

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители:
Липина Г. А., Победаш П. Н., Подкур П. Н.

МАТЕМАТИКА: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий
и сооружений в качестве электронного учебного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2026

Рецензенты:

Кузнецова А. В. – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Липина Галина Александровна

Победаш Павел Николаевич

Подкур Полина Николаевна

Математика: аналитическая геометрия : методические материалы для обучающихся всех направлений подготовки и специальностей, изучающих дисциплины «Математика», «Специальные главы математики» / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра математики ; составители. Г. А. Липина, П. Н. Победаш, П. Н. Подкур. – Кемерово : КузГТУ, 2026. – 1 файл (1297). – Текст : электронный.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Специальные главы математики».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу «Аналитическая геометрия» и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех направлений всех специальностей всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Аналитическая геометрия».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2026

© Липина Г. А., Победаш П. Н.
Подкур П. Н., составление, 2026

Тема. Аналитическая геометрия

1. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

2. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.

3. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами

4. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.

1. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

Каждая прямая на плоскости Oxy определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными. Обратно: каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \quad (1)$$

где k – угловой коэффициент прямой, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты, причем A и B одновременно не обращаются в нуль. Заметим, что $\vec{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой.

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3)$$

где a и b – длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

Уравнение прямой по точке $M_0(x_0, y_0)$ и угловому коэффициенту k

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (4)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α – угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2, x_1 \neq x_2$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (5)$$

Параметрические уравнения прямой

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\vec{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ – лежит на прямой.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}, \quad (7)$$

где $\vec{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ – лежит на прямой.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол между ними находится из формулы

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (8)$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad (9)$$

а условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (10)$$

Если прямые заданы уравнениями вида (1), то угол φ между ними находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (11)$$

Для того, чтобы прямые были параллельны необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1 k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой (2) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (12)$$

Задачи.

1. На рисунке 1 изображен треугольник с вершинами $A(1, -3)$, $B(2, 1)$, $C(-3, 2)$.

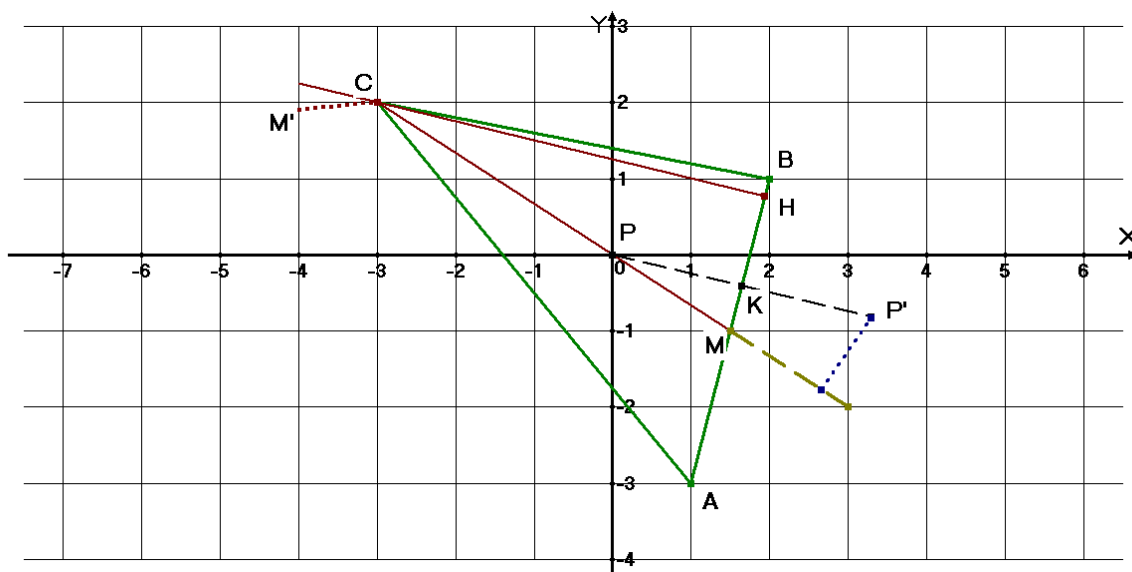


Рис. 1 – Иллюстрация к задаче 1

Найти:

уравнение стороны AB ;

уравнение медианы CM ;

уравнение высоты CH ;

координаты точки P пересечения медиан;

координаты точки P^* , симметричной P относительно стороны AB ;

расстояние от точки P^* до медианы CM .

Решение.

1) **уравнение стороны AB .** Так как известны две точки прямой, то проще всего воспользоваться уравнением (5):

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - (-3)}{1 - (-3)} \Leftrightarrow 4(x - 1) = y + 3 \Leftrightarrow y = 4x - 7.$$

2) **уравнение медианы CM .** M – середина AB , следовательно, $x_M = (x_A + x_B)/2 = 3/2$, $y_M = (y_A + y_B)/2 = -1$. Используя фор-

мулу (5), получим уравнение CM : $y = -\frac{2}{3}x$. (геометрический смысл коэффициентов k и b соответствует рисунку).

$$y = -\frac{2}{3}x \Leftrightarrow 2x + 3y = 0.$$

3) **уравнение высоты CH** . Очевидно, точка $C \in CH$, но не известна никакая другая точка высоты. Поэтому, целесообразно воспользоваться какой-либо разновидностью уравнения пучка прямых, например, в форме (4): $y - y_C = k_{CH}(x - x_C)$. Так как CH перпендикулярна к AB , то $k_{CH} = -1/k_{AB} = -1/4$, откуда получаем уравнение высоты CH : $y - 2 = -\frac{1}{4}(x - (-3)) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$. (геометрический смысл коэффициентов k и b соответствует рисунку) $\Leftrightarrow x + 4y - 5 = 0$ (общий вид линии CH).

4) **координаты точки P пересечения медиан**. Из курса школы известно, что в точке пересечения каждая медиана делится в отношении 2:1, начиная от вершины, то есть если P – точка пересечения медиан, то $|CP|=2|PM|$. Следовательно, в формуле деления отрезка в данном отношении нужно принять $\lambda = 2$. Таким образом, имеем

$$x_p = \frac{x_C + \lambda x_M}{1 + \lambda} = \frac{-3 + 2 \cdot (3/2)}{3} = 0, \quad y_p = \frac{y_C + \lambda y_M}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot (-1)}{3} = 0,$$

то есть точка P совпадает с началом координат.

5) **координаты точки P^* , симметричной P относительно стороны AB** . Для нахождения P^* необходимо знать точку K пересечения прямых AB и PP^* . Так как PP^* перпендикулярна к AB , то, выпишем уравнение PP^* аналогично тому, как это было сделано для высоты CH : $y - y_p = k_{pp^*}(x - x_p)$, $k_{pp^*} = -\frac{1}{k_{AB}}$, откуда получаем уравнение PP^* : $y = -\frac{1}{4}x \Leftrightarrow x + 4y = 0$.

Координаты K можно найти, решая систему линейных уравнений: $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases}$, откуда $x_K = \frac{28}{17}$, $y_K = -\frac{7}{17}$. Координаты точки P^* легко найти из векторного равенства: $PK = KP^*$,

то есть $x_K - x_p = x_{p^*} - x_K$, $y_K - y_p = y_{p^*} - y_K$ или, что то же:

$$x_{p^*} = 2x_K - x_p = \frac{56}{17}, \quad y_{p^*} = 2y_K - y_p = -\frac{14}{17}.$$

6) **расстояние от точки P^* до медианы CM** вычислим по формуле (12)

$$\rho(P, CM) = \frac{|A_{CM}x_p^* + B_{CM}y_p^* + C_{CM}|}{\sqrt{A_{CM}^2 + B_{CM}^2}} = \frac{|\frac{2}{3} \cdot \frac{56}{17} + 1 \cdot (-\frac{14}{17}) + 0|}{\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + 1^2}} = \frac{70}{17\sqrt{13}} \approx 1,142.$$

Провести прямую через точку $A(-1; 3)$ параллельно данной прямой $3x - 6y + 2 = 0$.

Решение.

Запишем уравнение этой прямой через угловой коэффициент $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$. Так как искомая прямая параллельна данной прямой, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = \frac{1}{2}x + b$, где число b находим из условия, что эта прямая проходит через точку $(-1; 3)$. Отсюда $3 = -\frac{1}{2} + b$. Значит, $b = 3,5$.

3. Дан треугольник с вершинами $A(-6; -1)$, $B(4; 6)$, $C(2; 1)$. Найти внутренние углы этого треугольника.

Решение.

Находим угловые коэффициенты сторон этого треугольника:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - (-1)}{4 - (-6)} = \frac{7}{10} \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 6}{2 - 4} = \frac{5}{2}$$

$$k_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1 - 1}{-6 - 2} = \frac{1}{4}.$$

Найдем углы треугольника по формуле (11):

$$tg \angle A = \frac{k_{AB} - k_{CA}}{1 + k_{AB}k_{CA}} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4}} = 0,383; \quad \angle A = 21^\circ$$

$$tg \angle B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}k_{AB}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{7}{10}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{10}} = 0,655; \quad \angle B \approx 33^\circ$$

$$tg \angle C = \frac{k_{BC} - k_{CA}}{1 + k_{BC}k_{CA}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}} = 1,39; \quad \angle C \approx 54^\circ$$

Складывая найденные значения углов, получаем

$$21^\circ + 33^\circ + 54^\circ = 108^\circ.$$

Сумма углов треугольника оказалась меньше 180° потому, что при вычислении был найден не внутренний угол, а внешний, смежный с ним. Построением убедимся, что угол C является тупым, он

равен $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$. Тогда сумма углов треугольника составит $21^\circ + 33^\circ + 126^\circ = 180^\circ$.

4. Найти точку, в которой прямая, проходящая через точки $A(5;5)$ и $B(1;3)$ пересечет ось Ox .

Решение.

Координаты искомой точки C есть $(x;0)$. А так как точки A , B , C лежат на одной прямой, то должно выполняться условие

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

(площадь треугольника равна 0), где $(x_1; y_1)$ координаты точки A , $(x_2; y_2)$ – координаты точки B , $(x_3; y_3)$ – точки C .

Получаем $(1 - 5)(0 - 5) - (x - 5)(3 - 5) = 0$, то есть $20 + 2(x - 5) = 0$, $x - 5 = -10$, $x = -5$, $y = 0$, т. е. $C(-5;0)$.

5. Написать уравнение прямой L , параллельной двум заданным прямым $L_1: x + 2y - 1 = 0$, $L_2: x + 2y + 2 = 0$ и проходящей посередине между ними.

Решение.

Так как вектор $\vec{n}(1; 2)$, нормальный к заданным прямым, является в то же время нормальным и к прямой L , то достаточно найти какую-нибудь точку M , лежащую посередине между L_1 и L_2 . Из уравнений этих прямых находим любые две точки $M_1 \in L_1$ и $M_2 \in L_2$, например такие: $M_1(1;0)$ и $M_2(-2;0)$. Тогда точка $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, делящая отрезок M_1M_2 пополам, лежит посередине между прямыми L_1 и L_2 . Поэтому уравнение искомой прямой имеет вид

$$L: x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

6. Записать уравнение прямой, если известен угловой коэффициент k и точка M , через которую проходит прямая:

а) $k = -2, M(1; 3)$; б) $k = 4, M(4; -2)$.

7. Дана прямая l . Записать уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку M :

а) $l: y = 3x + 1, M(2; 3)$; б) $l: y = -2x - 1, M(2; -1)$.

8. Дана прямая l . Записать уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку M :

а) $l: y = 4x + 1, M(4; 2)$; б) $l: y = -0,5x + 2, M(-2; 3)$.

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2 :

а) $M_1(1; 2)$ и $M_2(3; 4)$; б) $M_1(-2; 4)$ и $M_2(8; -1)$

2. Даны вершины треугольника ABC : $A(1; -2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 1)$.

Построить треугольник.

Найти:

а) уравнение стороны BC ;

б) угол между прямыми BC и AB ;

в) уравнение высоты AN ;

г) уравнение медианы BM ;

д) точку N пересечения медианы BM и высоты AN ;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC ;

ж) расстояние от точки A до прямой BC .

3. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой AB и проходящей через середину отрезка AB :

$A(2; 11)$, $B(-4; 7)$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$ и $3x - y + 12 = 0$, перпендикулярно к прямой $5x + 2y + 8 = 0$.

5. Найти площадь треугольника, ограниченного координатными осями и прямой $3x + 10y - 30 = 0$.

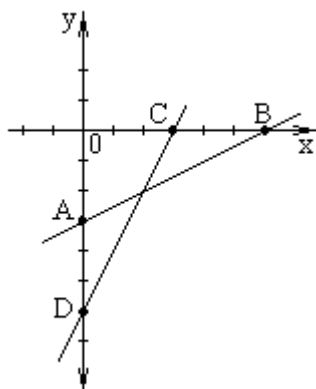
6. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой линии $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

7. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3; 1)$, $B(7; 5)$, $C(5; -3)$.

8. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой линией $y = 2x + 5$.

9. Даны вершины треугольника $A(-3; 2)$, $B(-3; -4)$, $C(9; -4)$. Определить длину высоты, проведенной из вершины A .

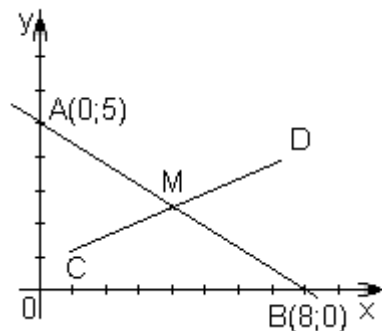
10. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD .



11. Написать уравнения семейства (множества) прямых, угловым коэффициентом которых равен $(-2/7)$.

12. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;5)$ и отсекающей на оси OY , отрезок, равный 3.

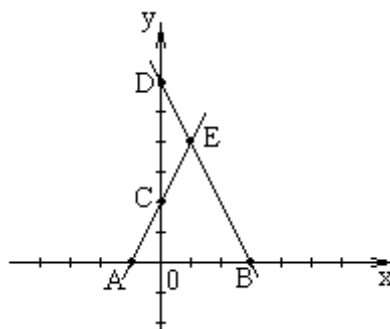
13. Прямые AB и CD пересекаются в точке $M(4;2,5)$ под углом 45° . По данным, указанным на чертеже, написать уравнение прямой CD .



14. Даны уравнения сторон треугольника; $4x - y - 12 = 0$ (AB); $3x - 7y + 41 = 0$ (BC) и $9x + 4y - 2 = 0$ (AC). Написать уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C на сторону AB .

16. По данным, указанным на чертеже, определить острый угол между прямыми AC и BD .

17. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-8; -3)$, $B(6;-1)$, $C(-2; 5)$ равнобедренный.



18. Построить треугольник $A(-1;5)$, $B(3;1)$, $C(10;7)$.

Найти:

1) длину $|AB|$;

2) угол A , уравнения прямых:

- 3) (AB)
- 4) высоты (CH) ,
- 5) медианы (AM) ,
- 6) пересечение высоты (CH) и медианы (AM) ;
- 7) расстояние от точки C до прямой (AB) ;
- 8) площадь.

2. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.

Общее уравнение линии 2-го порядка на плоскости имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Выражение из первых трех слагаемых в (1) называется квадратичной частью (формой) линии 2-го порядка, следующие два – линейной частью (формой), а F – произвольная константа (то есть выражение, не зависящее от переменных x и y). Рассмотрим некоторые важнейшие частные случаи уравнения (1).

Окружность

Окружность – множество точек M плоскости, равноотстоящих от данной точки M_0 , называемой центром; $d(M_0, M)$ – называется радиусом окружности.

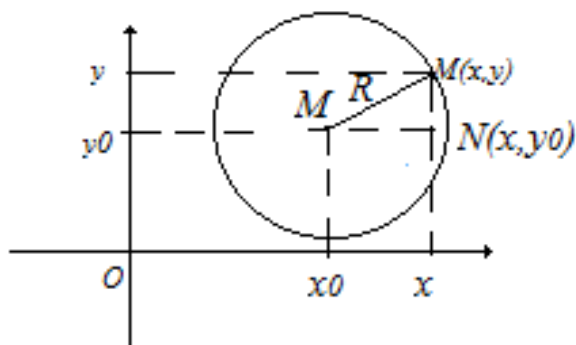


Рис. 2 – Окружность и ее характеристики

Составим уравнение окружности, если даны ее центр $M_0(x_0; y_0)$, и произвольная точка $M(x; y)$, $|MM_0| = R$. По теореме Пифагора для треугольника M_0MN имеем

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

Если $M_0(0; 0)$, то из (2) получается каноническое уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$.

Раскрывая скобки в (2) можно получить вид (1):

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0.$$

То есть $A = C = 1$, $B = 0$, $D = -2x_0$, $E = -2y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

Отметим, что из общего уравнения линии второго порядка можно получить уравнение окружности, если $A = C$ и $B = 0$.

Эллипс

Эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2 , расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$. По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$. Введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, можно получить каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in R. \quad (3)$$

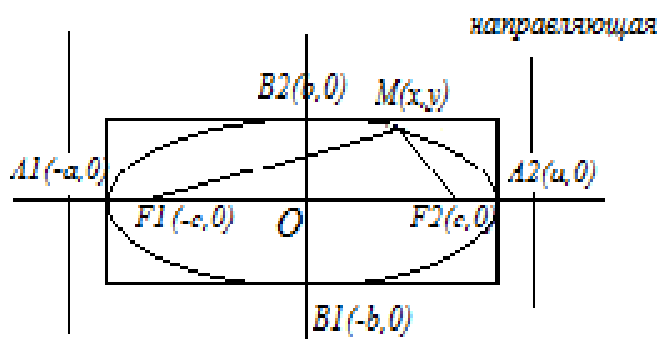


Рис. 3 – Эллипс и его ключевые характеристики

Различают следующие ключевые элементы эллипса (рис. 2): вершины $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, центр $O(0;0)$, фокусы – $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, большая ось A_1A_2 и малая ось B_1B_2 , полуось OA_2 длиной a , полуось OB_2 длиной b , фокусное расстояние $|F_1 F_2| = 2c$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$, директрисы (направляющие) эллипса с уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Величиной эксцентриситета ε можно оценить степень сплюсченности эллипса. Если $a = b = R$, то $\varepsilon = 0$ и из (2.3) получается уравнение окружности. При $b = 0$ $\varepsilon = 1$, и эллипс становится отрезком прямой. Это случаи вырождения эллипса. В общем случае $0 < \varepsilon < 1$.

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных то-

чек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2 , расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов – через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$. Введя обозначение $b^2 = c^2 - a^2$, можно получить каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in R. \quad (5)$$

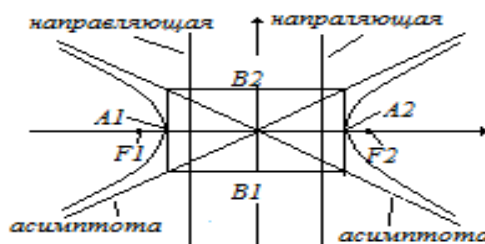


Рис. 4 – Гипербола и ее ключевые характеристики

Уравнение (5) называется каноническим уравнением гиперболы. В формулировке основного геометрического свойства гиперболы нужно слово «сумма» (в случае эллипса) заменить словом «модуль разности», а $c^2 = a^2 + b^2$.

Выделяют следующие элементы гиперболы:

$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – действительные и $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – мнимые вершины (так как гипербола не пересекает ось OY); центр $O(0;0)$, фокусы $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, полуось OA_2 длиной a , полуось OB_2 длиной b , фокусное расстояние

$$|F_1 F_2| = 2c, \text{ эксцентриситет } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1,$$

директрисы (направляющие) гиперболы с уравнениями

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

асимптоты гиперболы – прямые с уравнениями $y = \pm \frac{a}{b}x$.

Привычную из школы форму гиперболы можно получить как частный случай уравнения (5) следующим образом: сделаем линейную замену переменных $x = x' + y'$, $y = x' - y'$ и подставим в уравнение (5) при $a = b = 2$.

Легко проверить, что получим равенство $x'y' = 1$, откуда $y' = \frac{1}{x'}$. Следует отметить, что исходная система координат при указанной замене поворачивается на 45° против часовой стрелки.

Эллипс и гипербола обладают следующим оптическим свойством. Луч света, выпущенный из одного фокуса, отразившись от эллиптического и гиперболического зеркала, вернется в другой фокус.

Между эллипсом и гиперболой, при одинаковых значениях параметров a и b , существует неразрывная связь, суть которой изображена на рисунке 4.

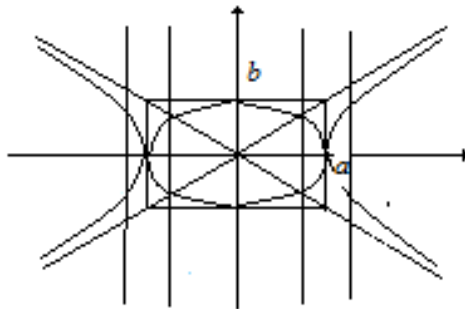


Рис. 5 – Связь эллипса и гиперболы с одинаковыми полуосями

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии, совпадающей с осью OX , ветвями, направленными вправо, имеет вид:

$$y^2 = 2px \quad (6)$$

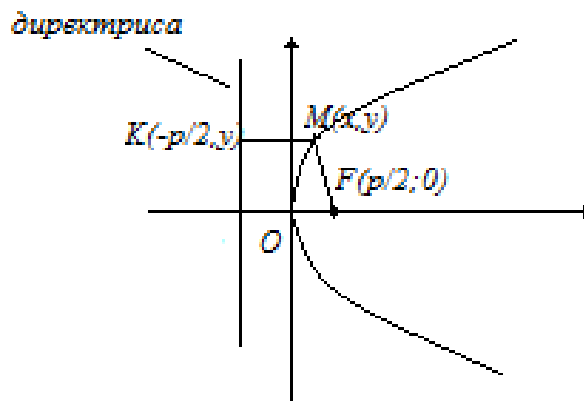


Рис. 6 – Парабола и ее ключевые характеристики

Различают следующие элементы параболы: $O(0;0)$ – вершина, фокус $F(-p/2;0)$, ось параболы (рис. 5) совпадает с осью абсцисс, директриса (направляющая) с уравнением $x = -p/2$.

Существенным отличием параболы от гиперболы является отсутствие у параболы асимптот.

Парабола, кроме того, обладают оптическим свойством, отличающим ее от эллипса и гиперболы. Луч света, выпущенный из фокуса, отражается от параболического зеркала параллельно оси параболы.

Задачи.

1. Определить вид кривой второго порядка и его каноническое уравнение: $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$.

Решение.

Это уравнение можно записать следующим образом, выделяя полный квадрат: $2(x - 1)^2 - 2 + 3(y + 1)^2 - 3 - 7 = 0$. Перейдем к новым переменным по формулам $x - 1 = x'$, $y + 1 = y'$. Тогда в новой системе координат та же самая кривая имеет вид $2x'^2 + 3y'^2 - 12 = 0$.

Разделим это уравнение на 12. $\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{4} = 1$, следовательно, исходное уравнение определяло кривую второго порядка, эллипс и его каноническое уравнение: $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

ОТВЕТ: эллипс, $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

2. Найти каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось равна 4.

Решение:

Из условия $a = 4$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 = 12, \text{ т. о. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

3. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами $2c = 26$, а $\varepsilon = \frac{13}{12}$.

Решение:

$$1) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$2) 2c = 26 \Rightarrow c = 13;$$

$$3) \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{13}{12} = \frac{13}{a} \Rightarrow a = 12;$$

$$4) b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \quad \text{т. о.,}$$

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

4. Составить уравнение диаметра окружности

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 30,$$

перпендикулярного к прямой $5x + 2y - 13 = 0$.

Решение: C – центр окружности, $C(-2, 3)$, $k_{\text{пр}} = -\frac{5}{2}$,

$$k_d = -\frac{1}{k_{\text{пр}}} = \frac{2}{5} \quad y - 3 = \frac{2}{5}(x + 2). \quad 2x - 5y + 19 = 0.$$

5. Определить тип кривой второго порядка по общему уравнению $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$.

Решение:

Соберем слагаемые с переменной x и переменной y .

$$(4x^2 + 32x) + (9y^2 - 54y) + 109 = 0$$

Вынесем за скобки коэффициент при x^2 и y^2 дополним выражение в скобках до полного квадрата

$$4(x^2 + 8x + 4^2 - 4^2) + 9(y^2 - 6y + 3^2 - 3^2) + 109 = 0$$

$$4(x + 4)^2 - 64 + 9(y - 3)^2 - 81 + 109 = 0$$

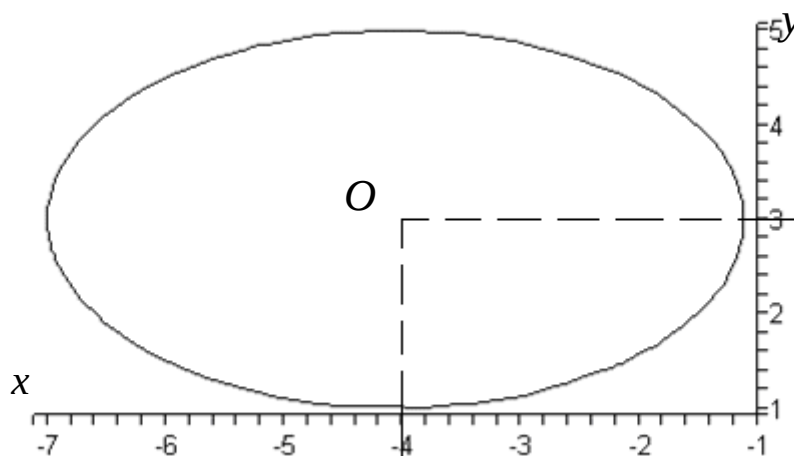
$$4(x + 4)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$$

Поделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{4(x + 4)^2}{36} + \frac{9(y - 3)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O(-4, 3)$ и полуосями $a = 3$, $b = 2$.



6. Построить область решения системы неравенств

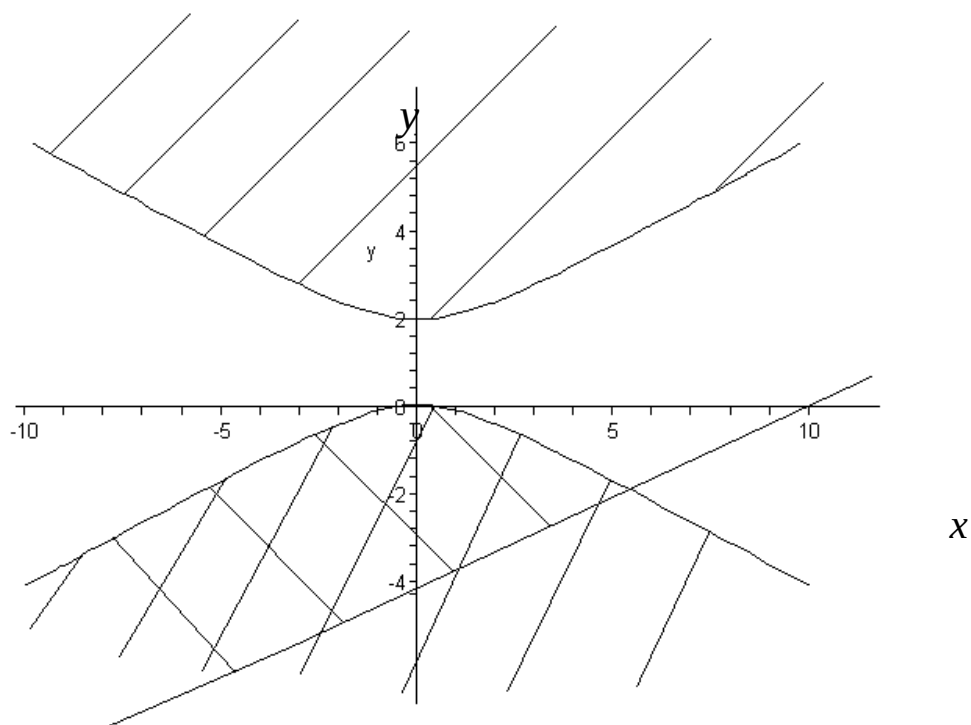
$$\begin{cases} 4y^2 - 8y - x^2 \geq 0, \\ \frac{x}{2} - 5 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Решение:

Заменим знак неравенства на равно и определим тип кривой в первом выражении системы:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 8y - x^2 &= 0 \\ 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - x^2 &= 0 \\ 4(y - 1)^2 - x^2 &= 4 \\ (y - 1)^2 - \frac{x^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Это каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O(0,1)$ и полуосями $a = 2$, $b = 1$. Построим эту линию



Неравенство $4y^2 - 9y - x^2 \geq 0$ определяет множество точек, лежащих внутри гиперболы. Подставим в неравенство координаты точки $A(0,1)$, $4 - 9 \geq 0 \Rightarrow -5 \geq 0$ – это неверно. Следовательно, неравенству удовлетворяют точки, лежащие по другую сторону от линии относительно точки A . $y = 0$, $y = \frac{x}{2} - 5$ – это прямые линии. Неравенство $y \leq 0$ определяет множество точек, лежащих ниже прямой $y = 0$, $y \geq \frac{x}{2} - 5$ определяет множество точек, лежащих выше прямой $y = \frac{x}{2} - 5$. Область, обозначенная двойной штриховкой является решением системы неравенств.

7. Даны точки $O(0; 0)$, $P_1(-C; 0)$, $F_2(-C; 0)$, $M(0; y_0)$. Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M . Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках F_1 ; F_2 ; M . Уравнение эллипса с фокусами в точках F_1 , F_2 и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках F_1 , F_2 и мнимой осью $[OM]$. Если:

$$C = 7 \quad y_0 = -6$$

$$C = 6 \quad y_0 = 5$$

$$C = 5 \quad y_0 = 4$$

$$C = 4 \quad y_0 = -3$$

$$C = 3 \quad y_0 = 2.$$

8. Написать уравнение линии центров двух окружностей $x^2 + y^2 - 6x = 0$ и $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12$.

9. Установите, какие линии определяются уравнениями и схематично их постройте:

$$\begin{aligned}4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 &= 0 \\16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 &= 0 \\x &= -\frac{1}{4}y^2 + y \\y &= -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7\end{aligned}$$

10. Найдите координаты фокуса параболы по координатам ее вершины $A(6, -3)$ и уравнению ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$.

11. На гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ найти точку, ближайшую к точке $(3; 0)$.

12. Даны точки $O(0; 0)$, $P(-C; 0)$, $F_2(-C; 0)$, $M(0; y_0)$.

Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M . Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках F_1 , F_2 ; M . Уравнение эллипса с фокусами в точках F_1 , F_2 ; и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках F_1 , F_2 и мнимой осью $[OM]$. Если:

- а) $C = 6$ $y_0 = 4$
- б) $C = 4$ $y_0 = -2$
- в) $C = 6$ $y_0 = 2$
- г) $C = 3$ $y_0 = -1$.

13. Составить уравнение диаметра окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 30$, перпендикулярного к прямой $5x - 2y - 13 = 0$.

14. Составить уравнение эллипса, если $2a = 30$, $\varepsilon' = 3/5$.

15. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ взята точка с абсциссой -8 и положительной ординатой. Найти фокальные радиусы до этой точки.

16. Даны точки $O(0; 0)$, $P_1(-C; 0)$, $F_2(-C; 0)$, $M(0; y_0)$.

Составить:

1. Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M . Сделать эскиз.

2. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках F_1 , F_2 ; M . Сделать эскизы.

3. Уравнение эллипса с фокусами в точках F_1 , F_2 и малой осью $[OM]$. Сделать эскиз.

4. Уравнение гиперболы с фокусами в точках F_1 , F_2 и мнимой осью $[OM]$. Сделать эскиз.

- а) $C = 7$ $y_0 = -6$; б) $C = 6$ $y_0 = 5$.

17. Составить уравнение эллипса, если $2a = 30$, $\varepsilon' = 3/5$.
18. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ найти точки, абсцисса которых равна 10.
19. Составить уравнение прямых, проходящих через фокусы эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ перпендикулярно его большой оси.
20. Найти координаты центра и длину диаметра окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
21. На эллипсе $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точки, с абсциссой, равной -3 .
22. На гиперболе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ найти точки, абсцисса которых равна 10.
23. Составить уравнение эллипса, если большая ось равна 20 и $\varepsilon' = 0,8$.
24. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 - 6x - 14y - 6 = 0$ и $x^2 + y^2 - 24x + 2y - 24 = 0$.
25. Написать уравнение линии центров двух окружностей $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.
27. Составить уравнение гиперболы, если $2a = 30$, $\varepsilon' = 5/3$.
28. Составить уравнение прямых, проходящих через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ перпендикулярно его большой оси.
29. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка с абсциссой, равной 6 и положительной ординатой. Найти расстояние от нее до правого фокуса.
30. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $x^2 + 16y^2 = 64$.
31. Составить уравнение гиперболы, если ее действительной осью является ось OX , асимптоты имеют уравнения $5x - 4y = 0$ и $5x + 4y = 0$, расстояние между вершинами равно 16.
32. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ перпендикулярно к плоскости $3x - y - 4z = 0$.

Самостоятельная работа

1. Окружность с центром в точке $F(3;-1)$ проходит через середину отрезка, соединяющего точки $A(5;7)$ и $B(1;5)$. Записать ее уравнение.

2. Записать уравнение параболы, симметричной относительно оси OY и проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

3. Составить уравнение гиперболы, зная фокусы $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$ и точку $C(4\sqrt{2}; 3)$ на этой гиперболе.

4. Вычислить эксцентриситет эллипса, у которого малая ось равна расстоянию между фокусами.

5. Написать уравнение параболы, зная, что вершина ее лежит в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси OY , а параметр P равен величине действительной оси гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$ и $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

7. В эллипсе $x^2 + 4y^2 = 36$ вычислить длину хорды, проходящей через фокус эллипса перпендикулярно к его большой оси.

8. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, а вершинами на оси OX и проходящей через две точки $A(24; 5\sqrt{5})$, $B(0;5)$.

9. $y^2 = -12x$. Назвать линию, начертить график. Записать координаты фокуса и уравнение директрисы.

10. Найдите точки пересечения линий $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ и $x - 5y = 0$. Постройте чертеж к этой задаче, назовите линии.

11. Пройдет ли окружность с центром в точке $A(-1;3)$ и радиусом $R = 3,5$ через начало координат?

12. Вершины эллипса находятся в точках $(-6;0)$, $(6;0)$, $(0; -3)$, $(0;3)$. Записать уравнение эллипса. Найти координаты его фокусов эксцентриситет.

13. Определить расстояние от точки $M(3;6)$ до фокуса параболы $y^2 = 12x$.

14. Найти уравнение окружности, для которой центры окружностей $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$ являются концами диаметра.

15. Большая ось эллипса равна 10, фокусы его лежат в точках $(\pm 4; 0)$. Записать уравнение эллипса, сделать эскиз.

16. Написать уравнение прямых, проходящих через точку $(-2; 6)$ параллельно асимптотам гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

18. Вычислить расстояние от фокуса параболы $y^2 = 4x$ до точек пересечения ее с окружностью $x^2 + y^2 = 12$.

19. Окружность с центром в начале координат проходит через точку пересечения прямых $5x - 4y + 5 = 0$ и $2x + y - 11 = 0$. Записать уравнение этой окружности.

20. Записать уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точки $A(0; 7)$ и $B(8; 0)$. Найти координаты фокусов.

21. Вычислить длину отрезка прямой $y = -5\sqrt{3}$, заключенного между ветвями гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

22. Ось параболы направлена по оси координат, вершина ее совпадает с началом координат, а фокус удален от директрисы на 8 единиц длины. Записать уравнение параболы.

23. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $3x - 2y + 12 = 0$, заключенный между координатными осями.

24. Назвать линии $x^2 + 4y^2 = 16$. Вычертить эскиз. Проверить аналитически, какие из точек $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(0; 5)$, $D\left(3; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ и $E\left(2; -\sqrt{3}\right)$ лежат на этой линии.

25. Найти угол между асимптотами гиперболы $x^2 - 2y^2 = 2$.

26. Является данное уравнение $x^2 + y^2 - 14x + 12y - 204 = 0$ уравнением окружности? Если да, то назовите координаты центра и длину радиуса.

27. Проходит ли эллипс с фокусами $(\pm 6; 0)$ и большой осью равной 20 через точки $M(-3; 4)$ и $N(-5; 4\sqrt{3})$?

28. Составить уравнение окружности, которая проходит через точку $(5; 3)$ и центр, который лежит на пересечении прямых $5x - 3y - 13 = 0$ и $x + 4y + 2 = 0$.

29. Фокусы эллипса лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Разность осей равна 6, их отношение равно 2. Записать уравнение эллипса.

30. Назвать линию $4x^2 - 25y^2 = 100$ и выяснить проходит ли она через точки $A(5; 0)$, $B(5\sqrt{2}; -2)$, $C(2; -3)$.

31. Точки $M_1 (2; -5)$ и $M_2 (-2; 1)$ являются концами одного из диаметров окружности. Составить ее уравнение.

32. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 6y^2 = 24$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

33. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известна точка $M (14; -2)$ на гиперболе и уравнения асимптот $y = \pm 2x$.

34. Составить уравнение параболы, симметричной оси OX , параметр которой равен радиусу окружности $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

35. $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 52 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Определить вид кривых второго порядка, найти центры O_1 и O_2 , составить уравнение линии центров, вычислить расстояние между центрами.

36. Найти точки пересечения линий $y^2 + 4x + 8 = 0$ и $y = x + 5$.

37. $x^2 - 4y^2 = 16$. Найти длины осей, фокусы, эксцентриситет. Назвать линию, начертить.

38. Составить уравнение эллипса, фокусы которого $F_1(-6;0)$, $F_2(6;0)$ и $\varepsilon' = 12/13$.

39. Во сколько раз радиус одной окружности больше радиуса другой, если их уравнения $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ и $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$?

40. Через фокусы эллипса $5x^2 + 9y^2 = 45$ проведены прямые, перпендикулярные оси OX . Найдите точки пересечения этих прямых с эллипсом.

41. На параболе $x^2 = -6y$ найдите точки с ординатой (-4) . Начертите параболу, эти точки, директрису.

42. Составьте уравнение гиперболы, если $2c = 10$, $\varepsilon' = 2,5$.

43. Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с центром окружности $x^2 + y^2 - 10x + 20y + 61 = 0$ и радиус которой равен 10.

44. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого находятся на оси абсцисс на расстоянии 6 см и $\varepsilon' = 0,6$.

45. Найти точки пересечения линий $3x - 2y + 6 = 0$ и $y^2 = -6x$.

46. Фокусы эллипса находятся на оси ординат, фокусное расстояние равно 10. Составить уравнение эллипса с большой осью, равной 16.

47. Определить какие из точек $A1 (-2;3)$, $A2 (2;2)$, $A3 (2;-4)$, $A4 (-1;3)$, принадлежат линии $8x^2 - 5y^2 = 12$. Назвать линию, определить координаты вершин.

48. Окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C (6;-8)$. Составить уравнение окружности.

49. Составить каноническое уравнение параболы, уравнение директрисы которой $y = 8$.

50. Составить каноническое уравнение параболы, уравнение директрисы которой $x = 4$.

51. Найти координаты центра, радиус и точки пересечения с осями координат окружности $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

52. На линии $4x^2 + y^2 = 16$ найти точки с абсциссой, равной 1. Назвать линию, начертить.

53. Фокусное расстояние гиперболы равно 10, а мнимая ось 8. Составить каноническое уравнение гиперболы.

54. На линии $6x^2 + y^2 = 12$ найти точки с ординатой, равной (-3) . Назвать линию, вычислить полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет.

55. Найти центр, радиус окружности по ее уравнению $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 51 = 0$.

56. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известна ее точка $M (4;-3)$ эксцентриситет $\sqrt{7}/2$.

57. Найти точки пересечения линии $x^2 + 3y = 0$ с прямой $3x - y = 0$. Назвать линию. Сделать чертеж к задаче.

58. Определить тип кривой. Полученную кривую изобразить на чертеже.

58.1 $16x^2 - 96x + 25y^2 - 100y - 156 = 0$.

58.2 $9x^2 + 36x - 16y^2 - 128y - 76 = 0$.

58.3 $9x^2 - 72x - 16y^2 + 64y - 64 = 0$.

58.4 $144x^2 + 1440x + 169y^2 + 2028y - 14652 = 0$.

58.5 $16x^2 + 128x - 9y^2 - 36y + 76 = 0$.

58.6 $9x^2 + 72x + 25y^2 + 100y + 19 = 0$.

58.7 $16x^2 + 192x - 9y^2 + 72y + 1008 = 0$.

58.8 $16x^2 - 192x - 9y^2 + 72y - 144 = 0$.

59. Построить область решения системы неравенств.

$$59.1 \quad a) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4y \\ y - 2x \leq 2 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y^2 < \frac{9}{7}x \\ 3x^2 - 18x - 4y^2 < -15 \end{cases}$$

$$59.2 \quad a) \quad \begin{cases} x + y \leq 6 \\ y \leq x \\ xy \geq 5 \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} 4x^2 + 5y^2 \leq 10y + 15 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$59.3 \quad a) \quad \begin{cases} x^2 - y \leq 1 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} 3y^2 - x^2 \geq 3 \\ x + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$59.4 \quad a) \quad \begin{cases} 4x^2 + y^2 \leq 4y \\ 3y - 2x \leq 6 \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 10x \\ 4x^2 - 20x \leq 24y \end{cases}$$

60. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую:

1) $x^2 - y + 4x + 2 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

3) $x^2 - y^2 - 6x - 7 = 0$

4) $2x + y^2 + 8y + 10 = 0$

5) $9x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$

61. Выучить уравнения кривых. Построить кривые:

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$

б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1,$

в) $x^2 + y^2 = 1,$

г) $4x^2 - 9y^2 = 0;$

д) $9x^2 + 4y^2 = 0,$

е) $x^2 = y,$

ж) $x^2 = -2y,$

з) $y^2 = 3x,$

и) $y^2 = -4x$

3. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами

Полярная система координат задаётся точкой O , называемой полюсом, лучом Op , называемым полярной осью, и единичным вектором $\vec{e}$ того же направления, что и луч Op .

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: её расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью и отсчитываемым в положительном направлении.

Числа r и φ называются полярными координатами точки M : r называют полярным радиусом, φ -полярным углом.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значения φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ , и наоборот.

Если совместить полюс O с началом координат системы Ox и полярную ось – с положительной полуосью Ox , то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2)$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

Задачи.

1. Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$.

Решение.

Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (1) находим

$$x = 2 \cos \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

$$y = 2 \sin \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

Итак, $M(-1; -\sqrt{3})$.

2. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

Решение:

Имеем $x = -\sqrt{3}, y = -1$. По формулам (2) находим

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \operatorname{tg} \phi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi < \phi \leq \pi$, получаем $\phi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$.

3. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $A\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(3; \frac{3}{4}\pi\right)$. Найти его площадь.

Решение.

Найдем длину стороны по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$x_1 = r_1 \cos \phi_1 = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$y_1 = r_1 \sin \phi_1 = 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

Аналогично,

$$x_2 = r_2 \cos \phi_2 = 3 \cdot \cos \frac{3}{4}\pi = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3 \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_2 = r_2 \sin \phi_2 = 3 \cdot \sin \frac{3}{4}\pi = 3 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом,

$$d = \sqrt{\left(-3 \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(3 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\sqrt{2})\right)^2} = 5.$$

Следовательно, площадь квадрата будет равна 25 кв. ед.

4. Построить кривую, заданную уравнением $r = 6 \cos \phi$.

Решение.

Если точка $M(r; \phi)$ принадлежит заданной кривой, то для этой точки $\cos \phi = \frac{1}{6}r \geq 0$ и, следовательно, вся кривая расположена в секторе $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Для того, чтобы построить кривую, перейдем в её уравнении к прямоугольным координатам. Умножим обе части

уравнения $r = 6 \cos \varphi$ на r , получаем $r^2 = 6 \cos \varphi$. Откуда на основании формул (2) получаем $x^2 + y^2 = 6x$, или $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. Таким образом, заданная кривая – окружность с центром в точке $M(3;0)$ и радиуса 3.

5. Записать уравнение линии в полярных координатах.

Решение.

Воспользовавшись формулами (1), подставим в данное уравнение вместо x и y их выражения.

Получим $(r^2 \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \varphi$, откуда уравнение линии примет вид $r^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$.

6. В полярной системе координат точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ совпадает с полюсом. Зная вершины $A\left(3; -\frac{4}{9}\pi\right)$ и $B\left(5; -\frac{3}{9}\pi\right)$, найти другие вершины параллелограмма.

7. Как расположены точки, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = 2$;

б) $\varphi = -\frac{\pi}{9}$;

в) $\varphi = 0$.

8. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8; \frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(3; \frac{7}{6}\pi\right)$. Доказать, что он равнобедренный.

Самостоятельная работа

1. Найти полярные координаты точек A, B, C, D, E для которых известны прямоугольные координаты: $A(-3;3)$, $B(0;-5)$, $C(-2;-2)$, $D(-4;0)$, $E(2\sqrt{3};2)$.

2. Найти полярные координаты точек, симметричные точкам $\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1; -\frac{\pi}{3}\right)$, $(3;0)$ относительно

а) полюса,

б) полярной оси.

3. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Найти его площадь.

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых (прямоугольных) координатах.

а) $r = 6 \cos \varphi$;

б) $r = 2 \sin 3 \varphi$;

в) $r = 3(1 - \cos \varphi)$.

5. Составить в полярных координатах уравнение окружности радиусом $R=4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс.

6. Построить линию, записав её уравнение в полярных координатах $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

4. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности

Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость в пространстве

Теорию плоскости в трехмерном пространстве можно построить по аналогии с прямой в R^2 .

Простейшим видом уравнения $F(x; y; z) = 0$, содержащим все независимые переменные, является линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

соответствующее плоскости P в R^3 . Вектор $n = (A; B; C)$ ортогонален (перпендикулярен) P .

Имеет место следующая основная теорема о плоскости в R^3 .

Теорема. Между множеством всех плоскостей в R^3 и множеством всех уравнений (1) первой степени с тремя неизвестными существует взаимно однозначное соответствие.

Доказательство теоремы аналогично доказательству основной теоремы о прямой в R^2 . Когда плоскость P зафиксирована нормальным вектором $n = (A; B; C)$ и точкой $M_0(x_0; y_0; z_0) \in R^3$, то получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1')$$

Уравнение (1) называют общим уравнением плоскости, а уравнение (1') – уравнением плоскости, проходящей через заданную точку в R^3 или, по аналогии с уравнением пучка плоскостей.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения плоскости.

1. Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$ и $O(0,0) \in P$.

2. Если $A=0$, то $n=(0,B,C) \perp P$ и $P \parallel Oх$.

3. Если $A=0, D=0$, то (комбинируем 1 и 2) ось Ox принадлежит P .
4. Если $A=0, B=0$, то $n=(0,0,C) \perp P$ и $P \parallel$ плоскости xOy .
5. Если $A=0, B=0, D=0$, то (комбинируем 1 и 4) P совпадает с плоскостью xOy .

Другие случаи ($B=0, C=0$ и др.) рассматриваются аналогично.

Несложно получить и другие формы уравнения плоскости в R^3 .

Пусть плоскость P отсекает от осей координат Ox, Oy, Oz ненулевые отрезки длиной a, b, c соответственно, то есть проходит через точки $M1(a;0;0), M2(0;b;0), M3(0;0;c)$. Поскольку в этом случае $D \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения (1) на D , имеем уравнение $-\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1$.

Так как $M1(a;0;0) \in P$, то, подставляя в последнее равенство координаты точки $M1$, получим $\frac{a}{\frac{D}{A}} = 1$, откуда $a = -\frac{D}{A}$. Аналогично $b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$, в результате чего получаем уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2)$$

Разделив уравнение (1) на выражение $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0$, получим по аналогии нормальное уравнение плоскости

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + p = 0, \quad (3)$$

где углы α, β, γ – это углы между вектором n и соответствующими

осями координат, $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$

$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – направляющие косинусы вектора $n(A;B;C)$, а

значение $|p| = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – расстояние от плоскости до начала координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные в R^3 точки $M1(x_1;y_1;z_1), M2(x_2;y_2;z_2), M3(x_3;y_3;z_3)$, можно определить с помощью детерминанта:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3')$$

обобщающее уравнение прямой в R^2 , проходящей через две заданные точки $M1(x_1;y_1), M2(x_2;y_2)$, которое можно задать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3'')$$

Прямая в пространстве

Все сказанное в начале данной главы, в особенности, относится к случаю прямой в пространстве. Основным аналитическим отличием от случая R^2 является тот факт, что прямую в R^3 невозможно задать единственным линейным уравнением, а требуется использование, как минимум, двух уравнений.

Существует два основных метода задания прямой в пространстве – 1) с помощью стандартной системы линейных уравнений и 2) с помощью канонической системы. Следует сказать, что, несмотря на неэквивалентность указанных методов, каждый из них позволяет получить важную (трудно визуализируемую) информацию о прямой в R^3 .

Прямая в пространстве может быть однозначно задана в виде системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными, то есть как пересечение плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Учитывая недоопределенность системы (4), она либо не имеет решений (когда плоскости в R^3 , описываемые уравнениями системы, параллельны), либо имеет бесконечно много решений, представляющих собой множество точек, образующих данную прямую в R^3 .

Прямая в пространстве может быть однозначно задана в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (5)$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка R^3 , через которую проходит прямая, $a(l; m; n)$ – направляющий вектор прямой. Иначе говоря, прямая в R^3 может быть задана единственной, принадлежащей ей, точкой и вектором, указывающим направление «движения» из этой точки. Система (5) называется каноническим уравнением прямой в пространстве и обобщает форму прямой в R^2 , проходящей через заданную точку параллельно заданному (направляющему) вектору.

Рассмотрим переход от формы (4) к форме (5) с помощью следующего алгоритма:

Зафиксируем $x = x_0$ и решим систему (4) как систему с двумя неизвестными.

Если система совместна, то любое ее решение y_0, z_0 , добавленное к x_0 , даст координаты точки M_0 , через которую проходит пря-

мая. Если система окажется несовместной, то фиксируется другая переменная.

Направляющий вектор $a(l;m;n)$ есть векторное произведение нормальных векторов к плоскостям, определяющих систему (4), то есть $n_1(A_1;B_1;C_1)$, $n_2(A_2;B_2;C_2)$. Координаты вектор $a(l;m;n)$ можно найти из определителя:

$$a = n_1 \cdot n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} k,$$

то есть

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Переход от формы (5) к форме (4) можно осуществить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m(x - x_0) = l(y - y_0) \\ n(y - y_0) = m(z - z_0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m(x - x_0) = l(y - y_0) \\ n(y - y_0) = m(z - z_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx - ly + 0 \cdot z - (mx_0 + ly_0) = 0 \\ 0 \cdot x + ny - mz - (ny_0 + mz_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

то есть каноническое уравнение (5) преобразовалось в систему вида (4).

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, через которую проходит прямая в R^3 в направлении вектора $a(l;m;n)$, тогда любая точка $M(x_0+lt; y_0+mt; z_0+nt)$, где t – параметр, принадлежит данной прямой в R^3 . Поэтому целесообразно иметь ввиду еще одну форму задания прямой в R^3 – параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (7)$$

а также соответствующее векторное уравнение прямой:

$$r = r_0 + at, \quad (7')$$

где r – радиус-вектор точки M ; r_0 – радиус-вектор точки M_0 .

Формы задания прямой в виде (7) и (7') аналогичны соответствующим формам задания прямой в R^2 и обобщают их на случай трех переменных. Существует еще одна аналогия с R^2 – уравнение

прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (8)$$

Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой в R^3

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in R^3$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ (P). Расстояние от M_0 до плоскости P вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (9)$$

Доказательство данного факта аналогично доказательству формулы расстояния от точки до прямой в R^2 .

Если плоскость P задана в виде нормального уравнения (3), то расстояние до точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можно вычислить по формуле:

$$\rho(M_0, P) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma + p|. \quad (9')$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой L , заданной в каноническом виде $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ (формула (5), можно вычислить по формуле:

$$\rho(M_1, L) = \frac{|r \times q|}{|q|}, \quad (10)$$

где вектора $r(x_0-x_1; y_0-y_1; z_0-z_1)$, $q(l; m; n)$.

В развернутом формате (10) принимает следующий вид:

$$\rho(M_1, L) = \frac{\sqrt{\left| \frac{y_0-y_1}{m} - \frac{z_0-z_1}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_0-z_1}{n} - \frac{x_0-x_1}{l} \right|^2 + \left| \frac{x_0-x_1}{l} - \frac{y_0-y_1}{m} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Аналитические соотношения между плоскостями и прямыми в R^3

Пусть две плоскости в R^3 заданы в общем виде $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тогда условие параллельности двух плоскостей $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, а условие перпендикулярности — $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (перпендикулярность нормальных векторов).

Угол между заданными плоскостями вычисляется как угол φ между их нормальными векторами:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (11)$$

Пусть две прямые в R^3 заданы в каноническом виде:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух приведенных выше прямых определяются соответствующими условиями на их направляющие векторы – перпендикулярность прямых: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$, параллельность прямых: $l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2$, угол φ между прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (12)$$

Если заданы прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ (L) и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ (P), то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (13)$$

Из формулы (13) получается условие параллельности прямой и плоскости в R^3 : $Al + Bm + Cn = 0$ ($\sin \varphi = 0$). Условие перпендикулярности прямой и плоскости в R^3 отражает факт параллельности направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости: $A/l = B/m = C/n$. Отметим, что прямая L лежит в плоскости P при выполнении двух условий:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \quad (14)$$

выражающих, одновременно, условия параллельности L и P и принадлежности точки $(x_0; y_0; z_0)$ плоскости P .

Уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно двум заданным плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и прямую

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}: \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум прямым с направляющими векторами (l_1, m_1, n_1) , (l_2, m_2, n_2) :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ перпендикулярно заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

Точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ расположены по одну сторону (по разные стороны) от плоскости

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 &\Leftrightarrow \\ \text{sign}(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1) \cdot \text{sign}(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2) &> 0 \\ &(< 0), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\text{sign}(Z)$ означает знак выражения Z .

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}. \quad (21)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ совпадает с уравнением пучка плоскостей: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Уравнение прямой, проходящей перпендикулярно прямой L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ через точку } M_0(x_0; y_0; z_0) \in L_1: \quad \begin{cases} l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}, \quad (22)$$

Уравнение общего перпендикуляра L к прямым

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} x - x_1 \quad y - y_1 \quad z - z_1 \\ l_1 \quad m_1 \quad n_1 \end{array} \\ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{array} \right| \end{array} \end{array} \right\} = 0 \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} x - x_2 \quad y - y_2 \quad z - z_2 \\ l_2 \quad m_2 \quad n_2 \end{array} \\ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{array} \right| \end{array} \end{array} \right\} = 0 \quad (4)$$

Чтобы определить точки пересечения общего перпендикуляра с первой и второй прямыми (23), надо в уравнение плоскости (третье уравнение (23)) подставить параметрическую форму уравнения первой прямой (23), то есть $x - x_1 = l_1 t$, $y - y_1 = m_1 t$, $z - z_1 = n_1 t$ и решить полученное уравнение относительно параметра t . После получения решения t' координаты точки K_1 пересечения прямых L и первой прямой (23) будут вычислены по формулам $x = x_1 + l_1 t'$, $y = y_1 + m_1 t'$, $z = z_1 + n_1 t'$. Прделаав аналогичные операции с вторым и четвертым уравнениями (23), найдем точку K_2 пересечения прямых L и второй прямой (23). Очевидно, расстояние $|K_1 K_2|$ будет расстоянием и между первой и второй прямыми (23).

Прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ пересекает плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ в точке T с координатами (x_T, y_T, z_T) , вычисляемыми по следующему алгоритму:

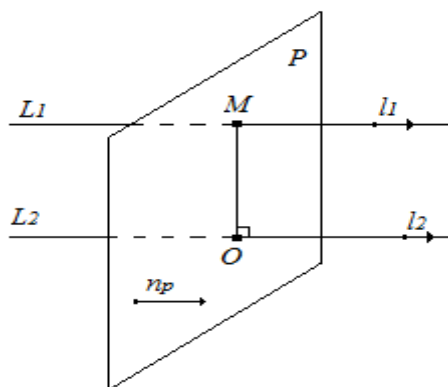
$$\lambda = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn};$$

$$x_T = x_0 + l\lambda, y_T = y_0 + m\lambda, z_T = z_0 + n\lambda, \quad (24)$$

Задачи.

1. Доказать, что заданные в R_3 прямые L_1 и L_2 параллельны, и найти расстояние между ними (см. рисунок), если:

$$L_1: \begin{cases} x + y - \frac{1}{2}z - 5 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}, \quad L_2: \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -t + 5 \\ z = 4t + 9 \end{cases}$$



Решение:

Алгоритм решения задачи

Найдем направляющий вектор l_1 прямой L_1 из условия $l_1 = n_1 \times n_2$, где $n_1(1;1;-1/2)$ и $n_2(1;-1;-1)$ – нормальные векторы плоскостей, порождающих L_1 . Если $l_1 \parallel l_2(3;-1;4)$, то переходим к п.2.

Выберем произвольную точку $M \in L_1$.

Проведём плоскость P , содержащую точку M и перпендикулярную L_2 , то есть нормальный вектор n_P плоскости P должен быть коллинеарен вектору l_2 .

Найдем точку $O = P \cap L_2$.

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 найдём как расстояние между точками M и O .

$$1. s_1 = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,5i + 0,5j - 2k, \text{ то есть}$$

вектор $s_1(-1,5; 0,5; -2) = -0,51 \cdot 2 = -0,5(3; -1; 4)$, то есть $s_1 \parallel l_2$, следовательно, прямые L_1 и L_2 параллельны.

$$2. \text{ Пусть для } L_1 x = 0, \text{ тогда } \begin{cases} y - \frac{1}{2}z - 5 = 0 \\ -y - z - 22 = 0 \end{cases},$$

откуда $z = -18, y = -4$, то есть $M(0; -4; -18) \in L_1$.

3. Воспользуемся далее уравнением плоскости в форме: $A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$.

Тогда получим $3(x - 0) + (-1)(y + 4) + 4(z + 18) = 0$ или $3x - y + 4z + 68 = 0$.

Таким образом, найдено уравнение плоскости P , перпендикулярной обеим прямым L_1 и L_2 .

4. Найдем точку O . Так как O одновременно принадлежит и P , и L_2 , то решим систему:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z + 68 = 0 \\ x = 3t - 7 \\ y = -t + 5 \\ z = 4t + 9, \end{cases} \quad \text{подставляя уравнения 2-4 системы в 1-е.}$$

Тогда получим $O(-16; 8; -3)$.

5.

$$\begin{aligned} \rho(L_1, L_2) &= \rho(M, O) = \\ &= \sqrt{(-16 - 0)^2 + (8 + 4)^2 + (-3 + 18)^2} = 25. \end{aligned}$$

2. Даны четыре точки в трехмерном пространстве A, B, C, D . Показать, что они могут являться вершинами пирамиды.

Найти:

- а) объем пирамиды;
- б) уравнение плоскости ABC ;
- в) длину ребра AD ;
- г) угол между ребром AD и гранью ABC ;
- д) площадь грани ABD .

Решение:

Пусть A_1, B_1, C_1 есть проекции точек A, B, C на плоскость x_0y .

Найти:

- е) длину высоты A_1K ;
- ж) угол между высотой A_1K и медианой A_1N треугольника $A_1B_1C_1$.

Даны четыре точки $A(1;0;2), B(2;-3;4), C(0;1;-1), D(3;0;-2)$. Покажем, что эти точки могут являться вершинами пирамиды.

Составим три вектора $\vec{AB} = \{1; -3; 2\}, \vec{AC} = \{-1; 1; -3\}, \vec{AD} = \{2; 0; -4\}$. Проверим условие компланарности этих трех векторов. Составим определитель из координат векторов

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-4 + 0) + 3 \cdot (4 + 2 \cdot 3) + 2 \cdot (0 - 2) = \\ &= -4 + 30 - 4 = 22. \end{aligned}$$

Так как определитель отличен от нуля, то векторы не лежат в одной плоскости и точки A, B, C, D могут являться вершинами пирамиды.

Найдем

- а) объем этой пирамиды.

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

Найдем

б) уравнение плоскости ABC . Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2-1 & -3-0 & 4-2 \\ 0-1 & 1-0 & -1-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(9-2) - y(-3+2) + (z-2)(1-3) = 0$$

$$7(x-1) + y - 2(z-2) = 0, 7x - 8 + y - 2z + 4 = 0,$$

$$7x + y - 2z - 3 = 0.$$

Найдем

в) длину ребра AD .

$$|AD| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Найдем

г) угол между ребром AB и гранью ABC .

Угол α между ребром AD и гранью ABC находится через угол ϕ между вектором $\vec{AD}$ и вектором $\vec{N}$, перпендикулярным плоскости ABC . $\phi = 90^\circ - \alpha$.

Вектор $\vec{N} = \{7; 1; -2\}$ перпендикулярен ABC .

$$\cos \phi = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{AD} \cdot \vec{N}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{2 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{14 + 8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{54}} \approx \frac{22}{32,862} \approx 0,67 \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = 0,67 \Rightarrow \alpha = 42,025^\circ.$$

Найдем

д) площадь грани ABD . Площадь треугольника ABD равна $\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AD}|$. Векторное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$

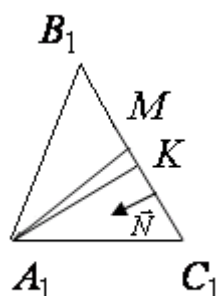
$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(12 - 0) - \vec{j}(-4 - 4) + \vec{k}(0 + 3 \cdot 2) = 12\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 64 + 36} \approx \frac{1}{2} \cdot 15,6 \approx 7,81.$$

$A_1(1;0)$, $B_1(2;-3)$, $C_1(0;1)$ – проекции точек A , B , C , на плоскость XOY .

Найдем

е) длину высоты A_1K .



Напишем уравнение прямой B_1C_1 и найдем расстояние от точки A_1 до прямой B_1C_1 .

$$\begin{aligned} B_1C_1: \frac{x-2}{0-2} &= \frac{y+3}{1+3} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{4} \\ 2(x-2) &= -(y+3), \quad 2x-4 = -y-3 \\ B_1C_1: 2x+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$|A_1K| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Найдем

ж) угол между высотой A_1K и медианой A_1M треугольника $A_1B_1C_1$.

Вектор $A_1\vec{K}$ коллинеарен вектору $\vec{N} = \{2; 1\}$, перпендикулярному прямой B_1C_1 . Найдем координаты точки M , которая является серединой B_1C_1 .

$$x_M = \frac{x_{B_1} + x_{C_1}}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_{B_1} + y_{C_1}}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Найдем координаты вектора

$$A_1\vec{M} = \{1-1, -1-0\} \Rightarrow A_1M = \{0, -1\}.$$

Угол α_1 между высотой A_1K и медианой A_1M будем определять через векторы $\vec{N} = \{2; 1\}$ и $A_1M = \{0; -1\}$.

$$\cos \alpha_1 \approx -0,447, \alpha_1 \approx 116^\circ.$$

Прямые A_1K и A_1M образуют между собой два угла, которые в сумме составляют 180° . Так как угол между высотой и медианой не может быть больше 90° , то $\alpha_1 = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$.

3. Написать канонические уравнения прямой l в пространстве по заданным общим уравнениям

$$l: \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0, \\ x + y - 5z + 6 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Найдем координаты точки, которая лежит на прямой l . Придадим переменной x произвольное значение, например $x = 0$. Тогда, подставив $x = 0$ в уравнения прямой l , получим систему линейных уравнений относительно y, z .

$$\begin{cases} 2y + z = -3, \\ y - 5z = -6. \end{cases}$$

Решим систему: $y = 5z - 6$

$$2(5z - 6) + z = -3, 10z - 12 + z = -3, 11z = 9, z = \frac{9}{11}.$$

$$y = 5 \cdot \frac{9}{11} - 6 = \frac{45}{11} - 6 = -\frac{21}{11}.$$

Следовательно, точка $M\left(0, \frac{9}{11}, -\frac{21}{11}\right) \in l$.

Найдем теперь вектор $\vec{S}$, параллельный прямой l . $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, где $\vec{N}_1 = \{1; 2; 1\}$, $\vec{N}_2 = \{1; 1; -5\}$ векторы нормали для плоскостей, в пересечении которых получается прямая l .

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$$

Запишем теперь канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - 0}{-11} = \frac{y - \frac{9}{11}}{6} = \frac{z - \left(-\frac{21}{11}\right)}{-1}$$

$$\frac{x}{-11} = \frac{11y - 9}{66} = \frac{11z + 21}{-11}.$$

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости. Прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$.

Решение:

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 2t + 1, \\ z = 5t - 1. \end{cases}$$

Подставим $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в уравнение плоскости $x + 2y - z - 7 = 0$:

$$3t - 2 + 2(2t + 1) - (5t - 1) - 7 = 0$$

$$3t - 2 + 4t + 2 - 5t + 1 - 7 = 0$$

$$2t - 6 = 0, \quad t = 3.$$

Найдем координаты точки пересечения

$$x = 3 \cdot 3 - 2 = 7,$$

$$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$z = 5 \cdot 3 - 1 = 14.$$

5. Найти точку M' , симметричную точке $M(-1; 0; 3)$ относительно прямой $\frac{x-3}{5} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{-1}$.

Решение:

Вектор $\vec{S} = \{5; 2; -1\}$ параллелен прямой. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной вектору $\vec{S}$.

$$5(x - (-1)) + 2(y - 0) - (z - 3) = 0$$

$$5(x + 1) + 2y - z + 3 = 0$$

$$5x + 5 + 2y - z + 3 = 0$$

$$5x + 2y - z + 8 = 0.$$

Найдем точку A пересечения прямой и полученной плоскости.

Найдем параметрические уравнения прямой и подставим в уравнение плоскости

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{-1} = t$$

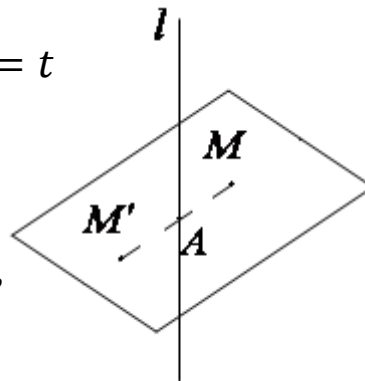
$$\begin{cases} x = 5t + 3, \\ y = 2t - 5, \\ z = -t. \end{cases}$$

$$5(5t + 3) + 2(2t - 5) - (-t) + 8 = 0,$$

$$25t + 15 + 4t - 10 + t + 8 = 0,$$

$$30t = -13,$$

$$t = -\frac{13}{30}.$$



$$x = 5 \cdot \left(-\frac{13}{30}\right) + 3 = \frac{-65 + 90}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6},$$

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{13}{30}\right) - 5 = \frac{-26 - 150}{30} = \frac{-176}{30},$$

$$z = \frac{13}{30}.$$

Точка $A\left(\frac{5}{6}; \frac{-176}{30}; \frac{13}{30}\right)$ является серединой отрезка $M'M$. Найдем координаты точки $M'(x'; y'; z')$.

$$\frac{x' + (-1)}{2} = \frac{5}{6}, \quad \frac{y' + 0}{2} = \frac{-176}{30}, \quad \frac{z' + 3}{2} = \frac{13}{30}.$$

$$x' = \frac{10}{6} + 1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}, \quad y' = \frac{-176}{15}, \quad z' = \frac{13}{15} - 3 = -\frac{32}{15}.$$

$$\text{То есть } M'\left(\frac{13}{30}, \frac{-176}{15}, \frac{-32}{15}\right).$$

6. Составить каноническое уравнение прямой проходящей через точку

$M(2; -1; 3)$ и параллельной вектору $\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$.

$$\text{Ответ: } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{-2}.$$

7. Найти угол между прямыми

$$L_1 \mid \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-2} \quad L_2 \mid \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-9} = \frac{z+7}{-6}$$

Ответ: $\arccos(36/77)$.

8. Даны точки $A(3; 1; 5)$, $B(7; -3; -2)$, $C(-1; 5; 3)$.

Найти: косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; площадь треугольника ABC ; уравнение прямой AB .

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 9; -4)$ перпендикулярно прямой (β) : $\frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

10. Найти направляющий вектор прямой:

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 12 \end{cases}$$

11. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A в треугольнике ABC , если $A(-4; 3)$, $B(2; 2)$, $C(-1; 5)$.

12. Найдите угол между прямыми:

$$\frac{X}{1} = \frac{Y-1}{-2} = \frac{Z}{3}; \quad \begin{cases} 3X + Y - 5Z + 1 = 0 \\ 2X + 3Y - 8Z + 3 = 0 \end{cases}$$

13. Найдите угол между прямой $\begin{cases} 3X - Y - Z + 5 = 0 \\ X - Y - Z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $4X - 8Y + Z - 3 = 0$.

14. Найдите точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3X - Y + 2Z - 5 = 0$.

15. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;1)$ перпендикулярно прямой $X = 5 - t; Y = 4t; Z = -2 + t$.

16. Покажите, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $X = 7 + 3t; Y = 2 + 2t; Z = 1 - 2t$ лежат в одной плоскости и найдите её уравнение.

17. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямые и найдите расстояние между ними:

$$\begin{cases} X = 2 + 3t \\ Y = -1 + 4t; \\ Z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} X = 7 + 3t \\ Y = 1 + 4t \\ Z = 3 + 2t \end{cases}$$

18. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. $A_1(1;2;1)$, $A_2(3;-1;7)$, $A_3(0;-3;5)$, $A_4(7;4;-2)$. Составить: уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; уравнение плоскости, которая проходит через точку A_4 параллельно плоскости $A_1A_2A_3$; найти угол между прямыми A_1A_4 и A_2A_3 ; найти угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; высоту пирамиды, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$.

Самостоятельная работа

1. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. $A_1(1;3;0)$, $A_2(3;-1;4)$, $A_3(-2;5;6)$, $A_4(0;4;-2)$. Составить: уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; уравнение плоскости, которая проходит через точку A_4 параллельно плоскости $A_1A_2A_3$; найти угол между прямыми A_1A_4 и A_2A_3 ; найти угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; высоту пирамиды, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$.

2. Доказать, что прямая $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -4t + 1 \\ z = 4t - 5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

3. Доказать, что прямая $\begin{cases} x = 12t + 2 \\ y = -6t - 3 \\ z = -10t - 5 \end{cases}$ перпендикулярна плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$

4. Даны точки $A(-4;-4;1)$ $B(-3;-2;3)$ $C(0;-1;1)$.

Найти: Уравнение плоскости ABC .

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1;-3)$ перпендикулярно плоскости $(\alpha): 2x - 4y + 7z - 2 = 0$

6. Найти направляющий вектор прямой:
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 2 \\ x - 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

7. Даны четыре точки в трехмерном пространстве A, B, C, D . Показать, что они могут являться вершинами пирамиды.

Найти:

а) объем пирамиды;

б) уравнение плоскости ABC ;

в) длину ребра AD ;

г) угол между ребром AD и гранью ABC ;

д) площадь грани ABD . Пусть A_1, B_1, C_1 есть проекции точек A, B, C на плоскость xOy .

Найти:

е) длину высоты A_1K ;

ж) угол между высотой A_1K и медианой A_1N треугольника $A_1B_1C_1$.

7.1 $A(1; 3; 0); B(3; -1; 4); C(-2; 5; -6); D(0; 4; 2)$.

7.2 $A(3; 1; 4); B(-1; 6; 1); C(-1; 1; 6); D(0; 4; -1)$.

7.3 $A(-4; -2; 0); B(-1; -2; 4); C(3; 1; -2); D(3; 2; 1)$.

7.4 $A(3; 2; -3); B(5; 1; -1); C(2; -1; 0); D(1; -2; 1)$.

7.5 $A(1; 2; 1); B(3; -1; 7); C(0; -3; 5); D(7; 4; -2)$.

8. Написать канонические уравнения прямой в пространстве по заданным общим уравнениям (прямая задана как пересечение двух плоскостей).

8.1 $2x + y + z - 2 = 0, \quad 2x - y - 3z + 6 = 0$.

8.2 $x - 3y + 2z + 2 = 0, \quad x + 3y + z + 14 = 0$.

8.3 $x - 2y + z - 4 = 0, \quad 2x + 2y - z - 8 = 0$.

8.4 $x + y + z - 2 = 0, \quad x - y - 2z + 2 = 0$.

8.5 $2x + 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0$.

9. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

9.1 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad x + 2y + 3z - 14 = 0$.

9.2 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad x + 2y - 5z + 20 = 0$.

9.3 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad x - 3y + 7z - 24 = 0$.

10. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой.

10.1 $M(0; -3; -2), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$.

$$10.2 \text{ M}(2; -1; 1), \quad \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

$$10.3 \text{ M}(1; 1; 1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

11. Найти точку M' , симметричную точке M относительно плоскости.

$$11.1 \text{ M}(1; 0; 1), \quad 4x + 6y + 4z - 25 = 0.$$

$$11.2 \text{ M}(-1; 0; -1), \quad 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$$

$$11.3 \text{ M}(0; 2; 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$$

12. Написать уравнение плоскости, если:

а) она проходит через точку $M(2, 1, -1)$ и имеет вектор нормали $\vec{n} = (1, -2, 3)$;

б) она проходит через начало координат и имеет вектор нормали $\vec{n} = (5; 0; -3)$;

в) она проходит через точку M_1 и перпендикулярно вектору M_1M_2 , если $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$;

г) она проходит через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (3; 1; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 1)$;

д) она проходит через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$;

е) она проходит через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

13. Установить взаимное расположение плоскостей в пространстве:

$$\text{а) } 2x - 3y + 5z - 7 = 0, \quad 2x - 6y + 5z + 6 = 0,$$

$$\text{б) } 2x + 2y - 4z - 5 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0,$$

$$\text{в) } 3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0,$$

$$\text{г) } x - 3z + 2 = 0, \quad 2x - 6z - 7 = 0,$$

$$\text{д) } 2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - z + 5 = 0,$$

$$\text{е) } 2x - 5y + z = 0, \quad x + 2z - 3 = 0.$$

14. Найти расстояние между точкой и плоскостью:

$$\text{а) } M(2; 3; -4); \quad 3x - 4y + 5z - 2 = 0,$$

$$\text{б) } M(0; -3; -4), \quad y - 4z + 2 = 0,$$

$$\text{в) } M(-4; 0; -2), \quad x - 7z = 7,$$

$$\text{г) } M(-2; -5; 2), \quad x + 5z - 3y = 4.$$

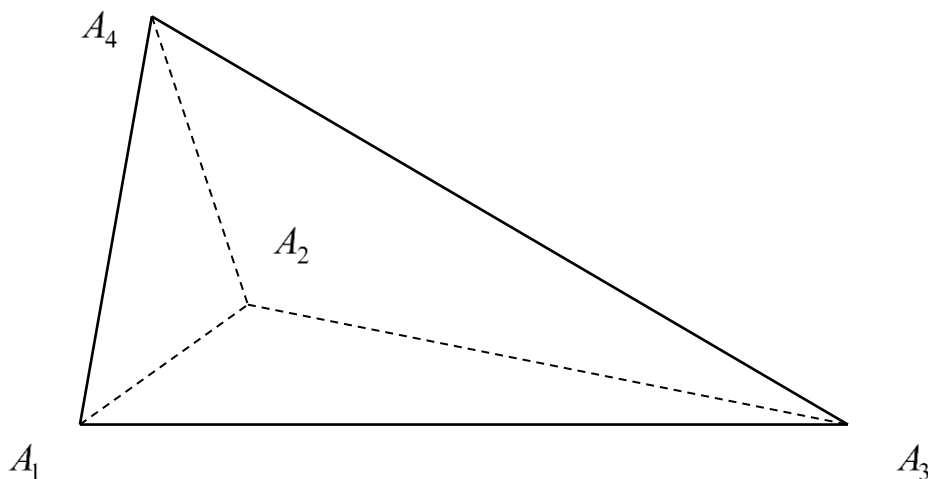
15. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

$$\text{а) } x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \quad x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0,$$

$$\text{б) } 6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0,$$

в) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0,$
 г) $x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$

16. Даны вершины A_1, A_2, A_3, A_4 пирамиды в трёхмерном пространстве



а) Определить систему неравенств, определяющих множество внутренних точек пирамиды.

б) Вычислить двухгранный угол между гранями пирамиды $A_1 A_2 A_3$ и $A_1 A_2 A_4$.

в) Написать уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$.

г) Вычислить объём пирамиды, используя понятие смешанного произведения векторов.

д) Найти координаты векторного произведения двух векторов $A_1 A_3$ и $A_1 A_4$.

е) Найти точку пересечения двух любых медиан треугольника $A_1 A_2 A_3$.

16.1. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3; \quad A_1(3; 2; 4), \quad A_2(-1; -6; 1),$
 $A_3(0; 4; 2), \quad A_4(1; 1; 0).$

16.2. $y^2 - 8y - 4x = 0; \quad A_1(1; -2; 3), \quad A_2(3; 0; -1),$
 $A_3(1; 3; 4), \quad A_4(2; 6; 0).$

16.3. $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24; \quad A_1(2; -2; 0),$
 $A_2(-1; 3; 0), \quad A_3(1; -3; 1), \quad A_4(1; -1; 6).$

16.4. $x^2 + 6x + 5 = 2y; \quad A_1(1; 1; 1), \quad A_2(-2; 0; 2),$
 $A_3(2; 1; -2), \quad A_4(0; 3; 4).$

16.5. $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y = -13$; $A_1(2; 0; 1)$,
 $A_2(-1; 2; -1)$, $A_3(-1; 0; 1)$, $A_4(-2; 2; 4)$.

16.6. $x^2 - y^2 + 6x + 4y = 4$; $A_1(-1; 1; 0)$, $A_2(0; 1; 3)$,
 $A_3(1; 4; 5)$, $A_4(0; 2; 6)$.

16.7. $y^2 + 6x^2 + 4y = 2x$; $A_1(0; 1; 2)$, $A_2(5; 4; 0)$, $A_3(2; 0; 4)$,
 $A_4(7; 3; 1)$.

16.8. $x^2 - 10x - 4y = -13$; $A_1(-2; 3; 3)$, $A_2(1; -3; 1)$,
 $A_3(0; 2; -2)$, $A_4(3; 4; 5)$.

17. Построить плоскости: $4x + 3y + 6z - 24 = 0$; $x - z = 0$;
 $x + z - 1 = 0$; $x = 0$; $y = 4$; $z = 5$.

18. Записать уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно вектору $\vec{N}$ через точку M :

а) $\vec{N} = (2; -3; 5)$, $M(1; 4; -1)$,

б) $\vec{N} = (1; 0; -2)$, $M(0; 3; -4)$.

19. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1; -2; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; 4; 0)$.

20. Найти угол между плоскостями $\Pi_1: 2x - 3y + z - 5 = 0$ и $\Pi_2: x + 4y - 2z + 1 = 0$

21. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M в направлении вектора $\vec{s}$:

а) $M(-5; 2; 0)$, $\vec{s} = (1; 3; -2)$,

б) $M(6; 0; -1)$, $\vec{s} = (-1; 0; 5)$.

22. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки: $M_1(3; -1; 4)$ и $M_2(-1; 2; 5)$.

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -4)$ перпендикулярно плоскости $\Pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$

24. Записать уравнение плоскости Π , проходящей через точку $A(2; 1; -3)$ перпендикулярно прямой



$$l: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$$

25. Найти угол между прямой $l: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$ и плоскостью $x + 4y - 2z + 1 = 0$

26. Даны четыре точки $A_1(1; 0; -2)$, $A_2(3; 2; 0)$, $A_3(0; -3; 4)$, $A_4(5; -1; 1)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2 ;

в) прямой A_4M , проходящей через т. A_4 , перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;

д) плоскости, проходящей через т. A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

е) угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) угол между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$

27. Заданы вершины пирамиды:

$A_1(1; 3; 6)$, $A_2(3; 0; 4)$, $A_3(-2; 5; 0)$, $A_4(0; 4; -2)$.

Найти:

1) объем;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$,

3) уравнение прямой (A_1A_2),

4) уравнение перпендикуляра (A_4H) к $A_1A_2A_3$