МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Т. Ф. ГОРБАЧЕВА»

И. А. ПАНАЧЕВ, Ю. Ф. ГЛАЗКОВ, М. Ю. НАСОНОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендованы в качестве учебного пособия
учебно-методической комиссией специальности
150202 "Оборудование и технология сварочного производства" (ТС)

Кемерово 2011

Рецензенты

Широколобов Г. В. – доцент кафедры сопротивление материалов

Клепцов А. А. – председатель УМК специальности 150202 “Оборудование и технология сварочного производства”

Паначев Иван Андреевич. Сопротивление материалов: учебн. пособие [Электронный ресурс]: для студентов всех технических специальностей / И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков, М. Ю. Насонов. – Электрон. дан. – Кемерово: ГУ КузГТУ, 2011. – 1 электрон. опт. диск (CD – ROM). – Систем. Требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Windows 2003 ; (CD – ROM - дисковод) ; мышь. – Загл. с экрана.

В пособии кратко изложены основные теоретические положения и приведены решения типовых задач по важнейшим темам курса сопротивления материалов, изучаемого в техническом вузе в течение одного-двух семестров студентами всех специальностей дневной и заочной форм обучения. Ознакомление с примерами, приведенными в пособии, позволит овладеть методикой решения задач по сопротивлению материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов – общеинженерная дисциплина, изучаемая в вузе, является составной частью механики деформируемого твердого тела, основывается на выводах теоретической механики и использует достаточно простой математический аппарат при решении важнейших вопросов *прочности, жесткости, устойчивости* и *долговечности* машин и сооружений.

Цель курса сопротивления материалов – создание практически приемлемых простых приемов расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. На основе методов сопротивления материалов и смежных областей механики деформируемого твердого тела (теории упругости и пластичности, статики и динамики сооружений) производят расчеты различных конструкций, аппаратов машин и приборов для обеспечения их надежности и долговечности при минимальной их материалоемкости. Отсюда можно сформулировать и основные задачи курса сопротивления материалов.

1. Расчет элементов конструкций на *прочность*. Под прочностью понимается способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь.
2. Расчет элементов конструкций на *жесткость*. Под жесткостью подразумевается способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров).
3. Расчет элементов конструкций на *устойчивость*.
   Устойчивостью называется способность конструкции или ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

При решении задач сопротивления материалов широко применяют уравнения равновесия различных систем сил, полученные в статике абсолютно твердого тела. Однако не все приемы статики могут быть применены в сопротивлении материалов. Так замена одной системы сил на другую, статически эквивалентную (перенос силы по линии ее действия, а также замена системы сил на их равнодействующую), существенно изменяет характер деформации элемента конструкции. Если при определении опорных реакций в статически определимых системах эквивалентные преобразования нагрузки допускаются, то при вычислении перемещений и расчетах на прочность такая замена приводит к серьезным ошибкам.

1.2. Внешние силы

Внешние силы делят на активные и реактивные. Силы тяжести элементов конструкций и силы инерции относят к объемным силам. Нагрузки, которые передаются от одних элементов конструкций к другим, принято называть поверхностными силами, которые в свою очередь подразделяются на сосредоточенные и распределенные.

По скорости изменения во времени нагрузки могут быть *статическими* – медленно нарастающими от нуля до заданного значения, *повторными* – многократно изменяющимися во времени, *малой продолжительности – динамическими (временными)*.

1.3. Внутренние силы. Метод сечений

При действии на тело внешних сил оно деформируется, в результате изменяется взаимное расположение частиц тела, и возникают силы взаимодействия между частицами. Эти силы, возникающие по окончании деформирования, и будем называть *внутренними силами* (усилиями).

Для решения задач сопротивления материалов необходимо уметь определять внутренние силы по заданным внешним силам. В основе решения этой задачи лежит *метод сечений*, заключающийся в том, что для рассматриваемой отсеченной части тела действие отброшенной части уравновешивается внутренними силами (статическим эквивалентом внутренних сил) – *главным вектором и главным моментом* (рис. 1.1).

Разложим главный вектор и главный момент на составляющие по координатным осям. Полученные таким образом шесть составляющих N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z будем называть внутренними усилиями или внутренними силовыми факторами. Для их определения можно записать шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} &\sum x = 0, \quad \sum y = 0, \quad \sum z = 0, \\ &\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Из полученных уравнений находим неизвестные усилия N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z. Знак усилий, полученный при решении уравнений (1.1), указывает на правильность (знак плюс) или неправильность (знак минус) выбранных направлений внутренних сил.

Таким образом, методом сечений будем называть способ нахождения внутренних сил.

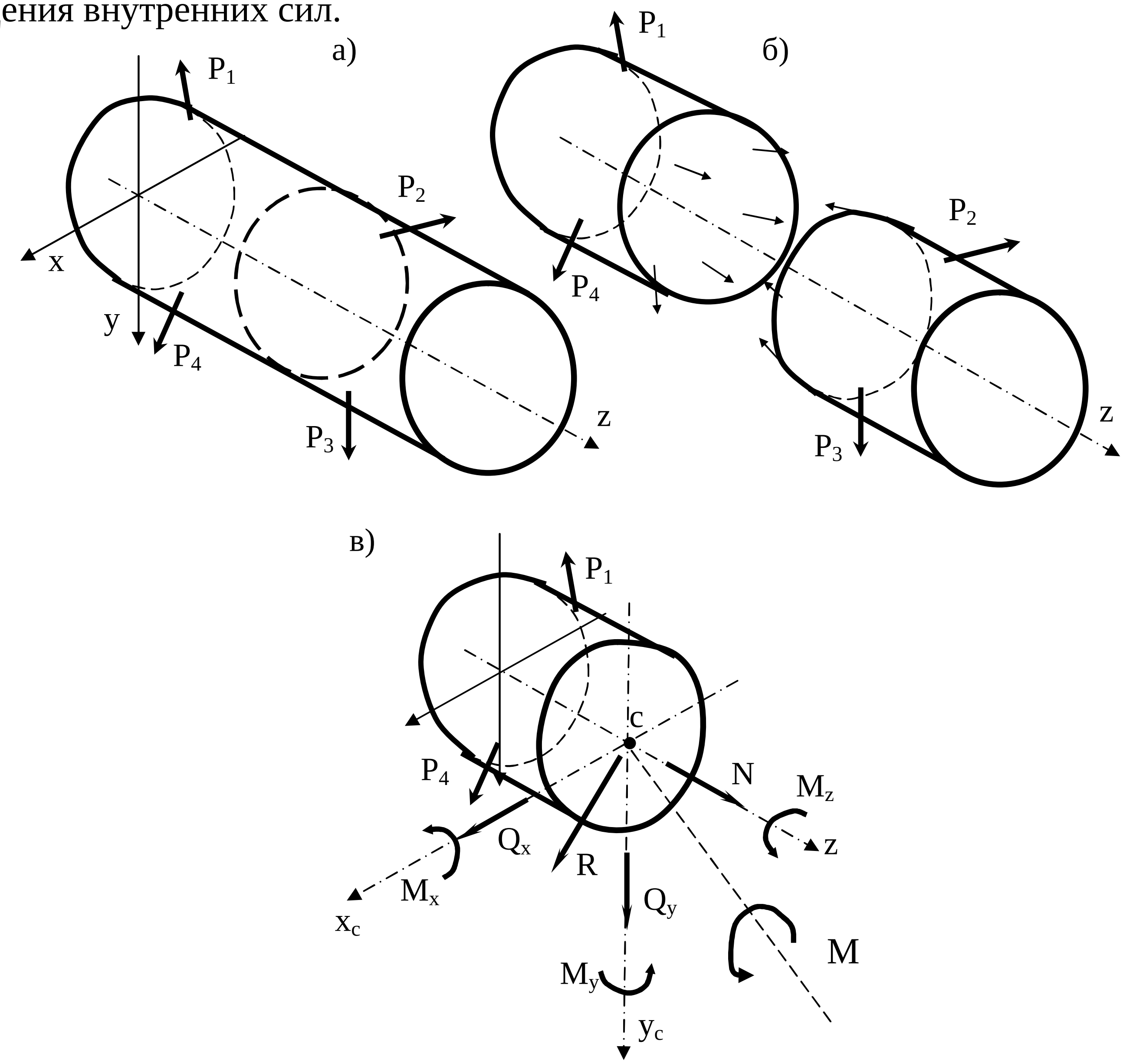


Рис. 1.1. Схема нагружения стержня (а) и внутренние усилия в сечении (б, в)

Указанные шесть внутренних силовых факторов имеют следующие наименования: N – продольная (нормальная) сила; Q_y, Q_z – поперечные силы, M_z=$M_к$ – крутящий момент, M_x, M_y – изгибающие моменты. Каждый из них определяет вид деформации. Так, например, если в сечении действует только продольная сила N, то брус работает на растяжение или сжатие; если в сечении действуют только поперечные силы Q_y, Q_z или одна из них, то стержень испытывает деформацию сдвига (среза).

При наличии в поперечных сечениях бруса только крутящего момента M_z имеет место деформация кручения, если в сечении действуют изгибающие моменты M_x, M_y или один из них, то стержень испытывает деформацию изгиба.

Таким образом, разложение главного вектора и главного момента внутренних сил на составляющие имеет четко выраженный физический смысл.

На практике имеют место случаи, когда в сечении одновременно действует несколько внутренних усилий (например, нормальная сила и изгибающий момент), тогда говорят, что стержень подвержен сложному виду деформации. В нашем примере – совместное действие изгиба и растяжения-сжатия.

1.3. Типы деформаций

Деформации делят на простые и сложные.

К простым относятся:

1. Растяжение-сжатие (работа цепей, канатов и т.п.);
2. Сдвиг (срез) – работа сварных, заклепочных и болтовых соединений;
3. Кручение – работа валов;
4. Изгиб – работа балок.

Сложными будем называть любые комбинации простых видов деформаций (совместное действие изгиба и кручения, совместное действие изгиба и растяжения - сжатия и т. д.).

1.4. Понятие о напряжениях

Интенсивность внутренних сил в определенной точке сечения характеризуется напряжением.

Выделим в окрестностях интересующей нас точки сечения малую площадку ΔF, на которой возникает внутренняя сила ΔR (рис. 1.2). Отношение этой внутренней силы к площади данной площадки называется средним напряжением на площадке ΔF:

$$p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \qquad (1.2)$$

Тогда напряжение в точке, в окрестностях которой выделена площадка ΔF, будет

$$p = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}. \qquad (1.3)$$

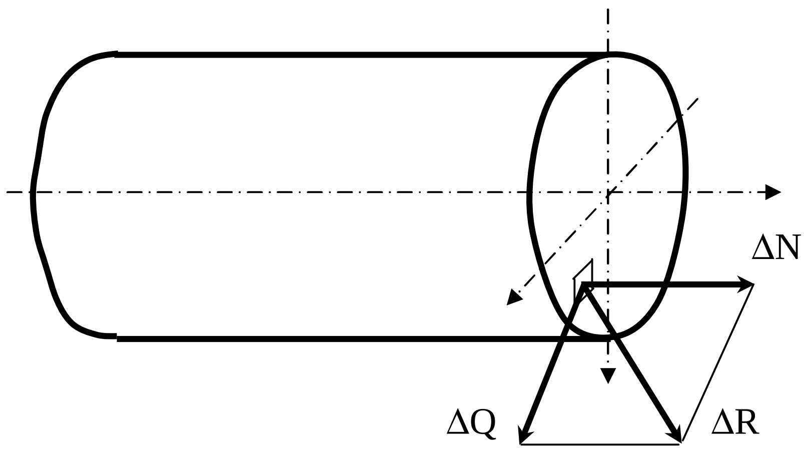


Рис. 1.2. Элементарные внутренние усилия при растяжении-сжатии

Разложив ΔR на составляющие ΔN и ΔQ, получим

касательные напряжения $\tau = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta F};$ (1.4)

нормальные напряжения $\sigma = \lim \frac{\Delta N}{\Delta F}.$ (1.5)

Между напряжениями p, σ и τ существует зависимость

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \qquad (1.6)$$

Таким образом, *напряжения являются мерой интенсивности внутренних сил и измеряются в единицах давления* (кг/см^2, Н/мм^2, Па).

Итак, через каждую точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, каждой из которых будут соответствовать определенные значения напряжений.

Совокупность напряжений характеризует напряженное состояние в данной точке тела.

1.6. Связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами

Умножая напряжения σ_x, τ_y и τ_z на площадь dF площадки, на которой они действуют, получим элементарные внутренние силы (рис. 1.3)

$$dN = \sigma\, dF, \quad dQ_x = \tau_x\, dF, \quad dQ_y = \tau_y\, dF.$$

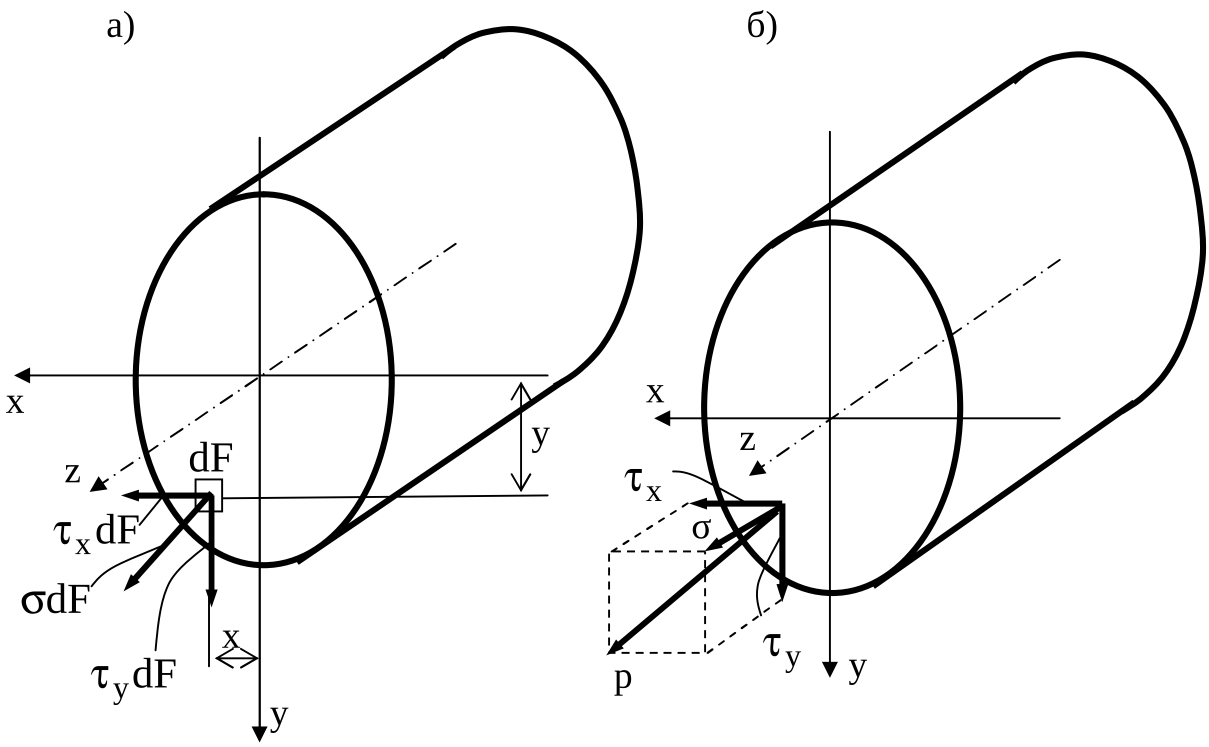


Рис. 1.3. Элементарные внутренние силы (а) и напряжения (б) в поперечном сечении бруса

Суммируя эти элементарные силы по всей площади сечения, получим составляющие главного вектора внутренних сил

$$N = \int_F \sigma \, dF;$$
$$Q_x = \int_F \tau_x \, dF; \qquad (1.7)$$
$$Q_y = \int_F \tau_y \, dF.$$

Умножая каждую элементарную силу на расстояние до соответствующей оси, получим элементарные моменты внутренних сил

$$dM_x = \sigma \, y \, dF, \quad dM_y = \sigma \, x \, dF, \quad dM_z = (\tau_y x - \tau_x y)\, dF.$$

Суммируя полученные выражения по площади, получим

$$M_x = \int_F \sigma \, y \, dF;$$
$$M_y = \int_F \sigma \, x \, dF; \qquad (1.8)$$
$$M_z = \int_F (\tau_y \, x - \tau_x \, y)\, dF.$$

2. Растяжение и сжатие прямого бруса

2.1. Общие положения

При растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержней имеет место лишь одно усилие – продольная сила N. Сила N приложена в центре тяжести сечения и перпендикулярна его плоскости. Поэтому силу N называют еще нормальной силой.

Величина силы N в данном сечении равна сумме проекций всех внешних сил (нагрузок), расположенных слева от сечения либо справа от него, на нормаль к сечению (если стержень прямой, то на его ось). При этом, проекции растягивающих сил – положительны, сжимающих – отрицательны. Таким образом, N в данном сечении может быть как положительной, так и отрицательной, а также равной нулю.

С другой стороны, нормальную силу N можно определить как алгебраическую сумму нормальных напряжений σ, действующих в сечении. С помощью гипотезы плоских сечений (сечения, плоские до деформации, остаются плоскими в результате деформации) можно показать, что величина σ определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \qquad (2.1)$$

где F – площадь поперечного сечения.

Зная величину допускаемого нормального напряжения для данного материала $[\sigma]$, нетрудно сформулировать условие прочности при растяжении - сжатии

$$\sigma = \frac{N}{F} \le [\sigma]. \qquad (2.2)$$

Кроме усилий и напряжений, нужно определять деформации при растяжении - сжатии. Пусть ℓ есть длина стержня или какой-то его части до деформации, ℓ_1 – после деформации. Тогда абсолютная деформация $\Delta\ell$ (абсолютное удлинение при растяжении, абсолютное укорочение при сжатии) равна

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell. \qquad (2.3)$$

Абсолютная деформация при растяжении положительна $(\ell_1 > \ell)$, при сжатии отрицательна $(\ell_1 < \ell)$. Относительная деформация ε равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}. \qquad (2.4)$$

Р. Гук установил, что при упругих деформациях абсолютная деформация пропорциональна усилию

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EF}, \qquad (2.5)$$

где E – модуль упругости первого рода; EF – жесткость сечения при растяжении - сжатии стержней.

Формулу (2.5) называют второй формой закона Гука. Из (2.5) с учетом (2.1) и (2.4) нетрудно получить первую форму закона Гука

$$\sigma = E\,\varepsilon. \qquad (2.6)$$

После определения абсолютных деформаций стержней строится план перемещений системы, что позволяет установить перемещения точек ее в заданных направлениях и из них выбрать наибольшее перемещение δ_{max}.

Если задано допускаемое перемещение $[\delta]$, то проверяется жесткость системы с помощью условия жесткости

$$\delta_{max} \le [\delta]. \qquad (2.7)$$

С помощью условий (2.2) и (2.7) решаются три основные задачи сопротивления материалов: проверочный расчет (проверка прочности и жесткости), проектировочный расчет (подбор сечения), определение допускаемой нагрузки. Могут быть решены и другие задачи, в частности, задачи по определению усилий, напряжений и деформаций.

Здесь возможны два случая. В первом – продольные силы N в стержнях системы определяются из уравнений статики (статически определимые системы).

Во втором – усилия в стержнях системы N не могут быть определены только из уравнений статики, требуется составление дополнительных уравнений, так как количество неизвестных усилий больше числа уравнений статики (системы статически неопределимые). Рассмотрим сначала статически определимые системы.

Пример 2.1.

Прямой стержень нагружен системой нагрузок, линии действия которых совпадают с осью стержня (рис. 2.1, а). Требуется определить продольные силы N во всех участках стержня, нормальные напряжения σ и перемещения δ сечений стержня и построить эпюры N, σ, δ. P = 20 кН, a = 0,5 м, в = 0,6 м, с = 0,9 м, $[\sigma] = 160$ МПа, E = $2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение: 1. Определение опорной реакции R_A.

Опорную реакцию R_A определим из уравнения равновесия $\sum z = 0,\ -R_A + P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = 0$. Отсюда $R_A = 20$ кН.

2. Построение эпюры продольных сил.

Разбиваем стержень на участки, границами которых являются точки приложения сил. На каждом участке выбираем любое сечение z_i и составляем выражение продольной силы.

Продольная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных слева от сечения либо справа от него, на ось прямого стержня.

Проекции растягивающих сил – положительны, сжимающих – отрицательны.

В соответствии с этим получим

$$N_I = \sum_{\text{слева}} P_{iz} = R_A = 20 \text{ кН},$$

$$N_{II} = \sum_{\text{слева}} P_{iz} = R_A - P_1 = 20 - 40 = -20 \text{ кН},$$

$$N_{III} = \sum_{\text{справа}} P_{iz} = P_4 - P_3 = 45 - 35 = 10 \text{ кН},$$

$$N_{IV} = \sum_{\text{справа}} P_{iz} = P_4 = 45 \text{ кН}.$$

На всех участках продольные силы построены.

Эпюра N построена на рис. 2.1, б.

3. Определение наибольшего напряжения в стержне

Определим нормальные напряжения на всех участках в общем виде:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F_1} = \frac{20}{1{,}2F} = \frac{16{,}67}{F}, \qquad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_{II}} = \frac{20}{0{,}8F} = \frac{25}{F},$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{1{,}5F} = \frac{10}{1{,}5F} = \frac{6{,}67}{F}, \qquad \sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{F_{IV}} = \frac{45}{1{,}5F} = \frac{30}{F}.$$

Наибольшее напряжение оказалось на IV участке. Это значит, что сечения IV участка являются опасными.

4. Подбор сечений на всех участках

Подбор сечений делается из условия прочности (2.2). Так как в нашем случае опасными являются сечения IV участка, то

$$\frac{N_{IV}}{F_{IV}} = \frac{30}{F} \le [\sigma] .$$

Отсюда $F \ge \dfrac{30}{[\sigma]} = \dfrac{30 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}1875 \cdot 10^{-3}$ м^2.

Тогда $F_I = 1{,}2F = 0{,}225 \cdot 10^{-3}$ м^2,

$$F_{II} = 0{,}8F = 0{,}150 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$F_{III} = F_{IV} = 1{,}5F = 0{,}2812 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

5. Определение нормальных напряжений. Построение эпюры напряжений.

Вычислим напряжения на всех участках стержня

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F_I} = \frac{20 \cdot 10^3}{0{,}225 \cdot 10^{-3}} = 88{,}89 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_{II}} = \frac{-20 \cdot 10^3}{0{,}15 \cdot 10^{-3}} = -133{,}33 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{F_{III}} = \frac{10 \cdot 10^3}{0{,}2812 \cdot 10^{-3}} = 35{,}56 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{IV} = 160 \text{ МПа}.$$

Напряжения в сечениях каждого участка одинаковы. Эпюра σ построена на рис. 2.1, в.

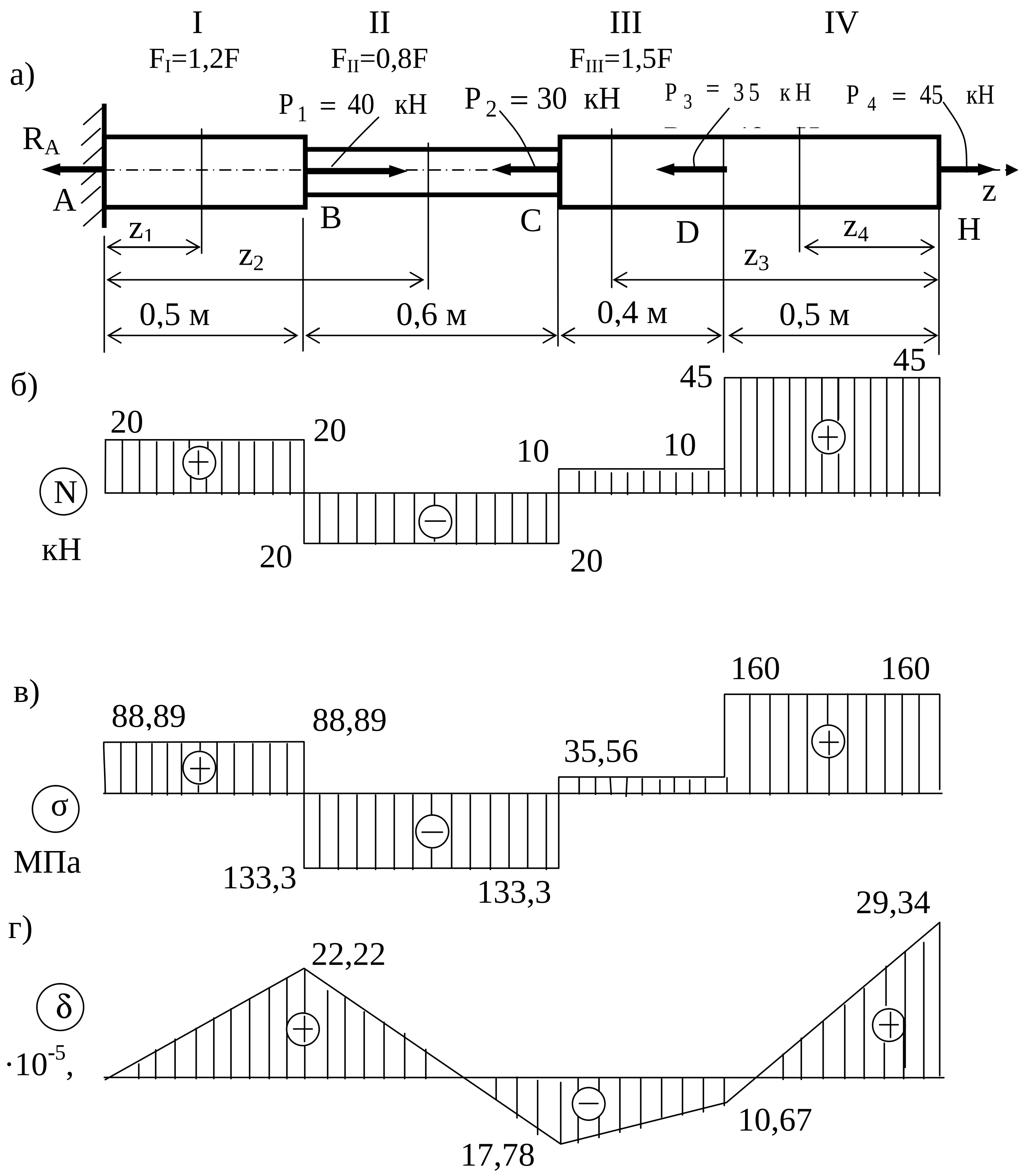


Рис. 2.1. Заданный стержень (а), эпюры продольных сил N (б), напряжений σ (в) и перемещений δ (г)

6. Определение перемещений сечений стержня. Построение эпюры перемещений

Поперечные сечения стержня перемещаются вдоль оси z. Однако, одно сечение является неподвижным – сечение защемления стержня в точке А. Определение перемещений начинаем со стороны неподвижного сечения, с помощью второй формы закона Гука (2.5):

$$\delta_A = 0,$$

$$\delta_B = \delta_A + \Delta\ell_I = 0 + \frac{N_I \ell_I}{E_I F_I} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}225 \cdot 10^{-3}} = 22{,}22 \cdot 10^{-5}\,\text{м},$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta\ell_{II} = 22{,}22 \cdot 10^{-5} + \frac{N_{II} \ell_{II}}{EF_{II}} = 22{,}22 \cdot 10^{-4} + \frac{(-20 \cdot 10^3)0{,}6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= -17{,}78 \cdot 10^{-5}\,\text{м},$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta\ell_{III} = -17{,}78 \cdot 10^{-5} + \frac{N_{III} \ell_{III}}{EF_{III}} = -17{,}78 \cdot 10^{-5} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}2812 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= -17{,}78 \cdot 10^{-5} + 7{,}112 \cdot 10^{-5} = -10{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{м},$$

$$\delta_H = \delta_D + \Delta\ell_{IV} = -10{,}67 \cdot 10^{-5} + \frac{N_{IV} \ell_{IV}}{EF_{IV}} = -10{,}67 \cdot 10^{-5} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}2812 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= -10{,}67 \cdot 10^{-5} + 40{,}01 \cdot 10^{-5} = 29{,}34 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

По вычисленным значениям δ строим эпюру перемещений (рис. 2.1, г).

2.2. Шарнирно – стержневые статически определимые системы при растяжении-сжатии

Здесь рассматриваются системы, состоящие из нескольких стержней. В конструкции, изображенной на рис. 2.2, стержни 1 и 2 шарнирно закреплены, нагрузка на эти стержни передается через узлы (В, Д, К). Как известно, такие стержни испытывают либо растяжение, либо сжатие. Стержни же АВ и ОД изгибаются. Мы будем считать, что изгибаемые элементы систем являются заведомо прочными и достаточно жесткими, деформациями которых можно пренебречь.

Таким образом, в системах типа 2.2 расчетными оказываются растягиваемые или сжимаемые стержни.

Покажем решение основных задач сопротивления материалов для схемы, изображенной на рис. 2.2.

Пример 2.2.

Требуется определить площадь поперечных сечений стержней заданной системы. Проверить жесткость ее по вертикальному перемещению δ_{max} любой точки системы.

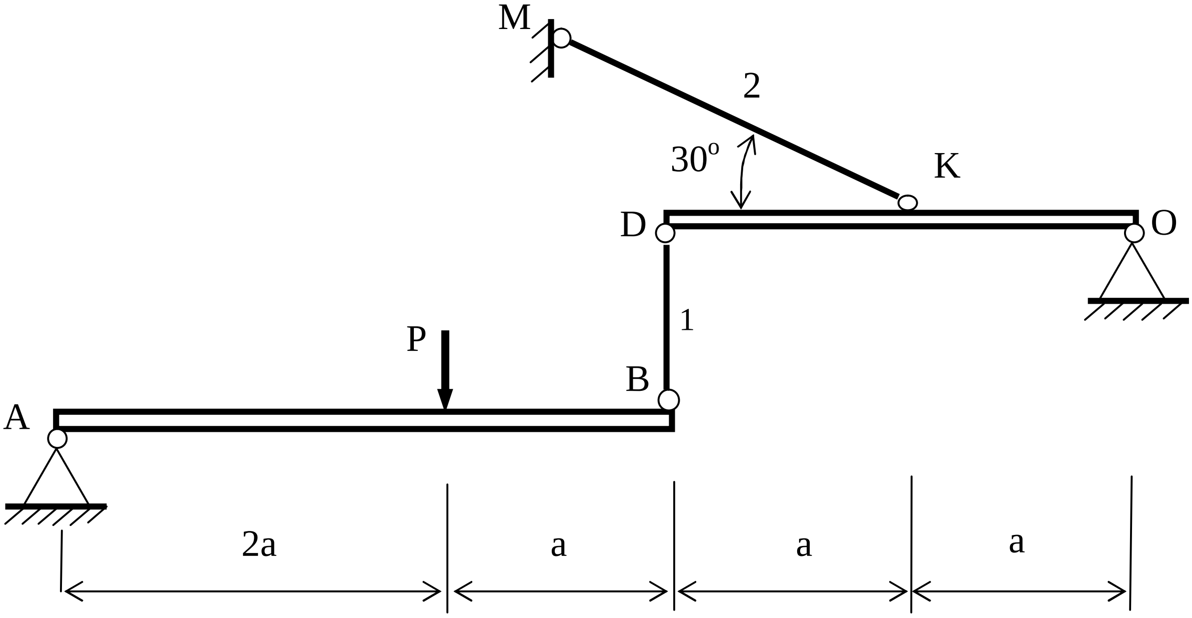


Рис. 2.2. Заданная система

Применять: $E = 2\cdot10^5$ МПа, $[\sigma]$ = 120 МПа, ℓ_1=0,5 м, ℓ_2=1,0 м, P=30 кН, $[\delta]$=0,015 м.

Решение:

1. Построим план сил, рассмотрев основные тела системы АВ и ОД (рис. 2.3).

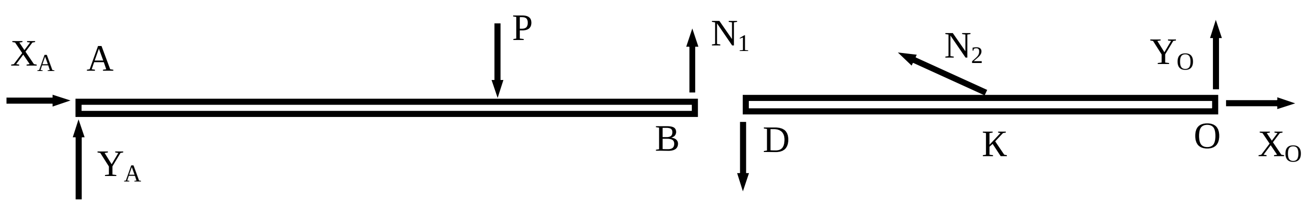


Рис. 2.3. План сил

Если реакции неподвижных цилиндрических шарниров А и О направляем произвольно, считая их идеальными связями, то реакции стержней 1-го и 2-го стержня направляем в соответствии с тем, как работают эти связи. Из заданной схемы очевидно, что стержни 1 и 2 растянуты, поэтому реакции этих стержневых связей направляем от узлов О, Д, В (рис. 2.3).

2. Составляем уравнения равновесия тел АВ и ОД. Определяем N_1 и N_2.

$$\sum m_A = 0,\ -P\,2a + N_1\,3a = 0,\ N_1 = \frac{2}{3}30 = 20\ \text{кН},$$

$$\sum m_0 = 0,\quad N_1 2a - N_2 2a\sin 30^{\circ} = 0,\ N_2 = 2\cdot 20 = 40\ \text{кН}.$$

Значения усилий оказались положительными, следовательно, предположение о работе стержней оказалось правильным. В соответствии с правилом знаков усилий в сопротивлении материалов принимается $N_1 = 20$ кН, $N_2 = 40$ кН.

3. Подбираем сечения стержней из условия прочности

$$F_1 \ge \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{20\cdot 10^3}{120\cdot 10^6} = 1{,}67\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2,$$

$$F_2 \ge \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{40\cdot 10^3}{120\cdot 10^6} = 3{,}34\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

4. Определяем абсолютные деформации стержней

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{E_1F_1} = \frac{20\cdot 10^3\cdot 0{,}5}{2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 1{,}67\cdot 10^{-4}} = 0{,}299\cdot 10^{-3}\ \text{м},$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{E_2F_2} = \frac{40\cdot 10^3\cdot 1{,}0}{2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 3{,}34\cdot 10^{-4}} = 0{,}598\cdot 10^{-3}\ \text{м}$$

Деформации $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ положительны и представляют собой абсолютные удлинения стержней.

5. Построим план перемещений системы. Построение начинаем с перемещения ненагруженного тела ОД (рис. 2.4).

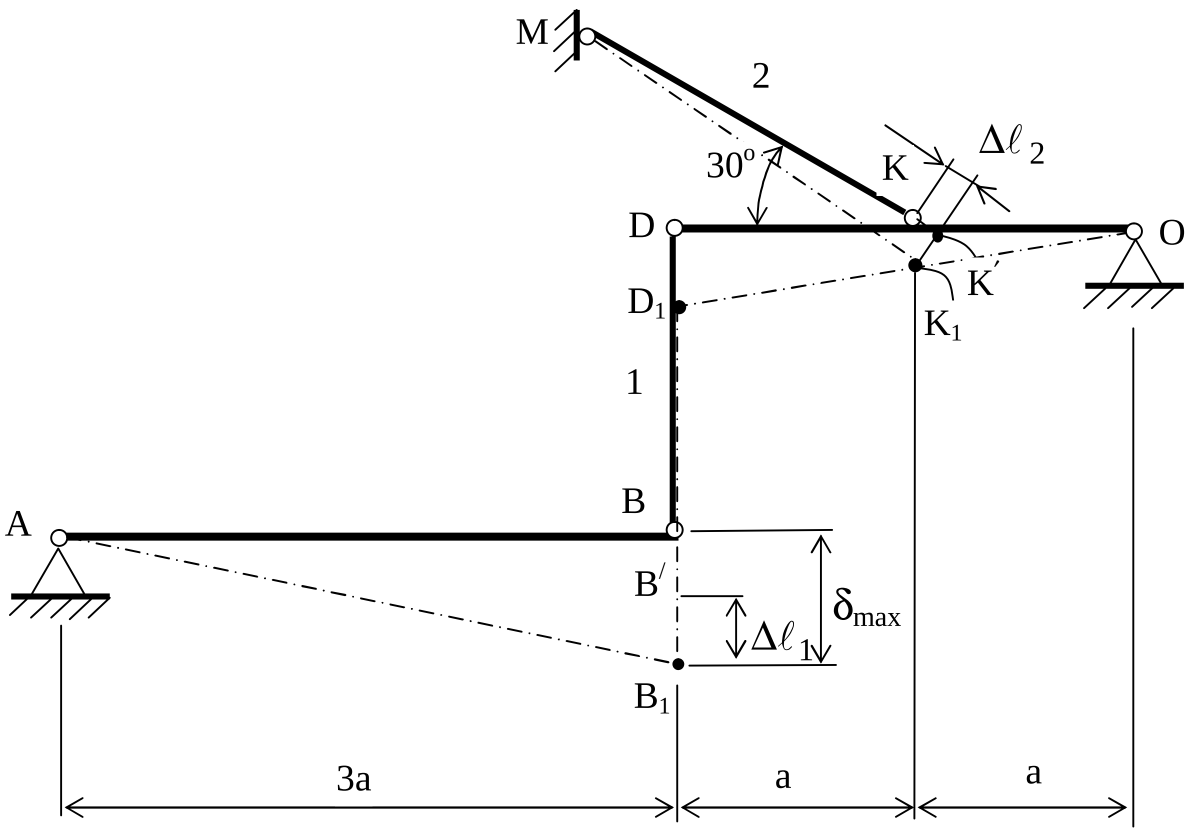


Рис. 2.4. План перемещений

Стержень OD опускается вниз, вращаясь вокруг т. О. Траектории всех его точек являются дугами окружностей, в частности т. К перемещается по окружности радиусом ОК, т. D – по окружности радиусом OD. В силу малости перемещений перемещение точки по дуге можно заменить перемещением по касательной к ней, то есть по перпендикуляру к радиусу поворота. Поэтому т. К вместе с ОКD перемещается по KK_1. В то же время т. К принадлежит второму стержню. Относя ее ко второму стержню, мы можем перемещение ее считать результатом, во-первых, удлинения стержня на величину $\Delta\ell_2$ (рис. 2.4) и, во-вторых, поворота его вокруг узла М. Первая часть перемещения происходит по направлению стержня, вторая по дуге окружности, которую вновь можем заменить перпендикуляром к радиусу поворота К′М. Пересечение К′М и KK_1 устанавливает окончательное положение точки K_1.

После этого нетрудно найти т. D_1.

Точка В перемещается вместе со стержнем ДВ на величину $BB^/ = DD_1$. В заключение необходимо учесть удлинение первого стержня $\Delta\ell_1$, в результате получаем окончательное положение т. B_1 и фиксируем δ_{max}.

6. Из плана перемещений определяем δ_{max}:

$$\delta_{max} = BB^{/} + \Delta\ell_1 = DD_1 + \Delta\ell_1 = \frac{\Delta\ell_2\, 2a}{\sin 30^{\circ}\, a} + \Delta\ell_1 =$$

$$= (0{,}598 \cdot 4 + 0{,}299)10^{-3} = 0{,}269 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Проверяем жесткость по условию (2.7)

$$\delta_{max} \le [\delta].$$

Так как $\delta_{max} = 0{,}269 \cdot 10^{-2}$ м < [δ] = 0,015 м, то условие жесткости удовлетворяется.

2.3. Расчет статически неопределимых систем при растяжении и сжатии

Усилия в статически неопределимой системе невозможно определить из уравнений статики, так как количество неизвестных сил превышает число уравнений равновесия, которые можно составить для системы.

Статически неопределимыми являются системы, имеющие «лишние» связи. «Лишними» называют связи, при удалении которых система остается геометрически неизменяемой и статически определимой. Число «лишних» связей определяется как разность между количеством неизвестных реакций связей в конструкции и числом возможных независимых уравнений равновесия. Числом «лишних» связей определяется степень статической неопределимости системы. Реакции «лишних» связей являются избыточными неизвестными и для их определения кроме уравнений статики необходимо составить дополнительные зависимости.

В некоторых частных случаях количество лишних связей может быть уменьшено. Так, например, система, изображенная на рис. 2.5 формально имеет две лишних связи. Однако, если наклонные стержни 1 абсолютно одинаковы, то в силу одинаковых деформаций $\Delta\ell_1$ этих стержней их реакции N_1 тоже будут одинаковы. Следовательно, эту систему фактически можно рассматривать как однажды статически неопределимую, в которой надо составить только одно уравнение, дополнительно к уравнениям статики.

Нахождение усилий в элементах статически неопределимой системы методом допускаемых напряжений (материал конструкции работает в упругой стадии) требует рассмотрения трех сторон этой задачи: статической, геометрической и физической.

При рассмотрении статической стороны задачи строят план сил (ПС) и на его основе составляют уравнения равновесия. Так как уравнений равновесия недостаточно для определения усилий, то составляют дополнительные уравнения, для чего рассматривается геометрическая сторона задачи. Здесь строится план перемещений (ПП) с учетом абсолютных деформаций стержней $\Delta\ell_i$. После построения ПП необходимо проверить соответствие ПП и ПС (возможное статическое состояние системы должно соответствовать ее возможному кинематическому состоянию). Соответствие имеет место тогда, когда растяжению стержня в ПС (реакция направлена от узла) соответствует удлинение его на ПП, сжатию на ПС (реакция направлена к узлу) соответствует укорочение на ПП.

С помощью ПП составляются дополнительные уравнения (из чисто геометрических соображений), которые называются уравнениями совместности деформаций (УСД). Смысл УСД в том, что деформации отдельных элементов системы должны зависеть друг от друга (должны быть совместными).

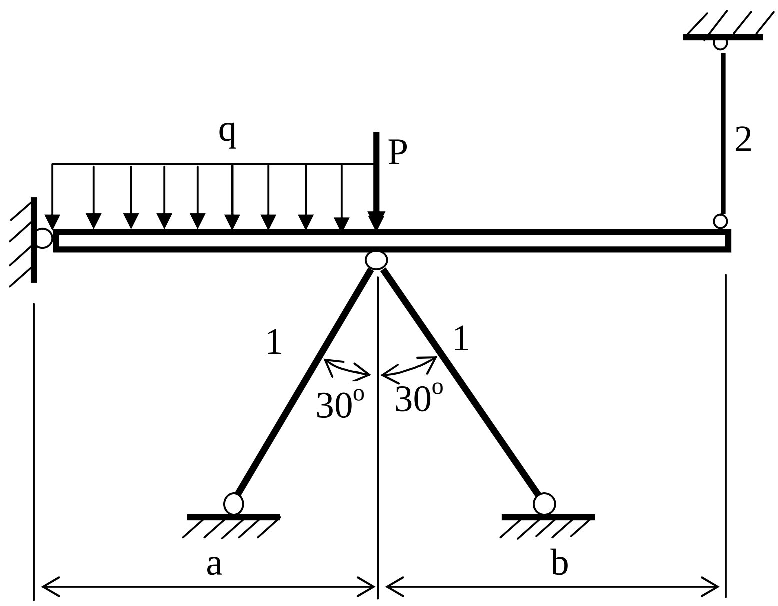


Рис. 2.5. Дважды статически неопределимая система

Однако решение уравнений статики и УСД относительно усилий N_i еще невозможно, так как в первые вошли усилия, а во вторые – абсолютные деформации $\Delta\ell_i$.

Необходимо теперь рассмотреть физическую сторону задачи, в которой к решению привлекаются физические законы – законы Гука в форме $\Delta\ell = \frac{N\ell}{EF}$, закон линейного температурного расширения тел $\Delta\ell_t = \alpha \Delta t\, \ell$ (α – коэффициент линейного расширения для данного материала; Δt – изменение температуры).

Остается определить усилие N_i из полученной системы линейных уравнений. После определения N_i говорят, что статическая неопределимость системы раскрыта и можно решать основные задачи сопротивления материалов. Статически неопределимые системы имеют ряд особенностей, которые не свойственны статически определимым системам.

Первая особенность состоит в том, что распределение усилий в стержнях зависит от соотношения жесткостей их поперечных сечений $E_i F_i$. Поэтому для выполнения расчетов надо задать значения этих величин или их соотношение. Такая особенность приводит к тому, что при подборе сечения трудно обеспечить оптимальность конструкции. Обычно в одних элементах системы несущая способность материала используется полностью (расчетные напряжения в этих элементах равны допускаемым), а в некоторых элементах материал недогружен.

Вторая особенность статически неопределимых систем состоит в том, что заданные деформации элементов, такие как неточность изготовления или температурные деформации, могут вызвать дополнительные напряжения. Это происходит в тех случаях, когда заданные деформации являются несовместными и не удовлетворяют УСД. Напряжения, возникающие из-за неточности изготовления, называют монтажными, а от изменения температуры – температурными.

Если первая особенность оказывает отрицательное влияние на работоспособность конструкции, то вторая может быть как отрицательной, так и положительной. Положительную роль монтажные напряжения играют, если они заранее предусмотрены. Это делается при создании предварительно напряженных конструкций. За счет монтажных напряжений могут быть, например, уменьшены или полностью компенсированы температурные напряжения.

Особенности расчетов статически неопределимых систем показаны ниже при решении трех примеров.

А. Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы при действии внешней нагрузки

Пример 2.3.

На рис. 2.6, а изображена шарнирно-стержневая система, имеющая одну «лишнюю» связь. Заданы нагрузки P = 20 кН, q = 10 кН/м; соотношение площадей поперечных сечений стержней F_1/F_2 = 1,5; модули упругости материалов стержней $E_1 = 1\cdot10^5$ МПа, $E_2 = 2\cdot10^5$ МПа; длины стержней $\ell_1 = 1{,}5$ м, $\ell_2 = 1{,}0$ м; допускаемые напряжения $[\sigma]_1^- = 42$ МПа, $[\sigma]_2^- = 120$ МПа.

Требуется определить площади поперечных сечений F_1 и F_2, напряжения в стержнях σ_{1p}, σ_{2p} – от нагрузки.

1. Статическая сторона задачи

Строим план сил (рис. 2.6, б) и составляем уравнения равновесия $\sum x = 0$, $\sum y = 0$, $\sum m_A = 0$. Очевидно, что в первые два уравнения войдут X_A, $У_A$, которые не используются в последующих расчетах, поэтому эти уравнения отбрасываются, третье уравнение после подстановки числовых значений нагрузок принимает вид

$$N_1 + 2{,}31 N_2 = 105. \tag{2.8}$$

В уравнение (2.8) вошли две неизвестные реакции N_1 и N_2, для их определения нужно составить еще одно уравнение, которое получим из рассмотрения геометрической стороны задачи.

2. Геометрическая сторона задачи

Построение плана перемещений начинаем с изображения перемещения основного тела АВДК. Очевидно, брус АВДК опустится вниз, повернувшись вокруг опорного шарнира А, и займет положение $АВ_1Д_1К_1$. Здесь положение т. $В_1$ устанавливается точно так же, как и т. $К_1$ на рис. 2.4. После этого через точки А и $В_1$ проводят прямую, пересечения которой с перпендикулярами к линии АВДК из точек Д и К определяют точки $Д_1$ и $К_1$. Очевидно, $ДД_1 = \Delta\ell_2$. Из подобия $\Delta АВВ_1$ и $\Delta АДД_1$ следует:

$$\frac{ДД_1}{BB_1} = \frac{АД}{AB}, \qquad АД = \frac{2{,}0}{\cos 30^o}, \qquad AB = \frac{1{,}0}{\cos 30^o},$$

кроме того $ДД_1 = \Delta\ell_2$, $BB_1 = \dfrac{\Delta\ell_1}{\cos 30^o}$.

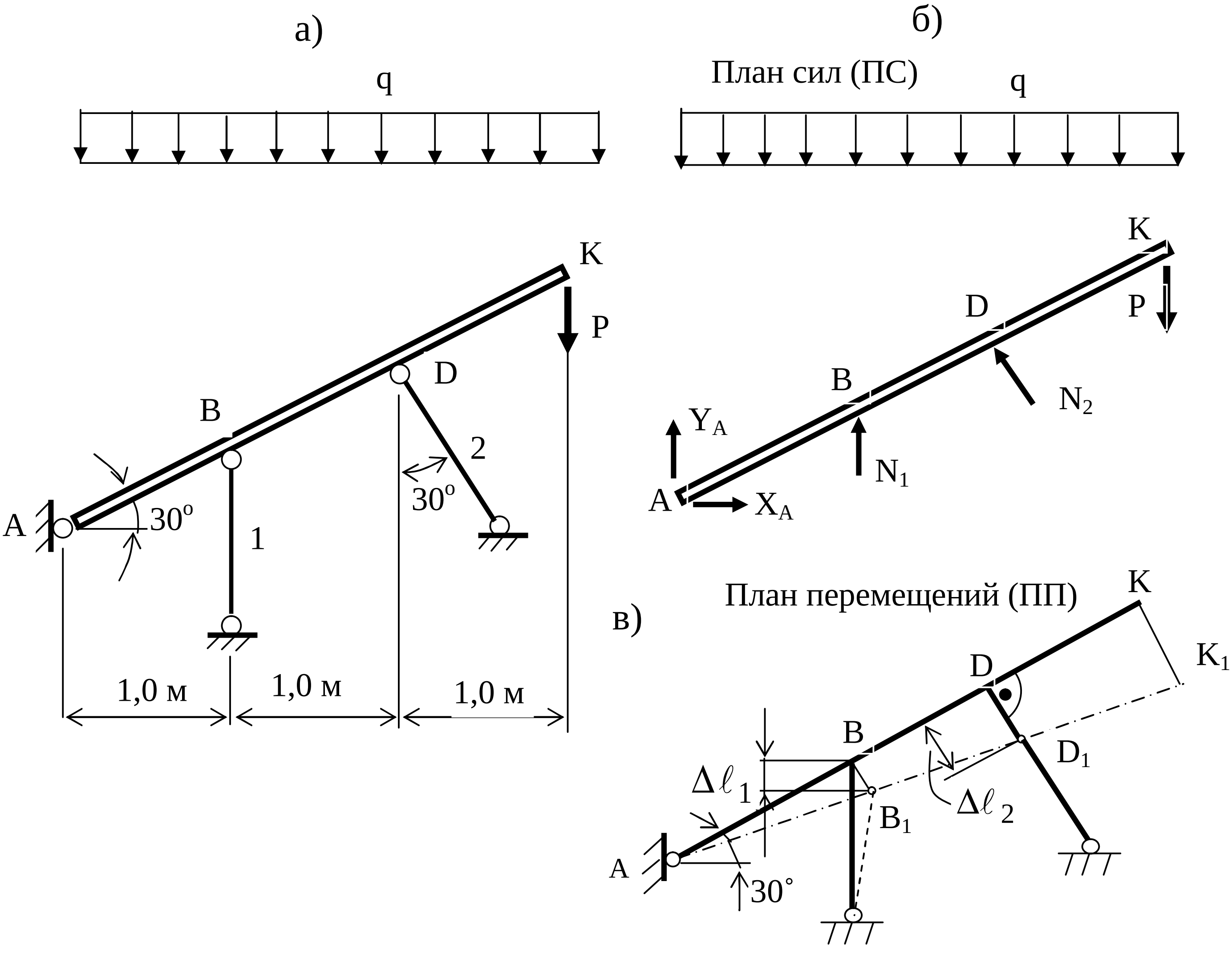


Рис. 2.6. Заданная система (а) с планом сил (б) и планом перемещений (в)

Тогда $\dfrac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1}\cos 30^o = \dfrac{2}{1}$.

Окончательно уравнение совместности деформаций принимает вид

$$\sqrt{3}\,\Delta\ell_2 = 4\Delta\ell_1. \qquad (2.9)$$

3. Физическая сторона задачи.

Преобразуем (2.9), выражая $\Delta\ell_1$ по закону Гука:

$$\sqrt{3}\,\frac{N_2\ell_2}{E_2F_2} = 4\,\frac{N_1\ell_1}{E_1F_1}. \qquad (2.10)$$

Подставляя числовые значения величин и соотношение площадей в (2.10), получим

$$N_2 = 4{,}62\,N_1. \qquad (2.11)$$

Решая совместно уравнения (2.8) и (2.11), получим N_1 = 9 кН, N_2 = 41,6 кН. В соответствии с правилом знаков продольных сил принимается N_1= –9 кН, N_2 = – 41,6 кН.

4. Подбор сечений стержней.

Из условия прочности при растяжении-сжатии определяем площади сечений

$$F_1 \ge \frac{|N_1|}{[\sigma]_1^-} = \frac{9\cdot 10^{-3}}{42} = 2{,}14\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2, \quad F_2 \ge \frac{|N_2|}{[\sigma]_2^-} = \frac{41{,}6\cdot 10^{-3}}{120} = 3{,}47\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Приводим полученные площади к заданному отношению $F_1 = 1{,}5\ F_2$, не нарушая при этом условия прочности $F_2 = 3{,}47 \cdot 10^{-4}$ м^2, $F_1 = 1{,}5F_2$ = $=5{,}20 \cdot 10^{-4}$ м^2 > $2{,}14 \cdot 10^{-4}$ м^2 .

Определяем напряжения в стержнях при действии нагрузки

$$\sigma_{1p} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-9\cdot 10^3}{5{,}2\cdot 10^{-4}} = -1{,}73\cdot 10^7\ \text{Па} = -17{,}3\ \ \text{МПа},$$

$$\sigma_{2p} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-41{,}6\cdot 10^3}{3{,}47\cdot 10^{-4}} = -12{,}0\cdot 10^7\ \text{Па} = -120\ \ \text{МПа}.$$

Оценивая полученные напряжения в стержнях, приходим к заключению, что несущая способность материала второго стержня используется полностью, первый же стержень значительно недогружен.

Б. Определение напряжений в элементах статически неопределимой системы при изменении температуры

Вычислим напряжения при изменении температуры. Освобождаем конструкцию от нагрузки (рис. 2.7, а) и принимаем, что произошел нагрев ее на Δt. К данным предыдущего расчета добавляется следующее: изменение температуры на $\Delta t = +30^o$; коэффициенты линейного температурного расширения материалов стержней

$$\alpha_1 = 165 \cdot 10^{-7} \frac{1}{град}, \quad \alpha_2 = 123 \cdot 10^{-7} \frac{1}{град}.$$

Требуется определить температурные напряжения в стержнях σ_{1t}, σ_{2t}.

Решение.

1. Статическая сторона задачи.

При повышении температуры стержни 1 и 2 получат температурные удлинения $\Delta\ell_{1t}$ и $\Delta\ell_{2t}$, поэтому брус АВД перемещается вверх, поворачиваясь вокруг шарнира А, и займет положение $АВ_1Д_1$.

Предположим, что стержень 2 за счет своей большей температурной деформации повернет брус АВД вокруг шарнира А на больший угол, чем стержень 1. Тогда первый стержень окажется растянутым, а второй будет сжат.

Реакции стержней N_{1t} (направленная от узла В) и N_{2t} (направленная к узлу Д), появившиеся в связи с изменением температуры системы, показаны на рис.
2.7, б. Составляем одно уравнение равновесия
$\sum m_A = 0;\ -N_{1t} \cdot 1 + 2{,}31 N_{2t} = 0.$ $\sum m_A = 0;\ -N_{1t} \cdot 1 + 2{,}31 N_{2t} = 0.$

Разделим уравнение на произведение площадей F_1F_2

$$\frac{N_{1t}}{F_1F_2} = 2{,}31\frac{N_{2t}}{F_1F_2}.$$

Учитывая, что $F_1 = 1{,}5F_2, \sigma_{1t} = \frac{N_{1t}}{F_1}, \ \sigma_{2t} = \frac{N_{2t}}{F_2}$, приведем уравнение к виду, удобному при решении задачи определения напряжений:

$$\sigma_{1t} = 1{,}54\sigma_{2t}. \qquad (2.12)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Абсолютные деформации стержней $\Delta\ell$ в температурной задаче складываются из двух составляющих – температурной $\Delta\ell_t$ и силовой $\Delta\ell_N$. При нагреве системы $\Delta\ell_t$ является температурным удлинением. Деформация $\Delta\ell_N$ может быть либо силовым удлинением, либо силовым укорочением.

В соответствии с предположением, сделанным в статической стороне задачи, $\Delta\ell_{2N}$ есть силовое укорочение, а $\Delta\ell_{1N}$ – силовое удлинение. План перемещений показан на рис. 2.7, в, а окончательные деформации стержней таковы:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{1t} + \Delta\ell_{1N}, \;\; \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{2t} - \Delta\ell_{2N}.$$

Как видно из рисунка, статическое состояние системы (рис. 2.6, б) соответствует ее кинематическому состоянию (рис. 2.7, в), кроме того, эти состояния возможны, так как при указанном направлении N_{1t} и N_{2t} равновесие системы имеет место. С помощью плана перемещений составляем уравнение совместности деформаций

$$\sqrt{3}\left(\Delta\ell_{2t} - \Delta\ell_{2N}\right) = 4\left(\Delta\ell_{1t} + \Delta\ell_{1N}\right). \qquad (2.13)$$

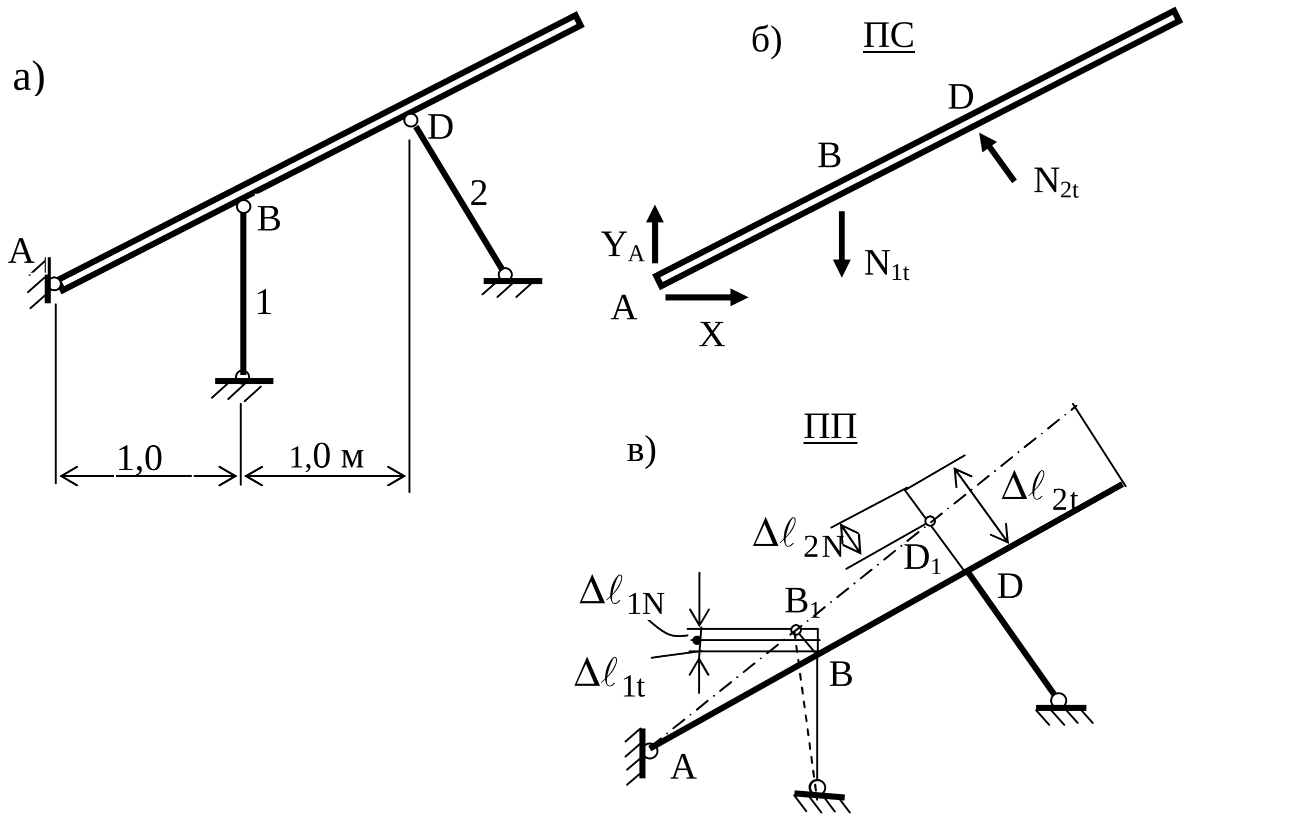


Рис. 2.7. Заданная система (а), план сил (б)
и план перемещений (в) в температурной задаче

3. Физическая сторона задачи.

Абсолютные деформации (температурные и силовые) выражаем по законам физики

$$\Delta\ell_t = \alpha\ell\Delta t,\ \ \Delta\ell_N = \frac{N\ell}{EF}.$$

Тогда уравнение (2.13) принимает вид

$$\sqrt{3}\left(\alpha_2\ell_2\Delta t - \frac{N_2\ell_2}{E_2F_2}\right) = 4\left(\alpha_1\ell_1\Delta t + \frac{N_1\ell_1}{E_1F_1}\right).$$

Подставляя в последнее равенство числовые значения величин, получим

$$\sqrt{3}\left(125\cdot10^{-7}\cdot30\cdot1{,}0 - \frac{\sigma_{2t}1{,}0}{2\cdot10^5}\right) = 4\left(165\cdot10^{-7}\cdot30\cdot1{,}5 - \frac{\sigma_{1t}1{,}5}{10^5}\right). \quad (2.14)$$

Решая совместно уравнения (2.12) и (2.14), определяем температурные напряжения $\sigma_{1t} = -35{,}4$ МПа, $\sigma_{2t} = -23{,}0$ МПа. Отрицательные значения напряжений означают, что сделанное выше предположение неверно. На самом деле растянут второй стержень, а первый сжат.

С учетом этого окончательно принимаем $\sigma_{1t} = -35{,}4$ МПа, $\sigma_{2t} = 23{,}0$ МПа.

Если, основываясь на принципе суперпозиции, сложить напряжения от нагрузки, подсчитанные в предыдущем примере с температурными, то окажется, что, если $\sigma_2 = \sigma_{2p} + \sigma_{2t} = 23{,}0 - 120 = -97$ МПа, меньше допускаемого $[\sigma]_2^-$, а σ_1 равно $[\sigma]_1^-$,

$$\sigma_1 = \sigma_{1p} + \sigma_{1t} = -17{,}3 - 35{,}4 = 52{,}7 \text{ МПа} > [\sigma]_1^- = 42 \text{ МПа}.$$

В. Расчет статически неопределимых систем с учетом неточности изготовления отдельных элементов

В этих задачах обычно требуется либо определить монтажные σ_Δ напряжения при заданной неточности «Δ», либо установить величину «Δ», обеспечивающую требуемые напряжения σ_Δ. Решения обеих задач принципиально не отличаются друг от друга, однако более интересной является вторая задача – определение «Δ».

Покажем решение этой задачи, используя результаты расчетов примера 2.3 на внешнюю нагрузку и изменение температуры, из которых видно, что сжимающее напряжение в первом стержне превышает допускаемое на 10,7 МПа. Чтобы уменьшить сжимающее напряжение в первом стержне, зададим растягивающее монтажное напряжение $\sigma_{\Delta 1} = 12$ МПа. Растяжение в первом стержне можно получить, сделав его короче точного размера на величину «Δ». Тогда при монтаже этот стержень будет растянут.

Итак, освобождаем систему от нагрузки (рис. 2.8, а) и принимаем, что первый стержень короче нужного размера на «Δ».

Требуется определить «Δ» при условии, что монтажное напряжение $\sigma_{\Delta 1} = 12$ МПа.

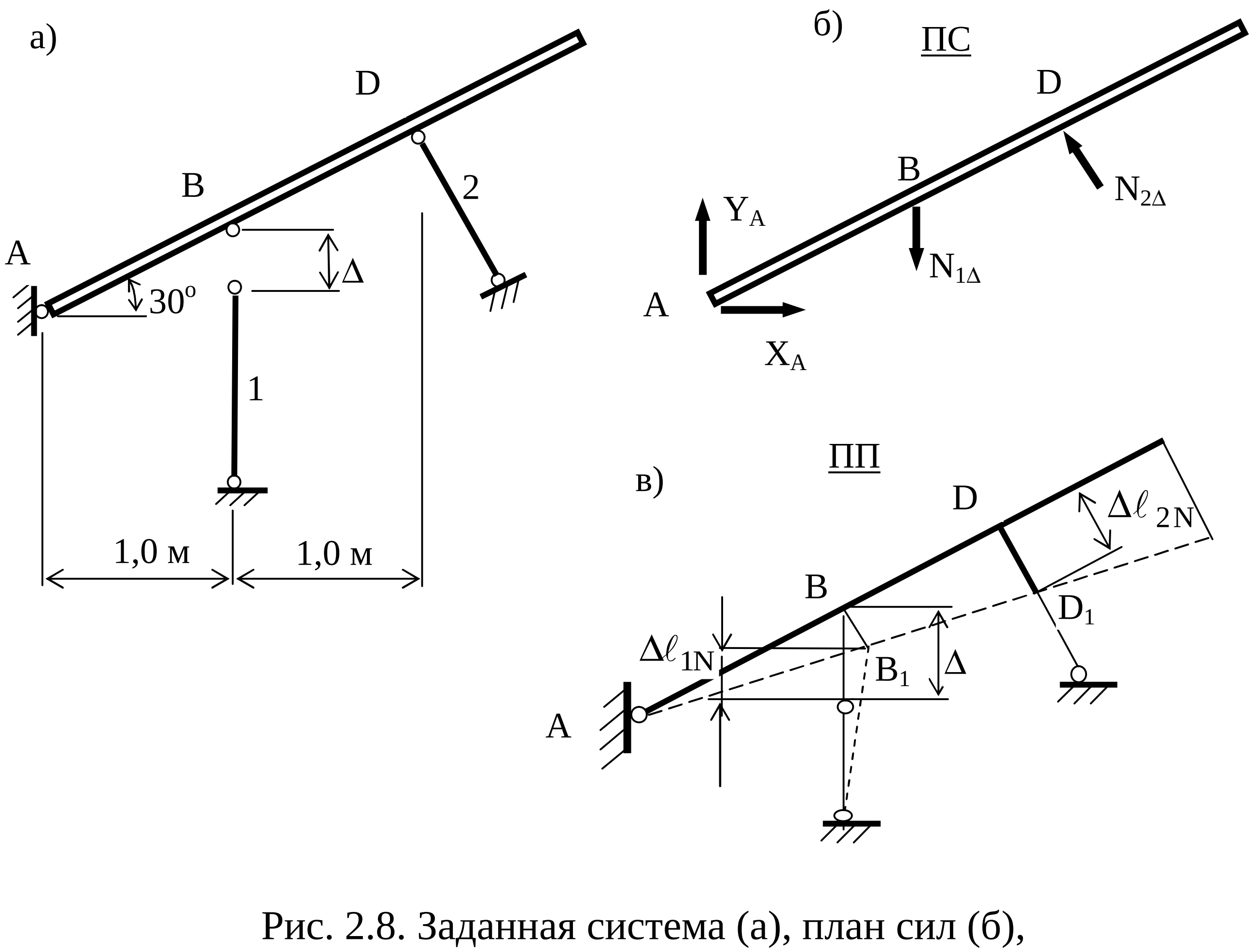


Рис. 2.8. Заданная система (а), план сил (б),
план перемещений (в)

Решение.

1. Статическая сторона задачи.

При монтаже системы зазор Δ ликвидируется, с одной стороны, за счет перемещения бруса из АВД в $А_1В_1Д_1$, с другой – за счет удлинения первого стержня $\Delta\ell_1$.

Но при перемещении бруса из АВД в $А_1В_1Д_1$ второй стержень сжимается, укорачиваясь на $\Delta\ell_2$.

В соответствии с этим направлены $N_{1\Delta}$(от узла) и $N_{2\Delta}$(к узлу). Составляем уравнение равновесия

$\sum m_A = 0, \quad -N_{1\Delta}\cdot 1{,}0 + N_{2\Delta}\cdot 2/\sin 30^o = 0$. Разделив это уравнение на F_1 и учитывая соотношение $F_1 = 1{,}5\ F_2$, получим как и в предыдущем расчете $\sigma_{1\Delta} = 1{,}54\sigma_{2\Delta}$.

2. Геометрическая сторона задачи.

На плане перемещений (рис. 2.8, в) показаны удлинение первого стержня $\Delta\ell_1$ и укорочение второго стержня $\Delta\ell_2$. Сравнивая планы сил и перемещений, видим, что возможные статическое и кинематическое состояния системы соответствуют друг другу.

Из $\Delta ВВ_1В'$ найдем $ВВ_1$:

$$ВВ_1 = \frac{\Delta - \Delta\ell_1}{\cos 30^o}.$$

Из подобия треугольников $АВВ_1$ и $АДД_1$ следует

$$\frac{ВВ_1}{ДД_1} = \frac{АВ}{АД}, \quad ВВ_1 = ДД_1\frac{АВ}{АД}, \quad \frac{АВ}{АД} = \frac{1}{2}.$$

Но $ДД_1 = \Delta\ell_2$, следовательно:

$$\frac{\Delta - \Delta\ell_1}{\cos 30^o} = \frac{\Delta\ell_2}{2}. \qquad (2.15)$$

Это уравнение совместности деформаций в монтажной задаче.

3. Физическая сторона задачи.

Выражая в (2.15) абсолютные деформации по закону Гука, перепишем уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\Delta - \dfrac{N_1 \ell_1}{E_1 F_1}}{\cos 30^{o}} = \frac{N_2 \ell_2}{2E_2 F_2}.$$

Учитывая, что $\sigma_{1\Delta} = \dfrac{N_{1\Delta}}{F_1}$, $\sigma_{2\Delta} = \dfrac{N_{2\Delta}}{F_2}$, подставляя числовые значения ($\sigma_{1\Delta}$ = 12 МПа, $\sigma_{2\Delta} = \dfrac{\sigma_{1\Delta}}{1,54}$ = 7,79 МПа), представим УСД в виде

$$\Delta - 12\frac{1,0}{10^5} = 7,79\frac{0,865 \cdot 1,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^5}. \qquad (2.16)$$

Решив уравнение (2.16) относительно Δ, получим $\Delta = 1,45 \cdot 10^{-4}$ м.

В соответствии с правилом знаков сопротивления материалов принимаем $\sigma_{\Delta 1} = 12$ МПа, $\sigma_{2\Delta} = -7,8$ МПа.

Если теперь на основании принципа суперпозиции сложить напряжения от нагрузки, температуры и монтажные, то напряжения в стержнях окажутся меньше допускаемых.

$$\sigma_{ст.1} = -17,3 - 35,4 + 12 = -40,7 \ \text{ МПа},$$

$$\sigma_{ст.2} = -120 + 23 - 7,8 = -104,8 \ \text{МПа}.$$

Таким образом, за счет монтажных напряжений удалось улучшить работу первого стержня.

3. Напряженное состояние в точке тела. Критерии пластичности и разрушения

Для описания напряженного состояния (НС) в точке нагруженного тела около нее выделяется бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, грани которого называются площадками.

Если площадки перпендикулярны осям координат *x*, *y*, *z*, то их называют площадками x, y, z. В общем случае на площадках имеют место полные напряжения p_x, p_y, p_z, линии действия которых произвольно расположены по отношению к площадкам. Полные напряжения целесообразно разложить на три составляющие: нормальное и два касательных напряжения. Касательные напряжения действуют на площадках *x*, *y*, *z*, линии действия их параллельны осям координат. Всего получается 9 напряжений – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$ (первый индекс у касательных напряжений показывает, что линия действия параллельна соответствующей оси координат, второй – напряжение расположено на площадке x, y или z).

В любой точке тела имеются три площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Это главные площадки. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются главными напряжениями. Они обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и подчиняются условию

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Заметим, что главные площадки и главные напряжения взаимно перпендикулярны.

Если сохраняются все три главных напряжения, то в точке тела имеет место объемное напряженное состояние (ОНС). Если одно из трех главных напряжений равно нулю, а остаются два, то это – плоское напряженное состояние (ПНС).

Если два главных напряжения равны нулю, а сохраняется только одно, то это – линейное напряженное состояние (ЛНС). ЛНС возникает, в частности, при растяжении и сжатии стержня. При растяжении в точках действуют $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, при сжатии – $\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

3.1. Линейное напряженное состояние

Рассмотрим осевое растяжение силой P прямолинейного стержня, площадь поперечного сечения которого F. Известно, что в поперечном сечении этого стержня имеют место нормальные напряжения $\sigma = \frac{P}{F}$, касательные же напряжения равны нулю. Следовательно, в соответствии со сказанным выше нормальное напряжение в поперечном сечении есть первое главное напряжение $\sigma_1 = \frac{P}{F}$ (при сжатии $\sigma_3 = -\frac{P}{F}$). Напряжения в наклонном сечении F_2 определяются по формулам

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P}{F}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha,$$
$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha, \qquad (3.1)$$
$$\tau_\alpha = p_\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha,$$

где p_α, σ_α, τ_α – полное, нормальное и касательное напряжения, на рис. 3.1 все напряжения показаны положительными; α – угол между осью стержня и внешней нормалью n, к плоскости сечения принимается положительным при отсчете против хода часовой стрелки; σ – главное напряжение, $\sigma = \sigma_1$ при растяжении, $\sigma = \sigma_3$ при сжатии

Решения, получаемые с помощью формул (3.1), называют аналитическими, однако решения могут быть получены и графически с помощью круга напряжений – круга Мора.

В задачах ЛНС обычно требуется определить либо положение наклонных площадок, либо напряжения, действующие на этих площадках, либо силу P, растягивающую стержень, и др.

Пример 3.1.

Дано: схема стержня с нагрузкой (рис. 3.1): $P = 75$ кН, $F = 15$ см^2, $\tau_\alpha = 16$ МПа. Требуется определить: площадки, соответствующие исходным данным, нормальное напряжение на этих площадках σ_α; полное напряжение p_α.

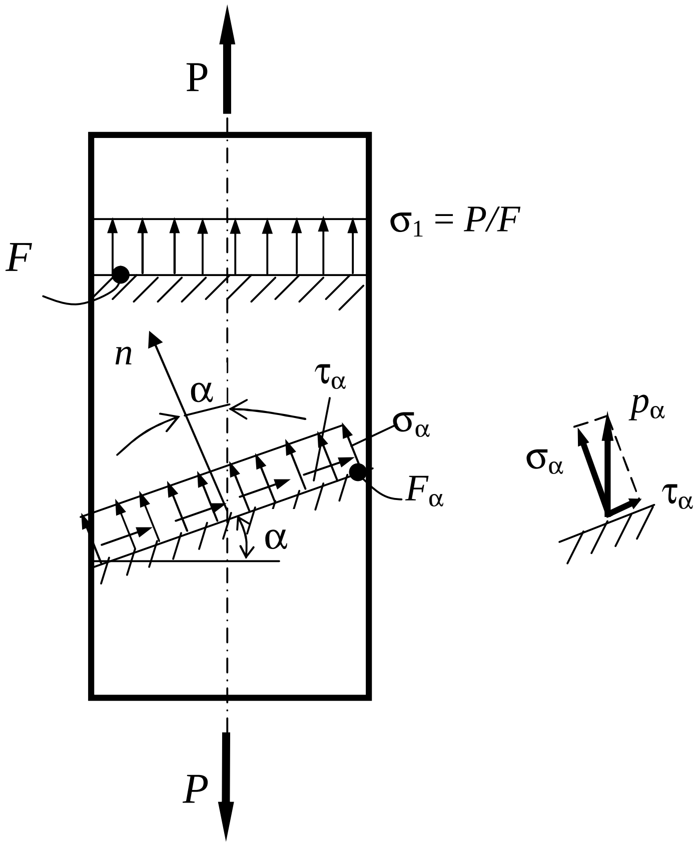


Рис. 3.1. Напряжения в поперечном и наклонном сечениях растянутого стержня

I. Аналитическое решение задачи

1. Определим главное напряжение σ_1

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} = \frac{75 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = 50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50 \text{ МПа},$$

2. Определим угол α

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha, \;\; \sin 2\alpha = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_1} = \frac{2 \cdot 16}{50} = 0{,}64.$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin 0{,}64 = 39^o 50'$$

Одному и тому же значению синуса соответствуют значения двух углов, отличающихся на 180^o.

$$2\alpha_1 = +39^o 50', \qquad \alpha_1 = +19^o 55',$$

$$2\alpha_2 = 180^o - 2\alpha_1 = +140^o 10', \qquad \alpha_2 = +70^o 5'.$$

Таким образом, условиям задачи отвечают две площадки, показанные на рис. 3.2, а.

3. Определим нормальные напряжения на площадках n_1 и n_2 по формуле (3.1)

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 = 50 \cos^2 19^o 55' = 42{,}27 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\alpha_2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 = 50 \cos 70^o 5' = 5{,}75 \text{ МПа}.$$

Так как полные напряжения равны геометрической сумме составляющих τ_2 и σ_2, то получим

$$p_{\alpha_1} = \sqrt{\sigma_{\alpha_1}^2 + \tau_\alpha^2} = \sqrt{44{,}27^2 + 16^2} = 47{,}07 \text{ МПа},$$

$$p_{\alpha_2} = \sqrt{\sigma_{\alpha_2}^2 + \tau_\alpha^2} = \sqrt{5{,}75^2 + 16^2} = 17{,}0 \text{ МПа}.$$

На рис. 3.2, а показаны напряжения, действующие на площадках n_1 и n_2, все напряжения оказались положительными.

II. Графическое решение задачи

Графическое решение осуществляется с помощью круга Мора. Круг Мора представляет собой окружность, построенную в осях σ, τ, где ось σ - ось абсцисс, ось τ - ось ординат (рис. 3.2, б).

Каждой точке круга Мора соответствует площадка в точке тела. Координаты точки круга есть нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке, которой соответствует точка круга. Так, одной из главных площадок в точках растянутого стержня, на которой действуют напряжения σ_1>0, τ = 0, соответствует точка круга M_1 (σ_1, 0); второй главной площадке, где σ_2 = 0, τ = 0, соответствует точка M_2 (0, 0); площадке n_1 с напряжениями $\sigma_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}$ (рис. 3.2, а) соответствует точка круга $M_{n_1}(\sigma_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1})$ и т.д. Причем, оказывается, что точки круга, соответствующие взаимно перпендикулярным площадкам, расположены на концах диаметра круга.

Поэтому отрезок $M_2 M_1$ (рис. 3.2, б) является диаметром круга Мора при растяжении. Тогда середина $M_2 M_1$ есть центр круга С, абсцисса которого равна $\sigma_1/2$. Построенный круг касается оси τ в начале координат и расположен справа от оси τ. Очевидно, круг Мора при сжатии также касается оси τ, но расположен слева от нее, абсцисса его центра равна $\sigma_3/2$.

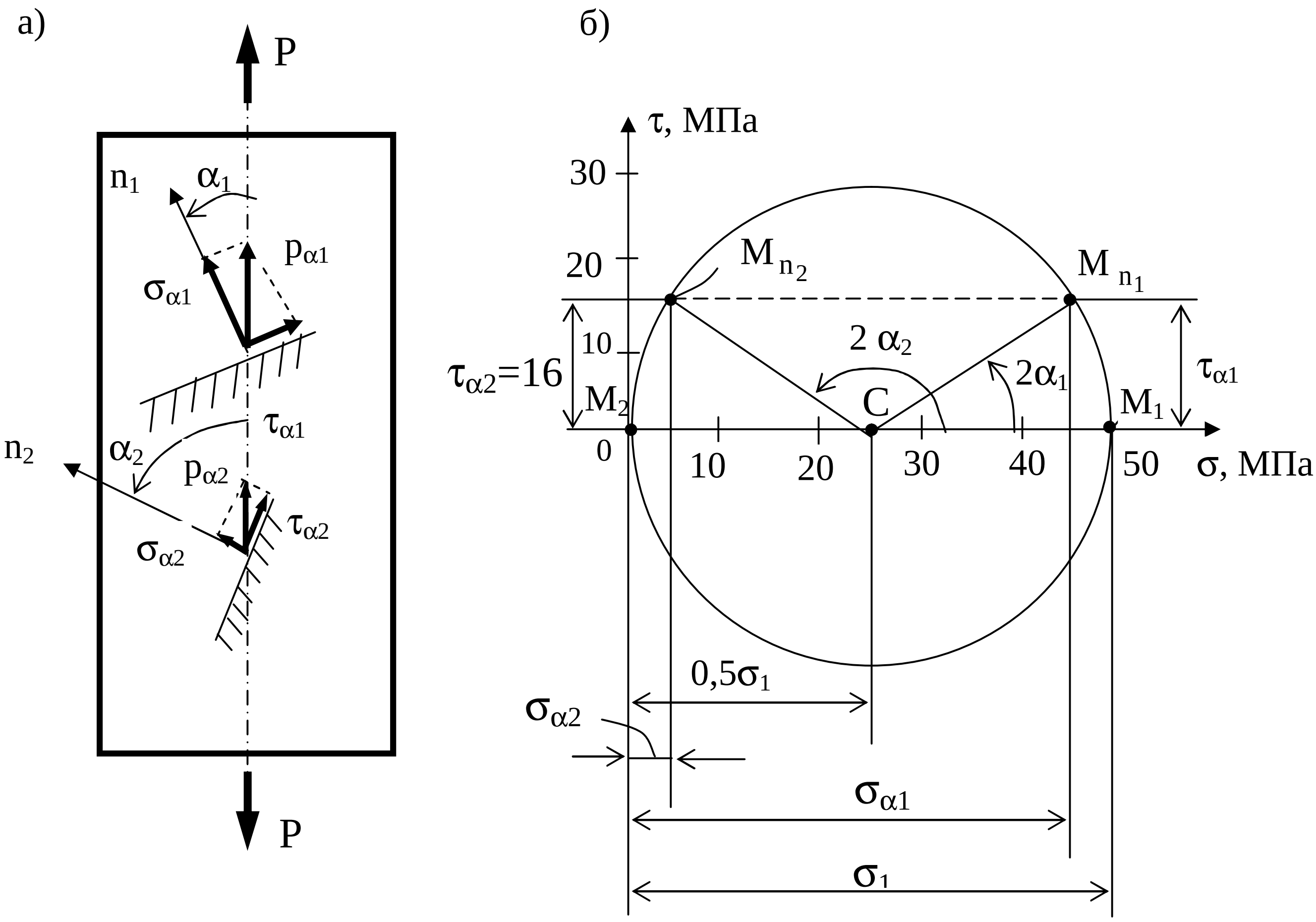


Рис. 3.2. Площадки n_1 и n_2 в стержне (а), точки круга Мора M_{n_1} и M_{n_2}, соответствующие этим площадкам (б)

Для графического решения примера 3.1 задан масштаб напряжений – одно деление на осях σ и τ равно 10 МПа. Круг Мора на рис. 3.2, б построен по известному напряжению σ_1 = 50 МПа согласно принятому масштабу.

Графическое решение получим, проведя линию, ордината которой равна заданному τ = 16 МПа. Эта линия пересечет круг Мора в точках M_{n_1} и M_{n_2}, соответствующих площадкам n_1 и n_2 в стержне, абсциссы этих точек σ_{α_1} и σ_{α_2} совпадают со значениями напряжений в аналитическом решении.

Кроме того, углы между радиусами круга CM_1 и CM_{n_2} равны $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$, причем с аналитическими результатами совпадают как величины, так и направления отсчетов углов (против часовой стрелки).

Таким образом, результаты аналитического и графического решений совпадают.

3.2. Плоское напряженное состояние

Если при плоском напряженном состоянии все напряжения в точке тела (рис. 3.3, а) известны напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, то можно найти напряжения по любой площадке в точке тела. На рис. 3.3, б показана произвольная площадка «n», внешняя нормаль которой составляет с осью x угол α (угол положительный, так как откладывается против часовой стрелки). Нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения на площадке n определяются по формулам

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha,$$
$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha, \qquad (3.2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$ и τ_{xy} – напряжения на взаимно перпендикулярных площадках x, y.

Заметим, что производная функции $\sigma_n(\alpha)$ по переменной α равна по модулю удвоенному значению τ_n

$$\frac{d\sigma_n(\alpha)}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\right) = -2\tau_n. \qquad (3.3)$$

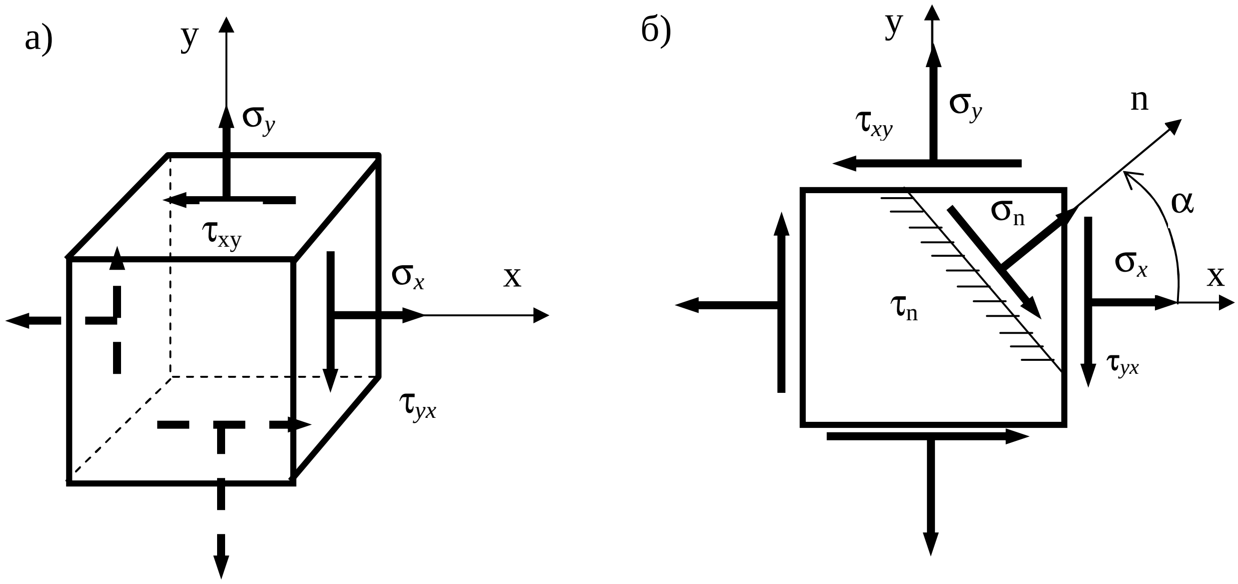


Рис. 3.3. Напряжения на площадках x и y в точке тела при плоском напряженном состоянии (а), напряжения на площадках x, y и на площадке n (б)

Из формул (3.2) следует, что $\sigma_n = \sigma_n(\alpha)$ и $\tau_n = \tau_n(\alpha)$ являются функциями угла α. При изменении угла α функция $\tau_n(\alpha)$ обращается в нуль при двух значениях угла α_1 и α_2. Следовательно, площадки α_1 и α_2 являются главными площадками. Нормальные напряжения на этих площадках есть главные напряжения, причем, учитывая (3.2), главные напряжения есть экстремумы функции $\sigma_n(\alpha)$. Проверка экстремумов по второй производной $\dfrac{d^2\sigma_n(\alpha)}{d\alpha^2}$ показывает, что один из экстремумов есть σ_{max}, второй – σ_{min}.

Приравняем к нулю $\tau_n(\alpha_0) = 0$, получим

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad (3.4)$$

$2\alpha_0$ - угол, определяющий положение одной главной площадки.

Второй угол, определяющий положение второй главной площадки, отличается от первого на 90^{o}.

Обозначив углы α_1 и α_2, получим $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = \alpha_0 + 90^{o}$.

Известна формула для определения главных напряжений при ПНС

$$\sigma_{\substack{max,\\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2{}_{yx}}. \qquad (3.5)$$

Главные напряжения единственные в точке тела, поэтому их сумма является величиной, равной сумме нормальных напряжений на любых двух взаимно перпендикулярных площадках.

Сложим σ_{max} и σ_{min} из (3.5), получим

$$\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}.$$

Если известны главные напряжения σ_{max} и σ_{min}, то целесообразно с их помощью определять напряжения, действующие по произвольной площадке n.

Обозначим угол между внешней нормалью к площадке «n и линией действия σ_{max} через β (знак β определяется так же, как знак угла α).

Тогда формулы (3.2) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\cos 2\beta, \\ \tau_n &= \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\sin 2\beta. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

С помощью (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) строится аналитическое решение двух основных задач плоского напряженного состояния: определение главных напряжений, если известны напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, и определение напряжений по любой площадке, если известны главные напряжения.

Однако возможно и графическое решение этих задач с помощью круга Мора. Представление о круге Мора при плоском напряженном состоянии принципиально не отличается от рассмотренного при линейном напряженном состоянии.

Построение круга Мора обычно осуществляется по двум его точкам, соответствующим двум взаимно перпендикулярным площадкам. Эти точки расположены на одном диаметре круга.

Так как в силу закона парности касательных напряжений точка пересечения диаметра с осью σ есть центр круга, то нетрудно построить круг Мора.

Точки пересечения окружности с осью σ соответствуют главным площадкам. Абсциссы этих точек равны двум главным напряжениям по величине и знаку. Учитывая, что главных напряжений в общем случае в точке три, причем при плоском напряженном состоянии одно из них равно нулю, необходимо указать, какое из полученных напряжений является первым, вторым или третьим, принимая во внимание соотношение $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Линии действия главных напряжений, а значит, и положение главных площадок получают с помощью точки круга Мора, называемой полюсом. Отыскание полюса и его использование показано в примере, рассмотренном ниже.

Один из вариантов графического решения второй задачи основан на том, что угол между радиусами, проведенными в точки круга Мора, равен удвоенному углу между двумя площадками в точке тела, соответствующими точкам круга. Если задан угол между σ_1 и нормалью к искомой площадке, то на круге Мора проводят радиус под углом к радиусу CM_1, равный удвоенному заданному, и получают точку круга, соответствующую искомой площадке. Координаты точки круга Мора есть нормальное и касательное напряжения, действующие на искомой площадке точки тела. При этом учитывается знак угла: положительный угол откладывается против часовой стрелки. Так, на рис 3.2, б определены точки M_{n1} и M_{n2} с помощью положительных углов $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$.

Пример 3.2.

Задана схема площадок в точке тела (рис. 3.4, а) в условиях плоского напряженного состояния. Напряжения равны $\sigma_a = 60$ МПа, $\sigma_в = 30$ МПа, $\tau_в = 20$ МПа. Требуется определить главные напряжения и положение главных площадок.

I. Аналитическое решение задачи

1. В условии задачи не заданы взаимно перпендикулярные площадки с напряжениями на них. Поэтому вначале необходимо образо-

вать такие площадки и найти соответствующие напряжения. Назовем площадку с напряжением $\sigma_а$ площадкой y, тогда $\sigma_y = \sigma_а$. Образуем площадку x с напряжениями σ_x и τ_{yx}, пока неизвестными. Для их определения воспользуемся заданными напряжениями $\sigma_в$ и $\tau_в$.

Угол α, отсчитываемый от линии оси x до внешней нормали к площадке, по которой действует напряжение $\sigma_в$ (или, что то же до линии действия $\tau_в$), равен $+30^o$, как видно из рисунка. Подставим значения напряжений и угла в формулы (3.2):

$$\sigma_n = \sigma_в = 30 = \frac{\sigma_x - 60}{2} + \frac{\sigma_x - 60}{2}\cos 60^o - \tau_{yx}\sin 60^o,$$

$$\tau_n = \tau_в = 20 = \frac{\sigma_x - 60}{2}\sin 60^o + \tau_{yx}\cos 60^o.$$

Решив последние два уравнения совместно относительно σ_x и τ_{yx}, получим $\sigma_x = 63{,}09$ МПа, $\tau_{yx} = 37{,}32$ МПа.

2. Определим главные напряжения по формуле (3.5)

$$\sigma_{\substack{max,\\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2_{yx}} =$$

$$= \frac{63{,}09 + 60{,}0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(63{,}09 - 60{,}0\right)^2 + 4\left(37{,}32\right)^2} = 61{,}54 \pm 37{,}35.$$

$$\sigma_{max} = 61{,}54 + 37{,}35 = 98{,}89 \text{ МПа} = \sigma_1,$$

$$\sigma_{min} = 61{,}54 - 37{,}35 = 24{,}19 \text{ МПа} = \sigma_2,$$

$$\sigma_3 = 0.$$

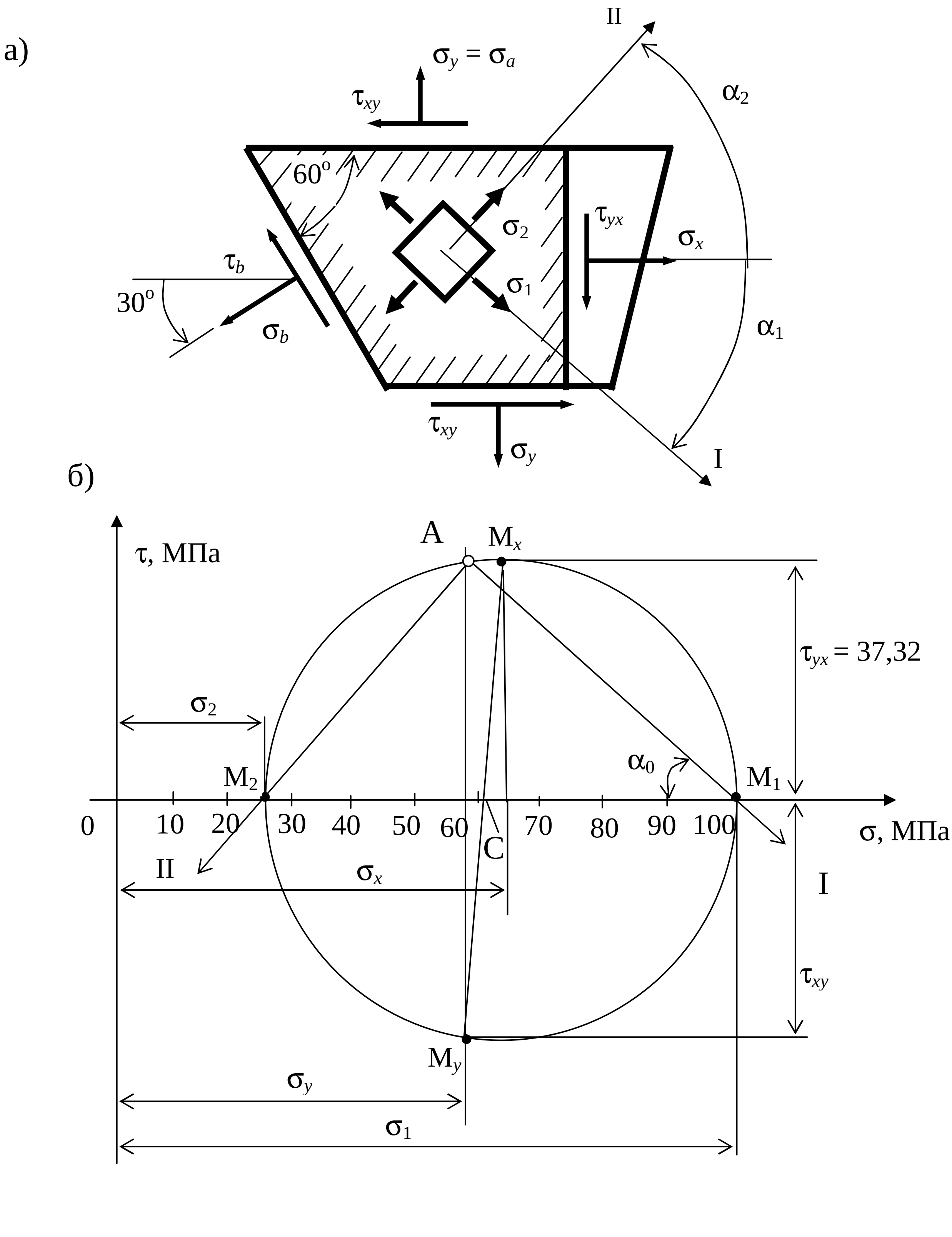


Рис. 3.4. Схема заданных и главных площадок (а),
круг Мора для определения главных напряжений (б)

3. Установим положение главных площадок с помощью формулы (3.4)

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 37{,}32}{63{,}09 - 60} = -24{,}15.$$

$2\alpha_0 = -87^{\circ}30'$,
отсюда
$\alpha_1 = -43^{\circ}45''$,
$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^{\circ} = +46^{\circ}15'$.

4. Проверим линию действия какого главного напряжения определяет угол α_0 с помощью второй производной

$$\frac{d^2\sigma_n}{d\alpha^2} = -2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + 4\tau_{yx}\sin 2\alpha.$$

Подставив $\alpha = \alpha_1 = -43^{\circ}45'$ в $\frac{d^2\sigma_\text{n}}{d\alpha^2}$, получим

$$\frac{d^2\sigma_\text{n}}{d\alpha^2} = -2(63{,}21 - 60)\cos\left(-2 \cdot 43^{\circ}45'\right) + 4 \cdot 37{,}59\sin\left(-2 \cdot 43^{\circ}45'\right) < 0.$$

Следовательно, угол α_0 определяет линию действия $\sigma_{\max}$.

5. Покажем на рис. 3.4, а главные направления I и II. Для этого от оси x откладываем угол α_1 по часовой стрелке (отрицательный угол), угол α_2 против часовой стрелки (положительный угол). Главные площадки перпендикулярны этим направлениям (они показаны внутри заданного элемента). Там же показаны главные напряжения.

II. Графическое решение

1. Строим круг Мора по двум точкам $M_x(\sigma_x, \tau_{yx})$ и $M_y(\sigma_y, \tau_{xy})$, соответствующим площадкам x и y.

Координаты точек $\sigma_x = 63{,}09$ МПа, $\tau_{yx} = 37{,}32$ МПа,

$$\sigma_y = 60{,}0 \text{ МПа}, \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx} = -37{,}32 \text{ МПа}.$$

Отрезок, соединяющий точки M_x и M_y, есть диаметр круга с центром на оси σ. Остается построить окружность.

Точки M_1 и M_2 соответствуют первой и второй главным площадкам величины σ_1 и σ_2, в соответствии с масштабом построения совпадают с результатами аналитического решения.

2. Главные направления получим с помощью полюса круга Мора. Чтобы получить полюс, из т. M_y опускаем перпендикуляр к оси σ и продолжаем его до пересечения с окружностью. Точка пересечения называется полюсом, обозначим ее А.

Проведя из т. А лучи в точки M_1 и M_2, получим главные направления I и II. Сравнивая полученный результат с рис. 3.4, а, убеждаемся в их совпадении с аналитическим решением.

Пример 3.3.

Даны главные площадки в условиях плоского напряженного состояния и главные напряжения, действующие на этих площадках $\sigma_{max} = 100$ МПа, $\sigma_{min} = -50$ МПа. Необходимо определить напряжения на двух площадках: одна из них расположена под углом $\beta = -30^o$ (от σ_{max}), а вторая – под углом $\theta = 30^o$ (от σ_{min}) (рис.3.5, а, б).

I. Аналитическое решение задачи

1. Определим напряжения на площадке $\beta = -30^o$ с помощью формул (3.6)

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos 2(-30^o) =$$

$$= \frac{100 + (-50)}{2} + \frac{100 - (-50)}{2} \cos(-60^o) = 57{,}5 \text{ МПа},$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin 2(-30^o) = \frac{100 + 50}{2} 0{,}866 = 64{,}95 \text{ МПа}.$$

1. Определим напряжения на площадке $\theta = +30^o$ (от σ_{min}).

Так как в (3.6) положение любой площадки определяется только по отношению к площадке σ_{max}, то необходимо найти угол между первым главным направлением и линией, проведенной под углом $+30^{o}$ к третьему главному направлению.

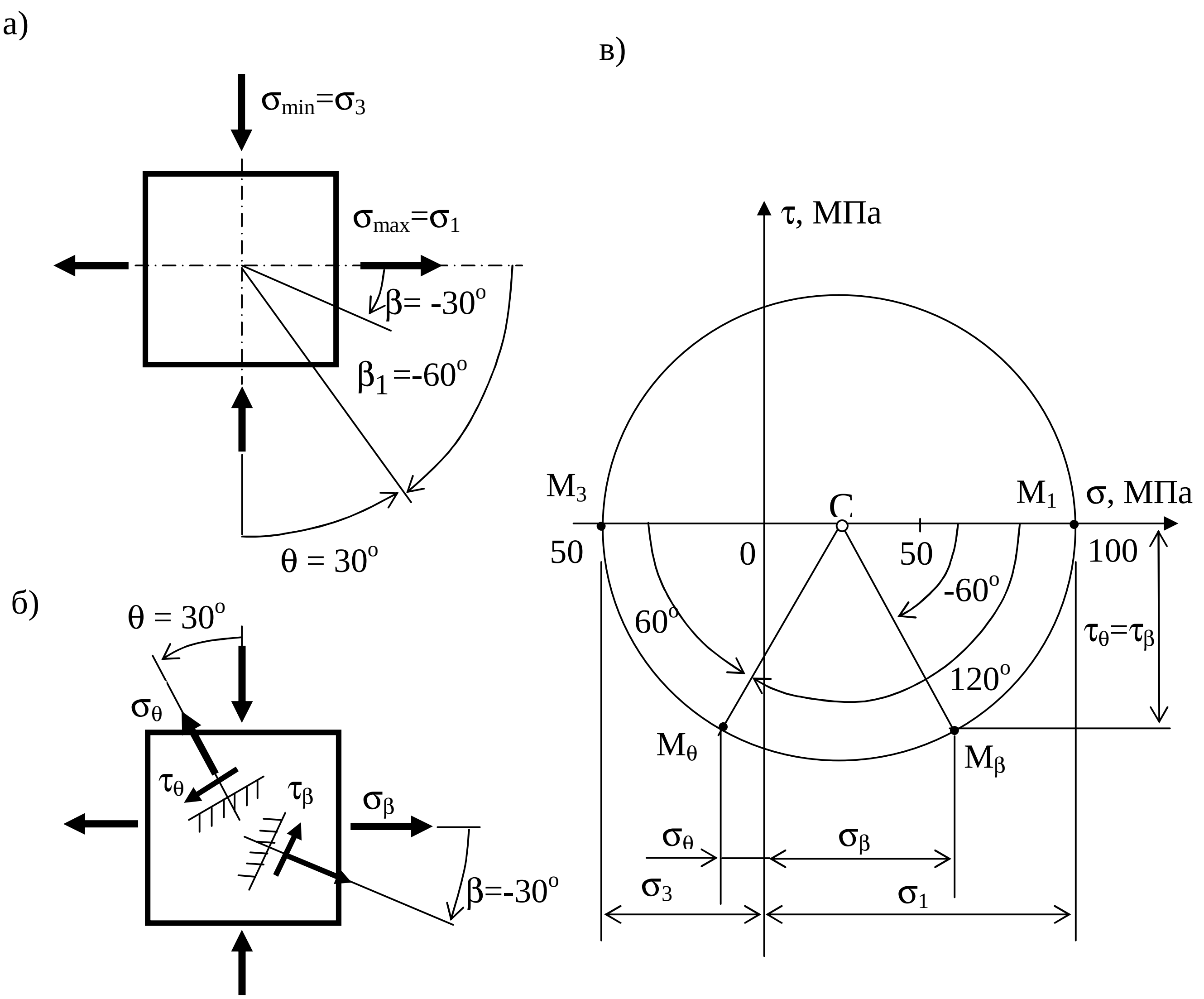


Рис. 3.5. Главные площадки и внешние нормали к площадкам β, θ (а); главные площадки и площадки β, θ с напряжениями на них (б); круг Мора для определения напряжений на площадках β, θ (в)

Из рис. 3.5, а видно, что этот угол равен $\beta_1 = -60^{o}$. Тогда

$$\sigma_{\theta} = \frac{100 + (-50)}{2} + \frac{100 - (-50)}{2} \cos 2\left(-60^{o}\right) = -12{,}5 \text{ МПа},$$

$$\tau_\theta = \frac{100-(-50)}{2}\sin 2\left(-60^o\right) = 64{,}95 \text{ МПа}.$$

II. Графическое решение задачи

1. Построим круг Мора по двум точкам, соответствующим главным площадкам: первой ($\sigma_1 = \sigma_{max} = 100$ МПа) и третьей ($\sigma_3 = \sigma_{min} = -50$ МПа). Ординаты этих точек равны нулю, так как касательные напряжения на главных площадках отсутствуют (рис. 3.5, а).

Таким образом, обе точки M_1 и M_3 лежат на оси σ, а центр круга расположен посредине между ними. От радиуса круга CM_1 откладываем угол –2·30 = –60^o по часовой стрелке, получаем точку M_β, координаты которой равны σ_β и τ_β. Затем от CM_1 откладываем угол 2(–60) = –120, получаем точку M_θ с координатами σ_θ и τ_θ (либо, как показано на рис. 3.5, в, от радиуса CM_3 откладываем угол, равный 2(+30) = +60^o, и вновь получаем точку M_θ).

Значения напряжений по величине и знаку совпадают со значениями, найденными аналитически.

3.3. Обобщенный закон Гука

Если материал следует закону Гука, а деформации малы, то зависимость между напряжениями и деформациями в общем случае объемного напряженного состояния выражается формулами, называемыми обобщенным законом Гука

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right],\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right],\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right],
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные относительные деформации в направлении напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала конструкции соответственно.

С помощью (3.7) можно решить ряд задач по определению напряжений.

Пример 3.4.

На рис. 3.6 изображен чугунный кубик, нагруженный силой P, с ребром a, вставленный без зазоров в гнездо массивной плиты. Деформации плиты можно считать равными нулю. Необходимо определить главные напряжения, действующие в кубике, если задана сила P и коэффициент Пуассона материала кубика $\mu = 0{,}25$.

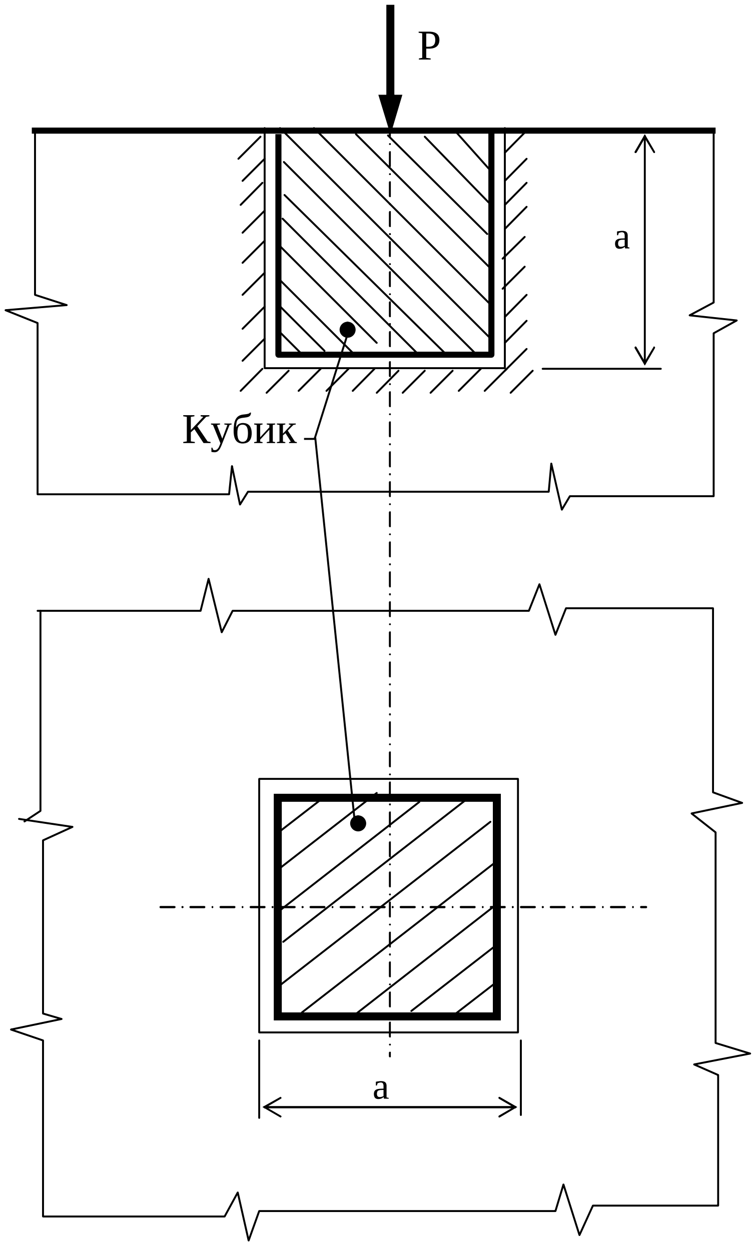


Рис. 3.6. Кубик, вставленный в гнездо плиты

Так как по граням кубика касательные напряжения равны нулю, то они являются главными площадками. В направлении силы Р главное напряжение является наибольшим отрицательным, то есть напряжением $\sigma_3 = -\frac{P}{a^2}$.

Тогда линии действия напряжений σ_1, σ_2 перпендикулярны линии σ_3. Так как плита является жестким телом, то деформации в направлении σ_1 и σ_2 равны нулю:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.$$

Очевидно, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Определяем σ_1 по формулам

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = 0,$$

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \mu\sigma_3.$$

$$\sigma_1 = \frac{\mu\sigma_3}{(1-\mu)} = \frac{0{,}25\sigma_3}{(1-0{,}25)} = \frac{\sigma_3}{3} = -\frac{P}{3a^2}.$$

3.4. Определение главных напряжений при объемном напряженном состоянии. Проверка прочности по классическим теориям прочности

В общем случае объемного напряженного состояния в точке при произвольной ориентации элементарного параллелепипеда на его гранях действует шесть независимых компонентов: σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ (рис. 3.7, а).

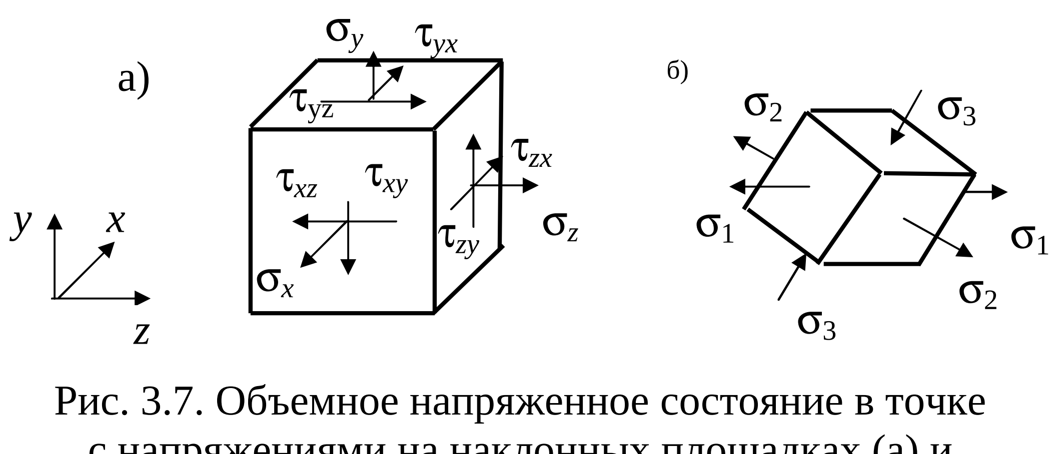


Рис. 3.7. Объемное напряженное состояние в точке с напряжениями на наклонных площадках (а) и напряжениями на главных площадках (б)

На главных площадках элементарного параллелепипеда, вырезанного вокруг той же точки, действуют три главных напряжения: σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 3.7, б).

Напряжения на заданных площадках *x*, *y*, *z* и главных площадках связаны между собой системой уравнений

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy}\, m + \tau_{xy}\, n = 0,\\ \tau_{yx}\,\ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz}\, n = 0,\\ \tau_{zx}\,\ell + \tau_{zy}\, m + (\sigma_z - \sigma) n = 0,\end{aligned} \tag{3.8}$$

где σ – одно из главных напряжений на главных площадках, выраженное в обобщенном виде; ℓ, *m*, *n* – направляющие косинусы главной нормали.

Система уравнений представляет собой три однородных уравнения относительно неизвестных ℓ, *m* и *n*. Нулевое решение невозможно (то есть когда $\ell = 0$; $m = 0$; $n = 0$) в силу известного соотношения: $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ненулевое решение системы возможно, если коэффициенты при искомых неизвестных ℓ, m, n составляют определитель, равный нулю

$$\begin{vmatrix}(\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma)\end{vmatrix} = 0. \tag{3.9}$$

При раскрытии определителя получается кубическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \tag{3.10}$$

где J_1, J_2, J_3 – первый, второй и третий инварианты тензора напряжений, причем эти инварианты являются константами для конкретной точки при ее конкретном напряженном состоянии.

Инварианты равны:

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,\\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,\\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\,\tau_{yz}\,\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

В силу симметрии элементов определителя относительно его главной диагонали решение уравнений дает три действительных корня. Эти корни равны трем главным напряжениям, действующим на трех главных площадках, они обозначаются σ_1, σ_2, σ_3 в соответствии с правилом $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Учитывая постоянство инвариантов, найденные корни уравнений могут быть проверены по формулам

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\
J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\
J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Инварианты, найденные одним и другим способом, должны совпадать.

Решение кубического уравнения по способу Кардано и нахождение направлений главных напряжений в дальнейшем будут обсуждены на примере.

Рассмотрим теории прочности, используемые при проверке прочности элементов, находящихся в сложном напряженном состоянии.

При сложном напряженном состоянии получить экспериментально допускаемые напряжения для всех вариантов напряженного состояния затруднительно, поскольку таких вариантов бесконечное множество. Поэтому используются гипотезы (теории) прочности, цель которых сложное напряженное состояние свести к эквивалентному линейному. Обычно на основании результатов экспериментов выдвигаются различного рода предположения о том, какая механическая характеристика является причиной возникновения предельного состояния (разрушения) при сложном напряженном состоянии, и эту характеристику принимают за критерий разрушения.

В рамках данного пособия рассматриваются только пять наиболее известных теорий прочности; новые теории прочности, которые разработаны в достаточно большом количестве, здесь не рассматриваются. Обычно этих пяти теорий вполне достаточно для решения большинства типовых задач.

Область применения конкретной теории прочности в основном зависит от вида материала и характера напряженного состояния. Для хрупких материалов (материалов, по-разному работающих на растяжение-сжатие), как правило, используются I, II теории и теория Мора; для пластичных материалов – III и IV теории.

А. Для хрупких материалов основной теорией прочности является теория Мора, она носит иногда иное название – теория Кулона-Мора. Она может быть использована для всех хрупких материалов для всех соотношений главных напряжений и любых их знаков, но наилучшие результаты она дает при условии, что экстремальные главные напряжения имеют противоположные знаки, т.е. $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$. Условие прочности по Мору записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв.М}} = \sigma_1 - \chi\sigma_3 \le [\sigma]^+, \qquad (3.13)$$

где $\chi = \sigma_\text{р} / \sigma_\text{с}$ – отношения пределов прочности при одноосных растяжении и сжатии.

Б. Для хрупких материалов также может быть использована I теория прочности. Эта теория дает результаты, близкие к экспериментальным, при напряженных состояниях мало отличающиеся от одноосного растяжения. Данная теория используется относительно редко, в основном для бетона, камня, кирпича, керамики, стекла, гипса, инструментальной стали. I теория прочности имеет иные названия: теория наибольших нормальных напряжений, теория Галилея – Лейбница, теория Клебша – Ренкина. Условие прочности может быть представлено в виде

$$\sigma_{\text{экв.I.}} = \sigma_1 \le [\sigma]^+. \qquad (3.14)$$

В. Для хрупких материалов может быть использована, хотя и в очень редких случаях, II теория прочности. Область ее корректного применения практически совпадает с областью применения I теории. II теория носит иные названия: гипотеза наибольших относительных удлинений, теория Сен-Венана, теория Мариотта – Грасгофа. Условие прочности по II теории имеет вид

$$\sigma_{\text{экв.II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]^+. \qquad (3.15)$$

Г. Для пластичных материалов в случаях, когда экстремальные главные напряжения имеют разные знаки, может быть использована III теория прочности. Предельное (опасное) напряжение по III теории принимается равным пределу текучести материала $\sigma_\text{т}$. Ее преимущество перед IV теорией прочности, рассмотренной ниже, заключается в сокращении вычислительных процедур за счет простоты расчетной формулы. III теория имеет иные названия: гипотеза (критерий) наибольших касательных напряжений, теория Кулона – Треска – Сен-Венана. Теория прочности выглядит:

$$\sigma_{\text{экв.III.}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]. \qquad (3.16)$$

Д. Для всех пластичных материалов при любых соотношениях главных напряжений используется IV теория прочности. Предельное напряжение в этой теории назначается таким же, как и в III теории. Достоинством IV теории является лучшая, по сравнению с III теорией, сходимость с экспериментами. Она имеет также иные названия: энергетическая гипотеза, критерий удельной потенциальной энергии формоизменения, критерий октаэдрических касательных напряжений, теория Бельтрами – Губера – Мизеса – Генки. Теория прочности выглядит:

$$\sigma_{\text{экв.IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \le [\sigma]. \qquad (3.17)$$

Пример 3.5.

Дана опасная точка конструкции вырезан элементарный параллелепипед (рис. 3.8), на гранях которого действуют напряжения: $\sigma_x = 20$ МПа, σ_y = – 40 МПа, σ_z = 60 МПа, τ_{xy} = – 10 МПа, $\tau_{yz} = 30$ МПа, τ_{zx} = – 50 МПа. Материал конструкции – сталь Ст.3: [σ] = 160 МПа. Необходимо определить направления и величины главных напряжений, проверить прочность по IV теории.

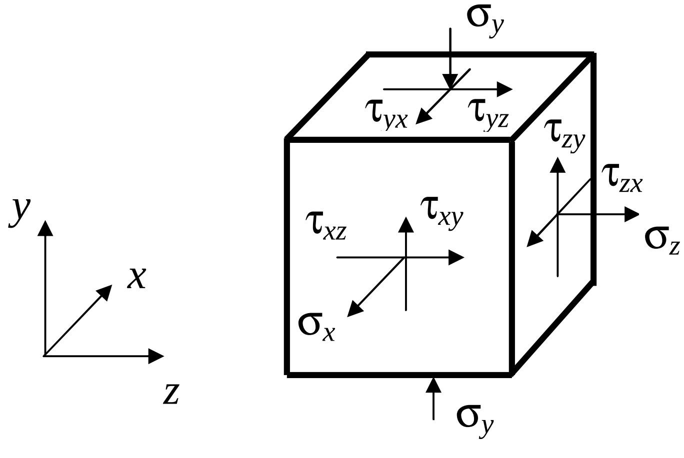


Рис. 3.8. Расчетная схема с заданным напряженным состоянием

Решение.

I. Определение главных напряжений, проверка прочности.

1. Основное уравнение (3.15)

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0.$$

2. Инварианты (3.17)

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 + (-40) + (+60) = 40 \text{ МПа},$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$
$$= (+20)(-40) + (-40)(+60) + (+60)(+20) -$$
$$-(-10)^2 - (+30)^2 - (-50)^2 = -5500 \text{ МПа}^2,$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 =$$
$$= (+20)(-40)(+60) + 2(-10)(+30)(-50) -$$
$$-(+20)(+30)^2 - (-40)(-50)^2 - (+60)(-10)^2 = 58000 \text{ МПа}^3.$$

3. Сделаем подстановку в уравнение (3.15)

$$\sigma = y + \frac{J_1}{3}. \qquad (3.18)$$

4. В результате уравнение (3.15) приобретет вид

$$y^3 + p\,y + q = 0. \qquad (3.19)$$

5. Коэффициенты в уравнении (3.20) равны

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3} = (-5500) - \frac{(+40)^2}{3} = -6033{,}33 \text{ МПа}^2,$$

$$q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3 = -\frac{2}{27}(+40)^3 + \frac{1}{3}(+40)(-5500) - (-58000) =$$
$$= -136074{,}07 \text{ МПа}^3. \qquad (3.20)$$

6. Для определения корней уравнения (3.20) используем метод Кардано, согласно которому корни уравнений выражаются через вспомогательный угол φ, который определяется из условия

$$\cos(\varphi) = \frac{q}{2r^3}, \qquad (3.21)$$

где $r = \pm 0{,}5774\sqrt{|p|} = -0{,}5774\sqrt{6033{,}33} = -44{,}85$ МПа. (3.22)

Знак r выбираем в зависимости от условий: он должен совпадать со знаком q, то есть cos(φ) должен быть в любой ситуации больше 0. В данном случае он должен быть отрицательной величиной.

Тогда

$$\cos(\varphi) = \frac{q}{2r^3} = \frac{(-136074{,}07)}{2(-44{,}85)^3} = 0{,}754,$$
$$\varphi = 41{,}06^{\circ}. \qquad (3.23)$$

7. Корни уравнения (3.19) определяем из равенств

$$y_1 = -2r\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = -2(-44{,}85)\cos\left(\frac{+41{,}06^{\circ}}{3}\right) = 87{,}15\,\text{МПа}, \qquad (3.24)$$

$$y_2 = +2r\cos\left(60^{\circ} - \frac{\varphi}{3}\right) = +2(-44{,}85)\cos\left(60^{\circ} - \frac{+41{,}06^{\circ}}{3}\right) = -61{,}95\ \text{МПа},$$

$$y_3 = +2r\cos\left(60^{\circ} + \frac{\varphi}{3}\right) = +2(-44{,}85)\cos\left(60^{\circ} + \frac{+41{,}06^{\circ}}{3}\right) = -25{,}19\ \text{МПа}.$$

8. Проверка полученных корней производится при помощи равенства

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \qquad (3.25)$$

После подстановки получим

$y_1 + y_2 + y_3$ = (+87,15)+ (–61,95) + (–25,19) = +0,01 ≈ 0. (3.26)

9. Вычисление главных напряжений:

$$\sigma^{I} = y_1 + \frac{J_1}{3} = (+87{,}15) + \frac{(+40)}{3} = 100{,}48 \text{ МПа},$$
$$\sigma^{II} = y_2 + \frac{J_1}{3} = (-61{,}95) + \frac{(+40)}{3} = -48{,}62 \text{ МПа}, \qquad (3.27)$$
$$\sigma^{III} = y_3 + \frac{J_1}{3} = (-25{,}19) + \frac{(+40)}{3} = -11{,}86 \text{ МПа}.$$

10. Полученным напряжениям присваиваются обозначения σ_1, σ_2, σ_3 в соответствии с $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Они будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma^{I} = 100{,}48 \text{ МПа},$$
$$\sigma_2 = \sigma^{III} = -11{,}86 \text{ МПа}, \qquad (3.28)$$
$$\sigma_3 = \sigma^{II} = -48{,}62 \text{ МПа}.$$

11. Для контроля правильности найденных корней уравнения (3.16) используем инвариантность коэффициентов J_1, J_2, J_3

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 100{,}48 + (-11{,}86) + (-48{,}62) = 40 \text{ МПа};$$
$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 100{,}48\,(-11{,}86) + (-11{,}86)\,(-48{,}62) + (-48{,}62)\,100{,}48 = -5000{,}4 \approx -5500 \text{ МПа}^2; \qquad (3.29)$$
$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 100{,}48\,(-11{,}86)\,(-48{,}62) = 57940{,}10 \approx 58000 \text{ МПа}^3.$$

Результаты уравнений (3.17) и (3.29) должны совпадать. В данном случае они примерно совпадают.

12. По найденным главным напряжениям производим проверку прочности в точке тела с помощью IV теории прочности

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\{[(+100{,}48)-(-11{,}86)]^2 + [(-11{,}86)-(-48{,}62]^2 + [(-48{,}62)-(+100{,}48]^2\}} =$$
$$= 134{,}60 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Условие прочности выполняется.

II. Определение положений главных площадок (направлений действия главных напряжений).

1. Определение положений главных площадок сводится к вычислению направляющих косинусов для каждого из главных напряжений:

$$\begin{aligned}&\text{для } \sigma_1 - \ \ell_1, m_1, n_1,\\ &\text{для } \sigma_2 - \ \ell_2, m_2, n_2,\\ &\text{для } \sigma_3 - \ \ell_3, m_3, n_3.\end{aligned} \qquad (3.30)$$

2. Определим направляющие косинусы для σ_1. Для этого используем систему однородных уравнений

$$\begin{cases}(\sigma_x - \sigma_1)\,\ell_1 + \tau_{xy}\, m_1 + \tau_{xy}\, n_1 = 0,\\ \tau_{yx}\,\ell_1 + (\sigma_y - \sigma_1)\, m_1 + \tau_{yz}\, n_1 = 0,\\ \tau_{zx}\,\ell_1 + \tau_{zy}\, m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)\, n_1 = 0\end{cases} \qquad (3.31)$$

делим ее на n_1 и преобразуем к виду

$$\begin{cases}(\sigma_x - \sigma_1)\dfrac{\ell_1}{n_1} + \tau_{xy}\dfrac{m_1}{n_1} = -\tau_{xy},\\ \tau_{yx}\dfrac{\ell_1}{n_1} + (\sigma_y - \sigma_1)\dfrac{m_1}{n_1} = -\tau_{yz},\\ \tau_{zx}\dfrac{\ell_1}{n_1} + \tau_{zy}\dfrac{m_1}{n_1} + (\sigma_z - \sigma_1) = 0.\end{cases} \qquad (3.32)$$

Произведем подстановку значений напряжений в уравнения (3.32). После подстановки они будут выглядеть:

$$\begin{cases}[(+20) - (+100{,}48)]\left(\dfrac{\ell_1}{n_1}\right) + (-10)\left(\dfrac{m_1}{n_1}\right) = -(-50), & \text{(а)}\\ (-10)\left(\dfrac{\ell_1}{n_1}\right) + [(-40) - (+100{,}48)]\left(\dfrac{m_1}{n_1}\right) = -(+30), & \text{(б)}\\ (-50)\left(\dfrac{\ell_1}{n_1}\right) + (+30)\left(\dfrac{m_1}{n_1}\right) + [(+60) - (+100{,}48)] = 0. & \text{(в)}\end{cases} \qquad (3.33)$$

3. Используя уравнения (3.34, а) и (3.34, б), найдем $\left(\frac{\ell_1}{n_1}\right)$ и $\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$.

Они будут равны:

$$\left(\frac{\ell_1}{n_1}\right) = -0{,}653$$

$$\text{и} \left(\frac{m_1}{n_1}\right) = 0{,}256, \qquad (3.34)$$

а уравнение (3.34, в) применим для контроля

$$(-50)\ (-0{,}653) + (+30)\ (0{,}256) + [(+60) - (+100{,}48)] = 0. \qquad (3.35)$$

4. Соотношение между направляющими косинусами выглядит следующим образом:

$$\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \qquad (3.36)$$

разделим это уравнение на n_1 и получим

$$\left(\frac{\ell_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n_1^2}\ . \qquad (3.37)$$

5. Из уравнения (3.38) найдем n_1:

$$\left(\frac{\ell_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n_1^2}, \qquad (3.38)$$

$$(-0{,}653)^2 + (0{,}256)^2 + 1 = \frac{1}{n_1^2},$$

откуда $n_1 = \pm\ 0{,}819$.

6. После чего определяем

$$\ell_1 = \left(\frac{\ell_1}{n_1}\right) n_1 = (-0{,}653)(\pm 0{,}819) = \mp 0{,}535, \qquad (3.39)$$

и

$$m_1 = \left(\frac{m_1}{n_1}\right) n_1 = (0{,}256)(\pm 0{,}819) = \pm 0{,}21. \qquad (3.40)$$

7. Аналогично находим ℓ_2, m_2, n_2, подставляя в уравнение (3.31) σ_2 = –11,88 МПа вместо σ_1, и ℓ_3, m_3, n_3, подставляя в уравнение (3.31) σ_3 = – 48,62 МПа вместо σ_1.
Они будут равны

$$\ell_2 = \pm 0{,}841,\ m_2 = \pm 0{,}224,\ n_2 = \pm 0{,}491,$$
$$\ell_3 = \pm 0{,}815,\ m_3 = \mp 0{,}95,\ n_3 = \pm 0{,}302. \qquad (3.41)$$

8. Для проверки полученных ответов используем равенства, приведенные ниже. Произведем проверку, используя только верхние знаки направляющих косинусов

$$\ell_1\ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$
$$(-0{,}535)(0{,}841) + (0{,}21)(0{,}224) + (0{,}819)(0{,}491) = -0{,}00086 \approx 0;$$
$$\ell_2\ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0, \qquad (3.42)$$
$$(0{,}841)(0{,}0815) + (0{,}224)(-0{,}95) + (0{,}491)(0{,}302) = +0{,}0037 \approx 0;$$
$$\ell_3\ell_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0,$$
$$(0{,}0815)(-0{,}535) + (-0{,}95)(0{,}21) + (0{,}302)(0{,}819) = 0{,}0042 \approx 0.$$

9. Построение нормалей к главной площадке произведем на примере σ_1.

Учитывая, что направляющие косинусы σ_1 равны
ℓ_1 = – 0,535; m_1 = +0,21; n_1 = +0,819,
покажем направление действия σ_1 в координатах x, y, z (рис. 3.9).

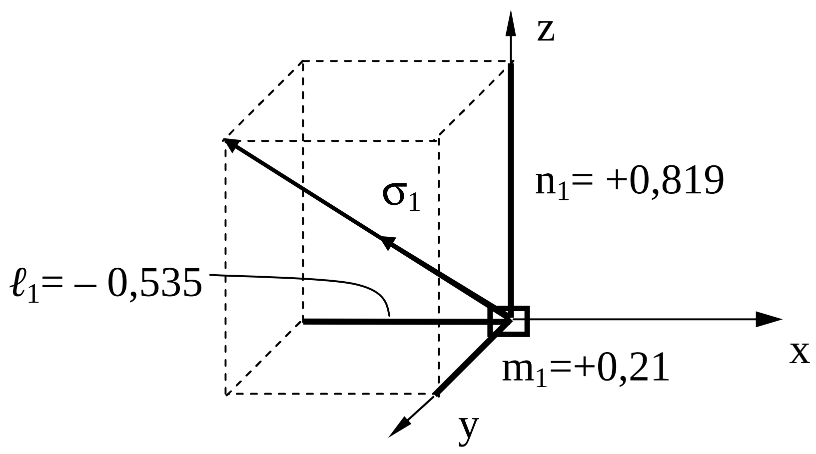


Рис. 3.9. Напряжение σ_1 как нормаль к главной площадке элементарного параллелепипеда

Направление действия остальных главных напряжений определяем аналогично.

3.5. Расчет тонкостенных оболочек

Тонкостенные оболочки относят к большому классу листовых конструкций, предназначенных для хранения или транспортирования жидкостей, газов и сыпучих веществ.

К тонкостенным оболочкам относят элементы конструкций: цистерн, резервуаров, газгольдеров, кожухов теплообменников, аппаратов химического машиностроения, трубопроводы и так далее.

Оболочка является тонкостенной, если толщина ее стенки меньше 1/30 ее радиуса кривизны.

При изучении поведения оболочки обычно рассматривают ее срединную поверхность, которая делит толщину оболочки δ пополам. При значительном многообразии форм срединных поверхностей наибольшее распространение в различных областях техники получили оболочки вращения, срединные поверхности которых образованы вращением плоской кривой (меридиана) вокруг оси. По форме меридиана оболочки бывают сферическими, цилиндрическими, конусообразными, эллиптическими и т.д.

Самый простой вариант теории оболочек вращения возникает при следующих допущениях:

1. напряжения по толщине оболочки не меняются (так называемая безмоментная теория),

2. нагрузки и связи осесимметричны относительно оси вращения.

Практика показывает, что такая теория достаточно точна при следующих условиях:

1. $\delta < \rho_{min}/30$, где ρ_{min} – минимальный радиус кривизны срединной поверхности;

2. толщина оболочки меняется плавно, без скачков;

3. линия меридиана является гладкой кривой, без изломов.

При изучении условий равновесия элементов оболочки обычно используют меридиональные и широтные сечения, в которых действуют меридиональное σ_m и широтное (тангенциальное) σ_t напряжения (рис. 3.10).

Тонкостенные оболочки характеризуются радиусами кривизны в меридиональном – ρ_m и кольцевом (широтном) направлении ρ_t (рис. 3.10), которые учитываются в разрешающих уравнениях.

Тонкостенные оболочки в большинстве случаев работают на внутреннее давление q и собственный вес.

Основными расчетными формулами осесимметричных оболочек являются уравнение Лапласа, увязывающее все параметры оболочки, и дополнительное уравнение равновесия зоны или просто уравнение зоны, которое используют для описания состояния равновесия нижних или верхних отсеченных частей оболочек.

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}. \qquad (3.43)$$

Для частного случая, когда радиус кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном направлении равен бесконечности ($\rho_m = \infty$), т.е. срединная поверхность является цилиндрической или конусообразной, уравнение Лапласа выглядит следующим образом

$$\frac{\sigma_t}{R} = \frac{q}{\delta}. \qquad (3.44)$$

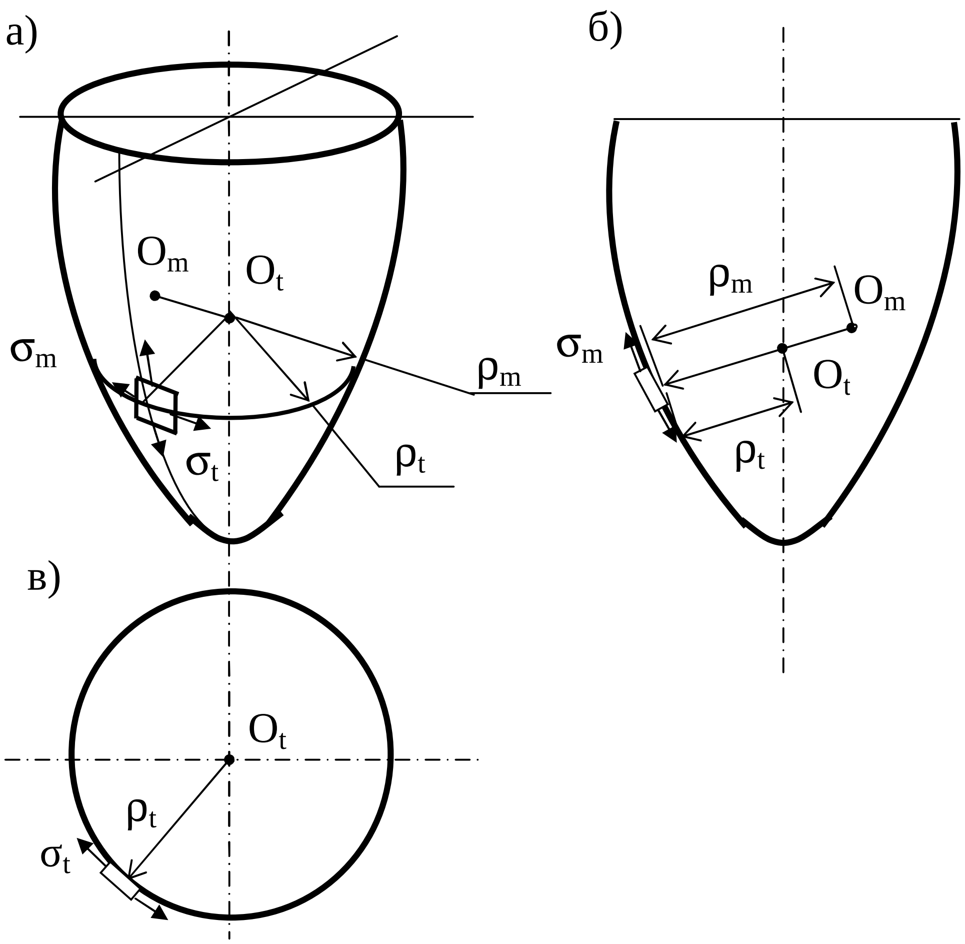


Рис. 3.10. Срединная поверхность оболочки (а) и ее меридиональное (б) и широтное (в) сечения

В общем случае, обычно, бывают заданы радиусы кривизны ρ_m, ρ_t, толщина стенки сосуда δ и внутреннее давление q. При определении напряжений σ_m и σ_t уравнения Лапласа (3.43) недостаточно. Поэтому дополнительно используют уравнение равновесия зоны, отсеченной кольцевым сечением (рис. 3.11). Сосуд рассекается на две части, верхнюю и нижнюю, одну из частей отбрасывают и из условия равновесия оставшейся части сосуда находятся меридиональные напряжения при помощи уравнения зоны. Уравнение равновесия зоны выглядит

$$\sigma_m = \frac{q\,D}{4\delta\cos\alpha} + \frac{Q_ж + Q_р}{\pi D\,\delta\cos\alpha}, \qquad (3.45)$$

где q – давление жидкости в расчетной точке оболочки; $Q_ж$ – вес жидкости, находящейся в пределах отсеченной части оболочки; $Q_р$ – вес отсеченной части оболочки: стенок и днища емкости; D – диаметр емкости в рассматриваемом сечении; δ – толщина стенки емкости в рассматриваемом сечении; α – угол наклона стенки емкости к вертикали в расчетной точке; угол α отличен от нуля, если емкость имеет коническую, шарообразную или эллиптическую форму и т.д.; для цилиндрического резервуара угол α равен нулю.

В связи с тем, что стенки оболочек находятся в плоском напряженном состоянии, расчеты прочности производят по теориям прочности – для металлических конструкций обычно по третьей или четвертой.

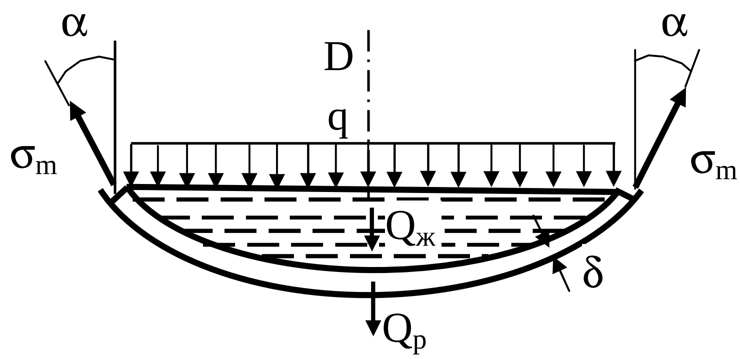


Рис. 3.11. Схема нагружения отсеченной части оболочки

Напряжения σ_m и σ_t являются ненулевыми главными напряжениями. Главное напряжение, направленное перпендикулярно поверхности оболочки и равное давлению продукта хранения – q, мало по сравнению с σ_m и σ_t, и поэтому им пренебрегают.

Наиболее распространенными емкостями являются резервуары, имеющие цилиндрическую форму.

Пример 3.6.

Дан цилиндрический сосуд, (рис. 3.12) заполненный жидкостью с объемным весом $\gamma_ж = 10$ кН/м^3. Геометрические параметры сосуда: H = 5 м, D = 10 м, толщина стенки сосуда $\delta = 0{,}01$ м. Материал сосуда – сталь Ст.3 с объемным весом $\gamma_{ст} = 78$ кН/м^3, допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 160$ МПа. Необходимо проверить прочность сосуда.

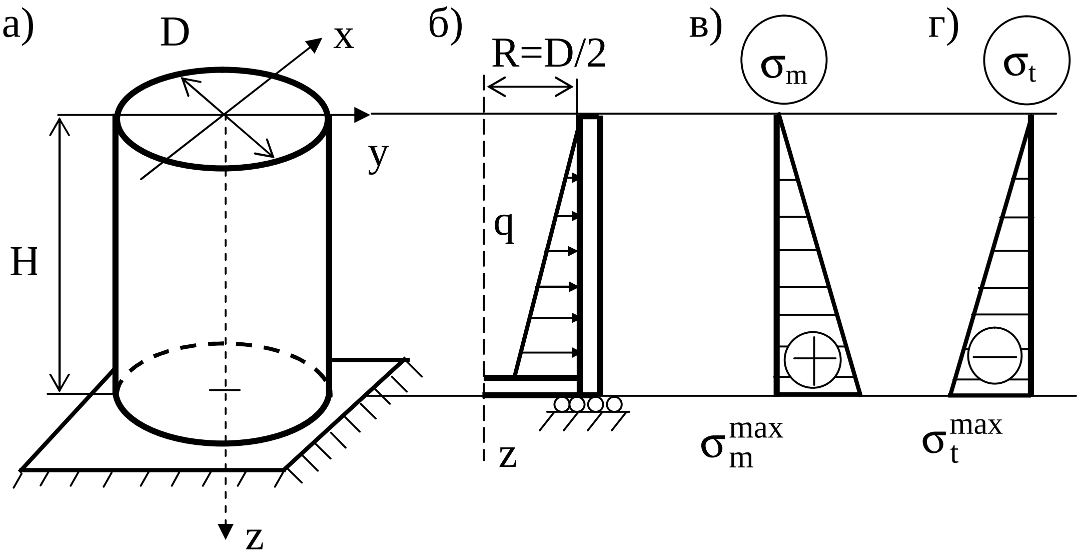


Рис. 3.12. Расчетная схема цилиндрического сосуда (а), эпюра давления q (б), эпюры σ_m (в) и σ_t (г)

Решение.

1. Построение эпюры нагрузки q, действующей на стенки сосуда.

Так как гидростатическое давление (нагрузка) q линейно зависит от уровня погружения z, то эпюра нагрузки будет иметь треугольную форму. Наибольшее значение давления жидкости на стенку сосуда будет внизу емкости; наименьшее, равное нулю, – вверху. Оно может быть определено из выражения

$$q = \gamma\, z. \qquad (3.46)$$

Отсюда: при z = 0, q = 0; при z = H, $q = q_{max} = \gamma\, H$.

2. Определение напряжения в стенке сосуда.

а) Тангенциальные напряжения σ_t могут быть найдены с помощью уравнения Лапласа (3.43). В данном случае радиус кривизны сосуда в меридиональном направлении равен бесконечности ($\rho_m = \infty$), а радиус в тангенциальном направлении равен D/2, поэтому уравнение Лапласа приобретает вид

$$\frac{\sigma_t}{D/2} = \frac{q}{\delta}, \qquad (3.47)$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{q}{\delta}\frac{D}{2} = \frac{\gamma z}{\delta}\ \frac{D}{2}. \qquad (3.48)$$

Напряжения в характерных точках: при z = 0, $\sigma_t = 0$;
при z = H,

$$\sigma_t = \sigma_{max} = \frac{\gamma_ж H}{\delta}\frac{D}{2} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10}{0{,}01 \cdot 2} = 25000 \text{ кПа} = 25 \text{ МПа}.$$

Тангенциальные напряжения в рассматриваемом случае будут растягивающими, так как в результате действия жидкости стенки сосуда увеличиваются в диаметре, то есть растягиваются. Поэтому σ_t будут иметь положительный знак.

б) Меридиональные напряжения σ_m в данном случае будут зависеть только от веса стальной оболочки сосуда и поэтому минимальные напряжения, равные нулю, будут в верхней части его стенки, а максимальные напряжения, определяемые по формуле (3.45), будут внизу:

при z = 0, $\sigma_m = 0$;

при z = H, $\sigma_m = \gamma_{ст} H = -78 \cdot 5 = -390$ кПа = – 0,39 МПа.

В стенке сосуда от собственного веса возникают сжимающие напряжения и поэтому они имеют отрицательный знак.

2. Проверка прочности стенок сосуда.

В стенках сосуда имеет место плоское напряженное состояние. Самым опасным местом стенки являются точки в нижней ее части. Рассмотрим элементарный параллелепипед, вырезанный вокруг одной из опасных точек (рис. 3.13), на него действуют по вертикали сжимающие напряжения σ_m = 25 МПа, а по горизонтали – растягивающие напряжения σ_t = 0,39 МПа. В данном случае может быть использована III теория прочности (3.17)

$\sigma_{экв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 = (+25) - (-0{,}39) = 25{,}39$ МПа < $[\sigma]$ = 160 МПа.

Таким образом, условие прочности удовлетворяется с большим запасом.

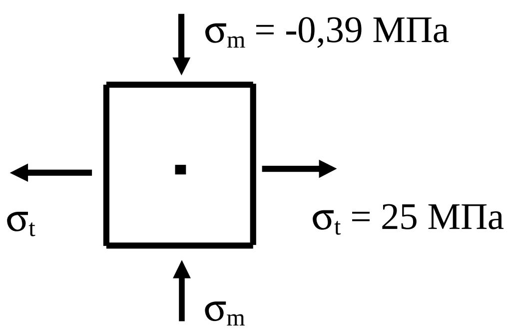


Рис. 3.13. Напряженное состояние в опасной точке стенки сосуда

Пример 3.7.

Цилиндрическая емкость (рис. 3.14), опирающаяся на наклонные стержни, заполнена жидкостью с объемным весом $\gamma_ж$ = 10 кН/м^3. Емкость выполнена из стали Ст.3 с объемным весом $\gamma_{ст}$ = 78 кН/м^3 и допускаемым напряжением [σ] = 160 МПа. Толщины стенок и днища емкости δ = 0,01 м, высота емкости H = 5 м, диаметр емкости D = 10 м. Необходимо проверить прочность стенок емкости.

Решение.

1. Давление жидкости на стенки емкости будет зависеть от глубины погружения z и будет равно $q = \gamma_ж z$, наибольшее давление жидкости на стенки емкости будет внизу, оно будет равно $q = \gamma_ж H$, наименьшее – вверху: q = 0.

3. Тангенциальные напряжения в стенках емкости зависят от глубины погружения (3.48), аналогично предыдущему примеру

$$\sigma_m = \frac{q}{\delta}\frac{D}{2} = \frac{z\gamma_ж}{\delta}\frac{D}{2}.$$

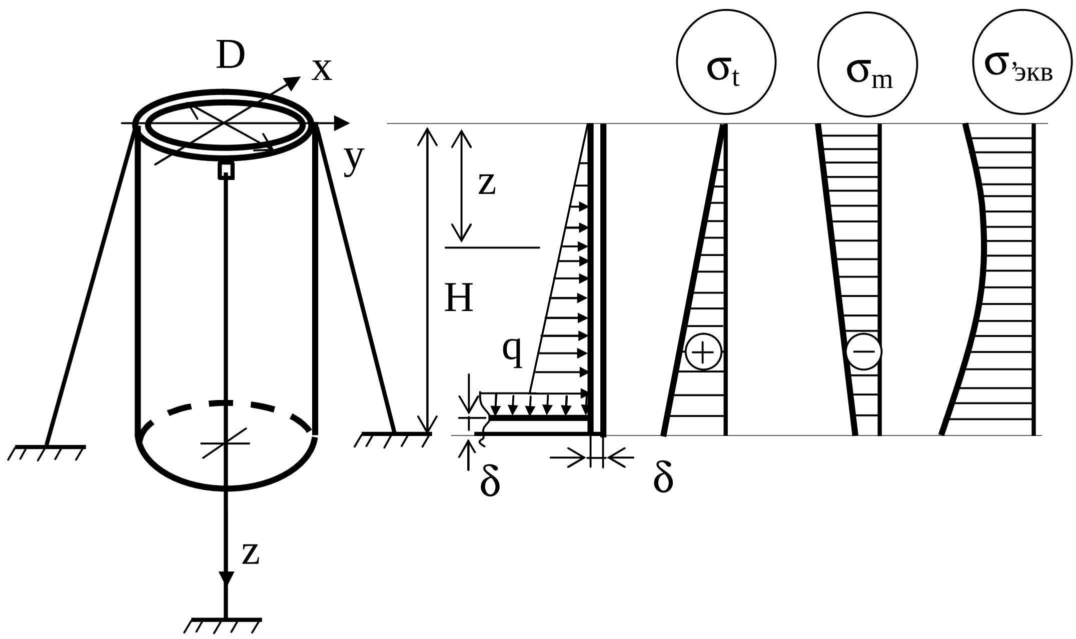


Рис. 3.14. Расчетная схема сосуда и эпюры напряжений

Максимальные тангенциальные напряжения будут возникать внизу стенок емкости

$$\sigma_t = \sigma_{max} = \frac{H\gamma_ж}{\delta}\frac{D}{2}.$$

Минимальные напряжения $\sigma_t = 0$ возникают вверху.

3. Меридиональные напряжения σ_m будут складываться из напряжений от веса жидкости, напряжений от веса стенок и днища емкости, напряжений от давления жидкости на исследуемом уровне и от давления газа выше жидкости, если таковое имеется (рис. 3.11). В данном случае для определений меридиональных напряжений в произвольном горизонтальном сечении емкости можно воспользоваться уравнением равновесия зоны. Используем уравнение равновесия зоны (3.45).

Угол наклона стенок емкости α = 0, cos□□□□□. После упрощения уравнение будет иметь вид

$$\sigma_m = \frac{qD}{4\delta} + \frac{Q_ж + Q_р}{\pi D\delta}.$$

Для нахождения по этой формуле меридиональных напряжений необходимо знать вес жидкости $Q_ж$ и вес отсеченной части емкости, то есть вес ее стенок и вес днища $Q_р$.

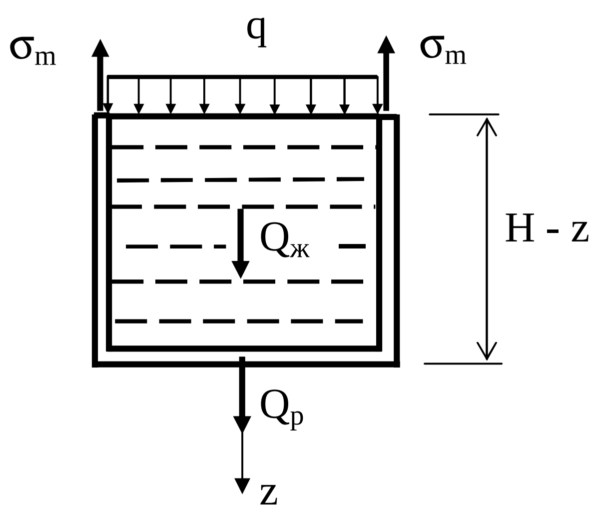


Рис. 3.15. Схема отсеченной части емкости

4. Вес жидкости будет определен при помощи следующего выражения

$$Q_ж = \gamma_ж \frac{\pi D^2}{4}(H - z).$$

5. Вес части емкости ниже рассматриваемого сечения

$$Q_p = \gamma_{ст}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\delta + \gamma_{ст}\,[\pi D (H - z)]\delta \ .$$

6. Таким образом, уравнение зоны в развернутом виде будет выглядеть

$$\sigma_m = \frac{(\gamma_ж\, z) D}{4\delta} + \frac{\gamma_ж \dfrac{\pi D^2}{4}(H - z) + \gamma_{ст}\left(\dfrac{\pi D^2}{4}\right)\delta + \gamma_{ст}\,[\pi D (H - z)]\delta}{\pi D \delta}.$$

7. С помощью полученной формулы можно рассчитать меридиональные напряжения σ_m в любой точке стенок емкости в зависимости от вертикальной координаты z. Проводя расчеты, легко убедиться, что максимальные напряжения σ_m будут возникать вверху емкости, а минимальные, но все же не равные нулю, – внизу.

8. В связи с тем, что тангенциальные и меридиональные напряжения имеют максимальные значения в разных зонах емкости, необходимо просчитать и те, и другие напряжения в достаточно большом количестве точек по высоте. В каждой из точек необходимо находить эквивалентные напряжения по соответствующей теории прочности с целью определения максимального значения этих напряжений и сравнения с допускаемой величиной.

9. Для примера рассчитаем напряжения в одной из точек на глубине z = 2 м:

$$\sigma_t = \frac{q}{\delta}\frac{D}{2} = \frac{z\gamma_ж}{\delta}\frac{D}{2} = \frac{2 \cdot 10}{0{,}01}\frac{10}{2} = 10000 \ \ кПа = 10 \ \ МПа.$$

$$\sigma_m = \frac{(\gamma_ж\, z) D}{4\delta} + \frac{\gamma_ж \dfrac{\pi D^2}{4}(H - z) + \gamma_{ст}\left(\dfrac{\pi D^2}{4}\right)\delta + \gamma_{ст}\,[\pi D (H - z)]\delta}{\pi D \delta} =$$

$$= \frac{(10\cdot 2)10}{4\cdot 0{,}01} + \{10\frac{3{,}14\cdot 10^2}{4}(5-2) + 78\left(\frac{3{,}14\cdot 10^2}{4}\right)0{,}01 +$$

$$+ 78[3{,}14\cdot 10\cdot(5-2)]\cdot 0{,}01\}/(3{,}14\cdot 10\cdot 0{,}01) = 12900\ \text{кПа} = 12{,}9\ \text{МПа}.$$

Элементарный параллелепипед, вырезанный вокруг исследуемой точки, наиболее удобно проверить по IV теории прочности (3.11). На его гранях действуют главные напряжения: $\sigma_1 = \sigma_t = 10$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_m = 8{,}2$ МПа, $\sigma_3 = 0$ (рис. 3.15).

$$\sigma_{\text{экв.IV.}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\{[(+10)-(+13{,}32)]^2 + [(+13{,}32)-(0)]^2 + [(0)-(+10)]^2\}} =$$

$$= 9{,}44\ \text{МПа} < [\sigma] = 160\ \text{МПа}.$$

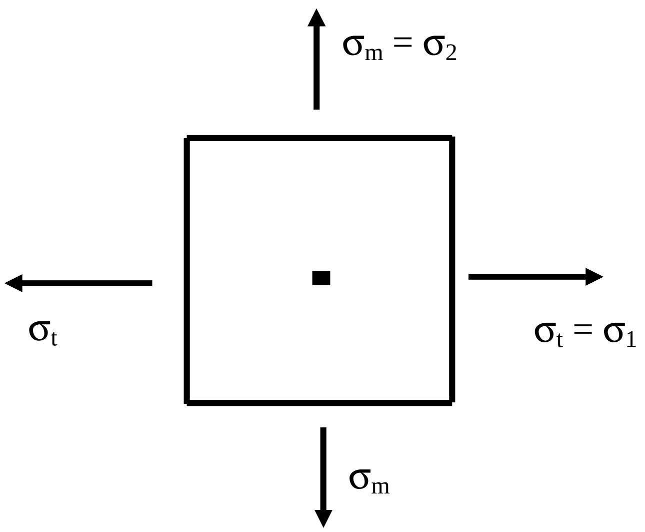


Рис. 3.16. Вид напряженного состояния в точке

10. Имеется особенность в состоянии верхней точки емкости при координате z = 0. В ней отсутствуют тангенциальные напряжения, а меридиональные являются максимальными, при этом возникает не плоское напряженное состояние, а линейное. Напряжения равны:

$\sigma_t = 0;$

$$\sigma_m = \frac{\gamma_ж \frac{\pi D^2}{4} H + \gamma_{ст} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \delta + \gamma_{ст} (\pi D H) \delta}{\pi D \delta} = [10 \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{4} 5 +$$

$$+ 78 \left(\frac{3{,}14 \cdot 10^2}{4} \right) 0{,}01 + 78 (3{,}14 \cdot 10 \cdot 5) 0{,}01]/(3{,}14 \cdot 10 \cdot 0{,}01) =$$

$$= 13085 \text{ кПа} = 13{,}08 \text{ МПа}.$$

Условие прочности для данной точки выполняется:

$$\sigma_{m\,(при\, z = 0)} = 13{,}08 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа } [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

11. Дальнейшие расчеты сводим в таблицу

Таблица 3.1

Значения расчетных напряжений в различных точках

№ точки	Координата точки z, м	σ_t, МПа	σ_m, МПа	$\sigma_{экв}$, МПа
1	0	0	13,08	13,08
2	1	5	13,01	11,37
3	2	10	12,92	11,73
4	3	15	12,85	14,57
5	4	20	12,77	17,54
6	5	25	12,69	21,65

Из табл. 3.1 видно, что наибольшие эквивалентные напряжения наблюдаются внизу стенок емкости, но они меньше допускаемых напряжений: σ_{max} = 21,65 МПа < [σ] = 160 МПа. Таким образом, условие прочности стенок емкости полностью удовлетворяется. Эпюры напряжений представлены на рис. 3.14.

4. Сдвиг и кручение

4.1. Определение внутренних усилий и напряжений

Сдвигом обычно называют состояние стержня, когда в его поперечных сечениях действуют только поперечные силы Q. Оно возникает при нагрузках, направленных перпендикулярно продольной оси стержня. Однако реализовать на практике такое состояние очень трудно, и поэтому теория сдвига стержня обычно самостоятельно не рассматривается. В некоторых задачах применяются упрощенные модели сдвига, которые имеют ограниченное применение. Примером таких моделей является теория расчетов болтовых соединений на срез.

При сдвиге в поперечных сечениях брусьев возникают поперечные силы Q и касательные напряжения τ. При этом в целях упрощения обычно полагают, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению бруса.

Внутренние усилия в брусьях при сдвиге определяются по методу сечений (рис. 4.1).

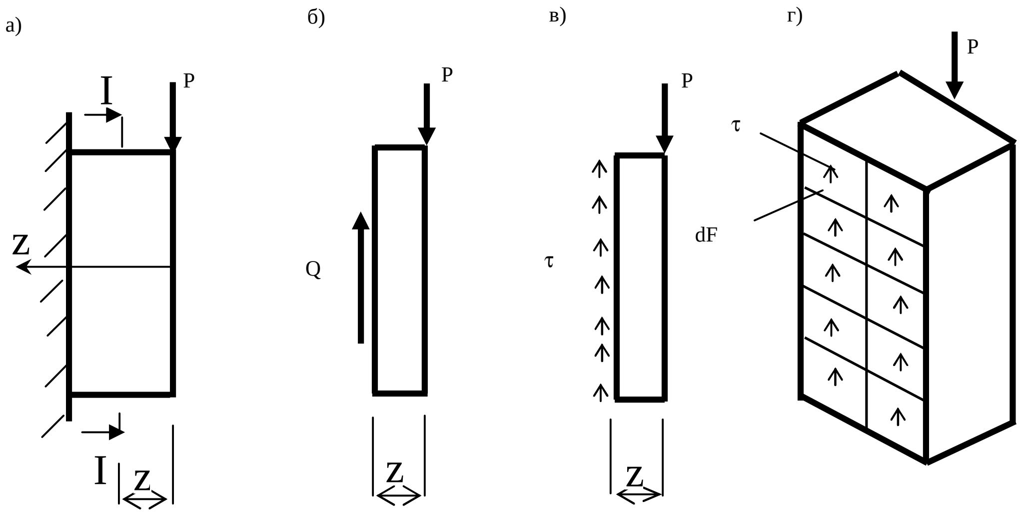


Рис. 4.1. Поперечная сила и касательные напряжения при сдвиге: общий вид бруса (а); внутренние усилия в сечении бруса (б); напряжения в сечении бруса (в, г)

Поперечная сила в данном случае равняется внешней нагрузке. Другие случаи будут рассмотрены в примерах. При определении поперечной силы Q правило знаков, как это принято в расчетах брусьев при других видах деформирования, не используется.

Касательные напряжения при сдвиге в любой точке сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{F}. \qquad (4.1)$$

Условие прочности имеет вид

$$\tau = \frac{Q}{F} \le [\tau], \qquad (4.2)$$

где $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения, они вычисляются:

$$[\tau] = \frac{\tau_{пр}}{[n]}, \qquad (4.3)$$

где $\tau_{пр}$ – предельное значение касательных напряжений при сдвиге, определяемое экспериментально; $[n]$ – коэффициент запаса прочности.

В практических расчетах допускаемое касательное напряжение можно принимать в соответствии с третьей теорией прочности равным

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \qquad (4.4)$$

4.2. Деформации при сдвиге. Закон Гука при сдвиге

При сдвиге брусьев возникают деформации сдвига (рис. 4.2, а), они обозначаются: Δb – абсолютный сдвиг; γ – относительный сдвиг (угол сдвига).

При небольших значениях Δb по сравнению с ℓ существует связь

$$\gamma = \frac{\Delta b}{\ell}. \qquad (4.5)$$

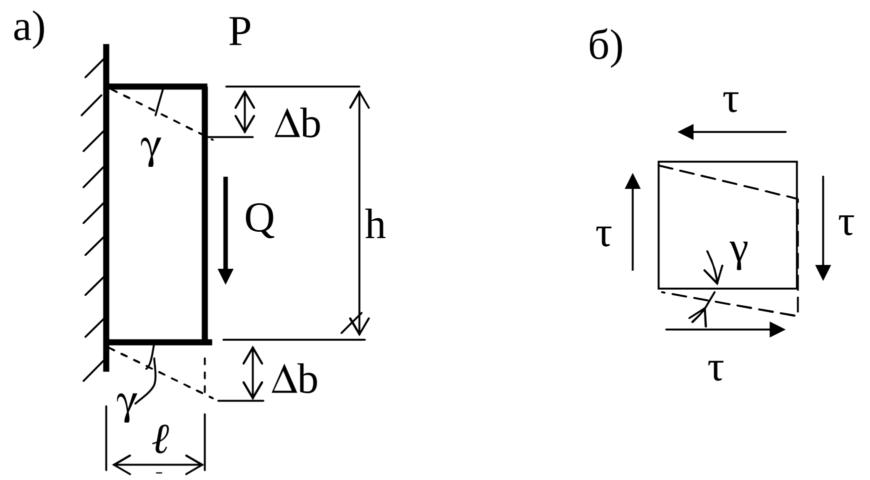


Рис. 4.2. Схемы деформирования бруса (а) и элементарного объема (б) при сдвиге

Такая схема сдвига бруса весьма упрощена и редко используется в расчетах. В то же время напряженно-деформированное состояние в точке тела, когда на гранях элементарного объема действуют только касательные напряжения τ (рис. 4.2, б), встречается в реальности достаточно часто и хорошо изучено, например в опытах на кручение. Это состояние называется чистым сдвигом в точке тела.

На начальных этапах деформирования большинства материалов наблюдается линейная зависимость между напряжениями τ и относительными сдвигами γ

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad (4.5)$$

Эту зависимость называют законом Р. Гука при сдвиге, а константу G, зависящую от свойств материала – модулем упругости второго рода (модулем сдвига). Модуль сдвига характеризует жесткость материала при сдвиге, то есть его способность сопротивляться деформациям сдвига.

Модуль сдвига связан с другими упругими характеристиками материала (модулем продольной упругости E и коэффициентом Пуассона μ) следующей формулой:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (4.7)$$

Такие представления о чистом сдвиге в точке тела являются основой теории кручения стержней.

4.3. Расчет заклепочных соединений

Пример 4.1.

Дано заклепочное соединение (рис. 4.3), состоящее из одной заклепки и двух соединяемых листов; материал заклепки – сталь Ст.3; $[\sigma]$ = 160 МПа; диаметр заклепки d = 0,01 м. Нагрузка, действующая на соединение, P = 20 кН. Проверить заклепочное соединение на прочность.

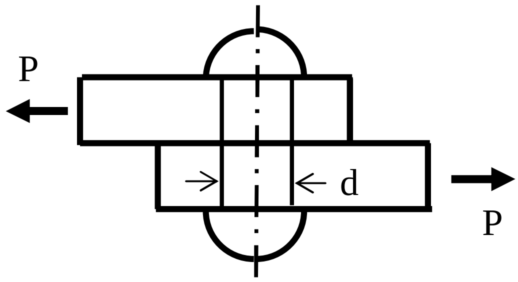


Рис. 4.3. Схема заклепочного соединения

1. Определение внутренних усилий.

Внутренние усилия в заклепке определяются по методу сечений. Заклепка разрезается в месте соединения листов, одна часть соединения отбрасывается и из условия равновесия оставшейся части находится внутреннее усилие – поперечная сила Q (рис. 4.4). Из рисунка видно, что поперечная сила равна внешней нагрузке – силе P, то есть Q = P = 20 кН.

2. Определение касательных напряжений.

Площадь поперечного сечения заклепки равна

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}01^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Касательные напряжения:

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{7{,}85 \cdot 10^{-5}} = 254{,}8 \text{ МПа}.$$

3. Проверка прочности заклепки.

$$\tau = 254{,}8\ \text{МПа} > [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{160}{2} = 80\ \text{МПа}.$$

Условие прочности не удовлетворяется, поэтому необходимо произвести подбор нового сечения заклепки или количества заклепок с заданным диаметром.

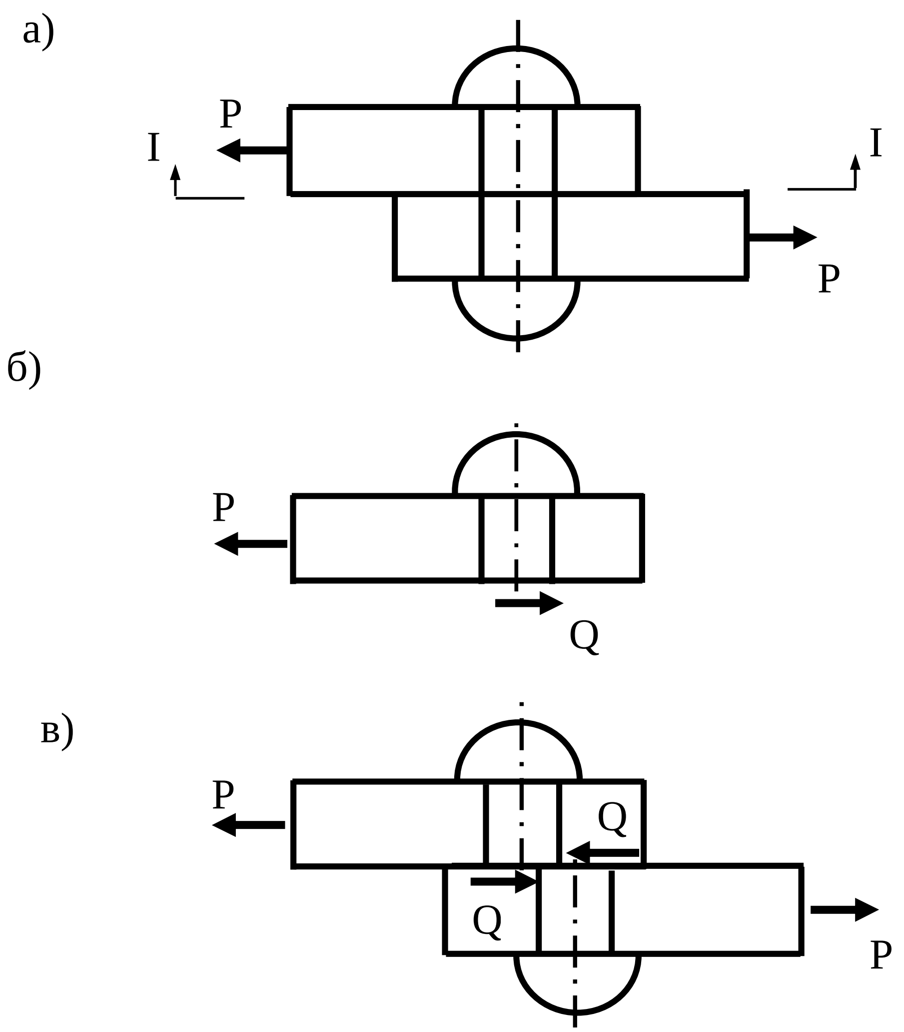


Рис. 4.4. Определение внутренних усилий в заклепке: заклепочное соединение до среза (а); внутренние усилия в сечении заклепки (б) ; заклепочное соединение в процессе среза (в)

4. Подбор количества заклепок.

Суммарная площадь заклепок будет равна:

$$F_{сум} \geq \frac{Q}{[\tau]} = \frac{20}{80 \cdot 10^3} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ м^2.$$

Примем диаметр одной заклепки равным 0,01 м. Тогда площадь сечения одной заклепки будет равна $F = 7{,}85 \cdot 10^{-5}$ м^2 (см. п. 2 данного примера).

Откуда число заклепок будет равно:

$$n = \frac{F_{сум}}{F} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4}}{7{,}85 \cdot 10^{-5}} = 3{,}18\ шт.$$

Окончательно примем для конструирования соединения 4 заклепки.

Пример 4.2.

Дано заклепочное соединение из двух листов, выполненное при помощи двух накладок (рис. 4.5). Толщины соединяемых листов $\delta_1 = 0{,}02$ м; толщины накладок $\delta_2 = 0{,}018$ м. Диаметры заклепок $d_1 = 0{,}022$ м, $d_2 = 0{,}033$ м. Количество заклепок с левой стороны соединения $n = 5$ шт., с правой – 3 шт. Число срезов одной заклепки $m = 2$. Материал соединения сталь Ст.3; основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Нагрузка, действующая на соединение, $P = 121{,}5$ кН. Проверить соединение на общую прочность и местное смятие.

I. Проверка заклепок на срез.

1. Определение поперечных сил в сечениях заклепок.

Так как число заклепок, приходящихся на каждый лист заклепочного соединения, различно, то на заклепки, расположенные с левой и с правой сторон соединения, действуют разные силы. Таким образом, в их сечениях действуют разные поперечные силы Q. Использование двух накладок уменьшает усилие, действующее на одну заклепку, а в целом повышает прочность соединения; такие заклепки называются двухсрезными (рис. 4.6).

Площадь сечения заклепок, применяемых в соединении, будет

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}022^2}{4} = 3{,}79 \cdot 10^{-4}\ м^2,$$

$$F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}033^2}{4} = 8{,}5 \cdot 10^{-4}\ м^2.$$

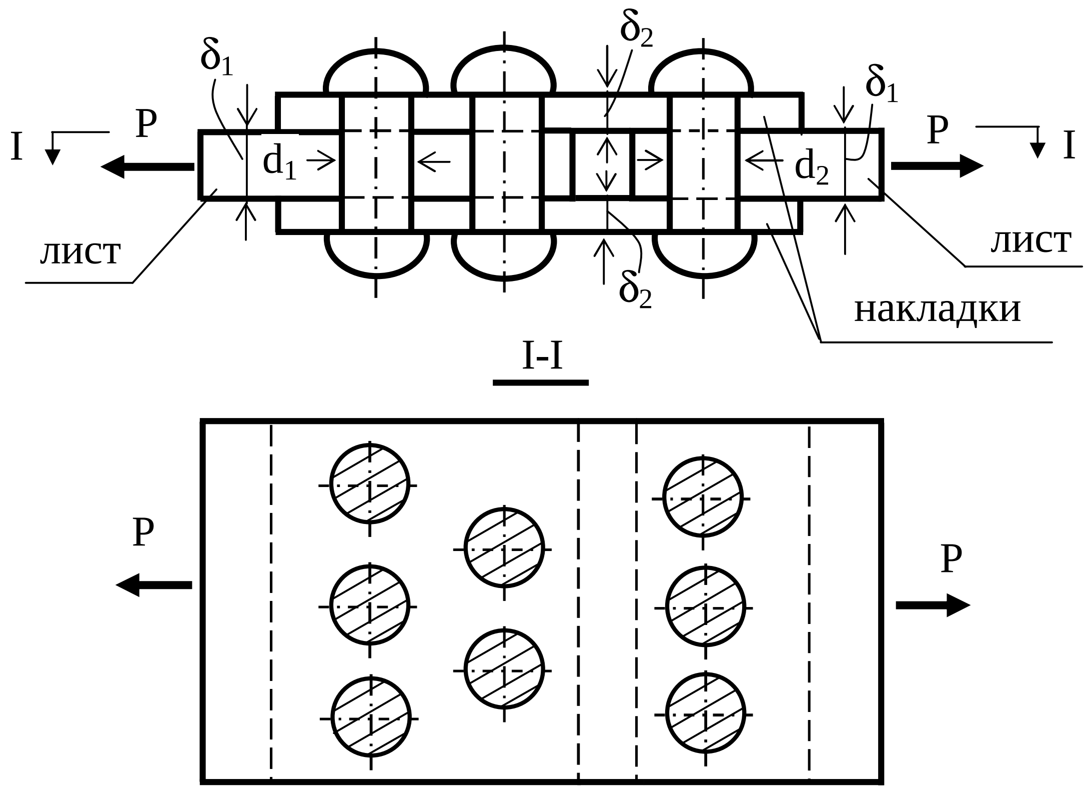


Рис. 4.5. Заклепочное соединение

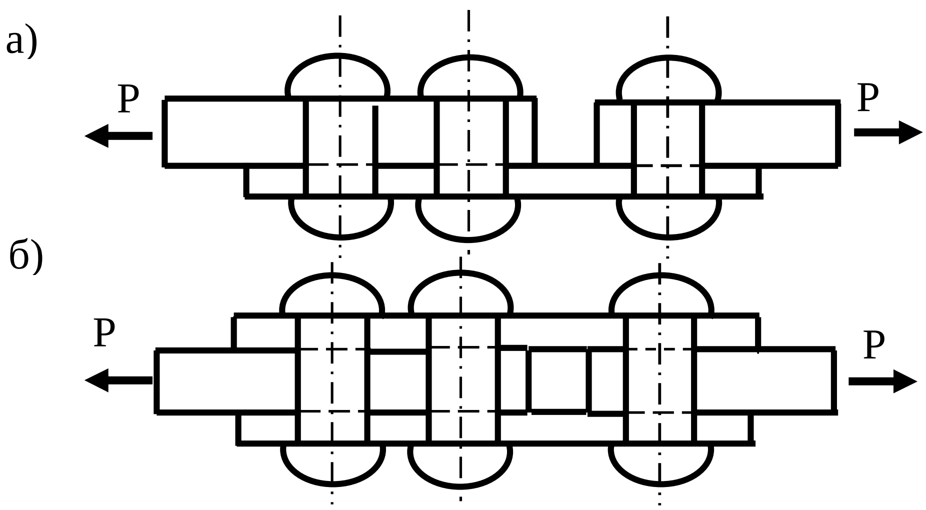


Рис. 4.6. Заклепочное соединение с одной (а)
и двумя накладками (б)

Поперечные силы Q в сечениях заклепок, расположенных с левой и с правой стороны соединения, различны по величине. Учитывая это, касательные напряжения в сечениях заклепок будут равны:

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{F_1} = \frac{12{,}15 \cdot 10^{-3}}{3{,}79 \cdot 10^{-4}} = 32{,}05 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{F_2} = \frac{20{,}25 \cdot 10^{-3}}{8{,}5 \cdot 10^{-4}} = 23{,}82 \text{ МПа}.$$

2. Проверка прочности заклепок.

$$\tau_{max} = \tau_1 = 32{,}05 \text{ МПа} < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{160}{2} = 80 \text{ МПа}.$$

II. Проверка заклепок на местное смятие.

1. Определение напряжений смятия.

Кроме возможности разрушения заклепок от среза существует опасность их разрушения от местного смятия, при котором материал в зонах контакта заклепок и соединяемых листов может испытывать значительные пластические деформации вследствие местного повышения (концентрации) напряжений (рис. 4.7).

Исследованиями установлено, что размер зоны смятия равен площади продольного сечения заклепки, вычисляемый как диаметр заклепки d, умноженный на рабочую высоту заклепки, которая в свою очередь равна толщине листа δ.

В рассматриваемом заклепочном соединении четыре различных зоны смятия с левой и с правой стороны соединения в накладках и в листах. Они отличаются по размерам и нагрузкам:

зона I – слева от стыка коренных листов, смятие по коренному листу;

зона II – слева от стыка, смятие по накладкам;

зона III – справа от стыка, смятие по коренному листу;

зона IV – справа от стыка, смятие по накладкам.

В зонах смятия возникают нормальные напряжения. Они зависят от усилия, действующего в этой зоне, и от площади смятия.

Определим напряжения смятия в первой зоне. Число таких зон равно числу заклепок с левой стороны – 5; сила P распределяется по этим 5 зонам; высота этой части заклепки, то есть высота зоны смятия, равна δ_1 = 0,02 м, ширина – диаметру заклепки d_1 = 0,022 м.

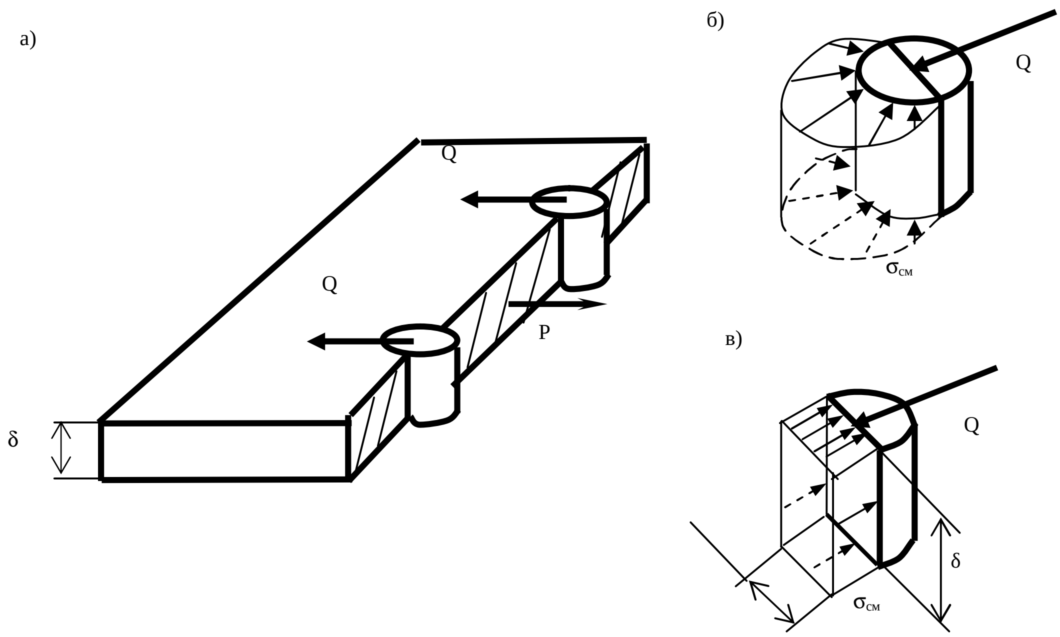


Рис. 4.7. Участок смятия заклепки:
а) общий вид взаимодействия листа и заклепки;
б) реальный характер нагружения заклепки при смятии;
в) расчетная схема нагружения

Площади смятия этих зон будут равны:

$$F_{см}^{I} = \delta_1 d_1 = 0{,}02 \cdot 0{,}022 = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \ м^2,$$
$$F_{см}^{II} = 2\delta_2 d_1 = 2 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}022 = 7{,}92 \cdot 10^{-4} \ м^2$$
$$F_{см}^{III} = \delta_1 d_2 = 0{,}02 \cdot 0{,}033 = 6{,}6 \cdot 10^{-4} \ м^2$$
$$F_{см}^{IV} = 2\delta_2 d_2 = 2 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}033 = 11{,}88 \cdot 10^{-4} \ м^2$$

тогда напряжения в первой зоне смятия будут равны:

$$\sigma_{см}^{I} = \frac{P/5}{F_{см}^{I}} = \frac{121{,}5/5}{0{,}00044} = 55230 \ кПа = 55{,}23 \ МПа.$$

Аналогично определим напряжения смятия в остальных зонах:

$$\sigma_{смят}^{II} = 61{,}36 \ МПа.$$

Так как в зонах III и IV число заклепок отлично от зон I и II, то в них

$$\sigma_{см}^{III} = \frac{P/3}{F_{см}^{III}} = 61260 \text{ кПа} = 61{,}26 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{см}^{IV} = 68{,}18 \text{ МПа}.$$

2. Проверка заклепочного соединения на прочность при смятии.

$$\sigma_{max} = \sigma_{см}^{IV} = 68{,}18 \text{ МПа} < [\sigma_{см}] = 2{,}5 \cdot [\sigma] = 2{,}5 \cdot 160 = 400 \text{ МПа}.$$

Условие прочности при смятии удовлетворяется.

4.4. Расчет сварных соединений

Сварные соединения в основном подразделяются на соединения встык, внахлестку, соединения с накладками; сварные швы подразделяются на стыковые, угловые, лобовые и фланговые.

Пример 4.3.

Дано сварное соединение встык (рис. 4.8), состоящее из двух листов шириной b = 0,5 м и толщиной δ = 0,02 м; листы изготовлены из стали Ст.3; [σ] = 160 МПа. Сварной шов выполнен с применением электродов УОНИ 13/48 с допускаемым напряжением $[\sigma_э]^+$ = 100 МПа. Растягивающая нагрузка P = 100 кН. Проверить соединение на прочность.

Наиболее опасным местом соединения является среднее сечение сварного шва. Сварной шов работает на растяжение, в его сечениях возникает продольная сила N, она равна внешней нагрузке – силе P.

При растяжении в сечениях действуют нормальные напряжения – $\sigma_э$, равномерно распределенные по сечению, они зависят от площади сечения сварного шва и от продольной силы, действующей в сечении. Площадь сечения будет равна

$$F_{шв} = \ell_{шв} h_{шв},$$

где $\ell_{шв}$ – длина шва, равная ширине соединяемых листов, уменьшаемой на 0,01 м за счет непровара сварного шва

$$\ell_{шв} = b - 0{,}01 = 0{,}5 - 0{,}01 = 0{,}49 \text{ м}.$$

Высота сварного шва берется равной толщине соединяемых листов с пренебрежением наплавления металла сверх толщины листов.

То есть

$$h_{шв} = \delta = 0{,}2 \text{ м}.$$

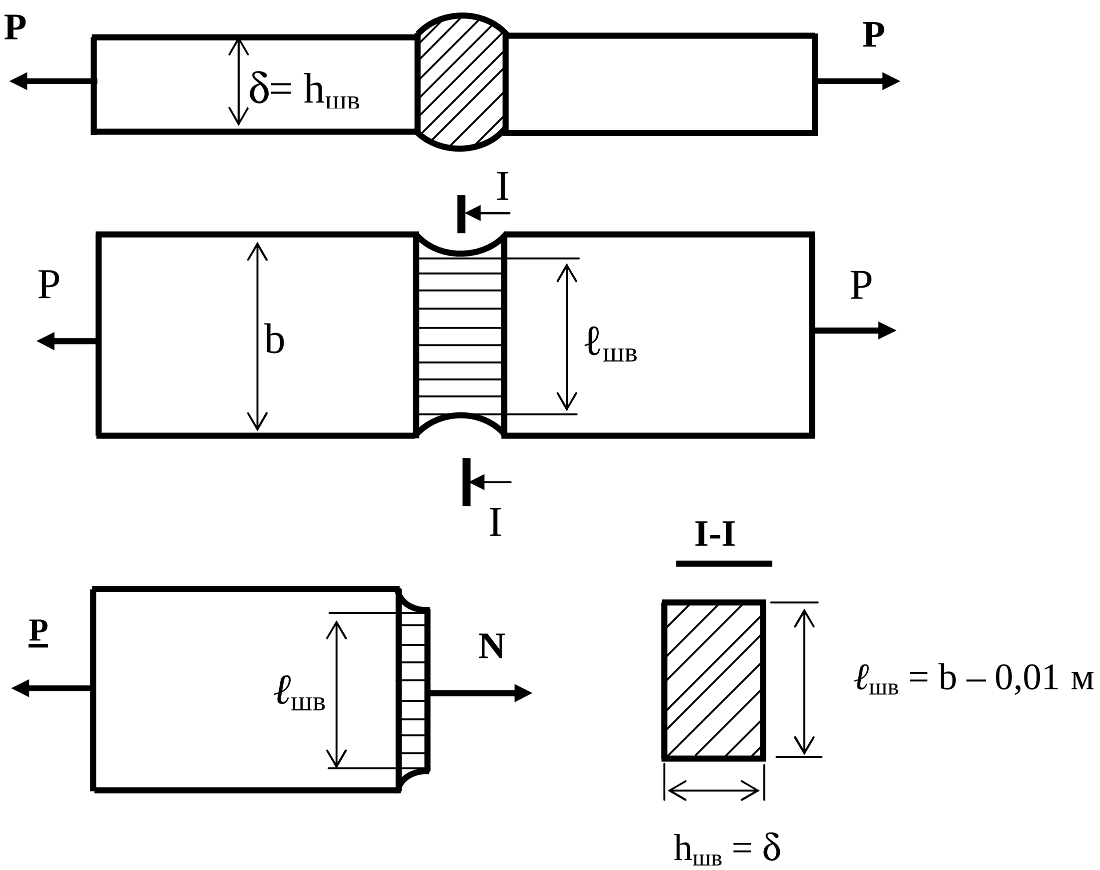


Рис. 4.8. Сварное соединение встык

Напряжения в сварном шве равны

$$\sigma_э = \frac{N}{F_{шв}} = \frac{1000}{0{,}2 \cdot 0{,}49} = 10200 \text{ кПа} = 10{,}2 \text{ МПа} < [\sigma_э]^+ = 100 \text{ МПа}.$$

Сварной шов удовлетворяет условию прочности.

Пример 4.4.

Даны два стальных листа, соединенные внахлестку двумя сварными лобовыми швом (рис. 4.9). Толщины листов $\delta = 0{,}015$ м, ширина листов $b = 1{,}0$ м, материал листов сталь Ст.3. Используемый электрод

УОНИ 13/48, $[\tau_э] = 80$ МПа. Нагрузка, действующая на сварное соединение, Р = 200 кН. Проверить сварные швы на прочность.

1. Определение касательных напряжений в сварном шве.

В данном случае в сварном шве возникают деформации сдвига, а следовательно, возникают касательные напряжения τ (рис. 4.10, а).

Из схемы видно, что в каждом из двух сварных швов возникают одинаковые внутренние усилия, и поэтому внешняя нагрузка Р делится на 2. Расчетное усилие в шве равно половине внешней нагрузки Р.

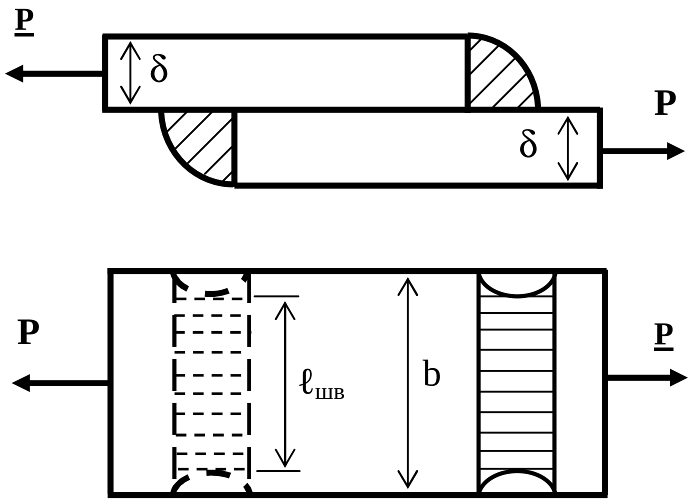


Рис. 4.9. Сварное соединение внахлестку лобовыми швами

Для определения напряжений необходимо знать размер площади сечения. В данном случае вводятся упрощения за счет ликвидации наплавления сварного шва (лишний наплавленный металл идет в запас прочности сварного соединения).

Из рис. 4.10 видно, что высота шва $h_{шв}$ может быть найдена путем рассмотрения прямоугольного треугольника, упрощенно изображающего поперечное сечение сварного шва.

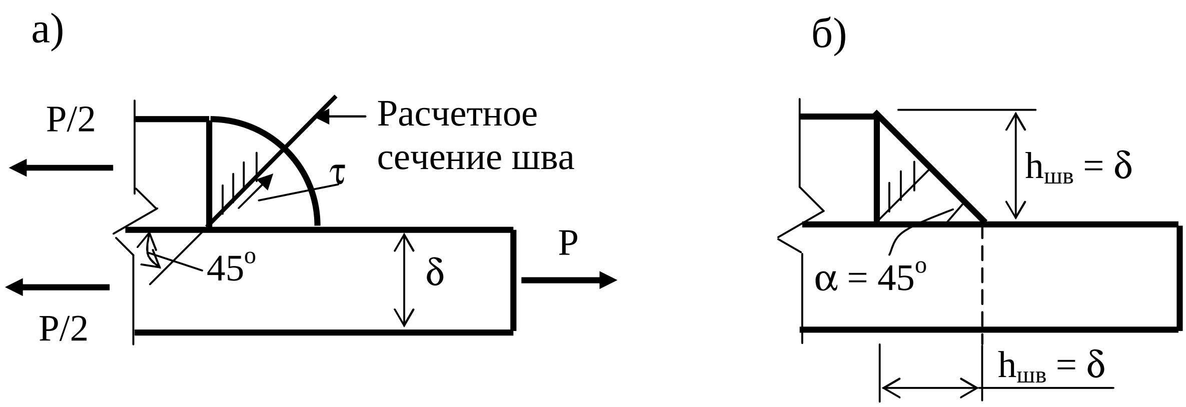


Рис. 4.10. Силы, действующие на угловой лобовой шов (а) и схематизация его размеров (б)

Длина шва равняется ширине свариваемого листа за вычетом 0,01 м на непровар (по 0,005 м с каждой стороны шва).

$$\ell_{шв} = b - 0{,}01.$$

Площадь шва в соответствии с существующей методикой равна

$$F_{шв} = h_{шв} \sin 45^{o}\ \ell_{шв} = \delta \sin 45^{o}\ (b - 0{,}01).$$

Касательные напряжения будут вычисляться по формуле

$$\tau_э = \frac{P/2}{F_{шв}} = \frac{200/2}{0{,}15 \cdot 0{,}707 \cdot (1 - 0{,}01)} = 952 \ \text{кПа} = 0{,}952 \ \text{МПа}.$$

2. Проверка прочности сварного соединения.

$$\tau_э = 0{,}952 \ \text{МПа} < [\tau_э] = 80 \ \text{МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Пример 4.5.

Дано соединение внахлестку двух листов при помощи двух сварочных фланговых швов (рис. 4.11), толщина листов δ = 0,01 м, длина нахлеста b = 0,6 м, материал листов сталь Ст.3. Марка электрода УОНИ 13/48, $[\tau_э]$ = 80 МПа. Внешняя растягивающая нагрузка P = 300 кН. Проверить прочность сварного соединения.

1. Определение касательных напряжений в сварных швах.

При расчетах фланговых угловых швов допускается, что опасными (расчетными) являются диагональные сечения, показанные на рис. 4.11.

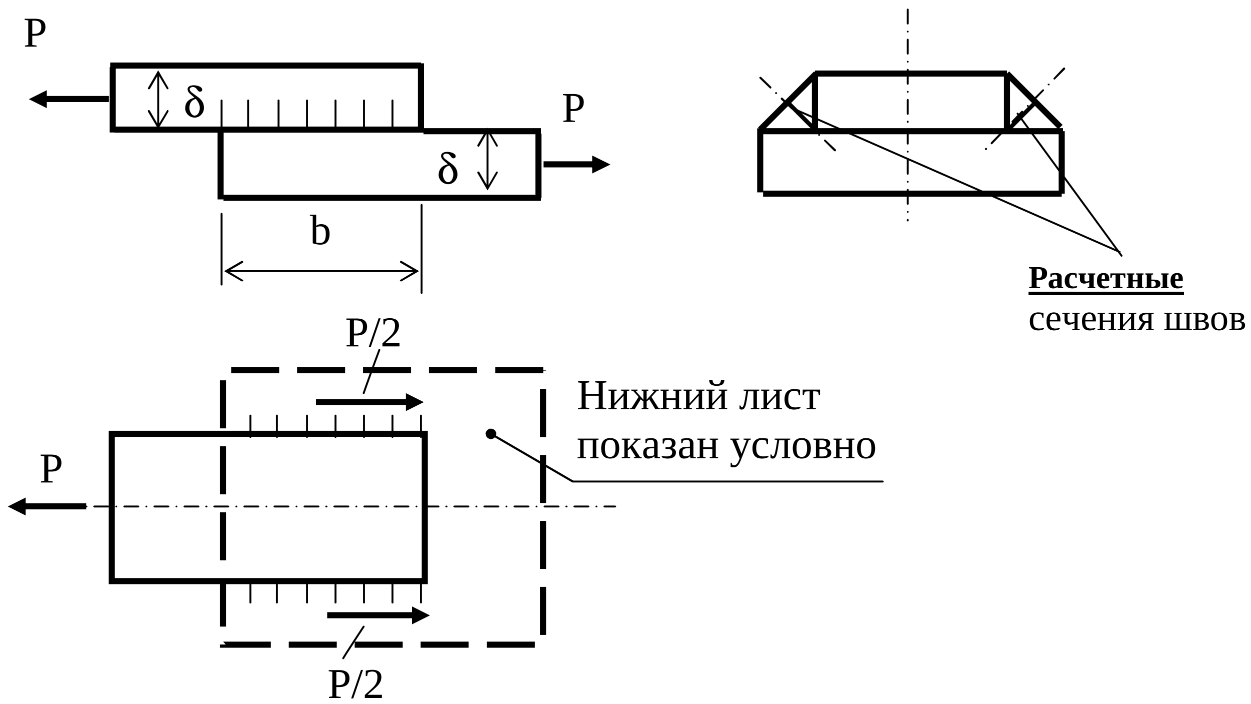


Рис.4.11. Сварное соединение внахлестку боковыми швами

В расчетных сечениях сварных швов возникают касательные напряжения τ, которые зависят от силы, действующей в сечении, и от площади сечения сварного шва вдоль линий возможного сдвига. Эта площадь может быть определена в соответствии с аналогичными упрощениями, показанными на рис. 4.10, б.

Высота шва определяется так же, как и в предыдущем примере. Длина шва равна величине нахлеста с уменьшением 0,01 м из-за непровара

$$\ell_{шв} = b - 0{,}01.$$

Площадь сечения одного сварного шва равна

$$F_{шв} = \delta \sin 45^{o} (b - 0{,}01).$$

Касательные напряжения в продольных сечениях сварных швов равны

$$\tau_э = \frac{P/2}{F_{шв}} = \frac{300/2}{0{,}1 \cdot 0{,}707 \cdot (0{,}6 - 0{,}01)} = 3596{,}0 \ \text{кПа} = 3{,}6 \ \text{МПа}.$$

2. Проверка прочности сварных швов.

$$\tau_э = 3{,}6 \ \text{МПа} < [\tau_э] = 80 \ \text{МПа}.$$

Условие прочности сварных швов удовлетворяется.

4.5. Расчеты брусьев на кручение

Кручением называется вид деформирования брусьев, вызываемый внешними (закручивающими) моментами, действующими перпендикулярно продольной оси бруса. При кручении брусьев возникают внутренние усилия и напряжения – крутящий момент $M_{кр}$ и касательные напряжения □. Касательные напряжения по сечению бруса распределяются неравномерно: максимальные – на внешнем контуре сечения, минимальные, равные нулю, – в его центре (рис. 4.12).

В основу расчетов на кручение с целью упрощения положены следующие допущения:

1) сечения бруса плоские до закручивания, остаются плоскими в процессе закручивания;

2) радиусы сечений бруса в ходе закручивания остаются прямолинейными.

На основе принятых гипотез получены все рабочие формулы названной темы.

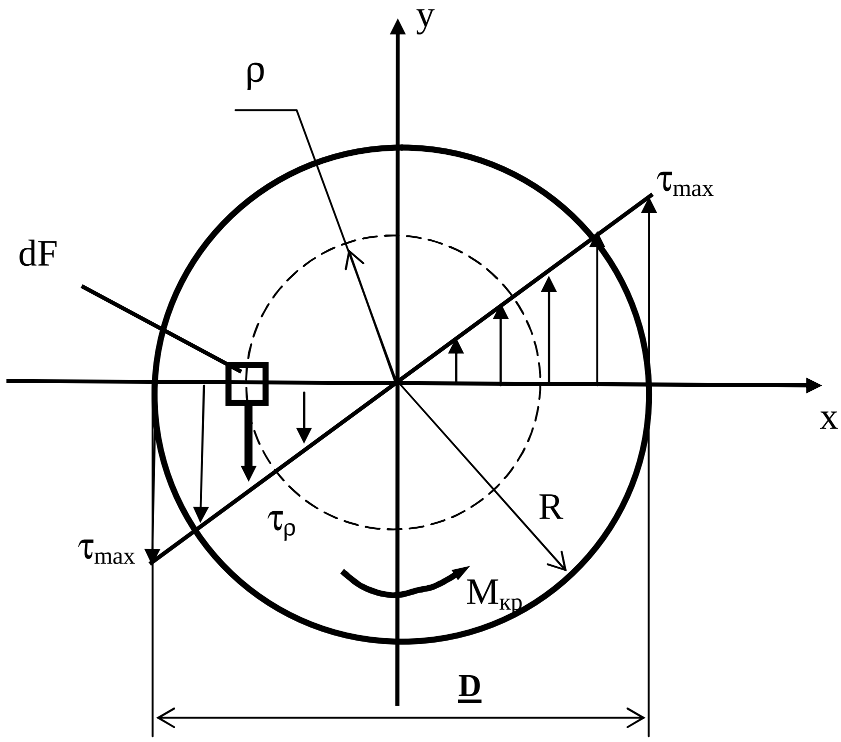


Рис. 4.12. Распределения касательных напряжений по сечению бруса при кручении

4.5.1. Определение внутренних усилий и построение их эпюр

Крутящий момент $M_{кр}$, действующий в сечении, считается положительным, если при взгляде на сечение бруса со стороны начала координат он будет виден направленным против хода часовой стрелки (рис. 4.13).

Рис. 4.13. Правило знаков для крутящих моментов при построении эпюры $M_{кр}$

Определение внутренних усилий (крутящих моментов) при кручении обычно производится методом сечений. В полном варианте этого метода составляются уравнения крутящих моментов для отдельных участков вала и с их помощью находятся значения крутящих моментов в характерных сечениях дальнейшим построением эпюры. В упрощенном варианте значения крутящих моментов в характерных сечениях определяют численно без составления их уравнений. Разобраться в методе сечений значительно проще на конкретном примере.

4.5.2. Определение напряжений при кручении и условие прочности

Как было сказано ранее (см. рис. 4.12), касательные напряжения при кручении распределяются по сечению неравномерно и могут быть найдены по формуле

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\,\rho, \qquad (4.8)$$

□ в данном случае может изменяться от минимального до максимального значений, то есть от 0 до R= D/2.

Максимальные напряжения на внешнем контуре сечения получаются при условии равенства переменного радиуса максимальному значению, что может быть представлено выражением

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\,R = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\,\frac{D}{2} = \frac{M_{кр}}{\left(\frac{I_\rho}{D/2}\right)}. \qquad (4.9)$$

С целью упрощения полученной формулы вводится величина, имеющая название полярного момента сопротивления:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2}\,. \qquad (4.10)$$

Полярный момент инерции сплошного круглого сечения определяется по формуле

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}, \qquad (4.11)$$

кольцеобразного сечения:

$$I_\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \qquad (4.12)$$

где D и d – внешний и внутренний диаметры кольцеобразного сечения; α – соотношение между диаметрами сечения (обычно при подборе сечения принимается равным 0,7÷0,8).

$$\alpha = \frac{d}{D}\ . \qquad (4.13)$$

В результате формула для определения максимальных касательных напряжений при кручении принимает вид

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}\ . \qquad (4.14)$$

Одной из основных целей расчета на прочность является подбор сечения бруса, способного выдерживать внешнюю нагрузку не разрушаясь.

На основе полученного выражения (4.14) условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} \le [\tau]\ , \qquad (4.15)$$

где $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения, которые задаются из справочника по сопротивлению материалов в соответствии с нормами; для пластичных сталей [□] могут быть приняты равными [□] /2, а для хрупких – $[\sigma]^+$.

Подбор сечения производится по следующему алгоритму, вытекающему из формулы (4.15).

1. По максимальному крутящему моменту, берущемуся с эпюры крутящих моментов, определяется полярный момент сопротивления

$$W_\rho \geq \frac{|M_{кр}|}{[\tau]}, \qquad (4.16)$$

2. Из основной формулы для момента сопротивления (4.10) и формулы (4.16) с учетом выражений для момента инерции определяется диаметр сплошного круглого сечения

$$\frac{|M_{кр}|}{[\tau]} \leq W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4/32}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}, \qquad (4.17)$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}}, \qquad (4.18)$$

или внешний и внутренний диаметры кольца с помощью выражения

$$\frac{|M_{кр}|}{[\tau]} \leq W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2} = \frac{\frac{\pi D^4 \left(1-\alpha^4\right)}{32}}{D/2} = \frac{\pi D^3 \left(1-\alpha^4\right)}{16}, \qquad (4.19)$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}\ 16}{\pi\ (1-\alpha^4)[\tau]}},$$

$$(4.20)$$

$$d = \alpha D .$$

4.5.3. Определение перемещений при кручении и расчет на жесткость

Кроме расчетов брусьев на прочность еще производятся их расчеты на жесткость и очень часто эти расчеты оказываются определяющими.

Существует два типа критерия жесткости стержней при кручении в зависимости от вида бруса и характера его работы. Этими критериями являются: достижение углом закручивания или относительным углом закручивания допускаемых величин, применяемых в зависимости от ситуации. Подход принятия критерия становится наиболее понятным при рассмотрении конкретных примеров.

Расчет бруса на жесткость (рис. 4.14) при кручении с помощью абсолютного угла закручивания производится по формуле, подобной условию жесткости при растяжении-сжатии:

$$\varphi = \sum \Delta\varphi_i = \sum \frac{M_{кр\ i}\ \ell_i}{G\ I_{\rho_i}} \le [\varphi], \qquad (4.21)$$

где φ – угол закручивания рассматриваемого сечения бруса; $\Delta\varphi_i$ – приращение угла закручивания на i-м участке бруса; ℓ_i – длина i-го участка бруса; G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала бруса; $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания.

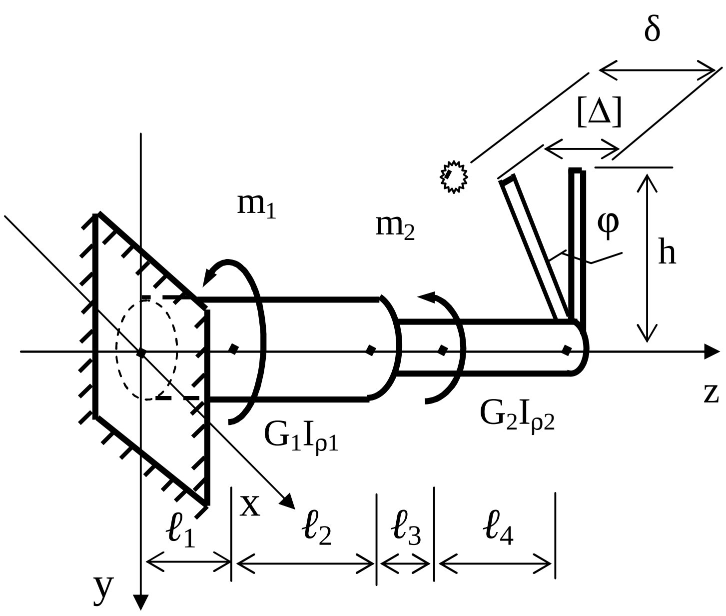


Рис. 4.14. Схема работы консольного бруса с кронштейном

Нормы расчетов валов рекомендуют проводить оценку жесткости не только по величинам углов закручивания, но и по их относительным значениям.

Относительный угол закручивания при однородном кручении равен

$$\Theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{M_{кр}}{G\,I_\rho}. \qquad (4.22)$$

Тогда условие жесткости вала имеет вид

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G\ I_\rho} \le [\Theta], \qquad (4.23)$$

где $[\Theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания. Он является эмпирической величиной, приводится в нормативных источниках и зависит только от характера нагружения вала. Максимальное значение для типичных условий $[\Theta]$ = 2 град/м = $34{\cdot}10^{-3}$ рад/м.

Пример 4.6.

Дан вал, к которому шкивами присоединено два конвейера. Он получает через редукторы вращающие моменты от двух электродвигателей. Мощности N, подаваемые от двигателей и забираемые конвейерами, показаны на рис. 4.15 (подводимые мощности UN_i на этой схеме условно показаны стрелками, направленными вверх, а забираемые – стрелками, направленными вниз). Скорость вращения вала n = 10 об/мин. Вал выполнен из материала сталь Ст.3 с характеристиками: $[\tau]$ = 80 МПа; G = $0{,}8{\cdot}10^5$ МПа. Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$ = 0,3 град/м = $5{,}1{\cdot}10^{-3}$ рад/м. Подобрать сечение вала исходя из условий прочности и жесткости.

I. Расчет вала на прочность.

1. Преобразование подводимых и снимаемых мощностей в закручивающие моменты производится по формуле

$$m = 9{,}736 \ \frac{N}{n} \ ,$$

где m – действующий момент, в кН·м; N – мощность, в кВт; n – число оборотов вала в минуту.

Для упрощения расчетов округлим переводной коэффициент в большую сторону. В связи с тем, что это округление даст некоторое увеличение моментов по сравнению с фактическими значениями, полученный диаметр вала будет несколько больше, чем реально требуемый. Это незначительное увеличение диаметра пойдет в запас прочности вала и поэтому такое округление будет правомерным:

$$m_1 = 10 \ \frac{N_1}{n} = 10 \cdot \frac{50}{10} = 50 \ \text{кН·м}.$$

Аналогично получаем

m_2 = 20 кН·м; m_3 = 80 кН·м; m_4 = 50 кН·м.

Перенесем полученные значения моментов на расчетную схему вала.

2. Определение внутренних усилий по методу сечений (рис. 4.16), построение эпюры крутящих моментов $M_{кр}$.

Представим вал состоящим из нескольких участков.

а) Сечение на первом участке.

Рассечем вал в произвольном месте первого участка на расстоянии z от начала координат.

Составим уравнение статики, в которое будут входить внешние и внутренний моменты, действующие на вал, $\Sigma m_z = 0$. Воспользуемся правилом знаков, взятым из теоретической механики: момент, действующий против часовой стрелки, имеет знак "+", а по часовой - "-".

Взгляд на вал в данном случае был принят с начала координат в сторону конца вала (см. рис. 4.16) (на схеме указан стрелкой).

$0 < z_1 < 0{,}25$ м;

$\Sigma m_z = 0$; $+ m_1 - M_I = 0$; $M_I = m_1$;

при $z_1 \approx 0$; $M_A^{прав} = + m_1 = 50$ кН·м;

при $z_1 \approx 0{,}25$ м; $M_B^{лев} = + m_1 = 50$ кН·м.

б) Сечение на втором участке.

$0{,}25$ м $< z_1 < 1{,}25$ м;

$\Sigma m_z = 0$; $+ m_1 - m_2 - M_{II} = 0$; $M_{II} = + m_1 - m_2$;

при $z_1 \approx 0{,}25$ м $M_B^{прав} = + m_1 - m_2 = + 50 - 20 = 30$ кН·м;

при $z_1 \approx 1.25$ м; $M_C^{лев} = + m_1 - m_2 = + 50 - 20 = 30$ кН·м.

в) Сечение на третьем участке.

$1{,}25$ м $< z_1 < 1{,}5$ м;

$\Sigma m_z = 0$; $+ m_1 - m_2 - m_3 - M_{III} = 0$; $M_{III} = + m_1 - m_2 - m_3$;

при $z_1 \approx 1{,}25$ м; $M_C^{прав} = + m_1 - m_2 - m_3 = + 50 - 20 - 80 = - 30$ кН·м;

при $z_1 \approx 1{,}5$ м; $M_D^{лев} = + m_1 - m_2 - m_3 = + 50 - 20 - 80 = - 30$ кН·м.

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов. Максимальный момент на эпюре крутящих моментов:

$$M_{кр} = |M_I| = |M_{III}| = 50 \text{ кН·м}.$$

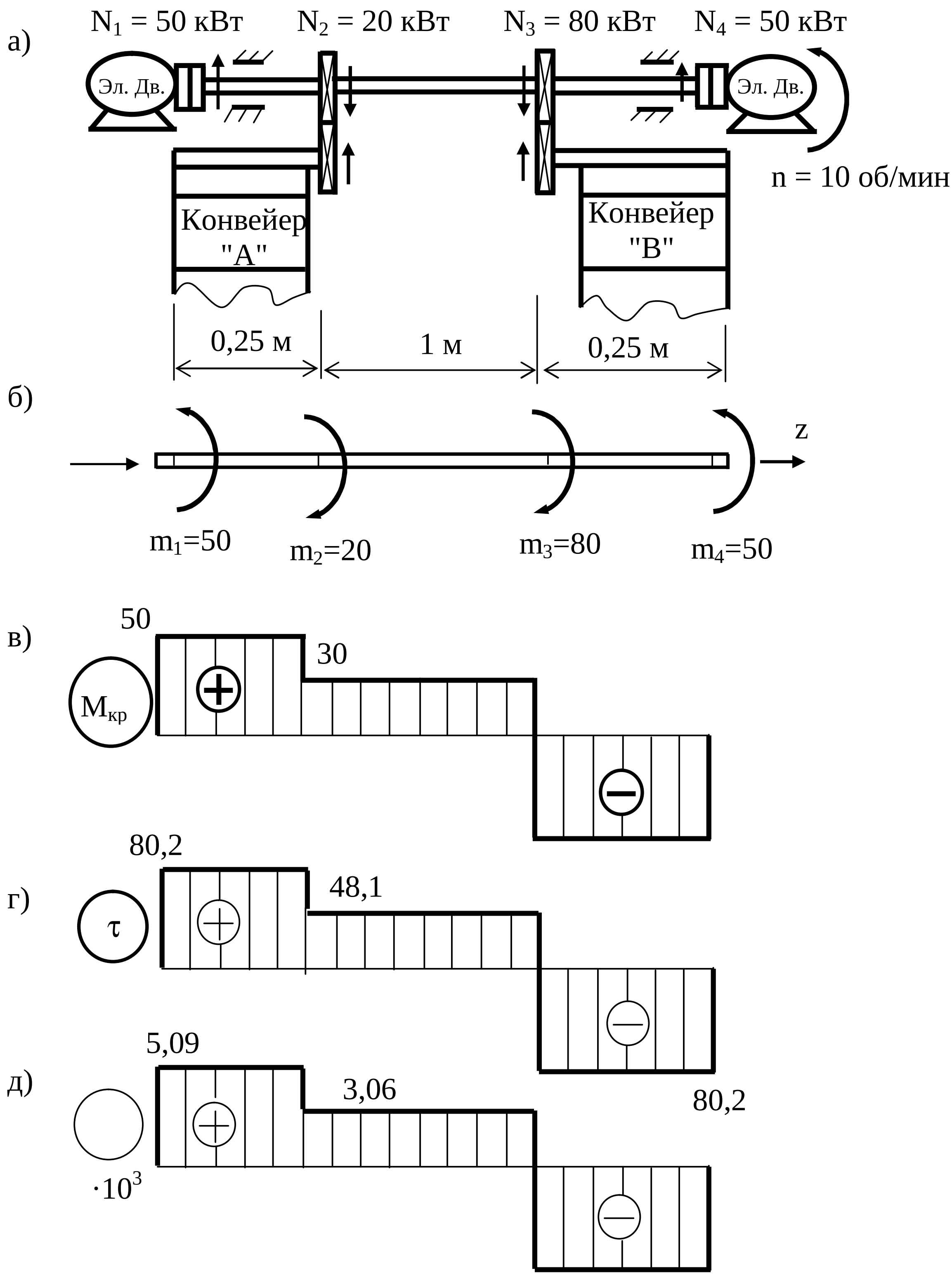


Рис. 4.15. Расчетные схемы (а, б) и эпюры крутящих моментов (в), максимальных касательных напряжений (г) и относительных углов закручивания (д)

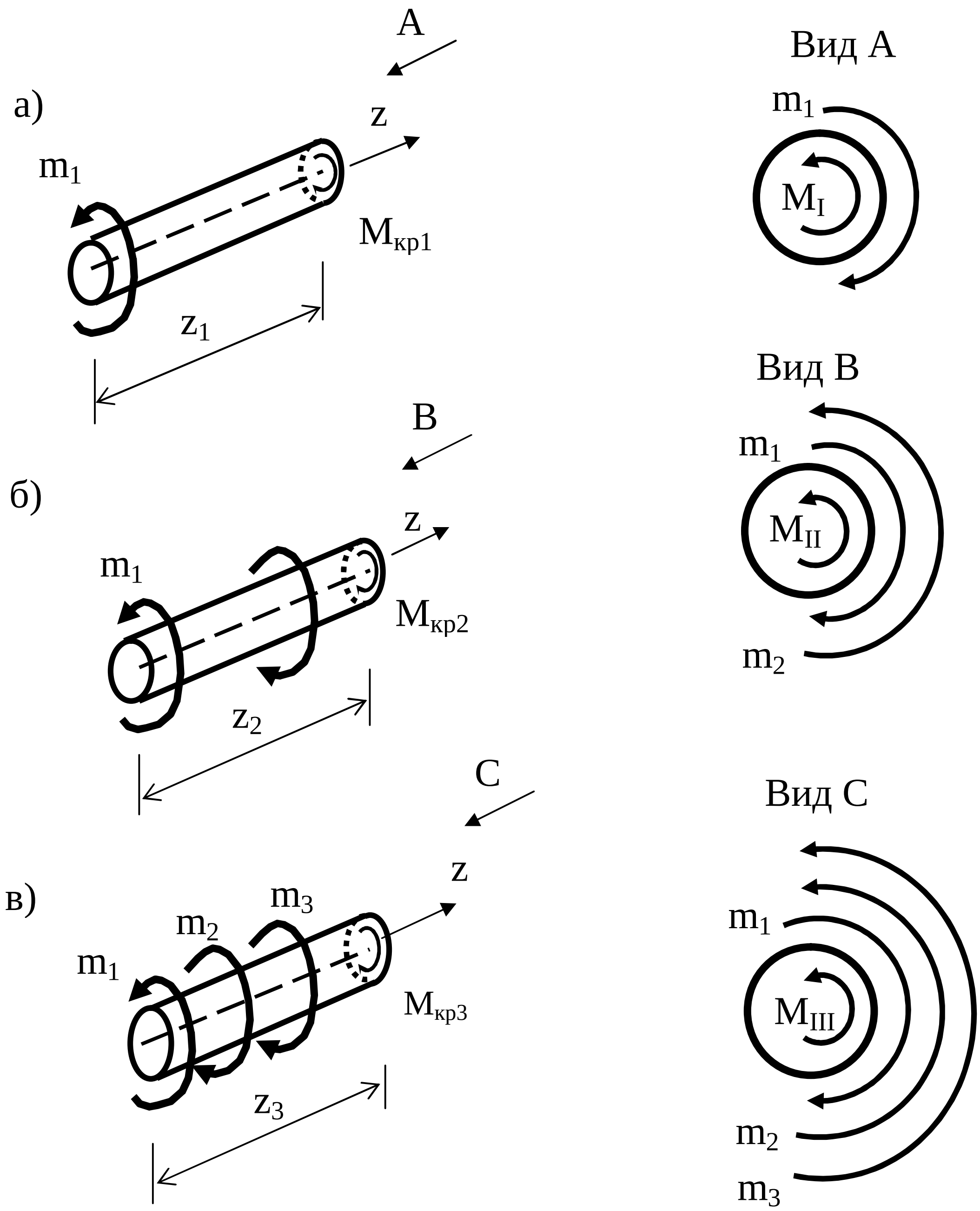


Рис. 4.16. Определение крутящих моментов

3. Подбор сечения вала из условия прочности.

Диаметр вала находим в соответствии с формулой (4.18)

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}\,16}{\pi\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 16}{3{,}14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0{,}147 \text{ м.}$$

$M_{кр}$ в использованной формуле – это максимальный по модулю момент на эпюре крутящих моментов.

4. Определение касательных напряжений, построение эпюры τ.

С целью проверки правильности нахождения диаметра вала можно произвести построение эпюры τ. Максимальные касательные напряжения τ определяются из выражения (4.14).

Полярный момент сопротивления W_ρ для рассматриваемого вала с подобранным выше диаметром будет равен в соответствии с формулами (4.10) и (4.11)

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2} = \frac{\pi D^4 / 32}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}147^3}{16} = 623{,}71 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Касательные напряжения для каждого участка вала будут составлять

$$\tau_I = \frac{M_I}{W_\rho} = \frac{50 \cdot 10^3}{623{,}71 \cdot 10^{-6}} = 80{,}2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80{,}2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{II} = \frac{M_{II}}{W_\rho} = \frac{30 \cdot 10^3}{623{,}71 \cdot 10^{-6}} = 48{,}1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48{,}1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{III} = \frac{M_{III}}{W_\rho} = \frac{(-50) \cdot 10^3}{623{,}71 \cdot 10^{-6}} = -80{,}2 \cdot 10^6 \text{ МПа} = -80{,}2 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строится эпюра касательных напряжений τ (см. рис. 4.15, г).

5. Поверка подобранного сечения по условию прочности.

Максимальные касательные напряжения берутся с эпюры

$$\tau_{max} = |\tau_I| = |\tau_{III}| = 80{,}2 \text{ МПа} > [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности не выполняется, но с учетом допустимого 5-процентного превышения величины допускаемого напряжения, оно примет вид

$$\tau_{max} = 80{,}2 \text{ МПа} < [\tau](1+0{,}05) = 84 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условие прочности удовлетворено.

II. Расчет вала на жесткость.

6. Подбор сечения вала из условия жесткости.

В соответствии с данными задачи для оценки жесткости вала используем условие (4.23),откуда может быть получен диаметр вала.

Используем формулу (4.11) для определения полярного момента инерции.
Подставив ее в условие жесткости (4.23), получим

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G\ \pi\ D^4 / 32} \le [\Theta].$$

Выражение для подбора диаметра вала по условию жесткости примет вид

$$D = \sqrt[4]{\frac{|M_{кр}|32}{G\pi[\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{50\cdot 10^3\cdot 32}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 3{,}14\cdot 5{,}1\cdot 10^{-3}}} = 0{,}188 \text{ м.}$$

7. Построение эпюры относительных углов закручивания.

Для проверки правильности нахождения диаметра вала по условию жесткости можно построить эпюру Θ.

Относительный угол закручивания определяется по формуле (4.22). Предварительно найдем полярный момент инерции I_ρ, входящий в формулу по определению относительного угла закручивания. Произведем это с учетом нового большего диаметра вала, полученного при его расчете на жесткость: D = 0,188 м.

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14\cdot 0{,}188^4}{32} = 12263{,}97\cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Тогда относительные углы закручивания по участкам будут выглядеть:

$$\Theta_I = \frac{M_I}{G\ I_\rho} = \frac{50\cdot 10^3}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 12263{,}97\cdot 10^{-8}} = 0{,}00509 \text{ рад/м;}$$

$$\Theta_{II} = \frac{M_{II}}{G\ I_\rho} = \frac{30\cdot 10^3}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 12263{,}97\cdot 10^{-8}} = 0{,}00306 \text{ рад/м;}$$

$$\Theta_{III} = \frac{M_{III}}{G\ I_\rho} = \frac{-50 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 12263{,}97 \cdot 10^{-8}} = -\ 0{,}00509 \text{ рад/м.}$$

По полученным значениям относительных углов закручивания строится эпюра Θ, (рис. 4.15, д).

8. Проверка сечения по условию жесткости.

С эпюры относительных углов закручивания выбирается максимальное по модулю значение Θ и сравнивается с допускаемой величиной относительного угла закручивания:

$$\Theta_{max} = |\Theta_I| = |\Theta_{III}| = 0{,}00509 \text{ рад/м} < [\Theta] = 0{,}051 \text{ рад/м.}$$

Сечение вала по условию жесткости подобрано верно.

9. Окончательный подбор диаметра вала.

Из двух диаметров вала, полученных из условия прочности и жесткости: (D = 0,147 м и D = 0,188 м) выбираем больший и округляем до ближайшего большего (в соответствии со стандартом) D = 0,2 м.

Пример 4.7.

Дан жестко закрепленный на левом конце ступенчатый брус, состоящий из двух стержней со сплошным и трубчатым поперечными сечениями (рис. 4.17). Дополнительным промежуточным элементом в месте стыка является круглая абсолютно жесткая пластина. Соотношение внешних диаметров сплошного и трубчатого сечения равно $D_1 / D = 0{,}6$. Брус выполнен из стали Ст. 3 с характеристиками $[\tau] = 80$ МПа; $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. К правому концу ступенчатого бруса присоединен кронштейн в форме вертикального стержня высотой h = 0,2 м; на расстоянии $\delta = 0{,}0025$ м от крайней точки кронштейна располагается шестерня, соприкосновение шестерни с кронштейном приведет к ее разрушению, допускаемый минимальный зазор между вершиной кронштейна и шестерней $[\Delta] = 0{,}002$ м. Брус нагружен внешними закручивающими моментами. Необходимо произвести подбор сечений стержней из условия прочности и жесткости; деформациями промежуточной пластины пренебречь.

I. Расчет ступенчатого бруса на прочность.

1. Определение внутренних усилий и построение эпюр крутящих моментов $M_{кр}$.

Произведем построение эпюры крутящих моментов по методу сечений с использованием упрощенного правила. Названное правило заключается в следующем: на эпюре $M_{кр}$, в местах действия закручивающих моментов, образуются скачки в направлении их действия, указанные стрелками, величина скачка равна величине момента (см. рис. 4.17).

2. Подбор сечений.

Вначале для цельного стрежня произведем подбор диаметра сплошного сечения – D_1 при помощи выражения (4.18):

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}\,16}{\pi\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 16}{3{,}14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0{,}124\,\text{м},$$

округлим полученный диаметр до D_1 = 0,125 м.

Для стрежня, выполненного в виде трубы, определим внешний D и внутренний d диаметры по формуле (4.20).

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}\,16}{\pi\,(1-\alpha^4)\,[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{90 \cdot 10^3 \cdot 16}{3{,}14 \cdot (1-0{,}8^4) \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0{,}227\,\text{м},$$

округлим D до 0,22 м.

$$d = \alpha D = 0{,}8 \cdot 0{,}22 = 0{,}172\ \text{м},$$

округлим d до 0,17 м.

Согласно заданию между диаметрами сплошного стержня и трубы должно выполняться примерное соотношение D_1 / D = 0,6. Проверим соответствие подобранных диаметров этому соотношению:

$$D_1 / D = 0{,}125 / 0{,}22 = 0{,}57.$$

Соотношение не выполняется, необходимо для его выполнения изменение одного из диаметров. Из-за возможности нарушения условия прочности уменьшать диаметры стержней нельзя, поэтому увеличим диаметр D_1.

Он будет равен

$$D_1 = 0{,}6\,D = 0{,}6 \cdot 0{,}22 \approx 0{,}13\ \text{м}.$$

В результате принимаем диаметры: D_1 = 0,13 м; D = 0,22 м; d = 0,17 м.

3. Построение эпюры τ в соответствии с подобранными диаметрами.

Для построения эпюры τ необходимо знание значений полярных моментов сопротивления.

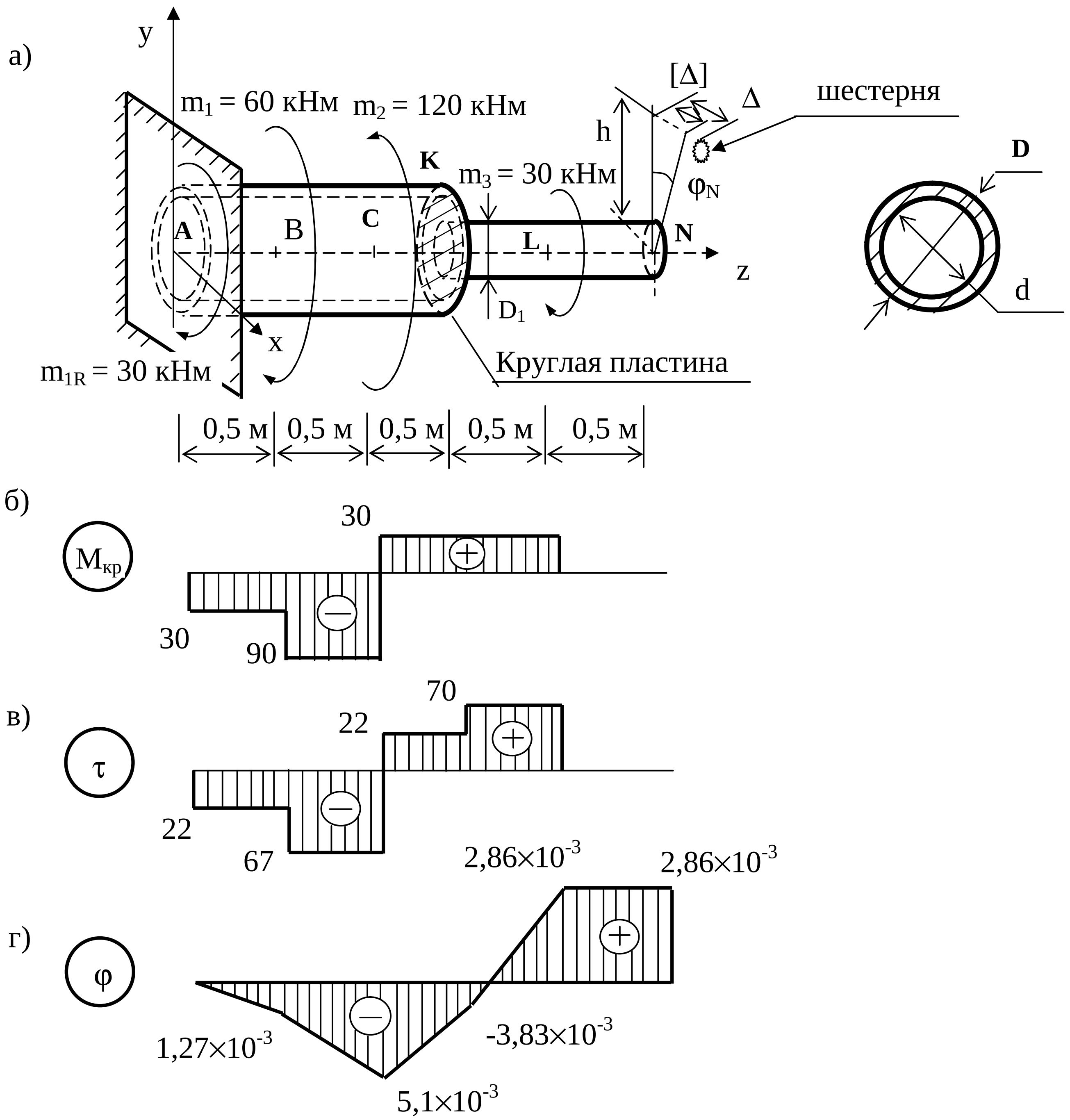


Рис. 4.17. Расчетная схема (а) и эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ (б), касательных напряжений τ (в) и углов закручивания φ (г)

Для трубы, I, II и III участков он будет равен полярному моменту инерции сечения, деленного на его максимальный радиус:

$$W_\rho^{I} = W_\rho^{II} = W_\rho^{III} = \frac{I_\rho^{общ}}{D/2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}\right)}{D/2} = \frac{\left(\frac{3{,}14 \cdot 0{,}22^4}{32} - \frac{3{,}14 \cdot 0{,}17^4}{32}\right)}{0{,}22/2} = 0{,}00135 \ \text{м}^3.$$

Для сплошного бруса (участки IV и V)

$$W_\rho^{IV} = W_\rho^{V} = \frac{\pi D_1^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}13^3}{16} = 0{,}00043 \ \text{м}^3.$$

После вычисления моментов сопротивления определяем максимальные касательные напряжения на каждом участке ступенчатого бруса на поверхности сечения (см. рис. 4.12):

$$\tau_I = \frac{M_{кр}^{I}}{W_\rho^{I}} = \frac{-30}{0{,}00135} = -2{,}22 \cdot 10^4 \ \text{кПа} = -22 \ \text{МПа};$$

$$\tau_{II} = \frac{M_{кр}^{II}}{W_\rho^{II}} = \frac{-90}{0{,}00135} = -6{,}67 \cdot 10^4 \ \text{кПа} = -67 \ \text{МПа};$$

$$\tau_{III} = \frac{M_{кр}^{III}}{W_\rho^{III}} = \frac{30}{0{,}00135} = 2{,}22 \cdot 10^4 \ \text{кПа} = 22 \ \text{МПа};$$

$$\tau_{IV} = \frac{M_{кр}^{IV}}{W_\rho^{IV}} = \frac{30}{0{,}00043} = 6{,}96 \cdot 10^4 \ \text{кПа} = 70 \ \text{МПа};$$

$$\tau_{V} = \frac{M_{кр}^{V}}{W_\rho^{V}} = \frac{0}{0{,}00043} = 0.$$

По полученным значениям моментов строится эпюра касательных напряжений τ (см. рис. 4.17, в).

4. Проверка бруса на прочность.

На эпюре касательных напряжений находится максимальное по модулю значение этих напряжений. Наибольшие напряжения имеют место на IV участке бруса, сравним их с допускаемыми напряжениями.

$$\tau_{max} = \tau_{IV} = 70 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Подобранные сечения бруса удовлетворяют условию прочности.

II. Расчет по условию жесткости.

1. Определение приращений углов закручивания на участках бруса.

Определим углы закручивания каждого характерного сечения на участках $\Delta\varphi$ ступенчатого бруса в отдельности. Для этого необходимо знать полярные моменты инерции сечений каждого участка.

Для трубы на I, II, III участках

$$I_\rho^{I} = I_\rho^{II} = I_\rho^{III} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}22^4}{32} - \frac{3{,}14 \cdot 0{,}17^4}{32} = 0{,}000147 \text{ м}^4.$$

Для сплошного сечения на IV и V участках

$$I_\rho^{IV} = I_\rho^{V} = \frac{\pi D_1^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}13^4}{32} = 0{,}000028 \text{ м}^4.$$

Определяем приращения углов закручивания на каждом участке бруса:

$$\Delta\varphi_{I} = \frac{M_{кр}^{I}\,\ell_1}{G\,I_\rho^{I}} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}000147} = -0{,}00127 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{II} = \frac{M_{кр}^{II}\,\ell_2}{G\,I_\rho^{II}} = \frac{-90 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}000147} = -0{,}00383 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{III} = \frac{M_{кр}^{III}\,\ell_3}{G\,I_\rho^{III}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{(0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^6)\,0{,}000147} = 0{,}00127 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{IV} = \frac{M_{кр}^{IV}\,\ell_4}{G\,I_\rho^{IV}} = \frac{30\cdot 10^3\cdot 0{,}5}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 0{,}000028} = 0{,}00669\ \text{рад};$$

$$\Delta\varphi_{V} = \frac{M_{кр}^{V}\,\ell_5}{G\,I_\rho^{V}} = \frac{0\cdot 0{,}5}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^3\cdot 0{,}000028} = 0.$$

Полученные значения $\Delta\varphi$ используем для построения эпюры углов закручивания φ (угловых перемещений).

2. Построение эпюры углов закручивания.

Неподвижным, то есть угол закручивания которого равен нулю, примем сечение в начале координат. Угол закручивания заданного сечения определяем суммированием с учетом знаков значений $\Delta\varphi_i$ на всех участках между заданными сечениями и началом координат.

Значения углов закручивания в расчетных сечениях равны:

$\varphi_A = 0$;

$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi_I = 0 - 0{,}00127 = -0{,}00127$ рад $= -1{,}27\cdot 10^{-3}$ рад;

$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{II} = -0{,}00127 - 0{,}0038 = -0{,}0051$ рад $= -5{,}1\cdot 10^{-3}$ рад;

$\varphi_K = \varphi_C + \Delta\varphi_{III} = -0{,}0051 + 0{,}00127 = -0{,}00383$ рад $=$
$= -3{,}83\cdot 10^{-3}$ рад;

$\varphi_L = \varphi_K + \Delta\varphi_{IV} = -0{,}00383 + 0{,}00669 = 0{,}00286$ рад $=$
$= 2{,}86\cdot 10^{-3}$ рад $= \varphi_N$.

По полученным значениям строим эпюру угловых перемещений φ (см. рис. 4.17, г).

3. Проверка бруса на жесткость.

В сечении N к брусу присоединен кронштейн длиной $h = 0{,}2$ м (рис. 4.18). На некотором расстоянии от верхней точки кронштейна $\Delta = 0{,}0025$ м, по ходу его поворота, располагается шестерня, приходящая в разрушение при соприкосновении с ним. Необходимо исключить возможность такого разрушения. Согласно заданию минимальный зазор между вершиной кронштейна и шестерней должен быть равен 0,002 м. Тогда допускаемое перемещение вершины кронштейна равно

$$[\Delta] = \Delta - 0{,}002 = 0{,}0025 - 0{,}002 = 0{,}0005\ \text{м} = 5\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

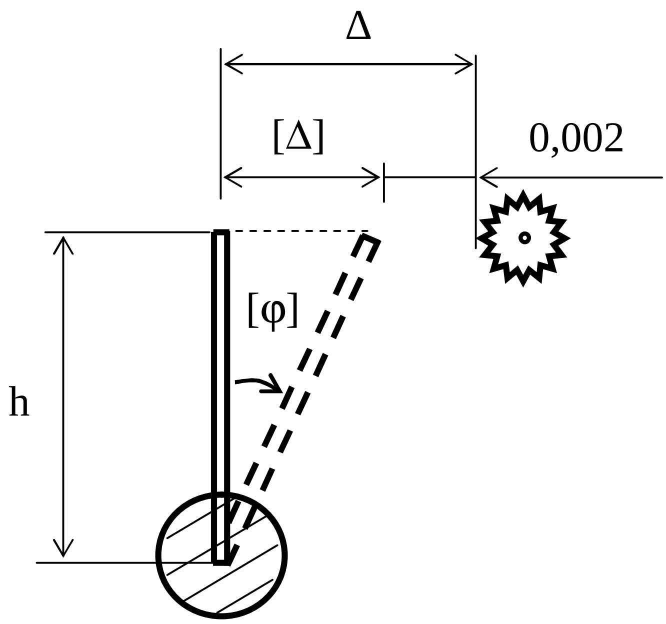


Рис. 4.18. Сечение ступенчатого бруса N
с кронштейном

Определим допускаемый угол поворота [φ] для сечения N. Он может быть найден как тангенс этого угла (при малых углах, измеряемых в радианах, тангенс равен самому углу), то есть

$$[\varphi] = \frac{[\Delta]}{h} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0{,}2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Проверим, удовлетворяется ли условие жесткости бруса и вступает ли кронштейн в соприкосновение с шестерней.

$$\varphi_N = 2{,}86 \cdot 10^{-3} \text{ рад} > [\varphi] = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Условие жесткости не выполняется, требуется подбор нового сечения.

4. Подбор сечения бруса из условия жесткости.

Добьемся выполнения условия жесткости за счет увеличения диаметра сплошного бруса D_1.

Тогда фактический угол поворота сечения N должен быть равным допускаемому углу:

$$\varphi = \varphi_K + \frac{M_{кр}^{IV}\,\ell_4}{G\,I_\rho^{IV}} = \varphi_K + \frac{M_{кр}^{IV}\,\ell_4}{G\,\frac{\pi D_1^4}{32}} = [\varphi].$$

Найдем из этого выражения диаметр D_1, обеспечивающий выполнение условия жесткости:

$$D_1 = \sqrt[4]{\frac{32\left|M_{кр}^{IV}\right|\ell_4}{G\pi([\varphi]-\varphi_к)}} = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 30\cdot 10^3\cdot 0{,}5}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 3{,}14\cdot(2{,}5\cdot 10^{-3}-3{,}83\cdot 10^{-3})}} = 0{,}1319 м.$$

Принимаем округленно D_1 = 0,132 м.

5. Произведем проверку полученного диаметра без учета соотношения между диаметрами сплошного бруса и трубы, так как подбор сечений по этому соотношению, безусловно, пойдет в запас прочности.

$$I_\rho^{IV} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14\cdot 0{,}132^4}{32} = 3\cdot 10^{-5}\ м^4;$$

$$\Delta\varphi_{IV} = \frac{M_{кр}^{IV}\,\ell_4}{G\,I_\rho^{IV}} = \frac{30\cdot 0{,}5}{0{,}8\cdot 10^5\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^{-5}} = 6{,}3\cdot 10^{-3}\ рад;$$

$$\varphi_N = \varphi_L = \varphi_K + \varphi_{IV} = (-0{,}00383) + 0{,}0063 =$$

$$= 0{,}00247\ рад < [\varphi] = 0{,}0025\ рад.$$

Условие жесткости удовлетворяется.

4.5.4. Раскрытие статической неопределимости стержней при кручении

Статически неопределимые стержни, работающие на кручение, – это стержни, в достаточно большом числе случаев жестко закрепленные с обоих концов и нагруженные закручивающими моментами. Такие стержни рассчитываются так же, как и статически неопределимые брусья, работающие на растяжение-сжатие, или статически неопределимые балки и рамы с использованием метода сил. Они, как правило, один раз статически неопределимы, поэтому для раскрытия их статической неопределимости необходимо к уравнениям статики добавить одно дополнительное уравнение совместности деформаций. После раскрытия статической неопределимости эти стержни рассчитываются так же, как и статически определимые.

Пример 4.8.

Дан ступенчатый стержень, состоящий из двух брусьев сплошного круглого сечения, жестко закрепленный с обоих концов и нагруженный внешними закручивающими моментами (рис. 4.19), длины которых $\ell_1 = 1$ м, $\ell_2 = 2$ м, $\ell_3 = 1$ м, $\ell_4 = 2$ м. Стержень условно разделен внешними моментами на четыре участка. Диаметры стержня на первом и втором участках равны $D_1 = D_2 = 0{,}4$ м; третьем и четвертом – $D_3 = D_4 = 0{,}2$ м; модули сдвига материала стержня на участках – $G_1 = G_2 = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа, $G_3 = G_4 = 0{,}4 \cdot 10^5$ МПа. Раскрыть статическую неопределимость стержня.

Решение.

1. Рассмотрим опорное сечение E (рис. 4.19, а).

Сечение E жестко закреплено и в нем действует неизвестный по величине опорный момент m_E. Определение этого момента является целью задачи. Мысленно освободим это опорное сечение E от закрепления и нагрузим это сечение опорным моментом m_E, таким образом создадим основную систему в соответствии с методом сил. В результате чего опорное сечение приобретает подвижность вокруг оси Z, то есть сможет поворачиваться под воздействием крутящих моментов в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня.

Несмотря на полученную свободу вращения, опорное сечение E под воздействием всех имеющихся нагрузок и реактивного момента останется неподвижным.

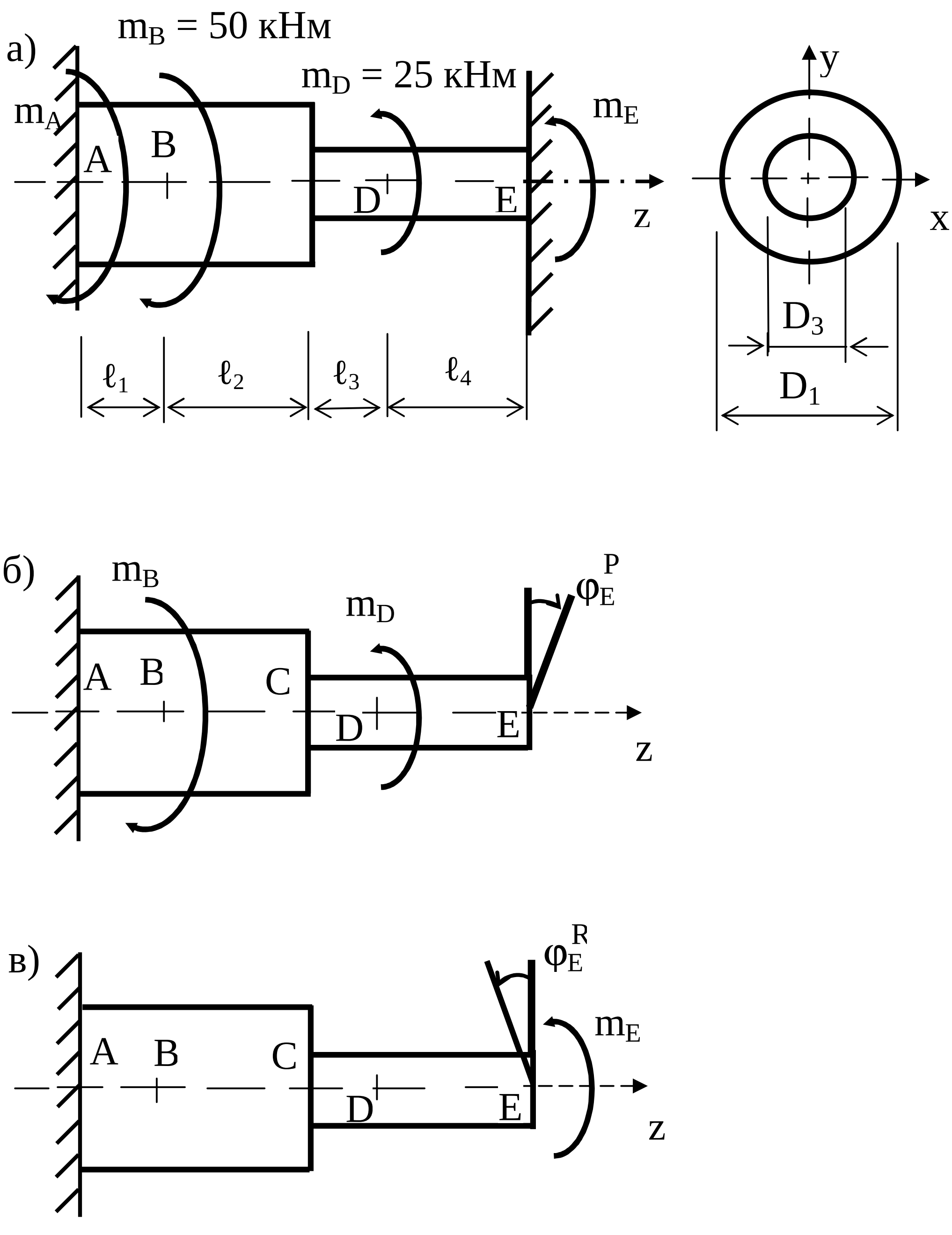


Рис. 4.19. Расчет статически неопределимого стержня:
а) расчетная схема; б) деформации основной системы при действии внешней нагрузки; в) деформации системы при действии опорного момента m_R

Сущность решения заключается в следующем. Под воздействием внешних закручивающих моментов m_B, m_D сечение E после освобождения может поворачиваться. Угол, на который оно повернется, может быть определен при помощи полученных ранее правил. Но так как освобождение сечения было произведено мысленно, то на самом деле такой поворот не осуществлялся, это значит, что опорный момент m_E вызывает поворот сечения обратного знака, равный по модулю повороту от внешних моментов. Используя равенство углов поворотов от внешних моментов и от опорного момента, можно определить неизвестный опорный момент.

2. Определение угла поворота сечения E под воздействием внешних крутящих моментов (рис. 4.19, б).

Момент m_B закручивает участок AB, участки BC, CD и DE под его воздействием не закручиваются, а только поворачиваются на угол, равный углу поворота сечения B, на такой же угол повернется и сечение E. Момент m_D закручивает участки AB, BC, CD, участок DE не закручивается, а только поворачивается на угол, на который повернется сечение D. На такой же угол повернется сечение E. Общий угол поворота сечения E складывается из угла закручивания сечения B от момента m_B и угла закручивания сечения D от момента m_D. При этом необходимо учитывать направление действия моментов. Момент m_B действует по часовой стрелке, а момент m_D – против часовой стрелки, поэтому они будут поворачивать сечение E в разные стороны, а значит, должны учитываться с разными знаками.

Определим угол поворота сечения E от закручивающих моментов (внешней нагрузки). Предварительно определим полярные моменты инерции:

$$I_\rho^{I} = I_\rho^{II} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}4^4}{32} = 0{,}00251 м^4;$$

$$I_\rho^{III} = I_\rho^{IV} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2^4}{32} = 0{,}00016 м^4;$$

$$\varphi_E^P = \frac{m_B \ell_1}{G_I I_\rho^I} + m_D \left(\frac{\ell_1}{G_I I_\rho^I} + \frac{\ell_2}{G_{II} I_\rho^{II}} + \frac{\ell_3}{G_{III} I_\rho^{III}} \right) =$$

$$= \frac{-50 \cdot 1}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00251} + 25 \cdot \left[\frac{1}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00251} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{0{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00251} + \frac{1}{0{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00016} \right] = 0{,}00428 \text{ рад}.$$

3. Определение угла закручивания сечения E от опорного момента m_E.

Опорный (реактивный) момент m_E закручивает все участки стержня, так как расположен на самом его конце. Выражение для угла поворота сечения E будет выглядеть

$$\varphi_E^R = \frac{m_E \ell_1}{G_I I_\rho^I} + \frac{m_E \ell_2}{G_{II} I_\rho^{II}} + \frac{m_E \ell_3}{G_{III} I_\rho^{III}} + \frac{m_E \ell_4}{G_{IV} I_\rho^{IV}} =$$

$$= m_E \left(\frac{\ell_1}{G_I I_\rho^I} + \frac{\ell_2}{G_{II} I_\rho^{II}} + \frac{\ell_3}{G_{III} I_\rho^{III}} + \frac{\ell_4}{G_{IV} I_\rho^{IV}} \right) =$$

$$= m_E \left(\frac{1}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00251} + \frac{2}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00251} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00016} + \frac{2}{0{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}00016} \right) = 0{,}000484 \cdot m_E.$$

4. Определение опорного момента m_E.

Углы закручивания сечения E от внешних моментов и от опорного момента равны между собой:

$$\varphi_E^P = \varphi_E^R,$$

тогда

$$0{,}00428 = m_E \cdot 0{,}000484 \ ,$$

откуда

$$m_E = \frac{0{,}00428}{0{,}000484} = 8{,}86 \text{ кНм}.$$

5. После нахождения опорного момента расчет стержня продолжается по схеме, рассмотренной для статически определимого стержня.

4.6. Расчет винтовых цилиндрических пружин

Винтовые цилиндрические пружины являются одним из важных элементов машин и механизмов; они работают на растяжение и сжатие, сглаживая воздействия динамических нагрузок на основную конструкцию. Пружины характеризуются внешним диаметром D, диаметром витка d и числом витков n.

В сечениях пружины при ее продольном деформировании действуют внутренние усилия: поперечная сила Q и крутящий момент $M_{кр}$ (рис. 4.20). Поперечная сила численно равна растягивающей силе P; крутящий момент равен силе P, умноженной на плечо, которым является половина диаметра пружины D/2.

$$Q = P;$$
$$M_{кр} = P\frac{D}{2}. \qquad (4.24)$$

От поперечной силы возникают касательные напряжения τ_Q, равномерно распределенные по сечению. От крутящего момента возникают касательные напряжения $\tau_{мкр}$, распределенные по сечению неравномерно: наибольшие напряжения на внешнем контуре сечения, наименьшие, равные нулю, – в его середине. Эти напряжения могут быть определены:

$$\tau_Q = \frac{Q}{F_{витк}};$$
$$\tau_{M_{кр}} = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\rho, \qquad (4.25)$$

где $F_{витк}$ – площадь сечения витка; I_ρ – полярный момент инерции сечения витка относительно его собственных осей; ρ – полярный радиус расчетной точки сечения витка.

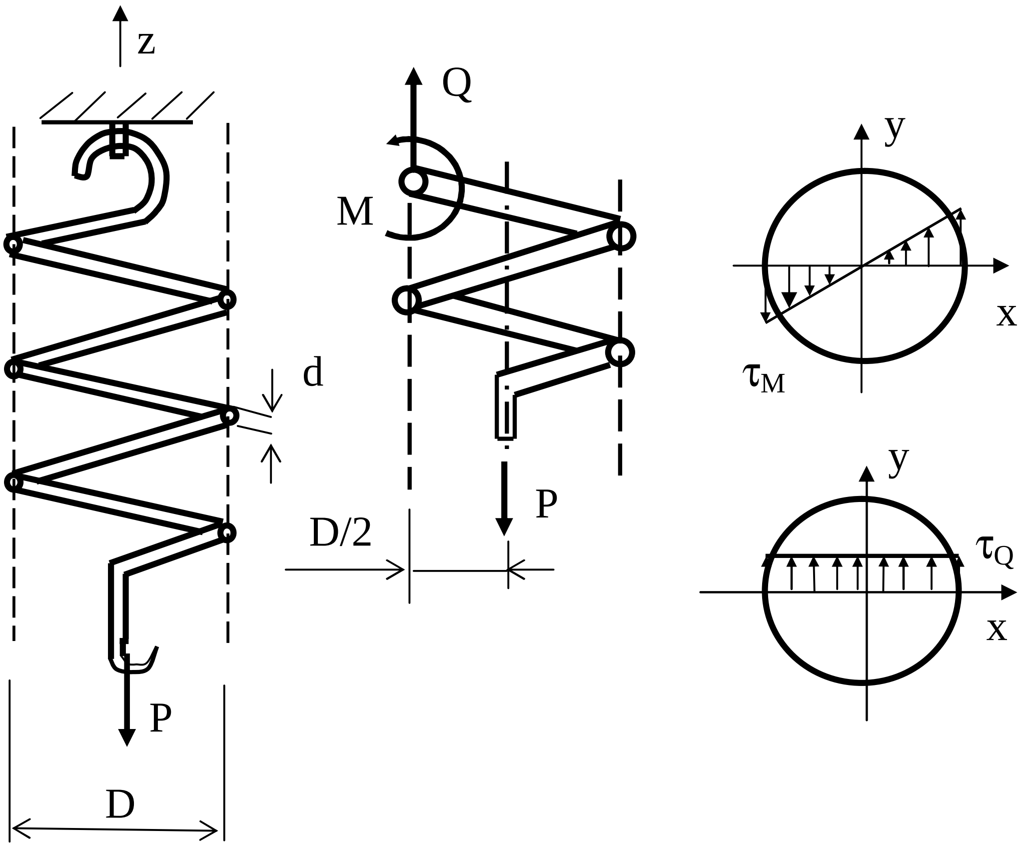


Рис. 4.20. Схема нагружения, внутренние усилия и эпюры напряжений в винтовой цилиндрической пружине

Максимальные касательные напряжения от поперечной силы равны

$$\tau_Q^{max} = \tau_Q = \frac{Q}{F_{витк}} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{4P}{\pi d^2}. \qquad (4.26)$$

Максимальные касательные напряжения от крутящего момента возникают на контуре сечения витка и определяются

$$\tau_{M_{кр}}^{max} = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\rho_{max} = \frac{M_{кр}}{I_\rho}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3/16} = \frac{PD/2}{\pi d^3/16} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (4.27)$$

Общие максимальные напряжения от поперечной силы и от крутящего момента будут равны

$$\tau = \tau_Q^{max} + \tau_{M_{кр}}^{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (4.28)$$

Ввиду малости отношения диаметров d/2D по сравнению с единицей этим отношением обычно пренебрегают, и тогда формула для определения касательных напряжений будет выглядеть

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (4.29)$$

В условие прочности для пружины при продольном деформировании (растяжении-сжатии) вводится поправочный коэффициент k, учитывающий кривизну витка. Коэффициент k – табличная величина (табл.4.1), зависящая от индекса пружины C_n = D/d.

Таблица 4.1

Значение коэффициента k в зависимости от индекса пружины

C_n	4	5	6	7	8	9	10
k	1,42	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Условие прочности в этом случае выглядит

$$\tau = k\frac{8PD}{\pi d^3} \le [\tau]. \quad (4.30)$$

Изменение высоты пружины (при сжатии пружины – осадка) под действием нагрузки определяется по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{8PD^3}{Gd^4} n , \qquad (4.31)$$

где G – модуль сдвига; n – число витков пружины.

Откуда может быть определено число витков пружины при заданном изменении ее высоты:

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8PD^3} . \qquad (4.32)$$

Пример 4.9.

Дана винтовая цилиндрическая пружина (рис. 4.20), прикрепленная верхним концом к балке; соотношение между диаметром пружины D и диаметром витка пружины d (индекс пружины) равно C_n = D/d = 8; материал пружины – сталь с характеристиками: $[\tau]$ = 800 МПа, G = $0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. На пружину действует растягивающая сила P = 6 кН. Зависимость деформации пружины λ от нагрузки линейная, деформация пружины при нагрузке P = 6 кН должна быть равной 0,015 м. Определить из условия прочности диаметр витка пружины d, диаметр пружины D и из условия жесткости – число ее витков n.

Решение.

1. Подбор диаметров из условия прочности.

При помощи индекса пружины C_n = D/d = 8 определяем коэффициент k из табл. 4.1, он будет равен 1,18. В этом случае диаметр пружины, выраженный через индекс пружины и диаметр витка, будет выглядеть как D = C_n d.

Условие прочности пружины преобразуется к виду

$$\tau = k \frac{8P\ C_n}{\pi d^2} \le [\tau].$$

Откуда диаметр витка будет

$$d \geq \sqrt{k\frac{8PC_n}{\pi[\tau]}} = \sqrt{1{,}18 \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 8}{3{,}14 \cdot 800 \cdot 10^3}} = 0{,}013\,м.$$

Тогда диаметр пружины будет равен

$$D = C_n\, d = 8 \cdot 0{,}013 = 0{,}104 \text{ м}.$$

2. Определение числа витков пружины по требуемому изменению высоты.

По заданию при нагрузке P = 6 кН изменение высоты пружины λ должно быть равным 0,01 м. Тогда число витков, необходимое для достижения заданного изменения ее высоты, будет

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8PD^3} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}8 \cdot 10^8 \cdot 0{,}013^4}{8 \cdot 6 \cdot 0{,}104^3} = 6{,}09 \text{ витка}.$$

5. Геометрические характеристики сечений

5.1. Статические моменты и центр тяжести сечения

Эксперименты показывают, что поведение стержня под нагрузкой существенно зависит от формы и размеров его поперечного сечения. Учет этих обстоятельств производится путем выбора системы координат в центре тяжести поперечного сечения и использования главных осей этого сечения (рис. 5.1).

С этими локальными осями поперечного сечения связан ряд особых характеристик, называемых геометрическими. Наиболее простая из них – площадь поперечного сечения F – используется в расчетах при растяжении и сжатии. При выполнении расчетов при изгибе и кручении возникает необходимость в более сложных геометрических характеристиках.

Для решения большинства задач сопротивления материалов инженеру необходимо уметь определять положение центра тяжести поперечного сечения, главных осей x и y и главных моментов инерции J_x и J_y. Положение центра тяжести находится с помощью статических моментов сечения S_x и S_y.

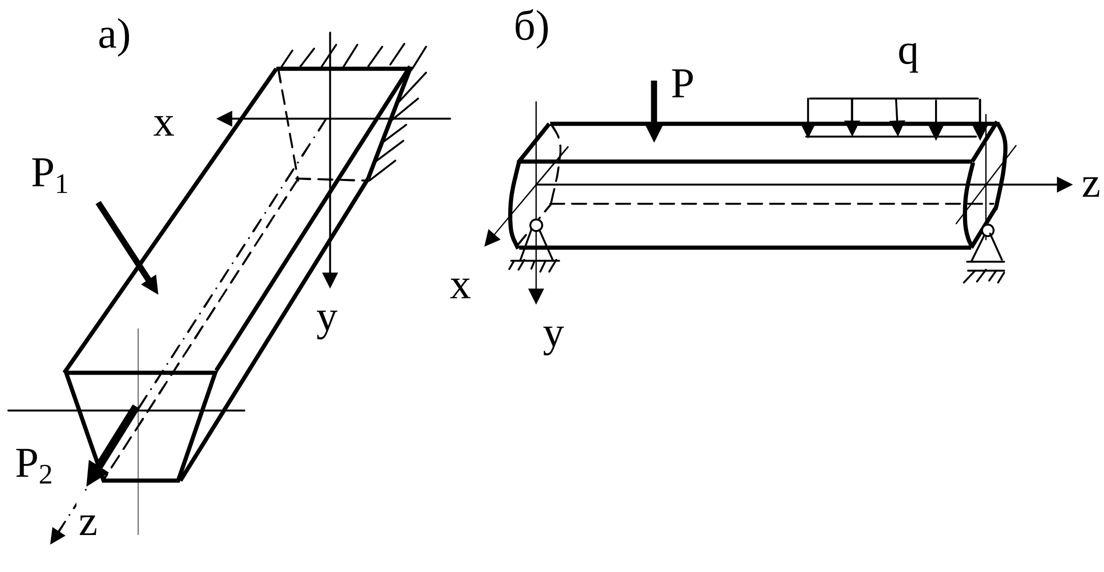


Рис. 5.1. Схемы загружения стержней
и главные оси поперечных сечений стержней x и y

Статическими моментами сечения относительно некоторых осей x и y (рис. 5.2) называют взятые по всей площади F суммы произведений элементарных площадок dF на их расстояния до этих осей, т.е.

$$S_x = \int\limits_{(F)} y\,dF; \quad S_y = \int\limits_{(F)} x\,dF, \tag{5.1}$$

где x, y - текущие координаты элемента площади сечения dF.

Статические моменты фигуры могут быть найдены по формулам (см. рис. 5.2, а)

$$S_x = F\,y_C; \quad S_y = F\,x_C, \tag{5.2}$$

где F – площадь фигуры; x_C, y_C – координаты центра тяжести (C) фигуры.

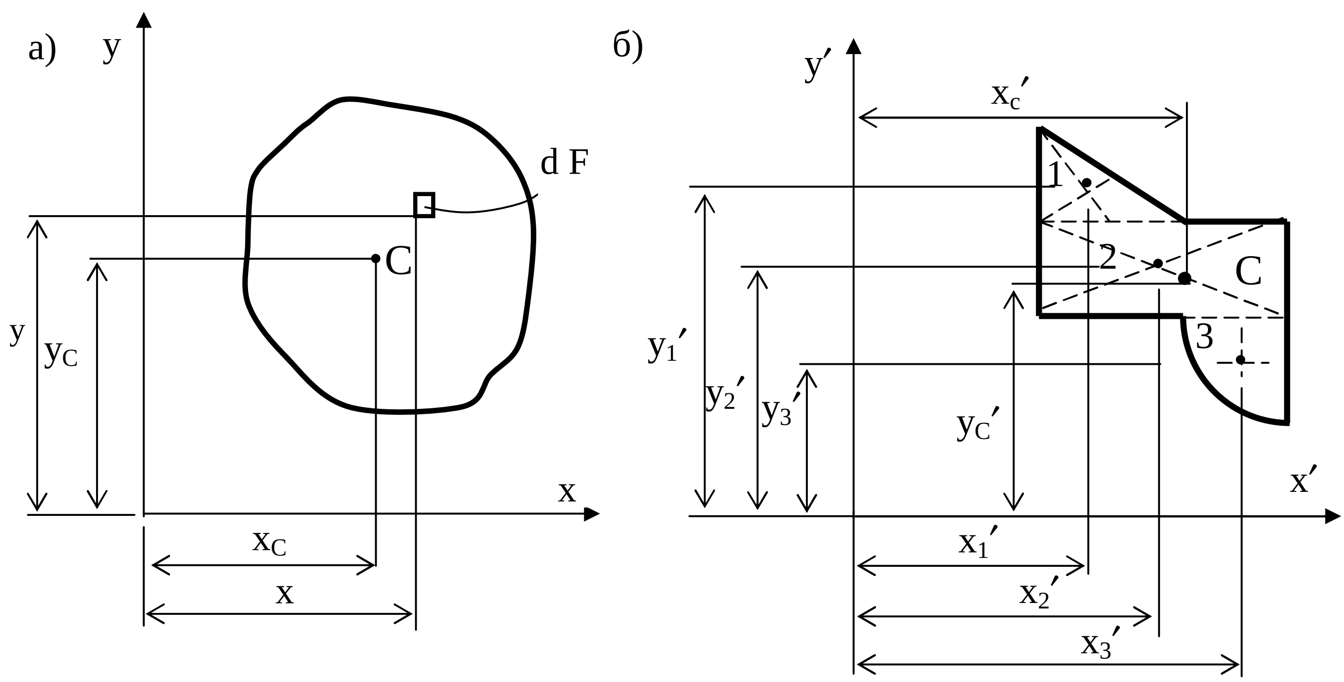


Рис. 5.2. Общий вид заданного сечения

С другой стороны, статические моменты, как и все геометрические характеристики сечения, обладают свойством аддитивности, то есть их можно находить как сумму статических моментов отдельных частей сечения в виде геометрически простых фигур. Этим свойством широко пользуются на практике, заменяя интегрирование простым суммированием и вычисляя статические моменты по формулам (рис. 5.2, б)

$$S_x = \sum S_{xi} = \sum F_i\, y_i\,; \;\; S_y = \sum S_{yi} = \sum F_i\, x_i\,, \qquad (5.3)$$

где F_i – площади простых элементов (фигур) сечения; x_i, y_i – координаты центров тяжести отдельных простых элементов.

В этом случае нахождение центра тяжести сложного сечения выполняется в следующем порядке:

1.сложное сечение разбивается на простые элементы;

2. выбираются произвольные вспомогательные оси x' и y';

3.определяются площади F_i простых элементов сечения и координаты их центров тяжести x_i' и y_i' относительно вспомогательных осей;

4. определяются координаты центра тяжести всего сечения относительно вспомогательных осей по формулам

$$x_C' = \frac{S_y'}{F} = \frac{\sum F_i\, x_i'}{\sum F_i}; \quad y_C' = \frac{S_x'}{F} = \frac{\sum F_i\, y_i'}{\sum F_i}. \qquad (5.4)$$

Простыми элементами считаются такие, для которых определение площади и положения центров тяжести можно выполнить по справочным данным. Сведения такого рода можно найти в специализированных справочниках по расчету конструкций. В дальнейшем оси x и y, проходящие через центр тяжести сечения, будем называть центральными.

5.2. Моменты инерции плоских сечений. Главные моменты инерции и главные оси

Исключительно важную роль в механике стержневых конструкций играют моменты инерции поперечных сечений стержней. Они бывают трех типов: осевые J_x, J_y, центробежные J_{xy} и полярные J_ρ, и определяются в общем случае по формулам (см. рис. 5.2, а)

$$J_x = \int_{(F)} y^2\, dF;\; J_y = \int_{(F)} x^2\, dF;\; J_{xy} = \int_{(F)} x\, y\, dF;$$

$$J_\rho = \int_{(F)} \rho^2\, dF = \int_{(F)} (x^2 + y^2)\, dF = J_x + J_y. \qquad (5.5)$$

Моменты инерции при переносе осей меняются. Так при параллельном переносе центральных осей x и y сечения в точку с координатами x_1 и y_1 (рис. 5.3, а) выполняются зависимости

$$J_{x1} = J_x + F\, y_1^2; \quad J_{y1} = J_y + F\, x_1^2; \quad J_{x1,y1} = J_{xy} + F\, x_1\, y_1. \qquad (5.6)$$

При повороте осей на угол α (рис. 5.3, б) моменты инерции относительно новых осей будут равны

$$J_{x1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$
$$J_{y1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \qquad (5.7)$$
$$J_{x1,y1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

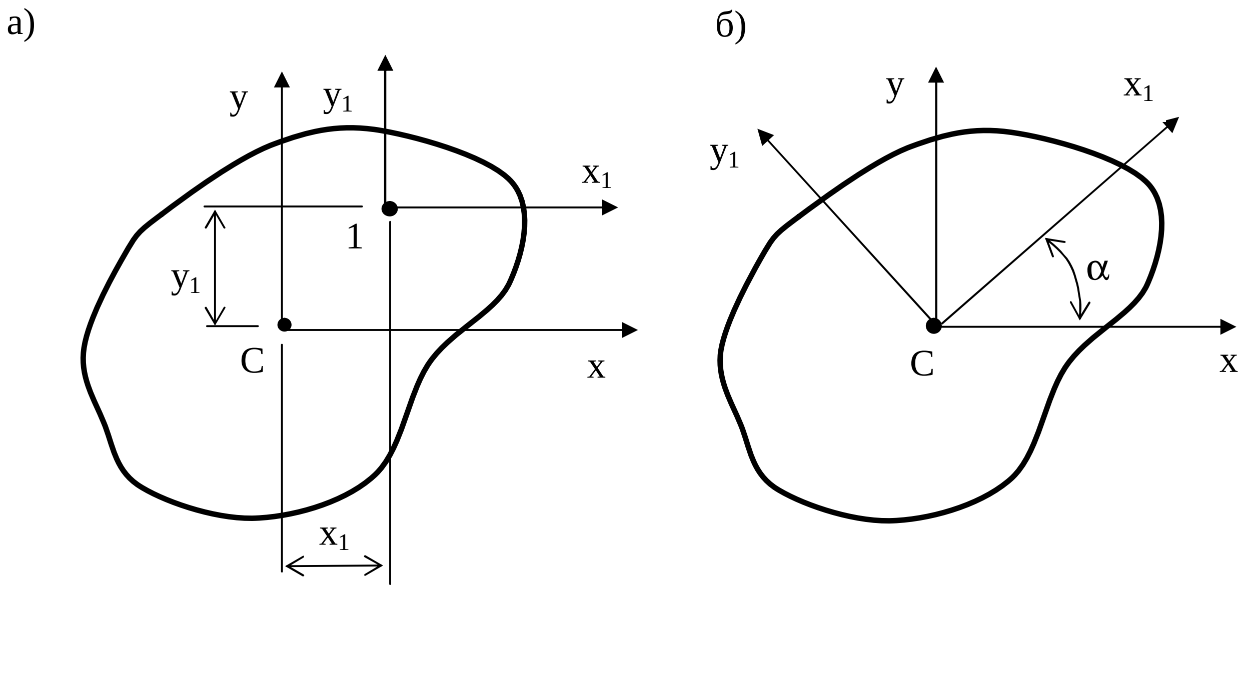


Рис. 5.3. Схемы к определению моментов инерции
при параллельном переносе (а) и повороте (б) осей

Заменяя интегрирование простым суммированием и используя свойство аддитивности, с помощью зависимостей (5.6) и (5.7) можно определять моменты инерции сложных сечений:

$$J_x = \sum J_{xi} + \sum F_i\, y_i^2\,;\; J_y = \sum J_{yi} + \sum F_i\, x_i^2\,;\; J_{xy} = \sum J_{xi,yi} + \sum F_i\, x_i\, y_i\,, \quad (5.8)$$

где J_{xi}, J_{yi}, $J_{xi,yi}$ - моменты инерции простых элементов сечений относительно их собственных центральных осей; x_i, y_i – координаты центров тяжести простых элементов относительно центральных осей всего сечения.

Ранее говорилось, что при повороте осей на угол α (рис. 5.3, б) новые значения моментов инерции определяются по формулам (5.7). Легко видеть, что величины моментов инерции J_{x1} и J_{y1} относительно повернутых осей являются периодическими функциями от угла поворота α и поэтому будут иметь экстремальные значения при некоторых значениях α_0 и α_0'. Оси, определяемые этими углами, в теории геометрических характеристик называют главными. Осевые моменты инерции относительно главных осей называют главными – J_{max} и J_{min}. Центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю. Значение угла α_0, определяющего положение главных осей инерции, можно найти из уравнения

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}, \quad (5.9)$$

а угол $\alpha_0' = \alpha_0 + 90^0$ в соответствии с условием взаимной перпендикулярности главных осей. Величины главных моментов инерции можно определить подстановкой найденных значений α_0 и α_0' в две первые формулы (5.7) или по формуле

$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}\,. \quad (5.10)$$

Если используется формула (5.10), то угол α_0 определяет положение оси max (u), если $J_x > J_y$. В случаях, когда размеры сечения вдоль осей max (u) и min (v) существенно отличаются, может помочь свойство вытянутости сечения вдоль оси min. В самом общем случае положение главных осей можно найти из условия экстремальности $J_x(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$. Если выполняется условие (5.11), то угол α_0 задает положение оси max (u):

$$\frac{d^2 J_{x1}(\alpha)}{d\alpha^2} < 0. \quad (5.11)$$

В качестве итога этих рассуждений приведем план определения положения главных центральных осей и главных моментов инерции.

1) По справочным данным найти моменты инерции простых элементов J_{xi}, J_{yi}, $J_{xi,yi}$ (см. п. 5.1) относительно их собственных центральных осей x_i и y_i, параллельных некоторым заранее выбранным центральным осям x и y всего сечения.

2) По формулам (5.8) определить моменты инерции J_x, J_y, J_{xy} всего сечения относительно его центральных осей x и y.

3) С помощью уравнения (5.9) вычислить значения углов α_0 и α_0', определяющих положение главных центральных осей max (u) и min (v) сечения.

4) Вычислить величины главных моментов инерции $J_{max(u)}$ и $J_{min(v)}$ по формулам (5.7) или по формуле (5.10).

5) Установить соответствие найденных значений $J_{max(u)}$ и $J_{min(v)}$ главным осям.

Пример 5.1.

Требуется определить положение центра тяжести, главных центральных осей u, v и величины главных моментов инерции $J_{max(u)}$, $J_{min(v)}$ сечения, приведенного на рис. 5.4.

5.1.1. Определение геометрических характеристик простых элементов.

Треугольный элемент «1»

$$F_1 = \frac{bh}{2} = \frac{10 \cdot 17{,}32}{2} = 86{,}6 \ \text{см}^2, \ x_1' = \frac{10}{3} = 3{,}33 \ \text{см}^2, \ y_1' = \frac{17{,}32}{3} = 5{,}77 \ \text{см},$$

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{36} = \frac{10 \cdot 17{,}32^3}{36} = 1443 \ \text{см}^4, \ J_{y1} = \frac{b^3h}{36} = \frac{10^3 \cdot 17{,}32}{36} = 481 \ \text{см}^4,$$

$$J_{x1,y1} = -\frac{b^2h^2}{72} = -\frac{10^2 \cdot 17{,}32^2}{72} = -417 \ \text{см}^4.$$

Швеллер № 20 (по ГОСТ 8240-89)

$$F_2 = F_ш = 23{,}4 \ \text{см}^2, \ J_{xш} = 1520 \ \text{см}^4, \ J_{yш} = 113 \ \text{см}^4, \ J_{xш,yш} = 0.$$

Так как оси x_2 и y_2 швеллера повернуты относительно осей $x_ш$ и $y_ш$ на угол α_2 = arctg(–10/17,32) = arctg(–0,577) = –30^o, то значения моментов инерции швеллера относительно осей x_2 и y_2 найдем по формулам (5.7), учитывая что $J_{xш,yш}$ = 0.

$$x_2' = \frac{10}{2} + z_0 \cos|\alpha_2| = 5{,}0 + 2{,}07 \cdot \cos 30^o = 6{,}8 \text{ см},$$

$$y_2' = \frac{17{,}32}{2} + z_0 \sin|\alpha_2| = 8{,}66 + 2{,}07 \cdot \sin 30^o = 9{,}7 \text{ см}.$$

$$J_{x2} = J_{xш} \cos^2(-30^o) + J_{yш} \sin^2(-30^o) = 1520 \cdot 0{,}75 + 113 \cdot 0{,}25 = 1168 \text{ см}^4,$$

$$J_{y2} = J_{xш} \sin^2(-30^o) + J_{yш} \cos^2(-30^o) = 1520 \cdot 0{,}25 + 113 \cdot 0{,}75 = 465 \text{ см}^4,$$

$$J_{x2,y2} = \frac{J_{xш} - J_{yш}}{2} \sin 2(-30^o) = \frac{1520 - 113}{2} \sin(-60^o) = 703 \cdot (-0{,}865) =$$

$$= -608 \text{ см}^4.$$

5.1.2. Определение положения центра тяжести всего сечения относительно вспомогательных осей $x^/$ и $y^/$ по формуле (5.4).

$$x_C' = \frac{\sum F_i x_i'}{\sum F_i} = \frac{86{,}6 \cdot 3{,}33 + 23{,}4 \cdot 6{,}8}{86{,}6 + 23{,}4} = \frac{447}{110} = 4{,}1 \text{ см};$$

$$y_C' = \frac{\sum F_i y_i'}{\sum F_i} = \frac{86{,}6 \cdot 5{,}77 + 23{,}4 \cdot 9{,}7}{110} = \frac{726}{110} = 6{,}6 \text{ см}.$$

5.1.3. Определение моментов инерции сечения относительно центральных осей всего сечения x и y (рис. 5.1). Используем зависимости (5.8), где x_1 = – (4,1 – 3,3) = – 0,8 см; x_2 = 6,8 – 4,1 = 2,7 см; y_1 = – (6,6 – – 5,84) = – 0,8 см; y_2 = 9,7 – 6,6 = 3,1 см.

$$J_x = \sum J_{xi} + \sum F_i y_i^2 = 1443 + 1168 + 86{,}6 \cdot 0{,}8^2 + 23{,}4 \cdot 3{,}1^2 = 2890 \text{ см}^4;$$

$$J_x = \sum J_{xi} + \sum F_i x_i^2 = 481 + 465 + 86{,}6 \cdot 0{,}8^2 + 23{,}4 \cdot 2{,}7^2 = 1172 \text{ см}^4;$$

$$J_{xy} = \sum J_{xi,yi} + \sum F_i x_i y_i = -417 - 529 + 86{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 23{,}4 \cdot 3{,}1 \cdot 2{,}7 =$$

$$= -694 \text{ см}^4.$$

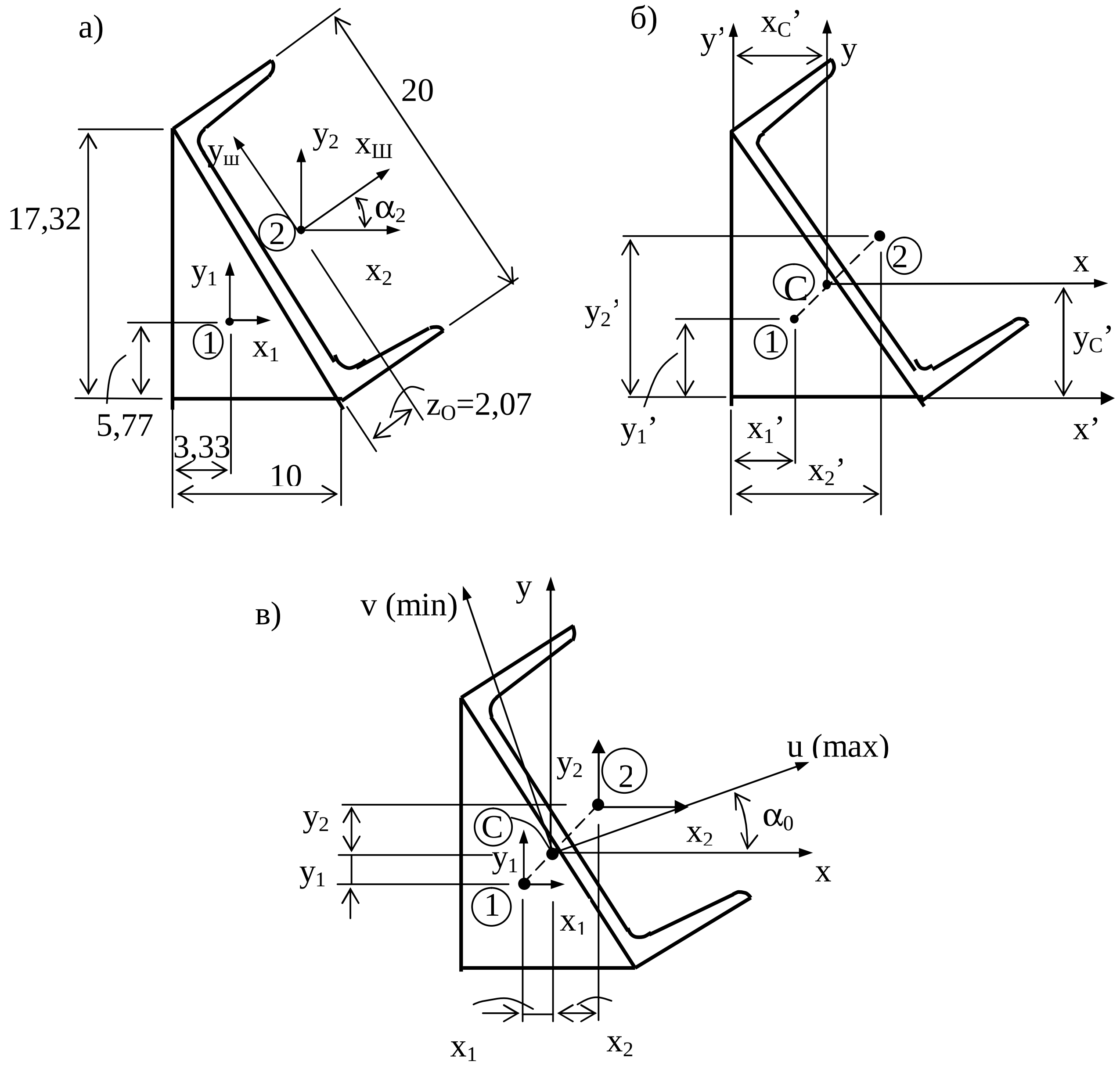


Рис. 5.4. Определение геометрических характеристик сечения:
а – размеры сечения, б – определение центра тяжести,
в – нахождение главных осей

5.1.4. Определение положения главных осей u и v.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2\cdot(-694)}{2890-1172} = 0{,}81;\ \ 2\alpha_0 = 38^o\,24';\ \alpha_0 = 19^o\,12';$$

$$\alpha_0' = 90^o + 19^o 12' = 109^o 12'.$$

Так как $J_x = 2890$ см^4 > $J_y = 1172$ см^4 , то угол α_0 определяет положение оси max (u) (см. рис. 5.4, в).

5.1.5.Определение главных моментов инерции по формуле (5.10):

$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{2890 + 1172}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2890 - 1172)^2 + 4(-694)^2} = 2031 \pm 1104 \text{ см}^4;$$

$$J_{max} = J_u = 3135 \text{ см}^4; \quad J_{min} = J_v = 927 \text{ см}^4.$$

Проверка: $J_x + J_y = J_{max} + J_{min}$; 2890 + 1172 = 3135 +927; 4062 = 4061.

6. Изгиб

6.1. Общие положения. Опоры, опорные реакции и их определение

В технике стержневые конструкции, работающие на изгиб, обычно называют балками (рис. 6.1). В этих случаях в поперечных сечениях балки возникают внутренние усилия, главными из которых обычно являются изгибающие моменты, а продольные волокна балки искривляются и испытывают продольные деформации, переменные по высоте поперечного сечения балки.

В зависимости от способов закрепления стержня и приложения нагрузки могут возникать различные виды изгиба. В случае, когда в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты, а остальные внутренние усилия равны нулю, изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях балки наряду с изгибающими моментами действуют поперечные силы, а продольные силы отсутствуют, то такой изгиб называется *поперечным.*

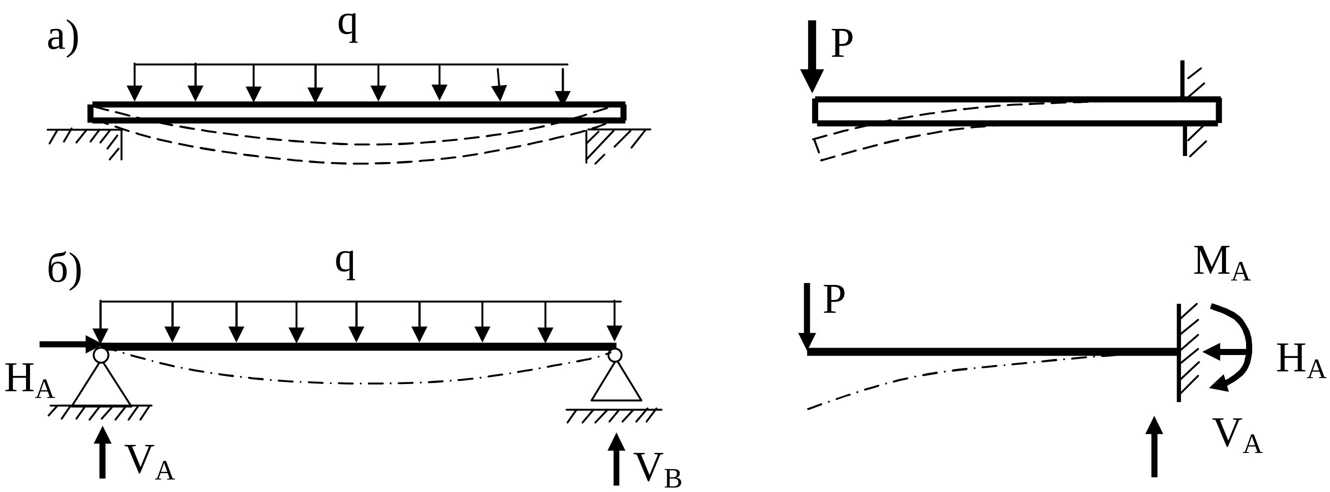


Рис. 6.1. Балочные конструкции (а) и их расчетные схемы (б)

Если нагрузка лежит в одной (силовой) плоскости и перпендикулярна продольной оси балки, то изгиб будет плоским, при котором изогнутая ось балки представляет плоскую кривую. Прямым (простым) плоским изгибом называется такой, когда силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки, то есть содержит одну из главных осей поперечного сечения. В простейшем, но чаще всего встречающемся на практике, случае эта плоскость является плоскостью симметрии балки. В этом случае поведение балки максимально упрощается, а изгиб называют прямым, плоским и поперечным.

Важную роль в работе балочных конструкций играют элементы, которые соединяют балки с другими частями конструкций: стенами, колоннами, корпусами машин и так далее.

Если балка состоит из нескольких стержней, соединенных между собой подвижно, то ее называют составной.

Все соединительные элементы играют роль внешних и внутренних связей. Они могут быть исключительно разнообразны. В теории изгиба их обычно заменяют относительно простыми идеальными связями, известными из курса теоретической механики: подвижным цилиндрическим шарниром (рис. 6.2, узлы B, Д), неподвижным цилиндрическим шарниром (рис. 6.2, узел A) и жесткой заделкой (рис. 6.1). Соединения элементов составных балок чаще всего представляют сквозным шарниром (рис. 6.2, узел C).

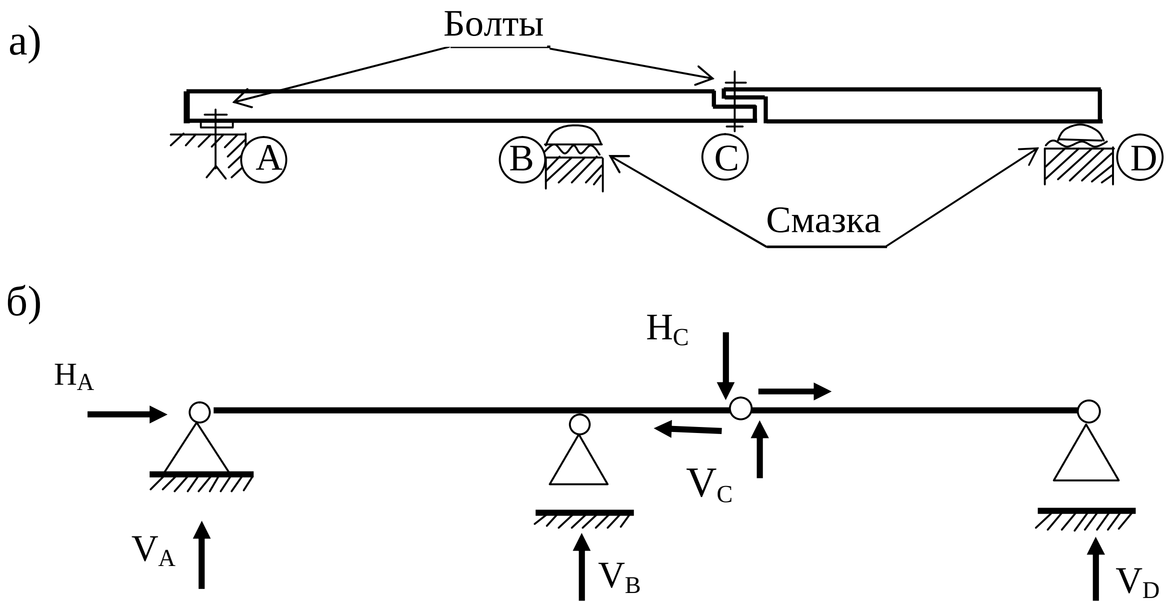


Рис. 6.2. Реальные (а) и расчетные (б) связи балки

От заданных нагрузок в балочных опорах и промежуточных шарнирах возникают реакции. Их характер и количество зависят от типа опоры или внутренней связи. Так в подвижных шарнирах (рис. 6.2, б) возникает по одной силе (V_B, V_C), в неподвижном шарнире – две силы (V_A, H_A), в заделке (рис. 6.1, б) – три реакции: две силы (V_A, H_A) и момент (M_A), в сквозном промежуточном шарнире (рис. 6.2, б) – две силы (V_C, H_C).

Нахождение опорных реакций в статически определимых балках выполняется стандартными средствами теоретической механики. Так, например, для каждого элемента балочной конструкции надо составить три уравнения равновесия:

$$\sum z = 0; \qquad \sum y = 0; \qquad \sum m = 0. \tag{6.1}$$

В общем случае получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка N = 3m, где m – число простых балочных элементов. Так у балок на рис. 6.1 m =1, а в составной балке на рис. 6.2 m = 2.

6.2. Изгибающий момент и поперечная сила. Правила знаков

При прямом поперечном изгибе в поперечном сечении балки в общем случае возникают два внутренних усилия – поперечная сила Q и изгибающий момент M (рис. 6.3).

Внутренние усилия являются статическими эквивалентами нормальных σ и касательных τ напряжений, действующих в поперечном сечении. С другой стороны, они уравновешивают отсеченные части нагрузки, расположенные слева или справа от сечения. Это позволяет в соответствии с правилами метода сечений определять внутренние усилия из условия равновесия любой отсеченной части балки. В конечном итоге процедура определения Q и M сводится к записи выражений

$$Q = \sum_{\substack{\text{лев}\\(\text{прав})}} P_{iy}; \qquad M = \sum_{\substack{\text{лев}\\(\text{прав})}} m_{x_c}(P_i). \tag{6.2}$$

Смысл процедур (6.2) можно выразить двумя правилами:

1. поперечная сила Q(z) в заданном сечении z равна сумме проекций на ось y нагрузок P_i лежащих с одной стороны (слева или справа) от сечения;

2. изгибающий момент M(z) в заданном сечении равен сумме моментов нагрузок P_i, лежащих с одной стороны от сечения относительно центральной оси x_c этого сечения.

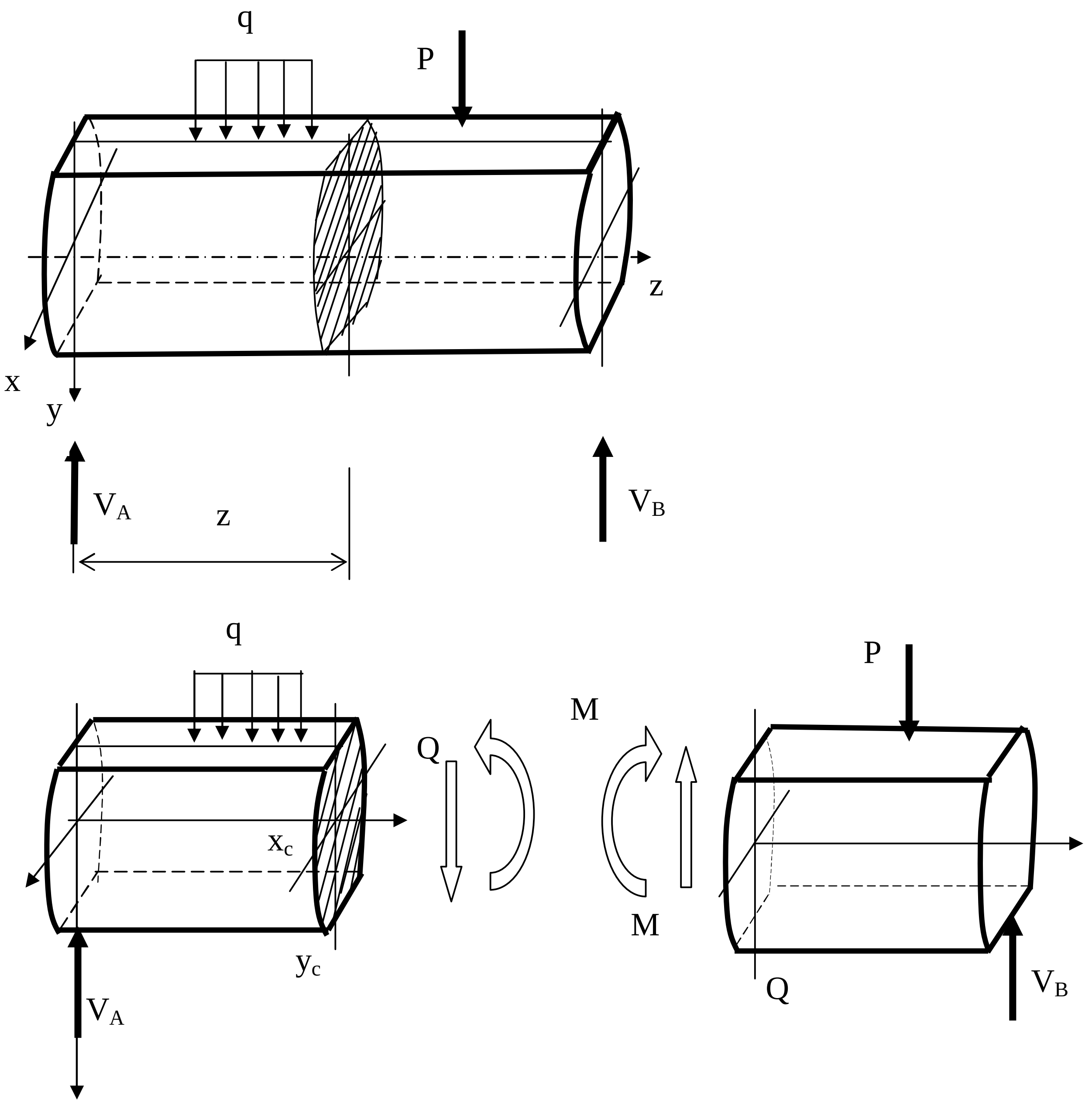


Рис. 6.3. Внутренние усилия в поперечных сечениях балки

При составлении выражений (6.2) обычно применяют правила знаков суммирования, соответствующие тому, что показанные на рис. 6.3 поперечная сила и изгибающий момент положительны. Поперечная сила положительна, если она сопротивляется сдвигу левой части балки вверх, а правой – вниз. Изгибающий момент положителен, если он соответствует растяжению нижних волокон, при котором ось балки выгибается выпуклостью вниз (рис. 6.4).

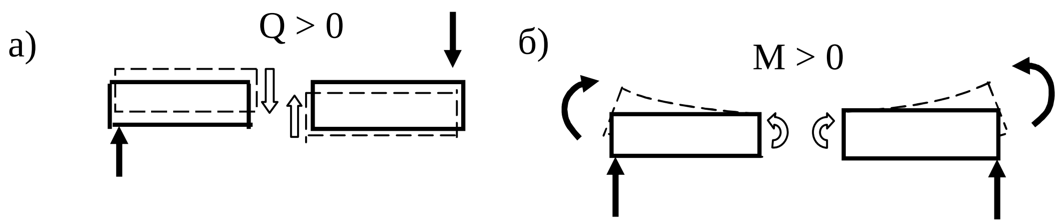


Рис. 6.4. Правила знаков для Q (а) и M (б)

6.3. Дифференциальные зависимости между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом

Исследуя условия равновесия дифференциально малого участка балки, получают уравнения равновесия в дифференциальной форме

$$\frac{dQ}{dz}=-q; \qquad \frac{dM}{dz}=Q; \qquad \frac{d^2M}{dz^2}=-q. \qquad (6.3)$$

Использование зависимостей (6.3) весьма разнообразно. На данном этапе они позволяют сформулировать ряд правил, упрощающих нахождение законов изменения внутренних усилий Q и M. Наиболее просты и распространены следующие случаи.

1. Если на участке балки отсутствует распределенная нагрузка (q = 0), то на этом участке Q = const, а M меняется линейно. Если поперечная сила положительна (Q > 0),то значения M возрастают.

2. Если на участке действует равномерно распределенная нагрузка (q = const), то Q меняется линейно, а M – по закону квадратной параболы. В том сечении участка, где Q = 0, изгибающий момент имеет экстремум. При q > 0 (нагрузка направлена вниз) это будет максимум ($M = M_{max}$).

1. В сечении, где приложена сосредоточенная сила P > 0 (направленная вниз), Q меняется скачкообразно, т.е. $Q_{пр}= Q_{лев} – P$, где $Q_{лев}$ и $Q_{прав}$ – соответственно Q слева и справа от силы P. Изгибающий момент слева и справа от силы P меняется с разными градиентами, т.е. на эпюре M в этом сечении будет излом.

2. В сечении, где приложена пара сил с моментом M > 0 (вращает по часовой стрелке), изгибающий момент меняется скачкообразно, то есть $M_{прав}= M_{лев}+ M$, где $M_{лев}$ и $M_{прав}$ – изгибающие моменты слева и справа от сечения, а на эпюре M будет скачок. В этом сечении на эпюре Q изменений нет, то есть $Q_{лев}= Q_{прав}$.

6.4. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Результаты определения внутренних усилий обычно представляют в графической форме в виде графиков – эпюр. Эпюры Q и M могут быть построены двумя способами, которые дополняют друг друга.

Наиболее общим является способ, основанный на использовании аналитических зависимостей усилий от координаты сечения балки – Q(z) и M(z). Так как нагрузка q по длине стержня обычно меняется, то функции Q(z) и M(z) будут кусочно-аналитическими. В этом случае для построения эпюр необходимо выполнить ряд процедур:

1) разбить балку по длине на участки, на которых Q(z) и M(z) будут иметь аналитический (гладкий) вид;

2) используя формулы (6.2) и правила знаков п. 6.3, для каждого участка записывают функции Q(z) и M(z);

3) для каждого участка находят некоторое количество численных значений Q и M, необходимое для построения их эпюр;

4) найденные значения Q и M откладывают в выбранных заранее масштабах как ординаты эпюр Q и M в соответствующих сечениях;

5) концы ординат соединяют линиями, форма которых зависит от вида аналитических зависимостей Q(z) и M(z);

6) построение эпюр Q и M обычно завершается их проверкой на основе правил контроля, рассмотренных ранее в п. 6.3.

В сопротивлении материалов ординаты эпюр Q откладывают со стороны сжатых волокон, то есть для горизонтальной балки $Q>0$ откладываются сверху (рис. 6.5). В то же время в разных источниках положительные значения M откладывают и сверху, и снизу от нулевой линии эпюры. В дальнейшем в этом пособии положительные значения M будем откладывать снизу от нулевой линии. Это соответствует еще одному правилу – эпюра M строится «на растянутом волокне».

Второй способ построения эпюр Q и M состоит в том, что уравнения Q(z) и M(z) в общем виде для участков не записываются. Численные значения внутренних усилий Q и M находятся только в некоторых сечениях, называемых обычно характерными. Характерными будут такие сечения, в которых на эпюрах имеются особенности: скачки, изломы, смена вида функций Q и M, их экстремумы и так далее. Легко видеть, что этим требованиям удовлетворяют следующие типы сечений балки:

1) начало и конец любого диска балки;
2) сечения, где начинаются и обрываются распределенные нагрузки;
3) сечения, где приложены сосредоточенные силы и пары, в том числе и опорные сечения;
4) сечения, расположенные на участках, загруженных распределенной нагрузкой q, и имеющие экстремальные значения M_{max} или M_{min}.

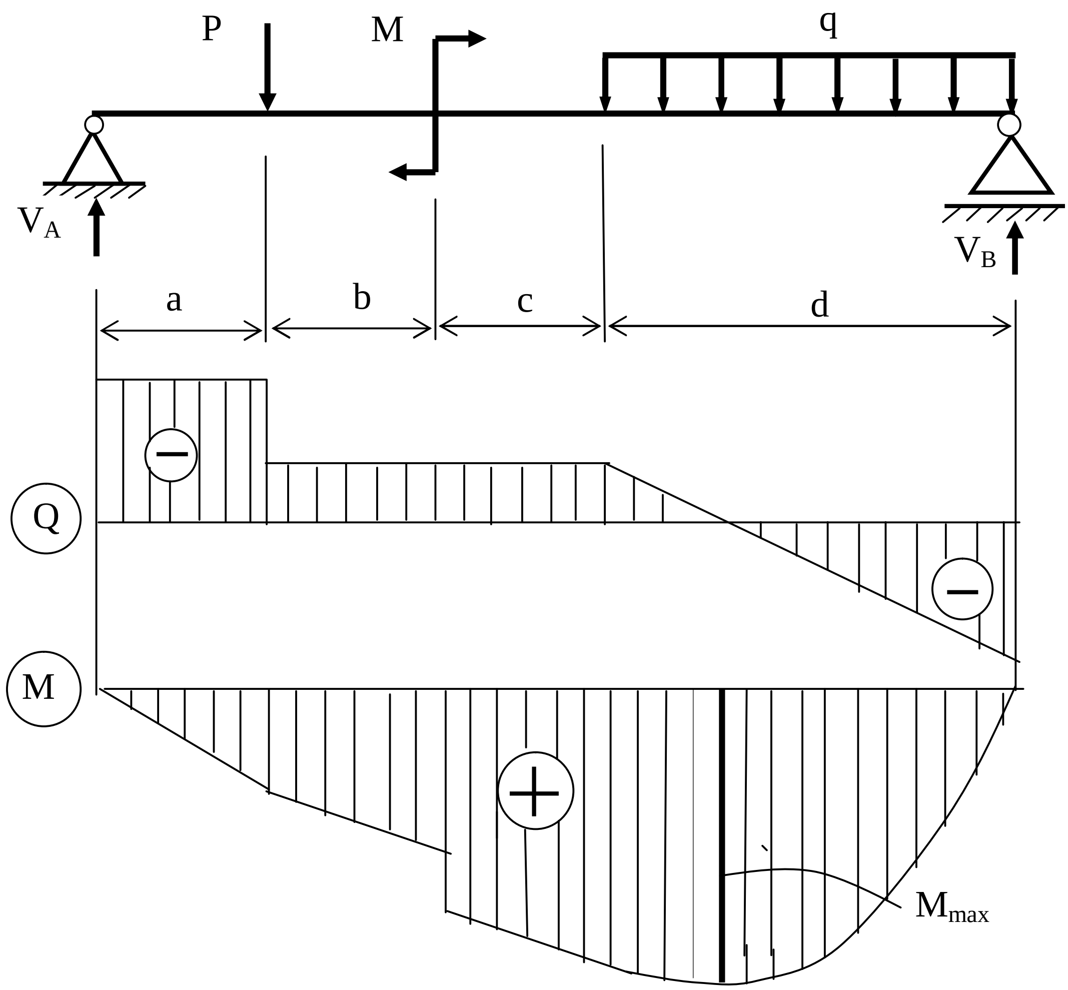


Рис. 6.5. Эпюры Q и M

Признаком сечений типа 4 является условие Q = 0 в этих сечениях. В установленных характерных сечениях значения Q и M определяют по формулам (6.2) и с помощью найденных ординат строят их эпюры. Вид эпюр в сечениях между характерными точками для каждого участка балки определяется видом действующих нагрузок и может быть определен с помощью правил контроля (см. п. 6.3).

6.5. Нормальные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность

В сопротивлении материалов важную роль играют напряжения, действующие в поперечных сечениях стержня и связанные с внутренними усилиями. При изгибе рассматриваются две системы напряжений: нормальных σ и касательных τ (рис. 6.6).

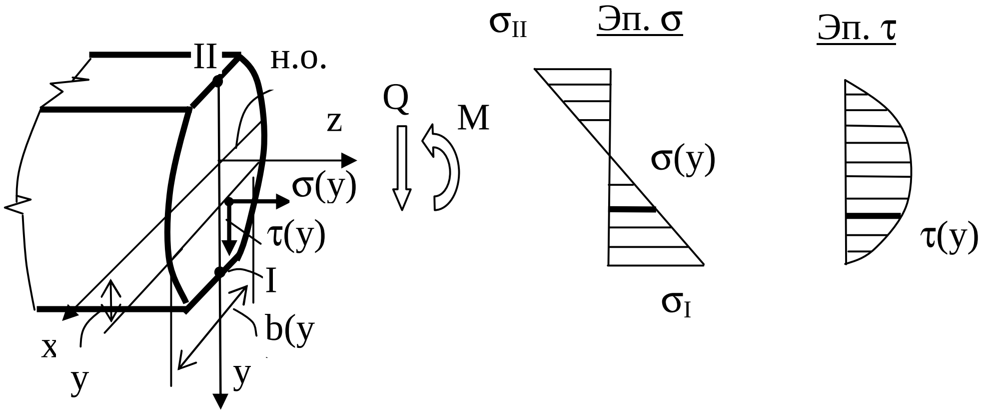


Рис. 6.6. Распределение напряжений по высоте сечения балки

Распределение напряжений обычно описывают формулами

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \qquad \tau = \frac{Q S_{отс}}{J\, b(y)}, \tag{6.4}$$

где M, Q – значения изгибающего момента и поперечной силы в расчетном сечении; J – момент инерции расчетного сечения относительно нейтральной оси (н.о. – см. рис. 6.6), которая совпадает с главной осью x_c поперечного сечения; y – координата расчетной точки сечения, м; b(y) – ширина сечения на уровне расчетной точки; $S^{отс}$ – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси.

Отсеченной площадью $F_{отс}$ (рис. 6.6) называется часть сечения, расположенная ниже расчетной точки. Определение статического момента $S_{отс}$ производится по правилам, изложенным ранее в главе 5 (см. формулы 5.4).

Условие прочности при изгибе в самом простом виде записывают через ограничения, накладываемые на величины наибольших нормальных напряжений. Наибольшие растягивающие σ_I и сжимающие σ_{II} нормальные напряжения возникают в точках I и II поперечного сечения балки, наиболее удаленных от нейтральной оси, и могут быть определены по формулам

$$\sigma_I = \sigma_{max} = \frac{M}{J_x} y_I = \frac{M}{W_x^I}; \qquad \sigma_{II} = \sigma_{min} = \frac{M}{J_x} y_{II} = -\frac{M}{W_x^{II}}, \qquad (6.5)$$

где y_I, y_{II} – координаты точек I и II относительно н.о. (рис. 6.6); W^I_x, W_x^{II} – моменты сопротивления сечения балки при изгибе относительно растянутого и сжатого волокон, которые определяются по формулам

$$W_x^I = \left|\frac{J_x}{y_I}\right|; \qquad W_x^{II} = \left|\frac{J_x}{y_{II}}\right|. \qquad (6.6)$$

$$\sigma_I = \frac{M^I}{W_x^I} \le [\sigma]_+; \qquad |\sigma_{II}| = \frac{M^{II}}{W_x^{II}} \le [\sigma]_-, \qquad (6.7)$$

Если материал балки имеет разную прочность при растяжении и сжатии, определяемую соответственно допускаемыми напряжениями $[\sigma]_+$ и $[\sigma]_-$, то условия прочности для точек I и II будут иметь вид

где M^I, M^{II} – наибольшие по модулю изгибающие моменты в опасных сечениях для растянутых и сжатых точек сечения. В общем случае эти сечения могут не совпадать.

Если материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($[\sigma]_+ = [\sigma]_- = [\sigma]$), то условия прочности (6.7) упрощаются и представляются в виде

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x} \le [\sigma], \qquad (6.8)$$

а момент сопротивления при изгибе определяется по формуле

$$W_X = \frac{J_x}{y_{max}}.$$

Подбор сечения при изгибе производится из условий

$$W_x^I \ge \frac{M_I}{[\sigma]_+}; \qquad W_x^{II} \ge \frac{M_{II}}{[\sigma]_-}. \qquad (6.9)$$

Для простых сечений из прокатных профилей подбор сечений выполняется по сортаментам прокатных профилей, в которых указаны численные значения W_x. Если форма сечения задана через некоторые параметры, то надо W_x выразить через эти параметры по формулам (6.6) с помощью методов главы 5 и затем решить неравенства (6.9) относительно этих параметров. Когда сечение задается непараметрическим способом (например, конструируется из набора стандартных прокатных профилей), то надо использовать метод последовательных приближений.

Пример 6.1.

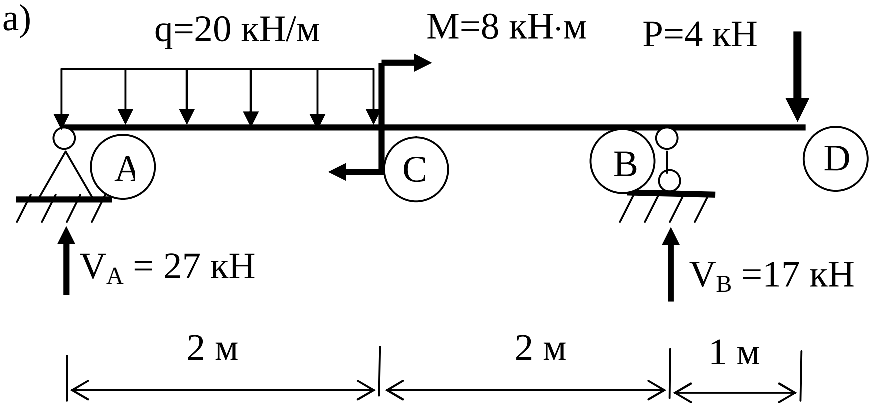
Задана балка на двух опорах с консолью (рис. 6.7, а), изготовленная из материала Ст.3. Требуется подобрать размеры сечения из двух прокатных профилей: двутавра и швеллера (рис. 6.7, б).

Опорные реакции определяем через уравнение статики в виде сумм моментов относительно опор A и B, из которых следует

$$V_A = \frac{q2\cdot\left(\frac{2}{2}+2\right) - m - P1}{4} = \frac{20\cdot 2\cdot 3 - 8 - 4\cdot 1}{4} = 27\,\text{кН},$$

$$V_B = \frac{q2\frac{2}{2} + m + P5}{4} = \frac{20\cdot 2\cdot 1 + 8 + 4\cdot 5}{4} = 17\,\text{кН}.$$

а)



б)

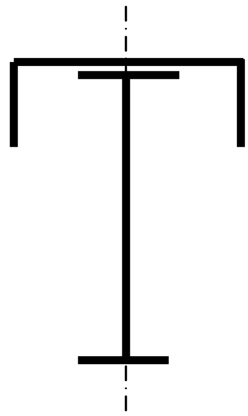


Рис. 6.7. Схемы балки (а) и ее поперечного сечения (б)

Внутренние усилия Q и M найдем в характерных сечениях:

$$Q_A = V_A = 27\,кН; \quad Q_C = V_A - q\,2 = 27 - 40 = -13\,кН = Q_B^{лев};$$

$$Q_B^{прав} = +P = 4\,кН = Q_D;$$

$$M_A = M_D = 0; \quad M_C^{лев} = V_A \cdot 2 - q\frac{2^2}{2} = 14\,кН \cdot м;$$

$$M_C^{пр} = M_C^{лев} + M = 14 + 8 = 22\,кН \cdot м; \; M_B = -P \cdot 1 = -4\,кН \cdot м;$$

$$M_E = V_A\, a - q\frac{a^2}{2} = 27 \cdot 1{,}35 - 20\frac{1{,}35^2}{2} = 18{,}25\ кН \cdot м.$$

Здесь E – сечение, где эпюра M имеет экстремум (max), a = 1,35 м – расстояние от этого сечения до левого конца участка, которое можно определить через значение поперечной силы на левом конце этого участка $Q_{лев}$ = 27 кН по формуле

$$a = \left|\frac{Q_{лев}}{q}\right| = \frac{27}{20} = 1{,}35\ м.$$

Считается, что мягкая углеродистая сталь Ст.3 одинаково сопротивляется растяжению и сжатию при изгибе. В этом случае

$$[\sigma]=[\sigma]_{+}=[\sigma]_{-}=\frac{\sigma_т}{n_т}=\frac{240}{1,5}=160 \text{ МПа}.$$

Опасное сечение $C^{прав}$ с наибольшим изгибающим моментом $M=$ 22 кН·м. Условие для подбора сечения имеет вид

$$W_x \geq \frac{M}{[\sigma]}=\frac{22}{160\cdot 10^3}=0{,}138\cdot 10^{-3}\text{ м}^3=138\text{ см}^3.$$

Подбор сечения выполним по схеме последовательных приближений. В качестве первого приближения примем двутавр I №18 и швеллер №18 (рис. 6.8, г).

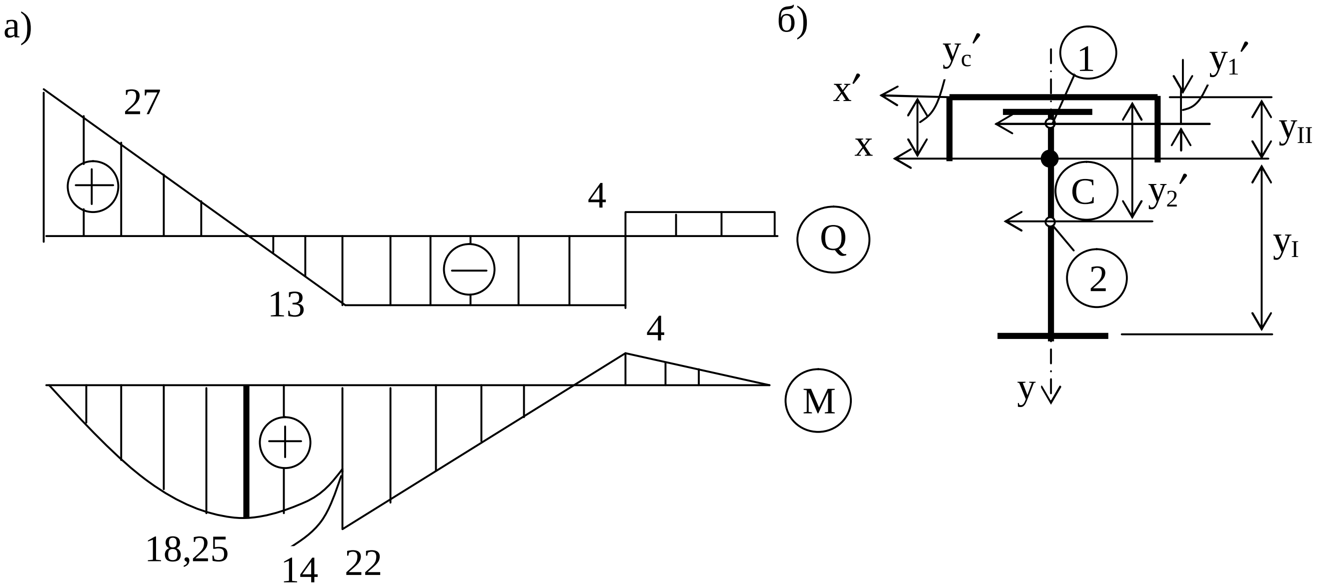


Рис. 6.8. Эпюры внутренних усилий (а) и схема для определения геометрических характеристик сечения (б)

Таблица 6.1

Геометрические характеристики отдельных элементов сечения

№ элемента	Типоразмер элемента	J_{xi}, $см^4$	F_i, $см^2$	y_i', см	y_i, см
1	[№18	85,4	20,5	1,95	-3,8
2	I №18	1090	20,7	9,51	+3,76

Найдем необходимые геометрические характеристики, используя сведения из главы 5.

$$y_c' = \frac{20{,}5 \cdot 1{,}95 + 20{,}7 \cdot 9{,}51}{20{,}5 + 20{,}7} = 5{,}75 \text{ см} \approx 5{,}8 \text{ см.}$$

$$y_1 = 1{,}95 - 5{,}8 \approx -3{,}8 \text{ см;} \quad y_2 = 9{,}51 - 5{,}8 \approx 3{,}7 \text{ см.}$$

$$J_x = \sum J_{xi} + \sum F_i\, y_i^2 = 85{,}4 + 1090 + 20{,}5 \cdot 3{,}8^2 + 20{,}7 \cdot 3{,}7^2 = 1755 \text{ см}^4.$$

$$y_{max} = y_I = 18 + 0{,}51 - 5{,}8 = 12{,}7 \text{ см.}$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{1755}{12{,}8} = 138 \text{ см}^3.$$

Как видно, полученное значение W_x равно минимальному требуемому значению в соответствии с условием подбора.

Подбор сечения балки на этом заканчивается. Если значение W_x для заданных размеров элементов отличается от минимально возможного значения, то процедуру надо повторить с новыми размерами элементов. Желательно добиваться отличий фактических от минимально допустимых значений в пределах стандартной точности инженерных расчетов, равной 5% (0,05 относительных величин).

6.6. Определение перемещений при изгибе. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки

При изгибе балка деформируется, а ее точки и основные элементы получают перемещения. Обычно деформированное состояние балки описывают с помощью двух перемещений сечения - прогиба v и угла поворота θ. В общем случае они являются функциями от координаты сечения – v(z) и θ(z) (рис. 6.9).

Большинство реальных балок должно удовлетворять условию жесткости, которое обычно заключается в ограничениях на величину максимального прогиба

$$v_{max} = f \le [f]. \qquad (6.10)$$

Здесь [f] – допускаемый прогиб, величина которого задается нормами проектирования и обычно не превышает 1 ⁄ 200 длины балки. Такие ограничения позволяют определить прогибы и углы поворота сечений с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$v''(z) = -\frac{M(z)}{EJ}, \qquad (6.11)$$

где M(z) – функция изгибающих моментов; EJ – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Функция углов поворота связана с прогибами дифференциальной зависимостью

$$\theta(z) = \frac{dv(z)}{dz} = v'(z). \qquad (6.12)$$

В этих условиях функция прогибов v(z) становится основной (разрешающей) функцией задачи. Ее можно найти как интеграл дифференциального уравнения (6.11). Для балок с постоянным сечением (EJ = const) интегрирование по методу начальных параметров может быть сведено к использованию правил Клебша.

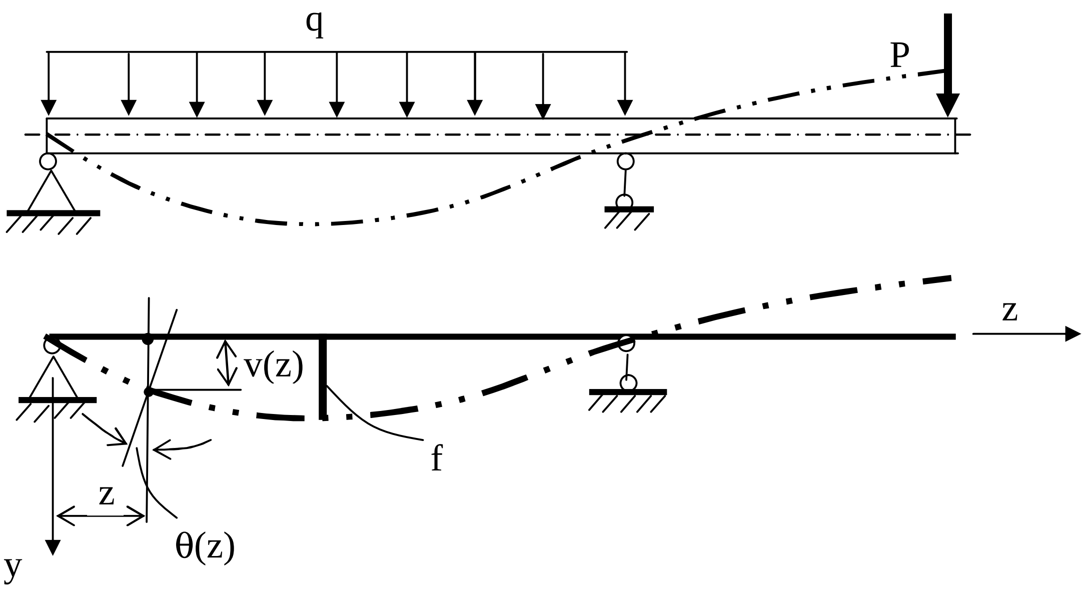


Рис. 6.9. Схема нагружения балки и перемещения при изгибе

На первом этапе решения должно быть записано универсальное уравнение изгибающих моментов M(z), справедливое для всех участков балки.

Если в решении используются простые виды нагрузок P, M и q = const, то универсальное уравнение M(z) будет иметь вид

$$M(z) = M(0) + Q(0)\,z - \sum M_i (z - a_i)^0 - \sum P_i (z - b_i) - \sum q_i \frac{(z - c)^2}{2}. \qquad (6.13)$$

На рис. 6.10 проиллюстрированы приемы составления уравнения M(z). Значение поперечной силы Q(0) = P_0 и изгибающего момента M(0) = M_0 в начале координат называют статическими начальными параметрами задачи. В статически определимых балках они заданы в виде нагрузок или могут быть найдены из уравнений равновесия. Если перед определением перемещений строились эпюры Q и M, то эти начальные параметры взяты с этих эпюр.

На следующем этапе решения уравнение M(z) подставляется в формуле (6.11). Полученное дифференциальное уравнение интегрируется по методу разделения переменных. При этом в правой части балки по каждому слагаемому интегралы вида $\int (z - a_i)^n\, dz$ берутся независимо друг от друга.

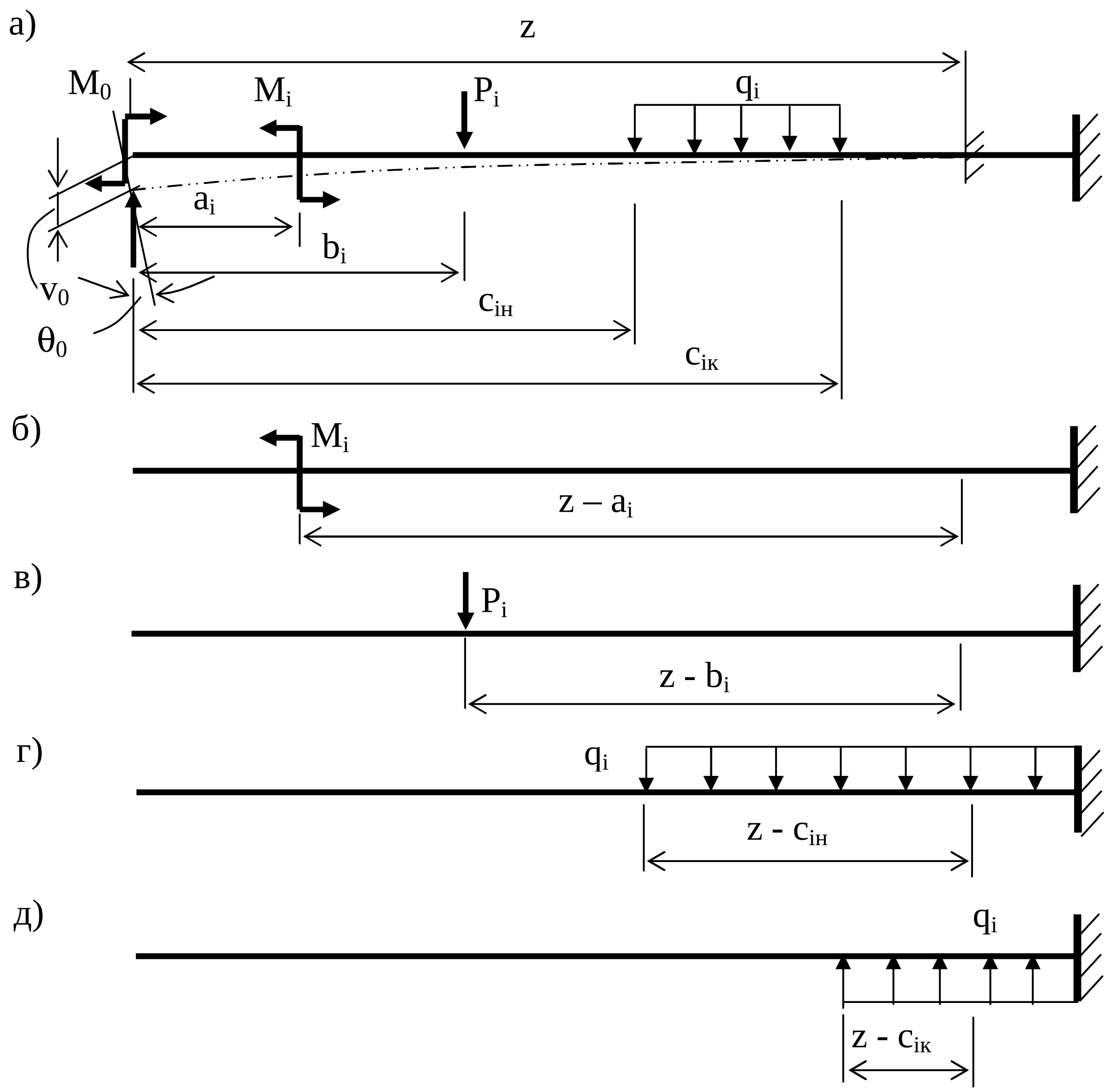


Рис. 6.10. К порядку составления
универсального уравнения изгибающих моментов а, б, в, г, д

Двукратное повторное интегрирование приводит к универсальным уравнениям углов поворота θ(z) и прогибов v(z):

$$\theta(z)=\theta(0)+\frac{1}{EJ}[-M(0)z-Q(0)\frac{z^2}{2}+\sum M_i(z-a)+\sum P_i\frac{(z-b_i)^2}{2}+$$

$$+\sum q_i\frac{(z-c_i)^3}{6}]; \qquad (6.14)$$

$$v(z)=v(0)+\theta(0)z+\frac{1}{EJ}[-M(0)\frac{z^2}{2}-Q(0)\frac{z^3}{6}+\sum M_i\frac{(z-a_i)^2}{2}+$$

$$+\sum P_i\frac{(z-b_i)^3}{6}+\sum q_i\frac{(z-c_i)^4}{24}. \qquad (6.15)$$

Если балка составная, то есть состоит из нескольких дисков, соединенных шарнирами (рис. 6.11), то функция θ(z) в месте шарнирного соединения (I) будет испытывать разрыв (скачок) величиной $\Delta\theta_i$.

Учет таких соединений может быть выполнен введением в уравнение θ(z) (6.14) слагаемого $\Delta\theta_i (z - d_i)^0$, а в уравнение v(z) (6.15) - $\Delta\theta_i (z - d_i)$. Величины угла поворота θ(0) и прогиба v(0) в начале координат называют кинематическими начальными параметрами. Кинематические параметры v(0), θ(0) и $\Delta\theta_i$ определяются с помощью кинематических граничных условий задачи.

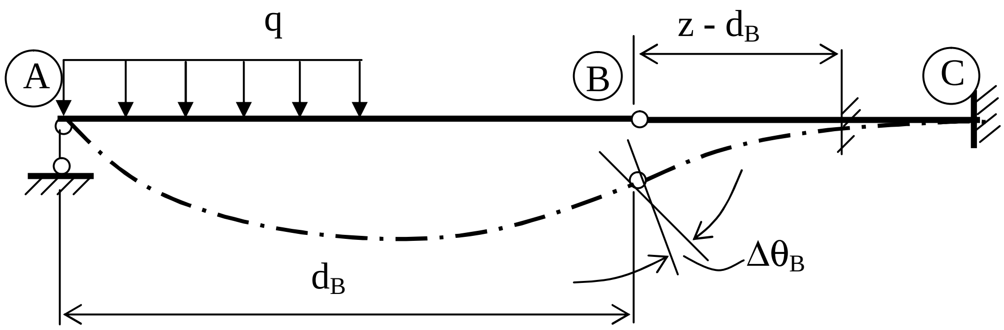


Рис. 6.11. Учет сквозных шарниров

Эти условия должны учитывать наложенные на балку связи. Например, для балки, представленной на рис. 6.10, будут равны нулю угол поворота и прогиб в заделке $(\theta(\ell) = \theta_A = 0$ и $v(\ell) = v_A = 0)$, а для балки на рис. 6.11 – соответственно $v(0) = 0;\ \theta(\ell) = 0;\ v(\ell) = 0.$ Отметим особо, что количество граничных условий всегда должно быть равно количеству кинематических параметров $v(0), \theta(0)$ и $\Delta\theta_i$.

При использовании уравнений (6.12), (6.13) и (6.14) удобно применять «правило отрицательного аргумента». Это значит, что значения сложных аргументов вида $(z - a_i)$, $(z - b_i)$ и т.д. всегда должны быть положительными. Если значения этих аргументов становятся отрицательными, то слагаемое, содержащее такой аргумент, надо отбросить (приравнять нулю).

Пример 6.2.

Для балки, изображенной на рис. 6.12, найти перемещения и построить изогнутую ось. Материал балки – Ст.3. Поперечное сечение из прокатного двутавра №20.

Определение опорных реакций и внутренних усилий здесь не обсуждается, а результаты построения эпюр приведены на рис. 6.12, а, б. Модуль упругости Ст.3 $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, момент инерции поперечного сечения балки $J = 1840$ см^4. Жесткость поперечного сечения при изгибе $EJ = 2 \cdot 10^8 \cdot 1810 \cdot 10^{-8} = 3{,}62 \cdot 10^3$ кН·м^2. Статические начальные параметры $Q(0) = 19{,}6$ кН; $M(0) = 0$.

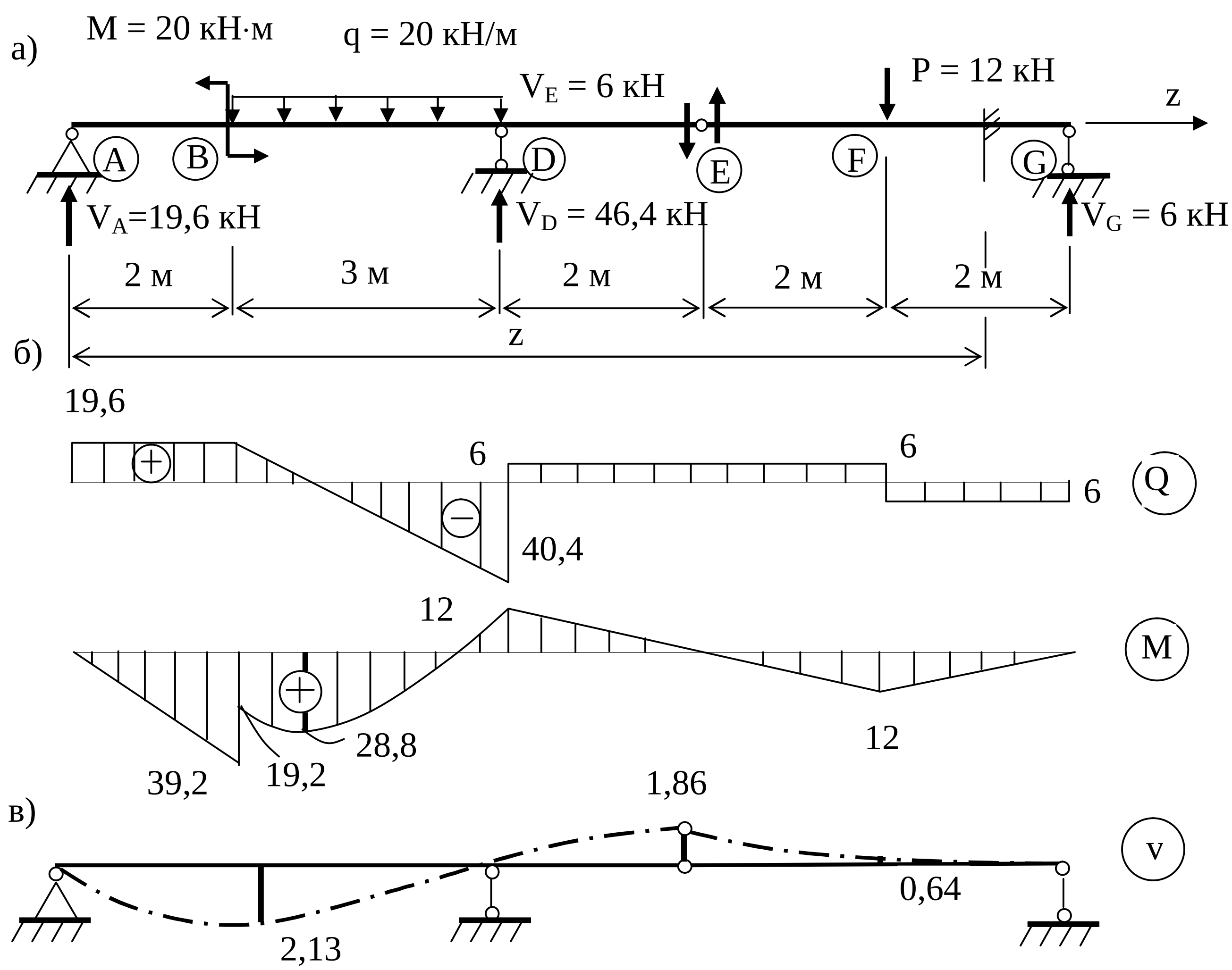


Рис. 6.12. Определение перемещений при изгибе

Универсальное уравнение изгибающих моментов

$$M(z) = Q(0)\,z - M(z-2)^0 - q\frac{(z-2)^2}{2} + q\frac{(z-5)^2}{2} + V_D\,(z-5) - P(z-9).$$

Универсальное уравнение углов поворота

$$\theta(z)=\theta(0)+\frac{1}{EJ}\left[-Q(0)\frac{z^2}{2}+M(z-2)+q\frac{(z-2)^3}{6}-q\frac{(z-5)^3}{6}-V_D\,\frac{(z-5)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+P\frac{(z-9)^2}{2}\right]+\Delta\theta_E\,(z-7)^0.$$

Универсальное уравнение прогибов

$$v(z)=v(0)+\theta(0)\,z+\frac{1}{EJ}\left[-Q(0)\frac{z^3}{6}+M\frac{(z-2)^2}{2}+q\frac{(z-2)^4}{24}-q\frac{(z-5)^4}{24}-\right.$$

$$\left.-V_D\,\frac{(z-5)^3}{6}+P\frac{(z-9)^3}{6}\right]+\Delta\theta_E\,(z-7).$$

Граничные условия задачи: $v(0)=v_A=0$; $v(5)=v_D=0$; $v(11)=$ $=v_G=0$.

Определение кинематических параметров $\theta(0)$ и $\Delta\theta_E$:

$$v(5)=0=\theta(0)5+\frac{1}{EJ}\left[-19{,}6\frac{5^3}{6}+20\frac{(5-2)^2}{2}+20\frac{(5-2)^4}{24}\right];$$

$$v(11)=0=\theta(0)11+\frac{1}{EJ}\left[-19{,}6\frac{11^3}{6}+20\frac{(11-2)^2}{2}+20\frac{(11-2)^4}{24}-20\frac{(11-5)^4}{24}-\right.$$

$$\left.-46{,}4\frac{(11-5)^3}{6}+12\frac{(11-9)^3}{6}\right]+\Delta\theta_E\,(11-7)\,.$$

Из первого уравнения найдем

$$\theta(0)=\frac{1}{5EJ}\cdot(19{,}6\cdot\frac{5^3}{6}-20\cdot\frac{3^2}{2}-20\frac{3^4}{24})=\frac{50{,}1}{EJ}=13{,}84\cdot10^{-3}\,\text{рад.}$$

Из второго уравнения определим

$$\Delta\theta_E = \frac{1}{4EJ}\left[-50{,}1\cdot 11 + 19{,}6\frac{11^3}{6} - 20\frac{9^2}{2} - 20\frac{9^4}{24} + 20\frac{6^4}{24} + 46{,}4\frac{6^3}{6} - 12\frac{2^3}{6}\right] =$$

$$= 17{,}47\cdot 10^{-3}\,\text{рад.}$$

Для построения изогнутой оси балки найдем перемещения в некоторых сечениях:

$$v(2{,}5) = 13{,}84\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}5 + \frac{1}{3{,}62\cdot 10^3}\left[-19{,}6\frac{2{,}5^3}{6} + 20\frac{0{,}5^2}{2} + 20\frac{0{,}5^4}{24}\right] =$$

$$= 2{,}13\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 2{,}13\ \text{см};$$

$$v(7) = 13{,}84\cdot 10^{-3}\cdot 7 + \frac{1}{3{,}62\cdot 10^3}\left[-19{,}6\frac{7^3}{6} + 20\frac{5^2}{2} + 20\frac{5^4}{24} - 20\frac{2^4}{24} - 46{,}4\frac{2^3}{6}\right] =$$

$$= -1{,}86\cdot 10^{-2}\ \text{м} = -1{,}86\ \text{см};$$

$$v(9) = 13{,}84\cdot 10^{-3}\cdot 9 + \frac{1}{3{,}62\cdot 10^3}\left[-19{,}6\frac{9^3}{6} + 20\frac{7^2}{2} + 20\frac{7^4}{24} - 20\frac{4^4}{24} - 46{,}4\frac{4^3}{6}\right] +$$

$$+ 17{,}47\cdot 10^{-3}\cdot 2 = -0{,}64\cdot 10^{-2}\ \text{м} = -0{,}64\ \text{см}.$$

По результатам выполненных расчетов построена изогнутая ось балки – эпюра прогибов v (рис. 6.12, в). Из рисунка видно, что максимальный прогиб $v_{max} = f \approx 2{,}13$ см. Относительный прогиб составляет

$$\frac{f}{\ell} = \frac{2{,}13}{1100} = \frac{1}{516}.$$

6.7. Определение перемещений методом Максвелла – Мора

В практике инженерных расчетов при изгибе, а также при других типах работы конструкций относительно редки случаи, когда есть возможность получить общие выражения для перемещений произвольного сечения стержневой конструкции. Как правило, при расчетах реальных конструкций необходимо знание перемещений отдельных заданных сечений. В таких ситуациях удобно применять метод Максвелла – Мора, основанный на энергетических принципах механики. Порядок решения задачи методом Максвелла – Мора (МММ) может быть сгруппирован в три основных этапа.

На первом этапе определяют внутренние усилия и строят их эпюры. При прямом изгибе простых балок и балочных систем основным усилием является изгибающий момент. Состояние конструкции под действием заданной расчетной нагрузки называется грузовым, а эпюра изгибающих моментов в этом состоянии $M_P(z)$ – грузовой (рис. 6.13, а).

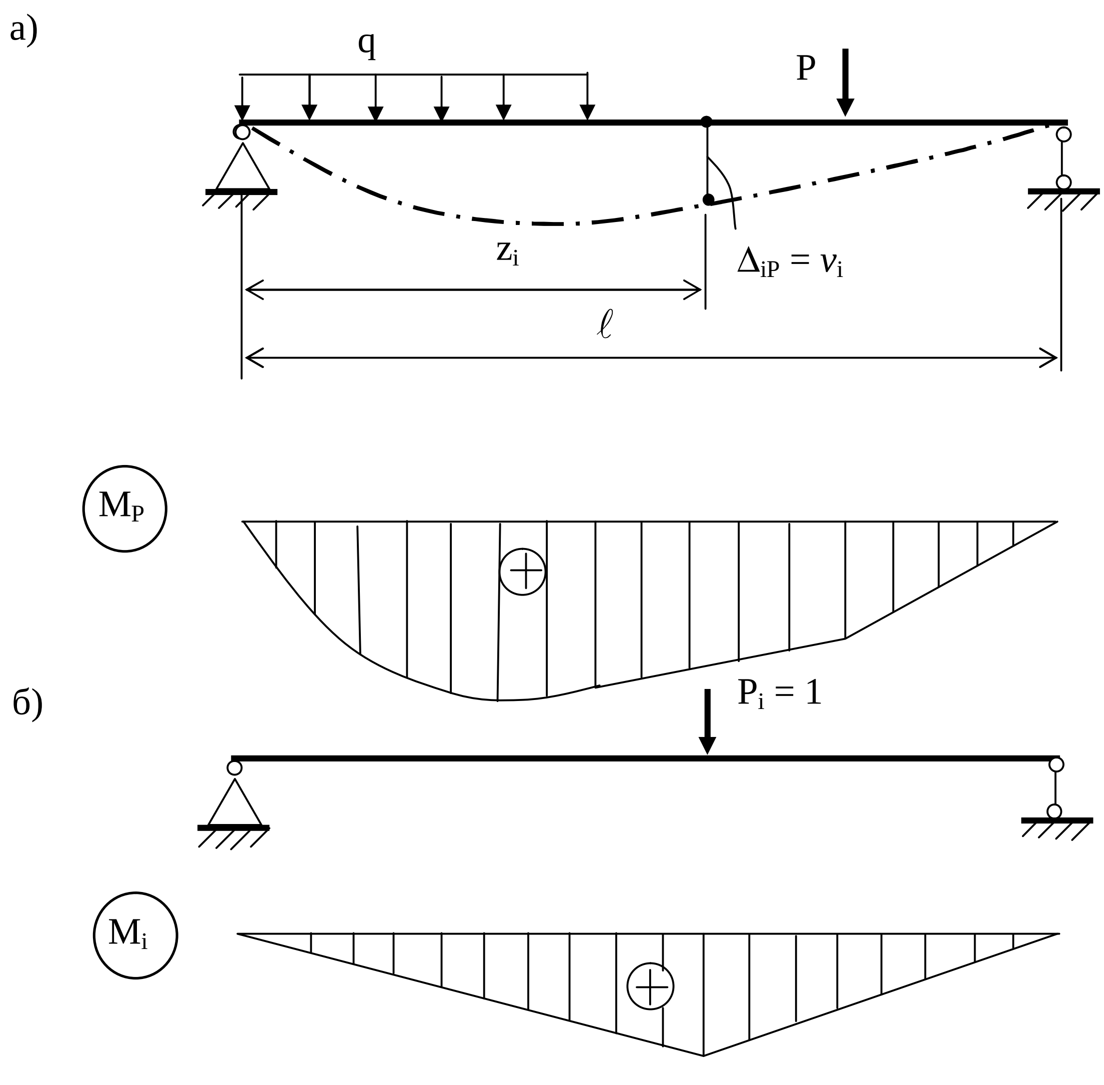


Рис. 6.13. Грузовое (а) и единичное (б) состояния
в методе Максвелла - Мора

На втором этапе формируется вспомогательное единичное состояние, когда к конструкции прикладывается единичное воздействие в месте искомого перемещения Δ_{ip} (рис. 6.13, б). Если Δ_{ip} является линейным перемещением (прогибом v), то воздействие осуществляется силой $\overline{P_i} = 1$, направленной вдоль искомого перемещения (в рассматриваемом случае по вертикали). Если искомое перемещение Δ_{ip} - угловое, то есть угол поворота θ_i, то единичное загружение осуществляется парой $\overline{M}_i = 1$. После этого определяются единичные изгибающие моменты M_i и их эпюры.

На третьем этапе производится вычисление искомого перемещения по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta_{ip} = \int_{(\ell)} \frac{\overline{M}_i(z) M_p(z) dz}{EJ}. \tag{6.16}$$

Отметим, что формула (6.16) является усеченной, то есть учитывает влияние только изгибающих моментов. Практика показывает, что в абсолютном большинстве случаев влияние поперечных сил Q(z) пренебрежимо мало. В случае сложного сопротивления прямого стержня формула Максвелла – Мора имеет шесть слагаемых, каждое слагаемое учитывает одно из внутренних усилий (N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_k).

Обычно одна из эпюр (чаще всего единичная) имеет линейный вид. В этом случае можно упростить вычисление определенного интеграла (6.15) и свести эту процедуру к простым численным операциям. Одним из таких приемов является правило Верещагина, которое заключается в следующем: если одна из эпюр моментов (далее $\overline{M}_i$) линейна (рис. 6.14, а), то интеграл Максвелла-Мора численно равен произведению площади эпюры грузовых моментов ω_p на ординату $\overline{M}_i^c$ единичного момента, взятую под центром тяжести ω_p:

$$\int_{(a)} \frac{M_p(z) \overline{M}_i(z) dz}{EJ} = \frac{\omega_p \overline{M}_i^c}{EJ}. \tag{6.17}$$

В общем случае сложная эпюра грузовых моментов может быть разбита на n простых частей по принципу, проиллюстрированному на рис. 6.14, б. Тогда нахождение перемещения сведется к процедуре «перемножения» эпюр

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\omega_{pn} \overline{M}_{in}^c}{EJ}. \tag{6.18}$$

В методе Максвелла-Мора положительный знак перемещения Δ_{ip} означает, что оно совпадает по направлению с единичным фактором $P_i = 1$ или $M_i = 1$.

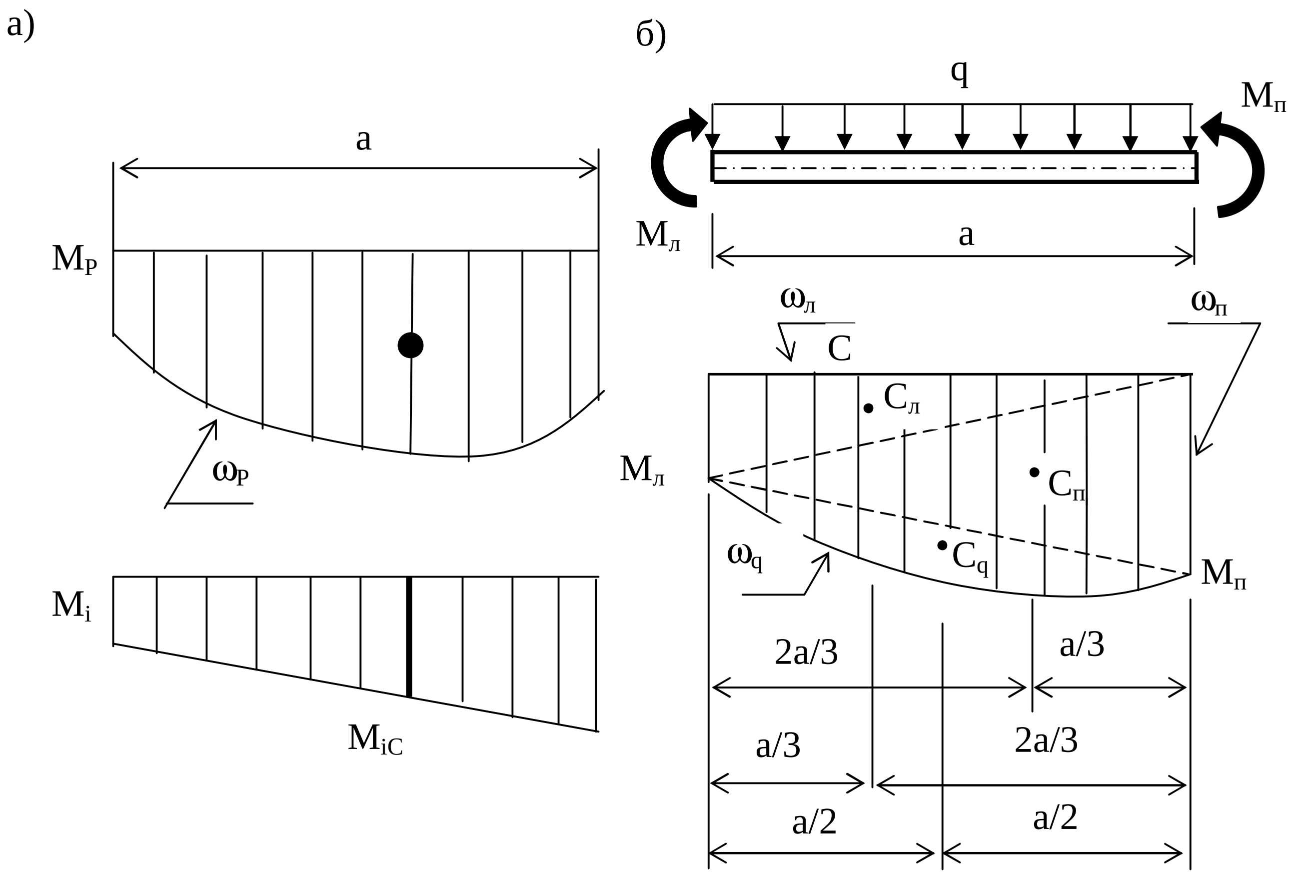


Рис. 6.14. Расчетная схема к применению правила Верещагина (а) и способ расслоения грузовой эпюры (б)

Значения площадей ω на рис. 6.14 определяются по следующим формулам

$$\omega_л = \frac{M_л a}{2}; \quad \omega_п = \frac{M_п a}{2}; \quad \omega_q = \frac{qa^3}{12}.$$

Пример 6.3.

Для балки, показанной на рис. 6.15, определить перемещения методом Максвелла – Мора и построить ее изогнутую ось. Жесткость поперечного сечения принять $2 \cdot 10^4$ кН·м^2.

Определим прогиб и угол поворота сечения «1». Грузовая эпюра изгибающих моментов, единичные состояния «1» и «2» и единичные эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 6.15.

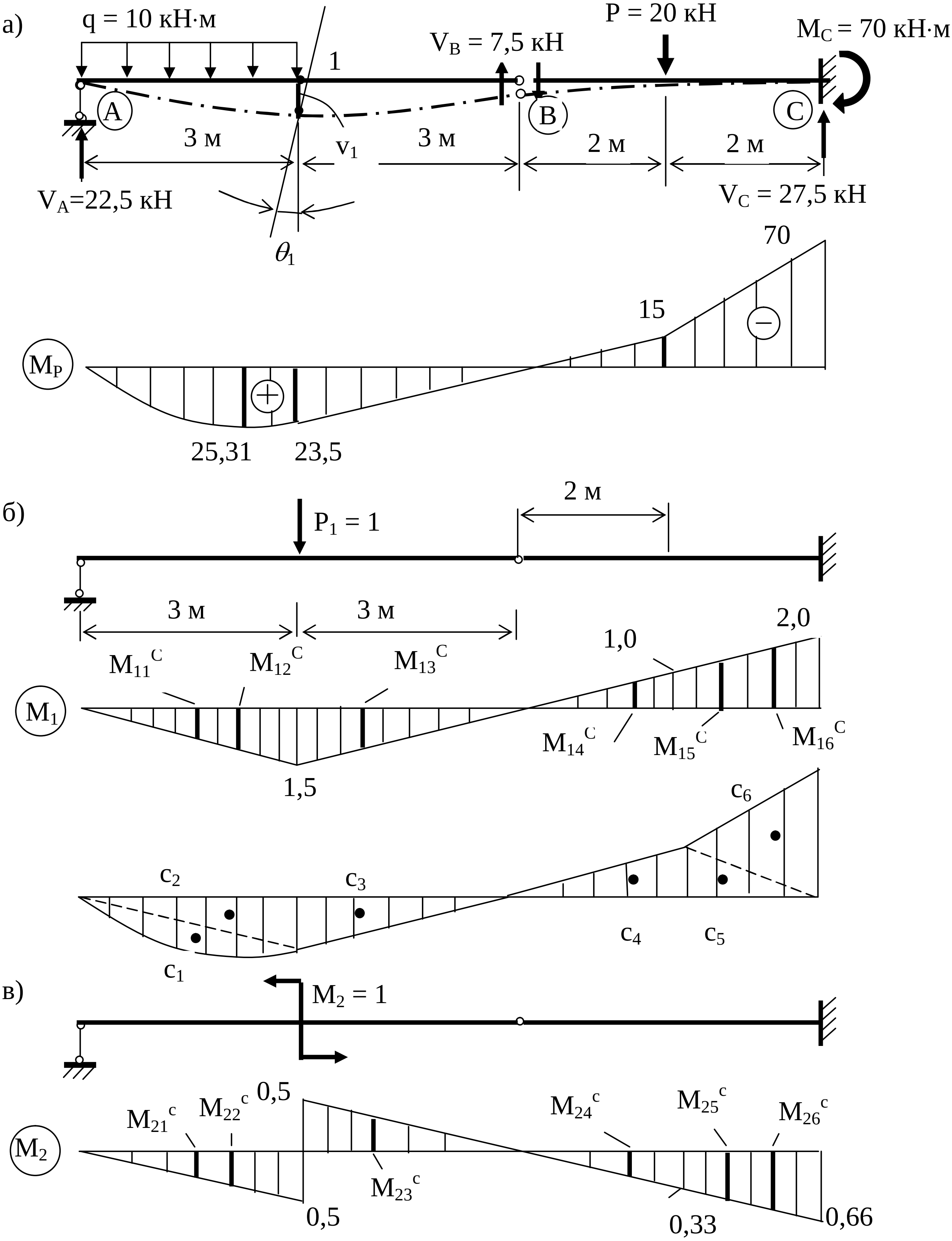


Рис. 6.15. Определение перемещений методом Максвелла – Мора

$$\Delta_{1p} = v_1 = \sum \frac{\omega_{pn} M_{1n}^c}{EJ} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}[\frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1,5}{2} + \frac{23,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1,5}{3} + \frac{23,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1,5}{3} +$$

$$+ (-\frac{15 \cdot 2}{2}) \cdot (-\frac{2 \cdot 1}{3}) + (-\frac{15 \cdot 2}{2}) \cdot (-\frac{2 \cdot 1}{3} - \frac{1 \cdot 2}{3}) + (-\frac{70 \cdot 2}{2}) \cdot (-\frac{1 \cdot 1}{3} - \frac{2 \cdot 2}{3})] =$$

$$= 0,011\text{м} = 1,1\text{см}.$$

$$\Delta_{2p} = \theta_1 = \sum \frac{\omega_{pn} \overline{M}_{2n}^c}{EJ} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}[\frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{0,5}{2} + \frac{23,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,5}{3} + \frac{23,5 \cdot 3}{2}(-\frac{2 \cdot 0,5}{3}) +$$

$$+ (-\frac{15 \cdot 2}{2})\frac{2 \cdot 0,333}{3} + (-\frac{15 \cdot 2}{2}) \cdot (\frac{2 \cdot 0,333}{3} + \frac{0,666}{3})] = -0,22 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Отметим, что отрицательное значение Δ_{2p} соответствует повороту сечения (1) по часовой стрелке, то есть в сторону, противоположную единичной паре $\overline{M}_2 = 1$ (см. рис. 6.15, в). При перемножении эпюр надо учитывать знаки ω_p и $\overline{M}_i^c$. Кроме этого надо помнить, что разделение грузовой эпюры на простые элементы зависит от места приложения единичной нагрузки и поэтому может меняться для разных перемещений.

6.8. Расчет статически неопределимых систем методом сил

Как известно из теоретической механики, статически определимой называется система, в которой опорные реакции и внутренние усилия можно определить с помощью только уравнений равновесия. В противоположном случае системы являются статически неопределимыми. Степень статической неопределимости таких систем k определяется как разность между числом неизвестных реакций m и числом возможных независимых уравнений статики n:

$$k = m - n. \qquad (6.19)$$

Степень статической неопределимости равна количеству лишних связей в системе с точки зрения ее статической определимости.

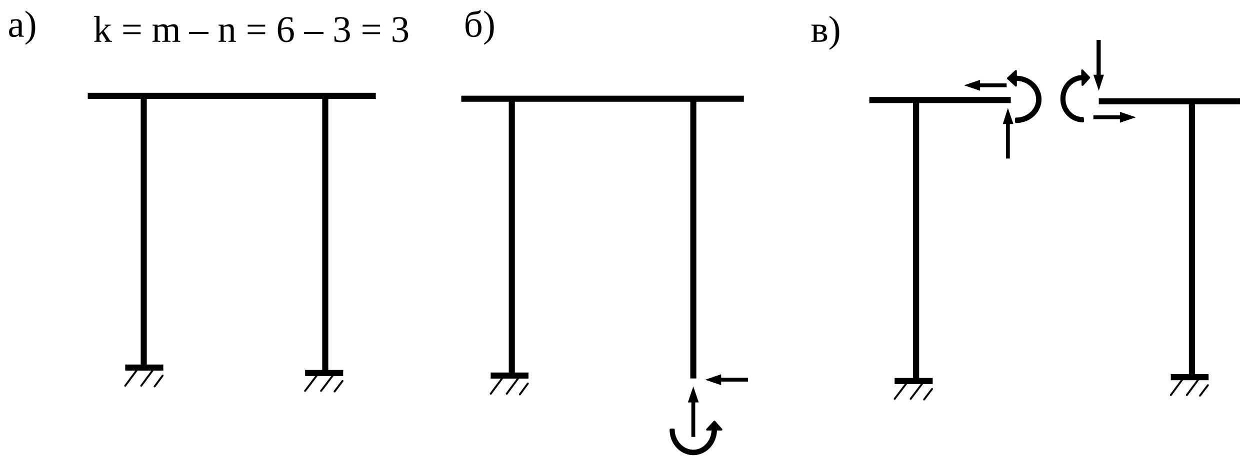


Рис. 6.16. Статически неопределимая рама (а)
и ее основные системы (б, в)

Одним из методов расчета статически неопределимых систем является метод сил. Он состоит в том, что за основные неизвестные задачи принимаются реакции лишних связей. При расчете используется основная система, которая получается из заданной путем отбрасывания лишних связей. Для любой заданной конструкции существует возможность создания бесконечного множества основных систем (рис. 6.16), так как можно отбрасывать не только внешние связи, но и внутренние путем постановки шарниров или сквозных разрезов.

Основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой. Геометрическая неизменяемость состоит в том, что перемещения точек системы возможны только за счет деформаций ее элементов.

Центральной процедурой метода сил является раскрытие статической неопределимости, которое заключается в определении основных неизвестных – реакций лишних связей. Для этого составляются канонические уравнения метода сил – уравнения деформаций. Смысл их состоит в том, что перемещения в основной системе от заданной нагрузки и реакций лишних связей должны быть такими же, как и в заданной конструкции.

Уравнение деформации для i-й лишней связи в методе сил имеет вид

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \ldots + \delta_{ii} X_i + \ldots + \delta_{ik} X_k + \Delta_{ip} = 0, \qquad (6.20)$$

где δ_{ij} – единичное перемещение (перемещение в направлении i-й лишней связи от действия единичной реакции j-й лишней связи $\overline{X_j} = 1$); X_i – реакция i-й лишней связи; Δ_{ip} – грузовое перемещение (перемещение в направлении i-й лишней связи от заданной нагрузки).

Количество уравнений деформаций, которые обычно называют каноническими уравнениями метода сил, равно степени статической неопределимости конструкции. В общем виде система этих уравнений может быть записана в матричном виде

$$[\delta]\{X\} + \{\Delta_p\} = 0, \qquad (6.21)$$

где $[\delta]$ – матрица единичных перемещений размерностью $k \times k$; $\{X\}$, $\{\Delta_p\}$ – векторы реакций лишних связей (основных неизвестных) и грузовых перемещений с размерностью каждого $k \times 1$.

Перемещения δ_{ij} и Δ_{ip} в стержневых конструкциях, работающих на изгиб, обычно определяются методом Максвелла – Мора по формулам

$$\delta_{ij} = \int\limits_{(L)} \frac{\overline{M}_i \, \overline{M}_j}{EJ} ds; \qquad \Delta_{ip} = \int\limits_{(L)} \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} ds, \qquad (6.22)$$

где $\overline{M}_i, \overline{M}_j$ – изгибающие моменты в основной системе от действия единичных реакций i-й и j-й связи $\overline{X}_i = \overline{X}_j = 1$ (единичные моменты); M_p – изгибающий момент в основной системе от заданной нагрузки (грузовой момент).

После решения системы уравнений (6.21) и нахождения основных неизвестных X_i внутренние усилия в конструкции могут быть найдены обычными способами. Определение изгибающих моментов удобно выполнять по принципу независимости действия сил (суперпозиции) с использованием единичных и грузовых моментов

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3 + \ldots + \overline{M}_к \cdot X_к + M_p. \qquad (6.23)$$

Пример 6.4.

Раскрыть статическую неопределимость рамной конструкции, показанной на рис. 6.17, и построить эпюры внутренних усилий.

Конструкция рамы состоит из одного диска, на который наложено пять связей. Степень статической неопределимости заданной конструкции k = m – n = 5 – 3 = 2.

Система канонических уравнений в имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0,$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Определение единичных и грузовых перемещений выполним с помощью правила Верещагина

$$\Delta_{1p} = \sum\int \frac{\overline{M}_1 M_p \, ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0}\left[\left(-\frac{320\cdot 4}{2}\right)\left(\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}8\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{320\cdot 6}{2}\right)8 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(-\frac{500\cdot 6}{2}\right)8 + \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 6^3}{12}\right)8 + \left(-\frac{480\cdot 8}{2}\right)\left(\frac{2}{3}8\right) + \left(\frac{160\cdot 8}{2}\right)\left(\frac{1}{3}8\right)\right] =$$
$$= -\frac{21930}{EJ_0};$$

$$\Delta_{2p} = \sum\int \frac{\overline{M}_2 M_p}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_0}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{320\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{1}{3}6\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{500\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}6\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 6^3}{12}\right)\left(\frac{6}{3}\right) + \left(-\frac{480\cdot 8}{2}\right)6 + \left(\frac{160\cdot 8}{2}\right)6\right] = -\frac{11460}{EJ_0}.$$

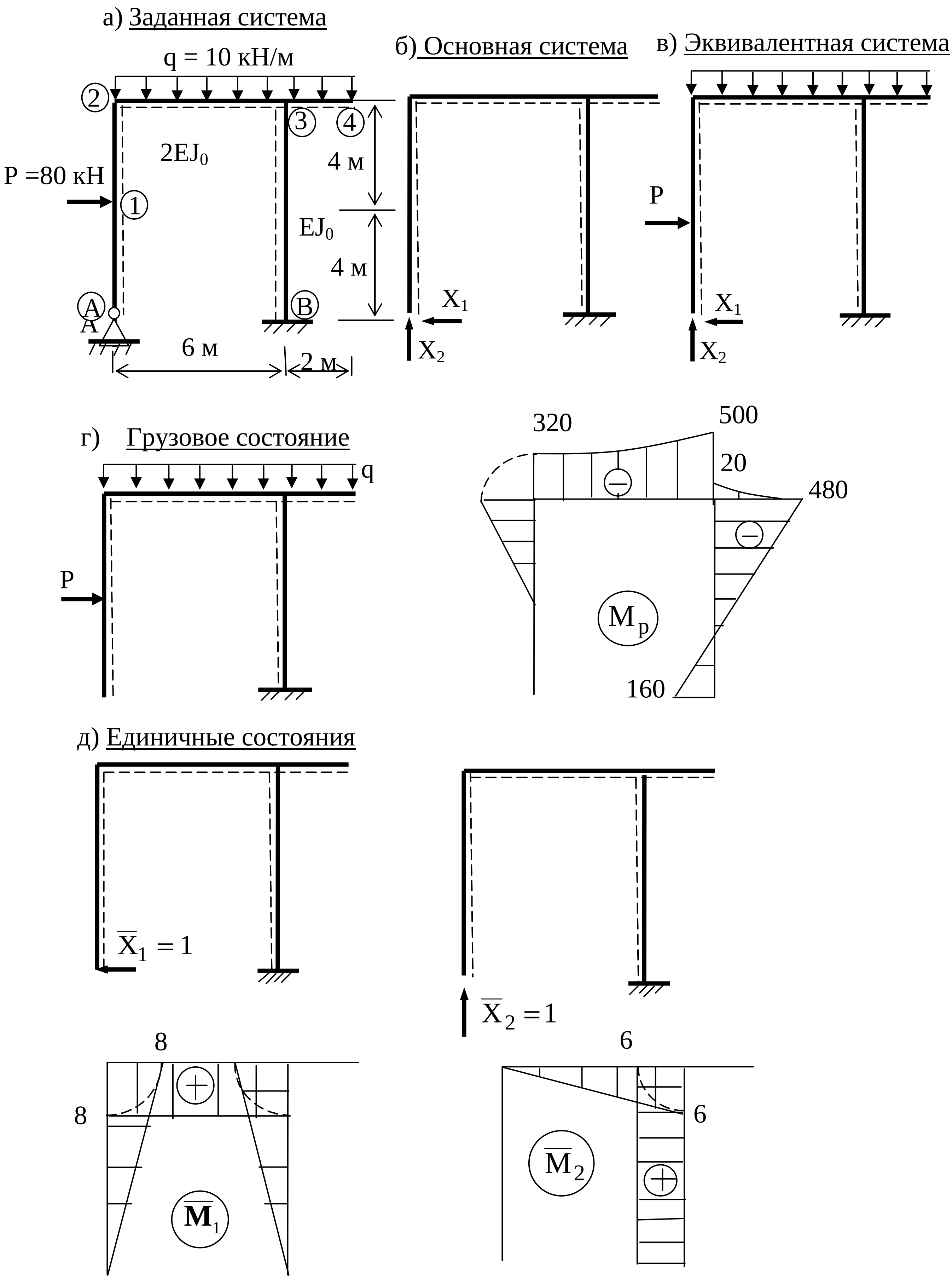


Рис. 6.17. Расчет статически неопределимой рамы

$$\delta_{11} = \sum\int \frac{\overline{M}_1^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0}\left[\left(\frac{8\cdot 8}{2}\right)\left(\frac{2}{3}8\right) + \frac{1}{2}(8\cdot 6)8 + \left(\frac{8\cdot 8}{2}\right)\left(\frac{2}{3}8\right)\right] = \frac{533}{EJ_0};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum\int \frac{\overline{M}_1\overline{M}_2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\cdot 6}{2}\right)8 + \left(\frac{8\cdot 8}{2}\right)6\right] = \frac{264}{EJ_0}.$$

$$\delta_{22} = \sum\int \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}6\right) + (6\cdot 8)6\right] = \frac{324}{EJ_0}.$$

Окончательный вид канонических уравнений и значения реакций лишних связей:

$$\frac{533}{EJ_0}X_1 + \frac{264}{EJ_0}X_2 - \frac{21930}{EJ_0} = 0;$$

$$\frac{264}{EJ_0}X_1 + \frac{324}{EJ_0}X_2 - \frac{11460}{EJ_0} = 0;$$

$X_1 = 39{,}6$ кН;
$X_2 = 3{,}1$ кН;

Определим значения изгибающих моментов по формуле (6.22):

$M_A = 0$; $M_1 = 0 + 4\cdot 39{,}6 + 0 = 158{,}4$ кН·м;

$M_2 = -320 + 8\cdot 39{,}6 + 0 = -3{,}2$ кН·м;

$M_{32} = -500 + 8\cdot 39{,}6 + 6\cdot 3{,}1 = -164{,}6$ кН·м;

$M_{34} = -20$ кН·м;

$M_{3B} = -480 + 8\cdot 39{,}6 + 6\cdot 3{,}1 = -144{,}6$ кН·м;

$M_B = 160 + 0 + 6\cdot 3{,}1 = 178{,}6$ кН·м.

Проверим определение М путем перемножения его эпюры на одну из единичных эпюр, например $\overline{M}_1$. Так как перемещение Δ_1 в направлении связи 1 равно нулю, то:

$$\Delta_1 = \sum \int_{(L)} \frac{\overline{M}_1 M}{EJ} ds = 0;$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ_0}\left[\left(\frac{158{,}4 \cdot 4}{2}\right)\left(\frac{2}{3}4\right) + \left(\frac{158{,}4 \cdot 4}{2}\right)\left(\frac{2}{3}4 + \frac{1}{3}8\right) + \left(-\frac{3{,}2 \cdot 4}{2}\right)\left(\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}8\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{3{,}2 \cdot 6}{2}\right)8 + \frac{1}{2}\left(-\frac{164{,}6 \cdot 6}{2}\right)8 + \frac{1}{2}\left(\frac{10 \cdot 6^3}{12}\right)8 + \left(-\frac{144{,}6 \cdot 8}{2}\right)\left(\frac{2}{3}8\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{178{,}6 \cdot 8}{2}\right)\left(\frac{1}{3}8\right)\right] = \frac{1}{EJ}(5160 - 5140) = \frac{20}{EJ_0}.$$

Этот результат практически равен нулю (с погрешностью менее 5%).

Усилия Q и N в характерных сечениях находятся элементарно методом сечений. Окончательные эпюры M, N и Q приведены на рис. 6.18.

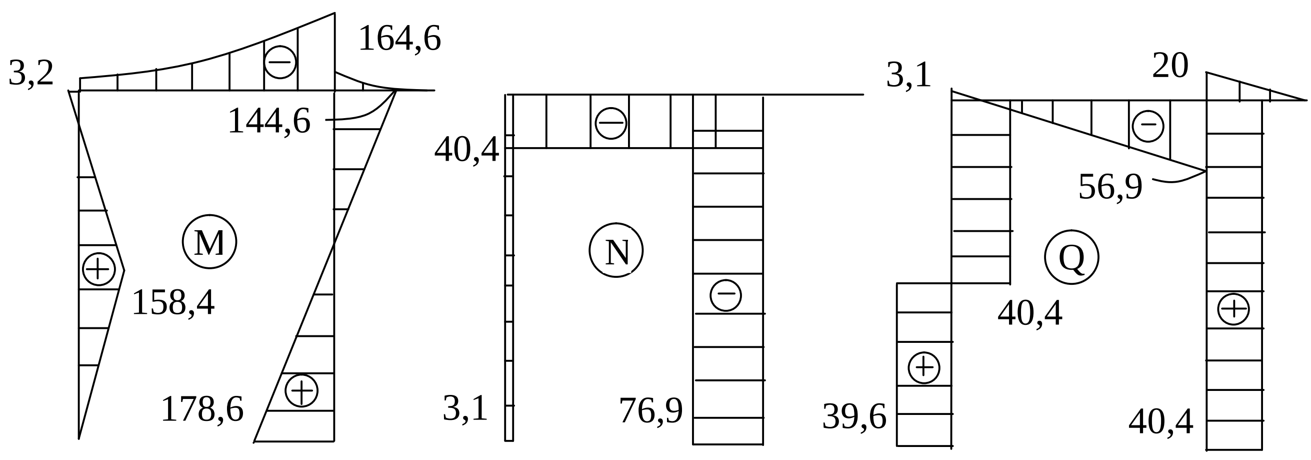


Рис. 6.18. Окончательные эпюры внутренних усилий

Статистическая проверка вырезанием узлов показана на рис. 6.19.

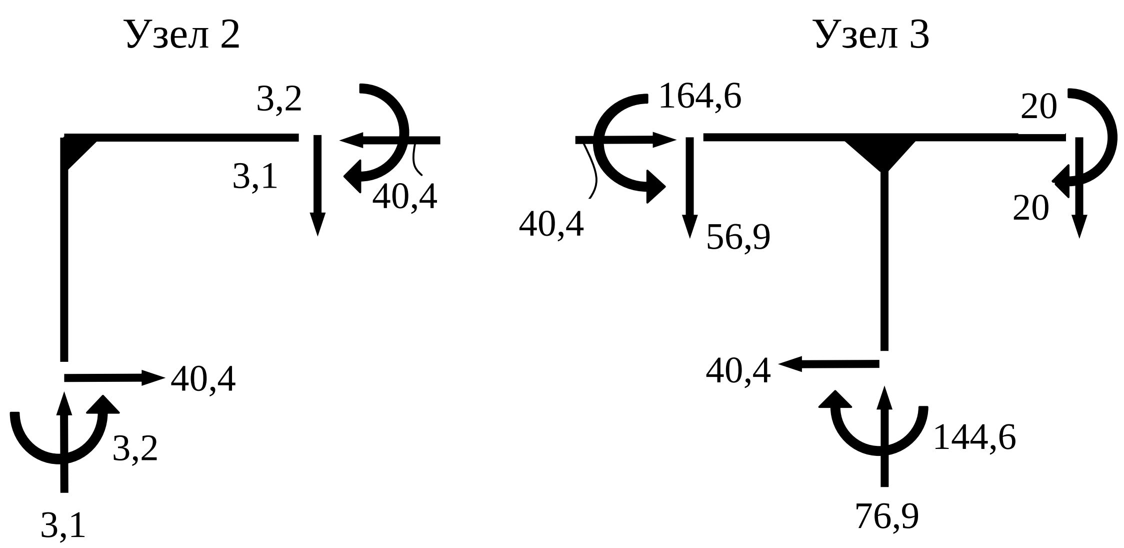


Рис. 6.19. Проверка равновесия вырезанных узлов рамы

6.9. Расчет неразрезных балок

В технике неразрезными называют статически неопределимые балки с числом пролетов более одного (рис. 6.20).

Статическая неопределимость таких балок равна числу пролетов балки минус единица ($K = L_{прол} – 1$). Так, например, для балки, представленной на рис. 6.20, а, $K = 3 – 1 = 2$. Расчет таких конструкций можно производить методом сил по стандартным методикам. Удобным по ряду обстоятельств является вариант метода сил, когда основная система представляет цепь шарнирных балок на двух опорах (рис. 6.20, б), а основными неизвестными будут изгибающие моменты в сечениях над опорами (опорные моменты). В этом случае уравнение деформаций для произвольной i-й опоры имеет простой трехчленный вид

$$\delta_{i,i-1} M_{i-1} + \delta_{i,i} M_i + \delta_{i,i+1} M_{i+1} + \Delta_{ip} = 0. \qquad (6.24)$$

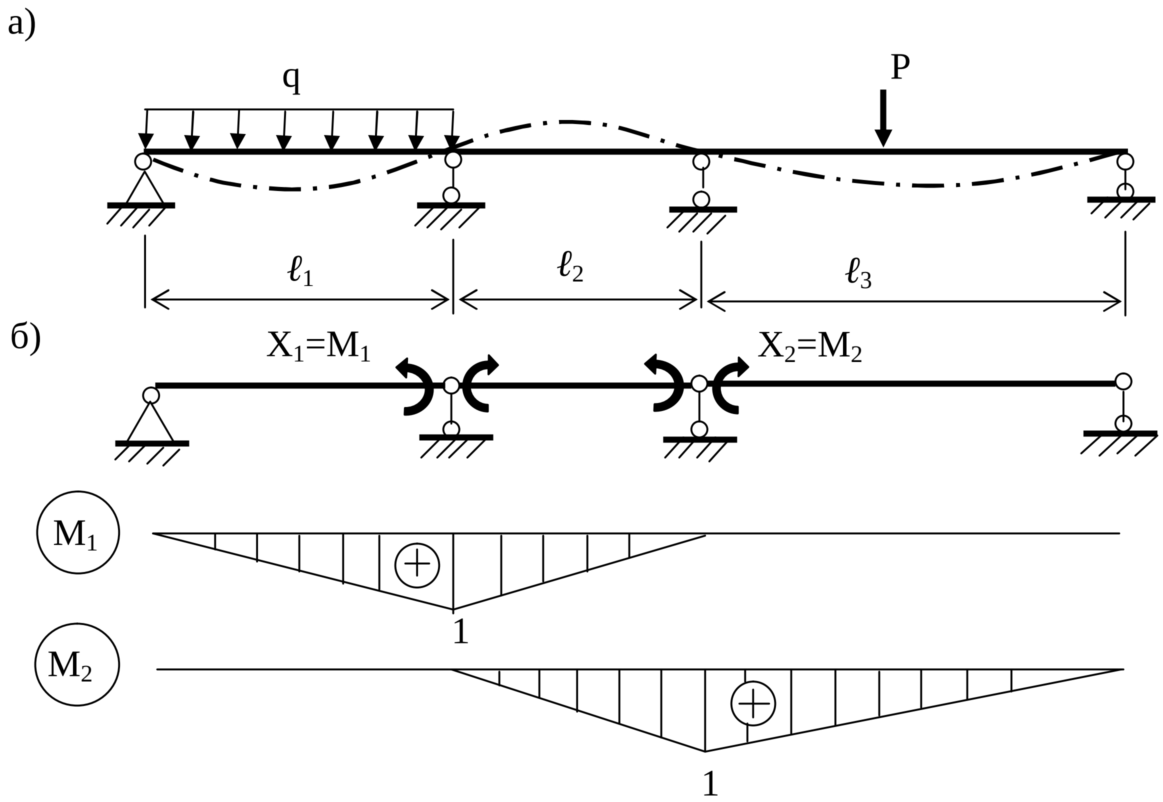


Рис. 6.20. Неразрезная балка (а) и ее основная система (б)

Грузовой член Δ_{ip} уравнения, характеризующий угол взаимного поворота (угол раскрытия) сечений балок основной системы на i-й опоре, может быть определен из выражения

$$\Delta_{ip} = \int\limits_{(\ell_i)} \frac{\overline{M}_i^{лев} M_p^{лев} dz}{EJ} + \int\limits_{(\ell_{i+1})} \frac{\overline{M}_i^{лев} M_p^{прав} dz}{EJ} = \theta_{i0}^{лев} + \theta_{i0}^{прав}. \quad (6.25)$$

Обычно уравнение (6.25) записывают в форме

$$M_{i-1}\ell_i + 2M_i\left(\ell_i + \ell_{i+1}\right) + M_{i+1}\ell_{i+1} = -6EJ\left(\theta_{i0}^{лев} + \theta_{i0}^{прав}\right) \quad (6.26)$$

и называют уравнением трех моментов. Углы поворота опорных сечений балок основной системы могут быть определены с помощью метода Максвелла – Мора или вычислены с помощью справочных формул для простых двухопорных балок.

Достоинство уравнения трех моментов состоит в том, что система канонических уравнений типа (6.21) имеет трехдиагональный вид и обеспечивает относительную простоту и устойчивость решения задачи.

Во всем остальном план расчета неразрезных балок совпадает с планом расчета статически неопределимой рамы (см. п. 6.9).

Пример 6.5.

Заделку на левом конце балки заменим фиктивным пролетом $L_1 = 0$. Балка является трижды статически неопределимой ($K=L_{прол}–1=4–1=3$). Углы поворота в опорных сечениях основной системы от заданной (пролетной) нагрузки определим по формулам [1, табл. 20]

$$\theta_{10}^{лев} = 0; \qquad \theta_{10}^{прав} = \frac{P\ell_2^2}{16EJ} = \frac{8 \cdot 6^2}{16EJ} = \frac{18}{EJ};$$

$$\theta_{20}^{лев} = \theta_{10}^{лев} = \frac{18}{EJ};$$

$$\theta_{20}^{прав} = \theta_{30}^{лев} = 0 \ \text{(в пролете 3 отсутствует нагрузка)};$$

$$\theta_{30}^{прав} = \frac{q\ell_4^3}{24EJ} = \frac{5 \cdot 5^3}{24EJ} = \frac{26}{EJ}.$$

Изгибающие моменты на левой M_0 и правой M_4 крайних опорах равны нулю. Составляем уравнения трех моментов.

Опора 1:

$$M_0 \cdot 0 + 2 \cdot M_1(0+6) + M_2 \cdot 6 = -6EJ(0 + \frac{18}{EJ}).$$

Опора 2:

$$M_1 \cdot 6 + 2M_2(6+4) + M_3 \cdot 4 = -6EJ(\frac{18}{EJ} + 0).$$

Опора 3:

$$M_2 \cdot 4 + 2M_3(4+5) + M_4 \cdot 5 = -6EJ(0 + \frac{26}{EJ}).$$

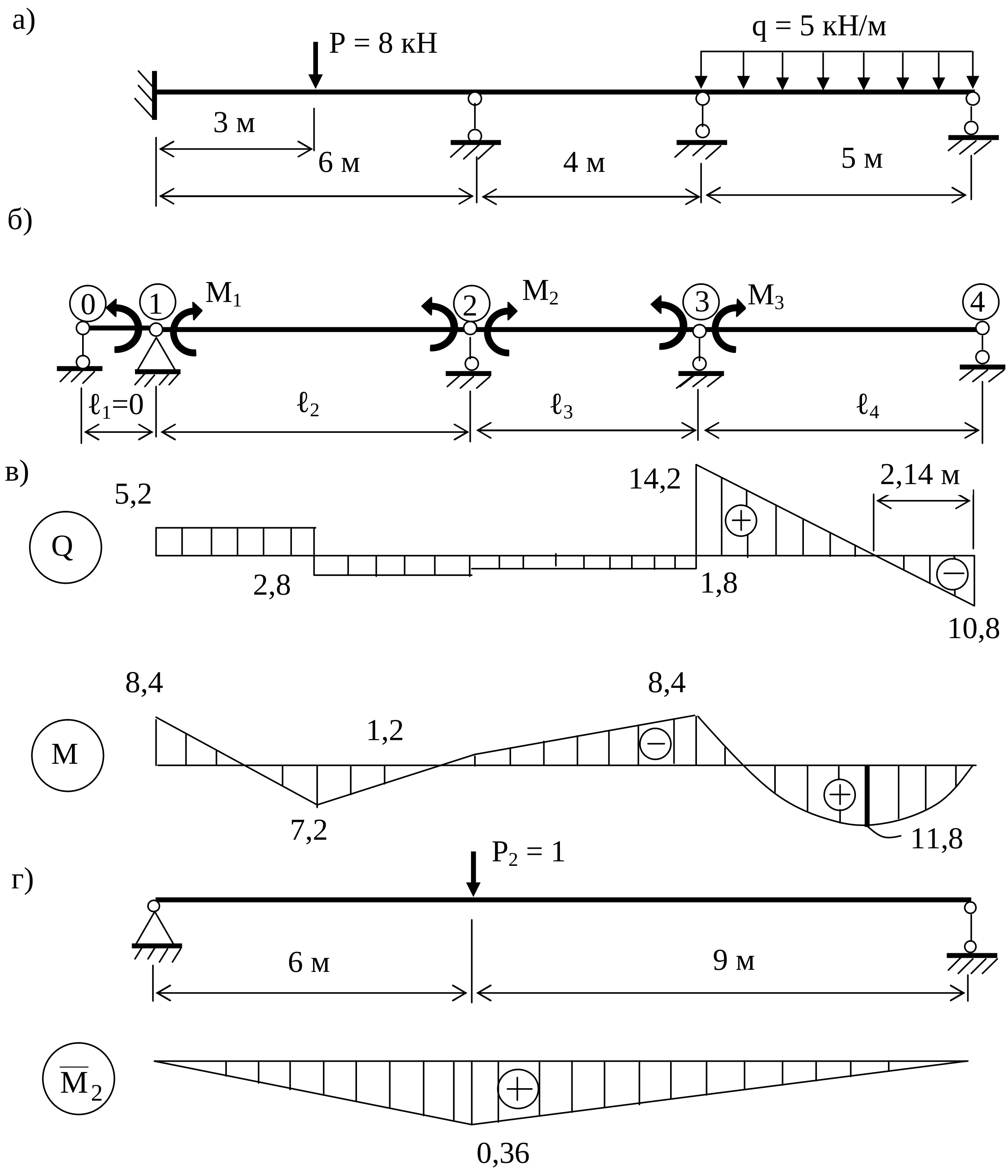


Рис. 6.21. Расчет неразрезной балки

Окончательно система канонических уравнений имеет вид

$$2M_1 + M_2 = -18;$$
$$M_1 + 3{,}33M_2 + 0{,}67M_3 = -18;$$
$$M_2 + 4{,}5M_3 = -39.$$

Корни системы $M_1 = -8{,}4$ кН·м; $M_2 = -1{,}2$ кН·м; $M_3 = -8{,}4$ кН·м.

Опорные реакции V_i на опорах определим как сумму реакций от заданной (пролетной) нагрузки V_{io} и опорных моментов ΔV_i по формуле

$$V_i = V_{io} + \Delta V = V_{io}^{лев} + V_{io}^{прав} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}};$$

$$V_1 = \frac{P}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{8}{2} + \frac{-1{,}2 + 8{,}4}{6} = 4 + 1{,}2 = 5{,}2 \text{ кН};$$

$$V_2 = \frac{P}{2} + 0 + \frac{-8{,}4 + 1{,}2}{6} + \frac{-8{,}4 + 1{,}2}{4} = 4 - 1{,}2 - 1{,}8 = 1 \text{ кН};$$

$$V_3 = 0 + \frac{ql_4}{2} + \frac{-1{,}2 + 8{,}4}{4} + \frac{0 + 8{,}4}{5} = 12{,}5 + 1{,}8 + 1{,}68 = 16{,}0 \text{ кН};$$

$$V_4 = \frac{ql_4}{2} + \frac{-8{,}4 + 0}{5} = 12{,}5 - 1{,}68 = 10{,}8 \text{ кН}.$$

Определение Q и M в характерных сечениях здесь не приводится, так как выполняется с помощью приемов, изложенных в п. 6.4 и примере 6.1. Эпюры Q и M приведены на рис. 6.21, в.

Кинематическую проверку выполним с помощью одной из возможных основных систем, приведенных на рис. 6.21, г. Для этого определим прогиб на опоре 2 с помощью эпюр $\overline{M}_2$ и M, который должен быть равен нулю:

$$\Delta_2 = \sum\int\frac{\overline{M}_2 M ds}{EJ} = \frac{1}{EJ}[(-\frac{8{,}4\cdot 3}{2})(\frac{0{,}18}{3}) + (\frac{7{,}2\cdot 3}{2})(\frac{2\cdot 0{,}18}{3}) +$$
$$+ (\frac{7{,}2\cdot 3}{2})(\frac{2\cdot 0{,}18}{3} + \frac{0{,}36}{3}) + (-\frac{1{,}2\cdot 3}{2})(\frac{0{,}18}{3} + \frac{2\cdot 0{,}36}{3}) +$$
$$+ (-\frac{1{,}2\cdot 4}{4})(\frac{2\cdot 0{,}36}{3} + \frac{0{,}2}{3}) + (-\frac{8{,}4\cdot 4}{2})(\frac{0{,}36}{3} + \frac{2\cdot 0{,}2}{3}) +$$
$$+ (-\frac{8{,}4\cdot 5}{2})(\frac{2\cdot 0{,}2}{3}) + (\frac{5\cdot 5^3}{12})(\frac{0{,}2}{2})] = \frac{1}{EJ}(9{,}1 - 8{,}74) = \frac{0{,}35}{EJ}.$$

Погрешность $\Delta\% = \dfrac{0{,}35}{9{,}0} 100\,\% \cong 3{,}9\,\% < 5\,\%.$

Статическая проверка:

$$\sum y = 0; \qquad -V_1 - V_2 - V_3 - V_4 + P + q \cdot 5 = 0;$$
$$-5{,}2 - 1{,}0 - 16{,}0 - 10{,}8 + 8 + 5 \cdot 5 = 0; \quad 33 - 33 = 0.$$

6.10. Расчет балок на упругом основании

Балка, лежащая на упругом сплошном основании, является особой статически неопределимой конструкцией. Под действием приложенной нагрузки q(z) (рис. 6.22) на поверхности контакта балки с основанием (подошве балки) возникает распределенная реакция p(z) (отпор основания), которая зависит от свойств балки, основания и характера нагрузки. Расчет подобных конструкций наиболее полно разработан в предположении о прямой пропорциональной зависимости между величиной отпора и прогибом балки (гипотеза Винклера):

$$p(z) = k_0\, b\, v(z) = k\, v(z), \tag{6.27}$$

где k_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), $Н{\cdot}м^{-3}$; b – ширина балки, м.

При использовании гипотезы Винклера решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 v}{d\zeta^4} + 4v = \frac{4}{k} q(\zeta). \tag{6.28}$$

Здесь ζ – безразмерная координата сечения, связанная с размерной (абсолютной) координатой z зависимостью

$$\zeta = m z, \tag{6.29}$$

где m – упругая характеристика балки

$$m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

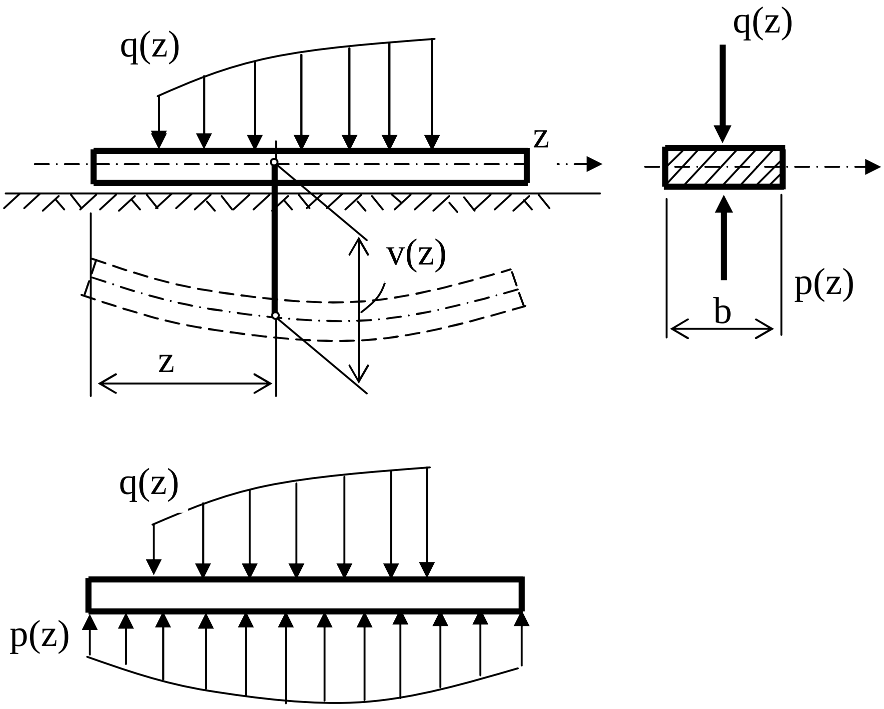


Рис. 6.22. Изгиб балки на упругом основании

Решение уравнения (6.28) методом начальных параметров (МНП) в форме, предложенной А.Н. Крыловым, приводит к интегралу уравнения

$$v(\zeta) = C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta) + C_3 V_3(\zeta) + C_4 V_4(\zeta) + V_*(\zeta), \tag{6.30}$$

где $V_i(\zeta)$- фундаментальные функции А.Н. Крылова, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} V_1(\zeta) &= \mathrm{ch}\zeta \cos\zeta, \\ V_2(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\zeta \sin\zeta + \mathrm{sh}\zeta \cos\zeta\right), \\ V_3(\zeta) &= \frac{1}{2}\mathrm{sh}\zeta \sin\zeta, \\ V_4(\zeta) &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{ch}\zeta \sin\zeta - \mathrm{sh}\zeta \cos\zeta\right). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Значения фундаментальных функций V_i протабулированы и приведены в справочном пособии [3]. Одно из замечательных свойств фундаментальных функций состоит в том, что производная от одной из таких функций является другой фундаментальной функцией. Действительно:

$$V_1'(\zeta) = -4V_4(\zeta); \quad V_2'(\zeta) = V_1(\zeta);$$
$$V_3'(\zeta) = V_2(\zeta); \quad V_4'(\zeta) = V_3(\zeta). \qquad (6.32)$$

Частное решение уравнения (6.28) по методу начальных параметров для общего случая нагрузки $q(\zeta)$ имеет вид

$$V_*(\zeta) = \int_0^{\zeta} V_4(\zeta - t)\frac{4}{k}q(\zeta)\,dt. \qquad (6.33)$$

Для конкретных и наиболее распространенных случаев загружения частные решения приведены в табл. 6.2. После нахождения интеграла $v(\zeta)$ определение функций углов поворота $\theta(\zeta)$ и внутренних усилий $Q(\zeta)$ и $M(\zeta)$ могут быть найдены по следующим зависимостям:

$$\theta(\zeta) = m\,v'(\zeta); \; M(\zeta) = -EJm^2\,v''(\zeta); \; Q(\zeta) = -EJm^3\,v'''(\zeta). \qquad (6.34)$$

Выражения (6.34) получаются при использовании зависимостей (6.32).После определения уравнений перемещений и внутренних усилий находят произвольные постоянные интегрирования C_i из граничных условий задачи. Последние бывают трех типов: кинематическими, статическими и смешанными. Если на концах балки заданы только перемещения v и θ, то условия называют кинематическими. В случае, когда на концах балки заданы только внутренние усилия Q и M, граничные условия являются статическими. Смешанные граничные условия состоят в том, что на концах балки задаются как перемещения, так и внутренние усилия. Последний случай наиболее распространен в расчетной практике.

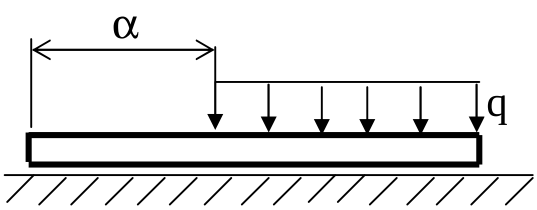
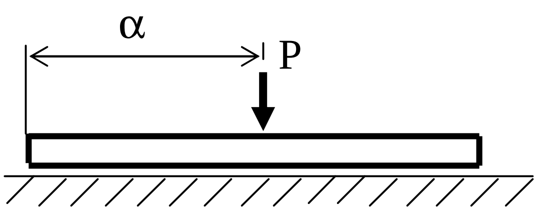
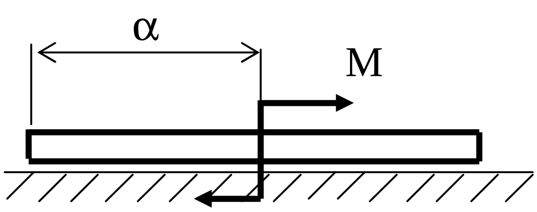
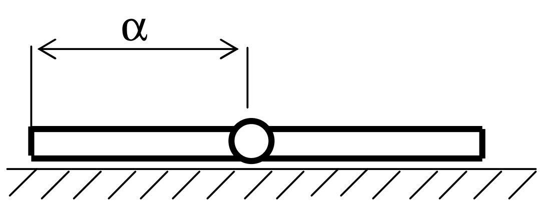
В силу известных свойств решения в форме МНП произвольные постоянные C_i могут быть определены через известные перемещения и внутренние усилия в начале координат (начальные параметры задачи):

$$C_1 = v(0);\ C_2 = \frac{\theta(0)}{m};\ C_3 = -\frac{M(0)}{EJm^2};\ C_4 = -\frac{Q(0)}{EJm^3}. \qquad (6.35)$$

Обычно для начала координат известна только часть начальных параметров (чаще всего два). Тогда недостающие граничные условия формулируют для другого конца балки при $z = \lambda$. При вычислениях перемещений и внутренних усилий можно использовать правило отрицательного аргумента, рассмотренное выше. Скачок $\Delta\theta$ в промежуточных шарнирах определяется из статического условия – M = 0 в шарнире.

Таблица 6.2

Частные решения для некоторых видов нагрузки

№	Вид воздействия	Частное решение
1		$V_q(\zeta) = \frac{q}{k}\left[1 - V_1(\zeta - \alpha)\right]$
2		$V_p(\zeta) = \frac{4Pm}{k} V_4(\zeta - \alpha)$
3		$V_M(\zeta) = -\frac{4Mm^2}{k} V_3(\zeta - \alpha)$
4		$V_{\Delta\theta}(\zeta) = \frac{\Delta\theta}{m} V_2(\zeta - \alpha)$ $\Delta\theta$ – скачок угла поворота в шарнире

Пример 6.6.

Задана балка из сосны (рис. 6.23), свободно опирающаяся на стену на правом конце и на грунт по всей длине. Коэффициент постели $k_0 = 10^4$ кН $\cdot$ м$^{-3}$.

Характеристики балки:

$$E = 10^7 \text{ кПа; } b = 0{,}3 \text{ м; } h = 0{,}2 \text{ м; } J = \frac{bh^3}{12} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Требуется определить значения V, θ, Q и M в сечениях балки, построить эпюры и определить наибольшие нормальные напряжения.

Определяем безразмерную длину балки

$$k = k_0 b = 0{,}3 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-2};$$

$$m = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 0{,}787 \text{ м}^{-1}; \quad \lambda = lm = 4 \cdot 0{,}787 = 3{,}15;$$

$$\alpha_p = \alpha_q = 1{,}5 \cdot 0{,}787 = 1{,}18.$$

Универсальные уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$v(\zeta) = C_1 V_1(\zeta) + C_2 V_2(\zeta) + C_3 V_3(\zeta) + C_4 V_4(\zeta) + \frac{4Pm}{k} V_4(\zeta - 1{,}18) +$$
$$+ \frac{q}{k}[1 - V_1(\zeta - 1{,}18)];$$

$$\theta(\zeta) = m[-4C_1 V_4(\zeta) + C_2 V_1(\zeta) + C_3 V_2(\zeta) + C_4 V_3(\zeta) + \frac{4Pm}{k} V_3(\zeta - 1{,}18) +$$
$$+ \frac{4q}{k} V_4(\zeta - 1{,}18)];$$

$$M(\zeta) = -EJm^2[-4C_1 V_3(\zeta) - 4C_2 V_4(\zeta) + C_3 V_1(\zeta) + C_4 V_2(\zeta) +$$
$$+ \frac{4Pm}{k} V_2(\zeta - 1{,}18) + \frac{4q}{k} V_3(\zeta - 1{,}18)];$$

$$Q(\zeta) = -EJm^3[-4C_1 V_2(\zeta) - 4C_2 V_3(\zeta) - 4C_2 V_4(\zeta) + C_4 V_1(\zeta) +$$
$$+ \frac{4Pm}{k} V_1(\zeta - 1{,}18) + \frac{4q}{k} V_2(\zeta - 1{,}18)].$$

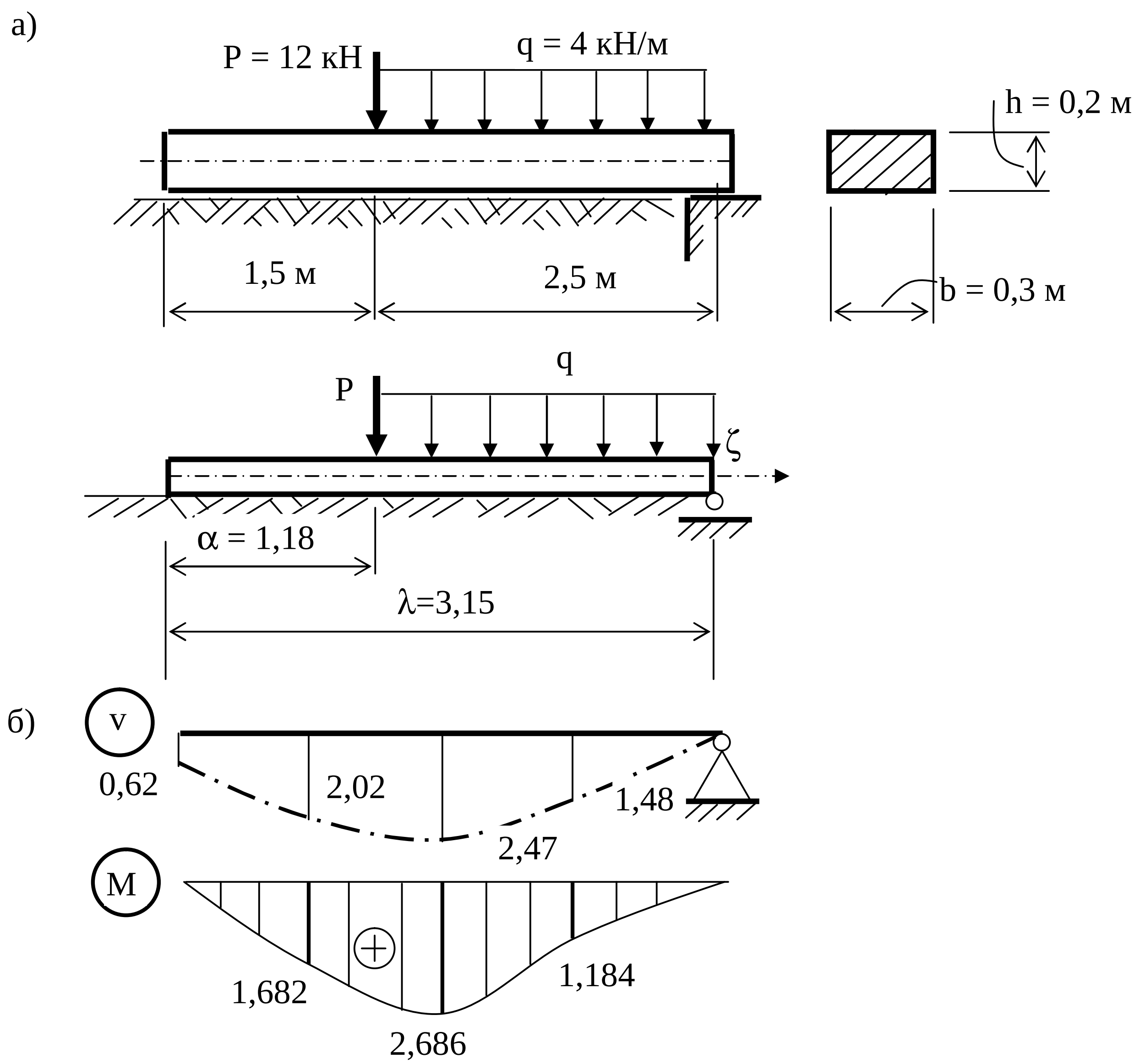


Рис. 6.23. Расчет балки на упругом основании

Граничные условия задачи.

Левый край (начало координат):

$\zeta = 0$; $M(0) = 0$; $Q(0) = 0$; $C_3 = C_4 = 0$.

Правый край:

$$\zeta = \lambda = 3{,}15;\ v(3{,}15) = 0;\ M(3{,}15) = 0;$$

$$v(3{,}15) = C_1 V_1(3{,}15) + C_2 V_2(3{,}15) + \frac{4\cdot 12\cdot 0{,}787}{3\cdot 10^3} V_4(3{,}15 - 1{,}18) +$$

$$+\frac{4}{3\cdot 10^3}[1 - V_1(3{,}15 - 1{,}18)] = C_1(-11{,}69) + C_2(-5{,}87) +$$

$$+12{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}184 + 1{,}33\cdot 10^{-3}[1-(-1{,}421)] =$$

$$= -11{,}69C_1 - 5{,}87C_2 + 18{,}14\cdot 10^{-3} = 0;$$

$$M(3{,}15) = -4C_1 V_3(3{,}15) - 4C_2 V_2(3{,}15) + \frac{4\cdot 12\cdot 0{,}787}{3\cdot 10^3} V_2(3{,}15 - 1{,}18) +$$

$$+\frac{4\cdot 4}{3\cdot 10^3} V_3(3{,}15 - 1{,}18) = -4C_1(-0{,}049) - 4C_2\cdot 2{,}887 +$$

$$+12{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}001 + 5{,}33\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}62 =$$

$$= 0{,}196C_1 - 11{,}55C_2 + 21{,}24\cdot 10^{-3} = 0.$$

Окончательно получаем систему двух линейных алгебраических уравнений

$$-11{,}69C_1 - 5{,}87C_2 + 18{,}14\cdot 10^{-3} = 0\ ;$$
$$0{,}196C_1 - 11{,}55C_2 + 21{,}24\cdot 10^{-3} = 0.$$

Корни системы $C_1 = 0{,}623\cdot 10^{-3}$ м; $C_2 = 1{,}85\cdot 10^{-3}$ м. Перемещения сечения в начале координат

$$v(0) = C_1 = 0{,}623\cdot 10^{-3}\text{ м} = 0{,}623\text{ мм}\ ;$$

$$\theta(0) = C_2\, m = 1{,}85\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}787 = 1{,}456\cdot 10^{-3}\text{ рад.}$$

В качестве иллюстрации найдем v и M при $\zeta = \lambda/2 = 1{,}57$ ($z = l/2 =$ $= 2{,}0$ м).

$$v(1{,}57) = 0{,}623 \cdot 10^{-3}\, V_1(1{,}57) + 1{,}85 \cdot 10^{-3}\, V_2(1{,}57) + \frac{4 \cdot 12 \cdot 0{,}787}{3 \cdot 10^3} V_4(1{,}57 - 1{,}18) +$$

$$+ \frac{4}{3 \cdot 10^3}\left[1 - V_1(1{,}57 - 1{,}18)\right] = (0{,}623 \cdot 0{,}02 + 1{,}85 \cdot 1{,}255 + 12{,}6 \cdot 0{,}01 +$$

$$+ 1{,}33 \cdot 0{,}004) \cdot 10^{-3} = 2{,}46 \cdot 10^{-3}\text{м} = 2{,}46 \text{ мм.}$$

$$M(1{,}57) = -EJm^2\left[-4 \cdot 0{,}623 \cdot 10^{-3}\, V_3(1{,}57) - 4 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-3}\, V_4(1{,}57) +\right.$$

$$\left. + \frac{4 \cdot 12 \cdot 0{,}787}{3 \cdot 10^3} V_2(1{,}57 - 1{,}18) + \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 10^3} V_3(1{,}57 - 1{,}18)\right] =$$

$$= -10^7 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}787(-2{,}492 \cdot 1{,}15 - 7{,}4 \cdot 0{,}626 + 12{,}6 \cdot 0{,}39 +$$

$$+ 5{,}33 \cdot 0{,}076) \cdot 10^{-3} = 1{,}23 \cdot 2{,}179 = 2{,}68 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Значения v и M в сечениях через $\Delta z = 1\text{м}$ приведены ниже в табл. 6.3 без подробных вычислений.

Таблица 6.3

Значения прогибов v и изгибающих моментов M в характерных сечениях балки

z, м	ζ	v, мм	M, кН·м
1,0	0,788	2,02	1,682
2,0	1,576	2,47	2,680
3,0	2,362	1,48	1,184
4,0	3,150	0	0

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении, расположенном в окрестности середины балки.

Наибольшее нормальное напряжение определяется так же, как и в обычной балке:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{2{,}686}{0{,}2 \cdot 10^{-2}} = 13{,}43 \cdot 10^2 \text{ кПа} = 1{,}343 \text{ МПа.}$$

7. Сложное сопротивление

7.1. Усилия и напряжения в поперечных сечениях стержней

Сложным сопротивлением стержня обычно называют такое его состояние, когда в его сечениях возникают два и более внутренних усилия.

Из рассмотренных ранее сопротивлений прямой поперечных изгиб, в котором возникают изгибающие момента М и поперечные силы Q, формально может быть отнесен к сложному сопротивлению. Однако, влияние поперечной силы Q на прочность и жесткость обычно невелико. Поэтому поперечный изгиб обычно изучают совместно с чистым изгибом, пренебрегая Q.

Ниже рассматриваются случаи сложного сопротивления, когда надо учитывать влияние всех внутренних усилий. Эти случаи представлены сложным изгибом, изгибом с растяжением (сжатием) и изгибом с кручением.

Величины изгибающих моментов определяются так же, как и при плоском изгибе, но правило знаков в условиях сложного сопротивления несколько модифицируется.

Продольные силы N по величине и знаку определяются так же, как и при простых деформациях – растяжении и сжатии. Если при сложном сопротивлении выполняются те же допущения, что были приняты в условиях простых деформаций: растяжении, сжатии и изгибе, – то все формулы напряжений будут справедливы и в данном случае.

Обозначив изгибающие моменты относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения M_x, M_y, опираясь на принцип суперпозиции, получим следующую общую формулу нормальных напряжений σ при сложном сопротивлении

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \ , \qquad (7.1)$$

где N – продольная сила в данном сечении; M_x, M_y – изгибающие моменты; F, I_x, I_y,– площадь поперечного сечения и главные центральные моменты инерции; x, y – координаты точки сечения.

7.2. Сложный изгиб

При сложном изгибе нагрузка расположена в обеих главных плоскостях балки (рис. 7.1). Так как сосредоточенные силы и действующая на балку распределенная нагрузка перпендикулярны продольной оси z, то усилие N равно нулю, и формула нормальных напряжений упрощается и принимает вид

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \ . \qquad (7.2)$$

Пример. 7.1.

Требуется подобрать сечение балки, показанной на рис 7.1, из условия прочности и из условия жесткости. Эскиз сечения приведен на рис. 7.2.

Определение усилий.

Нагрузки q и P_2 расположены в главной плоскости балки ycz. Реакции опор A и B в этой плоскости равны $R_{Ay} = 272{,}5$ кН, $R_{By} = 437{,}5$ кН.

Эпюра Q_y и эпюра моментов M_x построены способом характерных сечений (см. § 6.4).

В главной плоскости xcz действуют две внешние силы P_1 и P_3. Для возможности применения формальных приемов, рассмотренных ранее в разделе «Изгиб» используем такую проекцию в плоскости xcz, чтобы ось x была направлена вниз. Реакции опор A и B в этой плоскости равны $R_{Ax} = 55{,}0$ кН, $R_{Bx} = 95$ кН.

Эпюра Q_x и эпюра моментов M_y построена по характерным сечениям. Эпюры Q_y, M_x, Q_x, M_y показаны на рис. 7.1, б.

$$M_{yC} = M_{yA} = 0,$$

$$M_{yK} = -R_{Ax} \cdot 2 = -55 \cdot 2 = -110 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{yB} = -R_{Ax} \cdot 4 + P_1 \cdot 2 = -55 \cdot 4 + 60 \cdot 2 = -100 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{yD} = -R_{Ax} \cdot 5 + P_1 \cdot 3 + R_{Bx} \cdot 1{,}0 = 0.$$

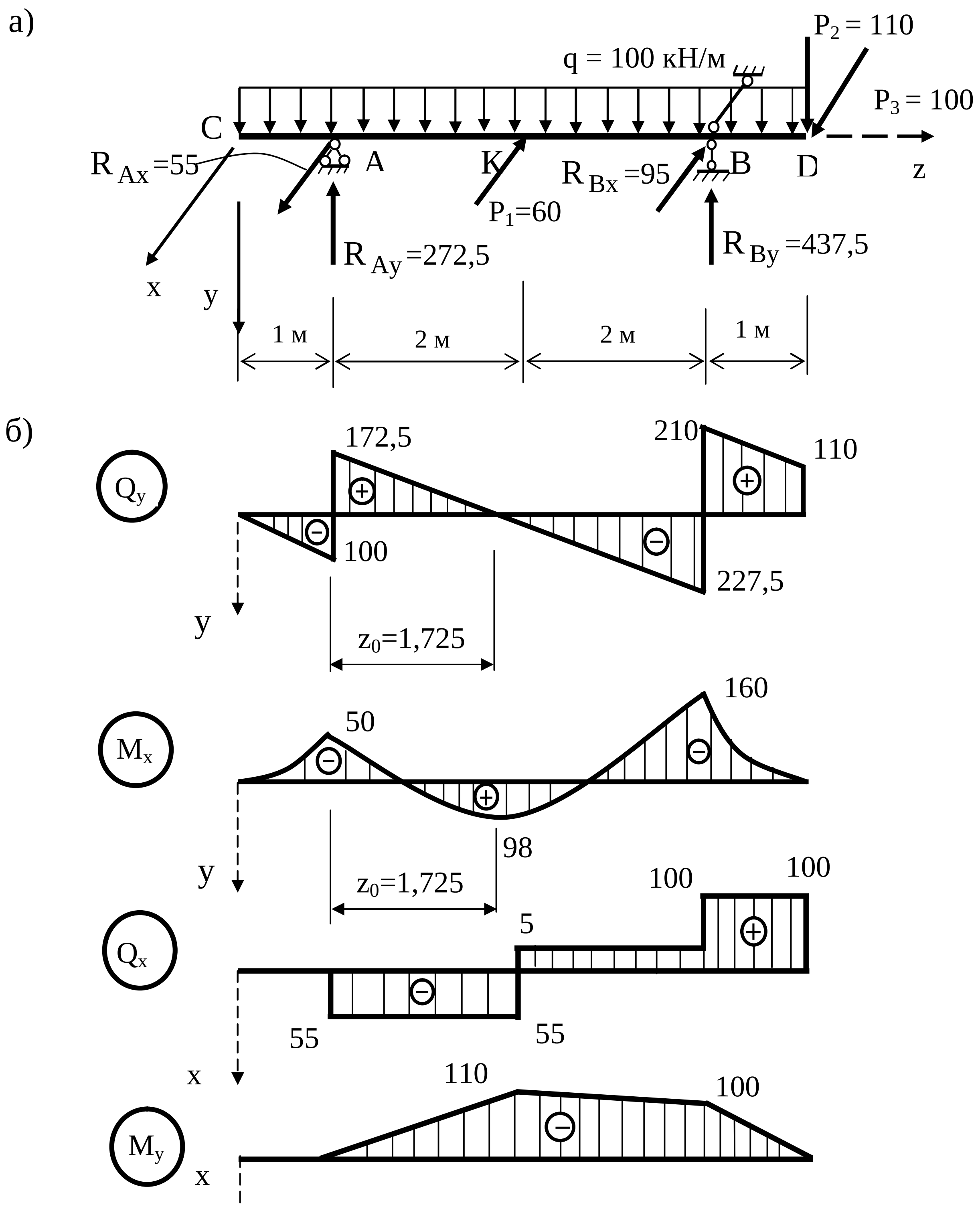


Рис. 7.1. Схема балки (а), эпюры усилий Q_y, M_x, Q_x, M_y (б)

По вычисленным значениям построена эпюра M_y (см. рис. 7.1, б).

Опасное сечение устанавливаем без учета поперечных сил по величинам изгибающих моментов. Очевидно, что таким сечением является сечение В, в котором действуют M_x = – 160 кН·м и M_y = – 100 кН·м.

Подбор сечения балки.

а) Подбор сечение заданной формы (рис. 7.2).

Все размеры сечения кратны параметру а. Требуется определить а, если [σ] = 180 МПа, [f] = ℓ/500 = 400/500 см = 0,8 см.

Центр тяжести сечения расположен на оси симметрии y, являющейся главной центральной осью сечения.

Координата центра тяжести y'_c относительно оси x' (см. рис. 7.2) равна

$$y'_c = \frac{\sum F_i\, y'_i}{\sum F_i} = \frac{2F_1\, y'_1 + F_3\, y'_3}{3F_1} =$$

$$= \frac{2\cdot 10\,a^2 \cdot 5\,a + 10\,a^2 \cdot (-10{,}5\,a)}{3\cdot 10\,a^2} = -6{,}83\,a.$$

На рис. 7.2 показан центр тяжести с, через который проходит вторая главная центральная ось сечения x. Оси x и y направлены так, что если смотреть с конца стрелки оси z, положительная четверть сечения расположена так же, как и на рисунке балки (рис. 7.1). Очевидно, $y_1 = y_2$ = 6,83 а – 5 а = 1,83 а; y_3 = (–10,5 а + 6,83 а) = – 3,67 а.

Главные центральные моменты инерции I_x, I_y равны:

$$J_x = \sum_{i=1}^{3} J_{x_i} + \sum_{1}^{3} F_i\, y_i^2 = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} + F_1\, y_1^2 + F_2\, y_2^2 + F_3\, y_3^2 =$$

$$= \frac{a\,(10\,a)^3}{12} + \frac{a\,(10\,a)^3}{12} + \frac{(10\,a)a^3}{12} + 10\,a^2 \cdot (1{,}83\,a)^2 +$$

$$+ 10\,a^2 \cdot (-3{,}67\,a)^2 = 369{,}9\,a^4;$$

$$J_y = 2\,J_{y_1} + J_{y_3} + 2F_1\, x_1^2 + F_3\, x_3^2 = 2\frac{a^3\,(10\,a)}{12} + \frac{a\,(10\,a)^3}{12} +$$

$$+ 2\cdot 10a^2 \cdot \left(4a + \frac{a}{2}\right)^2 = 490{,}0\,a^4.$$

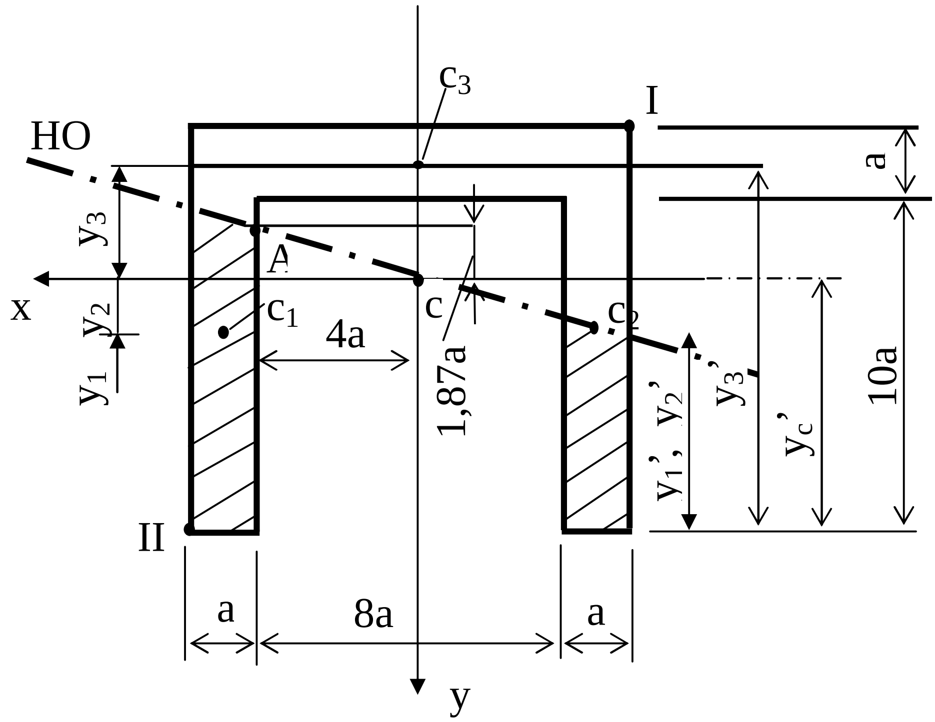


Рис. 7.2. Главные центральные оси x и y;
нейтральная ось (НО), опасные точки I и II

Подставим J_x и J_y и значения усилий в (7.2):

$$\sigma = \frac{-160 \cdot 10^3}{369{,}9\,a^4} y + \frac{-100 \cdot 10^3}{490\,a^4} x = -\frac{436{,}64}{a^4} y - \frac{204{,}08}{a^4} x.$$

Приравняв полученное выражение σ к нулю, получаем уравнение нейтральной оси (НО):

$$\sigma = 0; \quad -436{,}64y - 204{,}08x = 0.$$

Очевидно, что нейтральная ось – прямая линия. Чтобы построить ее, найдем две точки на нейтральной оси. Координаты одной точки очевидны при x = 0, y = 0. Затем примем $x_A = 4$ a, тогда

$$y_A = -\frac{204{,}08 \cdot 4a}{436{,}64} = -1{,}87\,a.$$

На рис. 7.2 показана нейтральная ось, проходящая через точки с и А. Нейтральная ось делит сечение на растянутую и сжатую части. Так как моменты M_x и M_y отрицательны, то положительная четверть сечения сжата. Сжатая часть сечения заштрихована.

Наибольшие напряжения действуют в наиболее удаленных от НО точках: т. II (наибольшие сжимающие напряжения – σ_{min}), т. I (наибольшие растягивающие напряжения σ_{max}).

Координаты т.II равны: x_{II} = 5a, y_{II}= 6,83a, координаты т. I – $x_I = -5a,\ \ y_I = -(11{,}0a - 6{,}83a) = -4{,}17a$.Таким образом напряжения в т. II по величине больше напряжений в т. I, следовательно, более опасной является т. II, так как в исходных $(y_I > |y_{II}|)$ данных принято единое допускаемое напряжение (одинаковое как при растяжении, так и при сжатии).

Значение параметра а определим из условия прочности в т. II.

$$\sigma_{II} = \sigma_{min} = \left| -\frac{436{,}64}{a^4} y_{II} - \frac{204{,}08}{a^4}\ x_{II} = -\frac{436{,}64}{a^4} 6{,}83a - \frac{204{,}08}{a^4} 5a = \right|$$

$$= \left| -\frac{4002{,}65}{a^3} \right| \le [\sigma] = 180\ \text{МПа}.$$

$$\frac{4002{,}65}{a^3} \le 180\ \text{МПа},\ a \ge \sqrt[3]{\frac{4002{,}65}{180 \cdot 10^6}} = 0{,}02815\ \text{м} = 2{,}82\ \text{см}.$$

Если сечение имеет сложный контур, например криволинейный, то координаты опасных точек могут быть найдены графически в соответствии с масштабом, в котором построено сечение.

В заключение необходимо определить размеры сечения по условию жесткости.

Определение прогибов в главных плоскостях балки выполним методом начальных параметров.

Главная плоскость ycz.

Запишем уравнение прогибов в этой плоскости с помощью универсального уравнения упругой линии балки при выборе начала координат в сечении С (рис. 7.1):

$$v(z) = v(0) + \theta_x(0)z + \frac{1}{EJ_x}[Q_y(0)\frac{z^3}{6} + M_x(0)\frac{qz^4}{24} - R_{Ay}\frac{(z-1)^3}{6} - R_{By}\frac{(z-5)^3}{6}],$$

где $v(0), \theta_x(0)$ – кинематические начальные параметры; $Q_y(0), M_x(0)$ – статические начальные параметры.

В нашем случае $Q_y(0) = 0,\ M_x(0) = 0$.

Кинематические начальные параметры находим из условий закрепления балки:

$$\text{при} \quad z = 1 \text{ м}, \quad v(1) = 0, \quad v(0) + \theta_x(0)1 + \frac{100 \cdot 1^4}{24EJ_x} = 0;$$

$$\text{при} \quad z = 5 \text{ м}, \quad v(5) = 0, \quad v(0) + \theta_x(0)5 + \frac{100 \cdot 5^4}{24EJ_x} - 272{,}5\frac{(5-1)^3}{6EJ_x} = 0.$$

Решая совместно уравнения v(1) = 0 и v(5) = 0 относительно v(0) и $\theta_x(0)$, получим

$$\theta_x(0) = \frac{76{,}67}{EJ_x}, \qquad v(0) = -\frac{80{,}84}{EJ_x}.$$

Уравнение v(z) в окончательном виде таково:

$$v(z) = -\frac{80{,}84}{EJ_x} + \frac{76{,}67}{EJ_x}z + \frac{1}{EJ_x}[\frac{qz^4}{24} - R_{Ay}\frac{(z-1)^3}{6} - R_{By}\frac{(z-5)^3}{6}].$$

Характерными сечениями являются сечения С, К (середина пролета) и D. Подставляя в v(z) абсциссы этих сечений, получим

$$v_C = v(0) = -\frac{80{,}84 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 369.9 a^4} = 0{,}109\frac{10^{-8}}{a^4},$$

$$v_K = v(3) = -\frac{80{,}84}{EJ_x} + \frac{76{,}67}{EJ_x}3 + \frac{1}{EJ_x}[\frac{100 \cdot 3^4}{24} - 272{,}5\frac{(3-1)^3}{6}] = 0{,}615\frac{10^{-8}}{a^4},$$

$$v_D = v(6) = -\frac{80{,}84}{EJ_x} + \frac{76{,}67}{EJ_x}6 + \frac{1}{EJ_x}[\frac{100 \cdot 6^4}{24} - 272{,}5\frac{(6-1)^3}{6} -$$

$$- 437{,}5\frac{(6-5)^3}{6}] = 0{,}625\frac{10^{-8}}{a^4}.$$

Главная плоскость xcz.

Уравнение прогибов в этой плоскости при выборе начала координат в сечении C имеет вид

$$u(z) = u(0) + \theta_y(0) + \frac{1}{EJ_y}[Q_x(0)\frac{z3}{6} + M_y(0)\frac{z2}{2} + R_{Ax}\frac{(z-1)^3}{6} -$$

$$- P_1\frac{(z-3)^3}{6} - R_{Bx}\frac{(z-5)^3}{6}],$$

где u(0), $\theta_y(0)$ – кинематические начальные параметры; $Q_x(0)$, $M_y(0)$ – статические начальные параметры.

В нашем случае $Q_x(0) = 0$, $M_y(0) = 0$.

Параметры u(0) и $\theta_y(0)$ находим из условия закрепления балки:

при $z = 1$ м, $u(1) = 0$, $u(0) + \theta_y(0)\cdot 1 = 0,$

при $z = 5$ м, $u(1) = 0$, $u(0) + \theta_y(0)5 + 55\frac{(5-1)^3}{6EJ_y} - 60\frac{(5-3)^3}{6EJ_y} = 0.$

Решая уравнения u(1) = 0 и u(5) = 0 совместно, получим

$$\theta_y(0) = -\frac{126{,}67}{EJ_y}, \quad u(0) = +\frac{126{,}67}{EJ_y}.$$

Тогда уравнение u(z) принимает вид

$$u(z) = \frac{126{,}67}{EJ_y} - \frac{126{,}67}{EJ_y}z + \frac{1}{EJ_y}[R_{Ax}\frac{(z-1)^3}{6} - P_1\frac{(z-3)^3}{6} -$$

$$- R_{Bx}\frac{(z-5)^3}{6}].$$

Перемещения характерных сечений C, K и D равны

$$u_C = u(0) = \frac{126{,}67 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 490{,}0\,a^4} = 0{,}129\frac{10^{-8}}{a^4},$$

$$u_K = u(3) = \frac{126{,}67}{EJ_y} - \frac{126{,}67}{EJ_y}3 + 55\frac{(3-1)^3}{6\,EJ_y} = -0{,}1835\frac{10^{-8}}{a^4},$$

$$u_D = u(6) = \frac{126{,}67}{EJ_y} - \frac{126{,}67}{EJ_y}6 + 55\frac{(6-1)^3}{6\,EJ_y} - 60\frac{(6-3)^3}{6\,EJ_y} -$$

$$-95{,}0\frac{(6-5)^3}{6\,EJ_y} = 0{,}228\frac{10^{-8}}{a^4}.$$

Полные перемещения f сечений C, K и D, подсчитываемые как геометрические суммы составляющих v(z) и u(z), равны $f_C = 0{,}168\frac{10^{-8}}{a^4}$, $f_K = 0{,}644\ \frac{10^{-8}}{a^4}$, $f_D = 0{,}667\frac{10^{-8}}{a^4}$.

Таким образом, $f_{max} = f_D$.

Определим параметр a из условия жесткости $f_{max} \le [f]$:

$0{,}667\frac{10^{-8}}{a^4} \le 0{,}8$ см = 0,008 м,

отсюда $a \ge \sqrt[4]{\frac{10^{-8} \cdot 0{,}667}{0{,}008}} = 1{,}71 \cdot 10^{-2}\text{ м} = 1{,}71\text{ см}.$

По условию прочности $a \ge 2{,}82$ см $\approx 3{,}0$ см, по условию жесткости $a \ge 1{,}71$ см.

Окончательно принимается большее из этих двух значений $a = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м.

7.3. Расчет стержня при изгибе со сжатием

Жесткая стойка, шарнирно закрепленная по концам, находится под действием поперечных нагрузок q и P_2, расположенных в главных плоскостях стойки, и продольной нагрузки P_1, приложенной внецентренно (рис. 7.3). Поперечное сечение стойки выполнено из двух двутавров № 20 (рис. 7.4). Требуется определить величину допускаемой нагрузки [q] из условия прочности.

Исходные данные: $\ell = 2$ м, $a = 0{,}2\,\ell$, $P_1 = 0{,}5q\ell$, $P_2 = 0{,}3q\ell$, $[\sigma] = 160$ МПа, $\ell_1 = 1{,}5$ м.

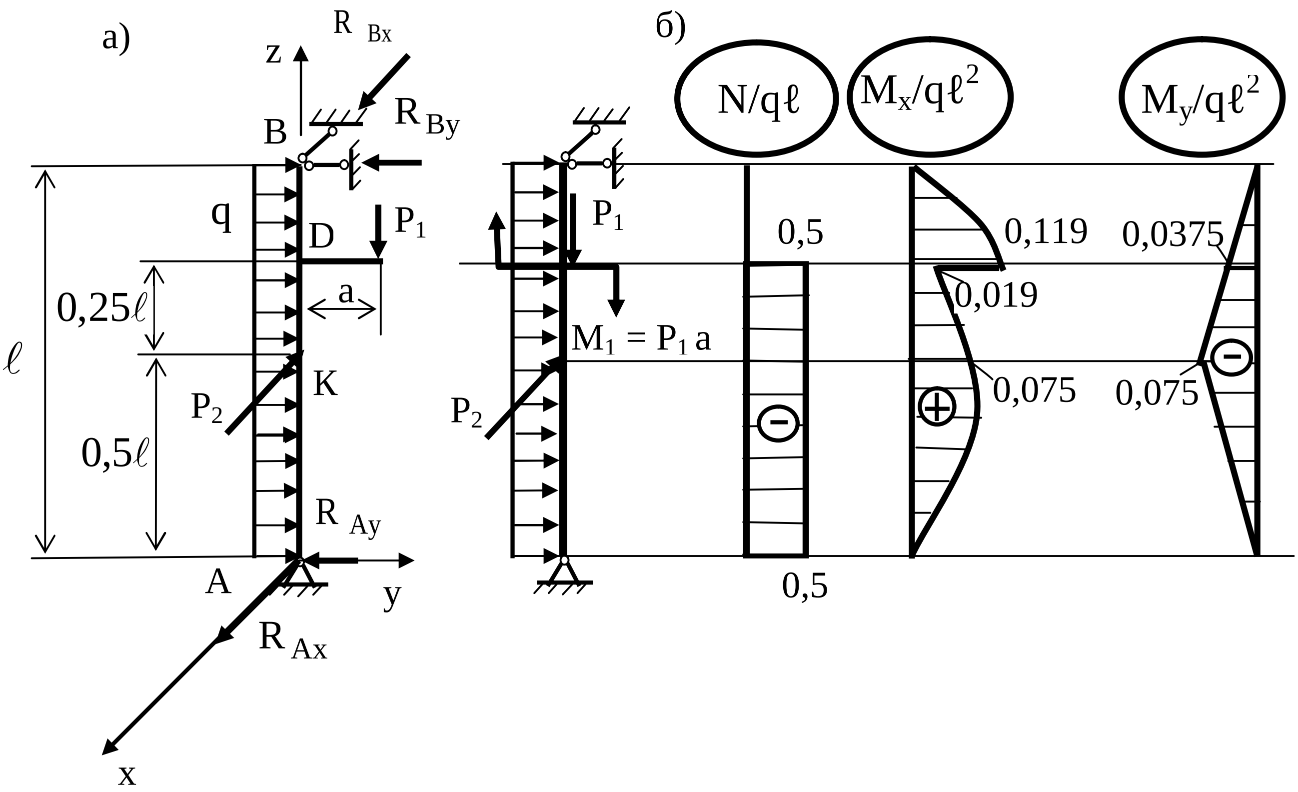


Рис. 7.3. Схемы стойки (а) и эпюры усилий (б)

Построение эпюр усилий. Определение опасного сечения

При построении эпюр предварительно все нагрузки рекомендуется привести к оси стержня. В нашем случае это необходимо сделать лишь для силы P_1 (рис. 7.3).

Продольную силу N создает одна сила P_1, сжимающая часть стержня от сечения D до сечения A, поэтому $N = -\,P_1 = -\,0{,}5\,q\ell$.

Эпюры N и M_x и M_y, построенные по характерным сечениям, изображены на рис. 7.3.

Из эпюр видно, что опасными сечениями являются сечения D и K. В сечении D действуют $N = -\,0{,}5\,q\ell$, $M_x = +\,0{,}119\,q\ell^2$,

$M_y = -0,0375\ q\ell^2$; в сечении K : $N = -0,5\ q\ell$, $M_x = +0,075\ q\ell^2$, $M_y = -0,075\ q\ell^2$.

Сечение схематично показано на рис. 7.4. Его геометрические характеристики подсчитаны в соответствии с ГОСТ 8239 – 86: площадь № 20 $F^I = 26,4$ см^2, главные центральные моменты инерции $J_x^I = 1810$ см^4, $J_y^I = 112$ см^4.

Тогда геометрические характеристики сечения равны

$$F = 2F^I = 52,8\,см^2;\quad J_x = 2J_x^I = 2 \cdot 1810 = 3620\,см^4;$$

$$J_y = 2 \cdot 112 + 2 \cdot 26,4 \cdot 5^2 = 1544\,см^4.$$

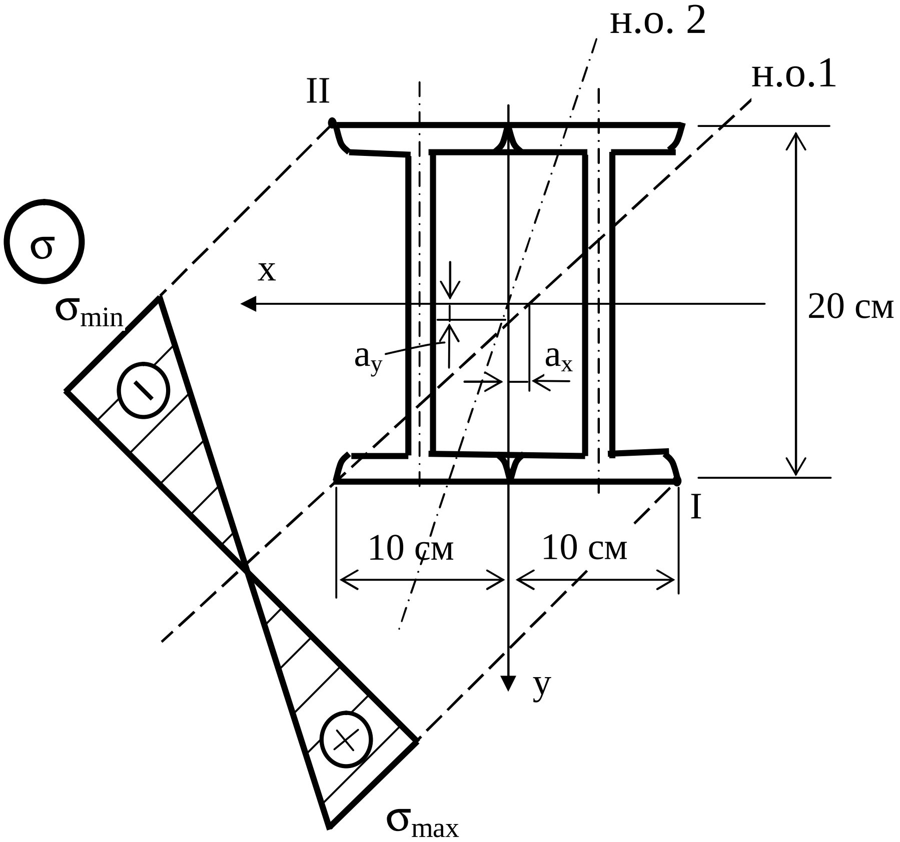


Рис. 7.4. Поперечное сечение стойки и эпюра нормальных напряжений

Построение эпюр нормальных напряжений в сечениях. Определение наибольшего напряжения и нагрузки q

Подставляя в формулу 7.1 значения усилий в сечении D и геометрические характеристики, получим

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = -\frac{0{,}5 q\ell}{52{,}8 \cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}119 q\ell^2}{3{,}62 \cdot 10^{-5}} y - \frac{0{,}0375 q\ell^2}{1{,}544 \cdot 10^{-5}} x =$$

$$= -1{,}894 \cdot 10^2\, q + 1{,}29 \cdot 10^4\, qy - 0{,}972 \cdot 10^4\, qx.$$

Уравнение нейтральной оси $\sigma = 0$,

$$-1{,}894 \cdot 10^2 q + 1{,}29 \cdot 10^4 q y_0 - 0{,}972 \cdot 10^4 q x_0 = 0.$$

Из уравнения видно, что н.о. есть прямая линия, для построения которой достаточно найти две ее точки пересечения с осями x и y. Координаты этих точек:

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = a_y = +\frac{1{,}894 \cdot 10^2 q}{1{,}29 \cdot 10^4 q} = 1{,}47 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$y_0 = 0,\ \ x_0 = a_x = -\frac{1{,}894 \cdot 10^2 q}{0{,}972 \cdot 10^4 q} = -\,1{,}95 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

На рис. 7.4 показана эта нейтральная ось (н.о. 1) и эпюра σ. Из эпюры σ следует, что наибольшее напряжение возникает в т.II (+10, –10 см) и оно равно

$$\sigma_{II} = -1{,}894 \cdot 10^2 q + 1{,}29 \cdot 10^4 q(-0{,}1) - 0{,}972 \cdot 10^4 q \cdot 0{,}1 = -2{,}45 \cdot 10^3 q.$$

Сечение K.

Нормальные напряжения в сечении K определяются выражением

$$\sigma = -\frac{0{,}5 q\ell}{52{,}8 \cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}075 q\ell^2}{3{,}62 \cdot 10^{-5}} y - \frac{0{,}075 q\ell^2}{1{,}544 \cdot 10^{-5}} x =$$

$$= -1{,}849 \cdot 10^2\, q + 0{,}815 \cdot 10^4\, qy - 1{,}944 \cdot 10^4\, qx.$$

В соответствии с этим уравнением нейтральная ось 2, будет расположена подобно н.о. 1. Эпюра σ в сечении K не показана, так как очевидно, что она будет подобна эпюре σ в сечении D. Следовательно, наибольшее напряжение в сечении K будет возникать тоже в т. II.

Тогда σ_{II} = – 1,849 $\cdot 10^2$q + 0,815 $\cdot 10^4$q (– 0,1) – 1,944 $\cdot 10^4 \cdot$ 0,1 = = – $2{,}94 \cdot 10^3$ q.

Так как в точке II в сечении K напряжение больше, чем в сечении D, то определяем допускаемую нагрузку q по $\sigma_{II} = -2{,}94 \cdot 10^3 q$.

Из условия прочности имеем

$$\left|\sigma_{II}\right| = -2{,}94 \cdot 10^3 q \le [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Отсюда

$$[q] = \frac{160}{2{,}94 \cdot 10^3} = 54{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м} = 54{,}4 \text{ кН/м}.$$

Принимается окончательно $[q] = 54{,}4$ кН/м.

7.4. Расчет вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба и кручения

Валы различных машин в большинстве случаев представляют собой прямые брусья круглого сплошного или реже кольцевого сечения, работающие на совместное действие изгиба и кручения.

При расчете валов на совместное действие изгиба и кручения применяются теории прочности. При этом влиянием поперечных сил, как правило, пренебрегают, так как соответствующие им касательные напряжения в опасных точках бруса невелики по сравнению с касательными напряжениями от кручения и нормальными напряжениями от изгиба.

На рис. 7.5 показан вал с кривошипом и шкивом весом Q, на который действуют силы натяжения ремня T и t (T > t). На правом конце на палец кривошипа действует горизонтальная сила P.

Определим изгибающий и крутящий моменты в вале. Силы T и t заменим равнодействующей, приложенной в центре шкива, и парой m_1 =(T – t) R, где R – радиус шкива.

Сила T + t вместе с весом шкива Q изгибает вал, пара (T – t) R скручивает вал и уравновешивается парой, приложенной к его правому торцу. Тогда

$$M_{кр} = PH_0 = (T - t)\,R.$$

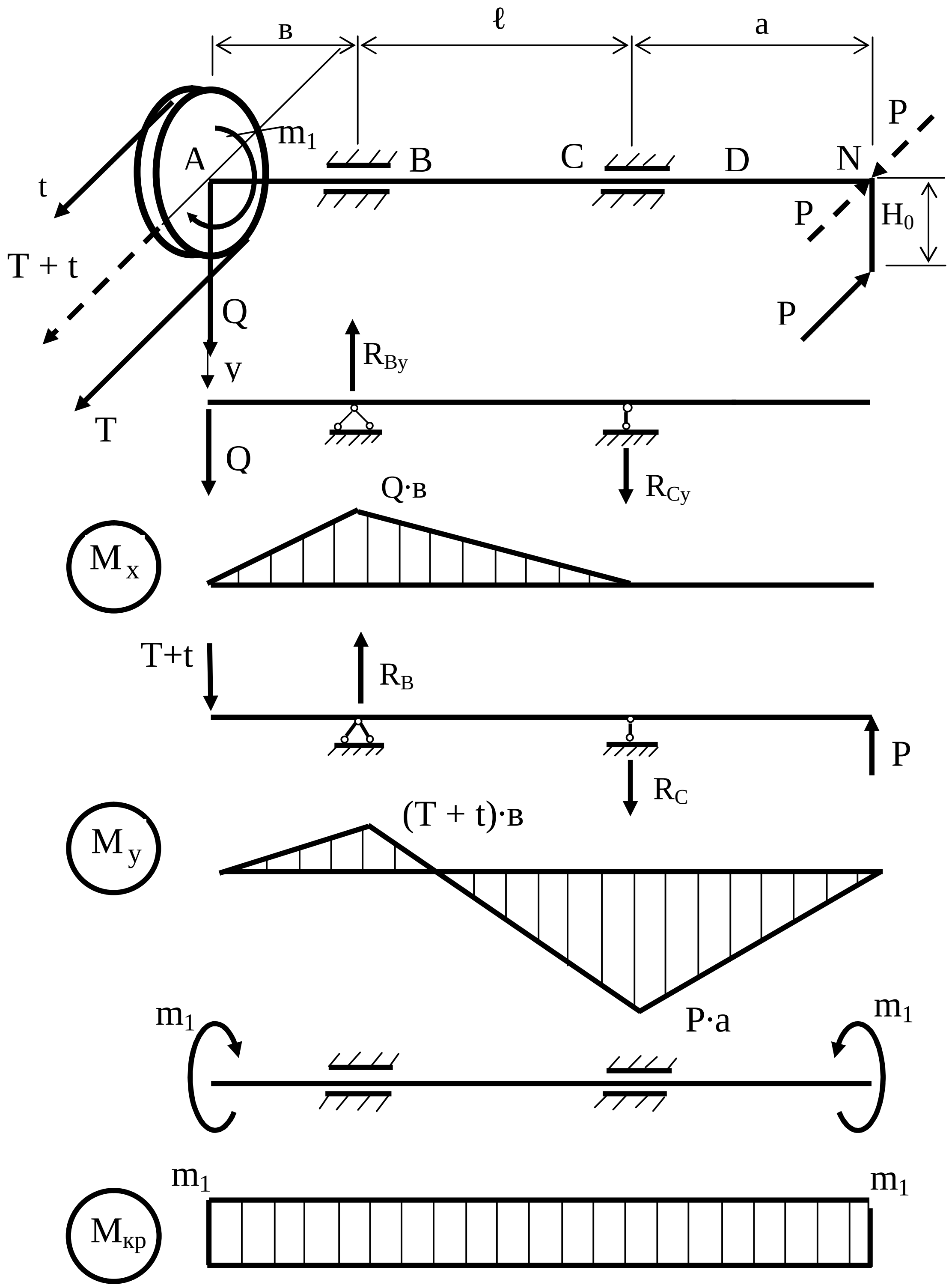


Рис. 7.5. Расчетная схема и эпюры
внутренних силовых факторов

При известном числе оборотов n и передаваемой мощности N (в лошадиных силах – л.с.) крутящий момент определится

$$M_{кр} = \frac{716{,}2\,N}{n},\ \text{кг}\cdot\text{м}$$

При этом надо учитывать, что 1 л.с. = 0,736 кВт

$$M_{кр} = \frac{716{,}2}{0{,}736}\frac{K}{n} = 973{,}6\frac{K}{n},\ \ \text{кг}\cdot\text{м},$$

где K – мощность в киловаттах.

Или при заданной круговой частоте ω – рад/с и мощности K – Вт

$$M_{кр} = \frac{K}{\omega},\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

На основе расчетной схемы определяют опорные реакции и строят эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и эпюру крутящих моментов (см. рис. 7.5).

Вычислив наибольшие значения суммарного изгибающего $M_и = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ и крутящего $M_{кр}$ моментов, устанавливают опасное сечение вала и находят наибольшие напряжения.

Предполагая, что опасным является сечение C, разрежем вал в этом сечении и воспользуемся способом сложения действия сил (рис. 7.6).

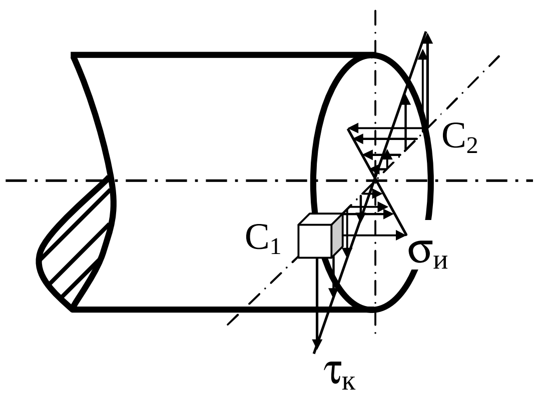


Рис. 7.6. Распределение напряжений в сечении вала

Точки C_1 и C_2, в которых действуют наибольшие нормальные и наибольшие касательные напряжения, являются наиболее опасными.

Выделим в окрестностях одной из этих точек элементарный объем, по граням которого действуют нормальные напряжения от изгиба $\sigma_и$ и касательные напряжения от кручения $\tau_к$.

Подобное плоское напряженное состояние испытывает элемент балки на расстоянии y от нейтральной оси. Разница состоит в том, что в рассматриваемом случае касательные напряжения вызваны кручением (рис. 7.7).

Для пластичного материала точки C_1 и C_2 равноопасны, для хрупкого и хрупкопластичного опаснее точка C_1, в которой от изгиба возникают нормальные растягивающие напряжения.

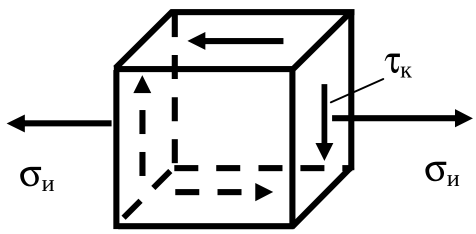


Рис. 7.7. Напряженное состояние в опасной точке вала

Валы чаще всего изготавливают из среднеуглеродистой конструкционной или реже легированной стали. Их расчет выполняют по третьей теории прочности:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \le [\sigma],$$

где $\sigma_и$ - нормальные напряжения от изгиба; $\tau_к$ - касательные напряжения от кручения

или

$$\sigma_{расч} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{W_к}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 4\frac{M^2{}_к}{4W^2{}_и}} =$$

$$= \frac{\sqrt{M_и^2 + M_к^2}}{W_и} = \frac{M_р}{W_и},$$

где $M_p = \sqrt{M_и^2 + M_к^2}$ – расчетный (эквивалентный) момент; $M_и$ – суммарный изгибающий момент; $M_к$ – крутящий момент; $W_и$ – момент сопротивления при изгибе; $W_к$ – момент сопротивления при кручении (полярный).

Тогда условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{расч} = \frac{M_p}{W_и} \le [\sigma].$$

При проектном расчете требуемый момент сопротивления поперечного сечения

$$W_и = \frac{\pi d^3}{32} \ge \frac{M_p}{[\sigma]};$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32\,M_p}{\pi[\sigma]}}.$$

Пример 7.2.

Вал зубчатой передачи (редуктора) изготовлен из стали 35 ($\sigma_т$=360 МПа). К левому концу вала подводится от электродвигателя мощность $K = 28$ кВт. Частота вращения вала $n = 630$ об/мин. Диаметр вала $d_в$ = 45 мм, диаметр зубчатой передачи d = 90 мм. Соотношение радиального и тангенциального усилий на зубчатой передаче $T_r = 0{,}364\,T_t$.

Проверить прочность вала в сечении под серединой зубчатого колеса. Влияние концентратора напряжений (шпоночный паз) не учитывать. Принять $[n_т] = 4{,}0$. Расчет выполнить по теории наибольших касательных напряжений.

Решение.

Момент, передаваемый валом:

$$M = \frac{K}{\omega} = \frac{28 \cdot 10^3}{66} = 425 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$\text{где } \omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 630}{30} = 66 \text{ рад/с}.$$

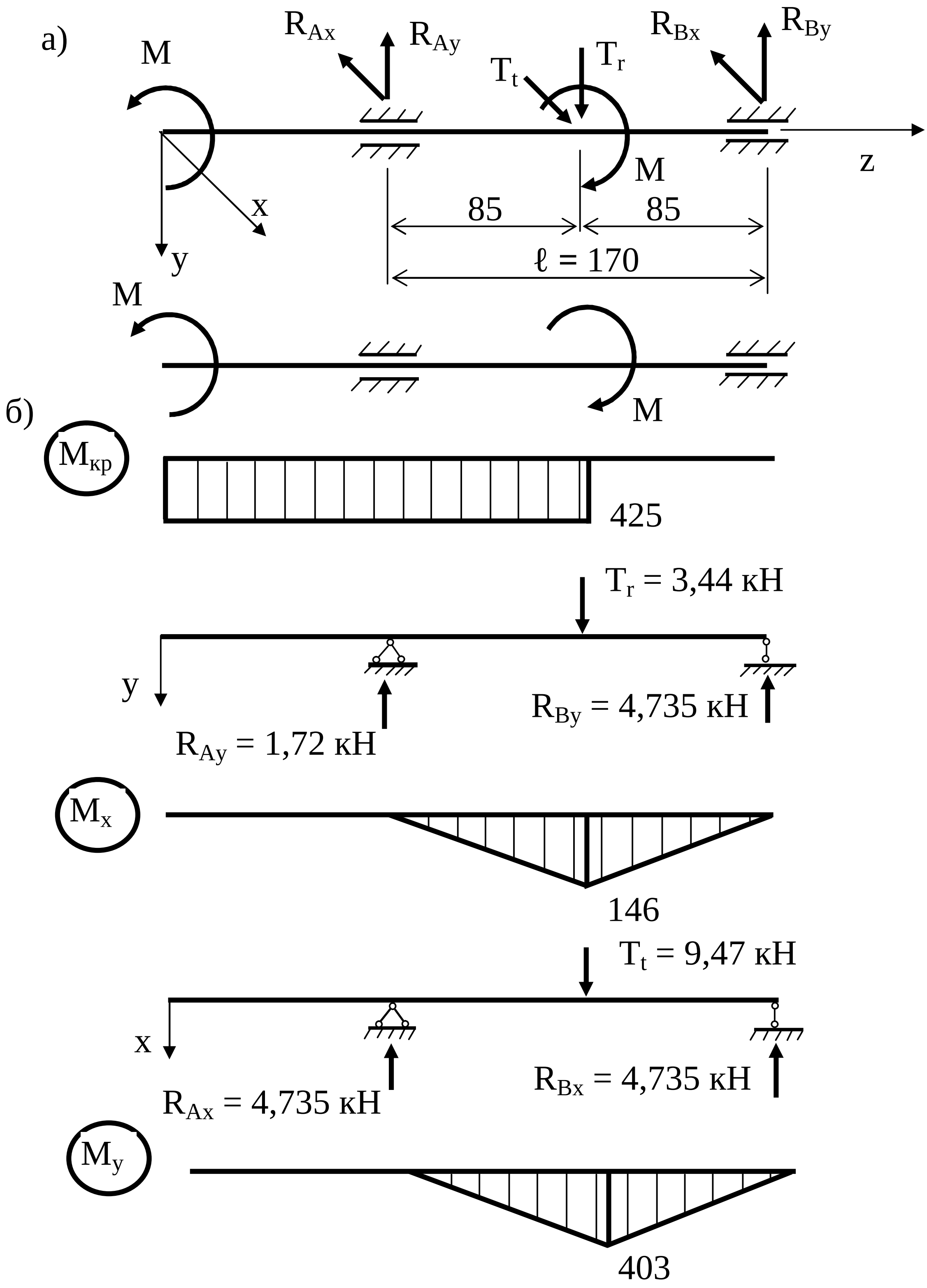


Рис. 7.8. Расчетная схема (а) и эпюры внутренних усилий (б)

Выражая этот момент через окружную силу, найдем

$$M = T_t \frac{d}{2};$$

$$T_t = \frac{2M}{d} = \frac{2 \cdot 425}{90 \cdot 10^{-3}} = 9470 \text{ Н} = 9,47 \text{ кН};$$

$$T_r = 0,364 T_t = 0,364 \cdot 9,47 = 3,44 \text{ кН};$$

$$M_и = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2} = \sqrt{146^2 + 403^2} = 428,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Расчетный момент под серединой колеса

$$M_р = \sqrt{M_и{}^2 + M_к{}^2} = \sqrt{428,6^2 + 425^2} = 603,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Расчетное напряжение для опасной точки сечения

$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{M_р}{0,1 d_в^3} = \frac{603,6 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 45^3} = 66,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 66,3 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса

$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{расч}^{III}} = \frac{310}{66,3} = 4,7 > [n_т] = 4,0.$$

Пример 7.3.

Определить размеры поперечного сечения вала из условия прочности. Материал вала – сталь Ст. 4, $\sigma_т = 260 \text{ Н}/\text{мм}^2 = 260 \text{ МПа}; [n] = 4,0;$ радиальная сила $T_r = 0,364 T_t$. Число оборотов вала $n = 375$ об/мин. Размеры зубчатых колес – D = 250 мм, D_1= 300 мм, D_2= 200 мм. Передаваемые мощности – K = 28 кВт, K_1=28 кВт, K_2=12 кВт. Скорость вращения – 375 об/мин.

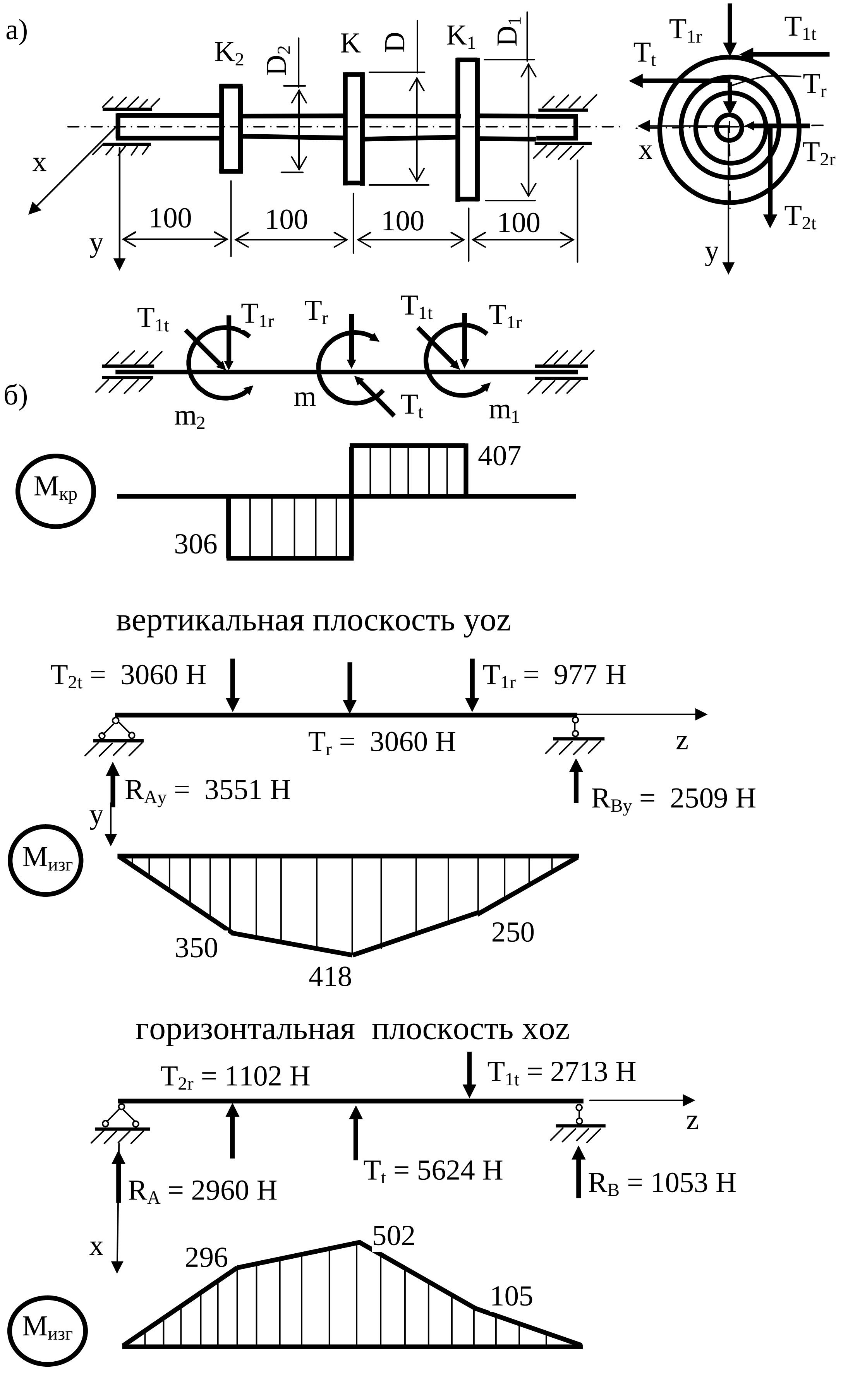


Рис. 7.9. Расчетная схема (а) и эпюры внутренних усилий (б)

Решение.

Вычислим скручивающие моменты, приложенные к валу:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 375}{30} = 39{,}3 \text{ рад/с}; \quad m = \frac{K}{\omega} = \frac{28 \cdot 10^3}{39{,}3} = 713 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$m_1 = \frac{K_1}{\omega} = \frac{16 \cdot 10^3}{39{,}3} = 407 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad m_2 = \frac{K_2}{\omega} = \frac{12 \cdot 10^3}{39{,}3} = 306 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру крутящих моментов.

Определяем окружные и радиальные усилия:

$$T_t = \frac{2m}{D} = \frac{2 \cdot 703 \cdot 10^3}{250} = 5624 \text{ Н};$$

$$T_r = 0{,}36 T_t = 0{,}36 \cdot 5620 = 2020 \text{ Н};$$

$$T_{1t} = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 407 \cdot 10^3}{300} = 2713 \text{ Н};$$

$$T_{1r} = 0{,}36 \cdot 2710 = 977 \text{ Н};$$

$$T_{2t} = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 306 \cdot 10^3}{200} = 3060 \text{ Н};$$

$$T_{2r} = 0{,}36 \cdot 3060 = 1103 \text{ Н}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ и изгибающих моментов в вертикальной M_x и горизонтальной M_y плоскостях, после чего определяем расчетный момент для опасного сечения по энергетической теории прочности:

$$M_p^{IV} = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2 + 0{,}75 M_{кр}{}^2} =$$

$$= \sqrt{418^2 + 502^2 + 0{,}75 \cdot 407^2} = 744 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности $\sigma_{расч} = \dfrac{M_p^{IV}}{W} \le [\sigma]$ имеем

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \geq \frac{M_p^{IV}}{[\sigma]}.$$

Диаметр вала с учетом коэффициента запаса $[n] = 4{,}0$ определится из условия

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_p^{IV}}{\pi \frac{\sigma_т}{[n]}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 744 \cdot 10^3}{3{,}14 \frac{260}{4}}} = 49 \text{ мм.}$$

Округляем до ближайшего большего стандартного и принимаем D = 50 мм.

8. Устойчивость прямолинейной формы равновесия центрально сжатого стержня

8.1. Общие понятия об устойчивости сжатых стержней и критической силе

Определение внутренних усилий методом сечений основывается на равновесии между внешними силами и внутренними усилиями.

Искривление сжатого стержня (рис. 8.1) путем приложения весьма малой силы ΔP в поперечном направлении вызывает дополнительные силы упругости, препятствующие его искривлению. После удаления причин, вызвавших искривление стержня, его выпрямлению будут препятствовать только сжимающие силы P. Внутренние же силы до некоторого значения сжимающей силы P будут преодолевать их сопротивление и возвращать стержню первоначальную прямолинейную форму упругого равновесия. Такое равновесие между внешними и внутренними силами прямого сжатого стержня будет устойчивым. Рассчитываемая конструкция будет надежна при условии, если форма равновесия, положенная в основу расчета, устойчива.

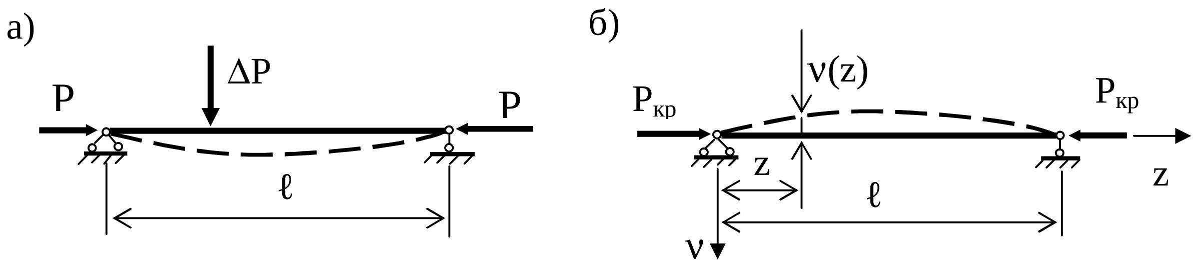


Рис. 8.1. Схема загружения стержня (а) и форма изогнутой оси (б)

При дальнейшем постепенном увеличении силы P можно достичь такого состояния, при котором и после удаления силы ΔP стержень не выпрямится, а останется искривленным. Это обусловливается тем, что действие внешних сжимающих сил P уравновешивается силами упругости как в прямом, так и в искривленном стержне. Такое состояние сжатого стержня называют критическим состоянием, а сжимающие силы при таком состоянии – критическими. Дальнейшее самое малое увеличение сжимающей силы P приводит к нарушению указанного равновесия и стержень переходит в неустойчивое положение. При незначительном исправлении оси стержня сжимающие силы начнут изгибать стержень и, с увеличением прогибов будут увеличиваться изгибающие моменты. Такой быстрый процесс нарастания прогибов и будет определять потерю устойчивости прямолинейной формы упругого равновесия стержня. Это приводит либо к внезапному разрушению стержня при сравнительно небольших значениях напряжений, либо к образованию новой искривленной формы устойчивого равновесия. Потеря устойчивости происходит в направлении минимальной жесткости сечения, т.е. в направлении, перпендикулярном к главной центральной оси сечения стержня, относительно которой момент инерции минимальный.

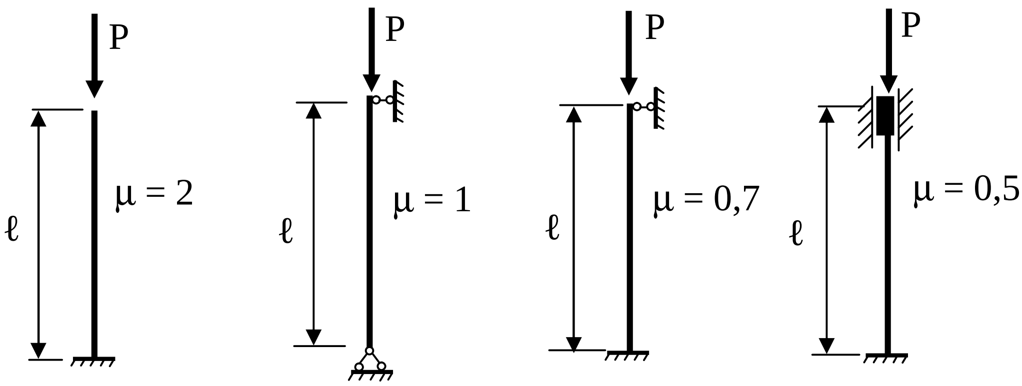


Рис. 8.2. Влияние способа закрепления стержня на величину μ

Величина критической сжимающей силы при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия определяется по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2}, \tag{8.1}$$

где μ – коэффициент, учитывающий способ закрепления концов стержня (рис. 8.2); ℓ – длина стержня; J_{min} – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня.

Произведение $\mu\ell = \ell_0$ называется приведенной длиной.

Условие устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} \geq [n_y], \tag{8.2}$$

где P – сжимающая сила; $P_{кр}$ – критическое значение сжимающей силы; $n_у$ – действительный коэффициент запаса устойчивости рассчитываемого стержня; $[n_у]$ – нормативный коэффициент запаса устойчивости.

Для стальных стоек $[n_у] = 1,8 \div 3,0$, для стоек из чугуна $[n_у] = 5 \div 5,5$, из дерева $[n_у] = 3 \div 3,2$.

Формула Эйлера для критической силы получена на основе дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому использование формулы возможно в случае справедливости закона Гука, т.е. пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \le \sigma_{пц},$$

тогда
$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{F(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu\ell}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{8.3}$$

где $\lambda = \frac{\mu\ell}{i}$ – гибкость стержня.

Применимость формулы Эйлера устанавливается при условии

$$\lambda \ge \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \tag{8.4}$$

В случае неприменимости формулы Эйлера, т.е. когда $\lambda < \lambda_{пред}$, величину критических напряжений определяют по формуле Ф.С. Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - в\lambda, \tag{8.5}$$

где a и в – коэффициенты, имеющие размерность напряжений и зависящие от материала (см. прил. 1).

При гибкости $\lambda < \lambda_0$ принимают $\sigma_{кр} = \sigma_т$.

Для чугуна при неприменимости формулы Эйлера $(\lambda < 80)$ пользуются формулой

$$\sigma_{кр} = a - в\lambda + c\lambda^2, \tag{8.6}$$

где а = 776 МПа, в = 12 МПа, с = 0,052 МПа.

Расчет центрально сжатых стержней может производиться из условия устойчивости, имеющего вид

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} \le [\sigma], \qquad (8.7)$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба), который зависит от материала и гибкости стержня (см. прил. 2).

Условие устойчивости (8.7) позволяет решать три типа задач:

1. Определение напряжений при заданных нагрузках и размерах сечения стержня и сравнение их с допускаемыми значениями;

2. Определение допускаемой нагрузки при заданном материале и размерах сечения стержня

$$[P] \le \varphi F[\sigma]\,; \qquad (8.8)$$

3. Определение площади поперечного сечения стержня при заданном материале и нагрузке

$$F \ge \frac{[P]}{\varphi[\sigma]}, \qquad (8.9)$$

где $\varphi\,[\sigma] = [\sigma_y]$ – допускаемое значение напряжений по условию устойчивости.

8.2. Примеры расчета сжатых стержней на устойчивость

Пример 8.1.

Определить допускаемую нагрузку для колонны с кольцевым поперечным сечением из стали Ст. 3, если

$[n_y] = 3$, $D = 120$ мм, $d = 100$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\ell = 7$ м.

Решение. При заданном значении коэффициента запаса на устойчивость допускаемая величина силы $[P]$ определится

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[n_у]}.$$

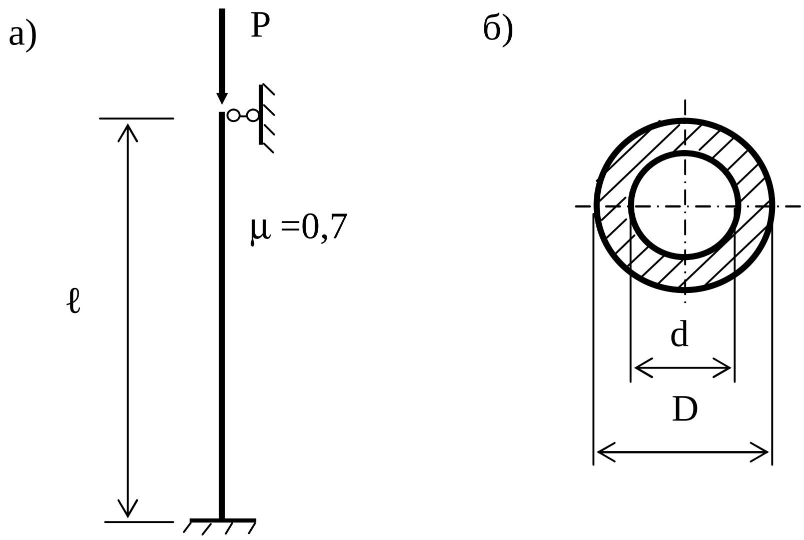


Рис. 8.3. Схема загружения стержня (а) и эскиз поперечного сечения (б)

Для определения $P_{кр}$ необходимо вычислить гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$, где i_{min} – минимальный радиус инерции.

Тогда

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi D^4}{64}(1 - C^4) \Big/ \frac{\pi D^2}{4}(1 - C^2)} = \frac{D}{4}\sqrt{1 + C^2},$$

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 7 \cdot 10^3}{\frac{120}{4}\sqrt{1 + 0,833^2}} = 126,$$

где $C = \frac{d}{D} = \frac{100}{120} = 0,833.$

Полученное значение $\lambda > \lambda_{пред} = 100$ для стали Ст. 3, следовательно, величина критической силы может быть определена по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 530 \cdot 10^4}{\left(0{,}7 \cdot 7 \cdot 10^3\right)^2} = 436 \cdot 10^3\ Н = 436\ кН,$$

где $J_{min} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - C^4) = \frac{3{,}14 \cdot 120^4}{64}(1 - 0{,}833^4) = 530 \cdot 10^4$ мм^4,

тогда $[P] = \frac{P_{кр}}{[n_y]} = \frac{436}{3} = 145{,}3$кН.

Пример 8.2.

Проверить на устойчивость стержень (рис. 8.4, а) при двух вариантах конструкции поперечного сечения из двух швеллеров №5 и двух полос 70×6 мм (рис. 8.4, б, в); $[n_y] = 2{,}5$, материал стойки – сталь Ст.3. Расстояние между швеллерами принять равным 6мм.

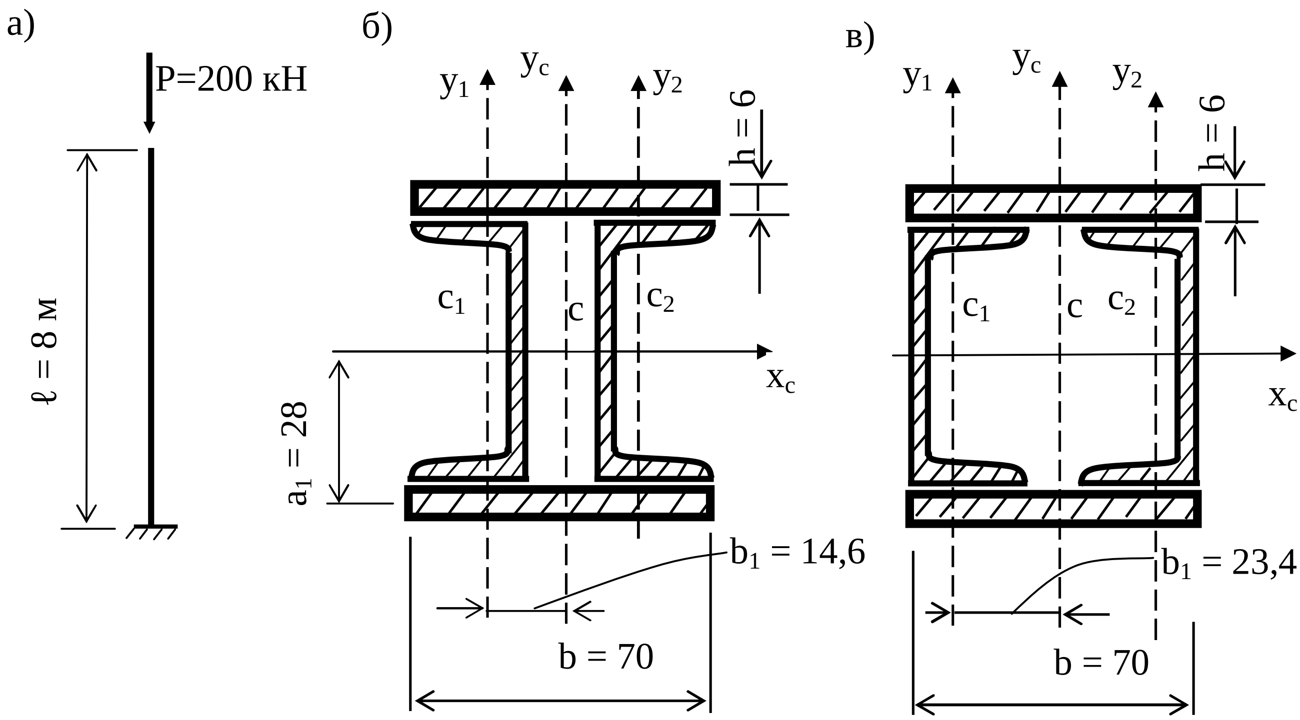


Рис. 8.4. Схема загружения стержня (а) и варианты конструкций сечения (б, в)

Вычислим моменты инерции сечения (б) относительно главных осей x и y.

$$J_x = \sum J_{xi} + \sum F_i a_i^2 = 2\left(J_{x_1}^{шв} + \frac{bh^3}{12} + a_1^2 bh \right) =$$

$$= 2\left(22{,}8 + \frac{7 \cdot 0{,}6^3}{12} + 2{,}8^2 \cdot 7 \cdot 0{,}6 \right) = 112 \ \text{см}^4.$$

$$J_y = \sum J_{yi} + \sum F_i b_i^2 = 2\left(J_{y_1}^{шв} + F_{шв} b_1^2 + \frac{hb^3}{12} \right) =$$

$$= 2\left(5{,}6 + 6{,}16 \cdot 1{,}46^2 + \frac{0{,}6 \cdot 7^3}{12} \right) = 72 \ \text{см}^4.$$

Площадь поперечного сечения стержня

$$F = \sum F_i = 2\,(6{,}16 + 7 \cdot 0{,}6) = 20{,}72 \ \text{см}^2.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{72 \cdot 10^4}{20{,}72 \cdot 10^2}} = 18{,}6 \ \text{мм}.$$

Тогда гибкость стержня удовлетворяет условию

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 800}{18{,}6} = 86 < \lambda_{пред} = 100,$$

следовательно, формула Эйлера неприменима и критическую силу вычислим по формуле Ясинского

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F = (310 - 1{,}14\lambda) F = (310 - 1{,}14 \cdot 86)\, 20{,}72 \cdot 10^2 =$$

$$= 440 \cdot 10^3 \ \text{Н} = 440 \ \text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{440}{200} = 2{,}2 < [n_y] = 2{,}5.$$

Устойчивость стержня не обеспечена на

$$\delta = \frac{2{,}5 - 2{,}2}{2{,}5} 100\,\% = 12\,\%.$$

Вычислим коэффициент запаса устойчивости стержня при втором варианте расположении швеллеров (рис. 8.4, в).

Момент инерции относительно оси x будет таким же, как и в первом варианте конструкции сечения:

$$J_x = 112 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2\left(5{,}6 + 2{,}34^2 \cdot 6{,}16 + \frac{0{,}6 \cdot 7^3}{12}\right) = 114 \text{ см}^4.$$

Из полученных значений J_x, J_y видно, что стержень практически равноустойчив во всех плоскостях $\left(J_x \approx J_y\right)$.

$$i_{min} = i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{112 \cdot 10^4}{20{,}72 \cdot 10^2}} = 23{,}2 \text{ мм};$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 800}{23{,}2} = 69.$$

Тогда

$$P_{кр} = \sigma_{кр} = F(310 - 1{,}14 \cdot 69)\; 20{,}72 \cdot 10^2 = 480 \cdot 10^3 \text{ Н} = 480 \text{ кН};$$

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{480}{200} = 2{,}4 < \left[n_y\right] = 2{,}5.$$

Необеспеченность устойчивости снижается до

$$\delta = \frac{2{,}5 - 2{,}4}{2{,}5} 100\,\% = 4\,\%,$$ что вполне приемлемо.

Таким образом, стойка должна быть выполнена по второму варианту.

Пример 8.3.

Определить допускаемую нагрузку $[P]$ и вычислить допускаемый коэффициент запаса устойчивости $\left[n_y\right]$ для деревянной стойки круглого сечения. Длина стойки $\ell = 6$ м; $d = 200$ мм; $[\sigma] = 10$ Н/мм^2; $E = 1 \cdot 10^4$ Н/мм^2.

Решение.

Вычислим минимальный радиус инерции

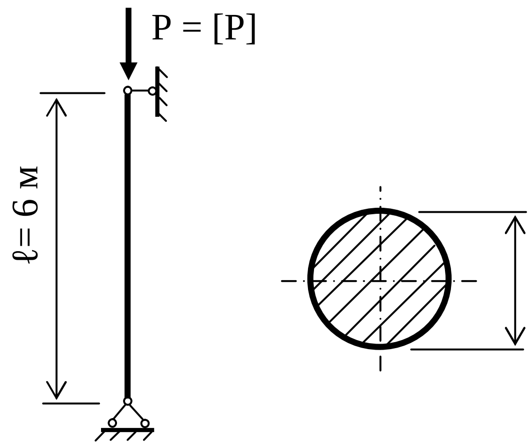


Рис. 8.5. Схема загружения стержня

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{200}{4} = 50 \text{ мм.}$$

Тогда гибкость при $\mu = 1$

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{6 \cdot 10^3}{50} = 120 > \lambda_{пред}.$$

Значение φ = 0,22 определим для λ = 120 по табл. прил. 2.

Для определения критической силы воспользуемся формулой Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi E J_{min}}{(\mu\ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \frac{3{,}14}{64} 200^4}{6000^2} = 215 \cdot 10^3 \text{ Н} = 215 \text{ кН.}$$

Величину допускаемой силы определим из условия устойчивости (8.7)

$$[P] = [\sigma]\varphi F = 10 \cdot 0{,}22 \frac{3{,}14 \cdot 200^2}{4} = 69{,}1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 69{,}1 \text{ кН;}$$

$$[n_y] = \frac{P_{кр}}{[P]} = \frac{215 \cdot 10^3}{69{,}1 \cdot 10^3} = 3{,}12.$$

Пример 8.4.

Подобрать двутавровое сечение стойки. Осевая сжимающая сила $P = 400$ кН, длина стойки $\ell = 1{,}5$ м. Материал – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ Н/мм^2.

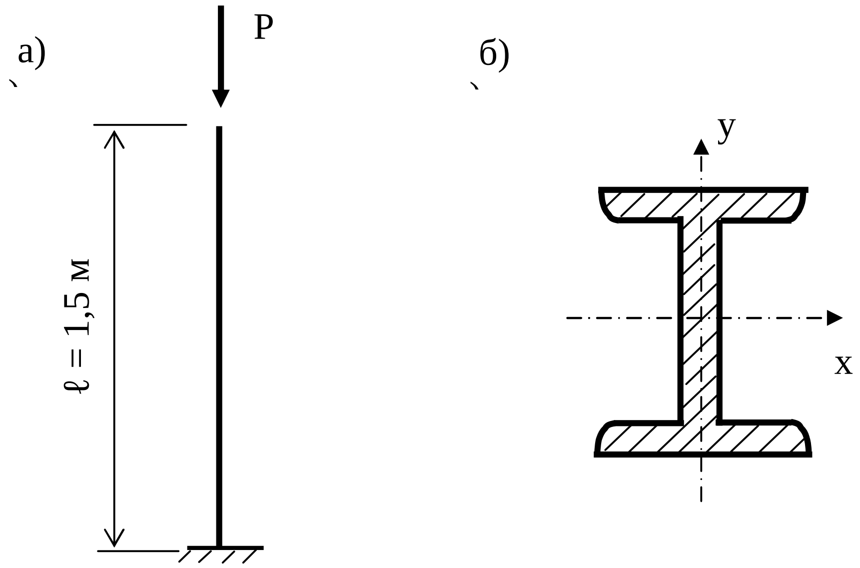


Рис. 8.6. Схема загружения стержня (а) и эскиз поперечного сечения (б)

Задача решается методом последовательных приближений. Для первого приближения примем $\varphi = 0{,}5.$ Тогда

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160} = 50 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

По сортаменту этой площади соответствует двутавр № 33 с $F = 53{,}8$ см^2, $i_{min} = 2{,}79$ см.

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{2{,}74 \cdot 10} = 107.$$

Коэффициент φ найдем интерполяцией в интервале между значениями:

на левой границе – $\lambda = 100$, $\varphi(100) = 0{,}6 = \varphi_{лев}$;

на правой границе – $\lambda = 110$, $\varphi(110) = 0{,}52 = \varphi_{прав}$;

приращения в интервале – $\Delta\lambda = 10,\ \Delta\varphi = -0{,}08.$

Следовательно, при

$\lambda = 107,\ \varphi(107) = \varphi_{лев} + \Delta\varphi \cdot 0{,}7 = 0{,}60 - 0{,}08 \cdot 0{,}7 = 0{,}544.$

Так как полученное значение φ не намного отличается от принятого, возьмем меньший профиль двутавра и проверим его. Возьмем двутавр №$30^{\underline{a}}$, $F = 49{,}9\ см^2$, $i_{min} = 2{,}95$ см.

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{2{,}95 \cdot 10} = 102\ .$$

Такому значению λ соответствует φ = 0,584.

Рабочее напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{49{,}9 \cdot 10^2} = 80{,}2\ Н/мм^2.$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma_у] = \varphi[\sigma] = 0{,}584 \cdot 160 = 93{,}3\ Н/мм^2\ .$$

Недогруз составляет

$$\delta = \frac{99{,}3 - 80{,}2}{93{,}3} 100\,\% = 14\,\%.$$

При дальнейшем уменьшении профиля (двутавр № 30) перегрузка составит 6,2 %, что нежелательно, поэтому принимаем двутавр № 30.

Пример 8.5.

Подобрать сечение стойки из двух равнобоких уголков. Длина стойки $\ell = 2{,}8$ м, $P = 240$ кН, материал сталь Ст.3, $[\sigma] = 160\ Н/мм^2$.

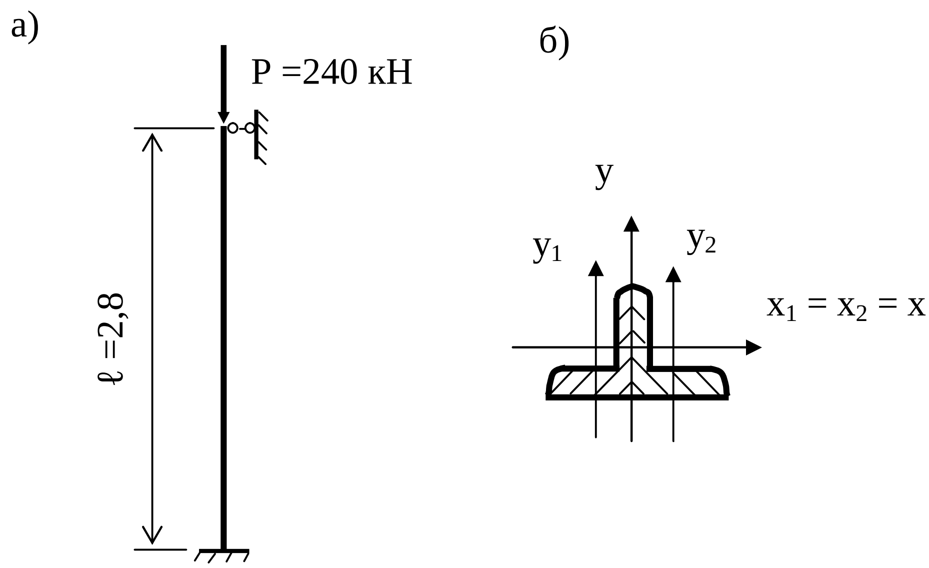


Рис. 8.7. Схема загружения стержня (а) и
эскиз поперечного сечения (б)

Для первого приближения примем $\varphi = 0{,}5$, тогда

$$F \ge \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{240 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160} = 30 \cdot 10^2 \text{ мм}^2 = 30 \text{ см}^2.$$

Этому значению подходит сечение из двух уголков ∟ 90×90×9. Геометрические характеристики такого сечения:

$$F = 2 \cdot 15{,}6 = 31{,}2 \text{ см}^2; \quad J_x = 2 \cdot 118 = 236 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 \cdot 219 = 438 \text{ см}^4, \quad i_{min} = i_x = \sqrt{J_x / F} = \sqrt{238/31{,}2} = 2{,}75 \text{ см}.$$

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0{,}7 \cdot 2{,}8 \cdot 10^3}{27{,}5} = 71.$

Коэффициент φ найдем интерполяцией, аналогично примеру 8.4

$$\varphi(71) = \varphi(70) + \Delta\varphi \cdot 0{,}1 = 0{,}81 - 0{,}06 \cdot 0{,}1 = 0{,}804.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = 0{,}804 \cdot 160 = 128{,}6 \text{ Н/мм}^2.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{240 \cdot 10^3}{31{,}2 \cdot 10^2} = 77 \text{ Н/мм}^2,$$

что значительно ниже допускаемого, поэтому выполним второе приближение

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,804}{2} = 0,65,$$

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,65 \cdot 160} = 23 \cdot 10^2 \text{ мм}^2 = 23 \text{ см}^2.$$

Этой площади соответствует сечение из двух уголков ∟ 75×75×8 с геометрическими характеристиками:

$$F = 2 \cdot 11,5 = 23 \text{ см}^2, \; i_{min} = i_x = 2,28 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 2,8 \cdot 10^3}{22,8} = 85,5 \rightarrow \varphi = 0,717.$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = 0,717 \cdot 160 = 114,7 \text{ Н/мм}^2.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{240 \cdot 10^3}{23 \cdot 10^2} = 104,4 \text{ Н/мм}^2.$$

Недогруз составит

$$\delta = \frac{114,7 - 104,4}{114,7} 100\,\% = 9\,\%.$$

Уровень недогруза достаточно велик, поэтому проведем расчет по третьему приближению

$$\varphi = \frac{0,65 + 0,717}{2} = 0,683.$$

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,683 \cdot 160} = 22 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

Этой площади соответствует сечение из двух уголков ∟ 70×70×8 с геометрическими характеристиками:

$$F = 2 \cdot 10{,}7 = 21{,}4\ \text{см}^2,\ i_{min} = i_x = 2{,}13\ \text{см},$$

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0{,}7 \cdot 2{,}8 \cdot 10^3}{21{,}3} = 92.$$

Определяем допускаемое напряжение:

$$\varphi = 0{,}672,$$

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = 0{,}672 \cdot 160 = 107{,}6\ \text{Н/мм}^2.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{240 \cdot 10^3}{21{,}4 \cdot 10^2} = 112\ \text{Н/мм}^2.$$

Перегрузка составит

$$\delta = \frac{112 - 107{,}6}{112} 100\% = 4\%.$$

Такая перегрузка вполне допустима. Принимаем сечение из двух уголков 70×70×8.

9. Расчеты на прочность при переменных напряжениях и динамических нагрузках

9.1. Основные сведения из теории

Во многих случаях в процессе работы детали машин и элементы конструкций многократно подвергаются действию периодически изменяющихся во времени нагрузок. Исследования показали, что структура металла при действии переменных нагрузок не меняется. При определенной величине переменных напряжений в перенапряженных зонах возможно образование микротрещин, которые в процессе работы детали прогрессируют, сливаясь с другими микротрещинами. В вершине трещины возникает большая концентрация напряжений, что еще больше способствует дальнейшему росту трещины, приводящему к ослаблению сечения и его внезапному разрушению.

Таким образом, под *усталостью* понимают процесс постепенного накопления повреждений материала при действии переменных напряжений, приводящих к образованию трещин и разрушению. Свойство материала противостоять усталости называют выносливостью.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь при любом произвольно большом числе повторений переменных нагрузок, называют пределом выносливости или пределом усталости.

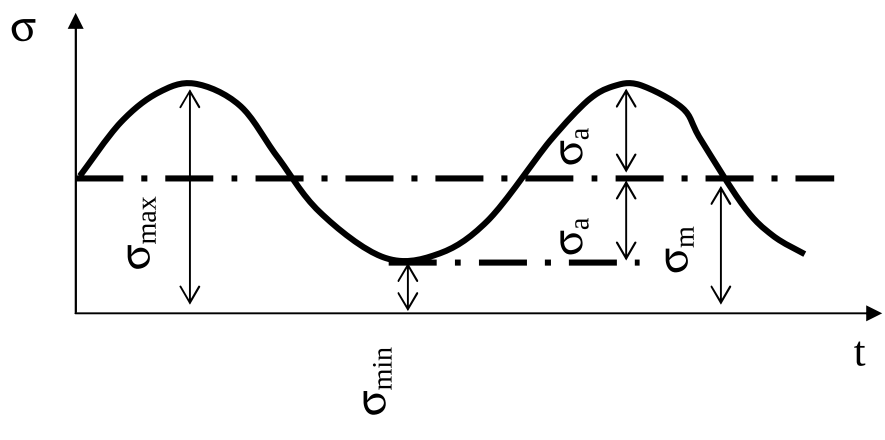


Рис. 9.1. Зависимость напряжений во времени (асимметричный цикл)

Изменение напряжений за один период называют циклом напряжений. Различным законам изменения напряжений соответствуют различные виды циклов: симметричный $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, асимметричный, если к переменным напряжениям добавится среднее постоянное значение от продольной силы, а σ_{max} и σ_{min} могут принимать различные значения; и если σ_{max} или σ_{min} равны нулю, то такой цикл называется отнулевым (пульсирующим).

Для асимметричного цикла (рис. 9.1) будут справедливы следующие зависимости:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \tag{9.1}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \tag{9.2}$$

где σ_m – среднее постоянное напряжение цикла; σ_a – амплитуда цикла – наибольшее значение переменной составляющей цикла напряжений.

Для характеристики цикла служит коэффициент асимметрии цикла, определяемый из выражения

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \tag{9.3}$$

Коэффициенты запаса прочности при изгибе и при кручении определяют соответственно из выражений

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\kappa_\sigma}{\varepsilon\beta}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_m}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\kappa_\tau}{\varepsilon\beta}\tau_a + \Psi_\tau \tau_m}, \tag{9.4}$$

где σ_{-1}, τ_{-1} – соответственно пределы выносливости при симметричном цикле при изгибе и кручении; κ_σ, κ_τ – эффективные коэффициенты концентрации при изгибе и кручении; ε – масштабный коэффициент; β – коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности; Ψ_σ, Ψ_τ – коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла, соответственно, при изгибе и кручении.

Для определения коэффициента запаса прочности при изгибе будем принимать симметричный цикл, при котором

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_{max} - (-\sigma_{max})}{2} = \sigma_{max}, \quad (9.5)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_и}{W_у} = \frac{M_и}{0{,}1d^3} = \sigma_a, \quad (9.6)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + (-\sigma_{max})}{2} = 0. \quad (9.7)$$

Если при кручении цикл является пульсирующим (отнулевым), то для него:

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{\tau_{max} - 0}{2} = \frac{\tau_{max}}{2},$$
$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_\rho} = \frac{M_к}{0{,}2\,d^3}. \quad (9.8)$$

По найденным значениям n_σ и n_τ вычислим общий коэффициент запаса прочности и сравним с заданным (допускаемым) $(n \geq n_0)$:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (9.9)$$

Если условие прочности не выполняется, производится подбор нового диаметра вала из выражения

$$d_н = d_{пр} = \sqrt[3]{\frac{n_0}{n}}, \quad (9.10)$$

где $d_{пр}$ – старый диаметр вала, для которого производится проектировочный расчет; n – вычисленное значение коэффициента запаса прочности; n_0 – заданный коэффициент запаса прочности.

Далее все расчеты повторяются для нового диаметра вала, пока не будет удовлетворено условие прочности.

Алгоритм расчета вала на прочность при переменных напряжениях при совместном действии изгиба и кручения.

А. Статический расчет вала.

1. Построить эпюры внутренних усилий – изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и крутящих моментов.

2. Вычислить суммарный изгибающий момент в заданных (опасных) сечениях.

3. По одной из теорий прочности вычислить расчетный момент.

4. В зависимости от материала, из которого изготавливается вал, вычислить $[\sigma]$ и определить диаметр вала. Вычисленное значение диаметра округлить до ближайшего большего стандартного.

Б. Расчет вала на «усталость».

5. Установить механические характеристики данного материала. Для заданных концентраторов напряжений из таблиц или графиков определить численные значения коэффициентов, учитывающих влияние различных факторов на предел выносливости (см. прил.).

6. Вычислить коэффициенты запаса прочности при изгибе (по симметричному циклу) и при кручении (по отнулевому) и сравнить с заданным (нормируемым). Если условие прочности при этом не выполняется, подобрать новый диаметр, округлить до стандартного большего и расчет повторить.

В. Контрольный расчет вала на «усталость» с помощью ЭВМ включает подготовку исходных данных для заданной схемы. Программа «ВАЛ» включена в библиотеку математического обеспечения компьютерного класса шахтостроительного факультета КузГТУ.

9.2. Расчет вала на переменные нагрузки

Пример 9.1.

Данные для расчета вала на усталость: P = 410 Н; Q = 180 Н; M = 320 Н·м; ℓ = 1,8 м; нормативный коэффициент запаса $n_0 = 2$. Материал вала – сталь 40Г, качество обработки поверхности – грубое шлифование. Концентратор в расчетном сечении – полукруглая выточка.

Требуется подобрать сечение вала из условия статической и усталостной прочности.

I. Статический расчет

Заданную схему нагружения вала представляем как балку на двух опорах, загруженную крутящими моментами и сосредоточенными силами в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

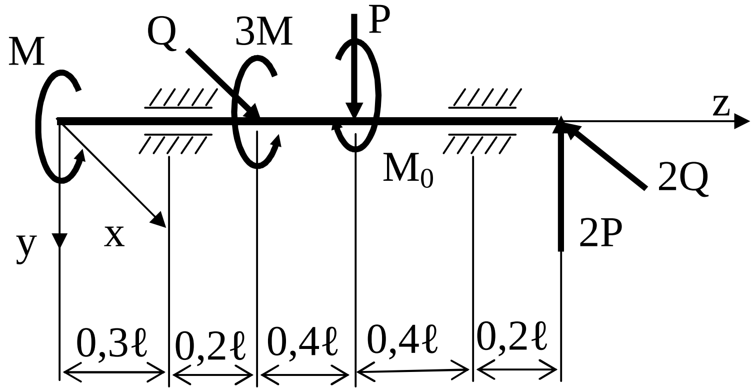


Рис. 9.2. Расчетная схема вала

Построение эпюр внутренних усилий

А. Вертикальная плоскость.

Определение опорных реакций:

$\sum M_A = 0,\ R_{By} 1{,}8 - 820 \cdot 2{,}16 + 410 \cdot 1{,}08 = 0,$

$R_{By} = 738\ \text{Н},$

$\sum M_B = 0,\ R_{Ay} 1{,}8 - 410 \cdot 0{,}72 - 820 \cdot 0{,}36 = 0,$

$R_{Ay} = 328\ \text{Н}.$

Проверка: 328 + 820 – 738 – 410 = 1128 – 1148 ≈ 0.

Вычисление величин изгибающих моментов и построение их эпюры:

$M_{Ax} = 0,$

$M_{Cx} = 328 \cdot 1{,}08 = 354\ \text{Н} \cdot \text{м},$

$M_{Bx} = 820 \cdot 0{,}36 = 295{,}2\ \text{Н} \cdot \text{м},$

$M_{Dx} = 0.$

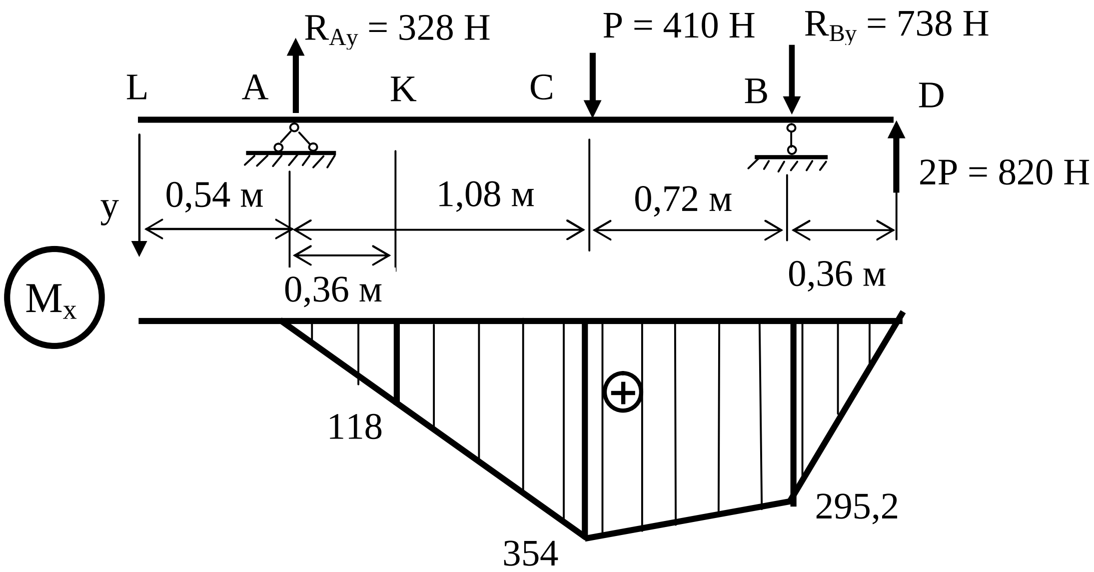


Рис. 9.3. Расчетная схема и эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости

Б. Горизонтальная плоскость.

Определение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0,\ \ R_{Bx}1{,}8 - 360 \cdot 2{,}16 + 180 \cdot 0{,}36 = 0,$$

$$R_{Bx} = 396\ \text{Н},$$

$$\sum M_B = 0,\ -R_{Ax}1{,}8 + 180 \cdot 1{,}44 + 360 \cdot 0{,}36 = 0,$$

$$R_{Ax} = 216\ \text{Н}.$$

Вычисление величин изгибающих моментов и построение их эпюры:

$$M_{Ay} = 0,$$

$$M_{Dy} = 0,$$

$$M_{Ky} = 216 \cdot 0{,}36 = 77{,}8\ \text{Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{By} = 360 \cdot 0{,}36 = 129{,}6\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

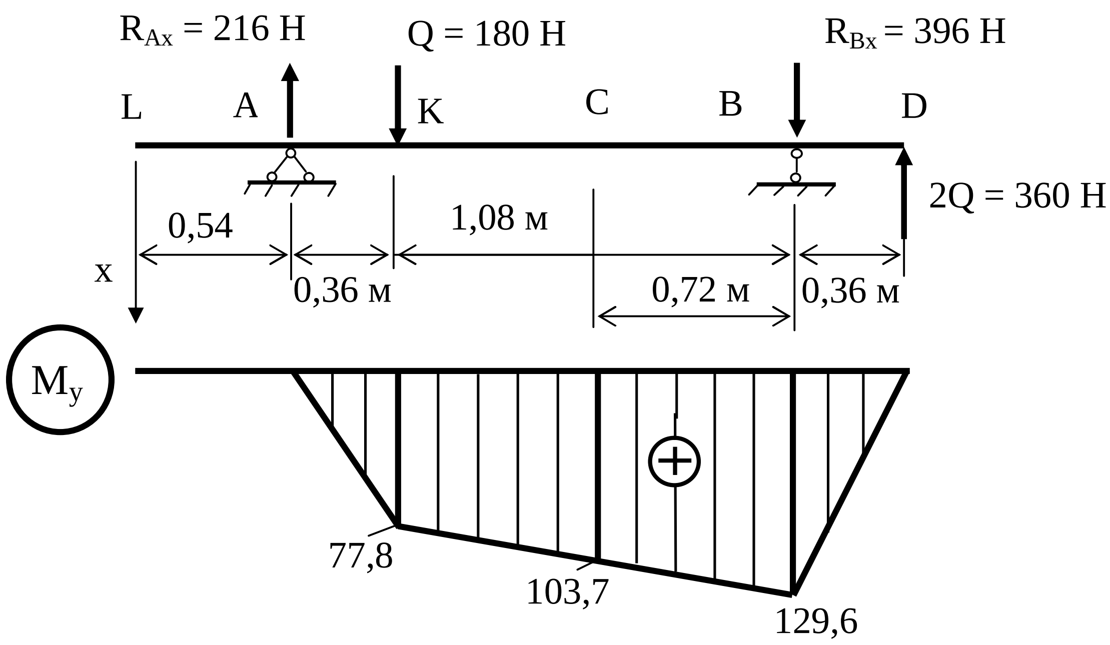


Рис. 9.4. Расчетная схема и эпюра изгибающих моментов в горизонтальной плоскости

В. Суммарная эпюра $M_И$.

Вычисление величин суммарных изгибающих моментов:

$$M_И = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$M_{АИ} = 0,$$

$$M_{КИ} = \sqrt{118^2 + 77{,}8^2} = \sqrt{1997{,}7} = 141{,}34 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{СИ} = \sqrt{354{,}2^2 + 103{,}7^2} = 369{,}1 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{ВИ} = \sqrt{295{,}2^2 + 129{,}6^2} = 322{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Г. Вычисление крутящих моментов и построение их эпюры.

$$M_{KL} = 520 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{KK} = M_{KL} + 3M = 520 + 1560 = 2080 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

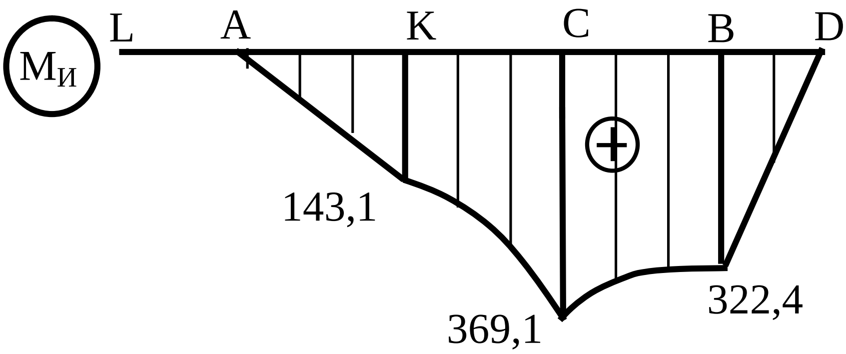


Рис. 9.5. Эпюра суммарного изгибающего момента

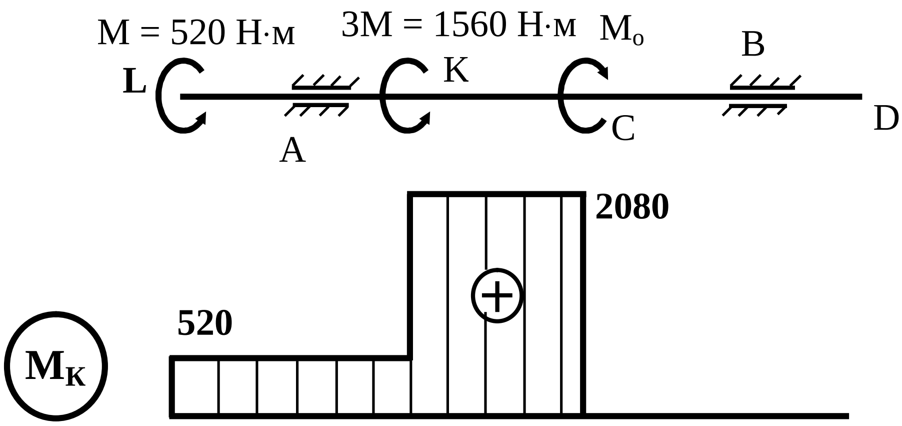


Рис. 9.6. Расчетная схема и эпюра крутящих моментов

Вычисление расчетного момента по 3-й теории прочности (для опасного сечения)

$$M_р^{III} = \sqrt{M_И^2 + M_К^2} = \sqrt{369{,}1^2 + 2080^2} = 2112{,}5\ Н \cdot м,$$

$$W_у \geq \frac{\sqrt{M_И^2 + M_К^2}}{[\sigma]}, \qquad W_у \cong 0{,}1d^3.$$

Для стали 40Г: $\sigma_т = 360\ Н/мм^2$,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_0} = \frac{360}{2} = 180 \ Н/мм^2,$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_p}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2112{,}5 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 180}} = 49 \ мм.$$

В соответствии с ГОСТ 6636 – 69 принимаем стандартный диаметр вала d = 50 мм (см. прил. 3).

2. Определение коэффициентов запаса прочности в сечениях с концентраторами местных напряжений (усталостный расчет).

Механические характеристики для данного материала (см. прил. 4 и 5):

$$\sigma_т = 360 \ Н/мм^2, \quad \sigma_в = 700 \ Н/мм^2,$$

$$\sigma_{-1} = 0{,}31\sigma_в + 70 = 0{,}31 \cdot 700 + 70 = 287 \ Н/мм^2,$$

$$\tau_{-1} = 0{,}54\sigma_{-1} = 0{,}54 \cdot 287 = 155 \ Н/мм^2,$$

$$\psi_\sigma = 0{,}05, \quad \psi_\tau = 0.$$

Концентратор – полукруглая выточка. Механическая обработка – грубая шлифовка.

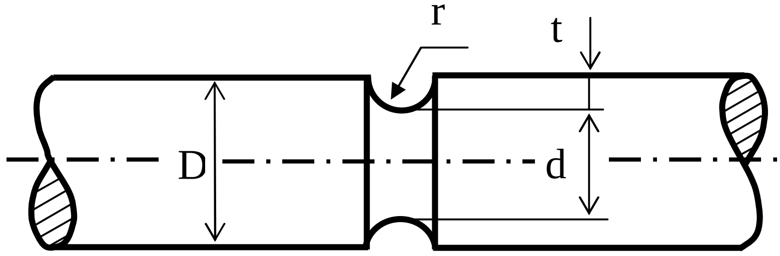


Рис. 9.7. Схема вала с полукруглой выточкой

$$b = \frac{r}{d} = 0{,}05, \qquad \frac{t}{r} = 1.$$

Из таблиц и графиков приложения 6 найдем коэффициенты, учитывающие факторы, которые влияют на предел выносливости:

А. При изгибе

$$K_\sigma = 1 + \alpha(K_0 - 1) = 1 + 1(1{,}8 - 1) = 1{,}8,$$

$$K_0 = 1{,}8 \text{ при } r/d = 0{,}05 \text{ и } \sigma_в = 700 \text{ Н/мм}^2,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0{,}79, \quad \varepsilon = 0{,}8, \quad \psi_\sigma = 0{,}05.$$

Б. При кручении

$$K_\tau = 1 + \alpha(K_0 - 1) = 1 + 1(1{,}51 - 1) = 1{,}51,$$

$$K_0 = 1{,}51 \text{ при } r/d = 0{,}05 \text{ и } \sigma_в = 700 \text{ Н/мм}^2,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0{,}79, \quad \varepsilon = 0{,}8, \quad \psi_\tau = 0.$$

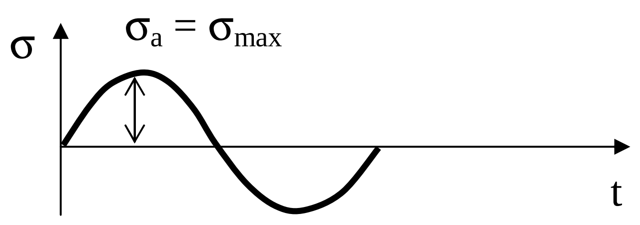


Рис. 9.8. Изменение напряжений во времени при изгибе

Коэффициент запаса прочности при изгибе по первой формуле (9.4). При изгибе принимаем симметричный цикл (рис. 9.8):

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{M_И}{W_y} = \frac{M_И}{0{,}1d^3} = \frac{369{,}1 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 50^3} = 29{,}5 \text{ Н/мм}^2,$$

$$n_\sigma = \frac{287}{\dfrac{29{,}5 \cdot 1{,}8}{0{,}8 \cdot 0{,}79}} = 3{,}42 > 2.$$

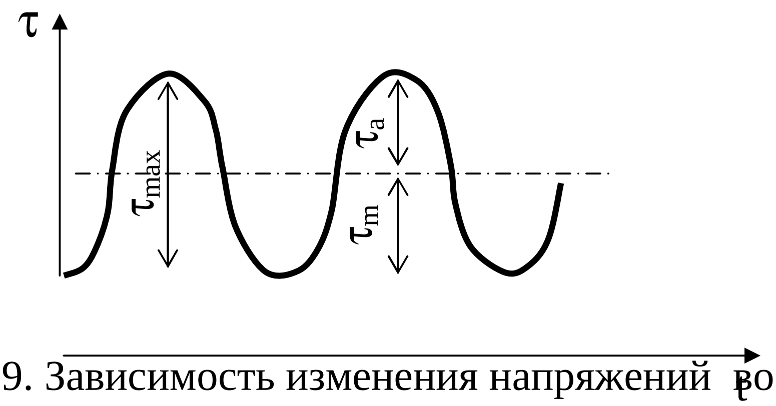


Рис. 9.9. Зависимость изменения напряжений во времени при кручении (отнулевой цикл)

При кручении принимаем отнулевой цикл (рис. 9.9):

$$\tau_a = \frac{M_K}{2 \cdot 0{,}2d^3} = \frac{2080 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 50^3} = 41{,}6\ \text{Н}/\text{мм}^2;$$

$$n_\tau = \frac{155}{\dfrac{41{,}6 \cdot 1{,}51}{0{,}8 \cdot 0{,}79}} = 1{,}56 < 2;$$

$$n = \frac{3{,}42 \cdot 1{,}56}{\sqrt{3{,}42^2 + 1{,}56^2}} = 1{,}42 < 2.$$

Так как $n < n_0$, т.е. условие прочности не выполняется, подбираем новый диаметр вала из выражения

$$d_н = 50\sqrt[3]{\frac{2}{1{,}42}} = 50\sqrt[3]{1{,}41} = 50 \cdot 1{,}12 = 56\ \text{мм}.$$

Полученное значение диаметра округляем до большего стандартного ближайшего диаметра (ГОСТ – 6636-69) d = 56 мм.

Повторяем расчет и вычисляем коэффициент запаса n. Из графиков приложения находим:

$$K_0 = 1{,}8; \quad \beta = 0{,}8; \quad \varepsilon = 0{,}78.$$

Для симметричного цикла при изгибе

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_И}{0{,}1d^3} = \frac{369{,}1 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot 56^3} = 20 \ Н/мм^2;$$

$$n_\sigma = \frac{287}{\dfrac{20 \cdot 1{,}8}{0{,}8 \cdot 0{,}78}} = 4{,}77.$$

Для отнулевого цикла при кручении

$$\tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = \frac{2080 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 5{,}6^3 \cdot 10^3} = 29{,}6 \ Н/мм^2,$$

$$n_\tau = \frac{155}{\dfrac{29{,}6 \cdot 1{,}51}{0{,}8 \cdot 0{,}78}} = 2{,}16,$$

$$n = \frac{4{,}77 \cdot 2{,}16}{\sqrt{4{,}77^2 + 2{,}16^2}} = 1{,}97 \approx 2.$$

Так как $n < n_0$, но условие прочности практически выполняется, то принимаем диаметр d = 56 мм.

Графическое определение коэффициента запаса при кручении n_τ.

Расчетные данные для построения диаграммы Серенсена – Кинасошвили (рис. 9.10):

1). Построение линии предельных циклов по уравнению

$$\tau_{max} = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau'_m}{\kappa_\tau / \varepsilon\beta} + \tau'_m,$$

где τ'_m – текущая координата.

При $\tau'_m = 0$ $\tau_{max} = \dfrac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau'_m}{\kappa_\tau / \varepsilon\beta} = \dfrac{155 \cdot 0{,}78 \cdot 0{,}8}{1{,}51} = 64 \ Н/мм^2$,

что соответствует точке М диаграммы.

При $\tau'_m = 40 \ Н/мм^2$

$$\tau_{max} = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_m}{\kappa_\tau / \varepsilon\beta} + \tau'_m = \frac{155 \cdot 0{,}78 \cdot 0{,}8}{1{,}51} + 40{,}0 = 104{,}0 \ \ \text{Н}/\text{мм}^2,$$

что соответствует точке N диаграммы.

2). Построение линии предела текучести

Известно, что предел текучести при кручении

$\tau_т = 0{,}5\sigma_т = 0{,}5 \cdot 360{,}0 = 180{,}0$ Н/мм^2, которому соответствует на диаграмме горизонтальная линия ВС.

3). Построение линии рабочих циклов

При пульсирующем цикле кручения

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{2080 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 56^3} = 59{,}2 \ \text{Н/мм}^2,$$

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = \frac{59{,}2}{2} = 29{,}6 \ \text{Н}/\text{мм}^2.$$

По этим значениям строим точку А. Точки, соответствующие всем подобным (пульсирующим) рабочим циклам, будут лежать на прямой ОА.

4). Находим точку предельного рабочего цикла, как точку К пересечения прямой рабочих циклов ОА с предельными линиями МВ и ВС.

Определяем предельное направление для рабочего цикла (τ_0)А, как ординату точки К.

В расчетном случае (τ_0)А $\cong 130$ Н/мм^2.

5). Определяем частный коэффициент запаса n_τ, как отношение соответствующих координат точек К и А.

Например $n_\tau = \frac{(\tau_0)A}{\tau_{max}} = \frac{130{,}0}{59{,}2} = 2{,}2.$

Отличие полученного значения n_τ от аналитического равно

$$\delta = \frac{2{,}2 - 2{,}16}{2{,}16} \cdot 100\,\% = 1{,}85\,\%,$$

что вполне допустимо.

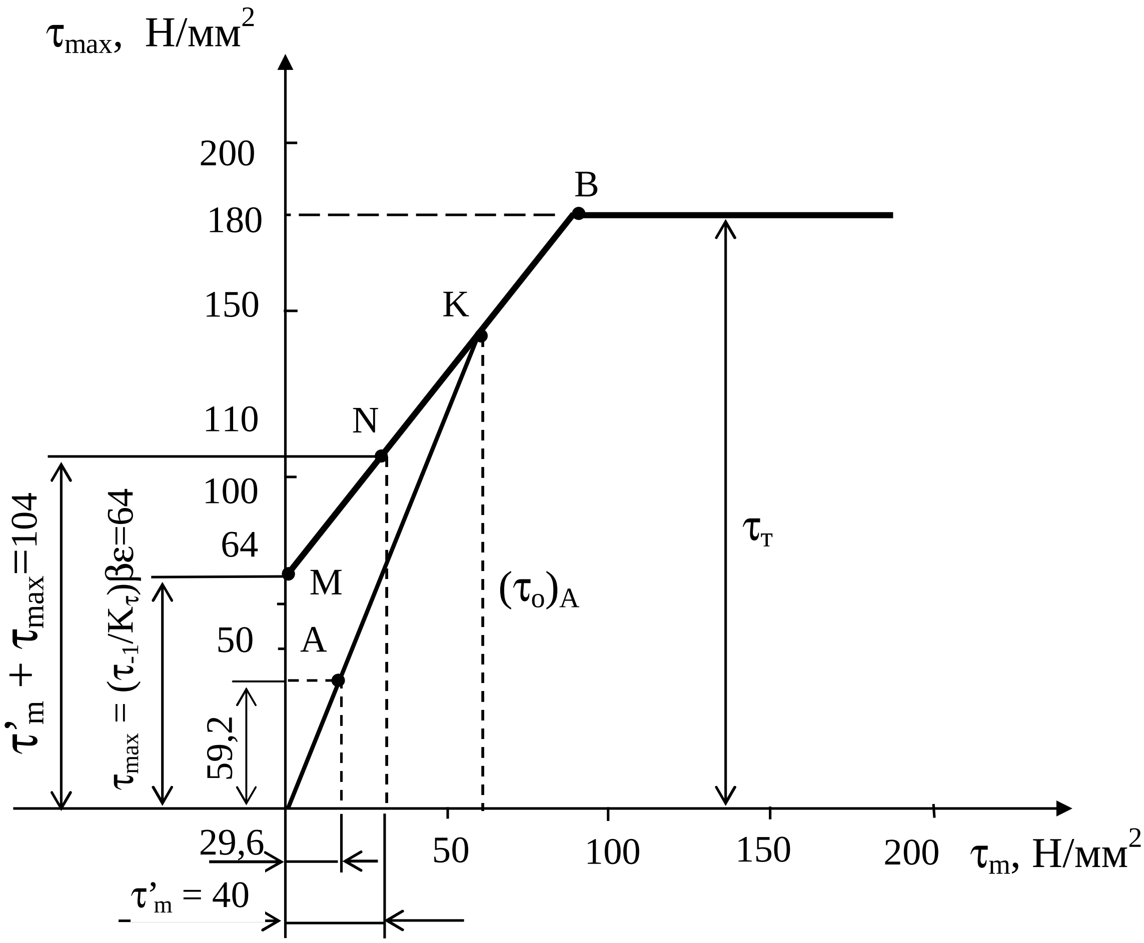


Рис. 9.10. Диаграмма Серенсена – Кинасошвили

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Справочные данные для расчета на устойчивость сжатых стержней

<table>
<tr><td colspan="5">Коэффициенты формулы Ясинского
и пределы ее применимости $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_{пред} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$</td><td rowspan="7">Для чугуна $\sigma_{кр} = а - в\lambda + с\lambda^2$;
$а = 776\ Н/мм^2$; $в = 12\ Н/мм^2$;
$с = 0{,}053\ Н/мм^2$; $\lambda_{пр} = 80$</td></tr>
<tr><td>Материал</td><td>λ_0</td><td>$\lambda_{пред}$</td><td>а, $Н/мм^2$</td><td>в, $Н/мм^2$</td></tr>
<tr><td>Ст.2, Ст.3, Стали 10, 15, 20</td><td>40</td><td>100</td><td>310</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Ст.5, Стали30, 35</td><td></td><td>100</td><td>464</td><td>3,26</td></tr>
<tr><td>Сталь40</td><td></td><td>90</td><td>321</td><td>1,16</td></tr>
<tr><td>Стали15ГС, 18Г2С, 25Г2С</td><td></td><td>100</td><td>589</td><td>3,82</td></tr>
<tr><td>Дерево (сосна)</td><td>0</td><td>110</td><td>29,3</td><td>0,194</td></tr>
</table>

Приложение 2

Коэффициенты понижения основного допускаемого напряжения φ

λ	Стали				Серые чугуны		Алюминиевые славы		Каменные и армокаменные элементы	Железобетон	Бетон тяжелый	Дерево (сосна, ель)
	Ст.0, 2, 3, 4	Ст.5, НЛ -1	НЛ – 2 (15ХСНД)	СПК	СЧ 12-28	СЧ 21-44	Амг (магналин)	Д16Т (дюралюмин)				
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97	0,95	0,973	0,999	0,99	1,00	1,00	0,99
20	0,97	0,95	0,95	0,95	0,91	0,87	0,945	0,998	0,96	1,00	0,96	0,97
30	0,95	0,92	0,93	0,91	0,81	0,75	0,917	0,835	0,91	1,00	0,90	0,93
40	0,92	0,89	0,90	0,87	0,69	0,60	0,870	0,700	0,85	1,00	0,84	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,83	0,57	0,43	0,770	0,568	0,78	1,00	0,76	0,80
60	0,86	0,82	0,78	0,79	0,44	0,32	0,685	0,455	0,72	0,83	0,70	0,71
70	0,81	0,76	0,71	0,72	0,34	0,23	0,603	0,353	0,65	0,73	0,63	0,61
80	0,75	0,70	0,63	0,65	0,26	0,18	0,530	0,269	0,58	0,64	0,57	0,49
90	0,69	0,62	0,54	0,55	0,20	0,14	0,465	0,212	0,53	0,57	0,51	0,38
100	0,60	0,51	0,45	0,43	0,16	0,12	0,415	0,172	0,48	0,52	0,51	0,31
110	0,52	0,43	0,39	0,35	-	-	0,365	0,142	0,43	-	-	0,25
120	0,45	0,38	0,33	0,30	-	-	0,327	0,119	0,38	-	-	0,22
130	0,40	0,32	0,29	0,26	-	-	0,296	0,101	0,35	-	-	0,18
140	0,36	0,28	0,26	0,23	-	-	0,265	0,087	0,32	-	-	0,16
150	0,32	0,26	0,23	0,21	-	-	0,235	0,076	0,29	-	-	0,14
160	0,29	0,24	0,21	0,19	-	-	-	-	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	0,19	0,17	-	-	-	-	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	0,17	0,15	-	-	-	-	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	0,15	0,14	-	-	-	-	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	0,14	0,13	-	-	-	-	-	-	-	0,08

Приложение 3

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДИАМЕТРЫ ВАЛОВ

(ГОСТ 6636-69 "Нормальные линейные размеры) ряд R_A20 мм

4; 4,5; 5; 5,6; 6,3; 7,1; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 71; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280; 320; 360; 400.

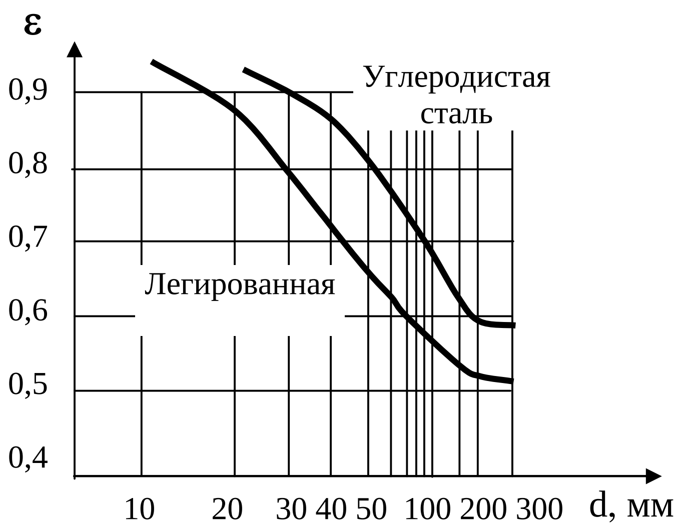
Приложение 4

Значение коэффициента Ψ

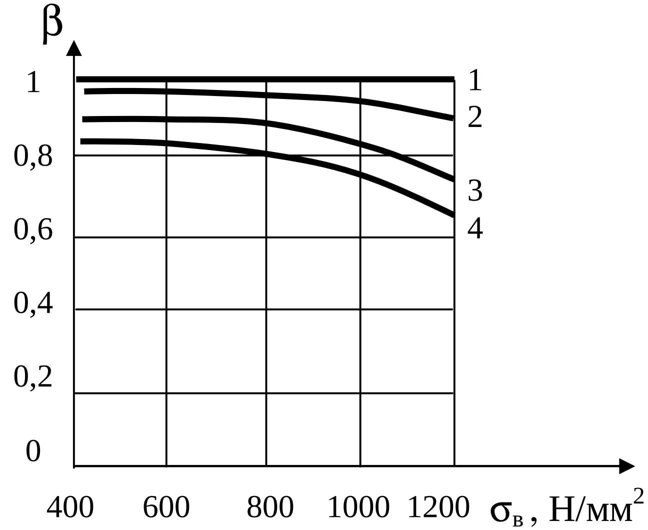
σ_B, Н/мм^2	350-550	520-750	700-1000	1000-1200	1200-1400
Ψ_σ	0	0,05	0,1	0,2	0,25
Ψ_τ	0	0	0,05	0,1	0,15

Приложение 4 (продолжение)

Масштабный фактор



Поверхностный фактор



1. Тщательное полирование
2. Грубое полирование
3. Тонкое шлифование
4. Грубое шлифование

Приложение 5

Основные механические характеристики сталей для изготовления валов (продолжение)						
№	Марка стали	$\sigma_в, Н/мм^2$	$\sigma_т, Н/мм^2$	Предел выносливости при изгибе, $Н/мм^2$	Предел выносливости при кручении, $Н/мм^2$	Предел выносливости при растяжении, $Н/мм^2$
1	Сталь 3		230-250/240	$\sigma_{-1} = 0{,}33\sigma_В + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}53\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}716\sigma_{-1}$
2	Сталь 4	420-520/480	240-260/250			
3	Сталь 5	500-620/580	270-290/280			
4	Сталь 6	600-720/630	300-320/310			
5	Сталь 7	>700	330-350/340			
6	Сталь 20	400-540/510	260			
7	Сталь 25	480-580/550	280	$\sigma_{-1} = 0{,}33\sigma_В + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}53\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}716\sigma_{-1}$
8	Сталь 30	520-620/580	300			
9	Сталь 35	560-660/620	320			
10	Сталь 40	600-720/660	340			
11	Сталь 45	640-760/700	360			
12	Сталь 50	680-800/730	380			
13	Сталь 55	710-830/760	400	$\sigma_{-1} = 0{,}33\sigma_В + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}53\sigma_{-В}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}71\sigma$
14	Сталь 60	730-850/780	420			
15	Сталь 65	760-880/800	430			
16	Сталь 70	780-900/820	440			

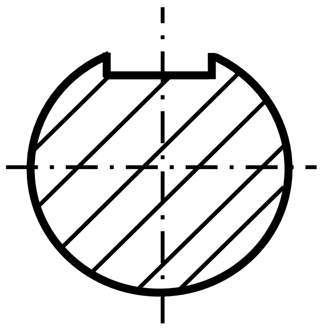
Приложение 5 (продолжение)

Основные механические характеристики сталей для изготовления валов						
№	Марка стали	$\sigma_В$, Н/мм	$\sigma_т$, Н/мм^2	Предел выносливости при изгибе, Н/мм^2	Предел выносливости при кручении, Н/мм^2	Предел выносливости при растяжении, Н/мм^2
1	Сталь 20ХН	800	650	$\sigma_{-1} = 0{,}3\sigma_В + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}58\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}77\sigma_{-1}$
2	Сталь 40ХН	1000	850			
3	Сталь 45ХН	1050	900			
4	Сталь 12ХН3А	1000	850			
5	Сталь 12Х2НЧА	1200	1000			
6	Сталь 20ХН3А	950	800			
7	Сталь 20Х2НЧА	1400	1200			
8	Сталь 30ХН3А	1100	900			
9	Сталь 18ХГТ	1150	950			
10	Сталь 30ХГТ	1500	1300			
11	Сталь 35ХГТ	1150	950			
12	Сталь 40ХГТ	1050	1050			
13	Сталь 38ХЮ	800	800			
14	Сталь 30ХГС	950	950			
15	Сталь 35ХГСА	1400	1400			
16	Сталь 20ХГР	800	800			
17	Сталь 40ХГР	950	950			

Приложение 5 (продолжение)

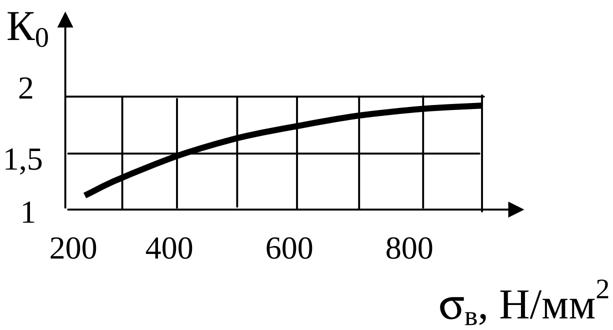
Основные механические характеристики сталей для изготовления валов (продолжение)						
№	Марка стали	$\sigma_в, Н/мм^2$	$\sigma_т, Н/мм^2$	Предел выносливости при изгибе, $Н/мм^2$	Предел выносливости при кручении, $Н/мм^2$	Предел выносливости при растяжении, $Н/мм^2$
1	Сталь 15Г	500	250	$\sigma_{-1} = 0{,}31\sigma_в + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}54\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}73\sigma_{-1}$
2	Сталь 20Г	520	280			
3	Сталь 30Г	620	320			
4	Сталь 40Г	700	360			
5	Сталь 45Г	720	380			
6	Сталь 50	800	400			
7	Сталь 15Г2	560	210			
8	Сталь 20Г2	610	340			
9	Сталь 30Г2	700	400			
10	Сталь 35Г2	780	430			
11	Сталь 40Г2	820	460			
12	Сталь 45Г2	880	490			
13	Сталь 50Г2	910	520			
14	Сталь 20Х	800	650	$\sigma_{-1} = 0{,}3\sigma_в + 70$	$\tau_{-1} = 0{,}58\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1р} = 0{,}77\sigma_{-1}$
15	Сталь 30Х	900	750			
16	Сталь 35Х	950	800			
17	Сталь 40Х	1000	850			
18	Сталь 45Х	1050	900			

Приложение 6

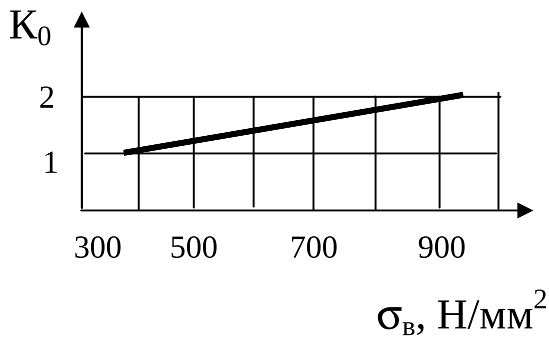


Эффективный коэффициент концентрации

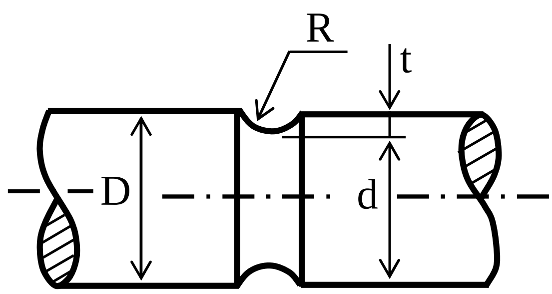
Изгиб



Кручение

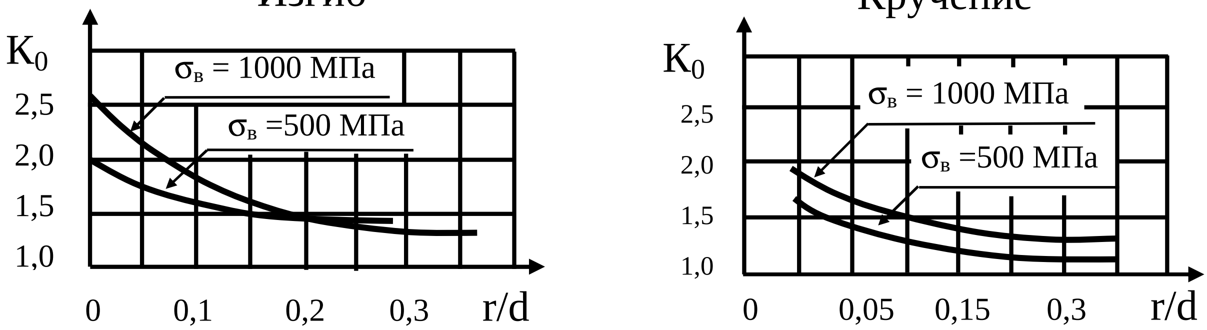


Приложение 6 (продолжение)



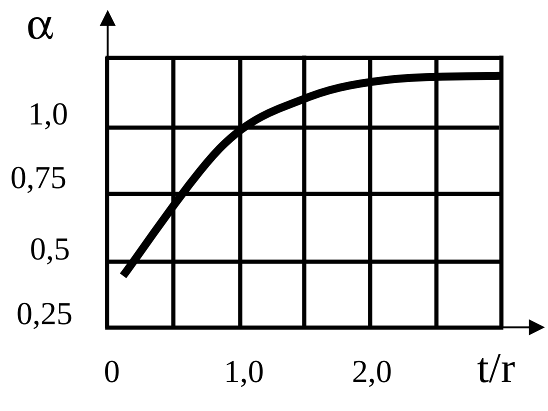
Эффективный коэффициент концентрации

Изгиб | Кручение



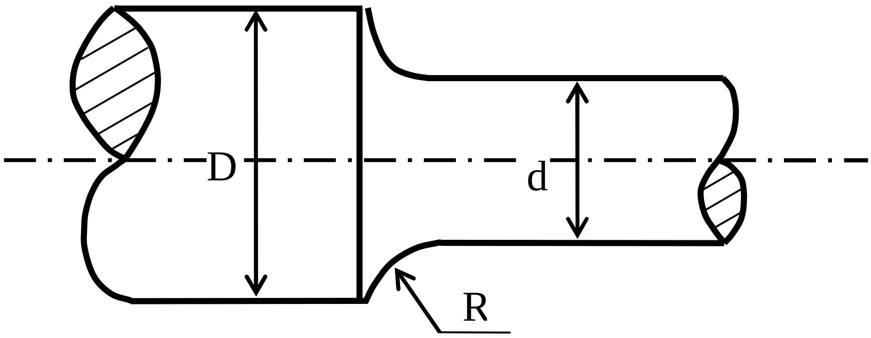
для t/r = 1

Поправочный коэффициент

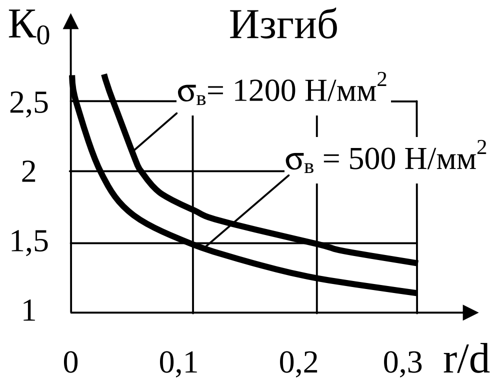


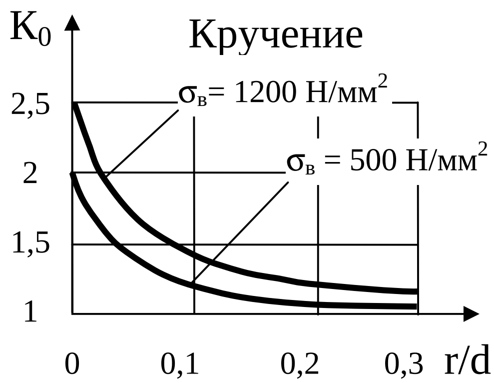
$$K = 1 + \alpha\,(K_0 - 1)$$

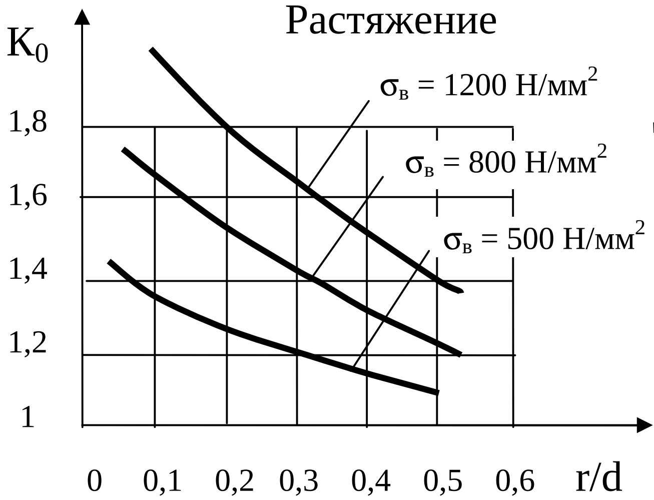
Приложение 6 (продолжение)



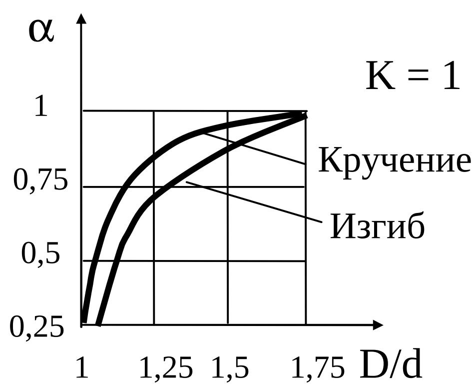
Эффективный коэффициент концентрации





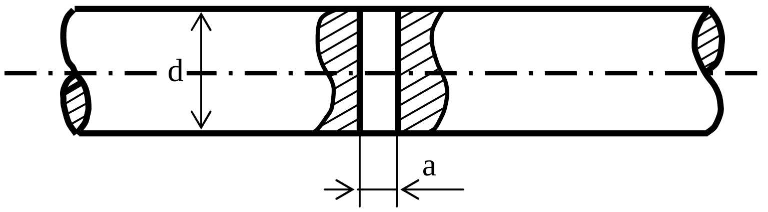


Для D/d = 2

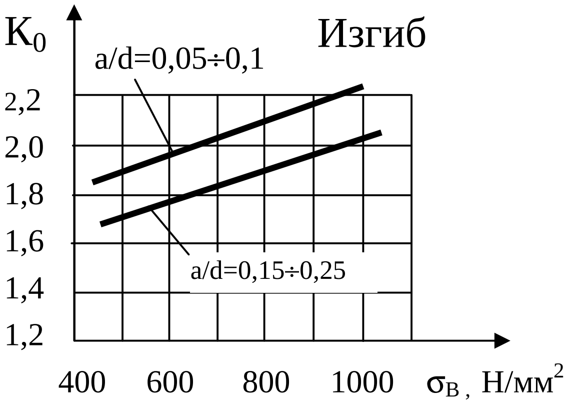


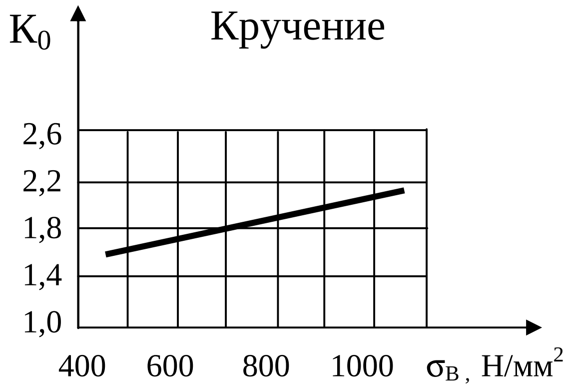
$$K = 1 + \alpha (K_0 - 1)$$

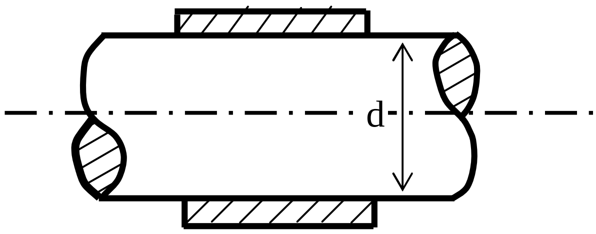
Приложение 6 (продолжение)



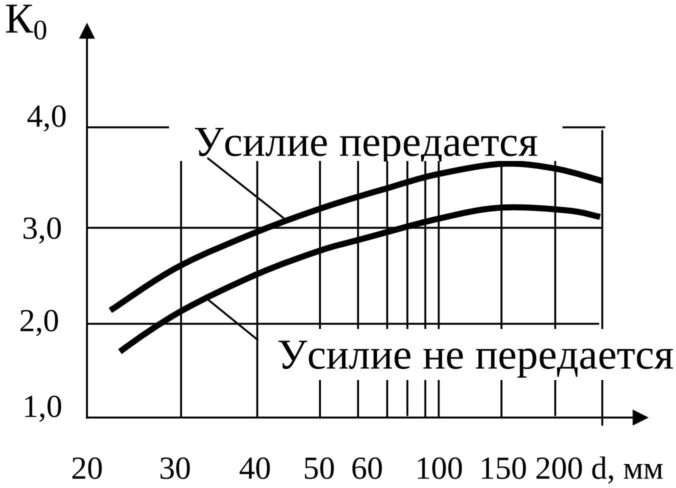
Эффективный коэффициент концентрации





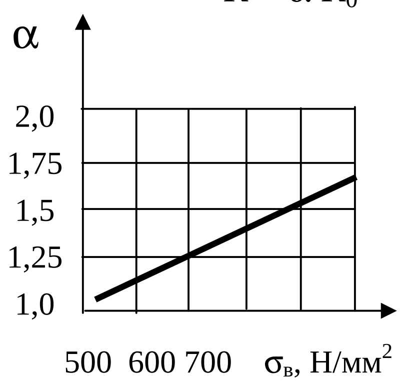


Эффективный коэффициент концентрации



Поправочный коэффициент

$K = \alpha K_0$



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учеб. для студентов вузов. – 10-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2010. – 320 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк. – 2008. – 350 с.
3. Паначев И.А. Сопротивление материалов: Учебное пособие. / И.А. Паначев, Ю.Ф. Глазков, М.Ю. Насонов // [электронный ресурс] Кемерово. ГУ КузГТУ, 2011. 232 с
4. Паначев, И. А. Сопротивление материалов: учеб. пособие / И. А. Паначев, Г. В. Широколобов; ГУ Куз ГТУ. – Кемерово, 2008. – 191 с.
5. Паначев И. А. Сопротивление материалов: учеб. пособие / И. А. Паначев, Г. В. Широколобов, Ю. Ф. Глазков; ГУ Куз ГТУ. – Кемерово, 2010. – 208 с.
6. Макаров, Е. Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов: в 2 кн. – М.: Высш. шк., 2009.
7. Паначев И. А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов: учеб. пособие. / И. А. Паначев, М. Ю. Насонов; ГУ КузГТУ. – Кемерово, 2011. – 232 с.