В. А. ХЯМЯЛЯЙНЕН А. С. БОГАТЫРЕВА
Р. Ф. ГОРДИЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Кемерово 2013

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

В. А. Хямяляйнен А. С. Богатырева Р. Ф. Гордиенко

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Кемерово 2013

УДК 531 (075.8)
ББК 22.21

Рецензенты:

Кафедра технической механики и упаковочных технологий ФГБОУ ВПО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности» (зав. кафедрой доктор технических наук профессор В. С. Хорунжин)

Доктор физико-математических наук профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет» А. Ф. Ханефт

Хямяляйнен, В. А. Сборник задач по теоретической механике / В. А. Хямяляйнен, А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко ; КузГТУ. – 3-е изд., доп. и перераб. – Кемерово, 2013. – 83 с.

ISBN 978-5-89070-887-8

Сборник содержит задачи по всем разделам теоретической механики (статике, кинематике, динамике), указания и примеры решения. Составлен для студентов технических вузов заочной формы обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 531 (075.8)
ББК 22.21

ISBN 978-5-89070-887-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Окружающий нас мир материален. Материя находится в непрерывном движении, одной из наиболее распространенных форм которого является механическое движение. В теоретической механике исследуют движение идеализированных объектов: материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела. В природе таких идеализированных объектов, конечно же, не существует. Однако такое абстрагирование реальных физических объектов позволяет выявить наиболее общие законы механического движения тел независимо от их физических свойств. Поэтому теоретическую механику можно рассматривать как основу общей механики, включающую в себя все остальные механические дисциплины: механику твердого деформируемого тела, гидродинамику, строительную механику, теорию машин и механизмов и так далее.

В сборнике приведены 100 вариантов типовых задач по каждой из рассматриваемых тем трех разделов теоретической механики: статики, кинематики и динамики. В разделе «Статика» – 5 задач, в разделе «Кинематика» – 4 и в разделе «Динамика» – 9. Каждая из типовых задач сопровождается примером решения. Набор задач по каждому из разделов курса обеспечивает возможность устанавливать тематику и количество контрольных заданий (контрольных работ) в зависимости от профиля подготовки специалистов, то есть от объема и содержания изучаемого курса теоретической механики.

Перечень задач, входящих в контрольную работу, в соответствии с рекомендациями, приведен в приложении настоящего сборника.

Авторы выражают благодарность всем преподавателям, использующим представленные задачи и внесшим существенные замечания и предложения в методику их изложения и решения.

1. СТАТИКА

1.1. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил (С-1)

Определить реакции опор балки, нагруженной силой $\overline{P}$, равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и парой сил с моментом равным M. Варианты закрепления балок приведены на рис. 1.1 (0–9), данные для расчета реакций опор в табл. 1.1.

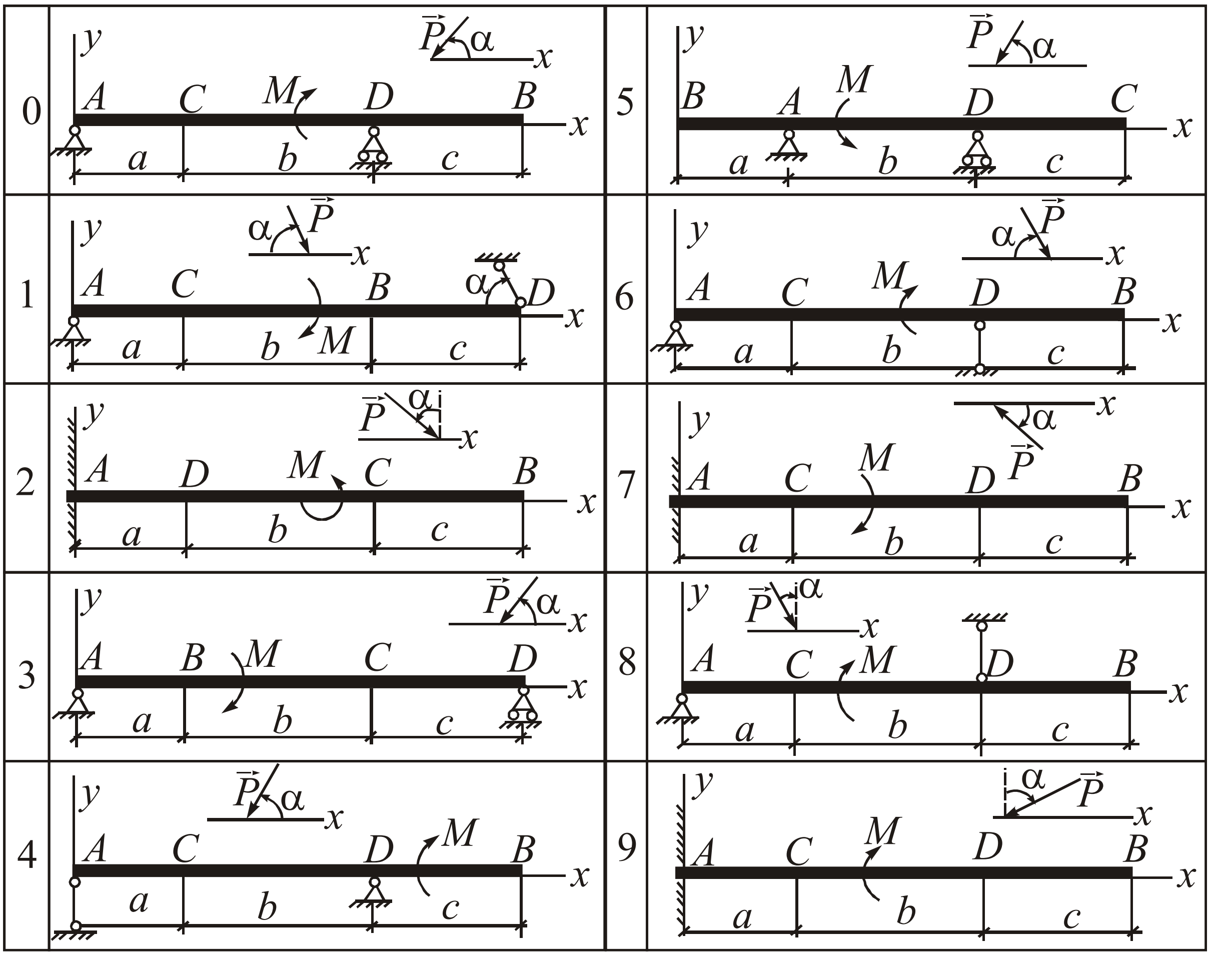


Рис. 1.1

Указания. Задачи С-1 относятся к теме «Произвольная плоская система сил». Для их решения на схеме закрепления балки следует показать все заданные силы, приложенные в указанных в условии точках и направленные под соответствующим углом. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q необходимо заменить силой $\overline{Q}$, приложенной в центре нагруженного отрезка и численно равной $Q = ql$, где l – длина участка, на котором распределена нагрузка. Затем балку следует освободить от наложенных на нее связей, а их действие заменить реакциями этих связей. Балка находится в равновесии под действием заданных сил и реакций связей, которые следует определить из уравнений равновесия произвольной плоской системы сил: $\Sigma F_{kx} = 0$, $\Sigma F_{ky} = 0$, $\Sigma M_0(F_k) = 0$.

Таблица 1.1

№ условия	P, кН	M, кН·м	a, м	b, м	c, м	α, град	Точка приложения силы P	q, кН/м	Участок равномерно распределенной нагрузки q
0	4	2	2	4	3	30	*B*	3	*CD*
1	2	4	3	3	2	60	*C*	2	*BD*
2	10	3	3	4	2	45	*C*	2,5	*BC*
3	8	5	2	2	4	60	*B*, *C*	3	*BD*
4	6	3	4	3	2	30	*C*	4	*AD*
5	4	2	1	3	3	60	*B*	2	*BD*
6	5	4	4	4	2	30	*C*, *B*	1,5	*AB*
7	10	6	2	2	4	45	*B*	2,5	*AC*
8	6	2	4	4	2	60	*B*, *C*	3	*AC*
9	4	6	3	2	2	30	*B*, *C*	4	*AD*

Пример. Балка *AD* закреплена при помощи неподвижного цилиндрического шарнира *A* и стержневой опоры *C*. На балку действуют две силы $\overline{P}$, приложенные в точках *B* и *D*, направленные по углом $\alpha = 60°$ к балке и равные $P = 10$ кН. На участке *BC* приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 2$ кН/м. Кроме того на балку действует пара сил, которая стремится повернуть ее против часовой стрелки, момент этой пары сил равен $M = 16$ кН·м (рис. 1.2). Определить реакции опор.

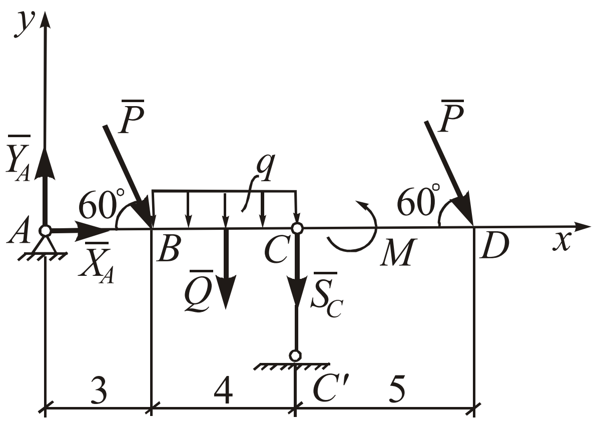


Рис. 1.2

Решение. Рассмотрим равновесие балки AD. Проведем оси координат, ось Ax – вдоль балки, Ay – перпендикулярно ей. Изобразим заданные силы: силу $\overline{P}$, приложенную в точках B и D, силу $\overline{Q}$, приложенную в середине отрезка BC, и пару сил с моментом M. Балка закреплена при помощи шарнирно неподвижной опоры A и стержневой опоры CC', которые являются связями для балки. Отбросим связи и заменим их действия реакциями. Реакция шарнирно неподвижной опоры A приложена в центре шарнира, ее направление зависит от действующих на балку сил и заранее неизвестно. Поэтому покажем реакцию шарнирно неподвижной опоры A двумя силами $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, направленными по осям координат. Реакцию стержневой опоры C направим вдоль стержня от балки к точке закрепления, предположив при этом, что стержень растянут. Для плоской системы сил, действующих на балку, составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + P\cos 60° + P\cos 60° = 0; \qquad (1.1)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A - S_C - P\cos 30° - P\cos 30° - Q = 0; \qquad (1.2)$$

$$\Sigma M_A(F_k) = -P\,3\cos 30° - Q\,5 - S_C\,7 - P\,12\cos 30° + M = 0. \qquad (1.3)$$

Момент пары сил входит только в уравнение моментов (1.3) с положительным знаком, так как по условию задачи пара сил стремится вращать балку против часовой стрелки.

Из уравнения (1.1) определим

$$X_A = -\,2P\cos 60° = -10 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1.3) определим

$$S_C = (-Q\cdot 5 - P\cdot 15\cos 30° + M)/7 = -21{,}99 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1.2) определим

$$Y_A = S_C + 2P\cos 30° + Q = 3{,}33 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение реакции $\overline{X}_A$ означает, что она направлена в сторону, противоположную указанной на рис. 1.2, а отрицательное значение реакции стержня $\bar{S}_C$ указывает, что стержень сжат.

Проверка. Для проверки решения задачи составим уравнение моментов всех сил, действующих на балку, относительно точки D:

$$\Sigma M_D(F_k) = -Y_A \cdot 12 + P \cdot 9\cos 30° + Q \cdot 7 + S_C \cdot 5 + M = 0.$$

В это уравнение подставим найденные значения Y_A и S_C, получим –149,91 + 149,92 = 0,01≈0.

1.2. Равновесие системы двух тел под действием плоской системы сил (С-2)

Конструкция, состоящая из двух балок, соединенных между собой шарниром, удерживается в равновесии при помощи внешних опор A и B. Определить реакции опор составной конструкции, нагруженной сосредоточенной силой $\bar{P}$, равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и парой сил с моментом равным M. Варианты схем закрепления балок приведены на рис. 1.3 (0–9), а данные для расчета реакций опор в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ условия	P, кН	M, кН·м	AD, м	DC, м	CE, м	EF, м	BF, м	α, град	Точка приложения силы P	q, кН/м	Распределенная нагрузка q на отрезке
0	4	5	2	2	2	4	1	60	D	2	CE
1	8	6	3	4	4	4	2	30	F	2	EF
2	10	12	3	4	4	3	1	30	E	6	CD
3	7	8	4	6	6	5	3	60	F	2	FD
4	6	10	2	4	4	4	2	45	F	3	EF
5	12	18	8	16	16	10	6	60	D	1	AD
6	8	15	6	8	8	8	4	60	E	1,5	CE
7	6	9	3	5	5	4	2	30	D	2,5	BF
8	10	10	5	6	6	6	4	45	E	2	EF
9	5	6	4	3	4	3	1	60	C	4	AD

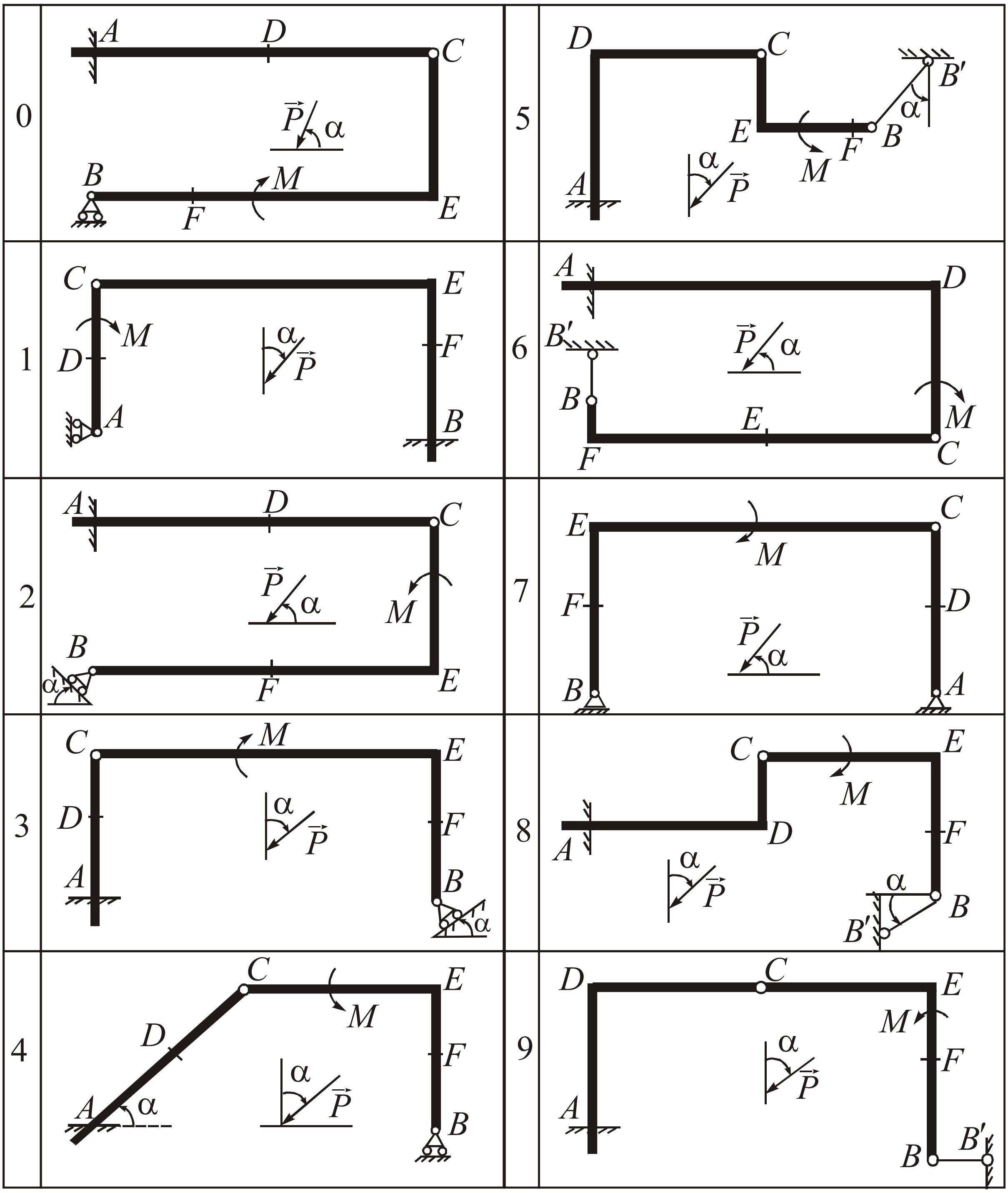


Рис. 1.3

Указания. Задачи С-2 относятся к теме на равновесие двух тел, находящихся под действием плоской системы сил. При решении таких задач следует рассматривать либо равновесие всей системы в целом и дополнительно равновесие одного из тел, изобразив его отдельно, либо систему тел расчленить по внутренней связи и рассмотреть равновесие каждого тела в отдельности, учитывая при этом закон равенства действия и противодействия. При вычислении момента силы часто применяется теорема Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно любой точки равен сумме моментов ее составляющих относительно той же точки: $M_0(\overline{P}) = M_0(\overline{P}') + M_0(\overline{P}'')$, где $\overline{P}'$ и $\overline{P}''$ – составляющие силы $\overline{P}$.

Пример. Две балки *AE* и *BE* соединены между собой шарниром *E* и удерживаются в равновесии при помощи внешних опор *A* и *B*. Опора *A* является жесткой заделкой, опора *BB′* – стержневой. На балку действуют сила $\overline{P}$, численно равная P = 10 кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м и пара сил, момент которой равен M = 20 кН·м. Все размеры, углы и точки приложения сил показаны на схеме закрепления балок (рис. 1.4). Определить реакции внешних опор *A* и *B* и реакции внутреннего шарнира *E*.

Дано: *AD* = 2 м; *CD* = 2 м; *CE* = 2 м; *EF* = 1 м; *BF* = 2 м; α = 30°.

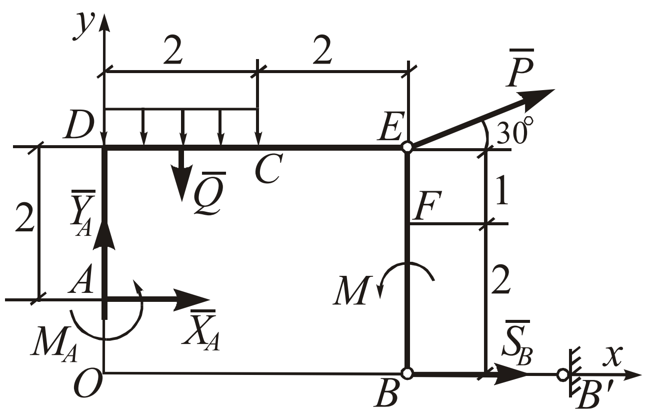


Рис. 1.4

Определить реакции внешних опор.

Решение. Рассмотрим равновесие всей конструкции, приложив к ней всю заданную нагрузку – силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и пару сил с моментом *M*. Внешними связями, удерживающими балки в положении равновесия, являются жесткая заделка *A* и стержневая опора *BB′* (см. рис. 1.4). На схеме закрепления и соединения балок эти связи мысленно отброшены, а их действия заменены реакциями жесткой заделки – силами $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и парой сил с моментом M_A и реакцией стержневой опоры S_B, которая направлена вдоль стержня. Таким образом, система двух балок находится под действием плоской системы сил – это заданные силы и четыре неизвестных опорных реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{S}_B$ и величины момента пары сил M_A.

Для определения всех внешних опорных реакций и реакции внутреннего шарнира E разделим систему балок по внутреннему шарниру E на две балки AE и BE и рассмотрим равновесие каждой части. При этом учтем, что силы взаимодействия балок в шарнире E будут равны по модулю и противоположны по направлению согласно аксиоме равенства действия и противодействия.

Балка BE находится в равновесии под действием заданной нагрузки – это сила $\overline{P}$, пары сил с моментом M, реакции стержневой опоры S_B и реакций внутреннего шарнира E, $\overline{X}_E$, $\overline{Y}_E$ (рис. 1.5).

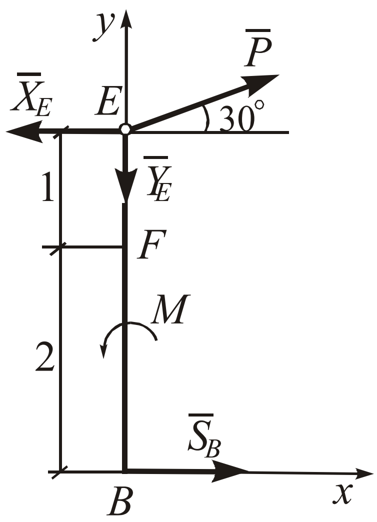


Рис. 1.5

Составим уравнения равновесия сил, действующих на балку:

$$\Sigma F_{kx} = -X_E + S_B + P\cos 30° = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = -Y_E + P\cos 60° = 0;$$

$$\Sigma M_E(F_k) = S_B \cdot 3 + M = 0.$$

Из этих уравнений определим реакции опор:

$$X_E = S_B + P\cos 30° = 2 \text{ кН};$$

$$Y_E = P\cos 60° = 5 \text{ кН};$$

$$S_B = -M/3 = -6{,}66 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие балки AE (рис. 1.6).

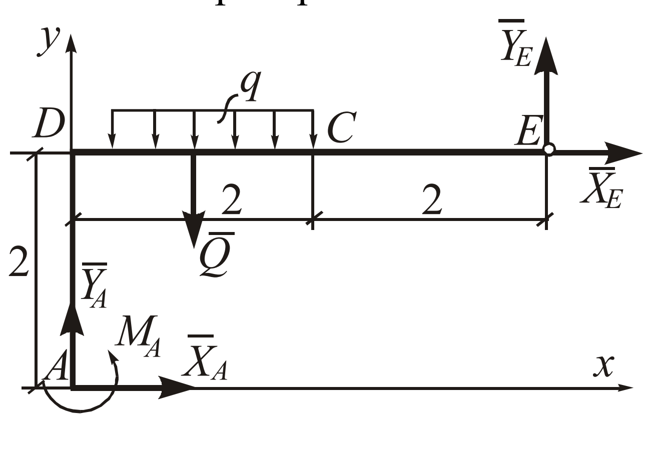


Рис. 1.6

Для определения реакций жесткой заделки X_A, Y_A, M_A составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = X_E + X_A = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_E + Y_A - Q = 0;$$

$$\Sigma M_A(F_k) = M_A - Q \cdot 1 - X_E \cdot 2 + Y_E \cdot 4 = 0;$$

$$X_A = -X_E = -2 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Y_A + Q = -1 \text{ кН};$$

$$M_A = Q \cdot 1 + X_E \cdot 2 - Y_E \cdot 4 = -12 \text{ кН}.$$

Проверка. Для проверки расчетов составим уравнение равновесия для всей конструкции AB (см. рис. 1.4):

$$\Sigma M_E(F_k) = M_A + X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3 + M + S_B \cdot 3 = 0.$$

Подставим найденные числовые значения внешних опорных реакций X_A, Y_A, M_A, S_B со своими знаками, получим

$$-12 - 4 + 4 + 12 + 20 - 6{,}66 \cdot 3 = 0, \quad 0 = 0.$$

Последнее равенство свидетельствует о том, что все расчеты были выполнены правильно.

1.3. Равновесие тела под действием пространственной системы сил (С-3)

Однородная плита весом $\overline{P}$ удерживается в равновесии при помощи шарового шарнира или цилиндрического подшипника в точке A и цилиндрического подшипника в точке B. Кроме того плита удерживается от опрокидывания либо стержневой опорой, либо тросом. На плиту действует сила $\overline{Q}$, расположенная в плоскости параллельной координатной плоскости yz. Определить реакции шарниров A и B, а также либо натяжения тросов, либо усилия в стержнях.

Схемы закрепления плит изображены на рис. 1.7 (0–9), а данные, необходимые для решения, приведены в табл. 1.3.

Указания. Задачи С-3 относятся к теме «Равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил». Для решения этих задач следует изобразить плиту с размерами, положением и заданными силами в соответствии с вариантом задания. Затем освободить плиту от связей, заменив их действие реакциями связей, и составить шесть уравнений равновесия относительно указанных на рисунках координатных осей:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \ \Sigma F_{ky} = 0; \ \Sigma F_{kz} = 0;$$

$$\Sigma M_x(\overline{F}_k) = 0; \ \Sigma M_y(\overline{F}_k) = 0, \ \Sigma M_z(\overline{F}_k) = 0.$$

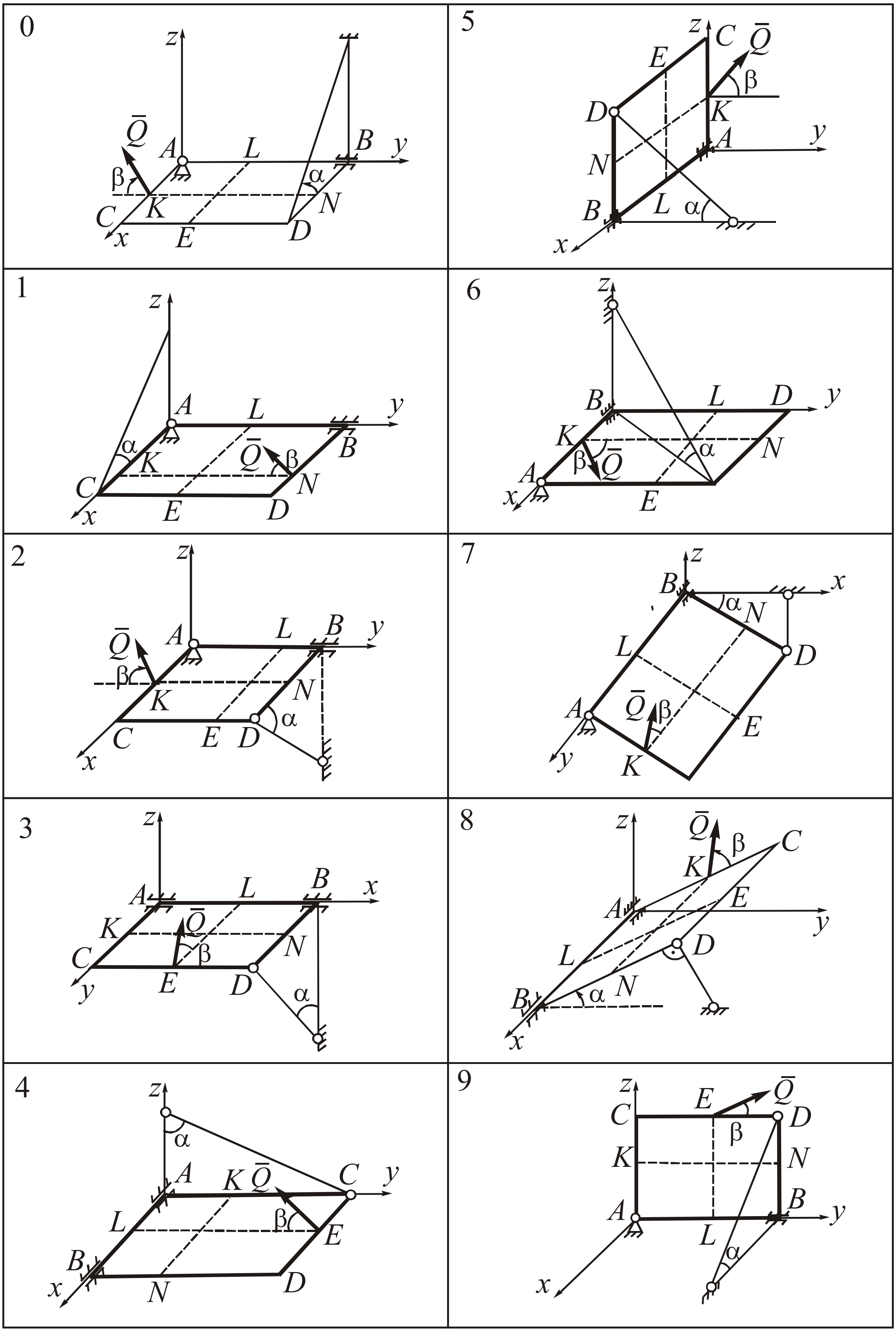

0
z Q̄ A L B y β α K N C D x E
5
z C Q̄ E β D K A y N B L α x
1
z A L y α K Q̄ β B C N x E D
6
z B L D y K α N β Q̄ A x E
2
z Q̄ A L B y β K N C E D α x
7
B z x α N L D A Q̄ β E y K
3
z A L B x K Q̄ N C β y E D α
8
z Q̄ β C K A E y L D B α N x
4
z α A K Q̄ C y L β E B x N D
9
z E Q̄ C D β K N A B y L α x

Рис. 1.7

Таблица 1.3

№ условия	P, кН	Q, кН	AB, м	AC, м	AK, м	CE, м	α, град	β, град
0	10	36	4	3	1,5	1	30	45
1	15	28	5	4	2	2,5	45	30
2	20	47	6	5	3,5	3	60	30
3	25	39	7	5	4	1,5	60	45
4	35	55	5	4	3	1,5	30	60
5	40	65	6	4	4	2,5	45	30
6	30	49	9	5	5	2	45	60
7	15	18	4	3	2,5	1	30	45
8	25	34	8	6	5	4	60	30
9	10	44	6	4	2,5	3	30	45

Пример. Прямоугольная плита весом $\overline{P}$ закреплена при помощи шарового шарнира A и цилиндрического подшипника B, стержневая опора C удерживает плиту от опрокидывания. На плиту действует сила $\overline{Q}$, расположенная в плоскости параллельной координатной плоскости yz и направленная под углом β к плите. Определить реакции опор A, B, C.

Дано: P = 10 кН; Q = 20 кН; AB = 4 м; AC = 3 м; AK = 1,5 м; CE = 1 м; α = 60°, β = 30°.

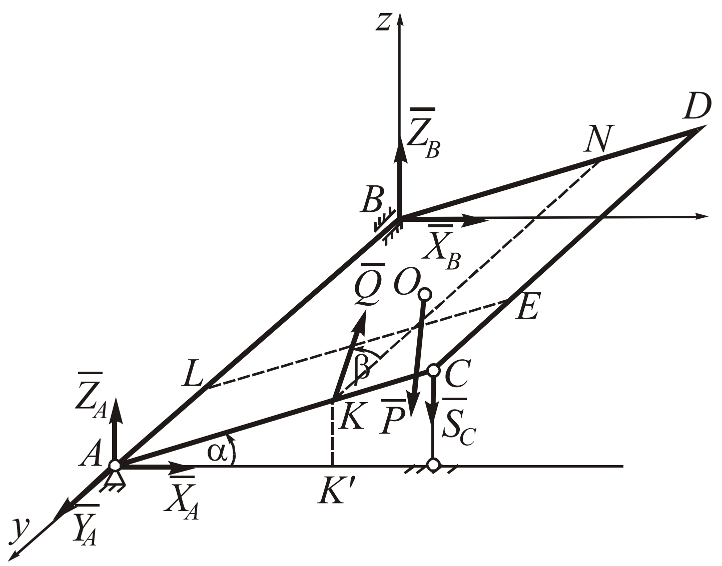


Рис. 1.8

Определить реакции опор.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты (рис. 1.8). На схеме закрепления плиты покажем заданные силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$. Так как плита однородная, то ее вес приложен в геометрическом центре, а направление силы $\overline{Q}$ задано в условии задачи. Мысленно освобождаем плиту от связей, а их действие заменяем реакциями. Реакция шарового шарнира A приложена в центре шарнира, ее направление зависит от действующих на плиту сил и заранее неизвестно. Поэтому изобразим реакцию шарового шарнира A ее составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, направленными по осям координат. Реакция цилиндрического подшипника B приложена в центре подшипника, лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Направление этой реакции также зависит от действующих на плиту сил, покажем ее двумя силами $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, направленными по соответствующим осям координат. Реакцию стержневой опоры $\bar{S}_C$ направляем вдоль стержня от плиты, предполагая при этом, что стержень растянут.

Таким образом, плита находится в равновесии под действием заданных сил $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и реакций связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, $\bar{S}_C$. Система вышеуказанных сил является пространственной. Прежде чем составлять уравнения равновесия, определим проекции всех сил на координатные оси и их моменты относительно тех же осей (табл. 1.4).

Для определения момента силы относительно оси нужно спроецировать все силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, и найти моменты проекций всех сил относительно точки пересечения оси с плоскостью. Например, силы, действующие на плиту, спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси x (рис. 1.9), и определим моменты проекций этих сил относительно точки B. Так момент силы $\bar{Z}_A$ относительно точки B равен $M_x(Z_A) = M_B(Z_A) = -Z_A AB$, где AB – плечо силы $\bar{Z}_A$. Для определения момента силы $\bar{Q}$ относительно точки B следует применить теорему Вариньона. Для этого силу $\bar{Q}$ разложим в точке ее приложения на составляющие: горизонтальную $Q' = Q\cos\beta$ и вертикальную $Q'' = Q\sin\beta$. Момент силы $\bar{Q}$ относительно точки B будет равен алгебраической сумме моментов сил Q' и Q'' относительно той же точки.

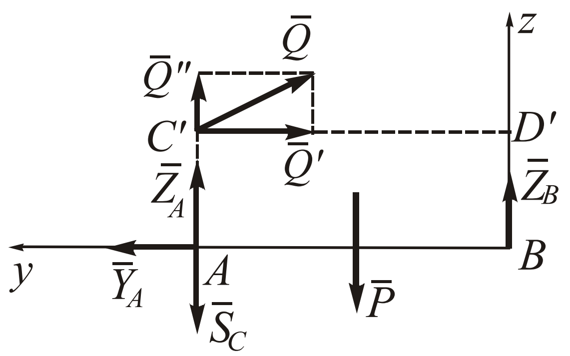


Рис. 1.9

Таблица 1.4

Действующие силы								
	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B	S_C
Проекции силы на оси координат								
F_x	0	0	X_A	0	0	X_B	0	0
F_y	0	$-Q\cos\beta$	0	Y_A	0	0	0	0
F_z	$-P$	$Q\sin\beta$	0	0	Z_A	0	Z_B	$-S_C$
Моменты сил относительно осей координат								
M_x	$\dfrac{P\cdot AB}{2}$	$-Q\cos\beta AC\sin\alpha - Q\sin\beta AB$	0	0	$-Z_A AB$	0	0	$S_C AB$
M_y	$-\dfrac{P\cdot AB}{2}\cos\alpha$	$Q\sin\beta AK\cos\alpha$	0	0	0	0	0	$-S_C AC\cos\alpha$
M_z	0	$Q\cos\beta AK\cos\alpha$	$X_A AB$	0	0	0	0	0

Тогда момент силы $\overline{Q}$ относительно оси x равен

$$M_x(\overline{Q}) = M_B(Q_{yz}) = M_B(Q') + M_B(Q'') = -Q\cos\beta BD' - Q\sin\beta AB =$$

$$= -Q\cos\beta AC\sin\alpha - Q\sin\beta AB.$$

По приведенной на рис. 1.9 расчетной схеме легко составить уравнения $\Sigma M_y(\overline{F}_k)$, $\Sigma M_z(\overline{F}_k)$ (см. табл. 1.4).

Используя данные табл. 1.4, составим уравнения равновесия всех сил, приложенных к плите:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_B = 0; \quad (1.4)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_A - Q\cos\beta = 0; \quad (1.5)$$

$$\Sigma F_{kz} = Z_A + Z_B - S_C - PQ\sin\beta = 0; \quad (1.6)$$

$$\Sigma M_x(\overline{F}_k) = -Z_A AB + S_C AB - Q\cos\beta AC\sin\alpha - Q\sin\beta AB + \frac{P\cdot AB}{2} = 0; \quad (1.7)$$

$$\Sigma M_y(\overline{F}_k) = -\frac{P\cdot AB}{2}\cos\alpha + Q\sin\beta AK\cos\alpha - S_C AC\cos\alpha = 0; \quad (1.8)$$

$$\Sigma M_z(\overline{F}_k) = X_A AB + Q\cos\beta AK\cos\alpha = 0. \quad (1.9)$$

В уравнения (1.4)–(1.9) подставим числовые значения заданных величин и вычислим реакции связей.

Так из уравнения (1.9) определим

$$X_A = (Q\cos\beta\ AK\cos\alpha)/AB = (20\cdot\cos 30°\ 1{,}5\cdot\cos 60°)/4 = -3{,}247 \text{ кН},$$

из уравнения (1.4)

$$X_B = -X_A = 3{,}247 \text{ кН},$$

из уравнения (1.5)

$$Y_A = Q\cos\beta = 17{,}32 \text{ кН},$$

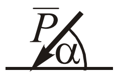
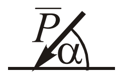
из уравнения (1.8) $S_C = \dfrac{\left(\dfrac{P\cdot AB}{2} + Q\sin\beta\ AK\right)}{AC} = -29{,}64$ кН.

Так как расчетное значение усилия в стержне отрицательное, то стержень сжат. Рассчитав значение S_C из уравнения (1.7), определим $Z_A = -45{,}89$ кН, а из уравнения (1.6) определим $Z_B = 16{,}25$ кН.

1.4. Расчет плоской фермы (С-4)

Определить аналитическим методом опорные реакции плоской фермы, изображенной на рис. 1.10 (0–9). Определить также усилия в стержнях 1, 2, 3 по методу Риттера, а в стержнях 4 и 5 аналитически и графически методом вырезания узлов. Точки приложения сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и их направления заданы в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Силы	$P_1 = 10$ кН		$P_2 = 20$ кН		$P_3 = 30$ кН	
№ условия	 α, град	Точка приложения силы	 α, град	Точка приложения силы	 α, град	Точка приложения силы
0	15	*C*	45	*D*	30	*K*
1	30	*E*	30	*K*	60	*C*
2	45	*C*	90	*E*	45	*D*
3	90	*K*	60	*D*	90	*C*
4	30	*D*	90	*K*	60	*C*
5	50	*C*	30	*K*	30	*D*
6	15	*C*	60	*E*	90	*K*
7	45	*D*	45	*K*	45	*E*
8	60	*D*	90	*C*	30	*K*
9	30	*C*	60	*E*	60	*K*

Указания. Задачи С-4 относятся к теме «Расчет плоской фермы». Для определения реакций опор аналитическим методом необходимо составить три уравнения равновесия для плоской системы сил, приложенных к ферме: $\Sigma F_{kx} = 0$, $\Sigma F_{ky} = 0$, $\Sigma M_0(F_k) = 0$. Для определения усилий в стержнях фермы следует провести по стержням 1, 2, 3 сечение, разбив тем самым ферму на две части, и рассмотреть равновесие любой ее части. При этом действие отброшенной части фермы нужно заменить реакциями рассеченных стержней. Для определения усилий в этих стержнях необходимо составить три уравнения равновесия так, чтобы в каждое уравнение входила только одна из реакций: или $\overline{S}_1$, или $\overline{S}_2$, или $\overline{S}_3$.

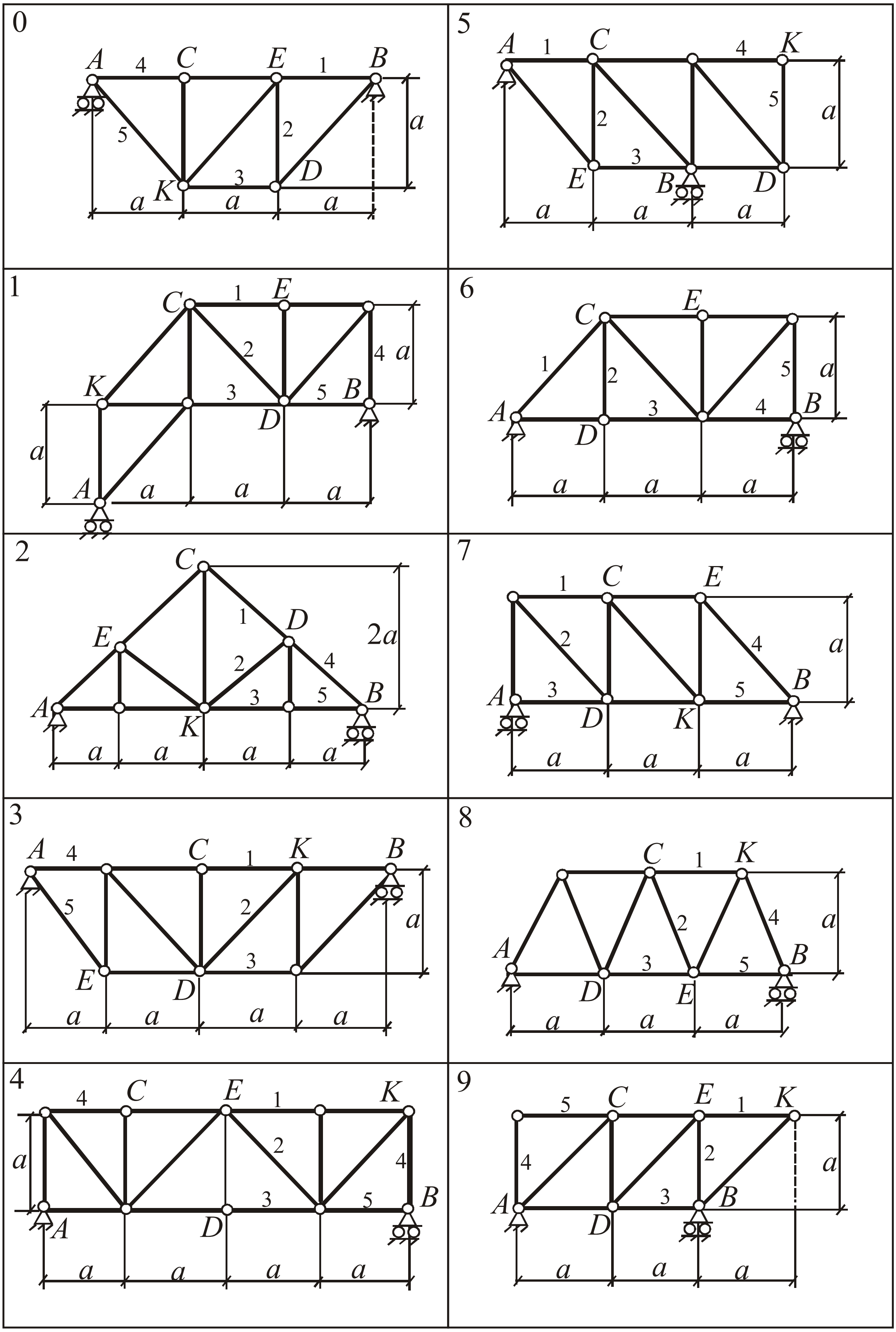

0
A 4 C E 1 B
5 2 3
a K a a D
a
5
A 1 C 4 K
2 5 3
E B D
a a a
a
1
C 1 E
K 2 4 a
3 5 B
a D
A a a a
6
C E
1 2 5 a
A 3 4 B
D
a a a
2
C
E 1 D 2a
2 4
A 3 5 B
K
a a a a
7
1 C E
2 4
A 3 5 B
D K
a a a
a
3
A 4 C 1 K B
5 2 a
E 3
D
a a a a
8
C 1 K
2 4 a
A 3 5 B
D E
a a a
4
4 C E 1 K
a 2 4
3 5 B
A D
a a a a
9
5 C E 1 K
4 2 a
A 3 B
D
a a a

Рис. 1.10

Это может быть либо уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия двух усилий, либо, в случае параллельных стержней, уравнение проекции на ось, перпендикулярную к ним. При определении усилий в 4 и 5 стержнях методом вырезания узлов аналитически следует составить по два уравнения равновесия $\Sigma F_{kx} = 0$, $\Sigma F_{ky} = 0$ для каждого вырезанного узла. При графическом решении нужно построить замкнутый многоугольник сил, учитывая условие равновесия сил, приложенных к узлу $\Sigma F_k = 0$.

Пример. Ферма удерживается в равновесии при помощи шарнирно неподвижной опоры A и стержневой опоры B. На ферму действуют силы, численные значения которых равны $P_1 = 1$ кН, $P_2 = P_3 = 2$ кН, $P_4 = 3$ кН, $P_5 = 1$ кН, а их направления и точки приложения показаны на рис. 1.11. Определить реакции опор и усилия в стержнях.

Определить реакции опор и усилия в стержнях.

Решение.

1. Определим реакции внешних опор.

Освободим ферму от связей, действие отброшенных связей заменим реакциями опор. Покажем реакцию шарнирно неподвижной опоры A двумя силами $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, направленными по осям координат. Реакцию стержневой опоры B направим вдоль стержня от фермы к точке закрепления, предположив при этом, что стержень растянут. Составим уравнения равновесия и найдем эти реакции (рис. 1.11).

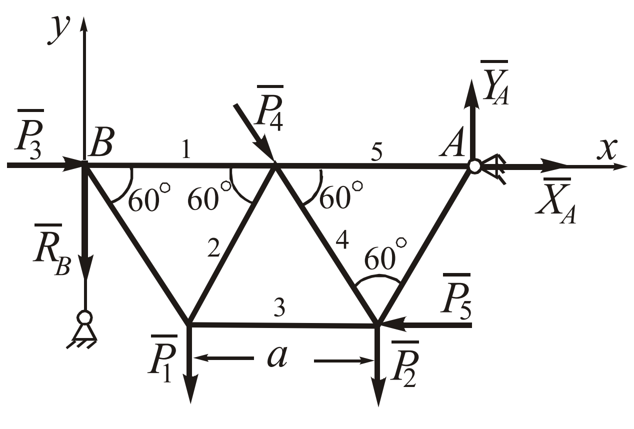


Рис. 1.11

$$\Sigma F_{kx} = P_3 + P_4\cos60° + X_A - P_5 = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = R_B - P_4\sin60° - P_1 - P_2 + Y_A = 0;$$

$$\Sigma M_A(F_k) = R_B \cdot 2a + P_4 a\sin60° + P_1 \cdot 1{,}5a + P_2 \cdot 0{,}5a - P_5 a\cos30° = 0.$$

Из составленных уравнений определим реакции опор:

$$X_A = -2{,}5 \text{ кН}; \ Y_A = 3{,}5 \text{ кН}; \ R_B = 2{,}1 \text{ кН}.$$

2. Определим усилия в стержнях методом Риттера.

Для определения усилий в стержнях 1, 2, 3 по методу Риттера проводим сечение через стержни 1, 2, 3, отбрасываем правую часть фермы и рассматриваем равновесие оставшейся левой части (рис. 1.12). Действие отброшенной части фермы заменяем реакциями пересеченных стержней $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$. Для определения усилия в стержне 1 составим уравнение моментов относительно узла C, где пересекаются стержни 2 и 3.

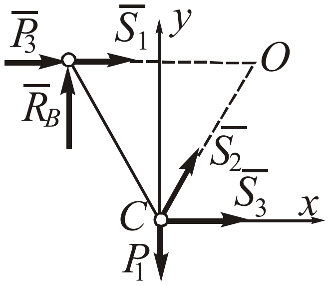


Рис. 1.12

$\Sigma M_C(F_k) = -R_B a\sin30° - P_3 a\sin60° + S_1 a\sin60° = 0$. $S_1 = -3{,}2$ кН, знак «–» показывает, что стержень 1 сжат.

Для нахождения усилия во втором стержне S_2 составляем уравнение проекций сил на ось y: $\Sigma F_{ky} = R_B - P_1 + S_2\cos30° = 0$, $S_2 = -1{,}3$ кН, стержень 2 также сжат.

Для определения усилия S_3 составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$: $\Sigma M_0(F_k) = -R_B a - P_1 a\cos60° + S_3 a\sin60° = 0$. $S_3 = 1{,}93{,}2$ кН, знак «+» показывает, что стержень 3 растянут.

3. Определим усилия в стержнях методом вырезания узлов.

Для определения усилий в 4 и 5 стержнях достаточно вырезать узел III (рис. 1.13).

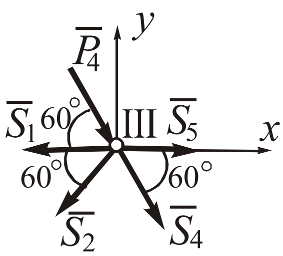


Рис. 1.13

а) ***Аналитический метод***

Составим уравнения равновесия сил, приложенных в узле III:

$\Sigma F_{kx} = -S_1 + P_4\cos60° + S_5 - S_2\cos60° +$
$+ S_4\cos60° = 0$;

$\Sigma F_{ky} = -P_4\sin60° - S_2\sin60° - S_4\sin60° = 0$.

Из уравнений определяем усилия в стержнях $S_4 = -1{,}7$ кН; $S_5 = -4{,}5$ кН, стержни 4, 5 сжаты.

б) ***Графический метод***

Для определения усилий $\overline{S}_4$, $\overline{S}_5$ графическим методом построим замкнутый силовой многоугольник $\overline{P}_4 + \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_4 + \overline{S}_5 = 0$ в выбранном масштабе сил $\mu F = 1$, т. е. 1 см будет содержать 1 кН (рис. 1.14). Силовой многоугольник строится с учетом знаков усилий в стержнях: если стержень сжат, усилие направлено к узлу, если растянут – от узла. Измеряя соответствующие отрезки многоугольника, получим $S_4 = –1,7$ кН, $S_5 = –4,5$ кН.

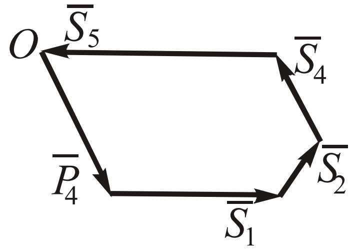


Рис. 1.14

1.5. Центр тяжести твердого тела (С-5)

Найти координаты центра тяжести тела, составленного из однородных стержней одинакового материала (задачи 5, 6, 8), плоской фигуры (задачи 0, 1, 2, 4, 9) или объема (задачи 3, 7), представленных на рис. 1.15 (0–9). Необходимые данные для решения задачи приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

№ условия	*a*	*b*	*c*	*r*
	см			
0	8	12	5	2
1	6	8	4	4
2	10	15	8	1
3	6	10	4	3
4	8	8	4	1
5	10	16	8	2
6	12	20	10	3
7	10	6	3	2
8	8	10	4	1
9	10	12	6	4

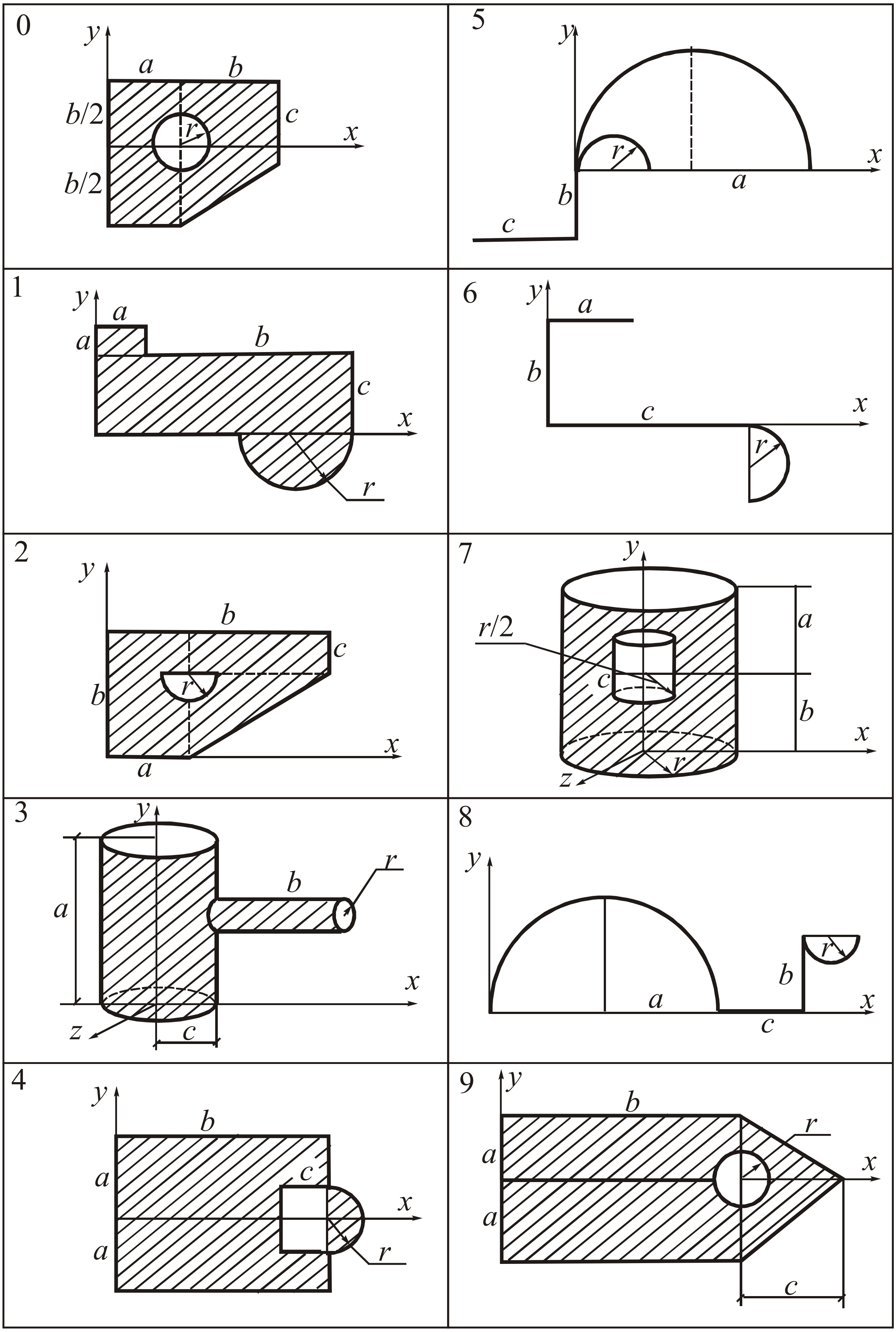

0
y a b b/2 c r x b/2
5
y r x a b c
1
y a a b c x r
6
y a b x c r
2
y b c r b x a
7
y a r/2 c b x r z
3
y r a b x z c
8
y r b a x c
4
y b a c x a r
9
y b r a x a c

Рис. 1.15

Указания. Задачи С-5 относятся к теме «Центр тяжести твердого тела». Для решения этих задач применяются метод симметрии, метод разбиения на части и метод отрицательных площадей или объемов. Если тело имеет центр, плоскость или ось симметрии, то его центр тяжести находится в центре, на плоскости или на оси симметрии. Если тело имеет сложную конфигурацию, то его разбивают на простые геометрические фигуры, например, прямоугольники, треугольники, круговые сегменты и т. д., положения центров тяжести которых легко определяются. Положение центра тяжести определяют по формулам:

– для тела, имеющего объем

$$x_c = \frac{\Sigma V_k x_k}{V},\ y_c = \frac{\Sigma V_k y_k}{V},\ z_c = \frac{\Sigma V_k z_k}{V};$$

– для плоской фигуры

$$x_c = \frac{\Sigma S_k x_k}{S},\ y_c = \frac{\Sigma S_k y_k}{S},\ z_c = \frac{\Sigma S_k z_k}{S};$$

– для тела, составленного из однородных стержней

$$x_c = \frac{\Sigma L_k x_k}{L},\ y_c = \frac{\Sigma L_k y_k}{L},\ z_c = \frac{\Sigma L_k z_k}{L},$$

где $V = \Sigma V_k$, $S = \Sigma S_k$, $L = \Sigma L_k$ – соответственно объем или площадь тела, или общая длина всех однородных стержней; V_k, S_k, L_k – объем, площадь или длина k-й части тела, а x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести этой части тела.

Если внутри тела имеется вырез, то для нахождения координат его центра тяжести следует применять те же самые формулы, только считать вырезанные объемы и площади отрицательными. Этот метод и называется методом отрицательных масс, или объемов, или площадей.

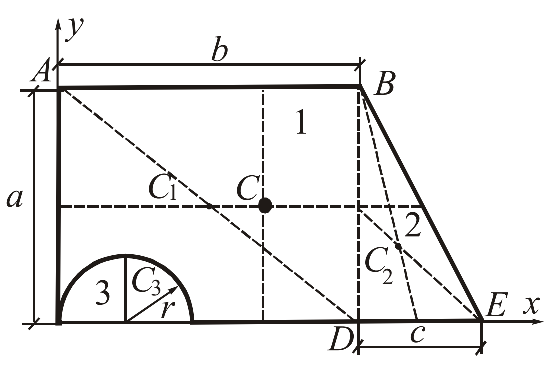


Рис. 1.16

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры *OABE*, из которой вырезан полукруг радиуса r = 6 см (рис. 1.16), размеры a = 20 см, b = 25 см, c = 10 см.

Решение. Разбиваем плоскую фигуру на три части – прямоугольник *OABD*, треугольник *BDE* и вырезанный полукруг, площадь которого следует считать отрицательной. Для определения положения центров тяжести прямоугольника, треугольника и полукруга воспользуемся формулами, приведенными в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Плоская фигура	Площадь	Координаты центра тяжести
Прямоугольник	$S = ab$	$x_c = a/2,\ y_c = b/2$
Треугольник	$S = \frac{1}{2}ah$	$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_c = \frac{1}{3}ah$ где x_1, x_2, x_3 – координаты вершин треугольника
Полукруг	$S = \frac{\pi R^2}{2}$	$x_c = 0;\ y_c = \frac{4R}{3\pi}$

Все промежуточные расчеты занесем в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Плоская фигура	S_k, см^2	x_k, см	y_k, см	$S_k\ x_k$, см^3	$S_k\ y_k$, см^3
Прямоугольник	520	13	10	6760	5200
Треугольник	100	29,3	6.66	2930	666
Полукруг	–56,52	6	2,55	–339,12	–147,13
Сумма	563,48	–	–	9350,88	5718,87

По формулам вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры

$$x_c = \frac{\Sigma S_k x_k}{S} = \frac{9350,88}{563,48} = 16,6 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\Sigma S_k y_k}{S} = \frac{5718,87}{563,48} = 10,15 \text{ см}.$$

Ответ: x_c = 16,6 см; y_c = 10,15 см.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки (К-1)

Движение точки M в плоскости xy задано уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x и y – в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории, а для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Построить траекторию точки, а также показать вектор скорости и ускорения для $t_1 = 1$ с.

Зависимость $x = x(t)$ выбирается из табл. 2.1 по предпоследней цифре шифра, а $y = y(t)$ – по последней цифре шифра.

Таблица 2.1

№ условия	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см
0	$2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$12-8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$-t$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
4	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+1$
5	$4-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t$
6	$2t$	$-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2+\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+2$
8	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
9	$4+t$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Указания. Задачи К-1 относятся к теме «Кинематика точки» и решаются с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки при координатном и естественном способах задания движения.

В предлагаемых задачах все искомые величины следует находить только для момента времени $t = t_1$. В некоторых вариантах при определении траектории следует применять известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 3\sin\frac{\pi}{6}t$, $y = 2\cos\frac{\pi}{3}t$ (x – в сантиметрах, t – в секундах). Для момента времени t_1 = 1 с определить скорость, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории.

Решение. 1. Определим траекторию движения точки.

Исключим время t из уравнений движения и найдем зависимость между координатами: $y = 2\cos\frac{\pi}{3}t = 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{6}t\right)$, $\sin\frac{\pi}{6}t = \frac{x}{3}$, тогда $y = 2 - \frac{4}{9}x^2$ – это уравнение параболы. Так как при $t \geq 0$, $x > 0$, то траекторией точки является правая ветвь параболы с вершиной в точке (0; 2). Подставив в уравнения движения время t_1 = 1 с, определим координаты точки M_1.

Получим

$$x\Big|_{t_1 = 1\text{ с}} = 1{,}5\text{ см}; \quad y\Big|_{t_1 = 1\text{ с}} = 1\text{ см}.$$

2. Определим скорость движения точки.

Дифференцируя уравнения движения по времени, находим проекции вектора скорости точки на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right); \quad V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Вычислим значения проекций скоростей точки в момент времени t_1 = 1 с:

$$V_x = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}34 \text{ см/с и } V_y = -\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = -1{,}81 \text{ см/с.}$$

Вычислим модуль скорости точки по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2{,}27 \text{ см/с.}$$

3. Определим ускорение точки.

Проекции ускорения точки на декартовы оси координат равны:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}t;\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

При $t_1 = 1$ с:

$$a_x = -\frac{\pi^2}{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}4 \text{ см/с}^2;\ a_y = -\frac{2}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение точки находим по формуле

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 1{,}17 \text{ см/с}^2.$$

4. Определим касательное ускорение:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = 0{,}64 \text{ см/с}^2.$$

5. Определим нормальное ускорение.

Модуль полного ускорения определяется по формуле, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, отсюда нормальное ускорении равно

$$a = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0{,}98 \text{ см/с}^2.$$

6. Вычислим радиус кривизны траектории в данной точке.

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = 5{,}25 \text{ см.}$$

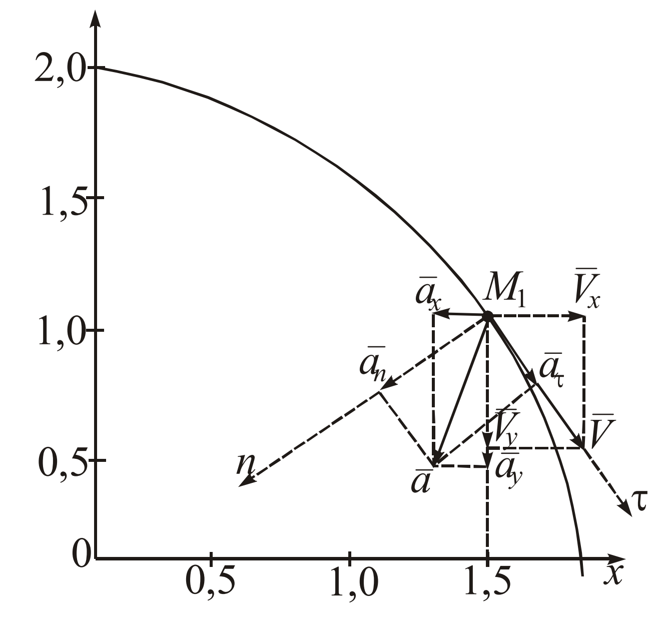


Рис. 2.1

На рис. 2.1 показано положение точки в данный момент времени $t_1 = 1$ с, а также вектор скорости и ускорения, построенные по проекциям V_x, V_y, a_x, a_y. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в данной точке, а вектор ускорения $\bar{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории. Векторы касательного и нормального ускорения откладываем по осям τ и n, проводя на эти оси перпендикуляры из конца вектора $\bar{a}$.

2.2. Вращательное движение твердого тела (К-2)

Механизм состоит из ступенчатых колес 1, 2, находящихся в зацеплении, или шкивов, связанных ременной передачей. К грузу 3 прикреплена нить, которая наматывается на одно из колес (рис. 2.2 (0–9)).

В табл. 2.2 заданы:

– или закон движения груза 3, $s_3 = s_3(t)$, s – в метрах, t – в секундах;

– или закон изменения скорости груза 3, $V_3 = V_3(t)$, V – в метрах в секунду;

– или закон вращательного движения колес или шкивов, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, φ – в радианах;

– или закон изменения их угловых скоростей, $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$, ω – в $с^{-1}$.

Таблица 2.2

№ условия	Дано						Найти	
	Характеристики движения	R_1, м	r_1, м	R_2, м	r_2, м	t_1, с	V, ω	a, ε
0	$\varphi_1 = t^4 - 6$	0,15	0,05	0,20	0,05	1	V_3, ω_2	a_M, ε_1
1	$s_3 = 4t + 2t$	0,12	0,06	0,15	0,10	2	V_M, ω_1	a_3, ε_1
2	$\varphi_2 = 5t^2 - 8$	0,12	0,04	0,08	0,02	1	V_3, ω_1	a_M, ε_2
3	$\omega_1 = 2t^2 + t$	0,20	0,08	0,40	0,10	0,5	V_3, ω_2	a_M, ε_2
4	$V_3 = 8t + t$	0,40	00,5	0,20	0,10	2	V_M, ω_1	a_3, ε_1
5	$\omega_1 = 6t^2 + 1{,}5$	0,16	0,08	0,12	0,24	1	V_3, ω_2	a_M, ε_2
6	$\varphi_1 = 6t^2 - 2t$	0,08	0,02	0,12	0,04	2	V_3, ω_2	a_M, ε_1
7	$\varphi_2 = 2t^3 - 4t$	0,06	0,02	0,08	0,04	0,5	V_3, ω_1	a_M, ε_2
8	$\omega_2 = 2t^2 + 2$	0,20	0,06	0,10	0,05	1	V_3, ω_1	a_M, ε_2
9	$s_3 = 4t + 2t_2$	0,10	0,05	0,20	0,05	0,5	V_M, ω^2	a_3, ε_1

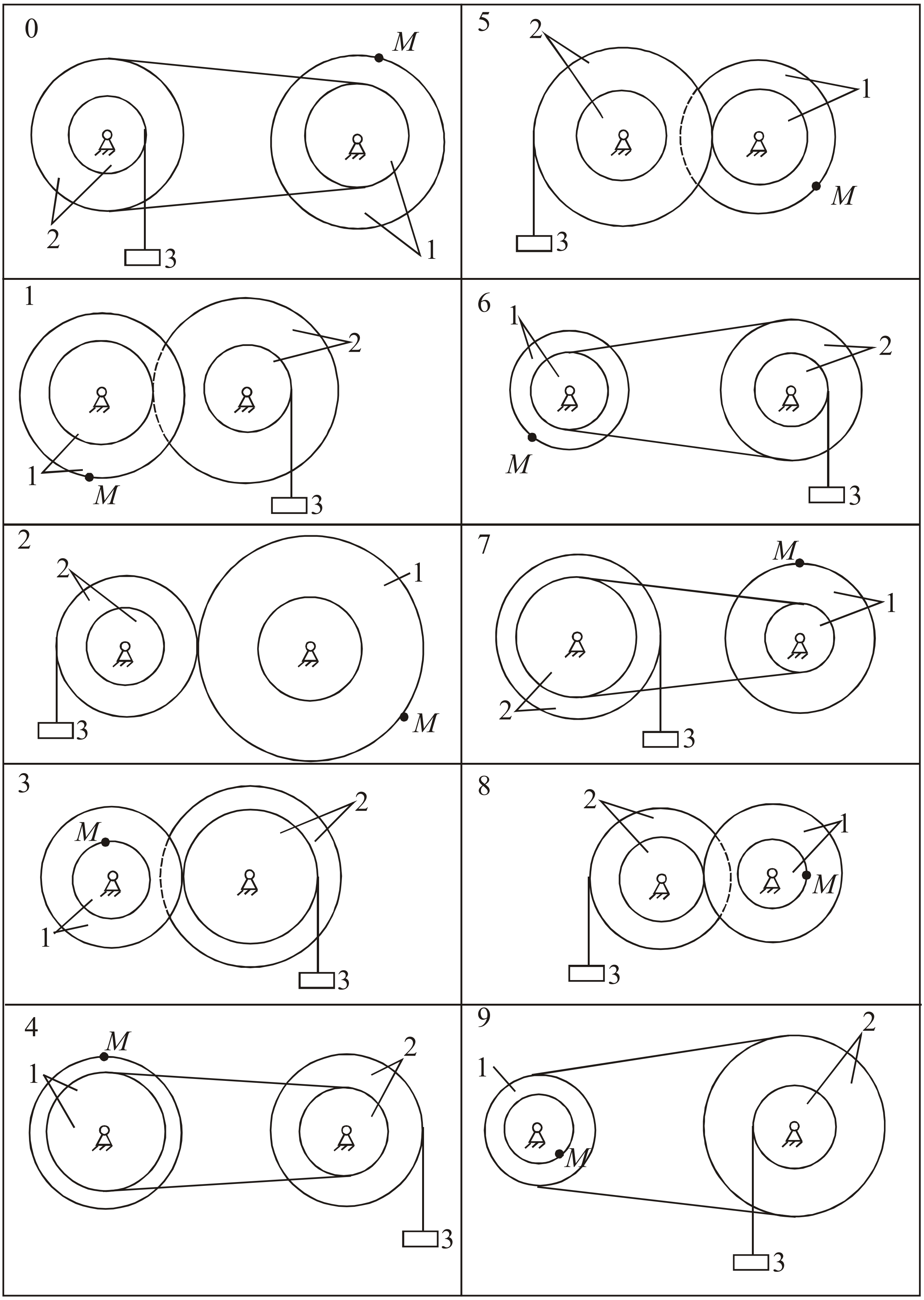

0 M 2 3 1
5 2 1 M 3
1 2 1 M 3
6 1 2 M 3
2 2 1 3 M
7 M 1 2 3
3 2 M 1 3
8 2 1 M 3
4 M 1 2 3
9 2 1 M 3

Рис. 2.2

В момент времени $t = t_1$ определить величины, указанные в столбце «Найти». На рисунках построить вектор скорости указанной точки и ускорения, а также указать направления вращения колес или шкивов.

Указания. Задачи К-2 относятся к теме «Вращательное движение твердого тела». При решении этих задач следует учесть, что если колеса находятся в зацеплении, то скорости точек, в которых соприкасаются эти колеса, равны. При ременной передаче все точки ремня и точки, расположенные на ободах колес, имеют численно равные скорости, если скольжение ремня по ободам колес отсутствует. Колеса, насаженные на одну ось, вращаются с одинаковыми угловыми скоростями и угловыми ускорениями.

При решении задач следует воспользоваться общими формулами для вращательного движения твердого тела: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, $V = \omega h$, $a^n = \omega^2 h$, $a^\tau = \varepsilon h$, где h – расстояние точки до оси вращения; ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение тела. Положительные направления для угла поворота φ и угловой скорости ω принять против хода часовой стрелки, а для груза 3 его движение вниз.

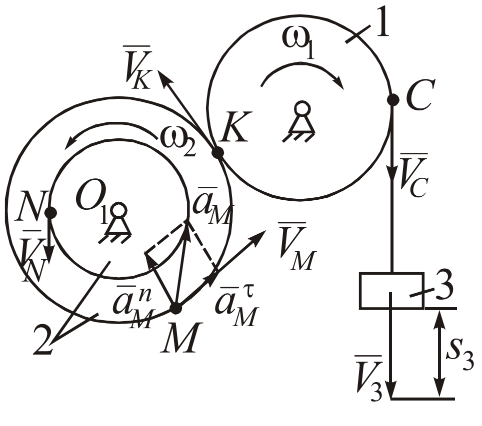


Рис. 2.3

Пример. Груз 3, перемещаясь вниз, приводит во вращение шкив 1, который находится в зацеплении со ступенчатым колесом 2 (рис. 2.3). Радиусы колес соответственно равны R_1 = 0,12 м, R_2 = 0,08 м, r_2 = 0,04 м, а движение груза 3 задано уравнением $s = 2t^2+2$ (s – в метрах, t – в секундах).

Для момента времени t_1 = 6 с определить скорость точки N, а также скорость и ускорение точки M колеса 2.

Решение.

Зная закон движения груза 3, находим его скорость:

$$V_3 = \frac{ds_3}{dt} = 4t \text{ м/с.}$$

Так как $V_3 > 0$ для любого момента времени, то вектор $\overline{V}_3$ направлен в сторону возрастания S_3.

Поскольку трос, на котором подвешен груз, нерастяжим, то все его точки имеют скорости, равные скорости груза. Тогда точка C обода колеса 2 имеет ту же скорость, т. е. $V_C = V_3$. При опускании груза 3 колесо 2 вращается с угловой скоростью ω_1, а скорость точки C на ободе колеса равна $V_C = \omega_1 R_1$, откуда $\omega_1 = \dfrac{V_C}{R_1} = \dfrac{1}{3}t$, и при $t_1 = 6$ с $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$.

Поскольку груз 3 опускается вниз, то колесо 2 вращается по часовой стрелке.

Так как колеса 1 и 2 находятся в зацеплении, то скорость точки касания колес K, как принадлежащая колесу 1, равна $V_K = \omega_1 R_1$, а как колесу 2 – $V_K = \omega_2 R_2$. Тогда $\omega_2 R_2 = \omega_1 R_1$ и отсюда $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 R_1}{R_2} = \dfrac{t}{2}$ с$^{-1}$, а при $t_1 = 6$ с $\omega_2 = 3$ с$^{-1}$. По направлению скорости точки K (см. рис. 2.3) устанавливаем, что колесо 2 вращается в сторону, противоположную вращению колеса 1.

Определим угловое ускорение колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{2} \text{ с}^{-2}.$$

Так как $\varepsilon_2 > 0$ и $\omega_2 > 0$, то направление углового ускорения совпадает с направлением вращения колеса 2.

Определим скорости точек M и N:

$V_M = \omega_2\, O_1M = 3{\cdot}8 = 0{,}24$ м/с, $V_N = \omega_2 O_1N = 3{\cdot}4 = 0{,}12$ м/с.

Найдем ускорение точки M.

Нормальное ускорение точки M равно $a_M^n = \omega_2^2 O_1M = 0{,}72$ м/с^2, касательное $a_M^\tau = \varepsilon_2 O_1M = 0{,}04$ м/с^2.

Вектор нормального ускорения точки M направлен к центру O_1, вектор касательного ускорения – перпендикулярен к вектору нормального ускорения.

Модуль полного ускорения точки M равен:

$$a = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = 0{,}721 \text{ м/с}^2.$$

2.3. Плоское движение твердого тела (К-3)

Плоский механизм состоит из трех тел (рис. 2.4 (0–9)), соединенных друг с другом шарнирами. Положение механизма определяется углами α, β, γ, значения которых вместе с другими данными приведены в табл. 2.3.

Катки катятся без скольжения по неподвижной поверхности. Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью, направление которой указано на рисунках. Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении кинематической схемы механизма должны откладываться соответствующие углы. Построение схемы механизма следует начинать со стержня, положение которого определяется углом α, затем β и γ.

Определить скорости точек B, C и ускорение точки B, а также угловую скорость и угловое ускорение звена AB.

Таблица 2.3

№ условия	α	β	γ	ω_1	O_1A	AB	AC
	град			с$^{-1}$	м	м	м
0	30	120	0	2	0,4	0,8	0,2
1	60	60	90	4	0,5	1,0	0,5
2	0	60	0	1	0,6	1,5	0,5
3	30	120	90	4	0,4	1,0	0,5
4	60	30	90	3	0,6	1,2	0,4
5	45	90	0	2	0,4	1,0	0,2
6	90	30	90	1	0,6	1,5	0,5
7	0	120	90	0,5	0,8	1,6	0,4
8	120	90	90	2	0,4	1,0	0,5
9	90	45	0	3	0,4	1,0	0,6

Указания. Задачи К-3 относятся к теме «Плоскопараллельное движение твердого тела». При их решении для определения скоростей точек механизма следует воспользоваться понятием мгновенного центра скоростей. При определении ускорения точки B следует применить теорему об ускорениях точек плоской фигуры, согласно которой $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ или $\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$.

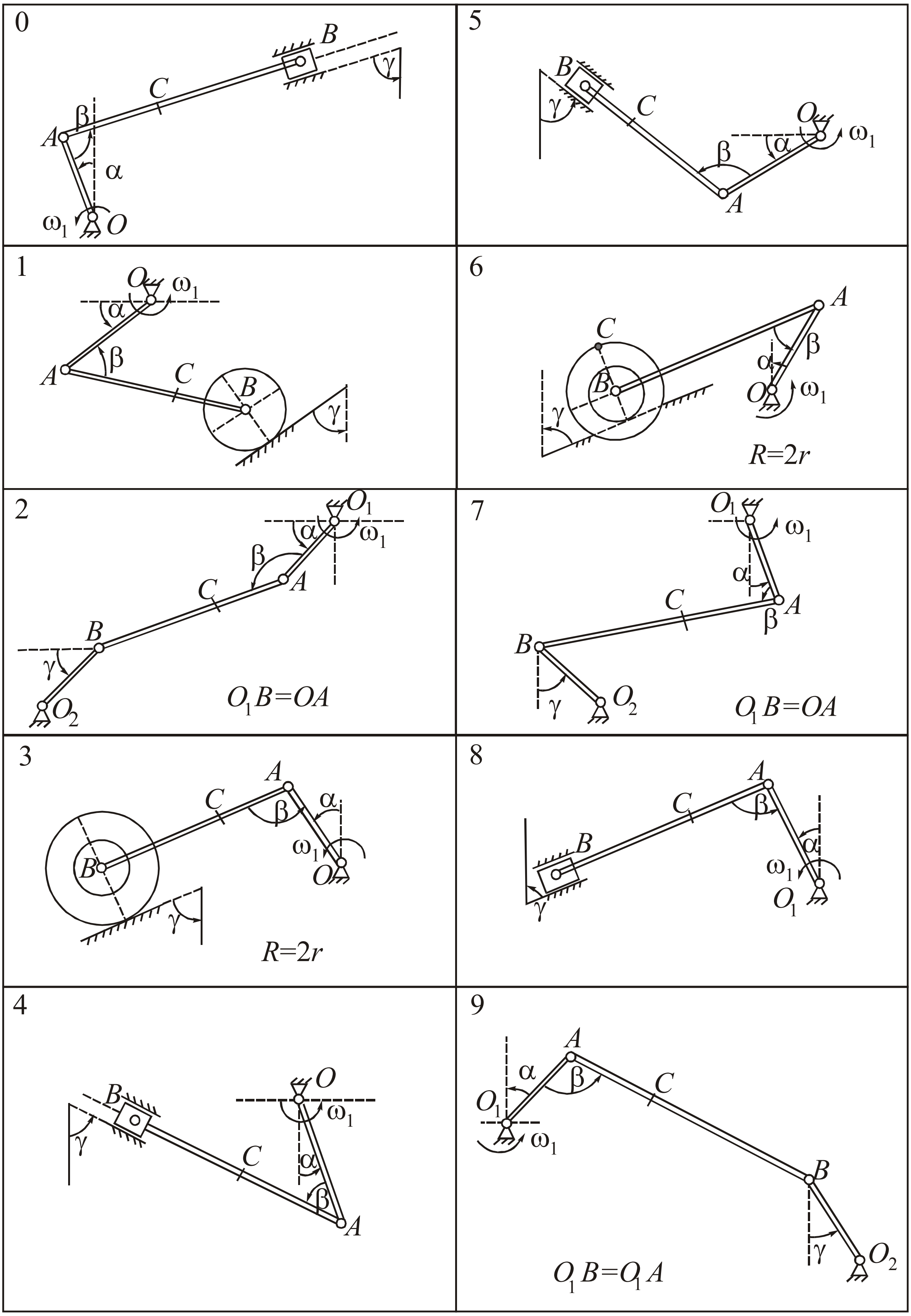

0
B
C
γ
β
A
α
ω1
O
5
B
C
γ
O
ω1
α
β
A
1
O
ω1
α
β
A
C
B
γ
6
A
C
B
β
α
O
ω1
γ
R=2r
2
O1
α
ω1
β
A
C
B
γ
O2
O1B=OA
7
O1
ω1
α
A
C
β
B
γ
O2
O1B=OA
3
A
C
β
α
ω1
B
O
γ
R=2r
8
A
C
β
B
α
ω1
γ
O1
4
B
O
ω1
γ
C
α
β
A
9
A
α
β
C
O1
ω1
B
γ
O2
O1B=O1A

Рис. 2.4

Если точка B движется по дуге окружности радиуса O_1B, то

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau \text{ и } a_B^n = \frac{V_B^2}{O_1B}, \quad \bar{a}_B^\tau \perp \bar{a}_B^n.$$

Направления векторов скорости и ускорения точки B устанавливаются в зависимости от траектории, по которой она движется.

Пример. Кривошип AO вращается ускоренно с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{OA} = 1{,}5$ с$^{-2}$. Колесо, связанное с шатуном AB, катится без скольжения по горизонтальной поверхности (рис. 2.5). Размеры кривошипа и шатуна равны $OA = 0{,}10$ м, $AB = 0{,}40$ м, радиус колеса $r = 0{,}08$ м. Точка C является средней точкой звена AB. Найти скорости точек B и C, D, угловые скорости звена AB ω_{AB} и колеса $\omega_к$, а также ускорение точки B и угловое ускорение звена AB ε_{AB}.

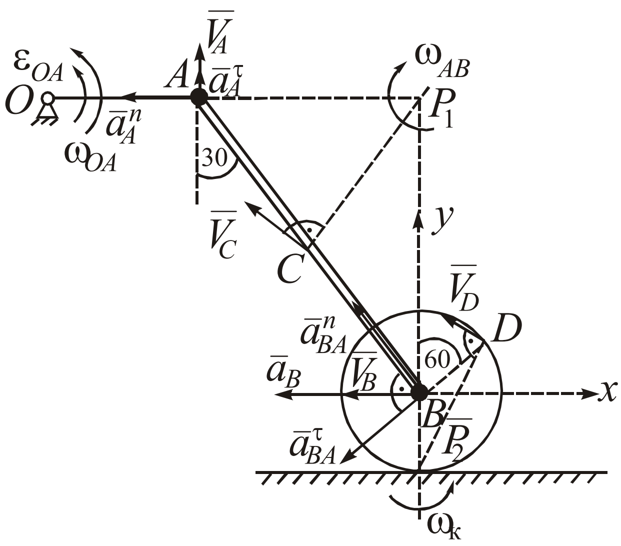


Рис. 2.5

Решение. 1. Определим скорости точек B, C и угловую скорость звена AB ω_{AB}.

Вычислим скорость точки A, $V_A = \omega_{OA}OA = 0{,}20$ м/с. Вектор скорости точки $\bar{V}_A \perp OA$ и направлен в сторону вращения звена OA.

Скорость точки B направлена параллельно поверхности, по которой катится колесо, в данном случае – по горизонтали. Из точек A и B проводим перпендикуляры к векторам скоростей $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$. Точка пересечения этих перпендикуляров P_1 является мгновенным центром скоростей звена AB (см. рис. 2.5).

Поскольку скорости точек пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей, то

$$V_A = \omega_{AB}AP_1, \; V_B = \omega_{AB}BP_1, \; V_C = \omega_{AB}CP_1,$$

где ω_{AB} – угловая скорость звена AB; AP_1, BP_1, CP_1 – расстояния от точек A, B, C до мгновенного центра скоростей P_1.

Из треугольника ABP_1 определим расстояния $BP_1 = AB\cos 30° = 0{,}346$ м и $AP_1 = AB\cos 60° = 0{,}20$ м. Треугольник AP_1C – равносторонний и $AP_1 = CP_1 = 0{,}2$ м.

Вычислим угловую скорость звена AB и скорости точек B и C:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = 1\ \text{с}^{-1},\ \overline{V}_B = \omega_{AB} BP_1 = 0{,}346\ \text{м/с},$$

$$V_C = \omega_{AB} CP_1 = 0{,}2\ \text{м/с}.$$

Вектор скорости $\overline{V}_C \perp CP_1$, т. к. скорости всех точек звена перпендикулярны отрезкам, соединяющим их с мгновенным центром скоростей. Направления векторов $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_C$ определяются вращением звена AB вокруг мгновенного центра скоростей P_1, которое задано направлением вектора скорости точки A.

2. Определим скорость точки D $\overline{V}_D$ и угловую скорость колеса $\omega_к$.

Так как колесо катится без скольжения, то скорость точки касания колеса с неподвижной поверхностью равна нулю и, следовательно, точка P_2 является мгновенным центром скоростей колеса.

Вектор скорости точки D $\overline{V}_D$ перпендикулярен к отрезку P_2D и направлен в сторону вращения колеса вокруг мгновенного центра скоростей колеса P_2, определяемого направлением скорости точки B.

Скорости точек B и D равны $V_B = \omega_к BP_2$, $V_D = \omega_к DP_2$.

Из треугольника BP_2D определяем расстояния точек B и D до мгновенного центра скоростей колеса:

$$BP_2 = r = 0{,}08\ \text{м},\ DP_2 = 2r\cos 30° = 0{,}138\ \text{м}.$$

Определим угловую скорость колеса и скорость точки D:

$$\omega_к = \frac{V_B}{BP_2} = 4{,}3\ \text{с}^{-1};\ V_D = \omega_к DP_2 = 0{,}596\ \text{м/с}.$$

3. Определим ускорение точки B и угловое ускорение звена AB.

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение точки B равно

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}, \tag{2.1}$$

где $a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 0{,}4$ м/с^2 – нормальное ускорение точки A; $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} OA = 15$ м/с^2 – ее касательное ускорение.

Вектор нормального ускорения точки A $\overline{a}_A^n$ направлен к центру вращения звена AO, $\overline{a}_A^{\tau} \perp \overline{a}_A^n$. Вектор $\overline{a}_{BA}^n$ направлен по звену AB от B к A, $\overline{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{a}_{BA}^n$.

Численные значения ускорений, с которыми точка B вращается относительно точки A, определяются по формулам $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AB$, $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 AB = 0{,}4$ м/с^2.

Вектор ускорения точки B направлен по направлению движения точки B, т. е. по горизонтали.

В векторном равенстве (2.1) неизвестны численные значения ускорений $\overline{a}_B$, $\overline{a}_{BA}^{\tau}$. Для их определения спроецируем равенство (2.1) на оси координат x и y:

$$-a_B = -a_A^n - a_{BA}^n \cos 60° - a_{BA}^{\tau} \cos 30°,$$

$$0 = a_A^{\tau} + a_{BA}^n \cos 30° - a_{BA}^{\tau} \cos 60°.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{a_A^{\tau} + a_{BA}^n \cos 30°}{\cos 60°} = 0{,}992 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = a_A^n + a_{AB}^n \cos 60° + a_{AB}^{\tau} \cos 30° = 1{,}464 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение звена AB определим по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|\overline{a}_{BA}^{\tau}\right|}{AB} = 2{,}48 \quad \text{с}^{-2}.$$

Так как $\omega_{AB} > 0$ и $\varepsilon_{AB} > 0$, то направление углового ускорения ε_{AB} совпадает с направлением угловой скорости ω_{AB}.

Пример. Кривошип OA механизма $OABO_1$, звенья которого соединены шарнирами между собой и с неподвижными опорами, вращается с постоянной угловой скоростью ω_{OA} = 2 с$^{-1}$. Определить скорости точек B, C звена AB, угловую скорость и угловое ускорение этого звена, а также ускорение точки B в положении механизма, изображенного на рис. 2.6, если OA = 0,15 м, O_1B = 0,05 м.

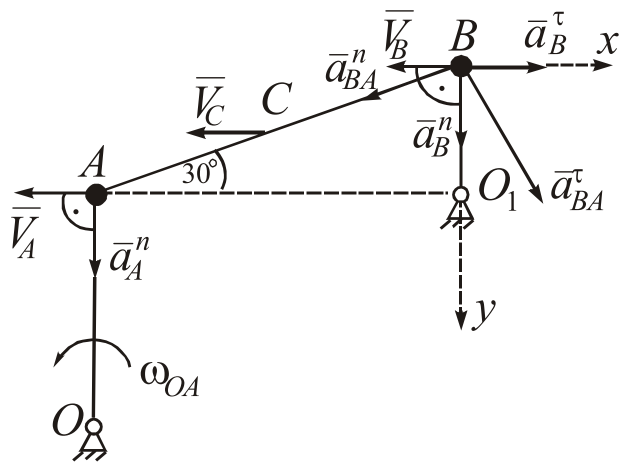


Рис. 2.6

Решение. 1. Определим скорости точек B, C и угловую скорость звена AB ω_{AB}.

Скорость точки A равна $V_A = \omega_{OA}OA = 2\cdot15 =$ $= 0{,}30$ м/с. Вектор скорости точки $\overline{V}_A \perp OA$ и направлен в сторону вращения кривошипа OA. Так как кривошип O_1B тоже вращается, то $\overline{V}_B \perp O_1B$. Восстанавливая перпендикуляры из точек A и B к векторам скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, получаем, что они пересекаются в бесконечности. Это означает, что мгновенный центр скоростей звена AB находится в бесконечности и скорости всех точек звена AB равны по модулю и направлению $V_B = V_C = V_A =$ $= 0{,}3$ м/с. $\overline{V}_A = \overline{V}_B = \overline{V}_C$, а $\omega_{AB} = 0$.

2. Определим ускорение точки B и угловое ускорение звена AB.

Точка B принадлежит шатуну AB, и ее ускорение при плоском движении этого звена равно $\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n$. В то же время точка B принадлежит кривошипу BO_1, который вращается вокруг центра O_1, и ее ускорение равно $\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau$. Приравнивая два последних векторных равенства, получим уравнение для определения ускорения точки B:

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \qquad (2.2)$$

В уравнении (2.2) определим модули ускорений:

1) $a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 60$ м/с^2;

2) $a_A^\tau = \varepsilon_{OA}OA = 0$, $\varepsilon_{OA} = \dfrac{d\omega_{OA}}{dt} = 0$, т. к. $\omega_{OA} = \text{const}$;

3) $a_{BA}^{n} = \omega_{BA}^{2} AB = 0$, т. к. $\omega_{AB} = 0$;

4) $a_{B}^{n} = \dfrac{V_{B}^{2}}{O_1 B} = 0{,}18$ м/с^2.

Таким образом, в уравнении (2.2) остаются неизвестными ускорения $\bar{a}_{B}^{\tau}$ и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$.

Покажем на кинематической схеме механизма направления всех ускорений (см. рис. 2.6). Вектор $\bar{a} = \bar{a}_{A}^{n}$ направлен по кривошипу *OA* от *A* к центру вращения *O*. Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ направлен по звену *AB* от точки *B* к *A*, вектор $\bar{a}_{B}^{n}$ направлен по O_1B от *B* к центру вращения O_1, $\bar{a}_{BA}^{n} \perp \bar{a}_{BA}^{\tau}$, $\bar{a}_{B}^{\tau} \perp \bar{a}_{B}^{n}$.

Для определения численного значения ускорений $\bar{a}_{B}^{\tau}$ и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ равенство (2.2) спроецируем на оси координат *x* и *y* (см. рис. 2.6):

$$a_{B}^{\tau} = -a_{BA}^{n} \cos 30 - a_{BA}^{\tau} \cos 60°,$$

$$a_{B}^{n} = a_{A}^{n} + a_{BA}^{n} \cos 60 - a_{BA}^{\tau} \cos 30°.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$a_{B}^{\tau} = 0{,}692 \text{ м/с}^2,\ a_{BA}^{\tau} = 1{,}385 \text{ м/с}^2.$$

Определяем ускорение точки *B*:

$$a_B = \sqrt{(a_{B}^{n})^2 + (a_{B}^{\tau})^2} = 0{,}19 \text{ м/с}^2.$$

Так как касательное ускорение точки *B* относительно *A* определяется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{BA} AB$, то угловое ускорение звена *AB* равно $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\left|\bar{a}_{BA}^{\tau}\right|}{AB} = 13{,}85\ \text{с}^{-2}$. Направление ε_{AB} определяется по направлению вектора $\bar{a}_{BA}^{\tau}$, в данном случае угловое ускорение звена *AB* направлено по часовой стрелке.

2.4. Сложное движение точки (К-4)

Прямоугольная или круглая пластина (рис. 2.7 (0–9)) вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (табл. 2.4). Ось вращения перпендикулярна плоскости пластин и проходит через точку O. По пластине или по ободу круглой пластины движется точка M. Закон ее относительного движения $s = AM = f(t)$ (s – в метрах, t – в секундах) задан в табл. 2.4, там же заданы размер прямоугольной пластины a и радиус круглой пластины R. На всех рисунках точка M изображена в положении, при котором $s > 0$ (если $s < 0$, то точка M находится в другую сторону от точки A). Для момента времени $t_1 = 1$ с найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Таблица 2.4

Номер условия	ω, $с^{-1}$	ε, $с^{-2}$	Рис. 2.7 (0, 3, 5, 7, 9)		Рис. 2.7 (1, 2, 4, 6, 8)	
			a, м	$S = AM = f(t)$, м	R, см	$S = AM = f(t)$, м
0	2	1	36	$20(t^2 - 3t) + 32$	12	$\frac{\pi}{6}R(t^4 - 3t^2)$
1	3	0	40	$80(2t^2 - t^3) - 70$	16	$\frac{\pi}{4}R(t^3 - 2t)$
2	1	2	30	$60(t - t^3) - 10$	10	$\frac{\pi}{4}R(3t^2 - 3t)$
3	4	1	30	$20(3t^2 - t^4) - 32$	8	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t^2)$
4	2	2	32	$80(t^2 - t) + 4$	6	$\frac{\pi}{6}R(4t - 4t^2)$
5	2	0	28	$5(2t^2 + t)$	10	$\frac{\pi}{3}R(4t - 3t^2)$
6	3	1	30	$20(2t - t^2) - 10$	15	$\frac{\pi}{4}R(2t + t^2)$
7	1	0,5	30	$60(t^3 - 2t^2) + 50$	9	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - t)$
8	2	1	36	$6(3t - t^2) - 18$	20	$\frac{\pi}{3}R(4t - 4t^2)$
9	4	2	34	$40(t - 2t^3) + 32$	12	$\frac{\pi}{6}R(2t^2 - t^3)$

Указания. Задачи К-4 относятся к теме «Сложное движение точки». При решении этих задач сначала надо установить переносное и относительное движение точки M. Для определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения необходимо применить теоремы сложения скоростей и ускорений.

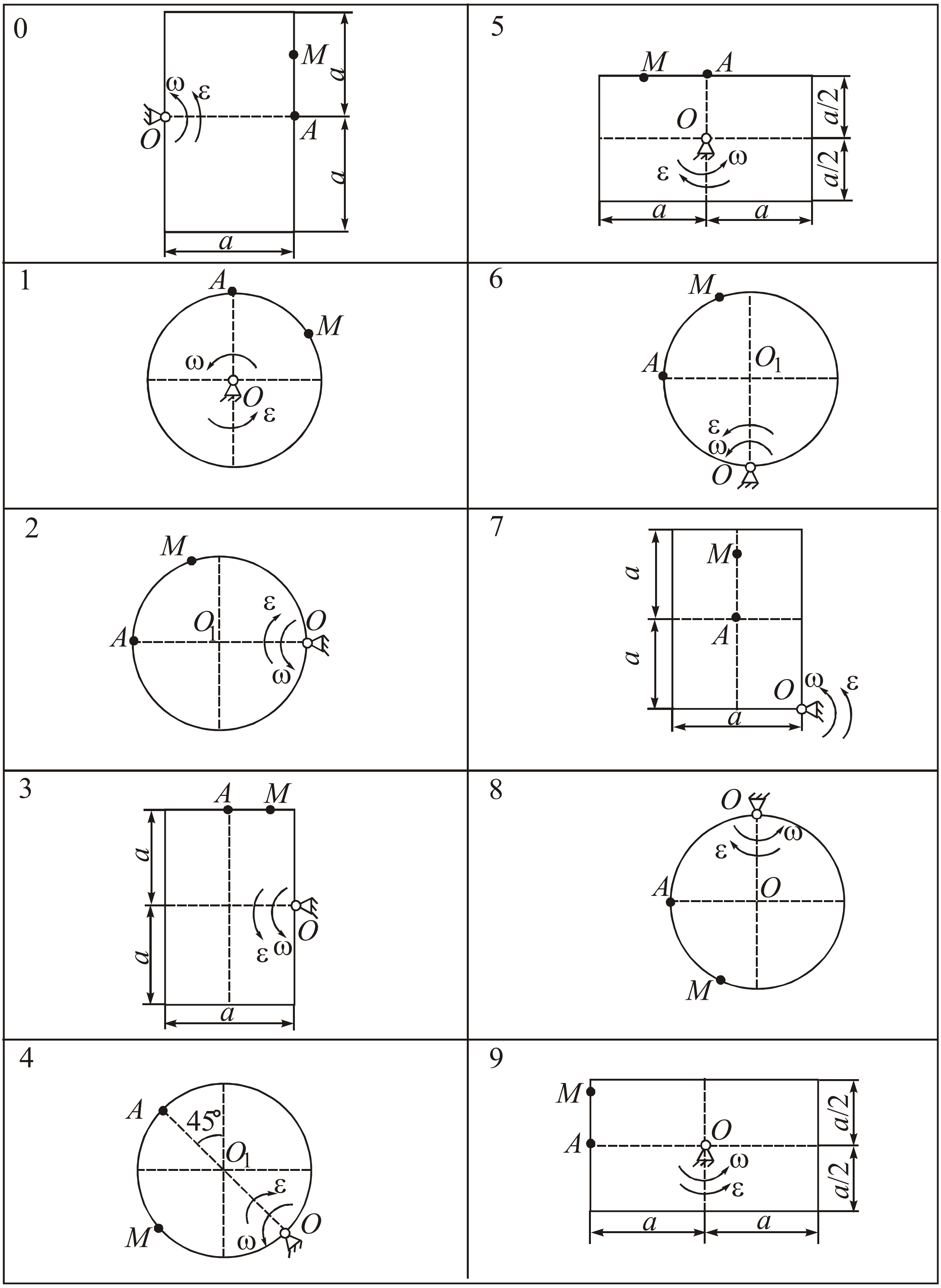

0
M
A
O
ω
ε
a
a
a
5
M
A
O
ε
ω
a/2
a/2
a
a
1
A
M
ω
O
ε
6
M
A
O_1
ε
ω
O
2
M
A
O_1
ε
O
ω
7
M
A
a
a
O
ω
ε
a
3
A
M
a
a
ε
ω
O
a
8
O
ω
ε
A
O
M
4
A
45°
O_1
ε
O
ω
M
9
M
A
O
ω
ε
a/2
a/2
a
a

Рис. 2.7

Прежде чем производить расчеты, надо по условию задачи найти положение точки M в указанный момент времени и изобразить ее на рисунке именно в том положении, в котором нужно найти ее абсолютную скорость и абсолютное ускорение. На рисунке необходимо также показать все составляющие скорости и ускорения точки.

На рис. 2.7 (0, 3, 5, 7, 9) положение точки M на пластине определяется длиной отрезка AM, найденного по уравнению $S = AM = f(t)$, при t_1 = 1 с, указанного в табл. 2.4, а на рис. 2.7 (1, 2, 4, 6, 8) это положение определяется углом $\alpha = \dfrac{\overset{\cup}{AM}}{R}$, также при t_1 = 1 с.

Пример. Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, проходящей через точку O. Ось вращения перпендикулярна плоскости прямоугольника. Угловая скорость пластины ω = 2 с$^{-1}$, угловое ускорение ε = 1 с$^{-2}$. По пластине движется точка $s = AM = 0{,}12(2t^2 - t) - 0{,}08$ м. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при t_1 = 1 с.

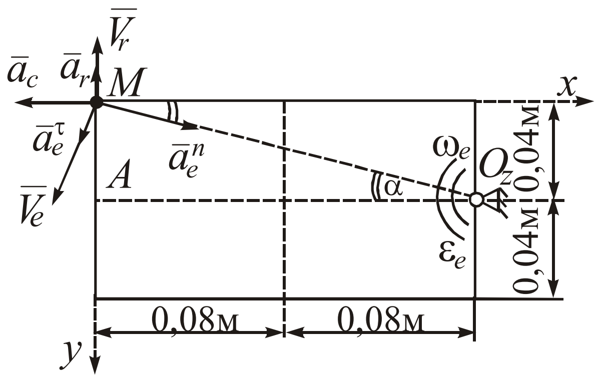


Рис. 2.8

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по пластине относительным, а вращение вместе с пластиной – переносным. Тогда абсолютная скорость определяется по формуле

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e. \tag{2.3}$$

1. Определим положение точки M на относительной траектории в момент времени t_1 = 1 с:

$$s = AM = 0{,}12(2t^2 - t) - 8 = 0{,}04 \text{ м}.$$

2. Определим относительную скорость:

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 0{,}12(4t - 1) \text{ м/с; при } t_1 = 1 \text{ с } V_r = 0{,}36 \text{ м/с}.$$

Так как $V_r > 0$, то вектор относительной скорости направлен по относительной траектории в сторону возрастания *s*.

3. Определим переносную скорость.

Для этого точку *M* скрепляем с пластиной, тогда переносная скорость точки *M* равна скорости той точки пластины, с которой в данный момент времени совпадает точка *M*.

Численное значение переносной скорости определяется по формуле $V_e = \omega_e OM$, где $\omega_e = \omega = 2$ с$^{-1}$ – угловая скорость переносного вращения пластины; $OM = \sqrt{(AM)^2 + (AO)^2} = 0{,}165$ м – радиус переносного вращения. Тогда $V_e = 0{,}329$ м/с.

Вектор переносной скорости $\overline{V}_e$ перпендикулярен *OM* и направлен в сторону вращения пластины, т. к. $\omega_e > 0$.

4. Определим абсолютную скорость по формуле

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_e V_r \cos(180° - \alpha)} = 0{,}088 \text{ м/с}.$$

Замечание. Численное значение абсолютной скорости можно определить методом проекций, для этого спроецируем векторное равенство (2.3) на декартовы оси координат:

$$V_{ax} = -V_e \sin\alpha = -7{,}9 \text{ м/с}, \ \sin\alpha = \frac{AM}{OM} = 0{,}24;$$

$$V_{ay} = -V_r + V_e \cos\alpha = 4{,}01 \text{ м/с}, \ \cos\alpha = \frac{AO}{OM} = 0{,}97;$$

$$V_a = \sqrt{(V_{ax})^2 + (V_{ay})^2} = 0{,}088 \text{ м/с}.$$

2. Определим абсолютное ускорение.

Согласно теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение определяется по формуле

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c. \qquad (2.4)$$

Определим относительное ускорение. Так как относительное движение является прямолинейным, то $a_r^n = 0$; $a_r^\tau = \dfrac{dV_r}{dt} = 0{,}48$ м/с^2. Так как $a_r^\tau > 0$, то вектор $\overline{a}_r$ направлен по пластине от точки *A* к *M*.

Определим переносное ускорение. Пластина вращается вокруг оси *O*, поэтому переносное ускорение точки *M* равно векторной сумме нормального и касательного ускорений $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$. Определим модули этих ускорений $a_e^n = \omega_e^2 OM = 0{,}649$ м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_e OM = 0{,}164$ м/с^2. Вектор $\bar{a}_e^n$ направлен по OM от M к O, $\bar{a}_e^\tau \perp \bar{a}_e^n$. Так как $a_e^\tau > 0$, то направлен этот вектор в сторону вращения пластины.

Найдем численное значение ускорения Кориолиса:

$$a_c = 2|\bar{\omega}_e||\bar{V}_r|\sin(\bar{\omega}, \bar{V}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 36 \sin 90° = 1{,}44 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\bar{a}_c$ определяется по правилу Жуковского: для этого проецируем вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, а затем поворачиваем эту проекцию в этой плоскости на 90° в направлении переносного вращения.

В данном примере вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ уже находится в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, поэтому для определения направления вектора $\bar{a}_c$ достаточно повернуть вектор $\bar{V}_r$ на 90° в сторону вращения пластины.

С учетом того, что переносное ускорение точки M равно векторной сумме нормального и касательного ускорений, равенство (2.4) примет вид

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (2.5)$$

Определяем численное значение абсолютного ускорения через проекции равенства (2.5) на координатные оси x и y:

$$a_{ax} = a_e^n \cos\alpha - a_c - a_e^\tau \sin\alpha = 0{,}841 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{ay} = -a_r + a_e^n \sin\alpha + a_e^\tau \cos\alpha = -0{,}162 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $$a_a = \sqrt{(a_{ax})^2 + (a_{ay})^2} = 0{,}855 \text{ м/с}^2.$$

Пример. Частица M жидкости движется согласно уравнению $AM = s = 0{,}12\pi t^2$ м внутри кольцевой трубки радиуса $R = 0{,}16$ м, вращающейся в своей плоскости с угловой скоростью $\omega = 0{,}6t$ с$^{-1}$ вокруг оси, проходящей через точку O. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение частицы при $t_1 = \dfrac{2}{3}$ с (рис. 2.9).

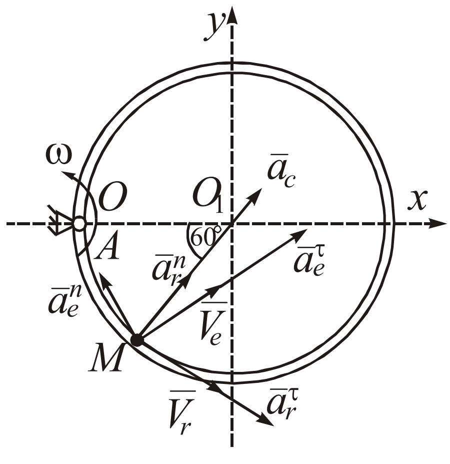


Рис. 2.9

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение внутри трубки относительным, а вращение вместе с трубкой – переносным. Тогда абсолютные скорость и ускорение точки запишутся в следующем виде:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e, \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c.$$

Определим положение точки M на относительной траектории в момент времени $t = 1$ с.

Подставляя в уравнение относительного движения точки $AM = s = 12\pi t^2$ значение $t_1 = \dfrac{2}{3}$ с, получим $AM = s = \dfrac{0{,}16}{3}\pi$ м. Соответствующий этой дуге центральный угол (см. рис. 2.9):

$$\angle AO_1M = \alpha = \frac{\overset{\cup}{AM}}{R} = \frac{0{,}16\pi}{3\cdot 0{,}16} = \frac{\pi}{3} = 60°.$$

Определим относительную скорость и относительное ускорение точки M:

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 0{,}24\pi t \text{ м/с; при } t = \frac{2}{3} \text{ с } V_r = 0{,}502 \text{ м/с.}$$

Вектор $\bar{V}_r$ направлен по касательной к относительной траектории $\bar{V}_r \perp O_1M$ и, т. к. $V_r \geq 0$, в сторону возрастания дуговой координаты s. Определим относительное ускорение $\bar{a}_r = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n$.

Ускорение $\bar{a}_r^n$ направлено по радиусу окружности к точке O_1, $\bar{a}_r^\tau \perp \bar{a}_r^n$. Направлен вектор $\bar{a}_r^\tau$ по касательной к этой окружности.

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = 1{,}576 \text{ м/с}^2; \; a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = 24\pi = 0{,}754 \text{ м/с}^2.$$

Согласно определению переносной скорости и переносного ускорения фиксируем положение точки M на ободе трубки и определяем скорость и ускорение той точки окружности трубки, в которой точка M находится в указанный момент времени.

Переносная скорость точки M равна:

$$V_e = \omega_e OM \ ,$$

где $\omega_e = \omega = 0{,}6t$ с$^{-1}$, при $t_1 = \dfrac{2}{3}$ с $\omega_e = 0{,}4$ с$^{-1}$, а $MO = R$, так как ΔOO_1M – равносторонний.

Тогда $V_e = 0{,}4 \cdot 0{,}16 = 0{,}064$ м/с $\left(\overline{V}_e \perp OM\right)$, и, т. к. $\omega_e > 0$, то направлен этот вектор в сторону вращения трубки.

Переносное ускорение точки M представляется своими составляющими: $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau$, где $a_e^n = \omega_e^2 OM = 0{,}256$ м/с$^{-2}$, $a_e^\tau = \varepsilon_e OM$, $\varepsilon_e = \dfrac{d\omega_e}{dt} = 0{,}6$ с$^{-2}$. Тогда переносное касательное ускорение $a_e^\tau = 0{,}96$ м/с$^{-2}$. Вектор переносного нормального ускорения направлен по OM от M к O, и вектор переносного касательного перпендикулярен к вектору нормального ускорения, т. е. $\overline{a}_e^\tau \perp \overline{a}_e^n$.

Ускорение Кориолиса $\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right)$,

$a_c = 2\left|\overline{\omega}_e\right|\left|\overline{V}_r\right|\sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r\right) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}502 \sin 90^\circ = 0{,}402$ м/с^2.

Направление ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского (см. предыдущий пример).

Найдем численные значения абсолютной скорости и абсолютного ускорения.

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e \cos 60^\circ} = 0{,}537 \text{ м/с.}$$

Численное значение абсолютного ускорения находим, проецируя равенство, определяющее абсолютное ускорение, на оси x и y (см. рис. 2.9):

$$\overline{a} = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c;$$

$$a_{ax} = a_r^n \cos 60^\circ + a_r^\tau \cos 30^\circ + a_e^\tau \cos 30^\circ - a_e^n \cos 60^\circ + a_c \cos 60^\circ = 1{,}7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{ay} = a_r^n \cos 30^\circ - a_r^\tau \cos 60^\circ + a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_c \cos 30^\circ = 1{,}4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_a = \sqrt{\left(a_{ax}\right)^2 + \left(a_{ay}\right)^2} = 2{,}34 \text{ м/с}^2.$$

3. ДИНАМИКА

3.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки (Д-1)

Тело M массой m движется вдоль оси Ox (рис. 3.1 (0–9)). На тело, кроме силы тяжести и силы трения, действует сила $\vec{F}$. Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1, в которой приняты следующие обозначения: m – масса тела; x – координата; $\dot{x}$ – проекция скорости на ось Ox; x_0 и $\dot{x}_0$ – значения координаты и проекции начальной скорости в начальный момент времени; f – коэффициент трения скольжения. Найти уравнение движения тела M, принимая его за материальную точку, при заданных начальных условиях.

Таблица 3.1

Номер условия	m, кг	F, Н	Начальные условия		f
			x_0	$\dot{x}_0$	
			м	м/с	
0	5,0	$-(40x-30\dot{x})$	0,0	1,0	0,1
1	2,0	$\dfrac{4}{\dot{x}}+2$	0,0	0,2	0,15
2	1,0	$5t^2+10$	0,2	0,1	0,2
3	2,0	$32\dot{x}+4$	0,4	0,2	0,2
4	1,0	$2t^3+8$	0,0	0,0	0,15
5	2,0	$2x-2g$	1,0	1,0	0,3
6	10,0	$\sin 2t+t$	0,0	5,0	0,6
7	1,5	$4{,}5+6x$	0,0	0,3	0,4
8	3,0	$3(2\dot{x}+3x)$	0,0	0,1	0,1
9	10,0	$4+3t^2$	0,0	120	0,1

Указания. Задачи Д-1 относятся ко второй основной задаче динамики. Для решения этих задач необходимо записать дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось Ox и затем его проинтегрировать. При этом следует придерживаться следующего порядка:

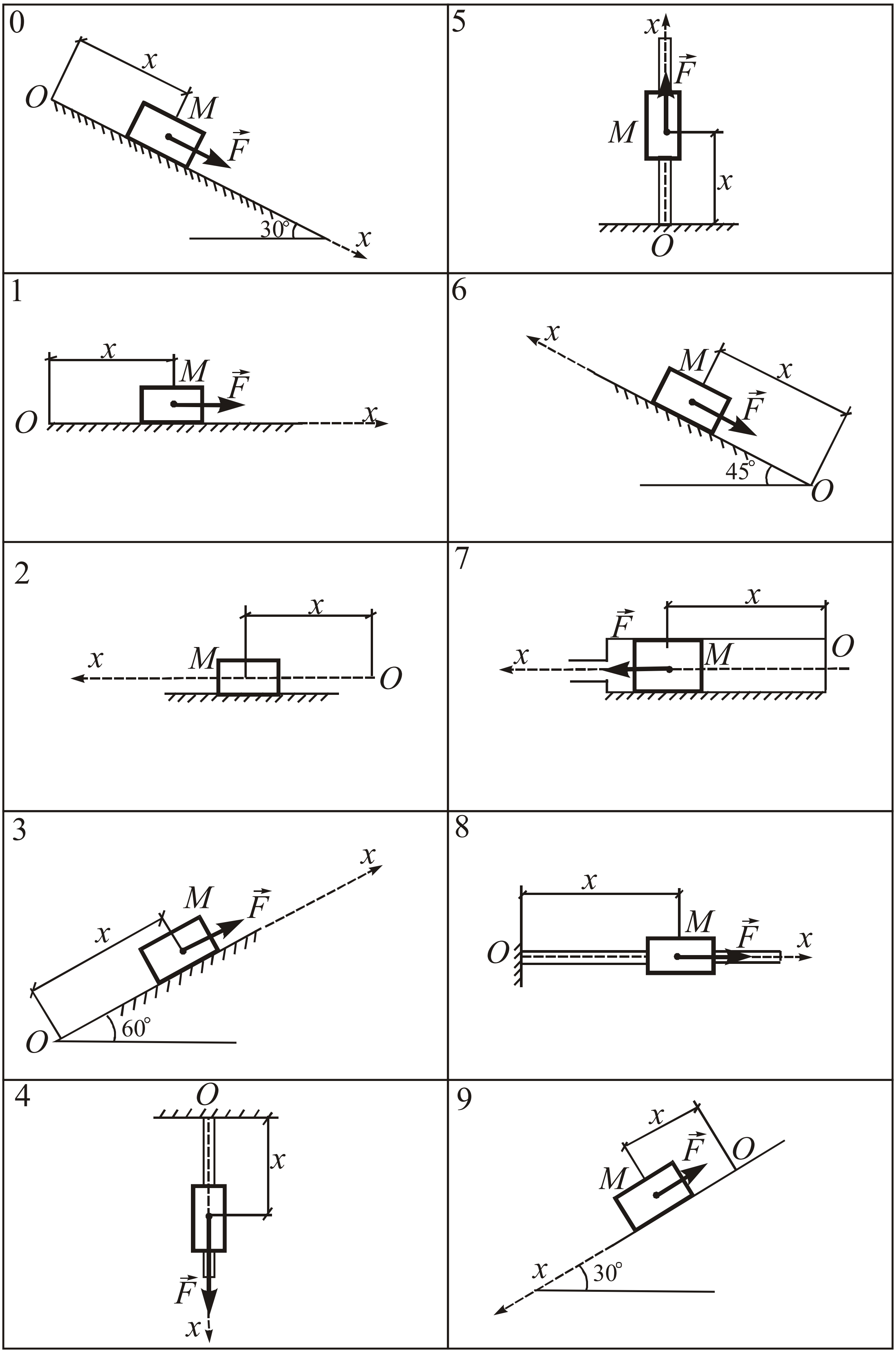

0
O
x
M
$\vec{F}$
30°
x
5
x
$\vec{F}$
M
x
O
1
x
M
$\vec{F}$
O
x
6
x
M
x
$\vec{F}$
45°
O
2
x
x
M
O
7
x
$\vec{F}$
O
x
M
3
x
M
$\vec{F}$
x
O
60°
8
x
M
O
$\vec{F}$
x
4
O
x
$\vec{F}$
x
9
x
$\vec{F}$
O
M
x
30°

Рис. 3.1

– выбрать систему отсчета, относительно которой рассматривается движение тела;

– изобразить точку в произвольном положении, которое определяется координатой x;

– показать на рисунке активные силы и силы реакций связей;

– составить дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось Ox;

– проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение;

– определить постоянные интегрирования, используя начальные условия.

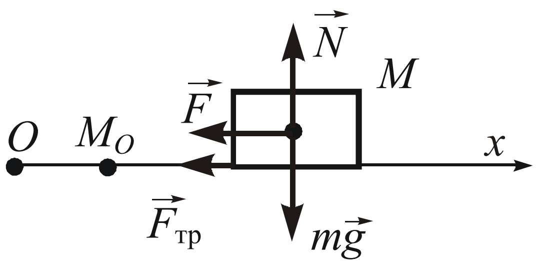


Рис. 3.2

Пример. Тело M массой m = 5 кг движется горизонтально под действием силы $F = 10\dot{x}$. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость равен f = 0,2. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент времени x_0 = 0,5 м; $\dot{x}_0$ = 2 м/с (рис. 3.2).

Решение. Тело движется поступательно, поэтому можно считать его материальной точкой. Проведем ось Ox по направлению движения точки. Покажем положение точки на оси x в произвольный момент времени и силы, действующие на эту точку: $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{N}$ – реакция опоры; $\vec{F}$ – заданная сила; $\vec{F}_{тр}$ – сила трения, численное значение которой определяется по формуле $F_{тр} = fN$. Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = -F - F_{тр}, \quad m\frac{d\dot{x}}{dt} = -10\dot{x} - fmg.$$

Разделив на m = 5 левую и правую части уравнения, получим:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -2\dot{x} - 2 \quad \text{или} \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -2(\dot{x} + 1). \tag{3.1}$$

Разделим в уравнении (3.1) переменные, для этого обе его части умножим на dt и разделим на $(\dot{x}+1)$, а затем проинтегрируем полученное уравнение.

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}+1} = -2dt; \qquad \ln(\dot{x}+1) = -2t + C_1.$$

Из начальных условий определим постоянную интегрирования C_1. При $t=0$; $\dot{x}_0 = 2$ м/с и, следовательно, $C_1 = \ln 3$.

С учетом этого получим

$$\ln(\dot{x}+1) = -2t + \ln 3, \text{ откуда } \ln\frac{\dot{x}+1}{3} = -2t. \qquad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) выразим $\dot{x}$, что позволит определить скорость точки в любой момент времени:

$$\frac{\dot{x}+1}{3} = e^{-2t}, \text{ откуда } \frac{dx}{dt} = 3e^{-2t} - 1. \qquad (3.3)$$

Умножим на dt обе части уравнения (3.3) и проинтегрируем

$$dx = 3e^{-2t}dt - 1dt; \quad x = 1{,}5e^{-2t} - t + C_2.$$

Из начальных условий определим постоянную интегрирования: при $t=0$; $x_0 = 0{,}5$ м, тогда $C_2 = -1$.

Таким образом, уравнение движения тела будет иметь вид

$$x = 1{,}5e^{-2t} - t - 1, \text{ м.}$$

3.2. Прямолинейные колебания материальной точки (Д-2)

Найти уравнение движения груза A массой m кг, отнеся его движение к оси Ox (рис 3.3 (0–9)). Определить также амплитуду, круговую частоту и период колебаний груза A, если: C_1, C_2, C_3 – коэффициенты жесткости пружин; α – угол наклона плоскости к горизонту; λ_0 – начальная деформация пружин из положения статического равновесия; V_{0x} – проекция начальной скорости груза A на ось Ox. Весом пружин и трением груза A о плоскость пренебречь. Необходимые данные для решения приведены в табл. 3.2. Прочерки в столбцах табл. 3.2 означают, что соответствующие пружины отсутствуют и их на схемах не нужно изображать.

Указания. В задачах необходимо составить дифференциальное уравнение движения груза A в проекции на ось Ox. Решение задачи упрощается, если начало координат совместить с положением статического равновесия груза A. В тех случаях, где имеются две пружины, их следует заменить одной эквивалентной пружиной, определив ее коэффициент жесткости C.

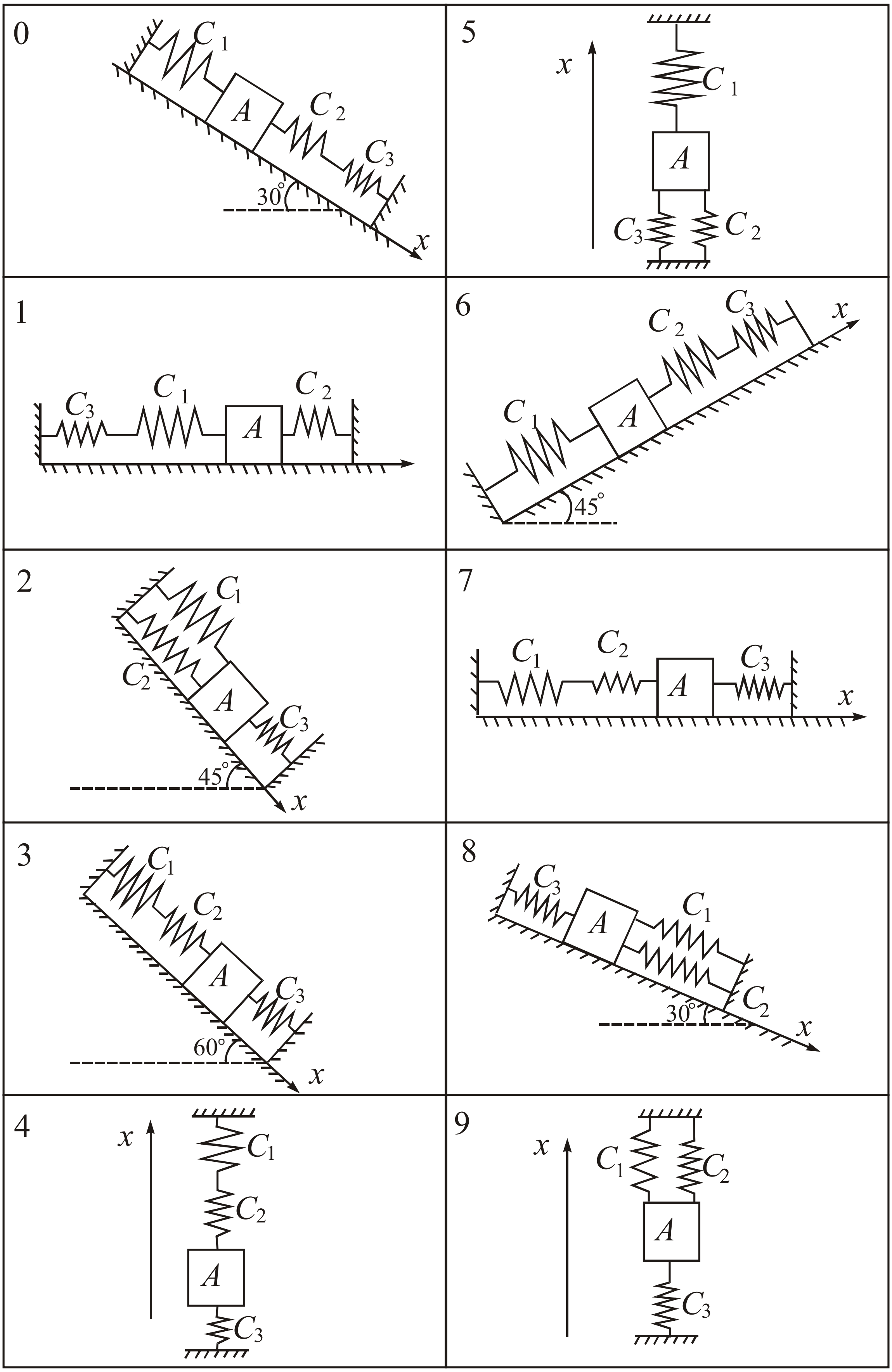

0
C1
A
C2
C3
30°
x
5
x
C1
A
C3
C2
1
C3
C1
A
C2
6
C3
x
C2
C1
A
45°
2
C1
C2
A
C3
45°
x
7
C1
C2
A
C3
x
3
C1
C2
A
C3
60°
x
8
C3
A
C1
C2
30°
x
4
x
C1
C2
A
C3
9
x
C1
C2
A
C3

Рис. 3.3

Таблица 3.2

Номер условия	m, кг	C_1	C_2	C_3	λ_0, см	V_{Ox}, м/с
		Н/м				
0	8	3	–	4	5	0,5
1	2	–	10	5	4	0,4
2	4	5	–	–	2	0,1
3	10	6	–	–	6	0,3
4	12	2	6	–	3	0,2
5	6	4	–	–	5	0,1
6	3	–	–	12	2	0,5
7	4	4	16	–	4	0,4
8	6	–	–	8	10	0,2
9	2	2	–	4	12	0,2

В случае последовательного соединения пружин (рис. 3.4, *а*, *б*) $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

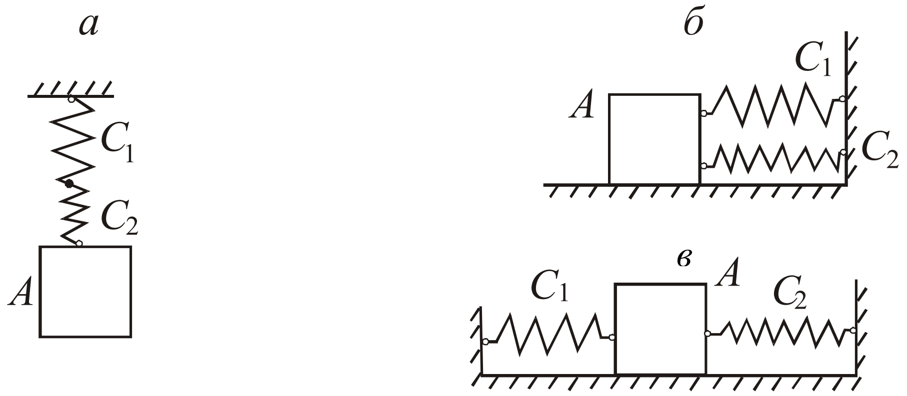


Рис. 3.4

В случае параллельного соединения (рис. 3.4, *в*) жесткость эквивалентной пружины равна $C = C_1 + C_2$.

Пример. Груз A массой m = 1 кг, расположенный на наклонной плоскости α = 60°, смещен относительно положения статического равновесия на λ_0 = 0 и ему сообщается начальная скорость V_0 = 5 м/с. После этого груз A под действием упругой силы пружин $\vec{F}_{\text{упр}}$ начинает совершать колебательные движения.

Пружины, жесткость которых C_1 = 1 Н/см и C_2 = 3 Н/см, соединены последовательно. Определить амплитуду, круговую частоту, период колебаний и уравнение движения груза A (рис. 3.5).

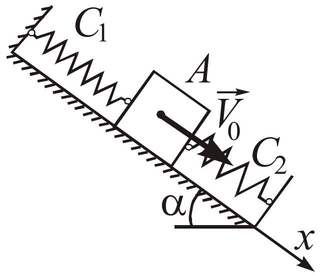


Рис. 3.5

Дано: m = 1 кг; C_1 = 1 Н/см; C_3 = 3 Н/см; $\lambda_0 = 0$; V_0 = 5 м/с.

Определить: A, k, T, $x = x(t)$.

Решение. Поскольку движение тела A поступательное, заменяем его материальной точкой M. В произвольном положении на точку M будут действовать сила тяжести $\vec{P}$, реакция гладкой поверхности $\vec{N}$ и сила упругости эквивалентной пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Начало координат выберем в положении статического равновесия, сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ всегда направлена к положению статического равновесия (рис. 3.6), а ее величина равна:

$$F_y = C_c\lambda = C_c(\lambda_{\text{ст}} + x),$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ – статическое удлинение эквивалентной пружины; x – координата точки M.

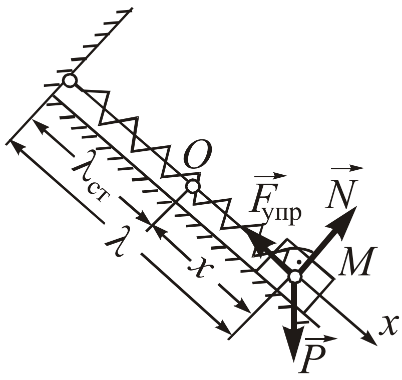


Рис. 3.6

Поскольку соединение пружин параллельное, то жесткость эквивалентной пружины равна:

$$C_c = C_1 + C_2 = 4 \text{ Н/см} = 400 \text{ Н/м}.$$

Составим дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P\sin\alpha - F_x = P\sin\alpha - C_c\lambda_{\text{ст}} - C_c x. \qquad (3.4)$$

В положении статического равновесия $F_{\text{упр}} = C_c\lambda_{\text{ст}}$. Уравнение равновесия будет иметь вид

$$0 = P\sin\alpha - C_c\lambda_{\text{ст}}.$$

С учетом этого результата уравнение (3.4) примет вид

$$m\ddot{x} + C_c x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{C_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{400}{1}} = 20\ \text{с}^{-1}$ – круговая частота колебаний.

Так как корни характеристического уравнения мнимые, то решение полученного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$x = A\sin(kt + \varphi),$$

где A, φ – постоянные интегрирования, соответственно амплитуда и фаза колебаний. Для определения A, φ возьмем производную от x по времени t и подставим начальные условия (при $t = 0$ $x_0 = \lambda_0 = 0$; $\dot{x}_0 = V_{0x} = 5$ м/с):

$$\dot{x} = V_x = Ak\cos(kt + \varphi);$$

$$x_0 = \lambda_0 = 0 = A\sin\varphi; \qquad \dot{x}_0 = V_{0x} = Ak\cos\varphi.$$

Решая два последних уравнения, получим:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_{0x}^2}{k^2}} = 0{,}25\ \text{м}; \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{V_{0x}^2} = 0.$$

Окончательно уравнение движения груза будет иметь вид

$$x = 0{,}25\sin 20t\ \text{ м}.$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}314$ с.

3.3. Теорема о движении центра масс механической системы (Д-3)

Тело A весом P находится на гладкой наклонной поверхности, составляющей угол α с горизонтом. По поверхности тела A движется тело B весом Q, закон относительного движения которого $s_B(t) = f(t)$. В начальный момент тело A находилось в покое. Определить закон движения тела A, если к нему приложена сила $\vec{F}$. Варианты схем механических систем приведены на рис. 3.7 (0–9), а числовые данные, необходимые для решения задачи, в табл. 3.3.

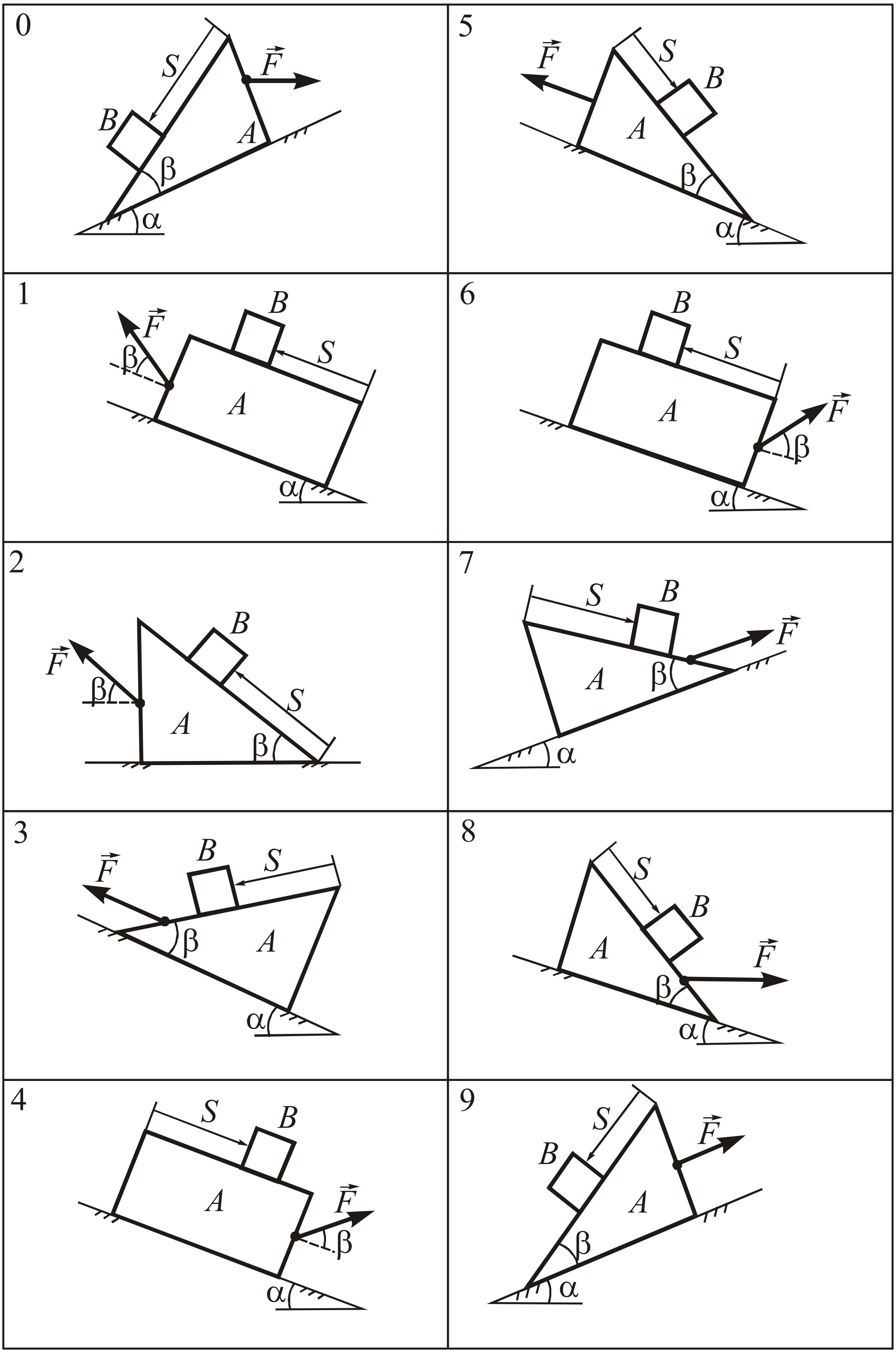

0
S
$\vec{F}$
B
A
β
α
5
$\vec{F}$
S
B
A
β
α
1
$\vec{F}$
B
S
β
A
α
6
B
S
A
$\vec{F}$
β
α
2
B
$\vec{F}$
β
S
A
β
7
S
B
$\vec{F}$
A
β
α
3
B
S
$\vec{F}$
β
A
α
8
S
B
A
$\vec{F}$
β
α
4
S
B
A
$\vec{F}$
β
α
9
S
B
$\vec{F}$
A
β
α

Рис. 3.7

Таблица 3.3

Номер условия	P, Н	Q, Н	$S_B = f(t)$, см	F, Н	α, град	β, град
0	10	20	$5t^2 + 2t$	$3t + 2$	30	30
1	15	10	$4 + 5\cos(\pi t)$	$2\cos(\pi t)$	45	30
2	5	20	$3 + 2e^{2t}$	$3e^{2t}$	30	30
3	25	5	$2t^3 + 1$	$3t^2 - 1$	45	30
4	20	15	$2\sin(3t)$	$t + 3$	30	60
5	30	10	$5t^3 + 2t$	$3\cos(2t)$	60	30
6	16	20	$2t^3 - 3$	$5t + 3$	30	30
7	10	5	$3t - 5t^3$	$t^2 + t$	45	60
8	25	15	$5e^t$	$2t - 3$	30	60
9	10	10	$\sin(3t) - 1$	$2t^2 + 4$	45	30

Указания. Задачи Д-3 решаются с помощью теоремы о движении центра масс механической системы $M\overline{a}_C = \overline{R}_{(e)}$, где $M = m_A + m_B$ – масса системы; $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс; $\overline{R}_{(e)} = \Sigma \overline{F}_k^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, действующих на систему. Для решения задач следует составить дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на ось, направленную по движению тела A, направление оси выбирают произвольно. При этом следует учесть, что движение груза B является сложным и его ускорение равно векторной сумме переносного и относительного ускорений $\overline{a}_B = \overline{a}_{Be} + \overline{a}_{Br}$, и тогда ускорение центра масс механической системы равно

$$\vec{a}_c = \frac{m_A \vec{a}_A + m_B (\vec{a}_{Be} + \vec{a}_{Br})}{m_A + m_B}.$$

Для определения закона движения тела A надо проинтегрировать составленное дифференциальное уравнение.

Пример. Для механической системы (рис. 3.8) дано: $P = 10$ Н, $Q = 45$ Н, $s_B = f(t) = 3t^2$, см, $F = 40$ Н, $\beta = 60°$, $\alpha = 0$.

Определить закон движения тела A $x = x(t)$.

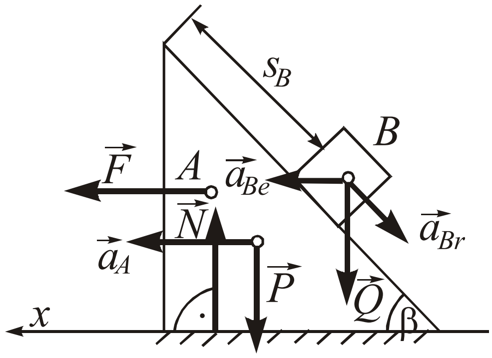


Рис. 3.8

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения центра масс в векторной форме

$$(m_A + m_B) = m_A\vec{a}_A + m_B(\vec{a}_{Be} + \vec{a}_{Br}) =$$
$$= \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N}.$$

Спроецируем это уравнение на ось x:

$$m_A a_A + m_B(a_A - a_{Br}\cos\beta) = F,$$

где $a_A = a_{Be}$.

Учитывая, что $m_A = \dfrac{P}{g}$, $m_B = \dfrac{Q}{g}$, $a_{Br} = \dfrac{d^2 S_B}{dt^2} = 0{,}06$ м/с^2, получим:

$$a + 4{,}5a - 0{,}14 = 40.$$

Откуда

$$5{,}5a = 5{,}5\frac{d^2x}{dt^2} = 40{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Интегрируя это уравнение при заданных начальных условиях ($t = 0$, $x_0 = 0$, $V_{0x} = 0$), получим закон движения груза A:

$$x = \frac{7{,}3}{2}t^2 = 3{,}7t^2 \text{ м/с}^2.$$

3.4. Теорема об изменении кинетического момента механической системы (Д-4)

Однородная горизонтальная пластина весом P вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени по платформе начинает двигаться точка M весом Q по закону $O_1M = s = f(t)$ (или с постоянной относительной скоростью V_r). Пренебрегая трением в подшипниках, определить угловую скорость пластины в момент времени t_1. Варианты схем механических систем приведены на рис. 3.9 (0–9), а числовые данные, необходимые для решения задачи, в табл. 3.4.

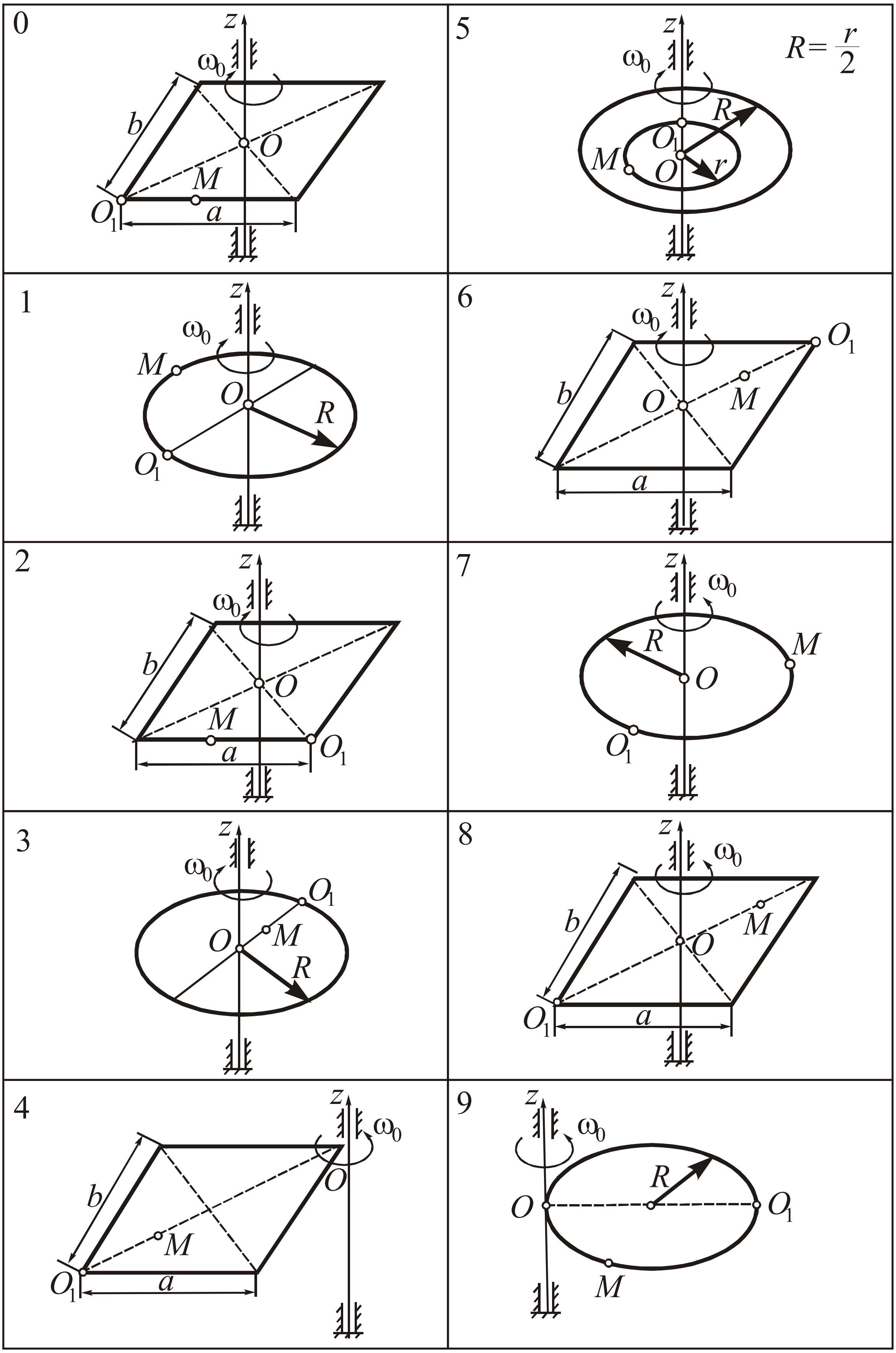

0
z
ω0
b
O
M
O1
a
5
z
ω0
R = r/2
R
O1
M
O
r
1
z
ω0
M
O
R
O1
6
z
ω0
O1
b
O
M
a
2
z
ω0
b
O
M
a
O1
7
z
ω0
R
M
O
O1
3
z
ω0
O1
O
M
R
8
z
ω0
b
M
O
O1
a
4
z
ω0
b
O
M
O1
a
9
z
ω0
R
O
O1
M

Рис. 3.9

Таблица 3.4

№	P	Q	ω_0, с$^{-1}$	a	b	$S = O_1M = f(t)$ Рис. 3.9 (0, 2, 4, 6, 8)	R	$S = O_1M = f(t)$ Рис. 3.9 (1, 3, 5, 7, 9)	t_1, с
	Н			см					
0	40	30	5	40	20	$5t^2$	10	$\frac{\pi}{2}(10t^2-20)$	2
1	20	30	2	30	40	$20t^3-30t^2+10$	30	$\frac{\pi}{2}(10t^2+20)$	1
2	100	40	3	40	30	$30t^2-10t$	10	$\frac{\pi}{2}(-10+10t^2)$	1
3	10	20	5	20	10	$-10\cos(\pi t)$	30	$5\pi(2t^3-2)$	1
4	40	50	10	20	20	$4t^2$	10	$\pi(4t^2-6)$	2
5	30	20	5	40	20	$20t^2$	40	$\frac{10}{3}\pi(8t^2+4)$	0,5
6	10	20	1	30	20	$30t^2-15$	10	$\frac{\pi}{4}(8t^2-8)$	1
7	10	20	2	40	30	$2{,}5t^3$	40	$\frac{\pi}{2}(10t-40)$	2
8	50	20	4	40	20	$20-10t-10t^2$	14	$\frac{\pi}{3}(20-10t-10t^2)$	1
9	30	10	1	40	20	$20\sin(\frac{\pi}{2}t)$	10	$\frac{\pi}{2}(-20t^2+40)$	1

59

Указания. Задачи Д-4 решаются с помощью теоремы об изменении кинетического момента механической системы. Проверьте, выполняется ли условие сохранения кинетического момента относительно оси Oz, и, если оно имеет место, воспользуйтесь им. При этом следует учесть, что движение точки M является сложным и поэтому

$$m_z(m\vec{V}_a) = m_z(m\vec{V}_e) + m_z(m\vec{V}_r).$$

Положение точки M на относительной траектории на рис. 3.9 (1, 3, 5, 7, 9) определяется значением угла $\gamma = \dfrac{O_1M}{R} = \dfrac{S}{R}$.

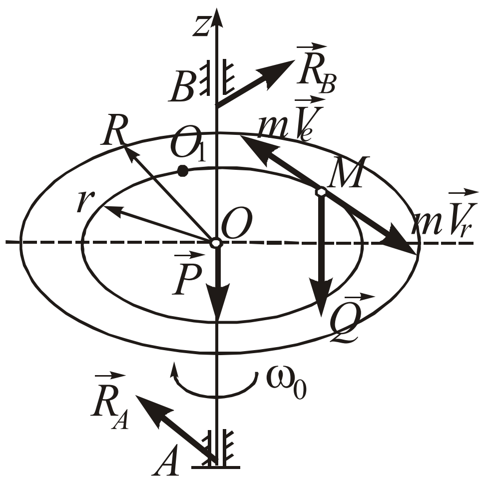


Рис. 3.10

Пример. Для круглой платформы, вращающейся вокруг вертикальной оси Az (рис. 3.10), задано: $s = O_1M = 2t^2 + 3t$ см; $P = 100$ Н; $Q = 50$ Н; $\omega_0 = 5$ с$^{-1}$; $R = 80$ см; $R = 50$ см; $t_1 = 1$ с.

Решение. Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы относительно оси Oz имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = m_z\left(\overline{F}^{(e)}\right).$$

$\Sigma m_z(\overline{F}^e) = m_z(\vec{P}) + m_z(\vec{Q}) + m_z(\vec{R}_A) + m_z(\vec{R}_B) = 0$, т. к. силы, действующие на платформу, параллельны оси вращения или ее пересекают.

Откуда следует, что $L_z = \text{const}$, т. е. кинетический момент системы до перемещения точки равен кинетическому моменту после ее перемещения в плоскости пластины:

$$I_z\omega_0 + mV_{e0}r = I_z\omega + mV_e r - mV_r r,$$

где $I_z = \dfrac{P}{g}\dfrac{R^2}{2}$ – момент инерции пластины относительно оси Oz; $V_{e0} = \omega_0 r$ и $V_e = \omega r$ – переносная скорость точки до и после ее перемещения; $V_r = \dot{s} = 4t + 3$ – относительная скорость точки (при $t = 1$ с $V_r = 7$ см/с); $m = \dfrac{Q}{g}$ – масса точки.

Подставляя записанные соотношения в исходное выражение, получим:

$$\frac{P}{g}\frac{R^2}{2}\omega_0 + \frac{Q}{g}\omega_0 r^2 = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}\omega + \frac{Q}{g}\omega r^2 - 7\frac{Q}{g}r.$$

Отсюда выражаем угловую скорость пластины:

$$\omega = \frac{P\dfrac{R^2}{2}\omega_0 + Q\omega_0 r^2 + 7Qr}{P\dfrac{R^2}{2} + Qr^2} = 5{,}04\ \text{с}^{-1}.$$

3.5. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы (Д-5)

Механическая система состоит из тел 1 и 4 весом P_1 и P_4, блока 2 весом P_2 с радиусами r_2 и R_2 и радиусом инерции ρ_2 относительно оси, проходящей через его центр масс, а также однородного цилиндрического катка 3 весом P_3 (рис. 3.11 (0–9)). Коэффициент трения тел о плоскость равен f, качение катка по плоскости происходит без скольжения. Тела системы соединены друг с другом нитями, участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. При движении системы на тело 2 действует постоянный момент сопротивления M, а на тела 1 или 3 сила $\vec{F}$. Считая нити нерастяжимыми и невесомыми и пренебрегая другими сопротивлениями, определить скорость и ускорение тела 1 после его перемещения на расстояние S. В начальный момент система находилась в покое. Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.5.

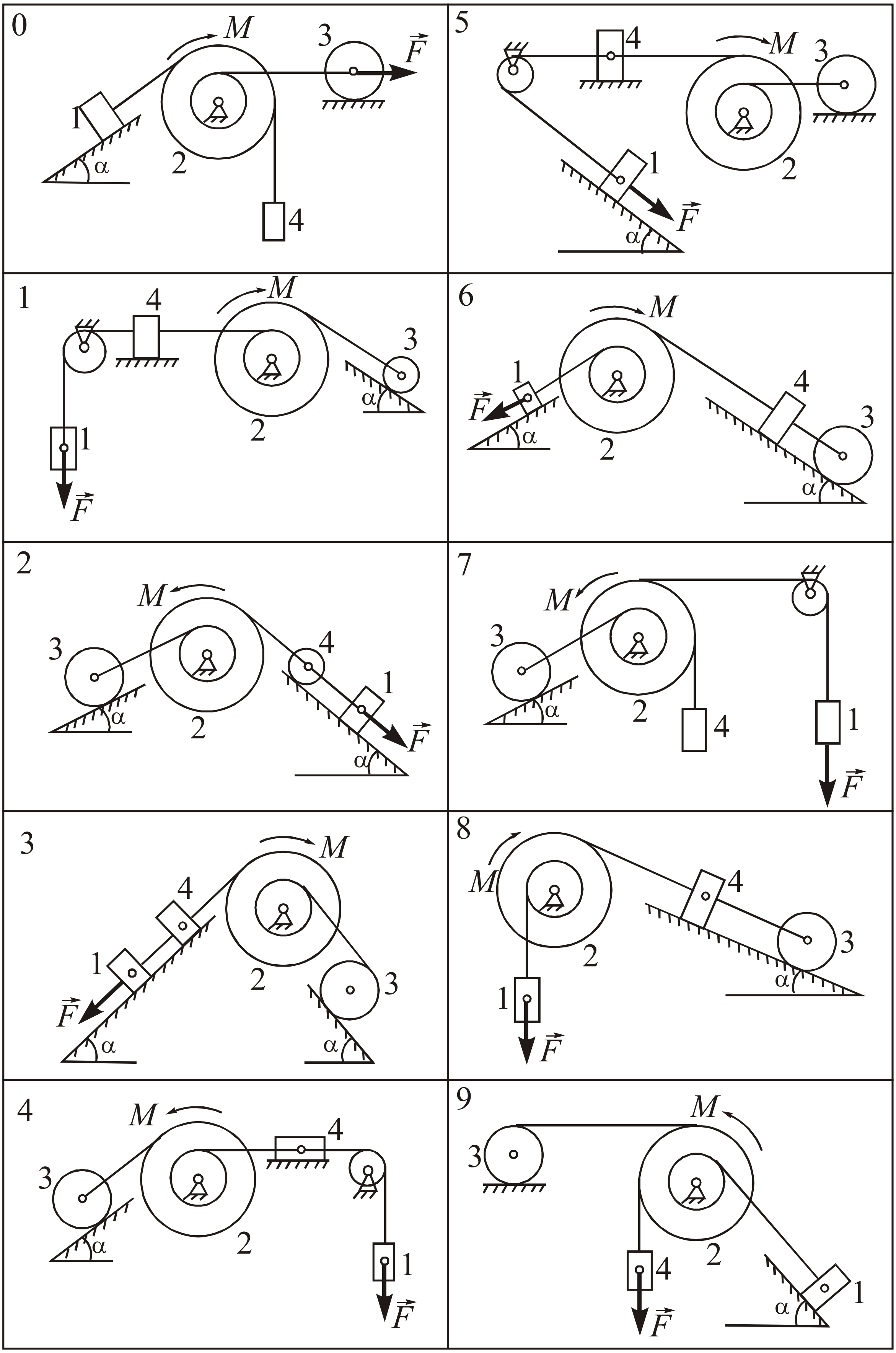

0
M
3
F
1
2
α
4
5
4
M
3
1
2
F
α
1
4
M
3
α
1
2
F
6
M
1
4
F
3
α
2
α
2
M
3
4
1
α
2
F
α
7
M
3
α
2
4
1
F
3
M
4
1
2
3
F
α
α
8
M
4
2
3
α
1
F
4
M
4
3
α
2
1
F
9
M
3
4
2
1
α
F

Рис. 3.11

Таблица 3.5

Номер задания	P_1	P_2	P_3	P_4	r_2	R_2	ρ_2	F, Н	M, Н/м	f	S, м	α
	Н				м							
0	200	10	–	10	0,1	0,2	0,15	0	6	0,10	0,5	60
1	10	0	0	5	0,1	0,2	0,20	40	0	0,20	0,5	0
2	150	5	10	10	0,2	0,4	0,30	25	4	0,15	2,0	30
3	50	0	15	0	0,1	0,2	0,25	100	10	0,12	1,5	45
4	100	4	10	40	0,2	0,4	0,30	50	8	0,20	2,0	30
5	50	5	8	–	0,2	0,4	0,30	0	15	0,10	1,0	0
6	140	20	0	–	0,1	0,4	0,25	10	10	0,10	0,5	60
7	50	0	4	20	0,15	0,3	0,25	0	8	0,15	0,5	0
8	30	5	0	–	0,2	0,4	0,30	40	6	0,12	2,0	0
9	60	6	10	0	0,1	0,2	0,15	0	10	0,10	1,0	60

Указания. При решении задач Д-5 применяется теорема об изменении кинетической энергии в конечной форме (для определения скорости тела 1) и в дифференциальной форме (для определения ускорения).

При определении кинетической энергии системы следует учесть, что тела 1 и 4 движутся поступательно, тело 2 – вращается, а тело 3 совершает плоскопараллельное движение. При установлении зависимостей между скоростями движущихся тел следует воспользоваться формулами из соответствующих разделов кинематики.

Прочерк в табл. 3.5 означает, что соответствующее тело в систему не входит (на рисунке не изображать), а ноль – что тело считается невесомым. Тело 2 на рисунках изображается всегда. Для схем 1, 4, 7, 8 коэффициент трения скольжения считать равным 0.

Сумму работ всех внешних сил, действующих на систему, необходимо выразить как функцию перемещения тела 1 (S), а кинетическую энергию – как функцию квадрата скорости тела 1.

Пример. На рис. 3.12 дано: P_1 = 50 Н; P_2 = 10 Н; P_3 = 5 Н; R_2 = 0,6 м; r_2 = 0,3 м; ρ_2 = 0,4 м; f = 0,1; F = 2 Н; S = 2 м.

Определить скорость и ускорение тела 1.

Решение. Для решения задачи применяем теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме:

$$T - T_0 = \sum A^{(e)} + \sum A^{(i)},$$

где T, T_0 – кинетическая энергия системы в конечный и начальный момент времени; $\sum A^{(e)}$, $\sum A^{(i)}$ – сумма работ внешних и внутренних сил, действующих на систему.

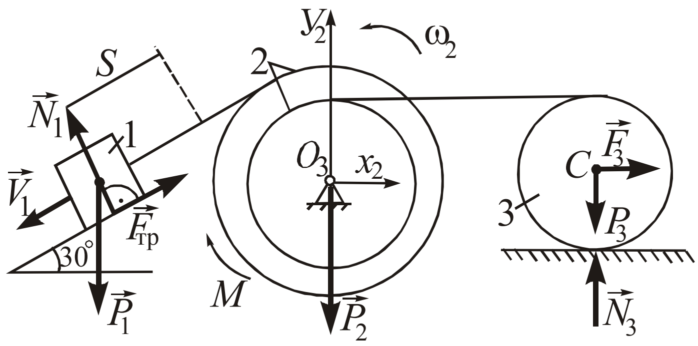


Рис. 3.12

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия рассматриваемой механической системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}V_C^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2,$$

где V_1 – скорость тела 1; ω_2 – угловая скорость тела 2; V_C – скорость центра масс тела 3; J_2, J_3 – моменты инерции тел 2 и 3.

$$J_2 = m_2\rho_2^2 = \frac{P_2}{g}\rho_2^2, \quad J_3 = \frac{1}{2}m_3R_3^2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_3^2.$$

Запишем кинематические соотношения:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}, \quad V_C = \frac{V_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot 2}, \quad \omega_3 = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R_3}.$$

Тогда окончательно, подставляя эти значения в выражение кинетической энергии, получим:

$$T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\rho_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{R_2^2} + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\left(\frac{V_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot 2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}R_3^2\left(\frac{V_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot 2 \cdot R_3}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{g}\left(P_1 + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8}P_3\frac{r_2^2}{R_2^2}\right). \tag{3.5}$$

$\sum A^{(i)} = 0$, так как система неизменяемая (тела абсолютно твердые, нити нерастяжимые).

Определим сумму работ всех внешних сил, действующих на рассматриваемую механическую систему.

$$A_{\vec{P}_1} = P_1 \cdot S \cdot \sin 30°, \quad A_{\vec{F}_{тр}} = -F_{тр} \cdot S = -f P_1 \cos 30° \cdot S,$$

$$A_M = -M\varphi_2 = -\frac{M}{R_2}, \quad A_F = -F \cdot S_C = -F\frac{S \cdot r_2}{R_2 \cdot 2},$$

$$A_{\vec{N}_1} = 0, \quad A_{\vec{P}_2} = 0, \quad A_{\vec{X}_2} = 0, \quad A_{\vec{y}_2} = 0, \quad A_{\vec{P}_3} = 0, \quad A_{\vec{N}_3} = 0.$$

Работа сил $\vec{P}_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{N}_3$ равна нулю, так как эти силы приложены в неподвижных точках, а сил $\vec{P}_3, \vec{N}_1$ равна нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению точек их приложения. Тогда

$$\sum A^{(e)} = \left(P_1 \sin 30° - f P_1 \cos 30° - \frac{M}{R_2} - F\frac{r_2}{R_2 \cdot 2} \right) S. \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в выражение теоремы кинетической энергии системы, получим:

$$\frac{P_1 + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8}P_3\frac{r_2^2}{R_2^2}}{2g} V_1^2 = \left(P_1 \sin 30° - f P_1 \cos 30° - \frac{M}{R_2} - F\frac{r_2}{R_2 \cdot 2} \right) S. \quad (3.7)$$

Откуда

$$V_1 = \sqrt{\frac{\left(P_1 \sin 30° - f P_1 \cos 30° - \frac{M}{R_2} - F\frac{r_2}{R_2 \cdot 2} \right) \cdot 2gS}{P_1 + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8}P_3\frac{r_2^2}{R_2^2}}} = 2{,}73 \text{ м/с}.$$

Для определения ускорения тела 1 продифференцируем равенство (3.7) по времени. С учетом того, что $\frac{dS}{dt} = V_1$, а $\frac{dV_1}{dt} = a_1$, имеем:

$$\frac{P_1 + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{8}P_3\frac{r_2^2}{R_2^2}}{2g} 2V_1\frac{dV_1}{dt} = \left(P_1 \sin 30° - f P_1 \cos 30° - \frac{M}{R_2} - F\frac{r_2}{R_2 \cdot 2} \right)\frac{dS}{dt},$$

откуда

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt} = \frac{g\left(P_1 \sin 30° - f P_1 \cos 30° - \dfrac{M}{R_2} - F\dfrac{r_2}{R_2 \cdot 2}\right)}{P_1 + P_2\dfrac{\rho_2^2}{R_2^2} + \dfrac{3}{8}P_3\dfrac{r_2^2}{R_2^2}} = 1{,}86 \text{ м/с}^2.$$

Если при вычислении $\sum A^{(e)}$ получилась отрицательной, то следует изменить направление движения системы и с учетом этого пересчитать $\sum A^{(e)}$.

3.6. Принцип Даламбера для механической системы (Д-6)

Используя условия задач Д-5, а также значение найденного ускорения первого тела $\vec{a}_1$, определить натяжения ветвей нитей и реакцию оси блока 2.

Указания. Для решения задач Д-6 следует воспользоваться принципом Даламбера, для чего надо рассматривать движение каждого тела в отдельности, приложить к нему все внешние силы (активные и силы реакций связей), а затем, присоединив силы инерции, составить соответствующие уравнения равновесия.

Пример. В условиях предыдущего примера (см. рис. 3.12) определить натяжения нитей и реакцию шарнира.

Решение. Рассмотрим тело 1 и тело 2 отдельно. Покажем все приложенные к этим телам активные силы, силы реакций связей, а также силы инерции (рис. 3.13).

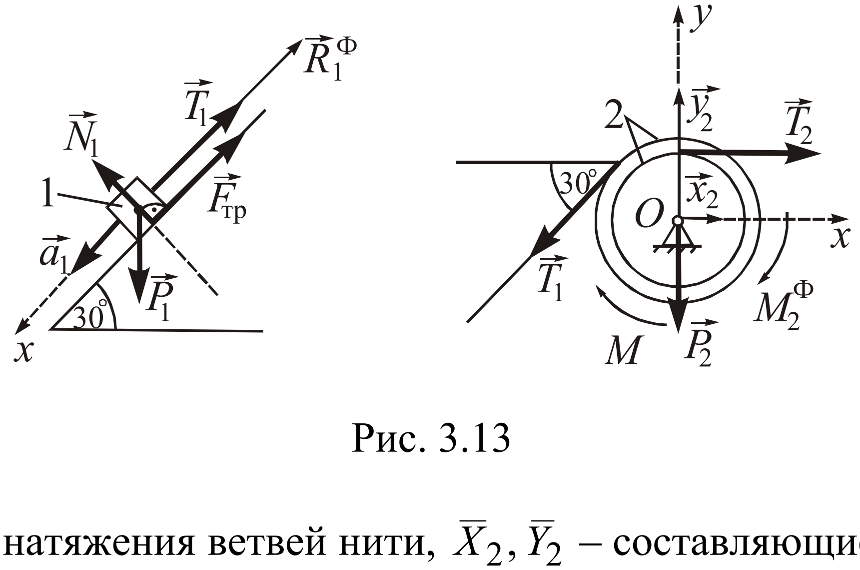


Рис. 3.13

$\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – натяжения ветвей нити, $\overline{X}_2, \overline{Y}_2$ – составляющие реакции шарнира блока 2, $R_1^Ф = \dfrac{P_1}{g} a_1$ – главный вектор сил инерции тела 1, $M_2^Ф = J_2 \varepsilon_2 = \dfrac{P_2}{g} \rho_2^2 \dfrac{a_1}{R_2}$, $M_2^Ф$ – главный момент сил инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Составим уравнения равновесия для груза 1 и ступенчатого блока 2:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad P_1 \cos 60° - f P_1 \cos 30° - R_1^Ф - T_1 = 0;$$

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad x_2 - T_1 \cos 30° + T_2 = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad -P_2 + y_2 - T_1 \cos 60° = 0;$$

$$\Sigma M_0(\overline{F}_k) = 0, \quad T_1 \cdot R_2 - M_2^Ф - T_2 \cdot r_2 - M = 0.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$T_1 = 11{,}35\,H, \quad T_2 = 1{,}03\,H,$$

$$X_2 = 8{,}78\,H, \quad Y_2 = 4{,}32\,H.$$

3.7. Принцип возможных перемещений (Д-7)

Рассчитать реакции составной балки, нагруженной сосредоточенной силой $\vec{P}$, равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и парой сил с моментом *M*. Варианты схем представлены на рис. 3.14 (0–9), значения данных для расчета – в табл. 3.6.

Указания. Задачи Д-7 решаются с помощью принципа возможных перемещений применительно к равновесной механической системе с одной степенью свободы. Для решения задачи необходимо сообщить системе возможное перемещение, определить сумму элементарных работ всех приложенных сил на этом перемещении и приравнять ее к нулю. К этому уравнению следует добавить зависимости между возможными перемещениями точек системы.

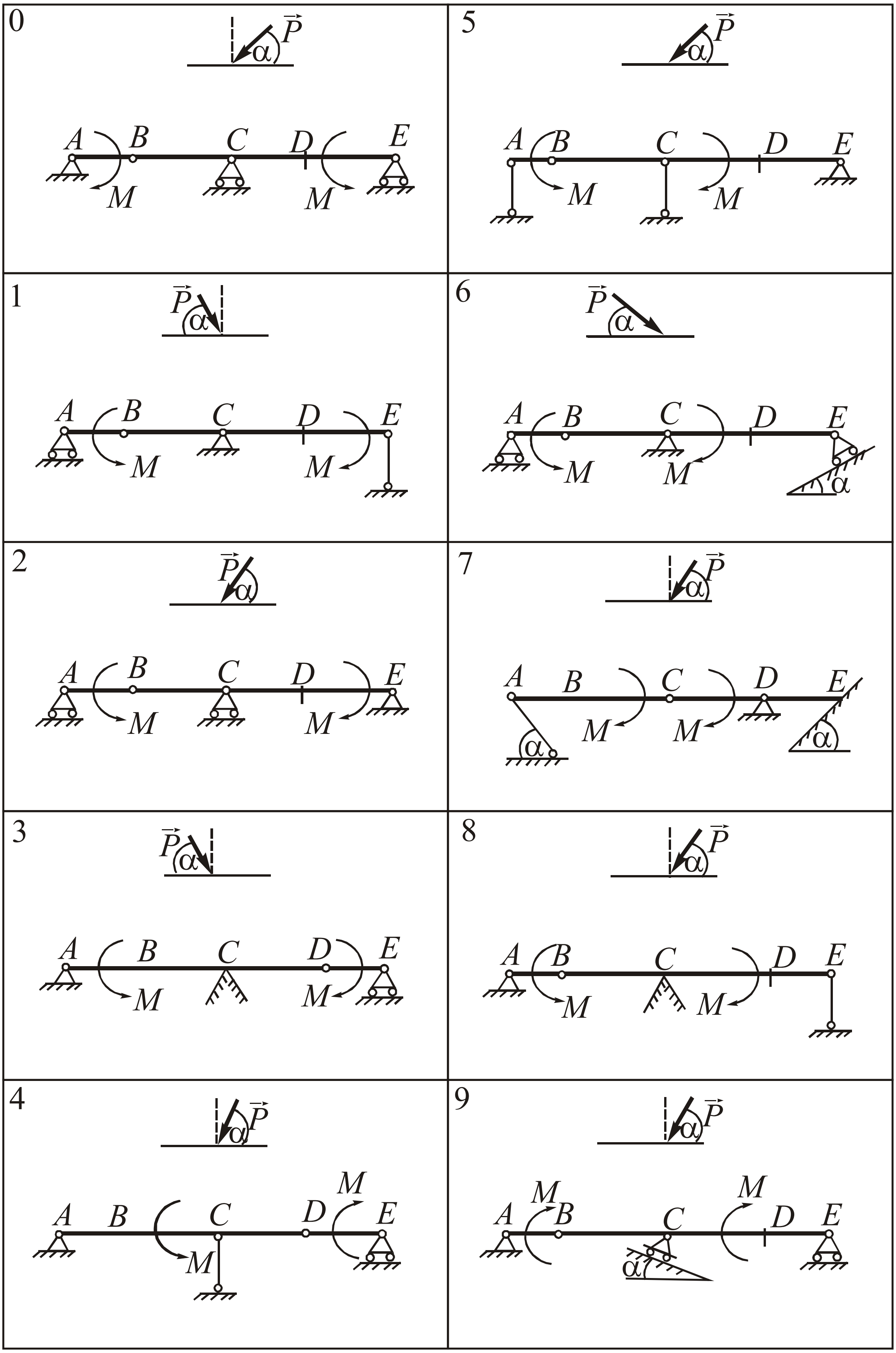


Рис. 3.14

Таблица 3.6

Номер задания	P, Н	M, Н·м	AB	BC	$СД$	α, град	Точка приложения силы $\vec{P}$	q, Н/м	Участок распределения нагрузки
			м						
0	4	4	3	6	2	60	D	1	BC
1	2	5	1	3	1	45	A	2	AB
2	5	4	2	4	1	30	D	4	AB
3	8	4	2	4	2	30	A	4	CD
4	6	2	4	6	3	45	D	2	AD
5	3	6	6	4	1	60	A	2	CD
6	2	5	8	4	4	30	D	0,5	BD
7	4	6	4	6	2	30	D	1,5	CD
8	4	8	4	4	1	60	C	2	AC
9	5	8	5	5	4	30	B	1,5	AB

1. Определение горизонтальной составляющей $\vec{X}_A$ реакции шарнира A (рис. 3.15, *б*).

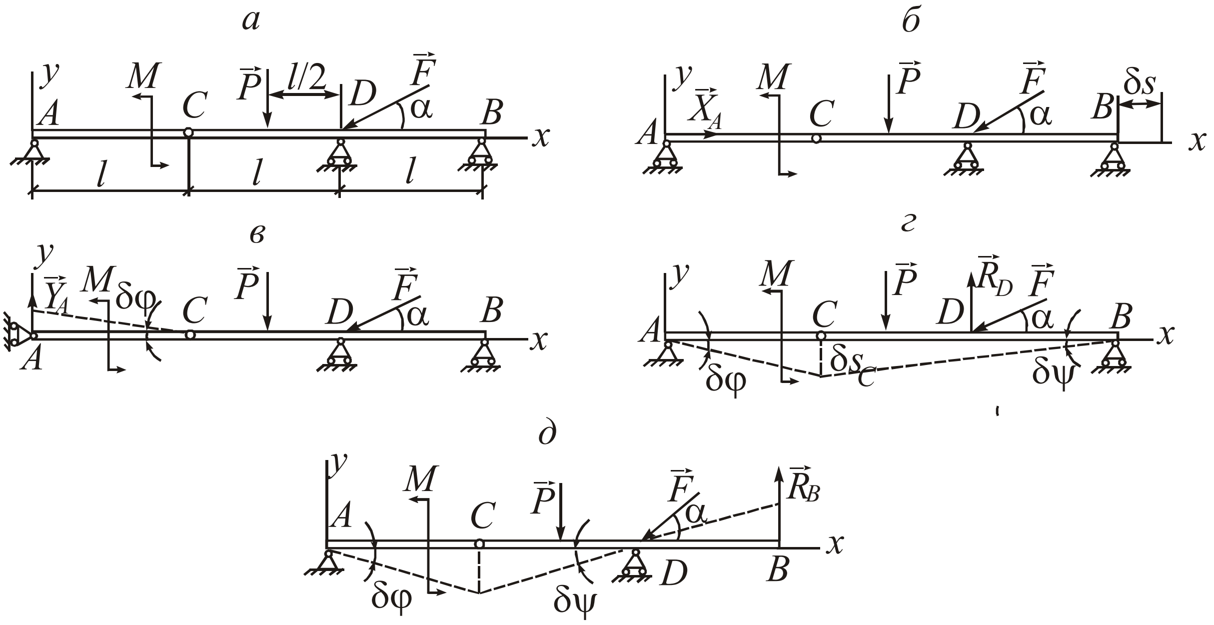


Рис. 3.15

Сообщив балке возможное перемещение δs, записываем следующее уравнение:

$$X_A \delta s - F\cos\alpha \cdot \delta s = 0, \quad \text{откуда} \quad X_A = F\cos\alpha .$$

2. Определение вертикальной составляющей $\vec{Y}_A$ реакции шарнира *A* (рис. 3.15, *в*).

Возможным перемещением в данном случае является поворот балки *AC* вокруг шарнира *C* на угол $\delta\varphi$. Уравнение возможных работ записывается в следующем виде:

$$Y_A \cdot l \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0, \quad \text{откуда} \quad Y_A = M / l.$$

3. Определение реакции $\vec{R}_D$ шарнира *D* (рис. 3.15, *г*).

Возможными перемещениями рассматриваемой составной конструкции в этом случае будут поворот балки *BC* вокруг шарнира *A* на угол $\delta\varphi$ и поворот балки *BC* вокруг шарнира *B* на угол $\delta\psi$. Уравнение возможных перемещений при этом будет иметь вид:

$$-M\delta\varphi + P\frac{3l}{2}\delta\psi - R_D \cdot l \cdot \delta\psi + F\sin\alpha \cdot l \cdot \delta\psi = 0. \qquad (3.8)$$

Связь между угловыми перемещениями $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ найдем из соотношения:

$$AC\delta\varphi = BC\delta\psi, \quad \text{откуда} \quad \delta\psi = \frac{AC}{BC}\delta\varphi = \frac{l}{2l}\delta\varphi = \frac{1}{2}\delta\varphi.$$

С учетом этого уравнение (3.8) перепишется следующим образом:

$$-M + \frac{3}{4}P \cdot l - \frac{1}{2}R_D \cdot l + \frac{1}{2}F\sin\alpha \cdot l = 0.$$

Откуда

$$R_D = \frac{3}{2}P + F\sin\alpha - \frac{2M}{l}.$$

4. Определение реакции $\vec{R}_B$ шарнира (рис. 3.15, *д*).

Угловые перемещения балки *AC* и балки *BC* – одинаковые, т. е. $\delta\varphi = \delta\psi$. Тогда

$$M\delta\varphi + P\frac{l}{2}\delta\varphi - R_B \cdot l \cdot \delta\varphi = 0.$$

Отсюда $R_B = \dfrac{M}{l} - \dfrac{P}{2}$.

5. Для проверки полученного решения составляем уравнения статики:

$$\sum F_x = 0; \quad x_A - F\cos\alpha = 0;$$
$$\sum F_x = 0; \quad y_A - P - F\sin\alpha + R_D + R_B = 0.$$

3.8. Уравнение Лагранжа II рода для механической системы с одной степенью свободы (Д-8)

Механическая система, состоящая из четырех однородных тел, находится под действием силы $\overline{F}$ и двух пар сил, моменты которых равны M_1 и M_2 (рис. 3.16 (0–9)).

Определить величины, указанные в табл. 3.7 в столбце «Найти», а также установить направление движения системы. Данные для решения приведены в табл. 3.7, где $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ – веса тел; r_1, r_2, R_2 – радиусы шкивов 1 и 2; ρ_2 – радиус инерции шкива 2 относительно оси, проходящей через его центр масс; α – угол наклона плоскости к горизонту. Тело 1 считать однородным круглым цилиндром.

Таблица 3.7

Номер задания	P_1	P_2	P_3	P_4	F	M_1	M_2	r_1	r_2	R_2	ρ_2	Найти
	Н					Н·м		см				
0	50	20	200	100	40	50	100	20	10	25	16	a_3
1	20	50	100	0	80	–	50	15	5	18	10	a_3
2	40	20	100	0	50	–	80	18	8	26	15	ε_2
3	80	20	240	20	–	75	50	16	4	20	12	a_3
4	60	30	100	20	100	80	30	10	4	30	16	ε_4
5	40	40	400	0	–	–	40	14	8	20	12	a_3
6	100	60	200	0	–	100	75	18	6	24	15	ε_1
7	200	20	100	0	100	–	60	20	10	25	14	ε_2
8	50	10	200	10	–	100	200	15	12	30	16	ε_1
9	10	15	100	0	120	–	200	16	10	20	12	a_3

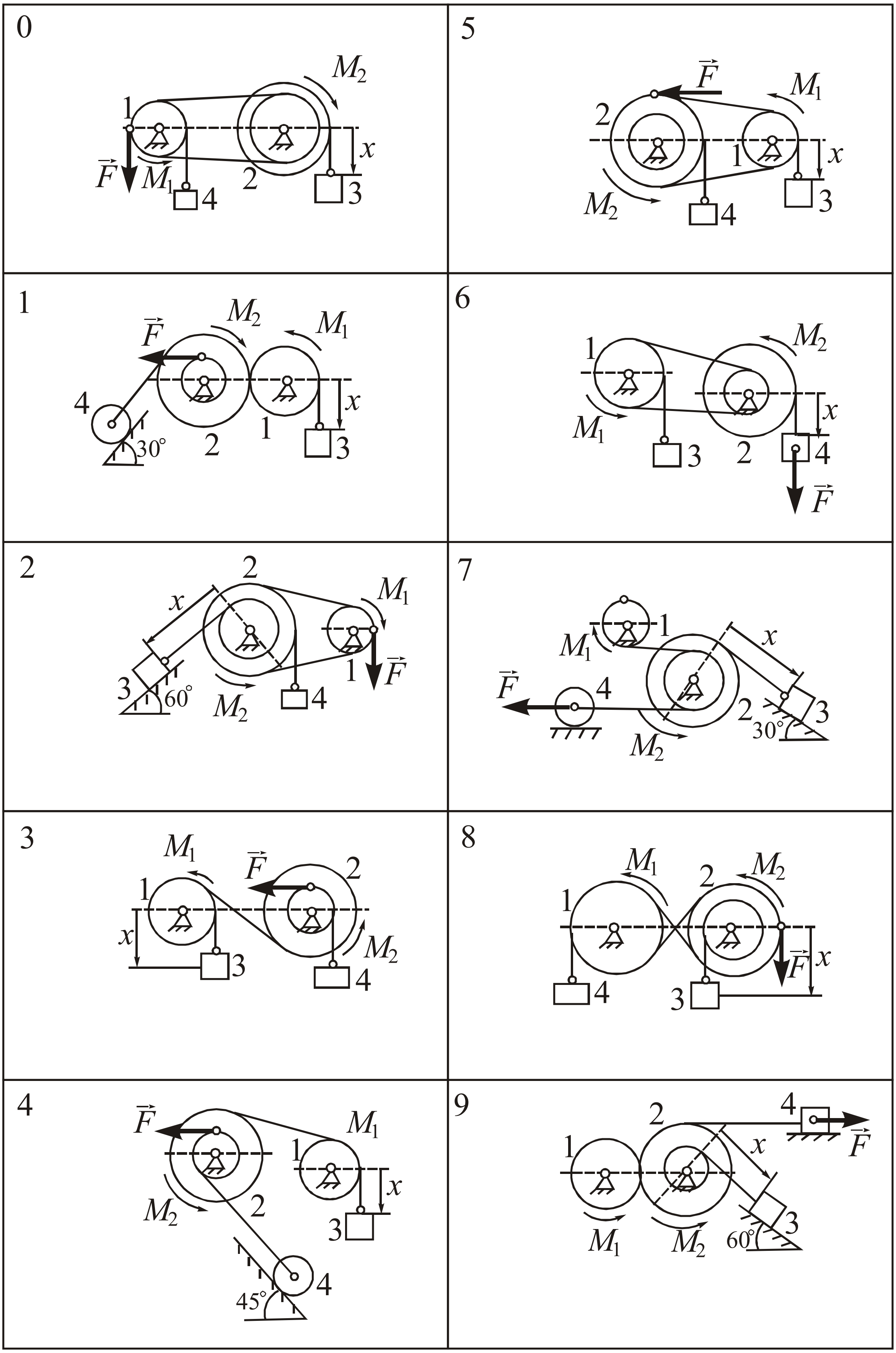

0
M_2 1 x $\vec{F}$ M_1 2 4 3
5
$\vec{F}$ M_1 2 x 1 M_2 4 3
1
$\vec{F}$ M_2 M_1 4 x 30° 2 1 3
6
1 M_2 x M_1 3 2 4 $\vec{F}$
2
2 x M_1 1 $\vec{F}$ 3 60° M_2 4
7
1 M_1 x $\vec{F}$ 4 2 3 30° M_2
3
M_1 $\vec{F}$ 2 1 x 3 M_2 4
8
M_1 2 M_2 1 $\vec{F}$ x 4 3
4
$\vec{F}$ M_1 1 x M_2 2 3 45° 4
9
2 4 1 x $\vec{F}$ 3 M_1 M_2 60°

Рис. 3.16

Указания. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. Для решения задачи необходимо составить одно дифференциальное уравнение Лагранжа, взяв за обобщенную координату – координату тела, ускорение которого требуется определить, или угол поворота одного из шкивов, угловое ускорение которого требуется найти.

Тела, вес которых в табл. 3.7 равен нулю, считать невесомыми. Пропуск в таблице означает, что эта величина отсутствует и ее на рисунке можно не изображать.

Пример. Для механической системы, изображенной на рис. 3.17, задано M_1 = 10 Н·м, M_2 = 20 Н·м, P_1 = 200 Н, P_2 = 300 Н, P_3 = 500 Н, F = 2 Н, R_2 = 0,3 м, r_1 = 0,2 м, ρ_2 = 0,15 м, r_2 = 0,1 м. Найти ускорение тела 3.

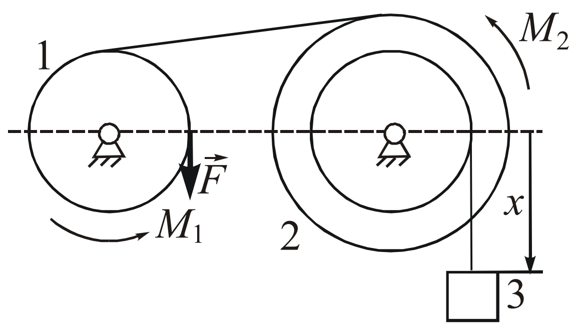


Рис. 3.17

Решение. Для решения задачи применяем уравнение Лагранжа II рода.

В данном случае система имеет одну степень свободы, поэтому в качестве обобщенной координаты системы возьмем координату x груза 3. Тогда уравнение Лагранжа II рода запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q, \qquad (3.9)$$

где T – кинетическая энергия системы; Q – обобщенная сила, соответствующая координате x.

Вычислим кинетическую энергию и выразим ее через скорость груза 3 ($\dot{x}$):

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\omega_2^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\omega_1^2,$$

где $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}}{r_2}$, $\omega_1 = \dfrac{\omega_2 R_2}{r_1} = \dfrac{R_2 \dot{x}}{r_1 r_2}$, $I_1 = \dfrac{P_1 r_1^2}{2g}$, $I_2 = \dfrac{P_2}{g}\rho_2^2$.

Таким образом, $T=\left(\dfrac{P_1R_2^2}{2r_2^2}+\dfrac{P_2\rho_2^2}{r_2^2}+P_3\right)\dfrac{\dot{x}^2}{2g}$.

Для нахождения обобщенной силы Q сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получит приращение $\delta x > 0$. Вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил на этом перемещении:

$$\delta A = P_3\delta x - M_2\delta\varphi_2 - M_1\delta\varphi_1 + Fr_1\delta\varphi_1,$$

где $\delta\varphi_2=\dfrac{\delta x}{r_2}$; $\delta\varphi_1=\dfrac{R_2\delta x}{r_1 r_2}$.

Таким образом,

$$\delta A = Q\delta x=\left(P_3-\frac{M_2}{r_2}-\frac{M_1R_2}{r_1r_2}+F\frac{R_2}{r_2}\right)\delta x.$$

Откуда

$$Q=\left(P_3-\frac{M_2}{r_2}-\frac{M_1R_2}{r_1r_2}+F\frac{R_2}{r_2}\right)\cong 156 \text{ Н}.$$

Составляем уравнение (3.9). Для этого вычислим производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{g}\left(\frac{P_1R_2^2}{2r_2^2}+\frac{P_2\rho_2^2}{r_2^2}+P_3\right)=211{,}7\dot{x};\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0.$$

После подстановок в уравнение (3.9) получим:

$$211{,}7\,\ddot{x}=156.$$

Откуда

$$\ddot{x}=a_3\cong 0{,}74 \text{ м/с}^2.$$

3.9. Уравнения Лагранжа II рода для механической системы с двумя степенями свободы (Д-9)

Грузы B и C массами m_B и m_C скользят по граням призмы A с массой m_A. Определить ускорение призмы A и ускорения грузов относительно призмы, если к одному из тел (A, B, C) приложена постоянная сила $\vec{F}$. Трением между призмой A и телами B и C пренебречь, нити считать невесомыми и нерастяжимыми. Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.8 и на рис. 3.18 (0–9).

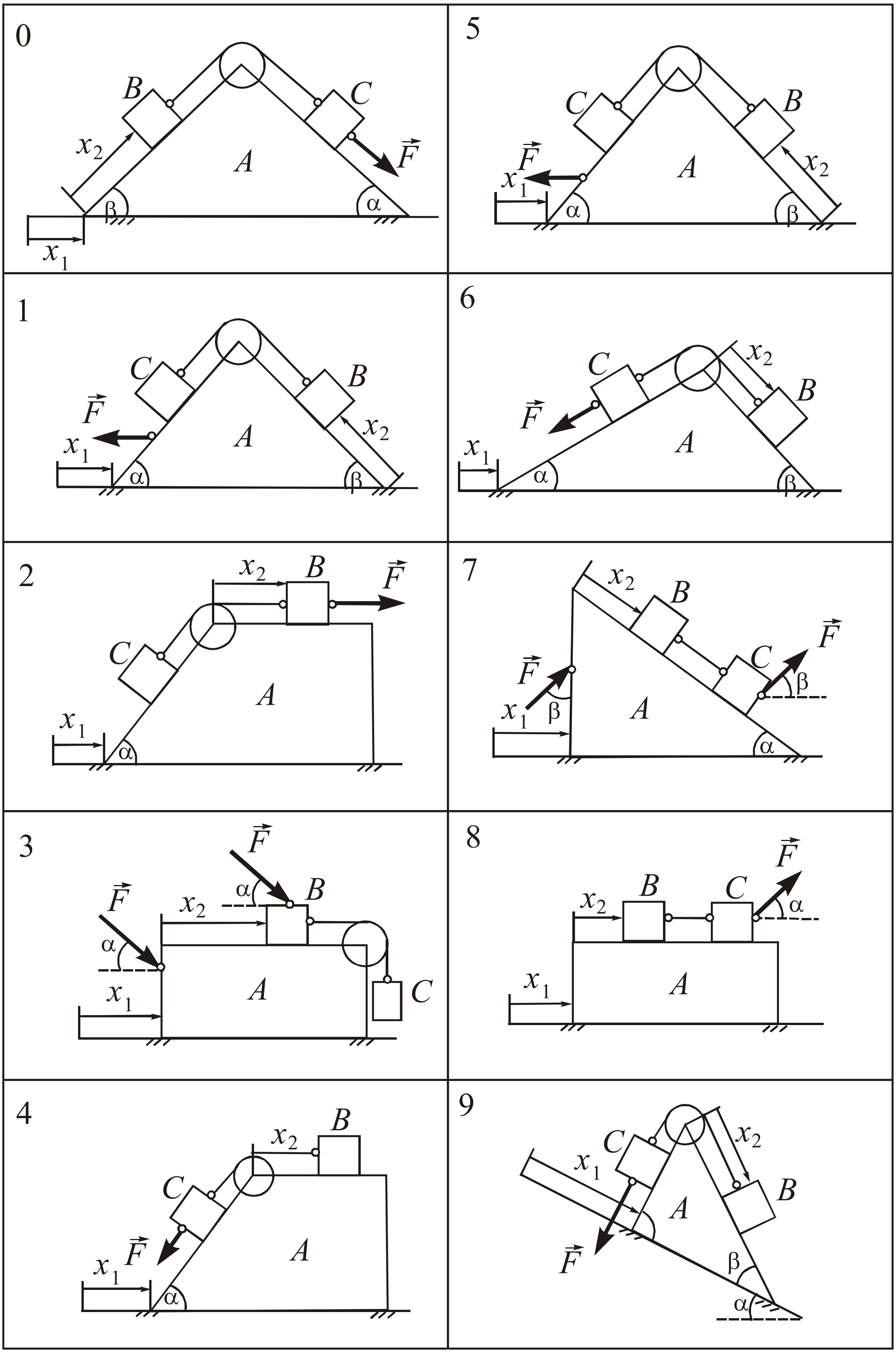

0
B
C
x_2
$\vec{F}$
A
β
α
x_1
5
C
B
$\vec{F}$
x_1
A
x_2
α
β
1
C
B
$\vec{F}$
x_1
A
x_2
α
β
6
C
x_2
B
$\vec{F}$
A
x_1
α
β
2
x_2
B
$\vec{F}$
C
A
x_1
α
7
x_2
B
C
$\vec{F}$
$\vec{F}$
β
x_1
β
A
α
3
$\vec{F}$
$\vec{F}$
x_2
α
B
α
A
x_1
C
8
$\vec{F}$
x_2
B
C
α
x_1
A
4
B
x_2
C
A
x_1
$\vec{F}$
α
9
C
x_2
x_1
B
A
$\vec{F}$
β
α

Рис. 3.18

Таблица 3.8

Номер задания	m_A	m_B	m_C	$\vec{F}$, Н	α,	β,
	кг				град	
0	10	5	2	20	30	0
1	20	5	4	10	60	30
2	30	4	5	40	45	30
3	50	15	10	30	30	15
4	20	6	4	20	30	0
5	30	10	20	10	45	45
6	40	15	10	10	60	30
7	20	16	8	20	45	15
8	30	20	10	15	30	0
9	20	10	5	20	30	30

Указания. Задачи Д-9 решаются с помощью составления уравнений Лагранжа 2 рода. Во всех задачах механическая система имеет две степени свободы, следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами. Решение задачи следует начать с выбора обобщенных координат. За первую обобщенную координату следует принять x_1 – расстояние, определяющее положение призмы A в начальный момент времени, а за вторую – координату x_2, определяющую положение тела B. Затем необходимо определить кинетическую энергию рассматриваемой механической системы, выразив ее через квадраты обобщенных скоростей.

Далее следует найти обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам. Затем составить дифференциальные уравнения движения системы и решить эти уравнения.

Пример. Для механической системы, изображенной на рис. 3.19, задано: m_A = 20 кг; m_B = 10 кг; m_C = 5 кг; α = 30°; β = 60°; F = 30 Н.

Решение. Данная механическая система имеет 2 степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат расстояние x_1 призмы от точки O и расстояние x_2 груза B от точки E (рис. 3.19). Запишем уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2, \qquad (3.10)$$

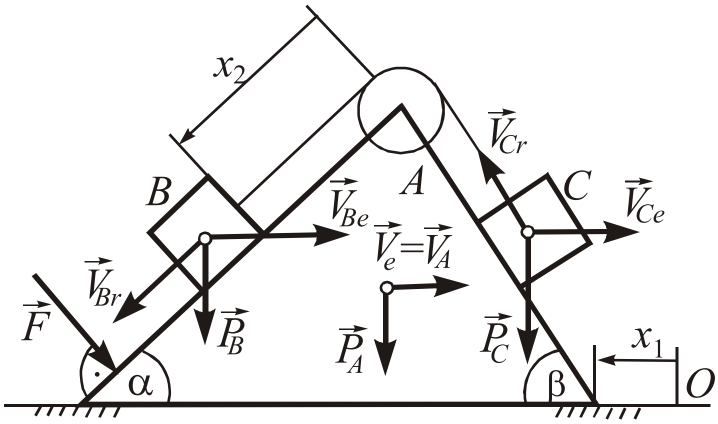


Рис. 3.19

где T – кинетическая энергия системы; Q_1 и Q_2 – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и x_2.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2 + \frac{1}{2}m_C V_C^2 .$$

Скорость тела A $V_A = \dot{x}_1$. Абсолютная скорость тела B:

$$V_B = \sqrt{V_{Be}^2 + V_{Br}^2 + 2V_{Be}V_{Br}\cos(\vec{V}_{Be},\vec{V}_{Br})} .$$

Здесь переносная скорость $V_{Be} = \dot{x}_1$, относительная скорость $V_{Br} = \dot{x}_2$; $\cos(\vec{V}_{Be},\vec{V}_{Br}) = \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $V_B^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \sqrt{3}\dot{x}_1\dot{x}_2$.

Аналогично получим выражение для абсолютной скорости тела C:

$$V_C^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos 120° = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_1\dot{x}_2 .$$

Подставляя найденные скорости в выражение для кинетической энергии системы, получим:

$$T = \frac{1}{2}m_A\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_B\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \sqrt{3}\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2\right) + \frac{1}{2}m_C\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2\dot{x}_2^2\right) .$$

Определяем производные, входящие в исходные уравнения (3.10):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_A \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_B \left(2\dot{x}_1 - \sqrt{3}\dot{x}_2\right) + \frac{1}{2} m_C \left(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right); \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{2} m_B \left(2\dot{x}_2 - \sqrt{3}\dot{x}_1\right) + \frac{1}{2} m_C \left(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right); \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Для определения обобщенной силы Q_1 вычислим сумму работ всех активных сил на возможном перемещении системы, вызванном приращением δx_1 обобщенной координаты x_1. При этом работу совершает только сила $\vec{F}$. Силы тяжести $\vec{P}_A, \vec{P}_B$ и $\vec{P}_C$ работ не совершают, так как перпендикулярны перемещению точек их приложения.

$$\delta A_1 = Q_1 \delta x_1 = F \delta x_1 \cos(90° - \alpha) = 0{,}5 F \delta x_1 .$$

Откуда $Q_1 = 0{,}5F$.

Для определения обобщенной силы Q_2 вычисляем сумму элементарных работ всех активных сил на возможном перемещении системы, вызванном приращением δx_2 обобщенной координаты x_2. При этом работу будут совершать только силы $\vec{P}_B$ и $\vec{P}_C$.

Силы $\vec{P}_A$ и $\vec{F}$ работу не совершают, так как тело A неподвижно.

$$\delta A_2 = Q_2 \delta x_2 = m_B g \delta x_2 \sin\alpha - m_C g \delta x_2 \sin\beta = \frac{g}{2}(m_B - \sqrt{3} m_C)\delta x_2 .$$

Откуда $Q_2 = \dfrac{g}{2}(m_B - \sqrt{3} m_C)$.

Следует отметить, что Q_2 можно вычислить и другим путем, используя то, что силы тяжести потенциальны. Принимая, что потенциальная энергия: П = 0 при $x_2 = 0$, получим выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = m_B g x_2 \sin\alpha + m_C g x_2 \sin\alpha = 0{,}5 g(\sqrt{3} m_C - m_B) x_2 .$$

Тогда

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0{,}5 g(m_B - \sqrt{3} m_C) .$$

Запишем уравнения Лагранжа, подставляя значения найденных выше величин в уравнение (3.10), получим:

$$\begin{cases} m_A\ddot{x}_1 + 0{,}5m_B\left(2\ddot{x}_1 - \sqrt{3}\ddot{x}_2\right) + 0{,}5m_C\left(2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right) = 0{,}5F; \\ 0{,}5m_B\left(2\ddot{x}_2 - \sqrt{3}\ddot{x}_1\right) + 0{,}5m_C\left(2\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\right) = 0{,}5g(m_B - \sqrt{3}m_C). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m_A + m_B + m_C)\ddot{x}_1 - 0{,}5(\sqrt{3}m_B + m_C)\ddot{x}_2 = 0{,}5F; \\ -0{,}5(\sqrt{3}m_B + m_C)\ddot{x}_1 + (m_B + m_C)\ddot{x}_2 = 0{,}5g(m_B - \sqrt{3}m_C). \end{cases}$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{cases} 35\ddot{x}_1 - 11\ddot{x}_2 = 5; \\ -11\ddot{x}_1 + 15\ddot{x}_2 = 7{,}5. \end{cases}$$

Откуда ускорение призмы $a_A = \ddot{x}_1 = 039$ м/с^2, ускорения грузов B и C относительно призмы $a_{Br} = a_{Cr} = \ddot{x}_2 = 0{,}79$ м/с^2.

Приложение

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа, выполняемая студентами, состоит из нескольких задач:

– по разделу «Статика» – задачи С-1–С-5;

– по разделу «Кинематика» – задачи К-1–К-4;

– по разделу «Динамика» – задачи Д-1–Д-9.

В условии каждой задачи приведены:

– 10 вариантов схем (0–9), представленных на соответствующих задаче рисунках;

– 10 вариантов числовых данных, представленных в соответствующих задаче таблицах.

Выбор вариантов схемы и числовых данных задачи определяется следующим образом:

– номер схемы задачи соответствует предпоследней цифре номера зачетной книжки;

– номер числовых данных (условия) задачи соответствует последней цифре номера зачетной книжки.

Например, студент выполняет задание К-4. Номер зачетной книжки …57. Тогда для этого варианта выбирается схема 5 из рис. 2.7 (см. условие задачи К-4), а числовые данные задачи выбираются по строке 7 из табл. 2.4. Для выбранных схемы и числовых данных задачи выполняется решение задачи в соответствии с вышеприведенными указаниями к решению задачи К-4.

Количество и тематика контрольных работ для конкретных специализаций подготовки специалистов и профилей подготовки бакалавров приведены в соответствующих рабочих программах, которые составляются ежегодно в соответствии с учебным планом основной образовательной программы и находятся на кафедре.

В процессе решения следует составить один или несколько рабочих чертежей, поясняющих расчеты (в соответствии с приведенными в сборнике примерами). Рабочий чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволить ясно показать все силы или векторы скоростей и ускорений. На чертеже указывают всю необходимую информацию для решения задачи (углы, центры, оси).

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда те или иные результаты). У найденных неизвестных величин необходимо указывать единицы размерности. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради) должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Список рекомендуемой литературы

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики [Электронный ресурс] / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 736 с. : ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=29. – загл. с экрана.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2010. – 672 с. : ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=84. – загл. с экрана.

3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. Т. 2. Динамика : учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2010. – 640 с. : ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books /element.php?pl1_cid=25&pl1_id=83. – загл. с экрана.

4. Диевский, В. А. Теоретическая механика : учеб. пособие [Электронный ресурс] / В. А. Диевский. – 3-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2009. – 320 с. : ил. . – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=130, – загл. с экрана.

Хямяляйнен Вениамин Анатольевич
Богатырева Альбина Сергеевна
Гордиенко Раиса Фроловна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор О. А. Вейс

Подписано в печать 06.02.2013. Формат 60×84/16
Бумага белая писчая. Отпечатано на ризографе
Уч.-изд. л. 6,00. Тираж 500 экз. Заказ
КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Типография КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а