состоит физический смысл волновой функции частицы?
7. Какой вид имеет уравнение Шредингера для частицы, движущейся в стационарном силовом поле?
8. Что такое плотность вероятности пребывания частицы в данной области?
9. Какой вид имеет волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме?
10. Чем отличаются волновые функции, описывающие частицы в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме на различных энергетических уровнях?

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Электрон в атоме водорода перешёл с четвёртого энергетического уровня на второй. Определить энергию испущенного при этом фотона.

*Решение.* Для определения энергии фотона воспользуемся серийной формулой для водородоподобных ионов:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (2.52)$$

где  $\lambda$  — длина волны фотона;  $R$  — постоянная Ридберга;  $Z$  — заряд ядра в относительных единицах (при  $Z = 1$  формула переходит в серийную формулу для водорода);  $n_1$  — номер орбиты, на которую пе-

решёл электрон;  $n_2$  – номер орбиты, с которой перешёл электрон ( $n_1$  и  $n_2$  – главные квантовые числа).

Энергия фотона  $\varepsilon$  выражается формулой

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

Умножив обе части равенства (2.52) на  $hc$ , получим выражение для энергии фотона:

$$\varepsilon = Rhc \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Так как  $Rhc$  есть энергия ионизации  $E_i$  атома водорода, то

$$\varepsilon = E_i \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Выполним вычисления:  $E_i = 13,6$  эВ;  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 4$ :

$$\varepsilon = 13,6 \cdot 1^2 \left( \frac{1}{2_1^2} - \frac{1}{4_2^2} \right) = 2,55(\text{эВ}) = 4,08 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

**Пример 2.** Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошёл ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1)  $U_1 = 51$  В; 2)  $U_2 = 510$  кВ.

*Решение.* Длина волны де Бройля для частицы зависит от её импульса  $p$  и определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.53)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна её кинетическая энергия  $W$ . Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше её энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы) различна.

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0W}, \quad (2.54)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

В релятивистском случае

$$p = \frac{\sqrt{(2E_0 + W)W}}{c}, \quad (2.55)$$

где  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя частицы.

Формула (2.53) с учётом соотношений (2.54) и (2.55) запишется:

- в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 W}}; \quad (2.56)$$

- в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + W)W}}. \quad (2.57)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условиях задачи разности потенциалов  $U_1 = 51$  В и  $U_2 = 510$  кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (2.56) или (2.57) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ :

$$W = eU.$$

В первом случае  $W_1 = eU_1 = 51$  эВ  $= 0,51 \cdot 10^{-4}$  МэВ, что на четыре порядка меньше энергии покоя электрона  $E_0 = m_0 c^2 = 0,51$  МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (2.56). Для упрощения расчётов заметим, что  $W_1 = 10^{-4} m_0 c^2$ . Подставив это выражение в формулу (2.56), перепишем её в виде

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} \cdot m_0 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{h}{m_0 c}.$$

Подставляя численные данные, получим

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} = 1,72 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Во втором случае кинетическая энергия

$$W_2 = eU_2 = 510 \text{ кэВ} = 0,51 \text{ МэВ},$$

т. е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (2.57). Учитывая, что  $W_2 = 0,51 \text{ МэВ} = m_0 c^2$ , по формуле (2.57) находим

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{(2m_0 c^2 + m_0 c^2)m_0 c^2}} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0 c}.$$

Произведём вычисления:

$$\lambda_2 = \frac{2,43}{\sqrt{3}} = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

**Пример 3.** Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка  $W = 10$  эВ. Используя соотношение неопределённостей, оценить минимальные линейные размеры атома.

*Решение.* Соотношение неопределённостей для координаты и проекции импульса имеет вид

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (2.58)$$

где  $\Delta x$  – неопределённость координаты частицы (в данном случае электрона);  $\Delta p_x$  – неопределённость импульса частицы (электрона);  $\hbar$  – постоянная Планка.

Из соотношения неопределённостей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределённым становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры  $\ell$ , тогда электрон в атоме будет находиться где-то в пределах области с неопределённостью

$$\Delta x = \ell / 2.$$

Соотношение неопределённостей (2.58) можно записать в этом случае в виде

$$(\ell / 2) \Delta p_x \geq \hbar,$$

откуда

$$\ell \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \quad (2.59)$$

Физически разумная неопределённость импульса  $\Delta p_x$  во всяком случае не должна превышать значения самого импульса  $p_x$ , т. е.  $\Delta p_x \leq p_x$ . Импульс  $p_x$  связан с кинетической энергией  $W$  соотношением  $p_x = \sqrt{2mW}$ . Заменим  $\Delta p_x$  значением  $\sqrt{2mW}$  (такая замена не увеличит  $\ell$ ). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$\ell_{\min} = 2\hbar / \sqrt{2mW}. \quad (2.60)$$

Проверим, даёт ли полученная формула единицу длины. Для этого в правую часть формулы (2.60) вместо символов величин подставим их единицы измерения:



$$\begin{aligned}\frac{[\hbar]}{([m][T])^{1/2}} &= \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{(1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж})^{1/2}} = \left( \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}} \right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = \\ &= \left( \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}} \right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ м},\end{aligned}$$

т. е. получили, что единицей измерения  $\ell_{\min}$  является метр.

Произведём вычисления:

$$\ell_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

**Пример 4.** Волновая функция  $\hat{\Psi}(x) = \sqrt{2/\ell} \sin \frac{\pi}{\ell} x$  описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной  $\ell$ . Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале  $\Delta\ell = 0,01\ell$  в двух случаях: 1) вблизи стенки ( $0 \leq x \leq \Delta\ell$ ); 2) в средней части ящика  $\left( \frac{\ell}{2} - \frac{\Delta\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2} + \frac{\Delta\ell}{2} \right)$ .

*Решение.* Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале  $dx$  (от  $x$  до  $x + dx$ ), пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние, равна

$$dw = |\hat{\Psi}(x)|^2 dx.$$

В первом случае искомая вероятность найдётся интегрированием в пределах от 0 до  $0,01\ell$  (рис. 2.6):

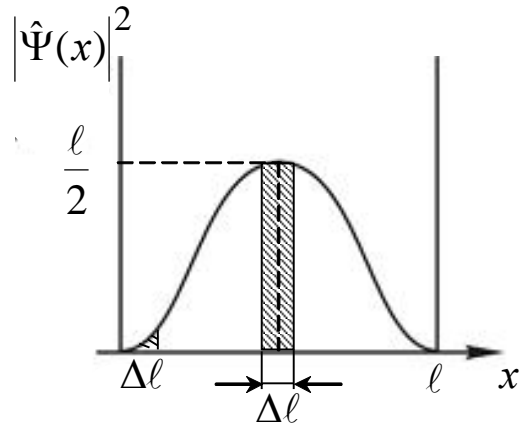


Рис. 2.6. К решению примера 4

$$w = \frac{2}{\ell} \int_0^{0,01\ell} \sin^2 \frac{\pi}{\ell} x dx. \quad (2.61)$$

Так как  $x$  изменяется в интервале  $0 \leq x \leq 0,01\ell$  и, следовательно,  $\pi x / \ell \leq 1$ , справедливо приближённое равенство

$$\sin^2 \frac{\pi}{\ell} x \approx \left( \frac{\pi}{\ell} x \right)^2.$$

С учётом этого выражения (2.61) примет вид

$$w = \frac{2}{\ell} \int_0^{0,01\ell} \left( \frac{\pi}{\ell} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{\ell^3} \int_0^{0,01\ell} x^2 dx.$$

После интегрирования получим

$$w = \frac{2}{3} \pi^2 \cdot 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи её максимума в заданном малом интервале ( $\Delta\ell = 0,01\ell$ ) практически не изменяется. Тогда искомую вероятность можно определить из выражения

$$w = |\hat{\Psi}(\ell/2)|^2 \Delta\ell$$

или

$$w = \frac{2}{\ell} \left( \sin \frac{\pi \ell}{\ell 2} \right)^2 \Delta\ell = \frac{2}{\ell} 0,01\ell = 0,02.$$

**Пример 5.** Среднее время жизни возбуждённых состояний атома составляет 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии ( $\lambda = 0,7$  мкм), соответствующую переходу между возбуждёнными уровнями атома.

*Решение.* При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия, равная

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_k, \quad (2.62)$$

где  $E_n$  и  $E_k$  – энергетические уровни атома;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $c$  – скорость света в вакууме;  $h$  – постоянная Планка.

Из (2.62) следует, что неопределённость длины волны  $\Delta\lambda$  излучения связана с неопределённостью энергии уровней  $\Delta E_n$  и  $\Delta E_k$  атома соотношением

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \Delta E_n + \Delta E_k. \quad (2.63)$$

Согласно соотношению неопределённости Гейзенберга:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (2.64)$$

где  $\Delta t$  – неопределённость момента времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое.

Поскольку неопределённость  $\Delta t$  не превышает среднее время жизни  $\tau$  возбуждённого состояния атома, минимальная неопределённость энергии возбуждённых уровней, согласно (2.64), равна

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \quad (2.65)$$

Из (2.63) с учётом (2.65) найдём минимальную неопределённость длины волны излучения, которая называется *естественной шириной спектральной линии*:

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left( \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k} \right). \quad (2.66)$$

Для возбуждённых состояний с одинаковым временем жизни  $\tau_n = \tau_k = \tau$  имеем

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{\pi c \tau}. \quad (2.67)$$

Подставляя в (2.68) числовые значения, получим

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{(7 \cdot 10^{-7})^2}{3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 5,2 \cdot 10^{-14} \text{ (м)}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дебройлевскую длину волны  $\lambda$  для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

2. Определить длину волны  $\lambda$  де Бройля электронов, бомбардирующих антиматерию рентгеновской трубки, если граница сплошного рентгеновского спектра приходится на длину волны  $\lambda = 3 \text{ нм}$ .

3. Электрон движется по окружности радиусом  $R = 0,5 \text{ см}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 8 \text{ мТл}$ . Определить длину волны  $\lambda$  де Бройля электрона.

4. Какой кинетической энергией  $W_k$  должен обладать электрон, чтобы дебройлевская длина волны  $\lambda$  электрона была равна его комптоновской длине волны  $\lambda_c$ ?

5. Масса  $m$  движущегося электрона в два раза больше массы покоя  $m_0$ . Определить длину волны  $\lambda$  де Бройля для такого электрона.

6. Электрон с кинетической энергией  $W_{\text{кин}} = 10$  эВ находится в металлической пылинке диаметром  $d = 1,5$  мкм. Оценить относительную неопределённость  $\frac{\Delta v_x}{v_x}$ , с которой может быть найдена скорость электрона.

7. Вычислить дебройлевские длины волн электрона, протона и атома урана, если известно, что их кинетические энергии одинаковы и равны 100 эВ.

8. Во сколько раз дебройлевская длина волны  $\lambda$  частицы меньше неопределённости  $\Delta x$  её координаты, которая соответствует относительной неопределённости проекции импульса  $\frac{\Delta p_x}{p_x} = 2\%$ ?

9. Оценить с помощью соотношения неопределённостей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося в области, размер которой  $\ell \sim 10^{-10}$  м.

10. Предполагая, что неопределённость координаты  $\Delta x$  движущейся частицы равна дебройлевской длине волны  $\lambda$ , определить относительную неопределённость  $\Delta p_x/p_x$  импульса этой частицы.

11. Атом испустил фотон с длиной волны  $\lambda = 800$  нм. Продолжительность излучения  $\tau = 10$  нс. Определить наибольшую точность  $\Delta\lambda/\lambda$ , с которой может быть измерена длина волны излучения.

12. Используя соотношение неопределённостей  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ , оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома  $\ell \approx 10^{-9}$  м.

13–17. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме (рис. 2.7) шириной  $\ell$ . Для состояния частицы, характеризуемого квантовым числом  $n$  (табл. 2.1), определить плотность вероятности  $|\hat{\Psi}(x)|^2$  обнаружения частицы в точке с координатой  $x$ , веро-

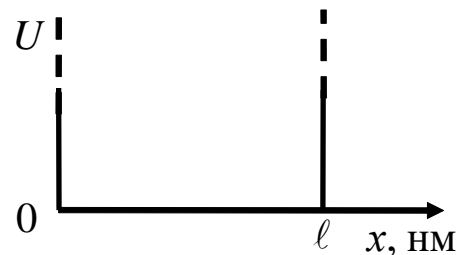


Рис. 2.7. К решению задач 13–17

ятность  $w$  нахождения частицы в интервале  $\Delta x$  и энергию  $W$  частицы в указанном состоянии, изобразить графически зависимость  $|\hat{\Psi}(x)|^2 = f(x)$ .

Таблица 2.1

№ задачи	Частица	$\ell$ , нм	$n$	$x$ , нм	$x_1 \leq x \leq x_2$
13	Электрон	1,0	3	0,5	$0 \leq x \leq \ell/3$
14	Протон	1,5	2	0,4	$\ell/2 \leq x \leq \ell$
15	$\alpha$ -частица	10,0	1	3,0	$\ell/3 \leq x \leq 2\ell/3$
16	Электрон	2,0	4	0,25	$\ell/4 \leq x \leq \ell/2$
17	Протон	1,0	3	0,2	$\ell/3 \leq x \leq \ell$

18. Среднее расстояние электрона от ядра в невозбуждённом атоме водорода равно 52,9 пм. Вычислить минимальную неопределённость скорости электрона.

19. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Чему равна при этом минимальная неопределённость координаты протона?

20. Естественная ширина спектральной линии  $\lambda = 0,55$  мкм излучения атома при переходе его в основное состояние равна 0,01 пм. Определить среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии.

21. Среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии равно 12 нс. Вычислить минимальную неопределённость длины волны  $\lambda = 0,12$  мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

22. Оценить с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода и соответствующее эффективное расстояние его от ядра.

23. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,1 нм. Вычислить длину волны излучения при переходе электрона со второго на первый энергетический уровень.

24. Протон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,01 пм. Вычислить длину волны излучения при переходе протона с третьего на второй энергетический уровень.

25. Альфа-частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Чему равна ширина ямы, если минимальная энергия частицы составляет 6 МэВ?

26. Атом водорода находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,1 м. Вычислить разность энергий соседних уровней, соответствующих средней энергии теплового движения при температуре 300 К.

27. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной  $\ell$ . Определить вероятность обнаружения частицы в пределах от 0 до  $\ell/3$  для второго энергетического уровня.

### Примеры тестовых заданий

1. Высокая монохроматичность лазерного излучения обусловлена относительно большим временем жизни электронов в метастабильном состоянии  $10^{-3}$  с. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$  эВ · с, ширина метастабильного уровня (в электрон-вольтах) будет не менее ...

- 1)  $6,6 \cdot 10^{-13}$ ;    2)  $1,5 \cdot 10^{-19}$ ;    3)  $1,5 \cdot 10^{-13}$ ;    4)  $6,6 \cdot 10^{-19}$ .

2. Если частицы имеют одинаковую длину волны де Бройля, то наибольшей скоростью обладает ...

- 1)  $\alpha$ -частица;    2) позитрон;    3) протон;    4) нейтрон.

3. Если частицы имеют одинаковую скорость, то наименьшей длиной волны де Бройля обладает ...

- 1)  $\alpha$ -частица;    2) нейтрон;    3) протон;    4) электрон.

4. Положение пылинки массой  $m = 10^{-9}$  кг можно установить с неопределённостью  $\Delta x = 0,1$  мкм. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, неопределённость скорости  $\Delta v_x$  (в метрах на секунду) будет не менее ...

- 1)  $1,05 \cdot 10^{-27}$ ;    2)  $1,05 \cdot 10^{-18}$ ;    3)  $1,05 \cdot 10^{-21}$ ;    4)  $1,05 \cdot 10^{-24}$ .

5. Время жизни атома в возбуждённом состоянии 10 нс. Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$  эВ · с, ширина энергетического уровня (в электрон-вольтах) составляет не менее ...

- 1)  $6,6 \cdot 10^{-10}$ ;    2)  $1,5 \cdot 10^{-8}$ ;    3)  $1,5 \cdot 10^{-10}$ ;    4)  $6,6 \cdot 10^{-8}$ .

6. Установите соответствие уравнений Шредингера их физическому смыслу:

1	Нестационарное	А	$\nabla^2 \hat{\Psi} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{\Psi} = 0$
2	Стационарное для микрочастицы в одномерной потенциальной яме	Б	$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \hat{\Psi} = 0$
3	Стационарное для электрона в атоме водорода	В	$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \hat{\Psi} = 0$
4	Стационарное для гармонического осциллятора	Г	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\Psi} + U \hat{\Psi} = i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}$
		Д	$\nabla^2 \hat{\Psi} + \frac{2m}{\hbar^2} E \hat{\Psi} = 0$

- 1) 1–А, 2–Б, 3–Г, 4–В;    2) 1–В, 2–Б, 3–А, 4–Д;  
 3) 1–Г, 2–Б, 3–А, 4–В;    4) 1–Г, 2–В, 3–А, 4–Б.

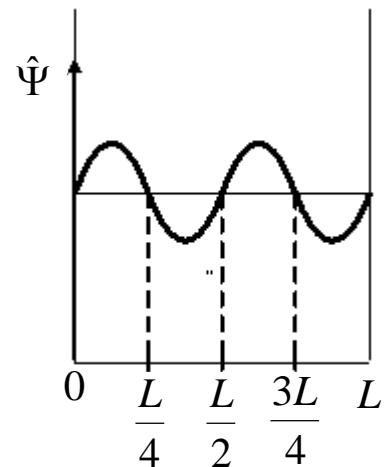
7. Вероятность обнаружить электрон на участке  $(a, b)$  одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками вы-

числяется по формуле  $w = \int_a^b \omega dx$ , где  $\omega$  –

плотность вероятности, определяемая  $\hat{\Psi}$ -функцией. Если  $\hat{\Psi}$ -функция имеет вид, указанный на рисунке, то вероятность обнару-

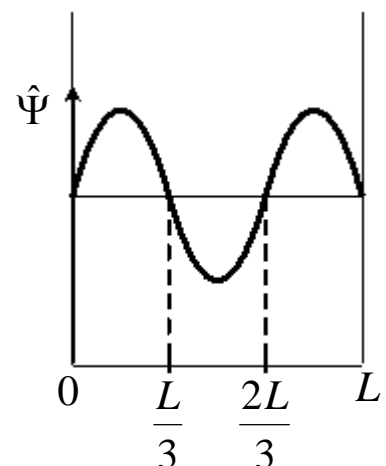
жить электрон на участке  $\frac{L}{8} < x < \frac{L}{2}$  равна ...

- 1)  $\frac{5}{8}$ ;    2)  $\frac{1}{4}$ ;    3)  $\frac{3}{8}$ ;    4)  $\frac{1}{2}$ .



8. Вероятность обнаружить электрон на участке  $(a, b)$  одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками вы-

числяется по формуле  $w = \int_a^b \omega dx$ , где  $\omega$  –



плотность вероятности, определяемая  $\hat{\Psi}$ -функцией. Если  $\hat{\Psi}$ -функция имеет вид, указанный на рисунке, то вероятность обнаружить электрон на участке  $\frac{L}{6} < x < L$  равна ...

$$1) \frac{5}{6}; \quad 2) \frac{1}{2}; \quad 3) \frac{1}{3}; \quad 4) \frac{2}{3}.$$

9. Задана пси-функция  $\hat{\Psi}(x, y, z)$  частицы. Вероятность того, что частица будет обнаружена в объеме  $V$ , определяется выражением ...

$$1) \frac{\hat{\Psi}(x, y, z)}{V}; \quad 2) \frac{|\hat{\Psi}(x, y, z)|^2}{V}; \quad 3) \int_V |\hat{\Psi}(x, y, z)|^2 dV;$$

$$4) \frac{\hat{\Psi}^2(x, y, z)}{V}; \quad 5) |\hat{\Psi}(x, y, z)|^2.$$

10. Вероятность  $dP(x)$  обнаружения электрона вблизи точки с координатой  $x$  на участке  $dx$  равна ...

$$1) dP(x) = \hat{\Psi}^2(x)dx; \quad 2) dP(x) = |\hat{\Psi}(x)|^2 dx;$$

$$3) dP(x) = \hat{\Psi}(x)dx; \quad 4) dP(x) = \hat{\Psi}(x^2)dx.$$

11. С помощью волновой функции  $\hat{\Psi}$ , входящей в уравнение Шредингера, можно определить ...

- 1) вероятность обнаружения частицы в различных точках пространства;
- 2) импульс частицы в любой точке пространства;
- 3) траекторию, по которой движется частица в пространстве.

12. Квадрат модуля волновой функции  $\hat{\Psi}$ , входящей в уравнение Шредингера, равен...

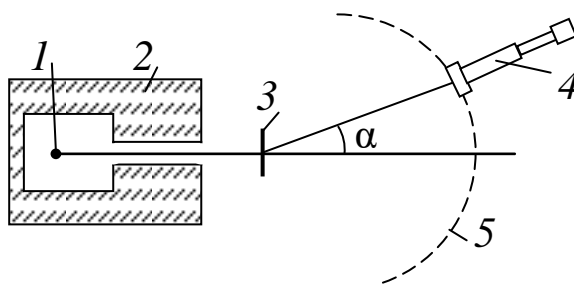
- 1) плотности вероятности обнаружения частицы в соответствующем месте пространства;
- 2) импульсу частицы в соответствующем месте пространства;
- 3) энергии частицы в соответствующем месте пространства.



## ГЛАВА 3. АТОМНАЯ ФИЗИКА

### § 3.1. Модель атома Резерфорда

Резерфорд изучил рассеяние  $\alpha$ -частиц (ядра атома гелия) тонкими металлическими фольгами. Схема его экспериментов изображена на рис. 3.1.



*Рис. 3.1. Схема опыта Резерфорда при изучении рассеяния  $\alpha$ -частиц металлической фольгой: 1 – радиоактивный препарат; 2 – свинцовый контейнер; 3 – металлическая фольга; 4 – микроскоп для наблюдения вспышек от удара  $\alpha$ -частиц на экране; 5 – экран, покрытый сернистым цинком*

Весь прибор помещался в специальный кожух, из которого откачивали воздух для того, чтобы исключить отклонение  $\alpha$ -частиц за счёт столкновения с молекулами воздуха.

На основании проведённых исследований Резерфорд предложил модель атома, суть которой сводилась к следующему:

- 1) в ядре атома (область размером  $10^{-14} \div 10^{-15}$  м) сосредоточен положительный заряд и практически вся масса атома;
- 2) вокруг ядра (область размером  $10^{-10}$  м) движутся электроны, масса которых составляет весьма малую часть;
- 3) электроны движутся вокруг ядра по орбитам, радиус которых зависит от энергии электрона.

Данная модель атома напоминает планетарную модель Солнечной системы, поэтому также носит название «планетарной».

Орбиты электронов в атоме стационарны, поэтому атомы устойчивы. Это подтверждено экспериментально по линейчатым спектрам атомов.

*Противоречие планетарной модели* заключается в том, что устойчивость атома не согласуется с классическими представлени-

ями. Рассмотрим в качестве примера движение электрона вокруг ядра по круговой орбите (как в атоме водорода).

С позиций квантовой механики орбиту нужно понимать как геометрическое место точек, в которых с наибольшей вероятностью может быть обнаружен электрон в атоме. Пусть радиус орбиты составляет порядка  $10^{-10}$  м, а скорость движения электрона в системе координат, связанной с электроном, определится из равенства силы Кулона, с которой электрон притягивается к ядру, и центробежной силы инерции, т. е.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.1)$$

где  $m$ ,  $e$  – масса и заряд электрона;  $v$  – модуль линейной скорости движения электрона вокруг ядра. Скорость электрона составляет порядка  $10^6$  м/с.

Из (3.1) следует, что ускорение электрона  $a = \frac{v^2}{r} \approx 10^{22} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Но

ускоренно движущийся заряд должен вести себя как вибратор, т. е. он должен излучать электромагнитные волны. Излучение должно идти непрерывно. Потеря энергии электроном вследствие излучения приведёт к тому, что радиус его орбиты должен постоянно уменьшаться и он по спирали будет приближаться к ядру. Поскольку частота вращения увеличится, то возрастёт и частота излучения. Спектр излучения атома будет сплошным, а не линейчатым, как наблюдается в эксперименте. Таким образом, атом не может существовать длительное время. Но в действительности атом представляет собой весьма устойчивую систему. А энергию он излучает только при определённых условиях.

### § 3.2. Постулаты Бора

Бор ввёл определённые ограничения на поведение электрона в атоме, которые были изложены в виде постулатов. Физический смысл постулатов не мог быть объяснён в рамках классической физики, более того в чём-то они противоречили ей. Такой непоследовательный путь привёл к правильным результатам. Теория Бора применима не только к атому водорода, но и к водородоподобной системе, состоящей из ядра с зарядом  $Ze$  и одного электрона, вра-

щающегося вокруг ядра. Например, единожды ионизированный атом гелия  $\text{He}^+$ , ион  $\text{Li}^{++}$  и др.

*1-й постулат.* Существуют стационарные состояния атома, находясь в которых он не излучает энергию. Этим состояниям соответствуют стационарные орбиты, при движении электрона по которым он, несмотря на ускорение, не излучает.

Правило квантования орбит заключается в том, что при движении электрона по стационарной орбите он должен иметь квантованные значения момента импульса относительно ядра, т. е.

$$L = m_e v r_{\text{ст}} = n\hbar, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

где  $L$  – момент импульса электрона;  $v$  – линейная скорость электрона на орбите;  $r_{\text{ст}}$  – радиус стационарной орбиты;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – постоянная Планка.

Оказывается, к стационарным орбитам можно отнести только те, на длине которых укладывается целое число длин волн де Бройля:

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r m_e v}{h} = \frac{m_e v r}{h/2\pi} = \frac{m_e v r}{\hbar}. \quad (3.3)$$

*2-й постулат.* При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон с энергией  $h\nu$ . Излучение происходит при переходе атома из стационарного состояния с большей энергией в стационарное состояние с меньшей энергией (переход электрона на ближнюю к ядру орбиту). При поглощении энергии происходит переход электрона на более удалённую от ядра орбиту, т. е.

$$E_n - E_m = h\nu_{nm}, \quad (3.4)$$

где  $E_n, E_m$  – энергия атома в состояниях  $n$  и  $m$ ;  $\nu_{nm}$  – частота излучения или поглощения энергии при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.

### § 3.3. Спектр атома водорода

Экспериментально И. Бальмером (в 1825 г.) установлено, что видимый спектр атома водорода состоит из девяти линий, частоты которых удовлетворяют формуле

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3.5)$$

где  $\nu$ ,  $\lambda$  – частота и длина волны излучения;  $c$  – скорость света в вакууме;  $n$  – номер орбиты;  $R$  – постоянная Ридберга, равная  $3,2931193 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Все линии данной серии, отличающиеся числом  $n$ , образуют серию Бальмера. Как установил В. Ритц в 1908 г., возможны и другие серии, частоты спектральных линий которых могут быть представлены в виде разности двух термов:

$$\nu = T(n_2) - T(n_1). \quad (3.6)$$

Комбинации из термов по выражению (3.6) позволяют найти возможные частоты спектральных линий. Следовательно, в спектре атома водорода, кроме серии линий Бальмера, должны существовать и другие серии.

Например, вычитая из частоты  $\nu_1 = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$  (это водородная линия  $H_\beta$ ) частоту линии  $H_\alpha$ , т. е.  $\nu_2 = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$ , получим

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), n = 4, 5, 6, \dots \quad (3.7)$$

Это линия серии Пашена.

Исследования спектра атома водорода показали, что в ультрафиолетовой части он содержит серию Лаймана:

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right). \quad (3.8)$$

В инфракрасной области наблюдаются:

- серия Брэкета  $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $n = 5, 6, 7, \dots$ ;
- серия Пфунда  $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $n = 6, 7, 8, \dots$ ;
- серия Хэмфри  $\nu = R\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $n = 7, 8, 9, \dots$

Граничные частоты всех серий удовлетворяют соотношению

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad (3.9)$$

где  $m$  и  $n$  – квантовые числа, определяющие энергию электрона на соответствующей орбите. С увеличением числа  $n$  линии серии сближаются, а при  $n = \infty$  следует граница серии.

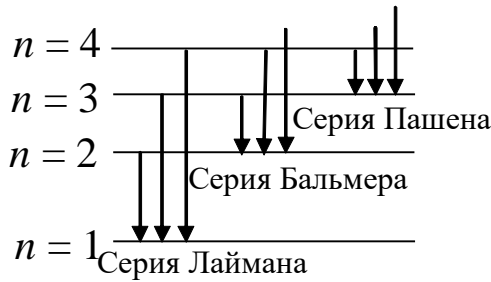


Рис. 3.2. Спектральные серии атома водорода

Расположение спектральных линий атома водорода в различных сериях представлено на рис. 3.2.

Глубину «потенциальной» ямы для электрона в атоме водорода, находящегося в основном состоянии ( $n = 1$ ), называют также энергией ионизации, под которой понимают энергию, которую необходимо затратить, чтобы оторвать электрон от атома, т. е. его ионизировать:

$$E_{\text{ион}} = e\varphi_{\text{ион}} = \frac{Rh}{n^2}; \quad \varphi_{\text{ион}} = \frac{E_{\text{ион}}}{e} = \frac{Rh}{en^2}. \quad (3.10)$$

При  $n = 1$  потенциал ионизации  $\varphi_{\text{ион}} = 13,53$  эВ.

### § 3.4. Радиус боровских орбит электрона в атоме водорода

Рассчитаем радиус боровских орбит электрона в атоме водорода и водородоподобных атомах. Электрон вращается вокруг ядра под действием центростремительной силы, в качестве которой выступает кулоновская сила его притяжения к ядру, имеющему в атоме водорода заряд  $+e$ , а у водородоподобных атомов  $+Ze$ , т. е.

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.11)$$

где в левой части записано выражение центростремительной силы, а в правой – сила Кулона.

Правую и левую часть выражения (3.11) умножим на массу электрона  $m$  и учтём постулат Бора квантования орбит электрона в атоме

$$m\upsilon r = n\hbar, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots - \text{номер орбиты}. \quad (3.12)$$

Тогда из выражения (3.11) с учётом (3.12) получим

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{mZe^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.13)$$

где  $m$  – масса электрона.

Для первой боровской орбиты  $n = 1$  радиус равен  $r_{(1)} = 0,529 \cdot 10^{-10}$  м. Подставляя в (3.13)  $n = 2, 3, 4$  и т. д., можно рассчитать радиус второй, третьей и т. д. орбит.

### § 3.5. Полная механическая энергия электрона в атоме водорода

Полная механическая энергия электрона в атоме водорода может быть представлена суммой кинетической энергии и потенциальной в силовом поле ядра:

$$E = W_{\text{кин}} + U, \quad (3.14)$$

где  $E$  – полная энергия;  $W_{\text{кин}}$  – кинетическая энергия;  $U$  – потенциальная энергия. Подставляя в (3.14) их выражения, получим

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left( -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \quad (3.15)$$

(«–» указывает на то, что это энергия притяжения).

Оказывается, что полная энергия электрона равна половине потенциальной. Это следует из выражения (3.11), если его левую и правую часть разделить на 2, а затем сократить на  $\frac{1}{r}$ . Получим выражение, из которого следует, что по модулю кинетическая энергия равна половине потенциальной, следовательно, и полная энергия электрона равна также половине потенциальной:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.16)$$

Если в выражение (3.16) подставить (3.13), то получим энергию электрона на соответствующих орбитах:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}, \quad (3.17)$$

где  $E_n$  – энергия электрона в водородоподобном атоме на  $n$ -й орбите.

Если сравнить полученное выражение (3.17) с энергией кванта и термом Ритца

$$E_n = h\nu = -h \frac{R}{n^2}, \quad (3.18)$$

то оказывается, что постоянная Ридберга  $R$  для атома водорода

$$R = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}, \quad (3.19)$$

а для водородоподобных атомов

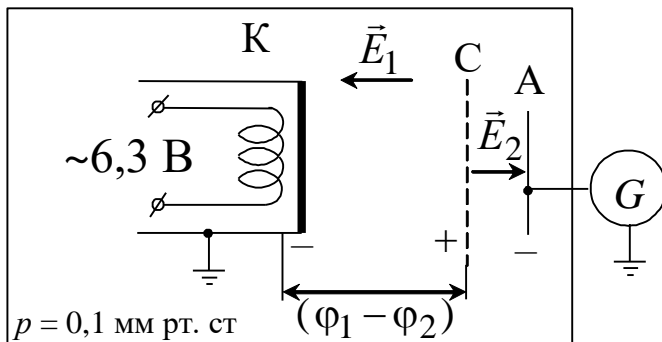
$$R_Z = Z^2 R = \frac{Z^2 me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}. \quad (3.20)$$

Постоянная Ридберга, рассчитанная по выражению (3.19), практически совпадает с величиной, полученной ранее из экспериментальных исследований.

Таким образом, квантово-механическая модель и постулаты Бора позволили объяснить наблюдаемые экспериментально оптические свойства атома водорода.

### § 3.6. Опыт Франка и Герца

Наличие у атома дискретных энергетических уровней было экспериментально подтверждено Франком и Герцем в 1913 г. Тем самым были подтверждены постулаты Бора. Суть опыта Франка



*Рис. 3.3. Схема экспериментальной установки Франка и Герца для проведения опыта: А – анод; К – катод; С – сетка; G – гальванометр для измерения тока (заряда)*

и Герца заключалась в следующем. Была разработана установка (рис. 3.3).

Установка помещалась в колбе, заполненной парами ртути под давлением порядка 0,1 мм рт. ст. На электроны, вылетающие из катода при термоэлектронной эмиссии, действовало ускоряющее электрическое поле

между катодом и сеткой. Ускоряющую разность потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  можно было изменять с помощью потенциометра (на схеме не показан). А между сеткой и анодом создавалось задерживающее поле, которое тормозило летящие к аноду электроны. Поэтому опыт Франка и Герца получил название метода задерживающего потенциала.

Электроны, разгоняясь электрическим полем, испытывали соударения с молекулами паров ртути. На первой стадии (малая энергия электрона) это были упругие столкновения, вследствие которых изменялось только направление движения электронов. На второй стадии (при значительной скорости электронов) соударения электронов с атомами ртути становятся неупругими с передачей атомам энергии. При этом каждый атом ртути может воспринимать лишь определённое количество энергии для перехода в возбуждённое состояние, которое отстоит от основного по шкале энергий на 4,86 эВ. Следовательно, пока энергия электрона меньше этой величины, ток в цепи с увеличением  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  возрастает (рис. 3.4). Но как только его энергия будет  $\geq 4,86$  эВ, то вследствие столкновения он отдаёт энергию 4,86 эВ атому ртути, скорость его падает и он не может преодолеть задерживающего потенциала на пути к аноду. Ток при этом падает. Подобные явления падения тока будут наблюдаться и при дальнейшем увеличении ускоряющей разности потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , когда электроны приобретают энергию  $e(\varphi_1 - \varphi_2) = n \cdot 4,86$  эВ и могут испытывать несколько ( $n$ ) неупругих

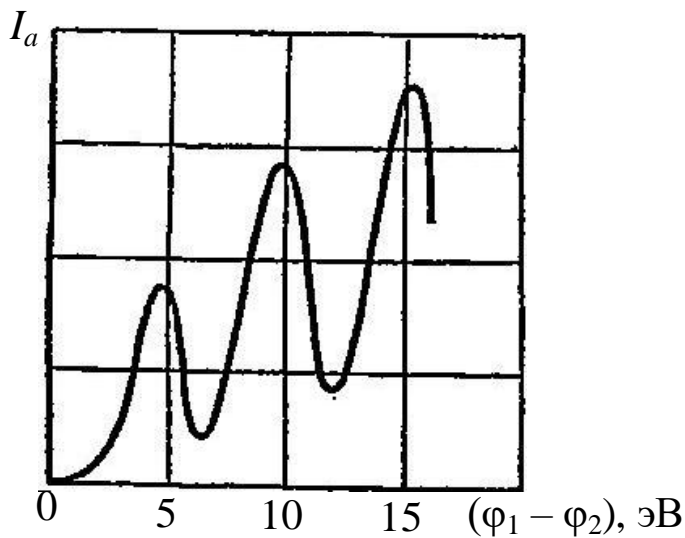


Рис. 3.4. Изменение тока в опыте Франка и Герца при увеличении ускоряющего поля  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ :  $I_a$  — анодный ток, измеряемый гальванометром

столкновений. На рис. 3.4 можно наблюдать наличие нескольких минимумов тока с увеличением ускоряющего поля. Данный опыт подтверждает постулат Бора о существовании в атоме стационарных состояний.

Опыт Франка и Герца подтвердил также и второй постулат Бора, который касается частот излучения атомом. В данном опыте ртутные пары при соударениях испускают ультрафиолетовое излучение с длиной волны  $\lambda = 2537 \cdot 10^{-10}$  м. Это первая резонансная ли-

ния ртути. Излучение атомом ртути происходит при его возвращении из возбуждённого в основное состояние. Если произвести расчёт по постулату Бора, то длина волны излучения должна составить



$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,86 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2537 \cdot 10^{-10} \text{ (м)},$$

что и совпадает с экспериментом Франка и Герца.

### § 3.7. Достоинства и недостатки теории Бора

Опыт Франка и Герца экспериментально подтвердил постулаты Бора о существовании в атоме стационарных состояний и правило частот при его переходе из одного стационарного состояния в другое.

Кроме того, на основе положений классической механики с привлечением понятия квантования момента импульса электрона в атоме по Бору удалось теоретически рассчитать постоянную Ридберга для атома водорода и водородоподобных атомов и объяснить линейчатый спектр этих атомов. Также по значению постоянной Ридберга для атомов водорода и гелия теоретически было вычислено отношение массы протона к массе электрона

$$\frac{m_p}{m_e} = 1847,$$

что оказалось достаточно близко к экспериментальным данным.

Теория Бора позволила объяснить расщепление спектральных линий (эффект Зеемана) в сильном магнитном поле. Она сыграла важную роль в развитии атомной и молекулярной спектроскопии.

Недостаток теории Бора проявился в том, что она не позволила решить вопрос об *интенсивности* спектральных линий и создать теорию атома гелия, содержащего два электрона.

Несмотря на противоречивость теории Бора, её необходимо рассматривать как переходный этап к квантовой механике.

### § 3.8. Энергия и радиус орбиты электрона в атоме, находящемся в основном состоянии, с позиции квантовой механики

Состояние электрона в атоме с позиций квантовой механики описывается волновой функцией  $\hat{\Psi}$ , которая определяется из решения стационарного уравнения Шредингера для заданных граничных условий:

$$\Delta \hat{\Psi} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \hat{\Psi} = 0. \quad (3.21)$$

Поскольку электрон движется в центрально-симметричном силовом поле ядра, то решение уравнения (3.21) следует проводить

в сферических координатах. При этом нужно учитывать, что момент импульса электрона в атоме квантуется согласно следующему выражению:

$$L_e = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \quad (3.22)$$

где  $\ell$  называется *орбитальным* квантовым числом, которое может принимать значения

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, (n-1), \quad (3.23)$$

т. е. при заданном главном квантовом числе  $n$  параметр  $\ell$  определяет состояние электрона в атоме. Они носят следующие названия:

при  $n = 1$  и  $\ell = 0$  – это  $s$ -состояние;

$\ell = 1$  – это  $p$ -состояние;

$\ell = 2$  – это  $d$ -состояние;

$\ell = 3$  – это  $f$ -состояние.

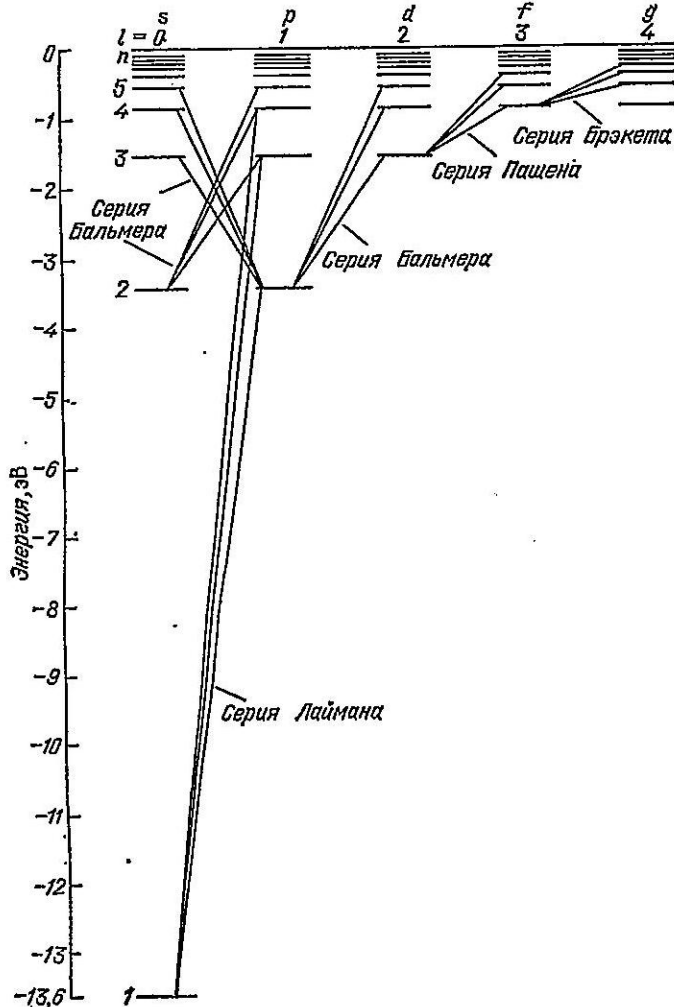


Рис. 3.5. Схема энергетических уровней атома водорода

При графическом изображении линий серий Лаймана, Бальмера и др. нужно иметь в виду, что переходы электрона с одного уровня на другой возможны только в том случае, если его орбитальное квантовое число изменяется только на единицу, т. е.  $\Delta\ell = \pm 1$ , где  $\ell$  – орбитальное квантовое число.

Данное условие называют *правилом отбора*, существование которого связано с моментом импульса фотона, который уносит фотон при испускании, а при поглощении – приносит. В этой связи правило отбора является следствием закона сохранения момента импульса системы.

С учётом правила от-

бора спектральные серии атома водорода необходимо изображать так, как это показано на рис. 3.5.

Решим стационарное уравнение Шредингера (3.21) для электрона в атоме водорода, находящегося при  $n = 1$  в  $s$ -состоянии. Это основное состояние электрона. В сферической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  значение волновой функции  $\hat{\Psi}$  в силу симметрии будет зависеть только от  $r$ , т. е. расстояния между электроном и ядром. В силу этого стационарное уравнение Шредингера запишется следующим образом:

$$\frac{d^2\hat{\Psi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\hat{\Psi}}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{\Psi} = 0. \quad (3.24)$$

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (3.24) будет иметь вид

$$\hat{\Psi} = C e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad (3.25)$$

где  $C$  – постоянная, которую можно определить из условия нормировки;  $a_0$  – постоянная, которая имеет размерность длины. Далее возьмём первую и вторую производные от выражения (3.25) по  $r$ , подставим в (3.24) и после сокращения получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{a_0^2} - \frac{2}{ra_0} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E. \quad (3.26)$$

Выражение (3.26) удовлетворяется при любых  $r$ , если выполняются следующие условия:

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}; \quad (3.27)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{a_0^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (3.28)$$

Из условия (3.28) следует, что

$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}. \quad (3.29)$$

Выражение (3.29) совпадает с выражением для первой боровской орбиты электрона в атоме водорода, полученного из классических представлений с учётом постулатов Бора.

Подставим (3.29) в выражение для энергии (3.27), получим

$$E_1 = -\frac{me^4}{8\hbar^2\varepsilon_0^2}. \quad (3.30)$$

Это энергия электрона в атоме, находящегося в основном состоянии, т. е. при  $n = 1$ ,  $\ell = 0$ . Расчёт по выражению (3.30) также совпадает с результатами, полученными с привлечением теории Бора.

Таким образом, квантовая механика позволяет получать результаты последовательно путём решения соответствующего уравнения Шредингера.

По теории Бора также рассчитан радиус первой орбиты электрона. В квантовой механике понятие орбиты отсутствует, но можно говорить о вероятности нахождения электрона в определённом элементе объёма. Пусть имеется элемент объёма

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Вероятность нахождения электрона в данном элементе объёма равна

$$dw = |\hat{\Psi}|^2 dV = |\hat{\Psi}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr. \quad (3.31)$$

В выражении (3.31) волновая функция  $\hat{\Psi}$  определяется выражением (3.25), т. е.

$$\hat{\Psi} = Ce^{-\frac{r}{a_0}}.$$

Тогда производная от вероятности по  $r$  равна

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r^{\max}=r_1} = 0. \quad (3.32)$$

После взятия производной и приравнивания её нулю получим, что

$$r^{\max} = r_1 = a_0, \quad (3.33)$$

т. е. вероятность обнаружения электрона на первой орбите  $r_1 = a_0$  максимальна.

Вероятность обнаружения электрона на первой орбите по Бору равна постоянной вели-

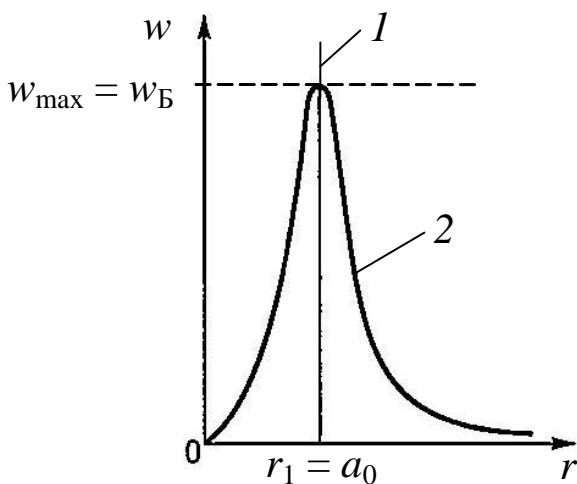


Рис. 3.6. Вероятность обнаружения электрона по Бору (1) и по квантовой механике (2)

чине  $w_B$ , а по квантовой механике она при этом достигает максимального значения. При других  $r$  вероятность меньше.

### § 3.9. Пространственное квантование. Опыты О. Штерна и В. Герлаха. Спин электрона

Ранее при объяснении явления диамагнетизма с привлечением законов классической физики была установлена связь между векторами магнитного момента кругового тока, созданного движением электрона, и его моментом импульса (рис. 3.7):

$$\vec{P}_m = -\gamma_i \vec{L}_e, \quad (3.34)$$

где  $\gamma_i = \frac{e}{2m}$  – орбитальное гиромагнитное отношение;  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона.

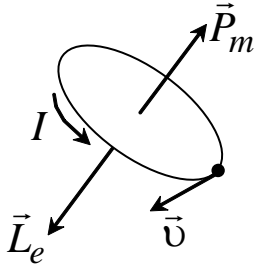


Рис. 3.7. Ориентация векторов магнитного момента и момента импульса при движении электрона по орбите в классической физике

В квантовой механике не может быть указана ориентация векторов относительно плоскости орбиты. Но в квантовой механике вектор момента импульса электрона может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция на направление внешнего магнитного поля  $L_{iz}$  принимает лишь квантованные значения, кратные  $\hbar$ , т. е.

$$L_{iz} = m\hbar,$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ell$  и называется магнитным квантовым числом;  $\ell$  – орбитальное квантовое число, определяющее вектор  $L_i$ , который согласно (3.22) равен

$$L_e = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar.$$

Подставим квантованное значение вектора момента импульса электрона в выражение (3.34):

$$\vec{P}_m = \frac{e}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar. \quad (3.35)$$

В выражении (3.35) произведение гиромагнитного отношения на постоянную Планка  $\frac{e}{2m}\hbar = \mu_B$  называют магнетоном Бора. Численно он равен

$$\mu_B = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2\pi} = 92,7 \cdot 10^{-24} (\text{А} \cdot \text{м}^2).$$

Размерность магнетона Бора совпадает с размерностью магнитного момента контура с током. Действительно:

$$[\mu_B] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

В учебном пособии [1] указано, что размерность магнетона Бора

$$[\mu_B] = \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}.$$

Это тоже правильно, так как

$$\frac{\text{Дж}}{\text{Тл}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} = \text{А} \cdot \text{с}^2,$$

т. е. совпадает с вышеприведённой размерностью магнитного момента контура с током.

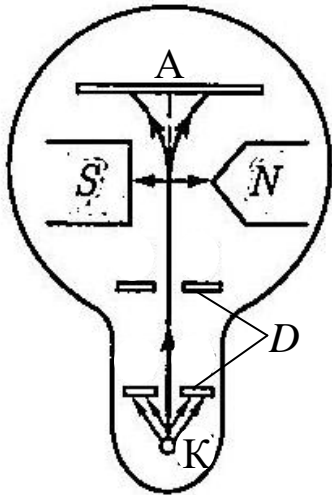


Рис. 3.8. Схема опыта Штерна и Герлаха:  
K – нагретый до высокой температуры серебряный шарик; A – фотопластинка; N, S – полюса магнита; D – диафрагмы

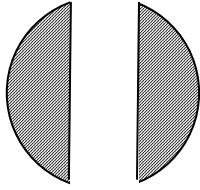
О. Штерн и В. Герлах в 1921 г. провели эксперимент, целью которого было измерение магнитных моментов атомов, имеющих один валентный электрон на внешней оболочке. С этой целью они пытались оценить силу, с которой магнитное поле действует на пролетающие атомы. Сила, действующая на частицу, рассчитывалась по формуле

$$\vec{F} = P_{mZ} \frac{d\vec{B}}{dz}, \quad (3.36)$$

где  $\frac{d\vec{B}}{dz}$  – изменение индукции внешнего магнитного поля по координате  $z$ ;  $P_{mZ}$  – проекция магнитного момента частицы на ось  $z$ .

Схема опыта изображена на рис. 3.8.

Бралась колба, из которой выкачивали воздух до давления порядка  $10^{-8}$  мм рт. ст. Помещали в неё шарик, изготовленный из се-



*Рис. 3.9. Распределение попаданий атомов серебра, зафиксированное фотопластинкой, в опыте Штерна и Герлаха*

ребра, нагретый до очень высокой температуры. Скорость вылетающих из шарика ионов серебра составляла порядка 100 м/с. С помощью диафрагм получали узкий пучок ионов серебра, который падал на фотопластинку. В случае, если магнитный момент атомов серебра был бы ориентирован в пространстве произвольно, то на фотопластинке получили бы непрерывное в виде круга

распределение попаданий атомов с большей плотностью в центре и меньшей по краям. На рис. 3.9 представлена картина попаданий атомов серебра на фотопластинке, полученная Штерном и Герлахом, которая дала однозначный отрицательный ответ на предположение о произвольной ориентации вектора магнитного момента атомов серебра, а следовательно, и вектора момента их импульса.

Из рис. 3.9 следует, что такая картина отклонения атомов серебра в магнитном поле возможна лишь в том случае, если магнитный момент атомов имел только две возможные ориентации в пространстве. Поскольку магнитные моменты электронов, находящихся на внутренних оболочках, компенсируются, то магнитный момент атома серебра будет совпадать с магнитным моментом валентного электрона, который равен магнетону Бора. Но вся сложность истолкования результатов опыта Штерна и Герлаха заключалась в том, что валентный электрон атома серебра в основном состоянии имеет орбитальное квантовое число  $\ell = 0$ , следовательно, и его момент импульса равен нулю, как это следует из формулы (3.22). В этой связи возникает вопрос, почему магнитный момент электрона равен магнетону Бора?

Чуть позже Эйнштейн и де Гааз установили аномальную величину гиромагнитного отношения для ферромагнетиков, что невозможно было объяснить в рамках существовавших в то время соотношений и закономерностей. Единственным достоверным объяснением эксперимента могло быть предположение, что электрон, кроме орбитального момента импульса  $\vec{L}_i$  и магнитного момента  $\vec{P}_m$ , в атоме обладает ещё и собственным магнитным моментом  $\vec{P}_{mS}$ , ко-

торый называли *спином*, которому соответствует собственный механический момент импульса  $\vec{L}_S$ .

Механический момент импульса электрона может быть квантован по закону

$$L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}, \quad (3.37)$$

где  $S$  – спиновое квантовое число, равное  $1/2$ .

В этой связи проекция момента импульса электрона на направление внешнего магнитного поля  $Z$  должна быть квантована. По аналогии с орбитальным магнитным моментом будем иметь

$$L_{SZ} = m_S \hbar, \quad (3.38)$$

где  $m_S$  – магнитное спиновое число.

Исходя из опыта Штерна и Герлаха, в котором была установлена двойная ориентация магнитного спина, можно утверждать, что магнитное спиновое число  $m_S$  может принимать два значения  $\pm 1/2$ .

Численное значение момента импульса электрона равно

$$L_S = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (3.39)$$

а его проекция на направление внешнего магнитного поля –

$$L_{SZ} = \pm \frac{1}{2} \hbar. \quad (3.40)$$

Отношение проекции магнитного момента электрона к его проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля равно

$$\frac{P_{mSZ}}{L_{SZ}} = \frac{e}{m_e}. \quad (3.41)$$

В формуле (3.41)  $e$ ,  $m_e$  – заряд и масса электрона, а отношение называют *спиновым гиромагнитным*. Оно в два раза превышает орбитальное гиромагнитное соотношение.

### § 3.10. Квантовые числа и число электронов в слоях и оболочках

Положение электрона в атоме определяется следующими квантовыми числами:

$n$  – главное квантовое число, определяющее энергию электрона;

$\ell$  – орбитальное квантовое число;

$m$  – магнитное квантовое число;



$m_s$  — магнитное спиновое число.

В 1925 г. В. Паули установил, что в атоме не может быть двух электронов, состояние которых определяется набором четырёх одинаковых квантовых чисел. Это положение носит название *принципа Паули*.

Четыре квантовых числа и принцип Паули позволяют установить возможное число электронов в слоях и состояниях.

Пусть квантовые числа  $n, \ell, m$  для электронов одинаковы. Так как магнитное спиновое число может принимать значения  $\pm 1/2$ , то очевидно, что максимальное количество электронов в атоме, имеющих одинаковые квантовые числа  $n, \ell, m$  и отличающихся магнитным спиновым числом, может быть только два.

Это состояние электрона называют  $s$ -состоянием. В этом состоянии орбитальное квантовое число  $\ell = 0$ .

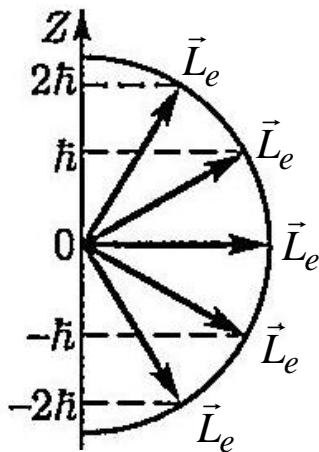


Рис. 3.10. Ориентация вектора орбитального момента импульса электрона  $\vec{L}_e$  в пространстве и его проекции на направление внешнего магнитного поля для электрона в  $d$ -состоянии ( $\ell = 2$ )

Далее определим максимальное значение электронов в атоме, у которых одинаковы два квантовых числа:  $n$  и  $\ell$ . Учтём, что вектор орбитального момента импульса электрона может иметь только такие направления в пространстве, при которых его проекция на направление внешнего магнитного поля принимает целые значения:

$$L_{iz} = m\hbar,$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ .

Графически это можно изобразить, как показано на рис. 3.10.

Из рис. 3.10 следует, что при  $\ell = 2$  число дозволённых ориентаций вектора  $\vec{L}_e$  составляет

$(2 \cdot 2 + 1)$ , т. е. пять. Тогда максимальное число электронов с различными квантовыми числами  $m$  и  $m_s$  в состоянии при  $\ell = 1$  может быть  $2(2\ell + 1) = 6$ , а в состоянии при  $\ell = 2$  максимальное число электронов составит  $2(2 \cdot 2 + 1) = 10$ . Аналогично получаем: при  $\ell = 3$  оно составит  $2(2 \cdot 3 + 1) = 14$ , а при  $\ell = 4$  —  $2(2 \cdot 4 + 1) = 18$ .

Состояние при  $\ell = 0$  называют  $s$ -состоянием; при  $\ell = 1$  называют  $p$ -состоянием; при  $\ell = 2$  называют  $d$ -состоянием; при  $\ell = 3$  называют  $f$ -состоянием; при  $\ell = 4$  называют  $g$ -состоянием.

Подсчитаем максимально возможное число электронов в атоме, которые отличаются только главным квантовым числом  $n$ . Учтём, что орбитальное квантовое число  $\ell$  изменяется от 0 до  $(n-1)$ . Тогда сумма

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} 2(2\ell+1) = [2(n-1)+2]n = 2n^2,$$

т. е. максимальное число электронов в слоях, отличающихся только главным квантовым числом  $n$ , приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1

*Максимально возможное число электронов в слоях при различных значениях главного квантового числа  $n$*

Главное квантовое число $n$	Слой	Число электронов
1	$K$	2
2	$L$	8
3	$M$	18
4	$N$	32
5	$O$	50

В каждом слое электроны могут находиться в состояниях:  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $g$ . Тогда общую картину распределения числа электронов в атоме по слоям и состояниям с учётом принципа Паули можно представить табл. 3.2.

Таблица 3.2

*Распределение числа электронов в атоме по слоям и состояниям*

Название слоя	Максимальное число электронов в состояниях					Максимальное число электронов в слое
	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	
	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	
$K (n = 1)$	2	—	—	—	—	2
$L (n = 2)$	2	6	—	—	—	8
$M (n = 3)$	2	6	10	—	—	18
$N (n = 4)$	2	6	10	14	—	32
$O (n = 5)$	2	6	10	14	18	50

Максимальное число электронов в состояниях рассчитано по формуле  $2(2\ell+1)$ .

Определение числа электронов по слоям и состояниям позволило обосновать периодическую систему элементов Д. И. Менделеева.

### § 3.11. Периодическая система химических элементов

Построение периодической системы элементов базируется на следующих принципах:

- 1) общее количество электронов в атоме равно его порядковому номеру;
- 2) состояние каждого электрона в атоме определяется набором квантовых чисел  $n$ ,  $\ell$ ,  $m$  и  $m_s$ ;
- 3) количество электронов в состояниях определяется в соответствии с принципом Паули.

Все электроны распределяются по слоям. Сначала заполняются слои с меньшими значениями главного квантового числа  $n$ , которому соответствует минимальная энергия, а затем – слои с большей энергией.

В пределах каждого слоя сначала заполняется состояние с наименьшим значением орбитального квантового числа  $\ell$ , т. е.  $\ell = 0$ , а затем заполняются состояния с  $\ell = 1$ ,  $\ell = 2$  и до  $\ell = n - 1$ .

Распределение электронов по слоям и состояниям иногда записывают кратко. Например, для атома кислорода, находящегося в невозбуждённом состоянии:  $1s^2, 2s^2, 2p^4$  – это означает, что в слое с  $n = 1$  в состоянии  $s$  ( $\ell = 0$ ) находятся два электрона; в слое с  $n = 2$  в состоянии  $s$  ( $\ell = 0$ ) также находятся два электрона, но в этом слое ещё в состоянии  $p$  ( $\ell = 1$ ) находятся четыре электрона.

При заполнении слоёв и состояний учитываются квантовые числа  $m$  и  $m_s$ , а также принцип Паули. Например, у водорода имеется один электрон, который в невозбуждённом состоянии находится в состоянии  $1s^1$ . При этом для него  $\ell = 0$ ,  $m = 0$ , а  $m_s = \pm 1/2$ . У атома гелия имеется два электрона, их состояние записывается  $1s^2$ , но  $n = 1$ ,  $\ell = 0$ ,  $m = 0$  для обоих электронов, а магнитное спиновое число у них разное, т. е. если у одного электрона  $m_s = +1/2$ , то у второго  $m_s = -1/2$ . Таким образом, два электрона образуют  $K$ -слой. Если у атома электронов больше двух, то начинается заполнение последующих слоёв с  $n = 2$  и т. д. Например, у лития три электрона, два из которых находятся в состоянии  $1s^2$ , а третий занимает состояние  $2s^1$  уже в  $L$ -слое (при  $n = 2$ ). У бериллия четвёртый порядковый номер, а следовательно, и четыре электрона. Два из них занимают

состояние  $1s^2$ , а два других –  $2s^2$ . У бора число электронов равно пяти (пятый порядковый номер). Следовательно, два электрона находятся в  $K$ -слое и  $s$ -состоянии, т. е.  $1s^2$ , два электрона – тоже в  $s$ -состоянии, но уже в  $L$ -слое, т. е.  $2s^2$ . Всего в  $L$ -слое может находиться 8 электронов, поэтому пятый электрон занимает в этом слое состояние  $2p^1$ . Таким образом, для бора распределение электронов по состояниям можно записать так:  $1s^2, 2s^2, 2p^1$ . У неона десять электронов. Как следует из табл. 3.2, они должны полностью заполнить слои  $K$  – 2 электрона и  $L$  – 8 электронов, т. е.  $1s^2, 2s^2, 2p^6$ . Атом натрия содержит 11 электронов, десять из которых занимают слои  $K, L$ , а одиннадцатый начинает заполнение  $M$ -слоя с  $s$ -состоянием, т. е. для него можно записать  $3s^1$ , а для всего атома распределение электронов по состояниям можно записать следующим образом:  $1s^2, 2s^2, 3s^1, 2p^6$ . С возрастанием порядкового номера (числа электронов) у последующих элементов заполнится состояние  $3s$  до двух электронов, а далее начнётся заполнение  $3p$ -состояния до 6 электронов. Это у аргона, у которого всего 18 электронов, которые распределены по состояниям так:  $1s^2, 2s^2, 3s^2, 2p^6, 3p^6$ . Он завершает третий период системы элементов.

При построении системы должны учитываться также химические свойства элементов, расположенных в периодах таблицы. Например, калий имеет 19 электронов. У него застроены  $1s, 2s, 3s, 2p$  и  $3p$ -состояния. Но в слое  $M$  ( $n = 3$ ) могут ещё располагаться 10 электронов в состоянии  $d$ , но тогда калий попадёт в период, содержащий элементы с другими химическими свойствами. В этой связи калий должен быть в одном периоде системы с литием и натрием, у которых валентный электрон находится в  $s$ -состоянии. Поэтому и девятнадцатый электрон калия находится не в состоянии  $3d^1$ , а в состоянии  $4s^1$ . Таким образом, при незаполненном  $3d$ -состоянии начинается заполнение  $N$ -слоя ( $n = 4$ ).

Так обеспечивается заполнение слоёв и состояний химических элементов с учётом их свойств.

### Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте постулаты Бора. Как осуществляется квантование атома водорода?
2. Что характеризуют квантовые числа: главное, орбитальное, магнитное? Какие значения они могут принимать?

3. Опишите с помощью квантовых чисел  $n$ ,  $l$  и  $m$  спектр атома водорода. Сформулируйте правило отбора.

4. Почему атом водорода может иметь одну и ту же энергию, находясь в различных состояниях?

5. Какие принципы квантовой физики положены в основу объяснения Периодического закона Менделеева? Опишите заполнение электронных оболочек атомов H, He, Li, O, Ne, Si, Ar.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Вычислить радиус первой орбиты электрона в атоме водорода и его скорость на этой орбите.

*Решение.* Согласно теории Бора, радиус  $r$  электронной орбиты и скорость  $v$  электрона на ней связаны равенством  $mvr = n\hbar$ . Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число  $n = 1$  и указанное выше равенство примет вид

$$mvr = \hbar. \quad (3.42)$$

Для определения двух неизвестных величин  $r$  и  $v$  необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

( $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона) или

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (3.43)$$

Совместное решение равенств (3.42) и (3.43) относительно  $r$  дает

$$r = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2).$$

Подставив сюда значения  $\hbar$ ,  $e$ ,  $m$  и произведя вычисления, найдём боровский радиус:

$$r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Из равенства (3.42) получим выражение скорости электрона на первой орбите:

$$v = \hbar/(mr).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдём скорость электрона:

$$v = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

**Пример 2.** Определить энергию  $\varepsilon$  фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.

*Решение.* Энергия  $\varepsilon$  фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую:

$$\varepsilon = E_i \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где  $E_i$  – энергия ионизации атома водорода, которая равна 13,6 эВ;  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$  – номер орбиты, на которую переходит электрон

(рис. 3.11);  $n_2 = n_1 + 1; n_1 + 2; \dots; n_1 + m$  – номер орбиты, с которой переходит электрон;  $m$  – номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена  $n_1 = 3$ ; для второй линии этой серии  $m = 2$ ,  $n_2 = n_1 + m = 3 + 2 = 5$ .

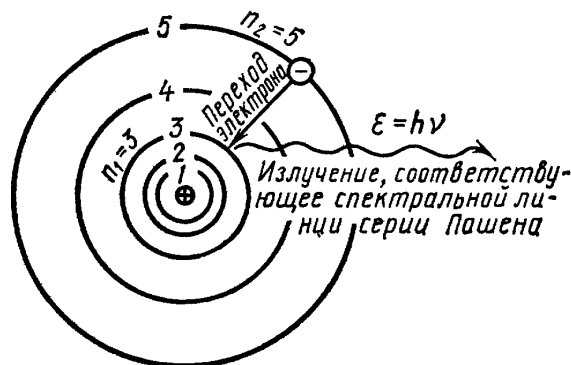


Рис. 3.11. К решению примера 2

Подставив числовые значения, найдём энергию фотона:

$$\varepsilon = 0,97 \text{ эВ.}$$

**Пример 3.** Во время перехода электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую атом излучает фотон, энергия которого соответствует длине волны  $\lambda = 652 \text{ нм}$  (красная линия спектра). Насколько уменьшится при этом энергия атома водорода?

*Решение.* Согласно второму постулату Бора, энергия фотона равна разности энергий  $E_3$  и  $E_2$  стационарных состояний:

$$h\nu = \Delta E,$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $\nu$  – частота:  $\nu = c/\lambda$ ;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\lambda$  – длина волны;  $\Delta E = E_3 - E_2$ .

Таким образом,  $\Delta E = hc/\lambda$ . Подставив в эту формулу числовые значения длины волны  $\lambda$ , постоянной Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  и скорости  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , найдём  $\Delta E = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

**Пример 4.** Найти напряжённость электрического поля на четвёртой электронной орбите в атоме водорода.

*Решение.* Согласно теории Бора, радиус  $n$ -й орбиты в атоме водорода вычисляется по формуле

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad (3.44)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная;  
 $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса электрона;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона.

Напряжённость электрического поля на  $n$ -й орбите

$$E_n = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (3.45)$$

Подставив в выражение (3.45) значение (3.44), получим

$$E_n = \frac{m_e^2 e^5}{64\pi^3 \epsilon_0^3 n^4 \hbar^4}. \quad (3.46)$$

Подставив в формулу (3.46) числовые значения величин и произведя вычисления, найдём напряжённость электрического поля на четвёртой ( $n = 4$ ) орбите:  $E_4 = 2 \cdot 10^9$  В/м.

**Пример 5.** Определить длину волны, соответствующую второй спектральной линии в серии Лаймана.

*Решение.* Длина волны фотона, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе из одного состояния в другое:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (3.47)$$

где  $R'$  – постоянная Ридберга, равная  $1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>;  $n_1$  и  $n_2$  – номера уровней, между которыми происходит переход.

В серии Лаймана переходы происходят на уровень  $n_1 = 1$ , следовательно, второй спектральной линии будет соответствовать переход с уровня  $n_2 = 3$ . Тогда

$$\frac{1}{\lambda_2} = 1,097 \cdot 10^7 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \left( 1 - \frac{1}{9} \right) = 0,975 \cdot 10^7 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

Откуда

$$\lambda_2 = 102,6 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

**Пример 6.** Атом водорода, находившийся в основном состоянии, поглотил квант света с энергией  $\varepsilon = 10,2$  эВ. Определить изменение момента импульса  $\Delta L_i$  орбитального движения электрона. В возбуждённом атоме электрон находится в  $p$ -состоянии.

*Решение.* Орбитальный момент импульса

$$\Delta L_i = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (3.48)$$

где  $\ell$  – орбитальное квантовое число;  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

В основном состоянии  $\ell = 0$ , следовательно,  $L_i = 0$ . В возбуждённом ( $p$ -состоянии)  $\ell = 1$ , следовательно,  $L_i = \hbar \sqrt{2}$ .

Тогда изменение орбитального момента  $\Delta L_i = -\hbar \sqrt{2}$ .

Подставив значение постоянной Планка, получим

$$\Delta L_i = 1,05 \cdot 10^{-34} \sqrt{2} \approx 1,49 \text{ (Дж · с)}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить радиусы  $r_2$  и  $r_3$  второй и третьей орбит в атоме водорода.
2. Определить скорость  $v$  электрона на второй орбите атома водорода.
3. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
4. Определить потенциальную  $U$ , кинетическую  $W$  и полную  $E$  энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.
5. Определить длину волны  $\lambda$ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.
6. Найти наибольшую  $\lambda_{\max}$  и наименьшую  $\lambda_{\min}$  длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).
7. Вычислить энергию  $\varepsilon$  фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
8. Определить наименьшую  $\varepsilon_{\min}$  и наибольшую  $\varepsilon_{\max}$  энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
9. Фотон с энергией  $\varepsilon = 16,5$  эВ выбил электрон из невозбуждённого атома водорода. Какую скорость  $v$  будет иметь электрон вдали от ядра атома?
10. Вычислить круговую частоту обращения электрона на вто-



рой боровской орбите иона  $\text{He}^+$ .

11. Вычислить для атомарного водорода длины волн первых трёх линий серии Бальмера.

12. Вычислить квантовое число  $n$ , соответствующее возбуждённому состоянию иона  $\text{He}^+$ , если известно, что при переходе в основное состояние этот ион испустил два фотона с длинами волн 1085 Å и 304 Å соответственно.

13. Найти энергию  $E_i$  и потенциал  $U_i$  ионизации ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{Li}^{++}$ .

14. Вычислить частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$  вращения электрона в атоме водорода на второй и третьей орбитах. Сравнить эти частоты с частотой  $\nu$  излучения при переходе электрона с третьей на вторую орбиту.

15. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны  $\lambda = 121,5$  нм. Определить радиус  $r$  электронной орбиты возбуждённого атома водорода.

16. Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ( $\lambda = 0,40 \div 0,76$  мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

17. Чему равен боровский радиус однократно ионизированного атома гелия?

### Примеры тестовых заданий

1. Магнитное квантовое число  $m$  определяет ...

1) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление магнитного поля;

2) энергию стационарного состояния электрона в атоме;

3) собственный механический момент электрона в атоме;

4) орбитальный механический момент электрона в атоме.

2. Спиновое квантовое число  $s$  определяет ...

1) энергию стационарного состояния электрона в атоме;

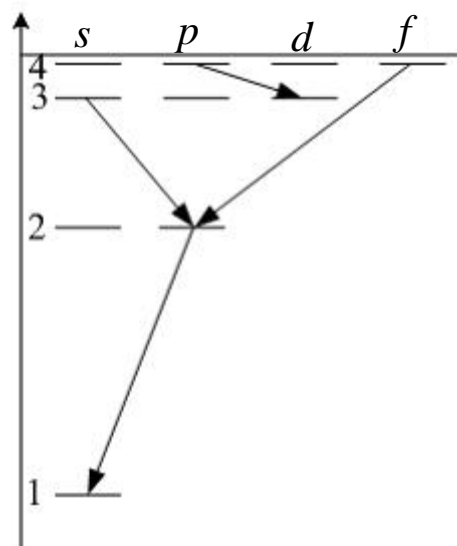
2) собственный механический момент электрона в атоме;

3) орбитальный механический момент электрона в атоме;

4) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление.

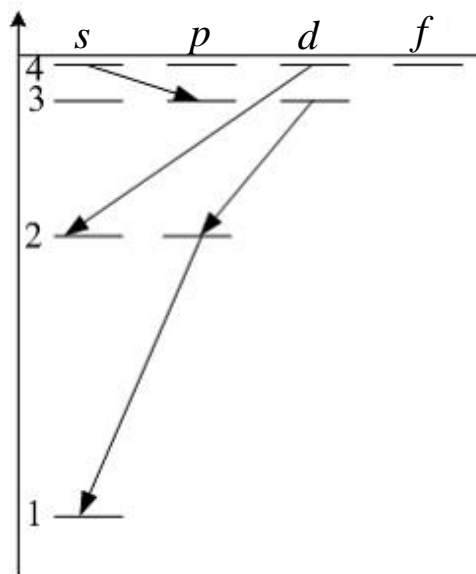
3. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода (рисунок) запрещённым переходом является ...

- 1)  $4f - 2p$ ;    2)  $2p - 1s$ ;  
3)  $3s - 2p$ ;    4)  $4p - 3d$ .



4. Закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на возможные переходы электрона в атоме с одного уровня на другой (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода (рисунок) запрещённым переходом является ...

- 1)  $4s - 3p$ ;    2)  $2p - 1s$ ;  
3)  $3d - 2p$ ;    4)  $4d - 2s$ .



5. Серия Пашена в спектре излучения атомарного водорода характеризует переходы электрона на третий энергетический уровень. Согласно правилам отбора в ней запрещены переходы между электронными состояниями ...

- 1)  $5s - 3d$ ;    2)  $4p - 3s$ ;    3)  $5d - 3p$ ;    4)  $4d - 3p$ .

6. Главное квантовое число  $n$  определяет ...

- 1) энергию стационарного состояния электрона в атоме;  
2) орбитальный механический момент электрона в атоме;  
3) собственный механический момент электрона в атоме;  
4) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление.

7. В атоме  $K$  и  $L$  оболочки заполнены полностью. Общее число электронов в атоме равно ...

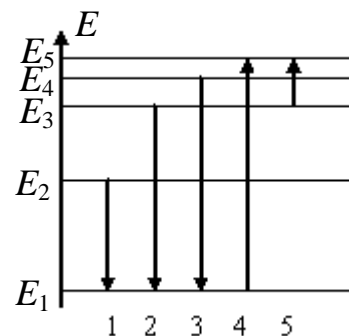
- 1) 8; 2) 6; 3) 28; 4) 10; 5) 18.

8. В единицах постоянной Планка  $\hbar$  спин фотона равен ...

- 1) 1; 2)  $3/2$ ; 3)  $1/2$ .

9. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Переход с поглощением фотона наибольшей длины волны обозначен цифрой ...

- 1) 2; 2) 1; 3) 5; 4) 4; 5) 3.



10. Электрон в атоме водорода перешёл из основного состояния в возбуждённое с  $n = 3$ . Радиус его боровской орбиты ...

- 1) увеличился в 3 раза;  
2) не изменился;  
3) увеличился в 2 раза;  
4) увеличился в 9 раз;  
5) уменьшился в 3 раз.

11. Установить соответствие квантовых чисел, определяющих волновую функцию электрона в атоме водорода, их физическому смыслу ...

1	$n$	А	определяет ориентации электронного облака в пространстве
2	$\ell$	Б	определяет форму электронного облака
3	$m$	В	определяет размеры электронного облака
		Г	собственный механический момент

- 1) 1-Г, 2-Б, 3-А; 2) 1-В, 2-А, 3-Г;  
3) 1-В, 2-Б, 3-А; 4) 1-А, 2-Б, 3-В.

## ГЛАВА 4. КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ

Термодинамика базируется на феноменологическом подходе к рассматриваемым системам и оперирует такими макроскопическими параметрами, как масса, плотность, проницаемость и т. д. При анализе различных физических явлений и процессов возможен статистический подход, в основе которого лежит представление, что любая макроскопическая система является совокупностью бесконечно большого числа частиц с заданными свойствами и определёнными законами взаимодействия. В классической физике разработана статистика Максвелла – Больцмана, описывающая распределение частиц системы в потенциальном поле. В квантовой механике в силу корпускулярно-волнового дуализма принят вероятностный подход к описанию микросостояний системы, реализующих данное макросостояние. Результаты, полученные методами термодинамики и квантовой статистики, должны быть тождественными, но при этом квантовая статистика рассматривает полученные результаты как наиболее вероятные.

### § 4.1. Основные определения

*Макросостояниями* будем считать такие состояния системы, в которых она находится в результате протекания различных процессов.

Если состояния системы определены с указанием для каждой молекулы её положения в пространстве и скорости, то эти состояния считают *микросостояниями*. Тогда состояние одной молекулы можно изобразить точкой в шестимерном пространстве, содержащем три оси координат  $x, y, z$  и три оси отсчёта компонент скорости  $v_x, v_y, v_z$  или импульса  $p_x, p_y, p_z$ . Пространство, определённое таким образом, носит название *фазового*. Каждая ячейка фазового пространства имеет объём

$$dx dy dz dp_x dp_y dp_z \leq h^3. \quad (4.1)$$

Если частица находится в пределах этого объёма, то это одно микросостояние. Данное микросостояние не изменяется, если происходит обмен или перестановка частиц внутри данного объёма, т. е. в статистике действует принцип *неразличимости тождественных частиц*.

Вместе с тем существует два типа волновых функций, описывающих состояние *тождественных* частиц: 1) *симметричные*, не изменяющие своего знака при перестановке любой пары частиц; 2) *антисимметричные*, изменяющие свой знак на противоположный при перестановке любой пары тождественных частиц. В квантовой механике доказывается, что тип волновой функции зависит от проекции вектора собственного момента импульса частицы на направление внешнего магнитного поля. Все частицы, в том числе и электроны, у которых эта проекция  $L_{Sz}$  равна нечётному числу  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , называются *фермионами*, т. е. частицами, имеющими полученный спин. Система фермионов описывается *антисимметричной* волновой функцией.

Частицы, у которых величина  $L_{Sz}$  равна нулю или чётному числу  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , называются *бозонами*. Таким образом, фермионы имеют полуцелый спин, а бозоны – целый спин. Система, состоящая из бозонов, описывается *симметричной* волновой функцией.

В системе фермионов действует *принцип Паули*, согласно которому любые два из них не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии.

*Квантовая статистика ставит своей задачей нахождение функции распределения частиц по координатам, импульсам, энергии и т. д., позволяющих определять средние значения этих параметров, реализующих данное макросостояние системы.*

В связи с тем, что бозоны не подчиняются принципу Паули, имеются две квантовые статистики: Ферми – Дирака (для фермионов) и Бозе – Эйнштейна (для бозонов).

Исходя из выражения (4.1) за элементарную ячейку шестимерного пространства принят объём  $dt = \hbar^3$ .

С математической точки зрения будем считать, что все микросостояния являются равновероятными. Объём ячейки не может быть меньше  $\hbar^3$ . Если некоторый объём разбить на ячейки объёмом  $\hbar^3$ , то получим число ячеек, содержащихся в данном объёме. При этом в объёме, равном половине ячейки, может находиться один фермион, или он окажется пустым. Если полное число частиц в системе  $N$ , а её макросостояние задаётся числами  $N_1, N_2, \dots, N_i$  на раз-

личных участках фазового пространства, при этом должно выполняться соотношение

$$\sum_i N_i = N, \quad (4.2)$$

а для энергии  $E$  системы соотношение

$$\sum_i N_i E_i = E. \quad (4.3)$$

## § 4.2. Функции распределения Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна

Пусть участок фазового пространства состоит из  $n_i$  ячеек и содержит при данном макросостоянии  $N_i$  частиц. Обозначим микросостояния символически цифрами 1 и 0, где 1-ячейка содержит одну частицу и 0-ячейка не содержит частицу, т. е. пустая. Тогда для заданного фазового пространства будем иметь  $N_i$  единиц и  $(n_i - N_i)$  нулей. Перестановка единиц и нулей даёт символическое изображение нового микросостояния. Тогда число перестановок

$$N = \frac{n_i!}{N_i!(n_i - N_i)!}. \quad (4.4)$$

Поскольку (4.4) применимо и к перестановкам  $N_2$  по ячейкам  $n_2$  и т. д., то общее число микросостояний, реализующих данное макросостояние, т. е. термодинамическая вероятность

$$W = \prod_i \frac{n_i!}{N_i!(n_i - N_i)!}, \quad (4.5)$$

где знак  $\prod_i$  – знак произведения величин по всем ячейкам фазового пространства. Формула (4.5) справедлива для фермионов с учётом принципа Паули.

Если термодинамическая вероятность, определяемая выражением (4.5), достигает максимума, то это является условием достижения системой термодинамического равновесия, отклонения от которого незначительны и носят характер флуктуаций.

В этой связи необходимо отыскать максимум функции (4.5). С этой целью вводят дополнительную функцию  $\phi$  и берут  $\ln W$  и используют метод неопределённых множителей Лагранжа. После упрощений берут производную от  $\phi$  по  $N_i$  и, приравняв её нулю, получают выражение

$$N_i = \frac{n_i}{\frac{e^{\frac{E-\mu}{kT}}}{+1}}, \quad (4.6)$$

где  $E$  – энергия, соответствующая заполняемой ячейке;  $\mu$  – химический потенциал, определяемый термодинамическим выражением  $\mu = \frac{U - TS + pV}{N}$ ;  $U$  – внутренняя энергия;  $S$  – энтропия;  $p$ ,  $V$  – давление и объём соответственно;  $kT$  – энергия теплового движения.

Формула (4.6), определяющая среднюю заселённость фермионами состояний с заданной энергией, т. е. среднее число частиц в одном состоянии, носит название распределения Ферми – Дирака и имеет вид

$$f_{\Phi} = \frac{N_i}{n_i} = \frac{1}{\frac{e^{\frac{E-\mu}{kT}}}{+1}}. \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что если  $f_{\Phi} = \frac{1}{2}$ , то ячейки заполнены в среднем наполовину, а если  $f_{\Phi} = 1$ , то ячейки заполнены полностью.

Для нахождения функции распределения частиц по энергии построим в пространстве импульсов две концентрические сферы радиусами  $p$  и  $p + dp$  (т. е. импульс и его приращение). Объём шарового слоя равен  $4\pi p^2 dp$ , в нём разместится  $Z$  элементарных ячеек объёмом  $\hbar^3$ , т. е.

$$Z = \frac{4\pi p^2 dp}{\hbar^3} V, \quad (4.8)$$

где  $V$  – объём.

Согласно классическим зависимостям  $E = \frac{p^2}{2m}$ , а  $p^2 = E \cdot 2m$ .

Следовательно,  $dp = \left(\frac{m}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} dE$ , а выражение (4.8) переписется в виде

$$Z = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE}{\hbar^3}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) представляет собой число ячеек в объёме  $V$ . Следовательно, для числа ячеек в единице объёма получим выражение

$$z = \frac{Z}{V} = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE}{h^3}. \quad (4.10)$$

Графическое изображение выражения (4.10) представлено на рис. 4.1.

Число частиц, подчиняющихся статистике Ферми – Дирака, в этих ячейках можно найти путём умножения выражения (4.10) на выражение (4.7) с учётом того, что в каждом квантовом состоянии с энергией  $E_i$  могут находиться не более двух частиц.

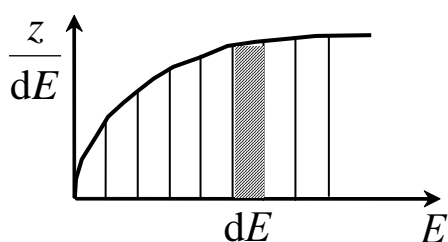


Рис. 4.1. Графическое представление распределения числа ячеек по энергиям в единице объёма

После перемножения получим

$$dN_i(E) = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE}{h^3 \left( e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1 \right)}. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) определяет число частиц (фермионов) в ячейках, распределённых по энергиям в единице объёма.

В статистике Бозе – Эйнштейна частицы не подчиняются запрету Паули, поэтому считаются неразличимыми. Спин бозонов равен нулю или целому числу  $\hbar$ . В одной ячейке может находиться произвольное число частиц. При подсчёте микросостояний не учитываются взаимоперемещения частиц между ячейками как не приводящие к новым микросостояниям. Необходимо найти число отличных друг от друга размещений частиц по ячейкам фазового пространства, а после этого найти наиболее вероятное распределение, соответствующее максимуму термодинамической вероятности. При этом энергии  $E_i$  соответствуют  $n_i$  ячеек и  $N_i$  частиц, т. е.  $(n_i + N_i)$  элементов.

Число различных способов размещения  $N_i$  частиц по  $n_i$  ячейкам в статистике Бозе – Эйнштейна имеет вид



$$N = \frac{(n_i + N_i - 1)!}{N_i!(n_i - 1)!}. \quad (4.12)$$

А термодинамическая вероятность определяется выражением

$$W = \prod_i \frac{(n_i + N_i - 1)!}{N_i!(n_i - 1)!}. \quad (4.13)$$

Как и в статистике Ферми – Дирака, максимум вероятности определяют путём введения вспомогательной функции  $\phi$ , для отыскания которой используют формулу Стирлинга и метод неопределённых множителей Лагранжа. После исследования функции  $\phi$  на экстремум получают распределение частиц по ячейкам Бозе – Эйнштейна:

$$N_i = \frac{n_i}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}. \quad (4.14)$$

Функция Бозе – Эйнштейна, показывающая заполнение ячеек, записывается следующим образом:

$$f_B = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}. \quad (4.15)$$

### § 4.3. Распределение Ферми – Дирака для электронного газа в металлах в зависимости от температуры

Электронный газ в металлах называется вырожденным, так как его свойства отличаются от свойств классического идеального газа. Фермионы и бозоны ведут себя различно при вырождении.

Температуру вырождения газа можно найти из равенства энергии квантовой частицы

$$E = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{2m}, \quad (4.16)$$

где  $n_0$  – концентрация частиц; энергия классической частицы

$$E = \frac{3}{2} kT_B, \text{ где } T_B \text{ – температура вырождения газа.}$$

Из равенства данных выражений вытекает, что температура вырождения равна

$$T_B = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{3mk}, \quad (4.17)$$

где  $m$  – масса частицы;  $k$  – постоянная Больцмана.

Для электронного газа в металлах  $n_0 \approx 10^{29} \frac{1}{\text{м}^3}$ ,

$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Тогда температура вырождения примерно  $T_B = 2 \cdot 10^4$  К, т. е. электронный газ в металлах при обычной температуре всегда вырожден.

Рассмотрим поведение функции распределения Ферми – Дирака при  $T = 0$  К.

Из формулы  $f_F = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$  следует, что при  $T \rightarrow 0$

$(E \rightarrow \mu(0) < 0)$ , а  $e^{\frac{E-\mu(0)}{kT}} \rightarrow \infty$ , следовательно, функция распределения Ферми – Дирака стремится к нулю (рис. 4.2).

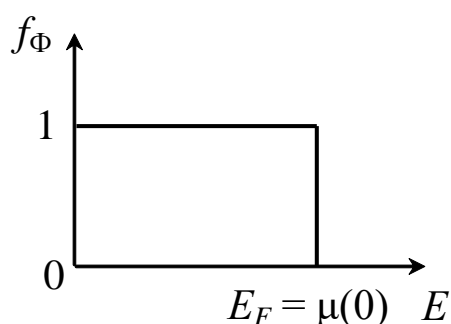


Рис. 4.2. Функция распределения Ферми – Дирака для электронного газа при 0 К

Согласно данному графику можно утверждать, что все энергетические состояния равномерно заполнены по одному электрону вплоть до максимума энергии  $E_F$ , которую называют энергией Ферми. Следовательно, энергия Ферми – это максимум энергии электронов в металлах, которую они могут иметь при температуре  $T = 0$  К.

При повышении термодинамической температуры, т. е. при  $T > 0$  К, функция распределения Ферми – Дирака изменяется незначительно (рис. 4.3), т. е. она незначительно искажается только в интервале энергии  $kT$ , но при  $E_F = \mu(0)$  она равна только  $1/2$ , а не 1.

Распределение фермионов по энергиям определяется выражением (4.11). При  $T = 0$  К оно представлено на рис. 4.4 (1), при  $T > 0$  К – на рис. 4.4 (2).

Зависимость химического потенциала от температуры имеет следующий вид [1]:

$$\mu = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad (4.18)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми.

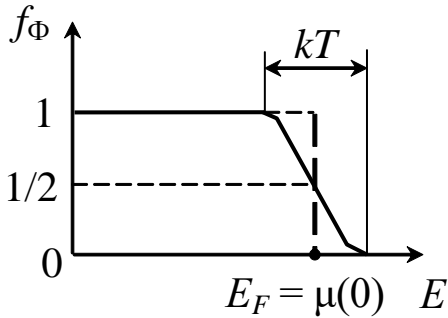


Рис. 4.3. Функция распределения Ферми – Дирака для электронного газа при  $T > 0$  K

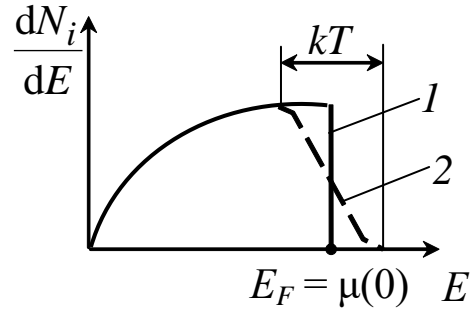


Рис. 4.4. Функция распределения электронов по энергиям при  $T = 0$  K (1) и при  $T > 0$  K (2)

Согласно (4.18)  $\mu$  для металлов при повышении температуры отличается от  $E_F$ .

#### § 4.4. Закон Ома в квантовой теории металлов

В классической теории электропроводности металлов закон Ома в дифференциальной форме записывается следующим образом:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (4.19)$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока;  $\gamma$  – удельная электропроводность;  $\vec{E}$  – напряжённость электрического поля.

Удельная электропроводность металлов при этом рассчитывается по формуле

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (4.20)$$

где  $n$  – концентрация электронов;  $\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега электрона;  $\langle u \rangle$  – средняя скорость теплового движения электрона;  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона соответственно.

В квантовой теории движение электрона в металле под действием электрического поля является неравновесным процессом вследствие ускоряющего действия электрического поля и тормозно-

го действия столкновений электронов с ионами, находящимися в узлах кристаллической решётки.

Плотность тока может быть описана следующей функцией:

$$\vec{j} = \frac{2me^2}{\hbar^3} \tau \vec{E} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial f_0}{\partial p} du_x du_y du_z, \quad (4.21)$$

где  $\tau$  — время, в течение которого неравновесное распределение электронов, возмущённых электрическим полем, стремится к равновесному  $f_0$  после столкновений.

Если обозначить через  $\gamma$  выражение

$$\gamma = \frac{2me^2}{\hbar^3} \tau \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial f_0}{\partial p} du_x du_y du_z, \quad (4.22)$$

то получим и в квантовой теории выражение закона Ома, как и в классической теории:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

После вычисления интеграла (4.22) А. Зоммерфельд получил следующее выражение для удельной электропроводности металлов:

$$\gamma = \frac{ne^2}{m} \frac{\langle \lambda(\mu) \rangle}{\langle u(\mu) \rangle}, \quad (4.23)$$

где  $\langle \lambda(\mu) \rangle$  — средняя длина свободного пробега электрона, обладающего энергией Ферми;  $\langle u(\mu) \rangle$  — средняя скорость электрона, энергия которого равна энергии Ферми.

Внешний вид соотношений (4.20) (классические представления) и (4.23) (квантовая теория) достаточно близок, но смысл входящих в них величин  $\langle \lambda \rangle$  и  $\langle u \rangle$  совершенно разный.

Действительно, в формуле (4.23) средняя скорость электронов в металле зависит от химического потенциала, а в классической теории средняя скорость движения электронов пропорциональна  $\sqrt{T}$ .

В формуле (4.20)  $\langle \lambda \rangle$  понимается как средняя длина свободного пробега электрона, которая примерно равна периоду кристаллической решётки. В квантовой теории нужно учитывать, что движение электронов в металле нужно поставить в соответствие распространению волн де Бройля

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv}. \quad (4.24)$$

Здесь необходимо иметь в виду, что постоянная решётки и длина волны де Бройля должны быть одного порядка, т. е. соизмеримы. Но если ионы, находящиеся в узлах решётки, неподвижны, то волны сквозь такую решётку будут проходить свободно, т. е. без рассеяния. Тепловые колебания ионов в узлах решётки создают флуктуации плотности в объёме решётки, что и приводит к рассеянию волн де Бройля и появлению электрического сопротивления металлов. Согласно [1], коэффициент рассеяния можно выразить следующим образом:

$$\langle \lambda(\mu) \rangle = \frac{Ed}{\pi n k T}. \quad (4.25)$$

Расчёт по формуле (4.25) даёт значение средней длины свободного пробега, на два порядка превышающее период кристаллической решётки. После подстановки (4.25) в (4.23) получим выражение для расчёта удельной электропроводности металлов с учётом квантовых представлений:

$$\gamma = \frac{e^2 Ed}{m \langle u(\mu) \rangle \pi k T}. \quad (4.26)$$

Из выражения (4.26) следует, что удельная электропроводность металлов обратно пропорциональна термодинамической температуре, что согласуется с экспериментальными данными и не может быть объяснено в рамках классической теории электропроводности.

#### § 4.5. Понятие о сверхпроводимости

Опыт показывает, что формула (4.26) справедлива при  $T_0 > 273$  К. При температурах значительно меньших  $T_0$  удельное сопротивление металлов уменьшается и стремится к некоторому постоянному значению, которое называют остаточным, т. е.

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \rho_{\text{ост}}. \quad (4.27)$$

Отношение  $\frac{\rho}{\rho_{\text{ост}}}$  при  $T = 20$  К для золотых образцов может составлять от 0,005 до 0,0010 в зависимости от химической чистоты металла. Низкие температуры до нескольких десятых долей Кель-

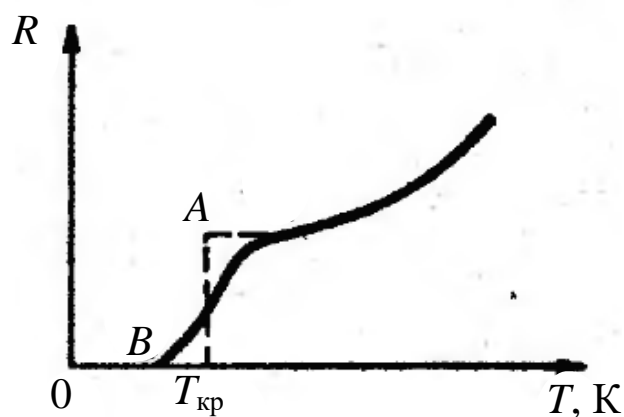
вина были получены путём испарения жидкого гелия при пониженном давлении. Температура порядка 0,003 К была получена адиабатным размагничиванием парамагнитных солей.

Удельное сопротивление ртути при низких температурах изучал в 1911 г. голландский учёный Камерлинг-Оннес. В его опытах замкнутый проводник из твёрдой ртути помещался между полюсами электромагнита. При выключении тока в обмотке электромагнита в проводнике возникал индукционный ток, который при нормальных условиях быстро затухал. Если проводник был охлаждён с помощью жидкого гелия до температуры 4,21 К, то его удельное сопротивление резко уменьшалось и индукционный ток продолжался достаточно долго. Данное явление получило название сверхпроводимости. Оно было обнаружено у 22 металлов, таких как свинец, цинк, алюминий и др., а также у сплавов висмута и золота и др.

На рис. 4.5 представлена графическая зависимость изменения сопротивления проводников и переход их в состояние сверхпроводимости при понижении температуры [1].

Температуру перехода называют критической. При данной температуре сопротивление проводника равно половине сопротивления в точке *A*, а удельное сопротивление составляет порядка  $10^{-25}$  Ом · м. Кроме того, у сверхпроводников наблюдаются особые магнитные и другие свойства. Теория сверхпроводимости была создана в 1957 г. благодаря накопленному экспериментальному материалу. Она позволила также по-новому подойти к проблеме квантования физических величин.

Существенный вклад в понимание сверхпроводимости внесли советские и российские физики Виталий Гинзбург, Лев Ландау, Николай Боголюбов, Алексей Абрикосов (Нобелевская премия в 2003 г. присуждена В. Гинзбургу и А. Абрикосову).



*Рис. 4.5. Зависимость сопротивления проводника от температуры в области перехода его в сверхпроводящее состояние*

В 1987 г. Нобелевскую премию по физике получили И. Беднорц и К. Мюллер за открытие высокотемпературной сверхпроводимости (ВТС). Они обнаружили её у некоторых материалов, имеющих керамическое происхождение. ВТС была обнаружена на 35 К выше абсолютного нуля. В настоящее время максимальная температура сверхпроводящего перехода составляет 165 К. Японский исследователь Х. Хосоно из Токийского университета обнаружил принципиально новый вид сверхпроводящего материала, в состав которого входило железо.

Сверхпроводящее состояние физики называют макроскопическим квантово-механическим состоянием.

#### **§ 4.6. Эффект Мейснера**

Он был открыт в 1933 г. Суть его заключается в том, что магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводника. Индукция магнитного поля в обычном проводнике, помещённом во внешнее магнитное поле, отлична от нуля. Но если понижать температуру проводника до значений, меньших критической, он переходит в сверхпроводящее состояние, при этом внешнее магнитное поле выталкивается из проводника и индукция внутри него будет равна нулю, т. е.  $B = 0$ .

Мейснер обнаружил, что в присутствии небольшого по интенсивности магнитного поля сверхпроводники напоминают идеальные диамагнетики. Если поместить магнит над сверхпроводником, то этот магнит будет висеть в воздухе. Магнит создаёт в сверхпроводнике своё «зеркальное отражение» и отталкивается от него. Этот эффект может быть использован в будущем для создания скоростных бесконтактных транспортных средств.

Эффект Мейснера можно объяснить следующим образом. При помещении сверхпроводящего образца во внешнее магнитное поле в его поверхностном слое возникает электрический ток, индукция которого в сверхпроводнике имеет направление, обратное индукции внешнего поля. В результате магнитное поле в сверхпроводнике будет отсутствовать. Но оно будет существовать в его поверхностном слое. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник составляет порядка  $10^{-8}$  м.

Если индукция внешнего магнитного поля увеличивается, то при её некотором критическом значении сверхпроводимость разру-

шается и сверхпроводник переходит в обычный проводник. При увеличении температуры сверхпроводника уменьшается индукция магнитного поля, разрушающего сверхпроводник, и при  $T = T_{кр}$  индукция критического магнитного поля равна нулю.

#### § 4.7. Элементы теории сверхпроводимости

В основу теории сверхпроводимости была положена идея, что переход проводника в сверхпроводящее состояние обусловлен взаимодействием электронов с кристаллической решёткой металла, в узлах которой расположены ионы. Но электрическое сопротивление также обязано этому взаимодействию. Основоположниками теории сверхпроводимости считаются Бардин, Купер и Шриффер, которые её опубликовали в 1957 г. Её называют теорией БКШ. В. Гинзбург и Л. Ландау создали полуфеноменологическую теорию сверхпроводимости. Определённый вклад в развитие теории сверхпроводимости внёс академик Н. Боголюбов. В результате было установлено, что сверхпроводимость связана с особым эффективным взаимодействием электронов с кристаллической решёткой.

Электрон, движущийся в металле, при низких температурах может деформировать кристаллическую решётку за счёт взаимодействия с ионами решётки. В результате чего происходит некоторое изменение периодичности её структуры. Электрон совместно с «облаком» положительных зарядов решётки имеет положительный заряд и будет притягиваться к другому электрону. Получается так, что кристаллическая структура сверхпроводника является средой, в которой относительная диэлектрическая проницаемость становится отрицательной, и, следовательно, электроны, имеющие одинаковые отрицательные заряды, будут притягиваться. С позиций квантовой механики движущийся электрон излучает фонон, который поглощается другим электроном. Обмен фононами при определённых условиях приводит к притяжению электронов, которое при низких температурах преобладает над их отталкиванием.

При малом удельном сопротивлении металлов, например меди и серебра, наблюдается слабое взаимодействие электронов с решёткой. В результате этого не создаются условия для межэлектронного притяжения и появления сверхпроводящего состояния.

Система электронов в сверхпроводнике состоит из связанных пар, которые называют *куперовскими*. Повышение температуры



сверхпроводника приводит к разрушению куперовских пар и переходу сверхпроводника в обычное состояние.

#### § 4.8. Эффект Джозефсона

Автором было установлено, что при создании туннельного контакта двух сверхпроводников, разделённых слоем диэлектрика толщиной порядка  $10^{-9}$  м, через контакт будет протекать электрический ток без какого-либо источника. Если величина тока не превышает определённого значения, то при этом на контакте отсутствует падение напряжения, а электроны через контакт проникают благодаря туннельному эффекту. Если ток, проходящий через контакт, превышает некоторое критическое значение, то на контакте возникает падение напряжения, а сам контакт становится источником излучения электромагнитных волн. Согласно теории электромагнитного поля излучение волн возможно только при протекании переменного тока. При этом частота  $\nu$  излучения определяется выражением

$$\nu = \frac{2eU}{h},$$

где  $U$  – падение напряжения на контакте;  $h$  – постоянная Планка;  $e$  – заряд электрона.

Размерность данного выражения

$$[\nu] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}}$$

совпадает с размерностью частоты. Объяснение электромагнитного излучения туннельного контакта двух сверхпроводников через тонкий слой диэлектрика сводится к тому, что куперовские пары электронов при переходе через контакт приобретают дополнительную по отношению к основному состоянию сверхпроводников энергию  $2eU$ . Данную энергию они излучают и возвращаются в основное состояние.

В эффекте Джозефсона квантово-механическая характеристика электрона проявляется в макроскопическом эффекте.

#### Вопросы для самоподготовки

1. Каковы исходные положения квантовой статистики в отличие от классической статистической физики? Сформулируйте основную задачу квантовой статистики.

2. Запишите распределение Бозе – Эйнштейна. Что называется химическим потенциалом  $\mu$ ?

3. Запишите распределение Ферми – Дирака. Дайте определение понятия «уровень Ферми». Какая система частиц называется вырожденной? Что такое энергия Ферми?

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Какая доля свободных электронов в металле обладает энергией в интервале от  $\frac{1}{2}E_f$  до  $E_f$  при абсолютном нуле?

*Решение.* Используем распределение Ферми – Дирака для фермионов

$$n(E)dE = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{E}dE}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right)}.$$

При абсолютном нуле температур ( $T = 0$  К) функция распределения Ферми – Дирака равна

$$f_\Phi = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right)}.$$

По условию  $E = \frac{1}{2}E_f$ , тогда число электронов будет равно

$$n(E)dE = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}E_f}dE}{1 + \exp\left(\frac{\frac{1}{2}E_f - E_f}{kT}\right)}.$$

Откуда

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,65 = 65 (\%).$$

**Пример 2.** Вычислить среднее значение кинетической энергии электронов в меди при температуре абсолютного нуля, если энергия уровня Ферми равна  $E_f = 7$  эВ.

*Решение.* Найдём суммарную кинетическую энергию всех электронов в металле воспользовавшись формулой

$$E = \int_0^{E_f(0)} E dN = \int_0^{E_f(0)} E g(E) f(E) dE.$$

Полное число электронов в металле

$$N = \int_0^{E_f(0)} dN = \int_0^{E_f(0)} g(E) f(E) dE.$$

Тогда среднее значение кинетической энергии электронов

$$\langle E \rangle = \frac{E}{N} = \frac{\int_0^{E_f(0)} E g(E) f(E) dE}{\int_0^{E_f(0)} g(E) f(E) dE}.$$

Подставим формулы для функций

$$g(E) = 4\pi V \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{E};$$

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right)}.$$

Получим

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_f(0)} E^{\frac{3}{2}} dE}{\int_0^{E_f(0)} E^{\frac{1}{2}} dE} = 0,6 E_f(0).$$

Подставим числовые значения

$$\langle E \rangle = 0,6 \cdot 7 = 4,2 \text{ (эВ)}.$$

**Пример 3.** Найти общую энергию колебаний атомов кристалла и его теплоёмкость в области низких температур ( $T \ll \Theta$ ).

*Решение.* Энергия фононов с частотой в интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  равна

$$dE(\nu) = h\nu dn(\nu) = \frac{12\pi h V \nu^3}{\nu^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu,$$

где  $dn(\nu)$  – число фононов, обладающих данной частотой;  $\nu$  – скорость упругих волн в кристалле;  $V$  – объём.

Энергия всех фононов

$$E = \frac{12\pi h V}{\nu^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где  $\nu_{\max}$  – максимальная частота Дебая.

При низких температурах верхний предел интегрирования можно заменить на  $\infty$ , так как основной вклад дают колебания (фононы) низкой частоты. Введя новую переменную  $x = \frac{h\nu}{kT}$ , получим

$$E = \frac{12\pi h V}{\nu^3} \left( \frac{kT}{h} \right) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{12\pi h V}{\nu^3} \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15}.$$

Теплоёмкость

$$c_V = \frac{dE}{dT} = \frac{16\pi^5 V k^4 T^3}{5 \nu^3 h^3}.$$

Вводя характеристическую температуру Дебая  $\Theta = \frac{h\nu_{\max}}{k}$

и используя выражение для  $\nu_{\max}^3 = \nu^3 \frac{3N}{4\pi V}$ , можно записать выражение для теплоёмкости в виде

$$c_V = \frac{12}{5} \pi^4 N k \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3,$$

где  $N$  – число атомов в кристалле.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Ширина разрешённой энергетической зоны в металлической проволоке имеет порядок 1 эВ при концентрации электронов проводимости в ней  $10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Длина проволоки 50 м, площадь сечения  $12,3 \text{ мм}^2$ . Чему равно среднее значение интервала между соседними энергетическими уровнями в зоне?

2. Кристаллический образец содержит 0,17 моля некоторого химически простого вещества. Ширина разрешённой зоны энергий равна 10 эВ. Чему равно среднее значение интервала между соседними уровнями в зоне?

3. Определить максимальную энергию электронов в кристалле алюминия при абсолютном нуле температуры.

4. Определить концентрацию свободных электронов в металле, для которого уровень Ферми соответствует 6 эВ при температуре 0 К.

5. Найти среднюю энергию электронов в металле при температуре 0 К, если их концентрация равна  $10^{29} \text{ м}^{-3}$ .

6. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа в нём равна 273 К?

7. Полагая, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону, определить температуру, при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа была бы равна средней кинетической энергии свободных электронов в меди при 0 К.

8. Полагая, что на каждый атом кристалла меди приходится по одному свободному электрону, вычислить для этого кристалла вероятность заполнения уровня, энергия которого при температуре 300 К на 0,1 % меньше энергии Ферми.

9. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в литии при изменении температуры от 100 до 300 К, если этот уровень расположен на 100 мэВ выше уровня Ферми?

10. Найти в электрон-вольтах при температуре 293 К разницу между энергией электрона, находящегося на уровне Ферми, и энергией электрона, находящегося на уровне, вероятность заполнения которого равна: а) 0,2; б) 0,8.

11. Определить, какая часть электронов проводимости в металле при 0 К имеет кинетическую энергию, превышающую половину максимальной энергии  $E_F$ .

12. Полагая, что на каждый атом серебра приходится по одному свободному электрону, оценить долю электронов, энергия которых лежит в интервале от 0,93 до 0,95 энергии Ферми: а) при  $T = 0 \text{ К}$ ; б) при  $T = 300 \text{ К}$ .

13. Вычислить температуру, при которой вероятность найти электрон в кристаллическом проводнике с энергией, на 0,5 эВ превышающей энергию Ферми, была бы равна 2 %.

14. Средний радиус ядра (за исключением самых лёгких ядер) можно рассчитать по эмпирической формуле  $R \approx (1,2 \cdot 10^{-15}) A^{1/3} \text{ м}$ ,

где  $A$  – число нуклонов в ядре. Считая, что нейтроны в ядре образуют ферми-газ, подчиняющийся статистике Ферми – Дирака, найти при  $T = 0$  К энергию Ферми нейтронов для ядра атома  ${}^8_4\text{Si}$ .

15. Считая, что протоны в ядре образуют ферми-газ, подчиняющийся статистике Ферми – Дирака, найти при  $T = 0$  К энергию Ферми нейтронов для ядра атома  ${}^{35}_{12}\text{U}$ .

16. Найти долю свободных электронов в металле при 0 К, кинетическая энергия которых больше половины максимальной.

17. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при абсолютном нуле. Энергия Ферми для натрия  $E_f(0) = 3,12$  эВ. Плотность натрия  $\rho = 970$  кг/м<sup>3</sup>.

18. Получить функцию распределения свободных электронов по дебройлевским длинам волн в металле при 0 К. Изобразить её график.

19. Найти энергию фонона, соответствующую граничной частоте Дебая, если характеристическая температура Дебая  $\Theta = 250$  К.

20. Период  $a$  решётки одномерного кристалла (т. е. кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен  $3 \text{ \AA}$ . Определить максимальную энергию фоонов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Скорость звука в кристалле  $v = 5 \cdot 10^3$  м/с.

21. Найти частоту электромагнитных волн, излучаемых контактом Джозефсона, к которому приложено напряжение  $U = 10$  мВ.

### Примеры тестовых заданий

1. Для куперовских электронных пар в сверхпроводнике имеет место статистика ...

- 1) Больцмана;
- 2) Бозе – Эйнштейна;
- 3) Ферми – Дирака;
- 4) Гаусса.

2. Распределение энергии вырожденного электронного газа удовлетворяет распределению ...

- 1) Больцмана;
- 2) Бозе – Эйнштейна;
- 3) Ферми – Дирака;
- 4) Гаусса.

3. Если в одном квантовом состоянии может находиться не более одной частицы, то статистическим распределением по энергии является распределение ...

- 1) Больцмана;
- 2) Бозе – Эйнштейна;
- 3) Ферми – Дирака;
- 4) Гаусса.

4. Выберите изотопы ядер водорода и гелия, которые подчиняются статистике Ферми – Дирака:

- 1) H (протий);
- 2) D (дейтерий);
- 3) T (тритий);
- 4)  $\text{He}^3$ ;
- 5)  $\text{He}^4$ ;
- 6)  $\text{He}^6$  (нестабильный).

5. Частицы с целым спином являются фермионами:

- 1) да;
- 2) нет.

6. Частицы с полуцелым спином являются фермионами:

- 1) да;
- 2) нет.

7. Два фотона могут находиться в одинаковом состоянии:

- 1) да;
- 2) нет.

8. Увеличение температуры Дебая при нагревании твёрдых тел является следствием их расширения:

- 1) да;
- 2) нет.

9. Укажите из приведённой последовательности частиц и их образований те, что подчиняются статистике Ферми – Дирака:

- 1) позитроны;
- 2) фотоны;
- 3) нейтроны;

- 4)  $\mu$ -мезоны;
- 5)  $\pi^0$ -мезоны;
- 6)  $\pi^\pm$ -мезоны;
- 7) фононы;
- 8) куперовские пары;
- 9) протоны.

10. Укажите из приведённой последовательности частиц и их образований те, что подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна:

- 1) позитроны;
- 2) фотоны;
- 3) нейтрино;
- 4)  $\mu$ -мезоны;
- 5) электроны;
- 6)  $\pi^-$ -мезоны;
- 7) фононы;
- 8) нейтроны.



## ГЛАВА 5. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Классическая теория электропроводности твёрдых тел основывается на движении свободных электронов под действием напряжённости внешнего электрического поля в пределах кристаллической решётки. При этом они периодически сталкиваются с ионами кристаллической решётки. В квантовой теории к электронам проводимости применялась статистика Ферми – Дирака, но не бралось во внимание, что ионы кристаллической решётки создают своё электрическое поле, которое, конечно, влияет на поведение электронов проводимости. Квантовая теория не объясняет роли числа валентных электронов в механизме электропроводности. Она должна объяснить существование класса *полупроводников*, электропроводность которых изменяется в широких пределах.

Данные вопросы получили своё разрешение с позиций *зонной теории* твёрдых тел.

Если ионы кристаллической решётки создают своё электрическое поле, то задачей зонной теории является описание движения электронов в этой зоне. В зонной теории используются два метода: приближение сильной связи и приближение слабой связи.

В первом методе принято, что электроны у каждого атома твёрдого тела имеют свою систему дискретных энергетических уровней. Энергия связи электрона в атоме значительно больше кинетической энергии движения электрона в пределах кристаллической решётки. Валентные электроны могут переходить от одного атома к другому только при их сближении на расстояние, соизмеримое с их размером.

Метод, основанный на приближении слабой связи, напротив, основан на том, что энергия взаимодействия электронов с решёткой значительно меньше, чем их кинетическая энергия. Следовательно, можно использовать уравнение Шредингера с учётом наличия электрического поля кристаллической решётки.

### § 5.1. Ширина энергетических зон

Принято считать, что энергетические уровни зависят от главного  $n$  и орбитального  $\ell$  квантовых чисел и не зависят от магнитного  $m$  и спинового  $s$  квантовых чисел. Ширина энергетических уров-

ней электрона в атоме определяется соотношением неопределённостей для энергии и времени возбуждённого состояния, т. е.

$$\Delta E_{n,e} \tau \geq \hbar. \quad (5.1)$$

Если в выражении (5.1) принять, что  $\tau \approx 10^{-8}$  с, то ширину энергетического уровня можно принять в диапазоне

$$\Delta E_{n,e} \approx \frac{\hbar}{\tau} = 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ эВ}, \quad (5.2)$$

а расстояние между уровнями энергии составляет порядка 1 эВ.

При сближении атомов на расстояние, равное параметру кристаллической решётки, происходит перекрытие их электрических полей (рис. 5.1), в результате чего происходит понижение и сужение потенциального барьера для валентных электронов. Туннельный эффект позволяет переходить электронам от одного атома к другому.

Частоту просачивания валентного электрона сквозь потенциальный барьер определим по формуле

$$v = Dn, \quad (5.3)$$

где  $D$  – параметр прозрачности барьера;  $n$  – число ударов электрона о стенку барьера в единицу времени.

Тогда частота туннельного просачивания электрона равна

$$v = \frac{v}{2d} \exp \left[ -\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} \right], \quad (5.4)$$

где  $d \approx 10^{-10}$  м – параметр решётки;  $v$  – скорость движения электрона в атоме составляет порядка  $10^6$  м/с;  $(U_0 - W) \approx 6$  эВ.

Расчёт по (5.4) показывает, что частота просачивания  $v \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Среднее время жизни электрона в этом атоме есть величина

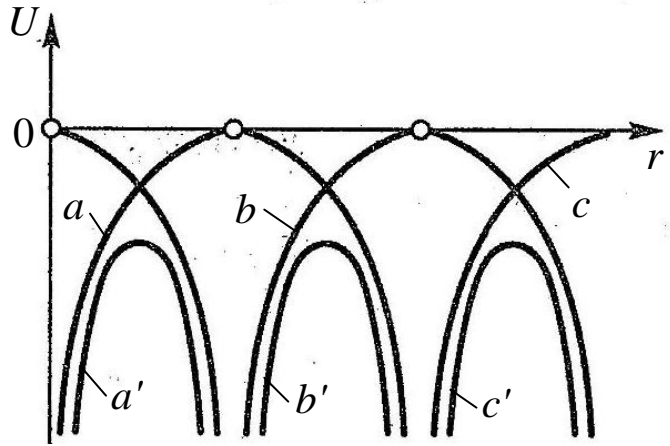
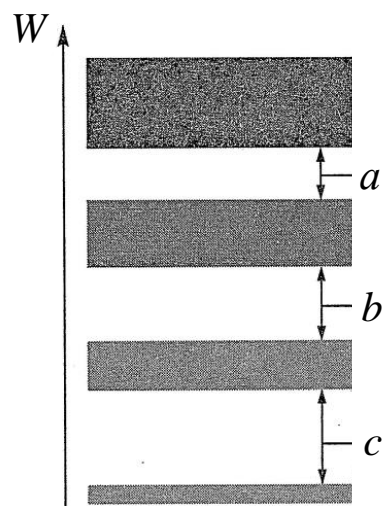


Рис. 5.1. Изменение потенциальных полей при сближении атомов:  $a, b, c$  – вид потенциального поля каждого атома в отдельности;  $a', b', c'$  – их вид при сближении атомов

$$\tau = \frac{1}{\nu} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ с},$$

которая меньше, чем среднее время жизни изолированного атома (на семь порядков). В этом случае нельзя говорить о принадлежности электронов к определённым атомам. Они становятся общими и образуют квантовый электронный газ, который может перемещаться по всей кристаллической решётке. Ширина энергетического уровня электрона при этом будет  $\Delta W \approx \frac{h}{\tau} \cong 0,2 \text{ эВ}$ , т. е. все его разрешённые энергетические уровни (тёмные зоны) рассматриваются в кристаллической решётке до полос (светлые зоны) (рис. 5.2).



*Рис. 5.2. Расширенные зоны разрешённых значений энергии валентного электрона в кристалле: a, b, c – зоны запрещённых значений энергии*

## **§ 5.2. Разделение твёрдых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники с позиций зонной теории**

С позиций зонной теории все твёрдые тела отличаются друг от друга расположением разрешённых и запрещённых зон, а также их шириной. Разделение твёрдых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники основано на ширине запрещённых зон, а электрические свойства, в частности электропроводность, зависят от заполнения разрешённых зон. Электроны могут свободно переходить внутри разрешённой зоны, а для их перехода из одной разрешённой зоны в другую необходима дополнительная энергия, в каждом случае разная, но порядка нескольких электрон-вольт.

В разрешённой зоне электрон, разгоняясь под действием электрического поля на длине свободного пробега, приобретает дополнительную энергию

$$\Delta E = eE\langle\lambda\rangle, \quad (5.5)$$

где  $e$ ,  $E$  – заряд электрона и напряжённость электрического поля;  $\langle\lambda\rangle$  – средняя длина свободного пробега.

Величина  $\langle \lambda \rangle$  составляет порядка  $10^{-8}$  м, а  $E \sim 10^5$  В/м, тогда приращение энергии электрона составит порядка  $10^{-3}$  эВ. Данная величина значительно меньше ширины запрещённых зон, поэтому под действием невысоких электрических полей электроны могут перемещаться внутри разрешённых зон.

Электрическая проводимость твёрдых тел может быть осуществлена, т. е. твёрдые тела будут являться проводниками, если разрешённая зона заполнена электронами частично или пустая. Самая верхняя заполненная зона называется валентной. Также проводниками являются твёрдые тела, у которых имеется перекрытие нижних и более верхних разрешённых зон. При этом верхние разрешённые зоны должны быть заполнены частично или быть пустыми.

Величина электропроводности твёрдых тел зависит от отношения числа электронов в зоне проводимости к общему числу энергетических уровней в этой зоне.

Для *твёрдых диэлектриков* энергетический интервал (ширина запрещённой зоны), разделяющий валентную зону и зону проводимости, составляет порядка  $10^2$  эВ, и с помощью электрического поля невозможно перевести электроны из валентной зоны в зону проводимости.

Ряд твёрдых тел относят к классу полупроводников, если их удельная электропроводность находится в диапазоне  $10^4 \div 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ . К ним относится достаточно много элементов, в том числе германий, кремний, фосфор, сурьма и др. химически чистые полупроводники, т. е. не содержащие примесей, имеют правильную кристаллическую решётку. Для осуществления собственной электропроводности полупроводника электроны из валентной зоны необходимо перевести в зону проводимости. Ширина запрещённой зоны у всех полупроводников разная. Так, у германия она составляет 0,72 эВ, у кремния – 1,1 эВ, у олова – 0,1 эВ, у сурьмы – 0,12 эВ, у углерода – 5,2 эВ. Это необходимая энергия активации для осуществления собственной проводимости.

Если у твёрдого тела ширина запрещённой зоны очень мала, как, например, у олова, то оно будет диэлектриком только при очень низких температурах. Энергии теплового движения при нор-

мальных условиях достаточно для перевода данного тела в разряд проводников.

Если в твёрдом теле электрон переходит из одного к другому иону, то в оставленном им ионе возникнет избыточный положительный заряд, который называют «дыркой». Она ведёт себя как положительный заряд. Если перемещение «дырок» осуществляется под действием электрического поля, то полученный проводник в данном случае обладает дырочной проводимостью. Реально при этом происходит перемещение электронов в валентной зоне проводимости. «Дырка» – это фиктивная частица.

### § 5.3. Эффективная масса электрона в кристаллической структуре твёрдого тела

В кристаллах на направленное перемещение электронов оказывает влияние не только внешнее электрическое поле, но и внутреннее электрическое поле, образованное ионами кристаллической решётки. Действие внутреннего электрического поля можно учесть путём введения эффективной массы электрона  $m^*$ . Тогда электроны будут двигаться внутри кристалла под действием внешнего электрического поля так, как будто они двигаются в вакууме, но их масса будет отличной от  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Эффективная масса электрона может быть положительной и отрицательной. Эффективная масса имеет тензорную природу. Это значит, что в кристаллической решётке электрон движется не как частица с массой покоя, а как квазичастица, у которой масса зависит от направления её движения относительно кристаллографических осей кристалла. В табл. 5.1 приведена эффективная масса электронов и «дырок» полупроводников.

Таблица 5.1

*Эффективная масса электронов и «дырок» полупроводников*

Материал	Эффективная масса электронов $m_e^*$	Эффективная масса «дырок» $m_d^*$
Si	1,08	0,56
Ge	0,55	0,37

Экспериментально эффективная масса носителей измерялась методом циклотронного резонанса, при котором измерялось погло-

щение полупроводником волн в микроволновом спектре в зависимости от индукции магнитного поля.

Понятие эффективной массы можно получить исходя из квантовой теории. Действительно, движение свободного электрона описывается волной де Бройля, а его импульс связан с волновым вектором следующим соотношением:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (5.6)$$

Тогда энергия электрона

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2. \quad (5.7)$$

При движении электрона в кристалле под действием силы электрического поля его скорость зависит от частоты, т. е. это групповая скорость (скорость самого электрона). Она будет равна:

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{d\vec{p}} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{dE}{dk} \right), \quad (5.8)$$

а ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left( \frac{dE}{d\vec{k}} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{d\vec{k}} \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right).$$

Используя соотношение  $\frac{\partial E}{\partial t} = \vec{v} \vec{F}$ , где  $\vec{F}$  – сила, действующая на свободный электрон, а  $\vec{v}$  – его скорость, получим выражение ускорения:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\hbar} \frac{d\vec{v}}{d\vec{k}}. \quad (5.9)$$

Подставив в (5.9) выражение скорости (5.8), получим

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}. \quad (5.10)$$

В выражении (5.10) знаменатель имеет смысл массы:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E}{dk^2}}, \quad (5.11)$$

которая и носит название эффективной массы электрона. Она не отражает инерционных и гравитационных свойств электрона, а явля-

ется коэффициентом, с помощью которого можно достаточно просто описывать движение электрона в изменяющемся электрическом поле кристаллической решётки.

#### § 5.4. Заполнение зон электронами

Каждая энергетическая зона содержит ограниченное число энергетических уровней. В соответствии с принципом Паули на каждом таком уровне могут разместиться не более двух электронов с противоположными спинами. Вследствие этого окажутся заполненными в зоне только наиболее низкие энергетические уровни. Будем считать, что они не перекрываются. При этом электроны, заполняющие энергетические уровни, располагающиеся у дна зоны проводимости, ведут себя как свободные электроны с эффективной массой  $m^*$ . Поэтому их распределение по энергиям, как и распределение свободных электронов, подчиняется статистике Ферми – Дирака, а их концентрация определяется соотношением

$$dn = \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} f(E) E^{1/2} dE, \quad (5.11)$$

где  $f(E)$  – функция Ферми – Дирака;  $\hbar$  – постоянная Планка.

В выражение функции Ферми – Дирака входит химический потенциал. При абсолютном нуле химический потенциал совпадает с уровнем энергии Ферми (уровнем Ферми), который определяет энергию, ниже которой при абсолютном нуле все энергетические уровни заняты, т. е. при  $E < E_F$ , а при  $E > E_F$  все энергетические уровни свободны. У металлов при абсолютном нуле уровень энергии Ферми располагается вблизи дна зоны проводимости. У полупроводников при абсолютном нуле валентная зона, так же как и у металлов, заполнена полностью, а зона проводимости совершенно свободна. Но они разделены запрещённой зоной, ширина которой составляет  $\Delta E$ . Функция распределения здесь терпит разрыв, следовательно, уровень Ферми в химически чистых полупроводниках при абсолютном нуле лежит в запрещённой зоне.

При абсолютном нуле энергия частицы равна энергии Ферми, поэтому из выражения функции Ферми – Дирака следует, что она равна 1/2, так как  $E = E_F$ :

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что при температуре  $T$ , незначительно большей  $0\text{ К}$ , энергетический уровень, равный энергии Ферми  $E_F$ , будет заполнен наполовину, т. е. функция Ферми – Дирака будет равна  $\frac{1}{2}$ .

Схематически это представлено на рис. 5.3.

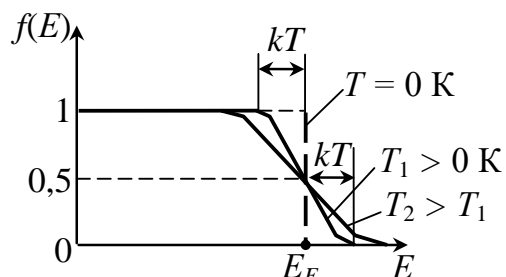


Рис. 5.3. Изменение функции распределения Ферми – Дирака для электронного газа при  $T > 0\text{ К}$

В области абсолютного нуля энергия фермионов  $E$  равна энергии Ферми  $E_F$ , функция Ферми – Дирака  $f(E)$ , отражающая заселённость фермионами данного уровня, стремится к нулю.

Изменение функции Ферми – Дирака с ростом термодинамической температуры связано с изменением характера распределения электронов по состояниям вследствие их возбуждения, энергия которого  $kT$ . При этом часть электронов переходит в состояние с энергией, большей энергии Ферми, в соответствии с выражением

$$(E - E_F) < kT \ll E_F.$$

При высоких температурах  $e^{\frac{E - E_F}{kT}} \gg 1$ . Вследствие чего

$$f(E) = e^{\frac{E_F - E}{kT}} = e^{\frac{E_F}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}} = C e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (5.12)$$

Выражение (5.12) совпадает с функцией распределения Максвелла – Больцмана.

Функция распределения Ферми – Дирака для «дырок» аналогична функции распределения для электронов. Для этого в функции Ферми нужно изменить знаки показателей экспонент. Тогда вероятность того, что некоторый энергетический уровень с энергией  $E$  свободен, т. е. занят «дыркой», может быть рассчитана по формуле

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E_F - E}{kT}} + 1}.$$

Из выражения

$$E_F = E_C - \frac{1}{2} \Delta E + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_e^*}, \quad (5.13)$$



где  $E_C$  – энергетический уровень состояния на дне зоны проводимости;  $\Delta E$  – энергия запрещённой зоны полупроводника, следует, что температурная зависимость уровня Ферми для полупроводника определяется третьим слагаемым. При этом, если эффективная масса «дырки» в валентной зоне равна эффективной массе электрона в зоне проводимости, то энергетический уровень Ферми располагается в середине запрещённой зоны, т. е.  $E_F = E_C - \frac{1}{2}\Delta E$ . Но если

эффективная масса «дырки» больше эффективной массы электрона, то уровень Ферми смещается с ростом  $T$  ближе ко дну зоны проводимости. В обратном случае уровень Ферми смещается к потолку валентной зоны. Если отношение эффективных масс «дырки» и электрона составляет порядка 10, а ширина энергии запрещённой зоны составляет десятые доли электрон-вольта, то уровень Ферми может находиться в зоне проводимости.

### § 5.5. Примесная проводимость полупроводников

Введение в полупроводник атомов или ионов другого химического элемента приводит к изменению периодического электрического поля кристалла. В запрещённой зоне появляются дополнительные локальные энергетические уровни. При этом энергия примесных электронов меньше энергии собственных электронов, располагающихся вблизи дна зоны проводимости. Электроны, располагающиеся на дополнительных уровнях в запрещённой зоне, называют *донорными*, а атомы примеси – *донорами*. Чтобы перевести донорные электроны в зону проводимости, необходима незначительная энергия, которую они могут получить при тепловой активации. При получении энергии активации электроны с донорных уровней переходят в зону проводимости. Проводимость полупроводника в этом случае называется *электронной примесной*. Это полупроводники *n*-типа. Например, у германия ширина запрещённой зоны составляет 0,72 эВ, а для активации его донорной примесной проводимости фосфором (P) требуется всего 0,012 эВ, мышьяком (As) – 0,013 эВ, сурьмой (Sb) – 0,010 эВ [1]. У кремния ширина запрещённой зоны равна 0,10 эВ. Для активации его примесной проводимости мышьяком требуется 0,050 эВ. Мышьяк, фосфор и сурьма имеют 5 валентных электронов. Из них 4 будут находиться в химической связи с атомами германия, а пятый электрон является

«лишним», он слабо связан с ядром, поэтому достаточно легко может быть переведён в зону проводимости.

Если в решётку германия встроены атомы, имеющие три валентных электрона, например бор, алюминий, индий, то данный атом может позаимствовать один электрон у ближайшего атома германия. На месте ушедшего из атома германия электрона образуется «дырка», которая может быть заполнена электроном из другого соседнего атома германия. Этот процесс будет эквивалентен перемещению «дырки» в полупроводнике. Такие примесные трёхвалентные атомы приводят к появлению в запрещённой зоне дополнительных энергетических уровней, называемых *акцепторными*. Данные энергетические уровни располагаются выше верхнего края валентной зоны кристалла. Например, при введении трёхвалентного бора в кристалл кремния акцепторные уровни лежат на 0,08 эВ [1] выше верхнего края валентной зоны. Следовательно, дырочная проводимость полупроводника связана с тем, что при незначительной активации электроны, расположенные у верхнего энергетического уровня в зоне проводимости, могут переходить на акцепторные уровни, в результате чего в валентной зоне появятся вакантные энергетические уровни. Данная зона становится зоной дырочной проводимости. Это полупроводники с проводимостью *p*-типа.

Уровень энергии Ферми при  $T = 0$  К в полупроводниках *n*-типа лежит в запрещённой зоне ниже дна зоны проводимости наполовину энергии активации. В полупроводниках *p*-типа также при абсолютном нуле положение уровня энергии Ферми определяется соотношением

$$E_F = -\Delta E + \frac{\Delta E_p}{2}, \quad (5.14)$$

где  $\Delta E$  – ширина запрещённой зоны;  $\Delta E_p$  – энергия активации акцепторных уровней.

## § 5.6. Фотопроводимость полупроводников

Для осуществления фотопроводимости беспримесный полупроводник необходимо осветить светом, у которого энергия фотона не меньше ширины запрещённой зоны. Такой фотон переводит электрон из валентной зоны в зону проводимости. Следовательно, появляется «дырка» в валентной зоне и электрон в зоне проводимо-

сти. Удельная электропроводность полупроводника под действием его облучения светом равна

$$\gamma = en[u_n \langle \tau_n \rangle + u_p \langle \tau_p \rangle], \quad (5.15)$$

где  $n$  – концентрация пар носителей (электрон – «дырка»);  $u_n$ ,  $u_p$  – подвижность электронов и «дырок»;  $\langle \tau_n \rangle$ ,  $\langle \tau_p \rangle$  – среднее время жизни носителей.

Фотопроводимость примесных полупроводников возникает в случае облучения полупроводников  $n$ - и  $p$ -типов светом, энергия кванта которого достаточна для обеспечения донорной или акцепторной проводимости, т. е. энергия кванта светового излучения не меньше энергии, необходимой для активации того или другого типа проводимости:

$$h\nu \geq \Delta E, \quad (5.16)$$

где  $\Delta E$  – энергия активации донорной или акцепторной проводимости.

Исходя из соотношения (5.16) можно утверждать, что существует красная граница для возбуждения фотопроводимости у собственных и примесных полупроводников.

## § 5.7. Контактные явления

Это физические явления, возникающие на контакте двух твёрдых тел. Практический интерес вызывает контакт двух металлов, двух полупроводников, а также термоэлектрические явления Пельтье, Томсона и Зеебека, возникающие при таких контактах.

### § 5.7.1. Контакт двух металлов

Пусть имеются два металла, отличающиеся работой выхода и электрохимическими потенциалами. При их контакте возникает контактная разность потенциалов, зависящая от их химического состава и температуры. Это явление было открыто А. Вольто в 1797 г. А. Вольто также установил, что если имеется последовательная совокупность контактов из разных металлов, то контактная разность потенциалов этой системы определяется только контактной разностью потенциалов крайних металлов.

Возникновение контактной разности потенциалов можно объяснить двумя причинами:

- а) различной работой выхода электронов из металлов;

б) различной концентрацией в них свободных электронов.

При обычных температурах свободные электроны практически не покидают металл, тогда под работой выхода нужно понимать энергию, которую необходимо сообщить электрону, чтобы он смог покинуть пределы твёрдого тела. С позиций зонной теории работа выхода электрона из металла равна энергии, которую необходимо сообщить электрону для его перевода с уровня Ферми в свободное состояние за пределы твёрдого тела, т. е.

$$A_{\text{вых}} = E_0 - E_F,$$

где  $E_0$ ,  $E_F$  – энергия свободного электрона и уровня Ферми соответственно.

В этой связи можно говорить о том, что электроны внутри твёрдого тела находятся в потенциальной яме, глубина которой равна работе выхода.

При контакте металлов с различными  $A_{\text{вых}}$ , т. е. с различным уровнем Ферми, в контактном слое происходит переход электронов металла с высоким уровнем  $E_F$  1 на более низкие уровни металла 2 (рис. 5.4). Процесс перехода электронов прекратится при достижении в металлах одинакового уровня энергии Ферми. При этом между нулевыми уровнями контактирующих металлов установится разность потенциалов, которую называют *внешней* контактной разностью потенциалов:

$$\Delta\phi' = \frac{A_1 - A_2}{e},$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  – работа выхода электронов из 1 и 2 металла соответственно;  $e$  – заряд электрона.

Величину

$$\Delta\phi'' = \frac{(E_{F1}) - (E_{F2})}{e}$$

называют *внутренней* контактной разностью потенциалов.

Между внешней и внутренней контактной разностью потенциалов существует соотношение

$$\Delta\phi'_{12} = \frac{A_1 - A_2}{e} + \Delta\phi''_{12},$$

где  $\Delta\phi'_{12}$ ,  $\Delta\phi''_{12}$  – внешняя и внутренняя контактная разность потенциалов.

Внутреннюю контактную разность потенциалов можно оценить из классической теории электропроводности металлов для нормальных условий.

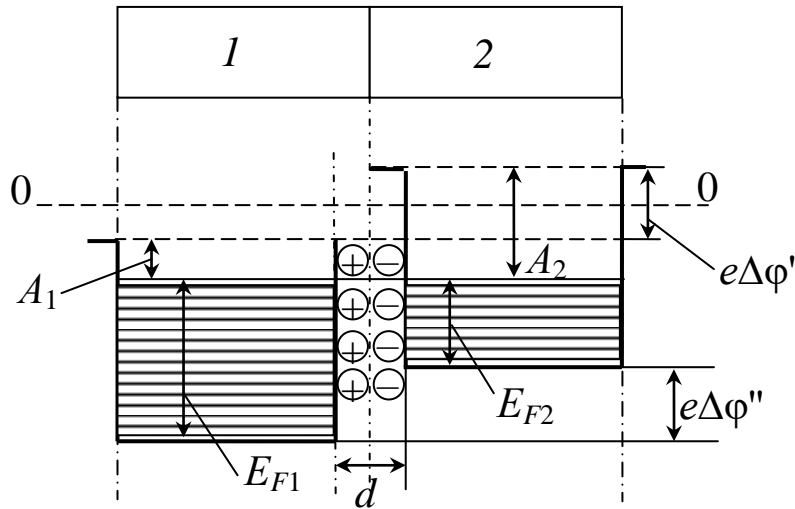


Рис. 5.4. Контакт двух металлов с различными уровнями Ферми: 00 – нулевой уровень энергии контактирующих металлов

Из классического распределения электронов в потенциальном поле (по Больцману) следует, что

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{e(\phi_1 - \phi_2)}{kT}}.$$

Откуда получим  $\ln \frac{n_1}{n_2} = -\frac{e(\phi_1'' - \phi_2'')}{kT}$ , а

$$\phi_1'' - \phi_2'' = -\frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Расчёт по данной формуле при  $T = 300$  К даёт значение внутренней разности потенциалов порядка 30 мВ.

В месте контакта металлов образуется двойной электрический слой. Этот слой можно представить в виде плоского конденсатора, ёмкость которого  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ . Учтём, что  $C = \frac{\sum q}{\Delta \phi''} = \frac{S \sigma}{\Delta \phi''}$ . После подстановки получаем

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S \Delta \phi''}{S \sigma} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta \phi''}{\sigma},$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость;  $\sigma$  – поверхностная плотность электрических зарядов;  $S$  – площадь контактной поверхности.

Толщина двойного электрического слоя не может быть меньше постоянной решётки, т. е. величины порядка  $4 \cdot 10^{-10}$  м. Тогда заряд конденсатора при  $S = 1 \text{ м}^2$  и  $\Delta\varphi'' = 3 \cdot 10^{-2} \text{ В}$  равен

$$q = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-10}} \cong 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл)},$$

а число перешедших электронов будет равно

$$n = \frac{q}{e} = \frac{6,6 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cong 4,1 \cdot 10^{15}.$$

Поскольку поверхностная плотность атомов составляет порядка  $10^{19} \text{ м}^{-2}$ , то, следовательно, для образования двойного электрического слоя требуется перетекание только части свободных электронов с контактной поверхности одного металла на контактную поверхность другого металла.

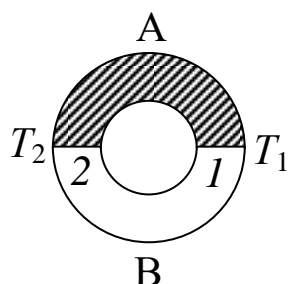
### § 5.7.2. Эффект Зеебека

Данный эффект был открыт немецким учёным Т. Зеебеком в 1827 г. Для понимания сути данного эффекта рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из металлов А и В (рис. 5.5), контакты которых 1 и 2 находятся при температурах  $T_1$  и  $T_2$ , причём  $T_1 > T_2$ . Для контакта 1 можно записать

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{A_A - A_B}{e} + \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_B}{n_A},$$

а для контакта 2:

$$\Delta\varphi_{BA} = \frac{A_B - A_A}{e} + \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_A}{n_B},$$



где  $n_A$ ,  $n_B$  – концентрация электронов в металлах;  $k$  – постоянная Больцмана;  $A_A$ ,  $A_B$  – работа выхода из металлов А и В.

Сумма этих выражений даст величину термоэдс:

$$\varepsilon_T = \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{BA} = \frac{k}{e} \ln \frac{n_B}{n_A} (T_1 - T_2).$$

Рис. 5.5. Схема к эффекту Зеебека

Обозначим  $\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_B}{n_A}$ , тогда

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T.$$

В этом выражении  $\alpha$  называется постоянной термопары. Таким образом, если спаи двух металлов поддерживать при разных температурах, то в цепи образуется термоэдс и будет протекать термоток,

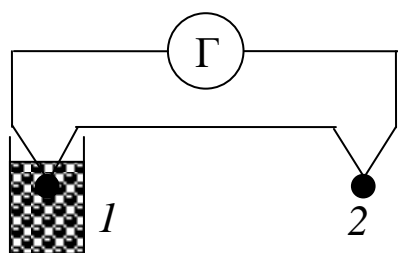


Рис. 5.6. Электрическая схема дифференциальной термопары

если цепь замкнута. На практике применяют термопару, которую называют дифференциальной (рис. 5.6).

Один из спаев помещают в сосуд с температурой таяния льда ( $0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$ ), а другой – в среду, в которой необходимо измерять температуру.

### § 5.7.3. Эффект Пельтье

Его открыл Пельтье в 1834 г. Данный эффект заключается в том, что при протекании электрического тока через спай двух металлов или полупроводников выделяется или поглощается определенное количество теплоты:

$$\delta Q = \Pi I t,$$

где  $\Pi$  – коэффициент Пельтье;  $I$  – сила тока;  $t$  – время протекания тока.

Единицей измерения коэффициента Пельтье в СИ является вольт. Для большинства пар металлов он составляет  $10^{-2} \div 10^{-3}\text{ В}$ . В полупроводниках эффект Пельтье выражен гораздо сильнее, поэтому на их базе создаются нагреватели, холодильники и т. д.

### § 5.7.4. Эффект Томсона

Предсказан У. Томсоном в 1856 г. Суть эффекта Томсона заключается в том, что если однородный проводник имеет в разных своих участках разную температуру, то при протекании по нему электрического тока происходит дополнительное выделение или поглощение тепла по сравнению с теплом, количество которого определяется законом Джоуля – Ленца.

Для наблюдения эффекта Томсона необходимо собрать следующую электрическую схему (рис. 5.7).

Левые концы проводников поддерживаются при температуре  $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а правые – при  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Таким образом, в проводниках 1 и 2 поддерживается градиент температуры. В проводнике 1 направление тока совпадает с направлением градиента температуры, а в проводнике 2 они направлены встречно. В точках  $a$  и  $b$  размещены спаи дифференциальной термопары.

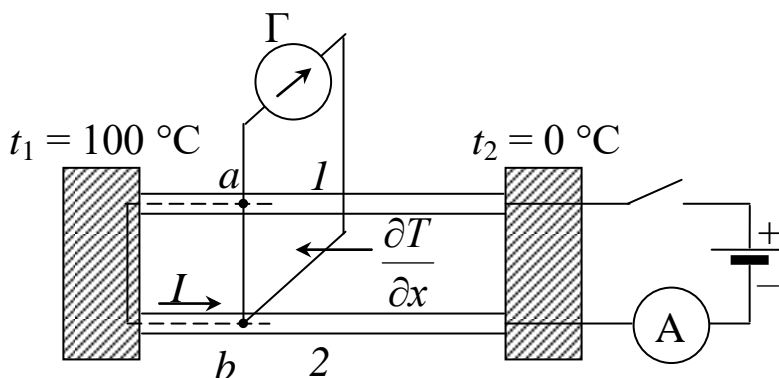


Рис. 5.7. Электрическая схема установки для изучения явления Томсона

Если ток в цепи равен нулю, то температура спаев одинакова и гальванометр не фиксирует наличие термоэдс. При пропускании тока через стержни в одном стержне выделяется дополнительное количество теплоты, а в другом теплота уменьшается.

Эффект Томсона объясняется диффузией электронов из участков проводника с более высокой температурой к участкам, имеющим более низкую температуру. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике в единицу времени при эффекте Томсона, можно рассчитать по формуле

$$\delta Q = \sigma_T I \Delta T,$$

где  $\sigma_T$  – коэффициент Томсона, зависящий от ряда свойств проводника;  $I$  – ток в проводнике;  $\Delta T$  – перепад температур в проводнике, при этом нужно учитывать, что  $\Delta T\text{ К} = \Delta T\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Для большинства металлов коэффициент Томсона равен порядка  $10^{-5}\text{ В/К}$ .

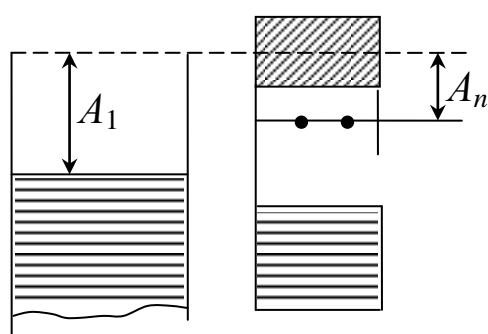
### § 5.7.5. Контакт металла с полупроводником

Полупроводник выберем  $n$ -типа. Пусть работа выхода электронов из металла больше, чем работа выхода их из полупроводни-



ка. Расположение зоны проводимости металла, валентной зоны полупроводника и его донорных уровней в исходном состоянии показано на рис. 5.8.

При контакте металла с полупроводником электроны с донорных уровней начнут переходить в металл. Следовательно, в приконтактной зоне полупроводника появится избыточный положительный заряд, а в металле – избыточный отрицательный заряд. Толщина контактного слоя составляет порядка 8 мкм. В зоне контакта у полупроводника почти нет свободных электронов и его электрическое сопротивление значительно больше, чем в остальном объёме. Этот слой называют *запирающим*.



металл полупроводник

Рис. 5.8. Расположение зон в металле и полупроводнике до их контакта:  $A_1$ ,  $A_n$  – работа выхода электрона из металла и полупроводника соответственно

Если вектор  $\vec{E}$  внешнего электрического поля направлен из металла в полупроводник, то электроны втягиваются из объёма полупроводника в контактный слой, это уменьшает его толщину, а направление называется *пропускным*. В противном случае, т. е. если к полупроводнику приложен «+» внешнего источника, к металлу – «–», т. е. вектор  $\vec{E}$  направлен из полупроводника в металл, ток через

контакт практически не проходит. Следовательно, контакт металла с полупроводником имеет одностороннюю проводимость.

#### § 5.7.6. Контакт электронного и дырочного полупроводников

Такой контакт имеет большое практическое значение, так как лежит в основе работы всех полупроводниковых приборов. Образование *p-n*-перехода обязано процессу диффузии электронов и «дырок». Вследствие чего в контактной зоне образуются объёмные заряды. Электрическое поле в контактной зоне направлено из *n*-полупроводника в *p*-полупроводник, при достижении его определённой величины процесс диффузии прекращается, точнее, наступает равновесие.

Переход электронов из  $n$ - в  $p$ -полупроводник связан с преодолением потенциала  $\phi_k$  и совершением работы  $e\phi_k$ . В результате чего все энергетические уровни электронов в  $p$ -полупроводнике подняты по сравнению с уровнями электронов в  $n$ -полупроводнике на высоту  $e\phi_k$  (рис. 5.9).

Подключение внешнего электрического поля в непроводящем направлении, т. е. «+» к  $n$ -полупроводнику, а «-» к  $p$ -полупроводнику, приведёт к увеличению потенциального барьера для электронов, переходящих из  $n$ - в  $p$ -полупроводник, который станет равным ( $e\phi_k + e\phi$ ).

Такой барьер сможет преодолеть число электронов

в  $e^{-\frac{e\phi}{kT}}$  раз меньшее по сравнению с барьером высотой  $e\phi_k$ . Толщина контактного слоя резко увеличится. Расстояние от уровня энергии Ферми до дна зоны проводимости в  $p$ -полупроводнике поднимется на величину  $e\phi$ . Поскольку полный ток через  $p$ - $n$ -переход является суммой электронных и дырочных токов, то сила тока стремится к предельному току насыщения, который в данном случае определяется потоком неосновных носителей тока в данных полупроводниках. Их кон-

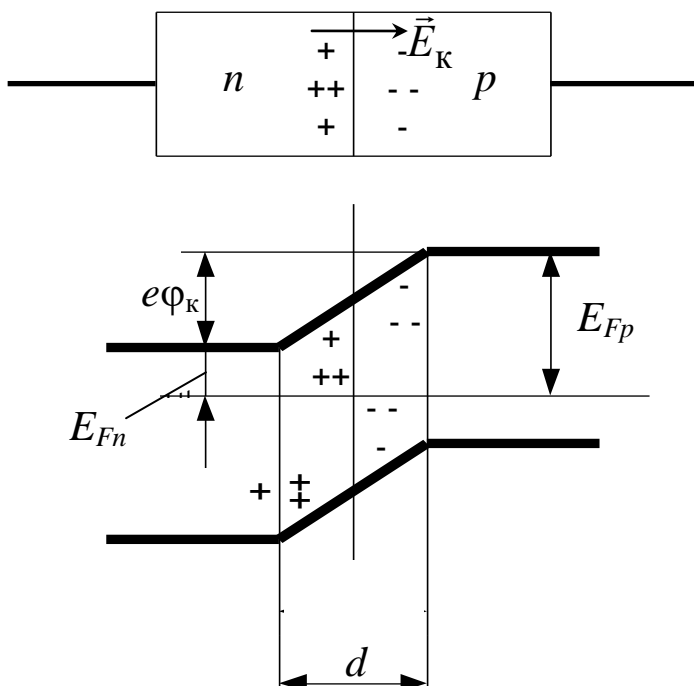


Рис. 5.9. Образование  $p$ - $n$ -перехода в контактной зоне  $p$ - и  $n$ -полупроводников:  $E_{Fn}$ ,  $E_{Fp}$  – уровни энергии Ферми в  $n$ - и  $p$ -полупроводниках;  $E_k$  – напряжённость электрического поля в контактной зоне

центрация невелика, поэтому  $p$ - $n$ -переход при таком подключении внешнего источника («+» к  $n$ -полупроводнику, «-» к  $p$ -полупроводнику) практически ток не пропускает.

Если внешний источник подключить в «проводящем» направлении, т. е. «-» к  $n$ -, а «+» к  $p$ -полупроводнику, то уровень Ферми в  $p$ -полупроводнике опустится на величину  $e\phi$ , а высота потенциального барьера для электронов, переходящих из  $n$ -

в  $p$ -полупроводник, станет равной ( $e\phi_k - e\phi$ ). Ширина переходного слоя уменьшится, а сила тока через  $p$ - $n$ -переход определяется основными носителями и растёт по экспоненциальной зависимости с ростом величины  $\phi$  внешнего напряжения. Вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода представлена на рис. 5.10.

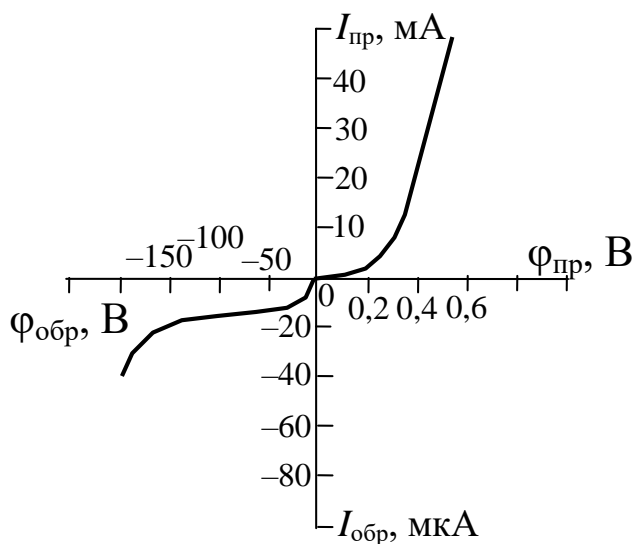


Рис. 5.10. Вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода

Электрическое сопротивление мало в «проводящем» направлении и велико в «непроводящем».

Свойство  $p$ - $n$ -перехода пропускать ток только в одном направлении используется для изготовления германиевых и кремниевых выпрямителей, при детектировании высокочастотных сигналов.

На их основе для промышленных целей налажено производство тиристоров (управляемый  $p$ - $n$ -переход) и диристоров (неуправляемый  $p$ - $n$ -переход).

### Вопросы для самоподготовки

1. В чём заключается разница между металлами, диэлектриками и полупроводниками с точки зрения зонной теории?
2. Дайте определение собственной и примесной проводимости полупроводника.
3. Объясните увеличение проводимости полупроводника с ростом температуры исходя из положений зонной теории.
4. Поясните суть дырочной проводимости полупроводников.
5. В чистый полупроводник введена акцепторная примесь. Какой тип проводимости преобладает в этом полупроводнике?
6. В чистый кремний введена небольшая примесь галлия. Пользуясь периодической системой элементов, определите тип проводимости примесного кремния.
7. Какова основная характеристика электропроводности материалов?

8. Объясните на основе зонной теории возникновение высокой электропроводности в проводниках.

9. Объясните процесс образования энергетических зон в твёрдом теле.

10. Что такое энергетическая, разрешённая, валентная зоны и зона проводимости? От чего зависит ширина запрещённой зоны и число энергетических уровней в ней?

11. Каков физический смысл понятия уровня Ферми?

12. Какова зонная структура диэлектрика, проводника и полупроводника?

13. Чем вызвана необходимость введения понятия эффективной массы носителей заряда в кристалле и каков физический смысл понятия эффективной массы электрона?

18. Что такое «дырка» с точки зрения зонной теории?

19. Объясните механизм образования примесной и собственной проводимости полупроводников.

20. Объясните влияние примесей на электропроводность металлов и полупроводников.

21. Поясните возможность управления величиной и знаком электропроводности полупроводников путём введения примесей.

22. Почему измерение удельного сопротивления полупроводников производят в темноте?

23. Назовите причины температурной зависимости ширины запрещённой зоны полупроводника. Объясните зависимость положения уровня Ферми и концентрации свободных носителей заряда в полупроводниках от температуры.

24. Объясните физический смысл энергии активации и параметров температурной зависимости сопротивления у металлов и полупроводников.

### **Примеры решения задач**

**Пример 1.** Определить температуру, при которой в проводнике вероятность найти электрон с энергией 0,5 эВ над уровнем Ферми равна 2 %.

*Решение.* Система подчиняется распределению Ферми – Дирака:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_0}{kT}} + 1}.$$

Подставим исходные данные:

$$0,02 = \frac{1}{\frac{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{e^{1,32 \cdot 10^{-23} T} + 1}}.$$

Проведя необходимые вычисления, получим  $T = 1557 \text{ К}$ .

**Пример 2.** Собственный проводник (германиевый) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление  $\rho = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Определить концентрацию носителей тока, если подвижность электронов  $u_n = 0,38 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и «дырок»  $u_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

*Решение.* Удельная проводимость

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = e_- n u_n + e_+ n u_p = |e| n (u_n + u_p).$$

Откуда

$$n = \frac{1}{\rho |e| (u_n + u_p)}.$$

Подставим данные:

$$n = \frac{1}{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (0,38 + 0,18)} = 2,23 \cdot 10^{19} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

**Пример 3.** Удельная проводимость кремниевого образца при нагревании от  $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{С}$  до  $t_2 = 18 \text{ }^\circ\text{С}$  увеличилась в 4,24 раза. Определить ширину запрещённой зоны кремния.

*Решение.* Собственная проводимость определяется по формуле

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Следовательно:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}}{\gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}} = e^{\left[ \frac{\Delta E}{2k} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]}.$$

Тогда

$$\ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\Delta E}{2k} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Выразим

$$\Delta E = \frac{2kT_1T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставим данные:

$$\Delta E = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 291}{291 - 273} \ln 4,24 = 1,76 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 1,1 \text{ (эВ)}.$$

**Пример 4.** Определить положение середины запрещённой зоны в собственном полупроводнике ( $E_i$ ) и её зависимость от температуры.

*Решение.* Условием существования собственного полупроводника является выполнение равенства  $n = p$ . Концентрации электронов и «дырок» в невырожденном полупроводнике описываются выражениями

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}; \quad p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}},$$

где  $E_c$  – нижний энергетический уровень зоны проводимости;  $E_V$  – верхний энергетический уровень валентной зоны.

Подставив эти выражения в равенство и решая его относительно уровня Ферми, получим

$$E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_V) - kT \ln \frac{N_c}{N_V}.$$

Согласно теории энергетических диаграмм положение энергетического уровня середины запрещённой зоны определяется равенством

$$E_i = \frac{1}{2}(E_c + E_V).$$

Следовательно:

$$E_i = E_F + kT \ln \frac{N_c}{N_V}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Определить ширину запрещённой зоны собственного полупроводника, если при температурах  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) его сопротивление соответственно равны  $R_1$  и  $R_2$ .

2. Германиевый образец нагревают от 0 до 17 °С. Принимая ширину запрещённой зоны германия  $\Delta E = 0,72$  эВ, определить, во сколько раз возрастёт его удельная проводимость.

3. В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T = 400$  К составляла  $1,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а при  $350$  К –  $6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Найти ширину запрещённой зоны материала, считая, что её температурная зависимость изменяется по линейному закону.

4. Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T = 400$  К оказалась равной  $1,38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Найти значение произведения эффективных масс электрона и «дырки», если известно, что ширина запрещённой зоны изменяется по закону  $\Delta E = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T)$ , эВ.

5. Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при  $T = 300$  К, если ширина его запрещённой зоны  $\Delta E = 1,12$  эВ, а эффективные массы электронов и «дырок» равны  $m_c = 1,05m_0$ ,  $m_v = 0,56m_0$ .

6. Вычислить положение уровня Ферми при  $T = 300$  К в кристалле германия, содержащем  $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка и  $10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

7. Определить удельную проводимость  $\gamma$  примесного полупроводника, если:  $m_p = 0,23m_0$ ;  $n = 2,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при  $T = 390$  К;  $n_i = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  при  $T = 390$  К;  $\tau_m = 0,24 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ;  $m_n = 0,53m_0$ .

### Примеры тестовых заданий

1. Уровень Ферми в полупроводниках вблизи абсолютного нуля расположен ...

- 1) в валентной зоне;
- 2) в зоне проводимости;
- 3) в запрещённой зоне.

2. В полупроводнике с донорной примесью локальный примесный уровень энергии электронов расположен ...

- 1) в запрещённой зоне вблизи дна зоны проводимости;
- 2) в запрещённой зоне вблизи потолка валентной зоны;
- 3) в валентной зоне;
- 4) в зоне проводимости.

3. Какой статистике подчиняется электронный газ в металлах?

- 1) Больцмана;
- 2) Максвелла;
- 3) Бозе – Эйнштейна;
- 4) Ферми – Дирака.

## ГЛАВА 6. СТРОЕНИЕ ЯДРА И РАДИОАКТИВНОСТЬ

### § 6.1. Строение ядра

Ядро – это центральная часть атома, содержащая практически всю массу атома и имеющая положительный заряд.

Ядро состоит из протонов и нейтронов, которые считаются зарядовыми состояниями элементарной частицы *нуклона*.

Заряд ядра положительный, содержащий число протонов, равное порядковому номеру химического элемента в таблице Менделеева. Число протонов обозначается  $Z$ . Заряд одного протона равен по модулю заряду одного электрона. В ядро входят также нейтроны, их число обозначают буквой  $N$ . Обычно у химических элементов  $N + Z = A$ , где  $A$  – массовое число. Ядро химического элемента обозначается символами  ${}_Z\text{X}^A$ , где  $X$  – символ химического элемента.

Ядра с одинаковыми  $Z$ , но различными массовыми числами  $A$  называются *изотопами*.

Ядра с одинаковыми  $A$ , но различными  $Z$  называются *изобарами*.

Радиус ядра определяется по формуле  $R = R_0 A^{1/3}$ , где  $R_0 = (1,3 \div 1,7) \cdot 10^{-15}$  м.

Плотность ядерного вещества велика и составляет порядка  $10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Существует момент импульса ядра, который вычисляется по формуле

$$L_{\text{я}} = \sqrt{I(I+1)}\hbar, \quad (6.1)$$

где  $I$  – внутреннее спиновое квантовое число, которое может принимать значение, равное 0;  $\frac{1}{2}$ ; 1;  $\frac{3}{2}$  и т. д.

Ядро обладает магнитным моментом  $P_{\text{м.я}}$ , величина которого кратна числу ядерных магнетонов, являющихся единицей магнитного момента, определяемого по формуле

$$\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p}, \quad (6.2)$$

где  $\mu_{\text{я}}$  – ядерный магнетон;  $m_p$  – масса протона;  $\hbar$  – постоянная Планка, равная  $1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.



Между магнитным моментом ядра и его моментом импульса существует связь, такая же как в атоме:

$$P_{m.я} = \gamma_{я} L_{я}, \quad (6.3)$$

где  $\gamma_{я}$  – ядерное гиромагнитное отношение.

Магнитный момент протона положителен и равен  $(2,79277 \pm 0,00003)\mu_{я}$ . Его направление совпадает с направлением спина протона.

Нейтрон также обладает магнитным моментом  $(1,91314 \pm 0,00005)\mu_{я}$ , который отрицателен. Его направление противоположно направлению спина нейтрона.

## § 6.2. Энергия связи

В ядрах, содержащих не менее 2-х нуклонов (кроме H), существует *ядерное* взаимодействие (притяжение).

*Энергия связи нуклона в ядре* – это физическая величина, равная работе, которую нужно совершить для удаления нуклона из ядра, не сообщая ему кинетической энергии.

*Энергия связи ядра* определяется работой, которую нужно совершить для расщепления его на составляющие нуклоны.

Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра должна выделяться такая же энергия, которую нужно затратить при расщеплении ядра на составляющие его нуклоны.

При образовании ядра происходит уменьшение его массы, т. е. масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов. Это происходит за счёт выделения энергии связи, т. е. дефект массы

$$\Delta m = \frac{W_{св}}{C^2}; \quad \Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z)m_n - M_{я},$$

где  $m_p$  – масса протона, а.е.м.;  $m_n$  – масса нейтрона, а.е.м.;  $C^2 = 931 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$ .

*Удельная энергия связи* – это энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$w_{св} = \frac{W_{св}}{A} \approx 8 \text{ (МэВ/нуклон)}. \quad (6.4)$$

Критерием устойчивости атомных ядер является соотношение между протонами и нейтронами в ядре.

Минимальная энергия ядра, а следовательно, и наибольшая устойчивость ядра наблюдаются при выполнении следующего соотношения:

$$Z_{\text{уст}} = \frac{A}{1,98 + 0,015A^{2/3}}. \quad (6.5)$$

### § 6.3. Ядерные силы

Это особый тип сил, не являющихся гравитационными или электромагнитными. Это короткодействующие силы, действующие на расстоянии порядка  $10^{-15}$  м. Радиус действия ядерных сил  $(1,5 \div 2,2) \cdot 10^{-15}$  м.

Они обеспечивают притяжение между протонами и нейтронами, которое не зависит от зарядового состояния.

Нуклоны в ядре взаимодействуют лишь с ограниченным числом ближайших к нему соседних нуклонов.

Ядерные силы зависят от ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. *Ядерные силы не являются центральными.*

### § 6.4. Радиоактивность

*Это превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц.*

Различают естественную и искусственную радиоактивность.

*Естественная радиоактивность* наблюдается у существующих в природе неустойчивых изотопов некоторых химических элементов.

*Искусственная радиоактивность* наблюдается у изотопов, полученных в результате ядерных реакций.

Типы радиоактивности:

1) *альфа-распад*, при котором из ядра выбрасывается  $\alpha$ -частица (ядро атома гелия). При этом заряд ядра уменьшается на 2, т. е. новый заряд ядра равен  $Z' = Z - 2$ , а массовое число уменьшается на 4, т. е.  $A' = A - 4$ ;

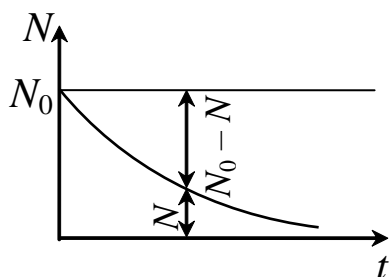
2) *бета-распад*, при котором нейтрон превращается в протон и происходит выброс электрона, т. е.  ${}_0n^1 \rightarrow {}_1p^1 + {}_{-1}e^0$ . Заряд ядра увеличивается на единицу, его массовое число не изменяется;

3) *K-захват*, при котором происходит захват электрона ядром с орбиты, заряд ядра при этом уменьшается на единицу, а массовое число не изменяется.

Основной закон естественного радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.6)$$

где  $N_0$ ,  $N$  – исходное число ядер, т. е. в момент времени  $t = 0$  и в момент времени  $t$  соответственно;  $\lambda$  – постоянная распада, не зависящая от внешних условий.



*Рис. 6.1. Число нераспавшихся ядер при естественном радиоактивном распаде убывает со временем по экспоненте*

Распад ядра – это случайное событие, имеющее определённую вероятность. Средняя продолжительность жизни радиоактивного химического элемента или изотопа определяется соотношением

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.7)$$

В этой связи выделяют ещё один параметр – период полураспада  $T_{1/2}$ , под которым понимают время, в течение которого первоначальное количество ядер данного химического элемента распадается наполовину, т. е. уменьшается в два раза:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (6.8)$$

При естественном радиоактивном распаде выполняются:

1) закон сохранения электрического заряда

$$Z_{\text{я}} = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (6.9)$$

где  $Z_{\text{я}}$ ,  $Z_i$  – заряд ядра и продуктов распада соответственно;

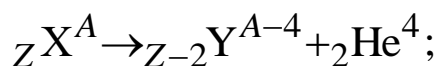
2) закон сохранения массовых чисел

$$A_{\text{я}} = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (6.10)$$

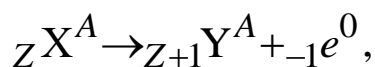
где  $A_{\text{я}}$  – массовое число исходного ядра;  $A_i$  – массовые числа продуктов распада.

В качестве примера покажем их применение для  $\alpha$ - и  $\beta$ -распада:

1) при  $\alpha$ -распаде



2) при  $\beta$ -распаде



где  $X$  – исходное ядро радиоактивного элемента;  $Y$  – продукт распада;  ${}_2 \text{He}^4$ ,  ${}_{-1} e^0$  – ядро гелия и электрон.

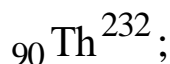
Естественная радиоактивность наблюдается у ядер атомов химических элементов, расположенных за свинцом. Она также может наблюдаться и у лёгких ядер, например у калия  ${}_{19} \text{K}^{40}$ .

Естественные радиоактивные ядра атомов образуют три радиоактивных семейства:

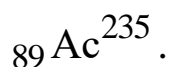
1) семейство урана



2) семейство тория



3) семейство актиния



Все семейства заканчиваются после  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадов устойчивыми ядрами изотопов свинца:  ${}_{82} \text{Pb}^{206}$ ;  ${}_{82} \text{Pb}^{207}$ ;  ${}_{82} \text{Pb}^{208}$ .

## § 6.5. Гамма-излучение

Это жёсткое электромагнитное излучение, энергия которого излучается при переходе ядер из возбуждённых энергетических состояний в основное или менее возбуждённое состояние, а также при ядерных реакциях.

В первом случае выделяется энергия  $h\nu_{ik} = W_i - W_k = \Delta W_{ik}$ , которая составляет порядка 0,1 МэВ. Длина волны  $\gamma$ -излучения  $\lambda_{\gamma\text{-изл}} \leq 10^{-2} \text{ нм} = 10^{-11} \text{ м}$ , т. е. это очень жёсткое излучение. Оно имеет *линейчатый* спектр, что подтверждает дискретность энергетических уровней ядра.

$\gamma$ -излучение не является самостоятельным типом радиоактивности, а сопровождает  $\alpha$ - и  $\beta$ -распады, не вызывает изменения заряда и массового числа ядра.  $\gamma$ -излучение оказывает сильное воздей-

ствие на биологические объекты. Оно оценивается поглощённой дозой излучения.

Дозиметрические величины и единицы их измерения:

1)  $D$  – это отношение энергии излучения к массе облучаемого вещества.  $[D] = 1 \text{ Дж/кг}$ . Эта единица называется *грей* (Гр) (СИ). Её также называют *зиверт*;

2) мощность дозы излучения  $N = \frac{D}{t}$  – это энергия, равная

1 Дж, приходящаяся на 1 кг массы облучаемого вещества за одну секунду, т. е.

$$[N] = \frac{[D]}{[t]} = \frac{\text{Гр}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{с}}.$$

Различают экспозиционную дозу излучения. *Экспозиционная доза* – мера ионизационного действия фотонного излучения, определяемая по ионизации воздуха в условиях электронного равновесия:

$$D_3 = \frac{\sum Q}{m}, \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Внесистемной единицей экспозиционной дозы является *рентген* (Р). Под действием излучения, приходящегося на 1 кг массы облучаемого вещества, в 1 Р в  $10^{-6} \text{ м}^3$  сухого воздуха образуется заряд одного знака, равный  $2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ .

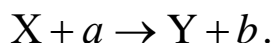
Внесистемной единицей экспозиционной дозы также является *бэр* – биологический эквивалент рентгена, под которым понимают поглощённую энергию излучения, биологически эквивалентную одному рентгену:  $1 \text{ бэр} = 10^{-2} \text{ Дж/кг}$ .

В качестве единицы активности радиоактивного элемента принято одно ядерное превращение в секунду или 1 распад/с. В СИ эта единица получила название *беккерель* (Бк). Используется внесистемная единица активности *кюри* (Ки):  $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ распадов/с}$ .

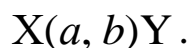
## § 6.6. Ядерные реакции

Это превращения атомных ядер, вызванные взаимодействием их друг с другом или с элементарными частицами.

1. Одним из видов ядерной реакции является взаимодействие лёгкой частицы с ядром, в результате чего образуются другое ядро и другая частица:



Коротко данная ядерная реакция записывается так:



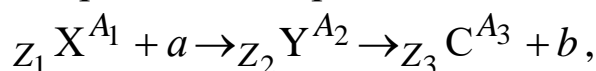
Частицы, которые могут вызывать ядерные реакции, – это нейтрон, протон, ядра тяжёлого водорода,  $\alpha$ -частицы и  $\gamma$ -фотоны.

При ядерных реакциях может выделяться или поглощаться тепло.

## 2. Схема ядерной реакции с образованием составного ядра.

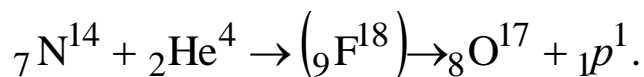
Н. Бором было установлено, что ядерные реакции, протекающие под действием не очень быстрых частиц, идут в два этапа. На первом этапе происходит захват ядром частицы ( $a$ ) и образование промежуточного (составного) ядра. Энергия частицы перераспределяется между нуклонами ядра, в результате чего оно оказывается в возбуждённом состоянии. Среднее время жизни составного ядра примерно  $10^{-12}$ – $10^{-14}$  с. На втором этапе промежуточное ядро испускает частицу ( $b$ ), в качестве которой может быть одна из выше-названных частиц. Причём составное ядро может распадаться различными путями.

Пример ядерной реакции с образованием составного ядра:



где  $a$  и  $b$  – исходная и конечная частицы в реакции.

Например,



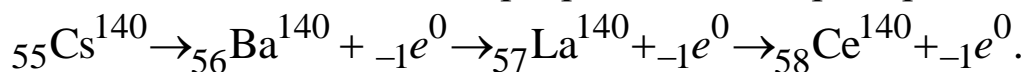
Ядерные реакции могут происходить под действием  $\alpha$ -частиц ( ${}_2\text{He}^4$ ), дейтронов  ${}_1\text{D}^2$  (приводят к синтезу тяжёлых ядер типа трития  ${}_1\text{H}^3$ ), нейтронов (образуются искусственные радиоактивные изотопы, например, радиоуглерод  ${}_6\text{C}^{14}$  с  $T_{1/2} = 5000$  лет).

## 3. Деление тяжёлых ядер при захвате нейтрона.

В 1938 г. О. Ган и Ф. Штрассман обнаружили, что если уран облучается нейтронами, то ядра, захватившие нейтроны, делятся на осколки, в качестве которых выступают ядра более лёгких химических элементов. С наибольшей вероятностью отношение масс осколков составляет 2 : 3. Данное деление тяжёлого ядра сопровождается выделением значительного количества энергии. Образующиеся осколки от деления ядер урана в большинстве случаев оказываются радиоактивными.

Схема деления тяжёлого ядра урана:

Полученные от деления ядер урана осколки цезия и рубидия также испытывают дальнейшие превращения. Например,



А конечные продукты их распада являются уже стабильными.

Вероятность взаимодействия частицы и ядра характеризуют с помощью понятия *эффективного сечения*, под которым понимают величину

$$\sigma = \frac{\Delta N}{Nn\delta},$$

где  $n$  – концентрация ядер;  $\delta$  – толщина мишени;  $\frac{\Delta N}{N}$  – относительное число провзаимодействующих с ядрами частиц.

Единицей измерения эффективного сечения служит барн:

$$1 \text{ барн} = 10^{-30} \text{ м}^2.$$

#### 4. Термоядерные реакции.

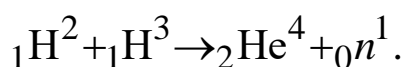
Слияние лёгких ядер в одно ядро сопровождается, как и деление тяжёлых ядер, выделением большого количества энергии, величина которой может быть оценена по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_1e \cdot Z_2e}{r_{\text{я}}}, \quad \text{Дж} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_1e \cdot Z_2e}{r_{\text{я}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}, \quad \text{эВ}.$$

Расчёты показывают, что при слиянии даже лёгких ядер  $Z_1 = Z_2 = 1$  выделяемая энергия составляет порядка 0,7 МэВ. При расчёте принято, что расстояние между ядрами составляет порядка  $2 \cdot 10^{-15}$  м, т. е. равно расстоянию, на котором действуют ядерные силы.

Для синтеза лёгких ядер необходима высокая температура, вследствие чего данные реакции были названы термоядерными.

Для синтеза более тяжёлых ядер дейтерия и трития необходима исходная температура порядка  $10^7$  К, которую получают при взрыве атомной бомбы. При этом реакция синтеза дейтерия и трития протекает с образованием  $\alpha$ -частицы и нейтрона:



При синтезе выделяется энергия около 17,6 МэВ [2], а на один нуклон приходится энергия около 3,5 МэВ, что значительно превышает энергию, выделяющуюся при делении тяжёлых ядер.

### Вопросы для самоподготовки

1. Что называется ядерными силами?
2. Назовите виды радиоактивного излучения.
3. Сформулируйте закон радиоактивного распада.
4. Какие реакции называются ядерными?
5. Какой из трёх видов радиоактивного излучения –  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – обладает наибольшей проникающей способностью; наибольшей ионизирующей способностью?

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Вычислить удельную энергию связи ядра магния  ${}_{12}\text{Mg}^{24}$ . Масса атома магния  $m_{\text{Mg}} = 23,98504$  а.е.м.

*Решение.* Ядро магния содержит 12 протонов и 12 нейтронов. Энергия связи

$$\Delta E_{\text{св}} = \left( 12m_{{}_1\text{H}^1} + 12m_n - m_{\text{Mg}} \right) C^2,$$

где  $C^2 = 931,4 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м}}$ .

Удельная энергия связи

$$\Delta E_{\text{уд}} = \frac{\Delta E_{\text{св}}}{24}.$$

Откуда

$$\Delta E_{\text{уд}} = \left( 0,5m_{{}_1\text{H}^1} + 0,5m_n - \frac{1}{24}m_{\text{Mg}} \right) C^2.$$

Подставим данные:

$$\Delta E_{\text{уд}} = \left( 0,5 \cdot 1,00783 + 0,5 \cdot 1,00867 - \frac{23,98504}{24} \right) \cdot 931 = 8,21 \text{ (МэВ)}.$$

**Пример 2.** В какой элемент превращается изотоп урана  ${}_{92}\text{U}^{238}$  после трёх  $\alpha$ -распадов и двух  $\beta^-$ -распадов?

*Решение.* Каждый  $\alpha$ -распад, согласно правилам смещения, сопровождается уменьшением зарядового числа на 2 и уменьшением массового числа на 4. Каждый  $\beta^-$ -распад сопровождается увеличением зарядового числа на единицу без изменения массового числа. Таким образом, зарядовое число полученного элемента



$Z = 92 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 88$ , а массовое число  $A = 238 - 3 \cdot 4 = 226$ , т. е. получится элемент  ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ .

**Пример 3.** Сколько ядер, содержащихся в 1 г трития  ${}^3_1\text{H}$ , распадается за среднее время жизни этого изотопа?

*Решение.* Согласно закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

среднее время жизни радиоактивного изотопа

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

По условию задачи  $t = \tau$ , следовательно,

$$N = \frac{N_0}{e}.$$

Число распавшихся атомов за время  $t = \tau$  равно

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Найдём число атомов  $N_0$ , содержащихся в массе  $m = 1$  г изотопа  ${}^3_1\text{H}$ :

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A,$$

где  $M = 0,003$  кг/моль;  $N_A$  – число Авогадро.

$$\Delta N = \frac{m}{M} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Подставим данные:

$$\Delta N = \frac{0,001 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{0,003} \left(1 - \frac{1}{2,72}\right) = 1,27 \cdot 10^{23}.$$

**Пример 4.** Активность препарата урана 238 равна  $2,5 \cdot 10^4$  Бк, масса препарата равна 2 г. Определить период полураспада урана.

*Решение.* Активность радиоактивного препарата

$$A = \lambda N.$$

Учитывая, что  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ , получим

$$T = \frac{\ln 2 \cdot N}{A},$$

где  $N$  – число ядер, содержащихся в препарате массой  $m$ .

$$N = N_A \frac{m}{M}.$$

Молярная масса данного изотопа урана равна 238 г/моль. Тогда

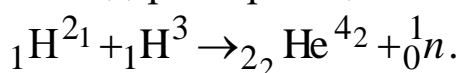
$$T = \frac{\ln 2 \cdot m N_A}{M A}.$$

Подставим данные:

$$T = \frac{0,693 \cdot 2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{238 \cdot 2,5 \cdot 10^4} = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ (с)} = 4 \cdot 10^9 \text{ (лет)}.$$

**Пример 5.** Какую массу воды, взятой при 0 °С, можно довести до кипения, используя энергию термоядерного синтеза гелия из дейтерия и трития, считая, что на нагревание идёт 10 % выделяемой энергии. Масса синтезированного гелия 1 г.

*Решение.* Уравнение ядерной реакции синтеза



Подсчитаем суммарную массу частиц до реакции

$$\sum m_i = 2,01410 \text{ а.е.м.} + 3,01605 \text{ а.е.м.} = 5,03015 \text{ а.е.м.}$$

Суммарная масса частиц, образовавшихся в результате синтеза:

$$\sum m'_i = 4,00260 \text{ а.е.м.} + 1,00867 \text{ а.е.м.} = 5,01127 \text{ а.е.м.}$$

Результаты расчёта показывают, что  $\sum m'_i < \sum m_i$ , следовательно, реакция идёт с выделением энергии:

$$Q = (5,03015 - 5,01127) \cdot 931 = 17,6 \text{ (МэВ)}.$$

Эта энергия выделяется при синтезе одного ядра. В массе образовавшегося гелия содержится ядер

$$N = N_A \frac{m}{M},$$

$$N = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{23}.$$

Следовательно, полная энергия, выделяемая в данной реакции:

$$\Delta E = QN,$$

$$\Delta E = 17,6 \cdot 1,5 \cdot 10^{23} = 26,5 \cdot 10^{23} \text{ (МэВ)}.$$

Вода при нагревании получает 10 % от  $\Delta E$ , т. е.  $0,1 \Delta E = mc \Delta T$ , где  $m$  – масса воды;  $c$  – её удельная теплоёмкость;  $\Delta T = 100 \text{ К}$ .

$$m = \frac{0,1\Delta E}{c\Delta T}.$$

Чтобы получить массу воды в кг, перейдём к Международной системе единиц:

$$m = \frac{0,1 \cdot 26,5 \cdot 10^{23} \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4200 \cdot 100} = 10^5 \text{ (кг)} = 100 \text{ (т)}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра  ${}_6\text{C}^{11}$ .
2. Найти удельную энергию связи нуклонов в ядрах  ${}_{92}\text{U}^{238}$  и  ${}_{27}\text{Co}^{56}$ . Ядро какого элемента наиболее устойчиво?
3. При соударении  $\alpha$ -частицы с ядром бора  ${}_5\text{B}^{10}$  произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось 2 новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода  ${}_1\text{H}^1$ . Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, определить энергетический эффект протекающей ядерной реакции.
4. Какой изотоп образуется из  $\alpha$ -активного  ${}_{88}\text{Ra}^{226}$  в результате пяти  $\alpha$ -распадов и трёх  $\beta$ -распадов?
5. Активность препарата  ${}^{32}\text{P}$  равна 2 мкКи. Сколько весит такой препарат?
6. Во сколько раз число распадов ядер радиоактивного йода  ${}^{131}\text{I}$  в течение первых суток больше числа распадов в течение вторых суток? Период полураспада изотопа  ${}^{131}\text{I}$  равен 193 часам.
7. Определить верхнюю границу возраста Земли, считая, что весь имеющийся на Земле  ${}^{40}\text{Ar}$  образовался из  ${}^{40}\text{K}$  в результате  $e$ -захвата. В настоящее время на каждые 300 атомов  ${}^{40}\text{Ar}$  приходится один атом  ${}^{40}\text{K}$ .
8. В результате  $\alpha$ -распада радий  ${}^{226}\text{Ra}$  превращается в радон  ${}^{222}\text{Rn}$ . Какой объём радона при нормальных условиях будет находиться в равновесии с 1 г радия? Период полураспада  ${}^{226}\text{Ra}$   $T_{1/2}({}^{226}\text{Ra}) = 1600$  лет,  $T_{1/2}({}^{222}\text{Rn}) = 3,82$  дня.
9. Оценить количество  ${}^{235}\text{U}$ , которое необходимо подвергнуть делению для того, чтобы ядерный реактор полезной мощностью

1000 МВт непрерывно работал в течение года. Считать, что лишь  $1/3$  полной мощности реактора оказывается полезной.

10. Найти массу радиоактивного материала через промежуток времени, равный трём периодам полураспада. Начальная масса составляла 80 г.

11. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если активность каждый месяц уменьшается на 10 %.

12. Период полураспада элемента равен двум суткам. Сколько процентов радиоактивного вещества останется по истечении шести суток?

13. Изменяются ли массовое число и зарядовое число ядра при испускании ядром  $\gamma$ -кванта?

### Примеры тестовых заданий

1. При  $\alpha$ -распаде значение зарядового числа  $Z$  меняется ...

- 1) на два;
- 2) не меняется;
- 3) на четыре;
- 4) на три.

2. В ядре изотопа углерода  ${}_6\text{C}^{14}$  содержится ...

- 1) 14 протонов и 6 нейтронов;
- 2) 6 протонов и 8 нейтронов;
- 3) 14 протонов и 8 нейтронов;
- 4) 8 протонов и 6 нейтронов;
- 5) 6 протонов и 14 нейтронов.

3. Сколько  $\alpha$ - и  $\beta^-$ -распадов должно произойти, чтобы  ${}_{92}\text{U}^{238}$  превратился в стабильный изотоп свинца  ${}_{82}\text{Pb}^{206}$  ?

- 1) 8  $\alpha$ -распадов и 6  $\beta^-$ -распадов;
- 2) 6  $\alpha$ -распадов и 8  $\beta^-$ -распадов;
- 3) 10  $\alpha$ -распадов и 4  $\beta^-$ -распада;
- 4) 9  $\alpha$ -распадов и 5  $\beta^-$ -распадов.

4. Вторым продуктом ядерной реакции, осуществлённой Резерфордом,  ${}_7\text{N}^{14} + {}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_8\text{O}^{17} + X$  представляет из себя ...

- 1) нейтрон;

- 2) протон;
- 3) электрон;
- 4)  $\gamma$ -квант;
- 5)  $\alpha$ -частицу.

5. Если за время  $\tau$  распалось 75 % радиоактивных атомов, то это время равно ...

- 1) двум периодам полураспада;
- 2) половине периода полураспада;
- 3) периоду полураспада;
- 4) трём периодам полураспада.

6. В осуществлении ядерной реакции  ${}_7\text{N}^{14} + \text{X} \rightarrow {}_8\text{O}^{17} + {}_1\text{H}^1$  участвует ...

- 1)  $\gamma$ -квант;
- 2)  $\alpha$ -частица;
- 3) протон;
- 4) нейтрон;
- 5) электрон.

7. Периодом полураспада называется ...

1) время, в течение которого концентрация распавшихся ядер увеличивается в  $e$  раз;

2) время, в течение которого распадается половина наличного количества атомов радиоактивного элемента;

3) время, в течение которого распадаются все атомы радиоактивного элемента;

4) время между моментами распада двух ядер атомов радиоактивного элемента.

## ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Этот термин появился в 30-х годах двадцатого столетия для обозначения мельчайших частиц материи. Тогда были известны протон, нейтрон, электрон и фотон. В 1928 г. Дираком была предсказана, а в 1932 г. обнаружена первая античастица – позитрон. Примерно с 50-х годов изучение элементарных частиц было связано с исследованием космических лучей, где были обнаружены мюоны,  $\pi^-$  - и  $K$ -мезоны,  $\Lambda$ -гиперон.

Элементарные частицы появляются в результате ядерных реакций. Как расположены по энергии элементарные частицы, показано в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Характеристика элементарных частиц

Среднее время жизни, с	Энергия, МэВ	Частицы		Заряд	Класс	
		Обозначение	Название			
$2,6 \cdot 10^{-10}$	1115	$\Lambda, \Sigma$	гипероны	барионы $S = \pm \frac{1}{2}$	адроны	
630	939	$n^0$	нуклоны			
$\infty$	938	$p^+$				
$\approx 10^{-8}$	498	$K^0$	каоны	мезоны $S = \pm 1$		
$1,2 \cdot 10^{-8}$	494	$K^\pm$				
$2,6 \cdot 10^{-8}$	190	$\pi^\pm$	пионы			
$2,0 \cdot 10^{-16}$	135	$\pi^0$				
$2,5 \cdot 10^{-6}$	105,8	$\mu^\pm$	мюоны	лептоны $S = \pm \frac{1}{2}$		
	0,511	$e^+$	позитрон			
$\infty$		$e^-$	электрон			

### § 7.1. Виды взаимодействий

В группу лептонов входят и три нейтрино – электронное, мюонное и таонное.

По характеру взаимодействия элементарных частиц можно выделить четыре класса – сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

Сильное взаимодействие обеспечивает связь протонов и нейтронов в ядрах атомов. Все *частицы, обладающие сильным взаимодействием, называют адронами.*

Время сильных взаимодействий составляет порядка  $10^{-23}$  с, а слабых взаимодействий –  $10^{-10}$  с.

Слабым взаимодействием обладают нейтрино.

Для количественной оценки интенсивности различных взаимодействий между частицами вводится силовая константа « $g^2$ », равная отношению энергии взаимодействия на элементарной длине к характерной энергии. Для электромагнитного взаимодействия таковыми являются энергия взаимодействия электронов на расстоянии, равном комптоновской длине волны  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar/(mc)}$ , и энергия покоя электрона  $mc^2$ :

$$g_{эл}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar/(mc)} \frac{1}{mc^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Величина  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  – это постоянная тонкой структуры.

Потенциалы всех взаимодействий можно записать в виде  $\frac{q^2}{r}$ .

Для *гравитационного* взаимодействия

$$g^2 = \frac{q_{гр}^2}{\hbar c} = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 7 \cdot 10^{-39}.$$

Для сильного взаимодействия (ядерного)

$$g^2 = \frac{q_{яд}^2}{\hbar c} = \frac{E_{св} R_{яд}}{\hbar c} \approx 1.$$

Для слабого взаимодействия

$$\frac{q_{сл}^2/(\hbar c)}{q_{яд}^2/(\hbar c)} \cong 10^{-14}.$$

Таким образом, электромагнитное взаимодействие только в 137 раз меньше сильного, а гравитационное – в  $10^{38}$  меньше сильного.

## § 7.2. Переносчики взаимодействия

Переносчиком сильного взаимодействия являются мезоны, а радиус действия ядерных сил  $\approx 10^{-13}$  см  $\approx 10^{-15}$  м.

Радиус действия слабого взаимодействия  $\approx 10^{-16}$  см  $\approx 10^{-18}$  м. Переносчиками слабого взаимодействия являются нейтральный и заряженный бозоны.

Переносчиками электромагнитного взаимодействия являются фотоны, а гравитационного взаимодействия – гравитоны.

## § 7.3. Законы сохранения в микромире

Теорема Э. Нетер гласит: «Если свойства системы не меняются от какого-либо преобразования переменных, то этому соответствует определённый закон сохранения, например, законы сохранения энергии, импульса, момента импульса следуют из предположения об однородности и изотропности пространства – времени».

В ядерной физике операции:

- 1) зарядового сопряжения (замены частиц античастицами);
- 2) пространственной инверсии (замены координаты « $r$ » на « $-r$ »);
- 3) обращения времени (замены времени « $t$ » на « $-t$ »), взятые вместе, не являются совсем независимыми.

Из опыта известно, что для  $K^0$  и  $\tilde{K}^0$   $\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-18}$ , для  $e^-$  и  $e^+$  отношение магнитных моментов равно  $1 + (0,5 \pm 2,1) \cdot 10^{-12}$ , но в слабых взаимодействиях нарушается закон чётности, что было обнаружено в 1957 г. в  $\beta$ -распаде  $C_0^{60}$ .

Общими характеристиками всех этих частиц являются: масса  $m$ , время жизни  $T_{1/2}$ , спин  $J$ , электрический заряд  $Q$ . Для элементарных частиц выполняются:

- 1) закон сохранения электрического заряда

$$a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots;$$

- 2) закон сохранения барионного заряда  $\sum B_i = \text{const}$  (для мезонов и лептонов  $B = 0$ , для фотонов  $B = 0$ ,  $L = 0$ ).



Роль законов сохранения у элементарных частиц сводится к запрещению процессов с изменением хотя бы одного суммарного заряда.

### § 7.4. Кварковая структура адронов

Сильно взаимодействующие частицы – адроны – можно разбить на группы с примерно равными массами и одинаковыми квантовыми числами  $B, S, C, J, P$ , но с разными электрическими зарядами. Например, семейства  $(p, n)$ ,  $(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ ,  $(K^+, K^0)$ ,  $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ .

В 1932 г. Гейзенберг обратил внимание на удивительную близость масс протонов и нейтронов. Он ввёл новое квантовое число – *изотопический спин*. Для нуклонов абсолютное значение изотопического спина  $I = \frac{1}{2}$ , а его проекция на одну из осей для протона

$I = \frac{1}{2}$  и нейтрона  $I = -\frac{1}{2}$ . Для  $\pi$ -мезонов  $I = 1$ .

Составными частями адронов являются кварки. Это гипотетические частицы.

Таблица 7.2

Кварки и их ароматы

Название кварка	Символ	Масса, МэВ	Заряд					
			$Q(e)$	$B$	$S$	$G$	$b$	$t$
Верхний	$u$	300	+2/3	1/3	0	0	0	0
Нижний	$d$	300	-1/3	1/3	0	0	0	0
Странный	$s$	500	-1/3	1/3	-1	0	0	0
Очарованный	$c$	1500	+2/3	1/3	0	+1	0	0
Красивый	$b$	5000	-1/3	1/3	0	0	+1	0
Правдивый	$t$	178000	+2/3	1/3	0	0	0	+1

Квантовое число  $G$  называется шармом,  $Q(e)$  – обычный заряд,  $B$  – барионный заряд.

Кроме ароматов кварки имеют ещё одно квантовое число – *цвет*: жёлтый, красный и синий.

Полное число кварков 18, столько же имеется и антикварков. Кварковая модель строения адронов: мезоны состоят из кварка и антикварка  $M = (q_1; \bar{q}_2)$ , а барионы – из трёх кварков  $B = (q_1; q_2; q_3)$ . Обычным адронам соответствуют связанные состояния, построенные только из  $u$ - и  $d$ -кварков. Наличие в связанном

состоянии ещё одного  $s$ -,  $c$ -,  $b$ - или  $t$ -кварка означает, что соответствующий адрон – странный ( $s = 1$ ), очарованный ( $c = 1$ ), красивый ( $b = 1$ ) или правдивый ( $t = 1$ ).

Таблица 7.3

*Кварковая структура мезонов и барионов*

Частица	Энергия, МэВ	Заряд $Q$	Спин $I_3$	Кварковая составляющая
мезоны				
$\pi^+$	140	+1	+1	$u\bar{d}$
$\pi^0$	135	0	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
$\pi^-$	140	-1	-1	$\bar{u}d$
$K^+$	494	1	+1/2	$u\bar{s}$
$K^0$	498	0	-1/2	$d\bar{s}$
$K^-$	494	-1	-1/2	$\bar{u}s$
барионы				
$p$	938	1	1/2	$uud$
$n$	940	0	-1/2	$udd$
$\Lambda^0$	1115	0	0	$uds$

Оторвать кварки друг от друга невозможно. На ядерных расстояниях энергия взаимодействия кварков составляет около 1 ГэВ. На ядерных расстояниях взаимодействие проявляется в виде обмена виртуальными  $\pi$ -мезонами. Кварки называют элементарными частицами.

### § 7.5. Электрослабое взаимодействие

Адроны, имеющие заряд, участвуют в электромагнитных и слабых взаимодействиях, например  $\beta$ -распад нейтрона. Эти взаимодействия отражают соответствующие взаимодействия у кварков. По новой теории электрослабое взаимодействие обязано частицам:  $\gamma$ ,  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ . По современной классификации они называются *бозонами*. На малых расстояниях частицы вместо обмена фотонами обмениваются тяжёлым промежуточным нейтральным бозоном  $Z^0$ . Согласно данной теории между собой взаимодействуют протон и нейтрон, два нейтрона, нейтрино рассеивается на нуклонах.

### Вопросы для самоподготовки

1. Какие частицы называются элементарными?

2. Назовите фундаментальные взаимодействия элементарных частиц. Перечислите частицы-переносчики фундаментальных взаимодействий.

3. Какие величины характеризуют элементарные частицы?

4. Какие структуры называют элементарными частицами? Основные характеристики элементарных частиц.

5. Возможен ли процесс  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  в вакууме?

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Какие из нижеследующих процессов запрещены законом сохранения лептонного заряда:

- 1)  $n \rightarrow p + e^- + \nu$ ;
- 2)  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + e^- + e^+$ ;
- 3)  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu$ ;
- 4)  $p + e^- \rightarrow n + \nu$ ;
- 5)  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \tilde{\nu}$ ;
- 6)  $K^- \rightarrow \mu^- + \nu$ ?

*Решение.*

$$1) \quad n \rightarrow p + e^- + \nu;$$

$$0 \rightarrow 0 + 1 + 1;$$

$$0 \neq 2.$$

Закон сохранения не выполняется, процесс невозможен.

$$2) \quad \pi^+ \rightarrow \mu^+ + e^- + e^+;$$

$$0 \rightarrow 1 + 1 - 1;$$

$$0 \neq 1.$$

Закон сохранения не выполняется, процесс невозможен.

$$3) \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu;$$

$$0 \rightarrow 1 + 1;$$

$$0 \neq 2.$$

Закон сохранения не выполняется, процесс невозможен.

$$4) \quad p + e^- \rightarrow n + \nu;$$

$$0 + 1 \rightarrow 0 + 1;$$

$$1 = 1.$$

Закон сохранения выполняется, процесс возможен.

$$5) \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \tilde{\nu};$$

$$-1 \rightarrow -1 + 1 - 1;$$

$$-1 = -1.$$

Закон сохранения выполняется, процесс возможен.

$$6) K^- \rightarrow \mu^- + \nu;$$

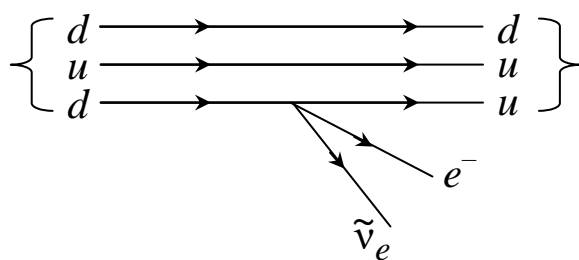
$$0 \rightarrow 1 - 1;$$

$$0 = 0.$$

Закон сохранения выполняется, процесс возможен.

### Примеры тестовых заданий

1. На рисунке показана кварковая диаграмма  $\beta^-$ -распада нуклона.



Эта диаграмма соответствует реакции ...

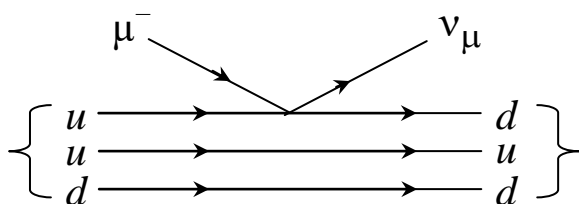
$$1) n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e;$$

$$2) n \rightarrow n + e^- + \tilde{\nu}_e;$$

$$3) p \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e;$$

$$4) p \rightarrow n + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

2. На рисунке показана кварковая диаграмма захвата нуклоном  $\mu^-$ -мезона.



Эта диаграмма соответствует реакции ...

$$1) \mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu;$$

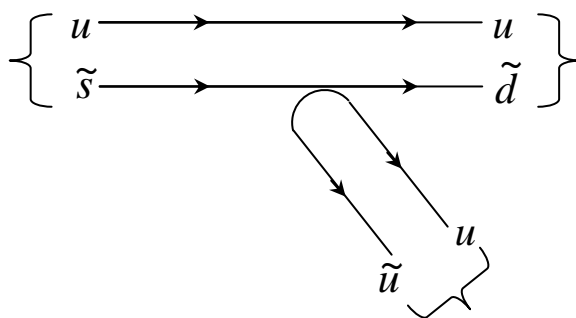
$$2) \mu^- + n \rightarrow p + \nu_\mu;$$

$$3) \mu^- + p \rightarrow \tilde{p} + \nu_\mu;$$

$$4) \mu^- + n \rightarrow \tilde{n} + \nu_\mu.$$

3. На рисунке показана кварковая диаграмма распада

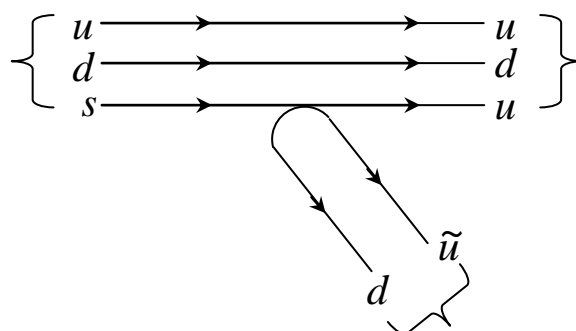
$K^+$ -мезона.



Эта диаграмма соответствует реакции ...

- 1)  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ;
- 2)  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ;
- 3)  $K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^0$ ;
- 4)  $K^+ \rightarrow \kappa^+ + \pi^+$ .

4 На рисунке показана кварковая диаграмма распада  $\Lambda$ -гиперона.



Эта диаграмма соответствует реакции ...

- 1)  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ ;
- 2)  $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^-$ ;
- 3)  $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^+$ ;
- 4)  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0$ .

5. Участниками электромагнитного взаимодействия являются

...

- 1) фотоны;
- 2) протоны;
- 3) электроны;

4) нейтроны.

6. Участниками сильного взаимодействия являются ...

- 1) протоны;
- 2) нейтроны;
- 3) фотоны;
- 4) электроны.

7. Участниками слабого взаимодействия являются ...

- 1) электроны;
- 2) протоны;
- 3) нейтроны;
- 4) фотоны.

8. В сильном взаимодействии не принимают участие ...

- 1) фотоны;
- 2) электроны;
- 3) протоны;
- 4) нейтроны.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Основные физические постоянные

Название	Обозначение	Численное значение
Ускорение свободного падения	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя $\alpha$ -частицы	$m_\alpha$	$6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$12,56 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Планка (с чертой)	$\hbar = h / 2\pi$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная закона смещения Вина	$b_1$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Вина	$b_2$	$1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^5)$
Постоянная Ридберга	$R$	$3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a$	$5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_0$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрон-вольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

## 2. Потенциал ионизации, эВ

Водород – 13,6	Ртуть – 10,4
Гелий – 24,6	Литий – 75,6

## 3. Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра, нм

Фиолетовый	400–450	Жёлтый	560–590
Синий	450–480	Оранжевый	590–620
Голубой	480–500	Красный	620–760
Зелёный	500–560		

## 4. Масса $m_0$ и энергия $E_0$ покоя некоторых элементарных частиц и лёгких ядер

Частицы	$m_0$		$E_0$	
	а.е.м.	$10^{-27}$ , кг	МэВ	$10^{-10}$ , Дж
Электрон	$5,486 \cdot 10^{-4}$	0,00091	0,511	0,00081
Протон	1,00728	1,6724	938,23	1,50
Нейтрон	1,00867	1,6748	939,53	1,51
Дейтрон	2,01355	3,3325	1876,5	3,00
$\alpha$ -частица	4,0015	6,6444	3726,2	5,96

## 5. Работа выхода электронов из металла, эВ

Алюминий – 3,7	Вольфрам – 4,5	Литий – 2,3	Медь – 4,4
Платина – 6,3	Цезий – 1,8	Цинк – 4,0	Никель – 4,8

## 6. Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Тип распада	Период полураспада
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	$\beta^-$	10 мин
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	$\beta^-$	14,3 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	$\beta^-, \gamma$	5,3 года
Иод	$^{131}_{53}\text{I}$	$\beta^-, \gamma$	8 сут
Иридий	$^{192}_{77}\text{Ir}$	$\beta^-, \gamma$	75 сут



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детлаф, А. А. Курс физики : учеб. пособие для студентов втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – Москва : Изд. центр «Академия», 2003. – 720 с.
2. Савельев, И. В. Курс физики : учеб. пособие : в 3-х т. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твёрдого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 3-е изд., стереотип. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 320 с.
3. Бом, Д. Квантовая теория. – Москва : Наука, 1965. – 729 с.
4. Чертов, А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьёв. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.
5. Иродов, И. Е. Сборник задач по общей физике : учеб. пособие для втузов / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша ; под ред. И. В. Савельева. – 2-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1972. – 256 с.
6. Савченко, Н. Е. Решение задач по физике : учеб. пособие. – 6-е изд. – Москва : Высш. шк., 2005. – 479 с.
7. Дмитриева, В. Ф. Физика : программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей высших учебных заведений / В. Ф. Дмитриева, В. А. Рябов, В. М. Гладской ; под ред. В. Ф. Дмитриевой. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 2005. – 126 с.
8. Физика : программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей вузов / В. Л. Прокофьев, В. Ф. Дмитриева, В. А. Рябов, П. И. Самойленко, В. М. Гладской ; под ред. В. Л. Прокофьева. – Москва : Высш. шк., 1998. – 143 с.
9. Физика : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов (включая сельскохозяйственные вузы) / А. А. Воробьёв, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов. – Москва : Высш. шк., 1987. – 208 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	7
ГЛАВА 1. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА .....	8
§ 1.1. Виды электромагнитного излучения .....	8
§ 1.2. Правило Прево .....	10
§ 1.3. Закон Кирхгофа .....	11
§ 1.4. Закон Стефана – Больцмана .....	13
§ 1.5. Закон смещения Вина .....	15
§ 1.6. Гипотеза и формула излучения Планка .....	17
§ 1.7. Применение законов теплового излучения .....	19
§ 1.8. Воздействие света на вещество. Фотоэлектрический эффект .....	20
§ 1.9. Законы фотоэффекта .....	21
§ 1.10. Уравнение Эйнштейна .....	23
§ 1.11. Нормальный и аномальный внешний фотоэффект .....	25
§ 1.12. Внутренний фотоэффект .....	25
§ 1.13. Химическое действие света .....	27
§ 1.14. Явление Комптона .....	28
§ 1.15. Расчёт явления Комптона на основе законов сохранения релятивистских и квантовых представлений .....	29
§ 1.16. Корпускулярно-волновая двойственность свойств света .....	32
Вопросы для самоподготовки .....	33
Примеры решения задач .....	33
Задачи для самостоятельного решения .....	39
Примеры тестовых заданий .....	42
ГЛАВА 2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА .....	48
§ 2.1. Введение в квантовую механику .....	48
§ 2.2. Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества .....	48
§ 2.3. Экспериментальное подтверждение волновой природы микрочастиц .....	50
§ 2.4. Свойства волны де Бройля .....	52
§ 2.5. Соотношение неопределённостей .....	54
§ 2.6. Уравнение Шредингера .....	57

§ 2.7. Решение уравнения Шредингера для случая движения свободной частицы вдоль оси .....	60
§ 2.8. Решение уравнения Шредингера для случая движения частицы в прямоугольной «потенциальной» яме с бесконечно высокими бортами .....	61
§ 2.9. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер .....	64
Вопросы для самоподготовки .....	68
Примеры решения задач .....	68
Задачи для самостоятельного решения .....	74
Примеры тестовых заданий .....	77
ГЛАВА 3. АТОМНАЯ ФИЗИКА .....	80
§ 3.1. Модель атома Резерфорда .....	80
§ 3.2. Постулаты Бора .....	81
§ 3.3. Спектр атома водорода .....	82
§ 3.4. Радиус боровских орбит электрона в атоме водорода .....	84
§ 3.5. Полная механическая энергия электрона в атоме водорода .....	85
§ 3.6. Опыт Франка и Герца .....	86
§ 3.7. Достоинства и недостатки теории Бора .....	88
§ 3.8. Энергия и радиус орбиты электрона в атоме, находящемся в основном состоянии, с позиции квантовой механики .....	88
§ 3.9. Пространственное квантование. Опыты О. Штерна и В. Герлаха. Спин электрона .....	92
§ 3.10. Квантовые числа и число электронов в слоях и оболочках .....	95
§ 3.11. Периодическая система химических элементов .....	98
Вопросы для самоподготовки .....	99
Примеры решения задач .....	100
Задачи для самостоятельного решения .....	103
Примеры тестовых заданий .....	104
ГЛАВА 4. КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ .....	107
§ 4.1. Основные определения .....	107
§ 4.2. Распределение Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна .....	109
§ 4.3. Распределение Ферми – Дирака для электронного газа в металлах в зависимости от температуры .....	112
§ 4.4. Закон Ома в квантовой теории металлов .....	114

§ 4.5. Понятие о сверхпроводимости .....	116
§ 4.6. Эффект Мейснера .....	118
§ 4.7. Элементы теории сверхпроводимости .....	119
§ 4.8. Эффект Джозефсона .....	120
Вопросы для самоподготовки .....	120
Примеры решения задач .....	121
Задачи для самостоятельного решения .....	123
Примеры тестовых заданий .....	125
<b>ГЛАВА 5. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ .....</b>	<b>128</b>
§ 5.1. Ширина энергетических зон .....	128
§ 5.2. Разделение твёрдых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники с позиций зонной теории .....	130
§ 5.3. Эффективная масса электрона в кристаллической структуре твёрдого тела .....	132
§ 5.4. Заполнение зон электронами .....	134
§ 5.5. Примесная проводимость полупроводников .....	136
§ 5.6. Фотопроводимость полупроводников .....	137
§ 5.7. Контактные явления .....	138
§ 5.7.1. Контакт двух металлов .....	138
§ 5.7.2. Эффект Зеебека .....	141
§ 5.7.3. Эффект Пельтье .....	142
§ 5.7.4. Эффект Томсона .....	142
§ 5.7.5. Контакт металла с полупроводником .....	143
§ 5.7.6. Контакт электронного и дырочного полупроводников ..	144
Вопросы для самоподготовки .....	146
Примеры решения задач .....	147
Задачи для самостоятельного решения .....	149
Примеры тестовых заданий .....	150
<b>ГЛАВА 6. СТРОЕНИЕ ЯДРА И РАДИОАКТИВНОСТЬ .....</b>	<b>151</b>
§ 6.1. Строение ядра .....	151
§ 6.2. Энергия связи .....	152
§ 6.3. Ядерные силы .....	153
§ 6.4. Радиоактивность .....	153
§ 6.5. Гамма-излучение .....	155
§ 6.6. Ядерные реакции .....	156
Вопросы для самоподготовки .....	159
Примеры решения задач .....	159
Задачи для самостоятельного решения .....	162

Примеры тестовых заданий .....	163
ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ .....	165
§ 7.1. Виды взаимодействий .....	165
§ 7.2. Переносчики взаимодействия .....	167
§ 7.3. Законы сохранения в микромире .....	167
§ 7.4. Кварковая структура адронов .....	168
§ 7.5. Электрослабое взаимодействие .....	169
Вопросы для самоподготовки .....	169
Примеры решения задач .....	170
Примеры тестовых заданий .....	171
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	174
1. Основные физические постоянные .....	174
2. Потенциал ионизации .....	175
3. Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра .....	175
4. Масса $m_0$ и энергия $E_0$ покоя некоторых элементарных частиц и лёгких ядер .....	175
5. Работа выхода электронов из металла .....	175
6. Периоды полураспада радиоактивных изотопов .....	175
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	176

Дырдин Валерий Васильевич  
Ким Татьяна Леонидовна  
Шепелева Софья Алексеевна

***Физика***  
***Квантовая физика. Квантовая механика***  
***и атомная физика***

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина  
Компьютерная набор и компьютерная вёрстка  
И. В. Цвеклинская

Подписано в печать 29.10.2018. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 12,00  
Тираж 150 экз. Заказ

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А