

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра информатики и информационных систем

Составитель О. В. Кононыхина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания к практическим занятиям

Рекомендовано цикловой методической комиссией
информационных систем и программирования
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2026

Рецензенты

Ощепкова Е. А., преподаватель кафедры информатики и информационных систем ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кононыхина Ольга Владимировна

Математическое моделирование : методические указания к практическим занятиям для обучающихся специальности СПО 09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением очной формы обучения / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра информатики и информационных систем ; составитель О. В. Кононыхина. – Кемерово : КузГТУ, 2026. – 1 файл (614 Кб). – Текст : электронный.

Приведены методические указания к практическим занятиям по дисциплине **«Математическое моделирование»**, позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

© Кузбасский государственный
технический университет имени
Т. Ф. Горбачева, 2026

© Кононыхина О. В., составление,
2026

Оглавление

Практическое занятие 1. Построение простейших математических моделей	3
Практическое занятие 2. Решение задач линейного программирования симплексным методом	4
Практическое занятие 3. Решение транспортной задачи	5
Практическое занятие 4. Решение задачи о назначениях	5
Практическое занятие 5. Применение инструментальных средств для решения задач линейного программирования	6
Практическое занятие 6. Решение задач нелинейного программирования.....	7
Практическое занятие 7. Решение задач оптимального распределения ресурсов, о замене оборудования	8
Практическое занятие 8. Решение задач определения оптимального пути, оптимального резервирования	9
Практическое занятие 9. Решение задач на применение методов сетевого планирования.....	10
Практическое занятие 10. Расчёт характеристик простейших систем массового обслуживания	10
Практическое занятие 11. Решение игровых задач с нулевой суммой	12
Практическое занятие 12. Решение задач в развёрнутой форме	14
Критерии оценки практической работы	16
Список источников	17

Практическое занятие 1. Построение простейших математических моделей

Цель: сформировать навыки построения простейших математических моделей на основе реальных ситуаций.

Задачи:

- Изучить этапы построения математической модели;
- Научиться выделять существенные параметры и связи между ними;
- Освоить перевод содержательной постановки задачи в математическую форму.

Порядок выполнения:

1. Разбор примера построения модели (например, модель роста популяции, модель движения тела с учётом сопротивления среды).
2. Выделение основных параметров и переменных.
3. Формулировка гипотез и ограничений.
4. Запись соотношений между переменными в виде уравнений или неравенств.
5. Проверка адекватности модели.

Задания:

- Построить модель расчёта стоимости поездки на такси (учесть фиксированную плату, стоимость за километр, время ожидания);
- Создать модель накопления средств на покупку (учёт ежемесячных взносов, процентной ставки);
- Разработать модель распространения информации в социальной сети.

Контрольные вопросы:

- Что такое математическая модель?
- Какие этапы включает процесс построения математической модели?
- Как проверить адекватность модели?

Практическое занятие 2. Решение задач линейного программирования симплексным методом

Цель: освоить симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Задачи:

- научиться приводить задачу к канонической форме;
- овладеть алгоритмом симплекс-метода;
- научиться интерпретировать результаты.

Порядок выполнения:

1. Приведение задачи к каноническому виду.
2. Построение начальной симплекс-таблицы.
3. Проверка оптимальности текущего решения.
4. Выбор разрешающего столбца и строки.
5. Пересчёт таблицы.
6. Повторение шагов 3–5 до достижения оптимума.

Задания для студентов:

- решить задачу максимизации прибыли производства двух видов продукции при ограниченных ресурсах;
- найти минимум затрат на закупку сырья при заданных требованиях к составу;
- проанализировать чувствительность решения к изменению коэффициентов целевой функции.

Контрольные вопросы:

- В чём суть симплекс-метода?
- Как привести задачу ЛП к канонической форме?
- Когда решение считается оптимальным?

Практическое занятие 3. Решение транспортной задачи

Цель: научиться решать транспортные задачи методами линейного программирования.

Задачи:

- освоить методы составления начального опорного плана;
- изучить методы улучшения плана (метод потенциалов);
- научиться анализировать результаты.

Порядок выполнения:

1. Составление транспортной таблицы.
2. Нахождение начального опорного плана (методом северо-западного угла или наименьшей стоимости).
3. Проверка плана на оптимальность с помощью метода потенциалов
4. Улучшение плана при необходимости.
5. Анализ оптимального решения.

Задания для студентов:

- решить транспортную задачу по доставке товаров с трёх складов в четыре магазина;
- проанализировать влияние изменения тарифов на оптимальный план перевозок;
- рассмотреть случай несбалансированной транспортной задачи.

Контрольные вопросы:

- Как составить начальный опорный план?
- В чём заключается метод потенциалов?
- Как интерпретировать результаты решения транспортной задачи?

Практическое занятие 4. Решение задачи о назначениях

Цель: освоить венгерский метод решения задачи о назначениях.

Задачи:

- научиться формулировать задачу о назначениях;

- овладеть венгерским методом;
- научиться интерпретировать результаты.

Порядок выполнения:

1. Постановка задачи (матрица стоимостей/эффективностей).
2. Редукция матрицы (вычитание минимального элемента по строкам и столбцам).
3. Поиск минимального числа линий, покрывающих нули.
4. Модификация матрицы при необходимости.
5. Назначение исполнителей на работы.

Задания для студентов:

- распределить четырёх работников по четырём видам работ с минимальной общей стоимостью;
- решить задачу назначения с максимизацией общей эффективности;
- проанализировать устойчивость решения к изменению исходных данных.

Контрольные вопросы:

- В чём особенность задачи о назначениях?
- Как работает венгерский метод?
- Как проверить оптимальность полученного решения?

Практическое занятие 5. Применение инструментальных средств

для решения задач линейного программирования

Цель: научиться использовать программные средства для решения задач ЛП.

Задачи:

- освоить работу с пакетами (Excel, MATLAB, Python и др.);
- научиться вводить данные и интерпретировать результаты;
- сравнить эффективность разных инструментов.

Порядок выполнения:

1. Выбор программного средства.
2. Ввод данных задачи (целевая функция, ограничения).
3. Запуск решения.
4. Анализ результатов.
5. Сравнение с ручным решением.

Задания для студентов:

- решить задачу ЛП из занятия 2 с помощью Excel Solver;
- реализовать симплекс-метод в MATLAB или Python;
- сравнить время решения и точность разных инструментов.

Контрольные вопросы:

- Какие программные средства подходят для решения задач ЛП?
- Каковы преимущества и недостатки каждого инструмента?
- Как проверить корректность результатов, полученных с помощью

ПО?

Практическое занятие 6. Решение задач нелинейного программирования

Цель: освоить методы решения задач нелинейного программирования.

Задачи:

- научиться различать типы задач НП;
- овладеть методами безусловной и условной оптимизации;
- научиться применять численные методы.

Порядок выполнения:

1. Формулировка задачи (целевая функция, ограничения).
2. Проверка условий существования решения.
3. Выбор метода решения (градиентный, множителей Лагранжа и др.).
4. Реализация алгоритма.
5. Анализ результатов.

Задания для студентов:

- найти максимум функции двух переменных без ограничений;
- решить задачу минимизации с ограничениями-неравенствами;
- применить метод множителей Лагранжа к экономической задаче.

Контрольные вопросы:

- Чем задачи НП отличаются от задач ЛП?
- Какие методы используются для решения задач НП?
- Как проверить достаточные условия экстремума?

Практическое занятие 7. Решение задач оптимального распределения ресурсов, о замене оборудования

Цель: научиться моделировать и решать задачи распределения ресурсов и замены оборудования.

Задачи:

- освоить постановку задач динамического программирования;
- научиться строить рекуррентные соотношения;
- интерпретировать результаты в контексте реальных задач.

Порядок выполнения:

1. Формулировка задачи (цели, ограничения, этапы).
2. Построение рекуррентных соотношений.
3. Решение методом динамического программирования.
4. Анализ оптимального плана.

Задания для студентов:

- распределить бюджет между тремя проектами с максимальной отдачей;
- определить оптимальный срок замены оборудования с учётом износа и затрат;
- решить задачу многоэтапного распределения ресурсов.

Контрольные вопросы:

- В чём суть принципа оптимальности Беллмана?
- Как построить рекуррентное соотношение для задачи распределения?
- Как учесть неопределённость при планировании замены оборудования?

Практическое занятие 8. Решение задач определения оптимального пути, оптимального резервирования

Цель: освоить методы поиска оптимальных путей и резервирования.

Задачи:

- научиться моделировать сети и графы;
- овладеть алгоритмами поиска кратчайшего пути;
- решать задачи резервирования систем.

Порядок выполнения:

1. Построение графа (сеть дорог, система резервирования).
2. Выбор алгоритма (Дейкстры, Флойда и др.).
3. Реализация алгоритма.
4. Анализ результата.

Задания для студентов:

- найти кратчайший путь между городами на карте;
- определить оптимальную стратегию резервирования для технической системы;
- решить задачу маршрутизации с ограничениями.

Контрольные вопросы:

- Какие алгоритмы используются для поиска кратчайшего пути?
- Как моделировать резервирование в графах?
- Как учитывать надёжность при резервировании?

Практическое занятие 9. Решение задач на применение методов сетевого планирования

Цель: освоить методы сетевого планирования (CPM, PERT).

Задачи:

- научиться строить сетевые графики;
- рассчитывать критический путь;
- анализировать резервы времени.

Порядок выполнения:

1. Построение сетевого графика (работы, события, зависимости).
2. Расчёт ранних и поздних сроков.
3. Определение критического пути.
4. Анализ резервов времени.
5. Оптимизация графика.

Задания для студентов:

- построить сетевой график для проекта строительства дома;
- рассчитать критический путь и резервы времени;
- оптимизировать график при ограничении ресурсов.

Контрольные вопросы:

- Что такое критический путь?
- Чем отличаются методы CPM и PERT?
- Как использовать резервы времени для оптимизации графика?

Практическое занятие 10. Расчёт характеристик простейших систем массового обслуживания

Цель: научиться анализировать и рассчитывать основные характеристики простейших систем массового обслуживания (СМО).

Задачи:

- освоить классификацию СМО;
- изучить формулы для расчёта характеристик СМО;

- научиться применять теоретические знания к решению практических задач;

- интерпретировать полученные результаты.

Теоретические сведения:

Основные типы СМО:

- с отказами;
- с очередью (ограниченной/неограниченной);
- одноканальные и многоканальные.

Ключевые характеристики:

- интенсивность потока заявок λ ;
- интенсивность обслуживания μ ;
- коэффициент загрузки системы $\rho = \mu\lambda$;
- вероятность отказа $P_{\text{отк}}$;
- относительная пропускная способность Q ;
- абсолютная пропускная способность A ;
- среднее число заявок в системе L_s ;
- среднее время пребывания заявки в системе W_s .

Порядок выполнения:

1. Определение типа СМО и параметров системы.
2. Расчёт интенсивности потоков.
3. Вычисление коэффициента загрузки.
4. Применение формул для расчёта характеристик (в зависимости от типа СМО).
5. Анализ результатов и формулировка выводов.

Задания для студентов:

1. Одноканальная СМО с отказами (телефонная линия):
 - $\lambda = 0,95$ вызова/мин;
 - среднее время разговора $t=1$ мин.

Рассчитать: $P_{\text{отк}}$, Q , A .

2. Многоканальная СМО с очередью:

- 3 кассира в банке;
- $\lambda = 12$ клиентов/час;
- $\mu = 5$ клиентов/час на одного кассира.

Рассчитать: среднее число клиентов в очереди Lq , среднее время ожидания Wq .

3. Одноканальная СМО с неограниченной очередью (справочная служба):

- $\lambda = 8$ звонков/час;
- $\mu = 10$ звонков/час.

Рассчитать: Ls , Ws , Lq , Wq .

Контрольные вопросы:

- Какие типы СМО вы знаете?
- Что такое коэффициент загрузки системы?
- Как интерпретировать вероятность отказа?
- В чём разница между относительной и абсолютной пропускной способностью?
- При каких условиях СМО может работать стабильно?

Практическое занятие 11. Решение игровых задач с нулевой суммой

Цель: освоить методы решения матричных игр с нулевой суммой.

Задачи:

- научиться формулировать игровые задачи;
- овладеть методами поиска седловой точки;
- освоить решение игр в смешанных стратегиях через задачи линейного программирования;
- научиться интерпретировать результаты.

Теоретические сведения:

- платёжная матрица;

- нижняя и верхняя цена игры;
- седловая точка и чистая стратегия;
- смешанные стратегии;
- связь с задачами линейного программирования.

Порядок выполнения:

1. Построение платёжной матрицы.
2. Проверка наличия седловой точки.
3. Если седловой точки нет – переход к смешанным стратегиям.
4. Формулировка задач линейного программирования для игроков А и В.
5. Решение задач симплекс-методом или с помощью ПО.
6. Анализ результатов.

Задания для студентов:

1. Игра с седловой точкой:

312, 256, 431.

Найти нижнюю и верхнюю цену игры, оптимальную стратегию.

2. Игра без седловой точки:

243, 312, 125.

Решить через ЛП, найти оптимальные смешанные стратегии и цену игры

3. Экономическая задача: два конкурента выбирают стратегии рекламы.

Построить платёжную матрицу и решить игру.

Использование ПО:

- Excel (надстройка «Поиск решения»);
- MATLAB или Python (библиотеки оптимизации).

Контрольные вопросы:

- Что такое игра с нулевой суммой?
- Как найти седловую точку?
- Когда нужно искать решение в смешанных стратегиях?
- Как связаны теория игр и линейное программирование?

- Как интерпретировать вероятности смешанных стратегий?

Практическое занятие 12. Решение задач в развёрнутой форме

Цель: научиться моделировать и решать задачи в развёрнутой (динамической) форме.

Задачи:

- освоить представление задач в виде деревьев решений;
- научиться рассчитывать ожидаемые значения;
- овладеть методами обратной индукции;
- анализировать многоэтапные процессы.

Теоретические сведения:

- дерево решений (узлы решений и случайные узлы);
- вероятности исходов;
- ожидаемый денежный результат (EMV);
- обратная индукция;
- анализ чувствительности.

Порядок выполнения:

1. Построение дерева решений.
2. Указание вероятностей и выплат на каждом этапе.
3. Расчёт EMV для конечных узлов.
4. Обратная индукция: расчёт EMV для промежуточных узлов.
5. Выбор оптимальной стратегии.
6. Анализ чувствительности к изменению параметров.

Задания для студентов:

1. Инвестиционный проект:
 - решение: инвестировать или нет;
 - если инвестировать: успех (вероятность 0,6, доход 100 тыс. руб.) или неудача (вероятность 0,4, убыток 50 тыс. руб.);
 - если не инвестировать: доход 0 руб.

Рассчитать EMV и принять решение.

2. Разработка продукта:

- этап 1: провести исследования (затраты 20 тыс. руб.);
- этап 2: если успех (вероятность 0,7), то решение о производстве;
- производство: успех (вероятность 0,8, доход 200 тыс. руб.) или неудача (вероятность 0,2, убыток 100 тыс. руб.).

Построить дерево решений и найти оптимальную стратегию.

3. Медицинская диагностика:

- выбор между лечением А (стоимость 10 тыс. руб., эффективность 80 %) и лечением В (стоимость 15 тыс. руб., эффективность 90 %);
- возможные исходы: выздоровление или осложнения.

Построить дерево и рассчитать EMV.

Контрольные вопросы:

- Что такое дерево решений?
- Как рассчитывается ожидаемый денежный результат?
- В чём суть метода обратной индукции?
- Как анализировать чувствительность решения?
- Какие преимущества даёт представление задачи в развёрнутой форме?

Критерии оценки практической работы

Отметка	Критерии	Показатели по 100-й шкале
5 (отлично)	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения и получены верные ответы	100 баллов
	– работа выполнена в полном объеме, приведены все шаги решения, но имеется одна-две вычислительные ошибки	(90;100) баллов
4 (хорошо)	– работа выполнена полностью, но при выполнении обнаружилось недостаточное владение навыками работы в рамках поставленной задачи	(85;90) баллов
	– правильно выполнена большая часть работы (свыше 85%) – работа выполнена полностью, но использованы наименее оптимальные подходы к решению поставленной задачи	(80;85) баллов
3 (удовлетворительно)	– работа выполнена не полностью, допущено более трех ошибок, но обучающийся владеет основными навыками работы, требуемыми для решения поставленной задачи.	(65;79) баллов
2 (неудовлетворительно)	– допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными знаниями, умениями и навыками работы или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.	(50;65) баллов
	– работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и навыков работы по проверяемой теме.	(30;50) баллов

Список источников

1. Скиданов, Р. В. Введение в математическое моделирование : учебное пособие / Р. В. Скиданов, Д. В. Нестеренко. – Самара : Самарский университет, 2024. – 120 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/480644> – Загл. с экрана.
2. . Губарь, Ю. В. Введение в математическое моделирование : учебное пособие / Ю. В. Губарь. – 4-е изд. – Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2025. – 178 с. – Режим доступа: <https://profspo.ru/books/146328> – Загл. с экрана.
3. Дьяконов, В. П. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование / В. П. Дьяконов. – Москва : СОЛОН-Пресс, 2021. – 384 с. – Режим доступа: <https://profspo.ru/books/141995>). – Загл. с экрана.